Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

Trabajo Final de Grado

GRADO DE MATEMÁTICAS

Teorías de la justicia social

Paula Checchia Adell

Director: Dr. Javier Martínez de Albéniz Salas
Dept. de Matemàtica Econòmica,
Financera i Actuarial

Barcelona, Junio 2021

Resumen

El propósito de este trabajo es estudiar el formalismo matemático que hay detrás de la toma de decisiones justas en una sociedad. Partiendo de las preferencias individuales sobre un conjunto de alternativas, estudiamos cómo debe ser una función de bienestar social que, teniendo en cuenta una serie de requisitos de justicia, proporcione una elección colectiva. Bajo un conjunto de condiciones muy generales, y sin hacer comparaciones interpersonales, se obtiene el Teorema de imposibilidad de Arrow. La modificación de estas condiciones permite lograr una preferencia social, la cual depende de los principios de justicia considerados. Nos centramos aquí en el principio de leximin, que busca el beneficio de aquellos individuos menos aventajados de la sociedad. Analizamos dos teorías de justicia social construidas a partir de este: la de Rawls [19], que se centra en la igualdad de bienes primarios y trabaja con las preferencias y las utilidades de los individuos; y la de Sen [28], que busca la igualdad de las capacidades y se basa en los funcionamientos. Para acabar vemos, a través del formalismo desarrollado por Herrero [13], la aplicación de la teoría de Sen al problema de la distribución de recursos.

Abstract

The aim of this work is to study the mathematical formalism behind fair decision-making in society. We study the properties of a social well-being function that acommodates individual preferences and meets a series of justice requirements. Arrow's impossibility Theorem is obtained under general conditions and without regarding interpersonal comparisons. It is by modifying those conditions that social preferences, which depend on the justice principles considered, are obtained. The focus of attention is the leximin principle, which seeks the benefit of the least advantaged members of society. Two social justice theories based on this principle are analyzed: Rawl's theory [19], centered on the equality of primary goods and dealing with the preferences and utilities of individuals; and Sen's theory [28], which is concerned with equality of the capabilities and works with functionings. Finally, through Herrero's formalism [13], we see the application of Sen's theory in the resource allocation problem.

2020 Mathematics Subject Classification. 91B06, 91B08, 91B14, 91B15, 91B16, 91B32

Agradecimientos

Me gustaría agradecer a mi tutor, el Dr. Javier Martínez de Albéniz Salas, el haberme guiado y aconsejado con tanto entusiasmo a lo largo de todo el trabajo. También darle las gracias por su completa disponibilidad siempre que lo he necesitado y por descubrirme algunas posibles salidas laborales que me permitirían aplicar mis conocimientos en matemáticas al ámbito social.

Quiero agradecer a mi familia el haberme brindado la oportunidad de estudiar aquello que quería, apoyándome y confiando en mi incondicionalmente durante todo este tiempo.

Y, sobre todo, quiero dar las gracias a mis amigos de la carrera por haber hecho de estos años una experiencia única. Sin su ayuda, paciencia y cariño, nada hubiera sido igual.

«No hay desierto como vivir sin amigos: la amistad multiplica los bienes y reparte los males.» («Oráculo manual y arte de prudencia»).

Baltasar Gracián (1601-1658)

Índice general

Introducción

La teoría de la elección social estudia la toma de decisiones colectivas. Dado un conjunto de posibles alternativas y, partiendo de las preferencias que cada individuo de una sociedad tiene sobre este conjunto, se analizan los mecanismos para la obtención de una elección social. Cualquier mecanismo de este tipo considera una serie de condiciones e ignora otras; es precisamente la información utilizada (y la no utilizada) lo que marca la diferencia entre unos y otros y nos indica cuales son las motivaciones, preocupaciones y propósitos, entre otras cosas, que persigue la sociedad [3].

El origen de la teoría de la elección social se remonta a la Antigüedad. En el momento en el que los individuos empiezan a agruparse en sociedad, estos deben hacer frente a la toma de decisiones por una causa común; buscar algún método que les permita alcanzar una elección colectiva se convierte en una necesidad. Así pues, encontramos los primeros indicios de esta teoría en los textos *Política* y *Economía*, de Aristóteles y Rautilya respectivamente, en el siglo IV a.C. No obstante, es con Borda (1781), Condorcet (1785) y Black (1948) cuando empieza a desarrollarse la teoría tal y como la conocemos ahora. Black introduce la condición de las preferencias "single-peaked", a partir de la cual se deriva el primer teorema que permite obtener una elección social bajo unos mínimos de justicia.
Más allá de las diferencias entre los mecanismos de decisión debidas al tipo de preferencias que se permitan, estos dependen también del tipo de justicia que se busque. Así pues, surgen diversas teorías de la justicia social que proponen mecanismos de elección social diferentes. Por ejemplo, Bentham (1781) defiende que las preferencias sociales deben ser aquellas que proporcionen "la mayor felicidad para el mayor número de personas"; esta corriente de pensamiento se conoce como utilitarismo. Más tarde, Pareto (1906) introduce el principio que lleva su nombre, según el cual un cambio de un estado social a otro es bueno si al menos un individuo está mejor en el nuevo estado que en el anterior y no empeora la situación de ningún otro individuo. Pese a que es muy complicado aplicar este principio a la vida real, Pareto marca el inicio de la "nueva economía del bienestar", en la cual empiezan a jugar un papel importante las comparaciones interpersonales.
Se introduce así, a manos de Bergson (1938) y Samuelson (1947), la función de bienestar social como herramienta para agregar las preferencias individuales atendiendo a una serie de principios "éticos". Es en este contexto que Arrow[2] publica su libro *Social Choice and Individual Values* (1951) [1], pionero en la axiomatización y formalización de la teoría de la elección social. Este texto constituye la base de la teoría moderna de la elección social; en él se encuentra el famoso Teorema de imposibilidad de Arrow.
Uno de los trabajos más importantes en el ámbito de la justicia social es *A Theory of Justice* (1971) [19] de Rawls. Este defiende la elección de aquellas alternativas que distri-

[2]Kenneth Joseph Arrow (1921 - 2017) fue galardonado en el 1972, junto con John Hicks, con el Premio Nobel de Economía por sus contribuciones en este campo, en especial por su Teorema de imposibilidad.

buyen los bienes primarios de forma equitativa entre todos los individuos de la sociedad, siendo las únicas desigualdades permitidas aquellas en beneficio de los individuos menos favorecidos.

Las teorías de la justicia social más recientes se basan en los conceptos de funcionamientos y capacidades; estos surgen a manos de Aristóteles en *Política*. Este afirma que la principal preocupación de los políticos debe ser la distribución de los recursos disponibles entre los ciudadanos de forma que todos puedan tener una "buena vida" [2]. Aristóteles pone el foco, no en los recursos por si mismos, sino en la "capacidad para funcionar" que estos proporcionan, representando así los funcionamientos todo lo que una persona puede lograr. Ahora bien, según él, una buena vida no se basa solo en lograr ciertos objetivos, como estar bien nutrido o tener una casa, sino también en la posibilidad de elegir libremente entre varias opciones de vida. La igualdad consiste, por tanto, en que todos los individuos puedan escoger entre las mismas oportunidades; este enfoque se encuentra explicado, por el mismo Aristóteles, en *Ética a Nicómaco* (S.IV a.C.). Karl Marx (1844) [15] recupera estas ideas y especifica qué se entiende por libertad de elección. Desde su punto de vista, la libertad que un individuo tiene para elegir un tipo de vida u otro está limitada, no tanto por la prohibiciones impuestas por la sociedad, sino por lo qué en realidad esa persona es capaz de lograr atendiendo a todos los factores existentes (estado de salud, capacidad intelectual, bienes disponibles...). El conjunto de todas las cosas que un individuo puede alcanzar en este sentido es lo que se conoce como su capacidad. Por tanto, una mayor capacidad se traduce en mejores condiciones de vida, dado que es posible elegir entre más opciones. Es sobre estas ideas que Amartya Sen[3] construye su teoría de justicia social en el *Tanner Lectures* (1980) [26]. Roemer (1996) [21] y Herrero (1996) [13] desarrollan también sus trabajos en esta línea, centrándose en la relación existente entre los bienes y las capacidades. En particular, Herrero trata el problema de las distribuciones de bienes justas bajo los principios de Rawls.
Este marco de trabajo basado en las capacidades es de gran importancia ya que ha permitido tratar el bienestar y la desigualdad, y por tanto varios problemas sociales, bajo una perspectiva mucho más amplia. Rowntree, en *Poverty: A study of Town Life* (1901) [22], defiende que no se debe considerar la pobreza solo en términos de falta de bienes, sino que se debe pensar en varias líneas de pobreza que atiendan a diferentes aspectos. Se comienza a considerar entonces la pobreza como un problema de naturaleza multidimensional; la formalización de este enfoque viene dada por Bourguignon y Chakravarty (2003) [7]. La necesidad de afrontar el problema de la pobreza desde esta perspectiva es debida, según Sen, a dos factores principales: en primer lugar, hablar solo de privación de bienes es restringir mucho el concepto en sí de pobreza y, en segundo lugar, no todos los individuos tiene la misma habilidad para convertir los recursos en funcionamientos. Así pues, Sen (1983) [27] afirma que la pobreza es relativa bajo el punto de vista de los bienes materiales pero absoluta bajo el punto de vista de las capacidades. Una aplicación práctica muy conocida de estos conceptos es la creación del índice de desarrollo humano (IDH) por el Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo (PNUD). El IDH clasifica a los diferentes países según una medición sobre tres tipos de funcionamientos: la esperanza de vida, la educación y los ingresos. Este indicador considera el desarrollo desde un punto de vista multidimensional basado en los funcionamientos. A lo largo del tiempo se ha ido evolucionando hacia teorías que engloban cada vez más factores a la hora de determinar lo que es justo y lo que no.

[3] Amartya Kumar Sen (1933) fue galardonado con el Premio Nobel de Economía por sus trabajos sobre el bienestar social. Galardonado también con el Premio Princesa de Asturias de Ciencias Sociales en el 2021.

Estructura del trabajo

En el primer capítulo, hacemos una pequeña introducción a la teoría de la elección social, asentando el formalismo que se utiliza a lo largo de todo el trabajo. Introducimos, principalmente, las relaciones de preferencia de un individuo sobre un conjunto de alternativas y las funciones de utilidad asociadas a estas. Consideramos que no se comparan las preferencias de los distintos individuos y proporcionamos una serie de condiciones básicas de justicia que se busca que cumpla el mecanismo de elección social. Exponemos así el primer resultado importante del trabajo, el Teorema de imposibilidad de Arrow.

En el segundo capítulo, modificamos las condiciones consideradas en el capítulo anterior a fin de poder hacer comparaciones interpersonales y obtener una función de bienestar social que satisfaga unos mínimos de justicia. Explicamos dos de los principios de justicia más importantes en este ámbito, el utilitarismo y el principio de leximin de Rawls, y el tipo de elecciones derivadas de ellos; nos centramos mayoritariamente en el segundo.

En el tercer capítulo, abordamos la teoría de justicia social desarrollada por Rawls pero con un nuevo enfoque, el de las capacidades y los funcionamientos. Introducimos, por tanto, un nuevo formalismo que nos permita trabajar con estas nociones. Por último, estudiamos el problema de las distribuciones de recursos justas desde este punto de vista, siguiendo para ello el trabajo de Herrero.

Capítulo 1

Bases y principios de la teoría de la elección social

En este capítulo se recogen aquellas nociones que serán de utilidad durante el resto del trabajo. En especial, vamos a desarrollar el formalismo, las definiciones y los resultados que conforman las bases de la teoría de la elección social. Para esta primera toma de contacto con el tema que queremos desarrollar hemos seguido, principalmente, los manuales de Gaertner (2009) [10], Mas-Colell et al. (1995) [16] y el trabajo de Arnau Murillo (2020) [18]. Puesto que este es un capítulo introductorio, cuya única finalidad es dotar al lector del formalismo básico de la teoría de la elección social, proporcionamos las referencias a las demostraciones de las proposiciones y los teoremas enunciados.

La teoría de la elección social se preocupa del análisis, así como del desarrollo de métodos, de la toma de decisiones colectivas. Esta teoría parte de las preferencias de cada uno de los individuos de una sociedad para intentar alcanzar una relación de preferencia colectiva que proporcione un estado de bienestar social.

1.1. Conjunto de alternativas y relaciones de preferencia

Denotamos por $X = \{a, b, c, \ldots\}$ al conjunto de las posibles, mutuamente excluyentes, alternativas entre las que un individuo puede elegir. Para representar las preferencias sobre el conjunto de las posibles alternativas introducimos una relación de preferencia, a la cual denotamos por R. La relación binaria R es un subconjunto de pares ordenados sobre el producto $X \times X$. En adelante, si $(a, b) \in X \times X$ pertenece a R, escribimos aRb para decir que "la alternativa a es como mínimo tan buena como la alternativa b".
A partir de R, podemos derivar otras dos relaciones de preferencia: sean $a, b \in X$, decimos que "a es estrictamente preferida a b", y lo escribimos como aPb, si y solo si, aRb y no se tiene bRa ; decimos que "a es indiferente a b", y escribimos en este caso aIb, si y solo si, aRb y bRa.

Definición 1.1. Una relación de preferencia R sobre X es *racional* si, $\forall\, a, b, c \in X$, es:

i) *reflexiva*: aRa;

ii) *transitiva*: si aRb y bRc, entonces aRc;

iii) *completa*: $\forall\, a, b \in X$ se cumple que aRb o bRa.

Una relación de preferencia R que cumple estas propiedades se llama *orden de preferencia*. Estas propiedades, en cierto modo, nos indican que los individuos son racionales y tienen preferencias bien definidas. Nos interesa, por tanto, tratar con este tipo de relaciones. Si R es un orden de preferencia, la relación P es irreflexiva y transitiva y la relación I es reflexiva, simétrica y transitiva. Notamos que X, con la relación de preferencia racional R, es un conjunto totalmente ordenado. Por último, de cara al desarrollo del próximo apartado, damos la definición de *relación de preferencia continua*.

Dado $a \in X$, escribimos Ra para representar al conjunto de las alternativas que son "como mínimo tan buenas como a",

$$Ra = \{b \in X \; : \; bRa\};$$

del mismo modo, aR representa al conjunto de las alternativas que "no son mejores que a",

$$aR = \{b \in X \; : \; aRb\}.$$

Definición 1.2. Una relación de preferencia R sobre X es continua si los conjuntos aR y Ra son cerrados en X.

Que Ra sea cerrado nos dice que, si tenemos un sucesión de alternativas $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en X que tiende a b_0, tal que b_k es como mínimo tan buena como $a \in X$ ($\forall\, k \in \mathbb{N}$); entonces, b_0 es como mínimo tan buena como a (para aR es análogo). Esta definición es necesaria para poder enunciar, en la siguiente sección, el Teorema 1.1.

1.2. Funciones de utilidad

Una forma muy útil de describir las relaciones de preferencia es a través de lo que denominamos funciones de utilidad. Una función de utilidad $u(x)$ asigna un valor numérico a cada alternativa del conjunto X, dando una idea del "grado de satisfacción" que proporciona cada una de ellas.

Definición 1.3. Sea R una relación de preferencia sobre el conjunto de alternativas X. Una función $u : X \to \mathbb{R}$ es una *función de utilidad que representa a* R si, $\forall\, a, b \in X$, se cumple que

$$aRb \Longleftrightarrow u(a) \geq u(b).$$

Notamos que la función de utilidad que representa a R no es única. Para cualquier función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, estrictamente creciente en el conjunto de valores tomados por u, la función $v(x)$ de la forma $v(x) = f(u(x))$ es una nueva función de utilidad que también representa a R.

Una relación de preferencia puede ser representada por una función de utilidad solo si es un orden de preferencia. Ahora bien, no todo orden de preferencia puede ser representado por una función de utilidad (en el caso en que el conjunto X no sea numerable podemos tener problemas). El teorema que enunciamos a continuación nos asegura bajo ciertas condiciones, que consideramos que cumple el conjunto X en este trabajo, la existencia de una función de utilidad continua representando un orden de preferencia.

Decimos que un espacio topológico X es *separable* si contiene un subconjunto numerable E cuya clausura es X.[1] Un espacio topológico X es *conexo* si no se puede separar en dos conjuntos no-vacíos, disjuntos y cerrados.

Teorema 1.1. *Sea X un espacio topológico completamente ordenado, separable y conexo. Si R es un orden de preferencia continuo en X; entonces, existe una función de utilidad continua u que representa a R.*

Demostración. Encontramos este resultado en Debreu (1954) [9]. □

1.3. Estructuras de elección

Otra manera de formalizar los mecanismos de elección de los individuos es a través de las denominadas estructuras de elección.

Definición 1.4. Sea X un conjunto de alternativas. Una *estructura de elección* $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ consiste en:

i) una familia $\mathscr{B}$ de subconjuntos no-vacíos de X y

ii) una función $C(\cdot)$ de la forma $C : \mathscr{B} \to \mathscr{B}$ tal que $C(B) \subset B$, $\forall\, B \in \mathscr{B}$. La función $C(\cdot)$ es conocida como *regla de elección* y proporciona un conjunto de elementos elegidos para cada subconjunto de alternativas $B \in \mathscr{B}$.

Cuando utilizamos estas estructuras para describir las elecciones individuales, podemos imponer algunas restricciones razonables de cara a que estas elecciones sean coherentes.

Definición 1.5. Una estructura de elección $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ satisface el *axioma débil de la preferencia revelada* si se cumple la siguiente propiedad: si para algún elemento $B \in \mathscr{B}$, con $a, b \in B$, tenemos que $a \in C(B)$; entonces, para cualquier $B' \in \mathscr{B}$, con $a, b \in B'$ y $b \in C(B')$, se tiene que $a \in C(B')$.

Queremos relacionar ahora las estructuras de elección aquí definidas con las relaciones de preferencia estudiadas en la sección 1.1. Dada una estructura de elección podemos definir una relación de preferencia asociada a esta, a la cual denominamos relación de preferencia revelada.

Definición 1.6. Dada una estructura de elección $(\mathscr{B}, C(\cdot))$, la *relación de preferencia revelada* R^* asociada a $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ se define por: sean $a, b \in X$,

$$aR^*b \Longleftrightarrow \exists\, B \in \mathscr{B} \text{ tal que } a, b \in B \text{ y } a \in C(B).$$

Notamos que esta relación puede no ser racional. Estudiamos ahora dos cuestiones importantes respecto a la asociación entre las estructuras de elección y las relaciones de preferencia. En primer lugar, queremos saber si una relación de preferencia racional define

[1] La clausura de E es el conjunto:

$$\bar{E} = \{x \in X : \forall\, B(x), B(x) \cap E \neq \emptyset\},$$

donde $B(x)$ es un entorno de x.

una estructura de elección que satisfaga el axioma débil de la preferencia revelada. Dados una relación de preferencia racional R en X y un subconjunto $B \subseteq X$, definimos:

$$C^*(B, R) := \{a \in B : aRb \quad \forall\, b \in B\}.$$

Si suponemos que X es finito, o que R es continua, podemos asegurar que $C^*(B, R) \neq \emptyset$. Consideraremos, por tanto, que $C^*(B, R)$ es no vacío $\forall\, B \in \mathscr{B}$ y decimos que $(\mathscr{B}, C^*(\cdot, R))$ es la *estructura de elección generada por R*.

Proposición 1.1. *Sea R una relación de preferencia racional sobre X. Entonces, la estructura de elección $(\mathscr{B}, C^*(\cdot, R))$ generada por R satisface el axioma débil de la preferencia revelada.*

Demostración. Se encuentra la demostración en el texto de Mas-Colell et al. (1995) [16]. □

En segundo lugar, queremos ver bajo qué condiciones, dada una estructura de elección que satisfaga el axioma débil de la preferencia revelada, la relación de preferencia revelada es racional.

Definición 1.7. Sea $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ una estructura de elección en X y R una relación de preferencia racional, decimos que R racionaliza $C(\cdot)$ con respecto a $\mathscr{B}$ si

$$C(B) = C^*(B, R) \qquad \forall\, B \in \mathscr{B}.$$

Notamos que R genera la estructura de elección por lo que, por la Proposición 1.1, esta tiene que cumplir el axioma débil de la preferencia revelada. En consecuencia, solo las estructuras que satisfacen este axioma pueden ser racionalizadas. Además, tenemos la siguiente proposición (ver texto de Mas-Colell et al. (1995) [16]):

Proposición 1.2. *Sea $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ una estructura de elección en X tal que*

i) $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ satisface el axioma débil de la preferencia revelada y

ii) $\mathscr{B}$ contiene todos los subconjuntos de X de hasta tres elementos;

entonces, existe una relación de preferencia racional R que racionaliza la estructura de elección $(\mathscr{B}, C(\cdot))$; de hecho, esta R es única.

Observamos que, si tenemos una estructura $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ como la descrita en la Proposición 1.2, la relación R que racionaliza dicha estructura es la relación de preferencia revelada asociada a $(\mathscr{B}, C(\cdot))$. Sean $a, b \in X$, una de las implicaciones de la definición de relación de preferencia revelada es directa ya que, si $\exists\, B \in \mathscr{B}$ tal que $a, b \in B$ y $a \in C(B)$; entonces, $a \in C^*(B, R)$ y tenemos que aRb. Para la otra implicación tenemos que, si aRb, el conjunto $B_1 = \{a, b\}$ pertenece a $\mathscr{B}$ por contener solamente dos elementos; por tanto, $\exists\, B = B_1 \in \mathscr{B}$ tal que $a, b \in B$ y $a \in C(B)$.

Hemos visto, por un lado, que una relación de preferencia racional siempre genera una estructura de elección que satisface el axioma débil de la preferencia revelada y, por otro lado, las propiedades que ha de tener una estructura de elección para que la relación de preferencia revelada asociada sea racional.

1.4. Teorema de imposibilidad de Arrow

Nos situamos ahora en el marco en que, en lugar de un solo individuo, tenemos un conjunto de individuos que conforman una sociedad. Queremos determinar si existe alguna forma de agregar las preferencias de cada uno de ellos, sobre un conjunto de alternativas, para obtener una alternativa que sea la elegida por dicha sociedad.

Sea $X = \{a, b, c, \ldots\}$ el conjunto de las posibles, mutuamente excluyentes, alternativas entre las que los individuos pueden elegir. Denotamos por $N = \{1, \ldots , n\}$ al conjunto, finito, de los individuos que consideramos ($n \geq 2$) y suponemos que cada individuo $i \in N$ tiene su propio orden de preferencia sobre X, al cual denotamos por R^i. Ahora se utiliza R para designar al orden de preferencia del conjunto de la sociedad, el *orden de preferencia social*.

Denotamos por $\mathcal{E}$ al conjunto de los órdenes de preferencia sobre X, por $\mathcal{E}'$ a un subconjunto de $\mathcal{E}$ que satisface alguna restricción en particular y por $\mathcal{E}'^n$ al producto cartesiano $\mathcal{E}' \times \overset{n}{\ldots} \times \mathcal{E}'$. Observamos que un elemento de $\mathcal{E}'^n$ es una n-tupla, $(R^1, \ldots , R^n)$, que representa un *perfil de órdenes de preferencia* de una sociedad formada por n individuos. Arrow introduce la *función de bienestar social* como una aplicación f de $\mathcal{E}'^n$ en $\mathcal{E}$ tal que $R := f(R^1, \ldots , R^n)$. Es decir, una función de bienestar social recoge las preferencias de todos los individuos, sobre un conjunto de alternativas dado, y proporciona un orden de preferencia social sobre estas mismas alternativas. El propósito es determinar si existe una función como la descrita que cumpla una serie de condiciones que, según Arrow, debe satisfacer cualquier función de bienestar social. Dichas condiciones son:

> **Condición U (Dominio universal)**. El dominio de f incluye todas las posibles n-tuplas de órdenes de preferencia en X es decir, el dominio de f es $\mathcal{E}^n$.
>
> **Condición P (Principio débil de Pareto)**. Sean dos alternativas cualesquiera $a, b \in X$ si, $\forall\, i \in N$, aP^ib; entonces, aPb.
>
> **Condición I (Independencia de las alternativas irrelevantes)**. Dados dos perfiles de órdenes de preferencia $(R^1_1, \ldots , R^n_1)$ y $(R^1_2, \ldots , R^n_2)$, si para algún par de alternativas $a, b \in X$ y $\forall\, i \in N$ se tiene que $aR^i_1b \Leftrightarrow aR^i_2b$ y $bR^i_1a \Leftrightarrow bR^i_2a$; entonces, $aR_1b \Leftrightarrow aR_2b$ y $bR_1a \Leftrightarrow bR_2a$.
>
> **Condición D (No hay un dictador)**. No existe ningún individuo $i \in N$ tal que, para todo perfil de órdenes de preferencia y $\forall\, a, b \in X$, si aP^ib, entonces aPb.

Estas condiciones parecen necesarias si el objetivo es obtener una elección conjunta mínimamente justa; no obstante, Arrow (1951) [1] demuestra que son incompatibles. Este resultado se conoce como el teorema de imposibilidad de Arrow (ver Gaertner (2009) [10]).

Teorema 1.2 (**Teorema de imposibilidad de Arrow**). *Para un número finito de individuos, si $|X| \geq 3$, no existe ninguna función de bienestar social $f : \mathcal{E}^n \longrightarrow \mathcal{E}$ que cumpla las condiciones U, P, I y D.*

Existen diversas demostraciones de este teorema, en Gaertner (2009) [10] podemos encontrar tres que remarcan distintos aspectos del resultado. Una de ellas trata el problema, en lugar de con órdenes de preferencia, en términos de las funciones de utilidad. Sean R^i, $i \in N$, los órdenes de preferencia de los individuos de la sociedad, suponemos que estos son continuos. Sea $\mathcal{U}$ el conjunto de las funciones de utilidad y $u^i \in \mathcal{U}$, $i \in N$, las respectivas funciones de utilidad asociadas a los R^i; denotamos por $U = (u^1, \ldots, u^n)$ al *perfil de utilidades* de una sociedad formada por n individuos. Para las funciones de utilidad, aparte de las condiciones de Arrow enunciadas previamente, añadimos una nueva condición:

> **Condición ON (Medida ordinal, Utilidades no - comparables).** Sean dos perfiles de utilidad $U_1, U_2 \in \mathcal{U}^n$ y ϕ^i una función estrictamente creciente $\forall\, i \in N$. Si, $\forall\, i \in N$ y $\forall\, a \in X$, se cumple que $u_2^i(a) = \phi^i(u_1^i(a))$; entonces, $R_{U_1} = R_{U_2}$.[2]

El Teorema de imposibilidad de Arrow prueba que no existe una función de bienestar social $f(u^1, \ldots, u^n)$ que cumpla con las condiciones U, P, I, D y ON (ver Blackorby (1984) [6]).

Este resultado puede resultar chocante, ¿significa esto que no es posible decidir como sociedad sin caer en un sistema dictatorial? Vemos, en lo que sigue, que existen formas de hacerlo; el problema reside en que, los requisitos de Arrow para un función de bienestar social son muy restrictivos al no tener en cuenta comparaciones entre individuos, estamos considerando las preferencias de todos ellos de forma independiente.

Muchos economistas importantes, como el propio Arrow, Black o Sen, entre otros, empezaron a buscar reglas de elección social que escaparan de esta imposibilidad. Nos preguntamos, por tanto, qué condiciones básicas debe satisfacer una función de bienestar social que pueda ser aplicable a la vida real. Es natural pensar que dos condiciones necesarias sean el anonimato y la neutralidad de las alternativas (si hay una permutación de los nombres de las alternativas en las preferencias individuales, la misma permutación se tiene que dar en la preferencia social).

La mayoría simple y la mayoría absoluta, tal y como las definimos a continuación, son dos reglas de elección social que satisfacen estas condiciones y que están muy presentes en nuestro día a día. Sean $a, b \in X$ dos alternativas, denotamos por $N(aPb)$ al número de individuos para los cuales aP^ib $(i \in N)$ y por $|N|$ al número total de individuos que conforman la sociedad.

Definición 1.8 (Regla de la mayoría simple). Para todo perfil de órdenes de preferencia $(R^1, \ldots, R^n)$ y $\forall\, a, b \in X$, tenemos que

$$aRb \Longleftrightarrow N(aPb) \geq N(bPa).$$

Definición 1.9 (Regla de la mayoría absoluta). Para todo perfil de órdenes de preferencia $(R^1, \ldots, R^n)$ y $\forall\, a, b \in X$, tenemos que

$$aPb \Longleftrightarrow N(aPb) > \frac{1}{2} \cdot |N| \quad \text{y} \quad bPa \Longleftrightarrow N(bPa) > \frac{1}{2} \cdot |N|.$$

Puesto que las preferencias sociales se tienen que basar en las preferencias individuales, podemos pedir también que la regla de elección social sea sensible a los cambios en dichas preferencias individuales. Supongamos que a es un posible estado social y b es el *status quo* en el que se encuentra la sociedad. Diremos que una regla de elección social es más (respectivamente menos) sensible si hace que dicha sociedad se aleje del estado b con el apoyo de una fracción menor (respectivamente mayor) de individuos que prefieren estrictamente a a b. Cuando una regla de elección social es muy sensible a los cambios, decimos que tiene *sensibilidad positiva.* May (1952) [17] enuncia el siguiente teorema:

[2] R_{U_1} y R_{U_2} representan la relaciones de preferencia sociales que agregan los perfiles de utilidades U_1 y U_2, respectivamente.

Teorema 1.3 (**Caracterización de la mayoría simple**). *La regla de la mayoría simple es la única regla de elección social que satisface las condiciones de dominio universal, anonimato, neutralidad de las alternativas y sensibilidad positiva.*

Ahora bien, pedir que haya anonimato implica que no puede haber un dictador y la neutralidad es una condición más fuerte que la de independencia de Arrow; además, la mayoría simple cumple P. Sin embargo, esto no es un contraejemplo del Teorema de imposibilidad. La mayoría simple nos puede llevar a una relación de preferencia social que no sea transitiva, y esta es una propiedad necesaria para Arrow. Un ejemplo es la famosa *paradoja de Condorcet*, consideramos tres alternativas $a, b, c \in X$, tres individuos y el siguiente ciclo de preferencias:

$$aP^1bP^1c$$

$$bP^2cP^2a$$

$$cP^3aP^3b;$$

observamos que este ciclo nos lleva a la no-transitividad. Gehrlein (1983) [11] ve que la probabilidad de encontrarnos con un ciclo de estas características aumenta con el número de alternativas y de individuos.

No obstante, si las preferencias de los individuos fueran "single-peaked", no se tendría este problema. Las preferencias "single-peaked" son aquellas en las que, tal y como su nombre indica, hay un pico de preferencia. Es decir, que entre el conjunto de posibles alternativas hay una que es, claramente, la más deseada por el individuo.
Vamos a formalizar esta noción, introducimos un *orden estricto* S en el conjunto de las alternativas X. Entonces, $\forall\, a, b \in X$ diferentes, tenemos que aSb o bSa y, $\forall\, a, b, c \in X$ diferentes, si aSb y bSc, entonces aSc.
Escribimos ahora $B(a, b, c)$ para hacer referencia a que, o bien aSb y bSc, o bien cSb y bSa. Evidentemente, si a, b y c son tres alternativas diferentes, se tiene una de estas opciones: $B(a, b, c)$, $B(a, c, b)$ o $B(b, a, c)$.

Condición del single-peaked. Un perfil de órdenes de preferencia $(R^1, \ldots, R^n)$ satisface la condición del "single-peaked" si existe un orden estricto S tal que, $\forall\, i \in N$, $\forall\, a, b, c \in X$, aR^ib y $B(a, b, c)$ implican bP^ic; donde $B(a, b, c)$ es la relación asociada a S definida arriba.

Es a manos de Black (1948) [5] que aparece el primer resultado por el cual es posible obtener una función de bienestar social como la deseada:

Teorema 1.4 (**Teorema de las preferencias single-peaked**). *Si el número de individuos no indiferentes respecto a todo par de alternativas es impar y los órdenes de preferencia individuales son "single-peaked" (sobre todo conjunto de tres alternativas); entonces, la regla de la mayoría simple es una función de bienestar social en el sentido de Arrow para cualquier número de alternativas.*

Demostración. Encontramos la demostración en Gaertner (2009) [10] . □

Si consideramos el caso contrario, en que en lugar de tener una preferencia que es la más deseada tenemos una preferencia que es la menos deseada, llegamos al mismo resultado.

Para acabar el capítulo, damos otra regla de elección interesante, propuesta por Sen (ver Sen (1969, 1970b) [23][24]):

Definición 1.10 (**Regla de Pareto extendida).** Para todo par de alternativas $a, b \in X$; tenemos que aRb si, y solo si, no se tiene lo siguiente: $bR^i a$, $\forall\, i \in N$, y $\exists\, j \in N$ tal que $bP^j a$.

Esta regla cumple con las condiciones U, P, I y D para cualquier conjunto finito de alternativas X. Ahora bien, la relación de preferencia asociada es quasi-transitiva, por lo que hemos debilitado una de las propiedades consideradas por Arrow.[3] Observamos, además, que esta regla tiene una peculiaridad que podría no resultar satisfactoria en muchos contextos: si un individuo tiene una preferencia estricta sobre un par de alternativas tenemos que, o bien socialmente hay indiferencia sobre dichas alternativas o, en el caso en que todos los miembros de la sociedad estén de acuerdo con este individuo, hay una preferencia estricta. Esto significa que una sola persona puede adquirir el "poder del veto", a esta persona se le conoce como *dictador débil.*

Estos son solo algunos ejemplos de reglas de elección social que surgen de debilitar algunos de los requisitos exigidos en un inicio por Arrow y que se siguen utilizando hoy en día en situaciones reales de toma de decisiones colectivas.

[3]Una relación R es *quasi-transitiva* si, y solo si, $\forall\, a, b, c \in X$, aPb y bPc implican aPc.

Capítulo 2

Justicia distributiva

El Teorema de imposibilidad de Arrow (enunciado en el *Social Choice and Individual Values* (1951) [1]) provocó una gran confusión entre los economistas del momento, dada la relevancia de lo que este implicaba. Se empezó a investigar así la posibilidad de obtener reglas de elección social, o bien partiendo de un conjunto de condiciones más reducido, o bien flexibilizando estas condiciones. De hecho, puesto que el resultado de Arrow depende fuertemente de la condición de no - comparabilidad entre las funciones de utilidad de distintos individuos, una relajación de esta condición abre un amplio abanico de posibilidades.

Se introducen pues nuevas condiciones de mensurabilidad, comparabilidad y justicia que proporcionan un marco de trabajo más flexible, en el cual se desarrollan algunas de las principales teorías de justicia distributiva, como el utilitarismo o la teoría de Rawls (1971) [19]. Se habla de justicia distributiva dado que, son precisamente los problemas relacionados con la distribución de bienes entre los individuos de una sociedad, los escenarios más habituales en los que se aplican estas teorías. Para el desarrollo de este tema seguimos mayoritariamente los textos de Blackorby (1984) [6], Gaertner (2009) [10] y D'Aspremont y Gevers (1997) [8].

2.1. Mensurabilidad, comparabilidad y justicia

En este capítulo queremos poder comparar las preferencias entre los individuos. Por lo tanto, vamos a definir una nueva relación de preferencia en el conjunto $X \times N$ que nos permita hacer declaraciones del tipo "es mejor, o peor, la alternativa a para el individuo i que la alternativa b para el individuo j".[1]

Denotamos por $\widetilde{R}$ la relación de preferencia racional definida en $X \times N$, seguimos utilizando la R para hacer referencia al orden de preferencia en X. Observamos que $\widetilde{R}$ y R se relacionan de la siguiente manera: sea $i \in N$ un individuo, $a, b \in X$, aR^ib es equivalente a $(a,i)\widetilde{R}(b,i)$. Sea $\mathcal{R}$ el conjunto de todos los posibles órdenes de preferencia en $X \times N$, el propósito es encontrar una función f de bienestar social que vaya del conjunto $\mathcal{R}$ al conjunto $\mathcal{E}$.[2]

Nos interesa, para el desarrollo que queremos llevar a cabo, suponer que la relación $\widetilde{R}$ es continua, de modo que podamos asociarle una función de utilidad (tal y como vimos

[1]Al igual que en el capítulo anterior, X es el conjunto de las alternativas y N el de los individuos.
[2]Recordemos que $\mathcal{E}$ es el conjunto de todos los órdenes de preferencia sobre X.

en la sección 1.2). Al igual que antes, denotamos por $\mathcal{U}$ al conjunto de la funciones de utilidad. Ahora, para cada $i \in N$, la función de utilidad asociada a R^i la representamos por $u(\cdot, i)$, en lugar de por u^i, a fin de hacer la notación más coherente con el nuevo orden introducido en $X \times N$. De esta forma, el perfil de utilidades de una sociedad formada por n individuos viene dado por $U = (u(\cdot, 1), \ldots, u(\cdot, n))$. Por lo tanto, la función de bienestar f, en términos de las funciones de utilidad, es una aplicación de $\mathcal{U}^n$ en $\mathcal{E}$.

En el capítulo anterior se considera solo el carácter ordinal de las funciones de utilidad, sin permitir la comparación entre individuos. En ese caso, lo que importa en la obtención de una preferencia social es el orden de preferencia que cada individuo tiene, por separado, sobre el conjunto de las alternativas; aplicar una transformación estrictamente creciente sobre una función de utilidad nos proporciona otra función de utilidad que aporta exactamente la misma información al conjunto que la original (esto se recoge en la **Condición** ON **(Medida ordinal, Utilidades no - comparables)** vista en la sección 1.4). Haciendo cambios en la condición ON, reducimos el conjunto de las transformaciones que mantienen la información que las funciones de utilidad proporcionan en la búsqueda de la preferencia social.

> **Condición** OC **(Medida ordinal, Utilidades comparables)**. Sean dos perfiles $U_1, U_2 \in \mathcal{U}^n$ y ϕ una función estrictamente creciente. Si, $\forall\, i \in N$ y $\forall\, a \in X$, se cumple que $u_2(a, i) = \phi(u_1(a, i))$; entonces, $R_{U_1} = R_{U_2}$.

En este caso, para obtener la misma preferencia social, se debe mantener la posición ordinal de las alternativas en comparación, no solo con las otras alternativas, sino también con el resto de individuos. Notamos entonces que se puede comparar entre los *niveles de utilidad* de los individuos ya que $u_1(a, i) \geq u_1(a, j) \iff \phi(u_1(a, i)) \geq \phi(u_1(a, j))$. Ahora bien, esta condición no nos permite la comparación interpersonal de los incrementos.

Introducimos ahora una medida cardinal de las funciones de utilidad, para ello seleccionamos un origen y una escala para las transformaciones.

> **Condición** CN **(Medida cardinal, Utilidades no - comparables)**. Sean dos perfiles $U_1, U_2 \in \mathcal{U}^n$ y sean $2n$ números reales $\alpha^1, \ldots, \alpha^n, \beta^1, \ldots, \beta^n$, de modo que $\beta^i > 0\ \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$. Si, $\forall\, i \in N$ y $\forall\, a \in X$, las funciones de utilidad cumplen que $u_2(a, i) = \alpha^i + \beta^i \cdot u_1(a, i)$; entonces, $R_{U_1} = R_{U_2}$.[3]

Observamos que cada individuo puede tener un origen y una escala de transformación distintas de los demás, por lo que no es posible comparar ni los niveles de utilidad ni las ganancias o pérdidas entre los individuos. Si pedimos que todos los α^i sean iguales, y lo mismo para los β^i, entonces sí que son posibles estas comparaciones.

> **Condición** CC **(Medida cardinal, Utilidades comparables)**. Sean $U_1, U_2 \in \mathcal{U}^n$ y sean α y $\beta > 0$ dos números reales. Si, $\forall\, i \in N$ y $\forall\, a \in X$, se cumple que $u_2(a, i) = \alpha + \beta \cdot u_1(a, i)$; entonces, $R_{U_1} = R_{U_2}$.

Esta es una gran reducción del conjunto de las transformaciones que aseguran la obtención del mismo orden de preferencia social; ahora bien, la información que podemos extraer de una función de bienestar social que cumpla este condición es más rica que

[3]Los valores de α^i pueden ser positivos, negativos o nulos.

con las demás condiciones. Notemos que también nos puede interesar pedir que todos los individuos tengan el mismo origen pero escalas diferentes (**Condición** CUC), en este caso podemos comparar los niveles de utilidad pero no los incrementos. Por otro lado, si pedimos que los orígenes sean distintos pero se tenga la misma escala (**Condición** CIC), es posible comparar los incrementos pero no los niveles de utilidad.

Si asumimos que se cumplen U, P, I y D del apartado 1.4, las seis posibles condiciones de mensurabilidad y comparabilidad se reducen a cuatro (Teoremas 1 y 2 del artículo de D'Aspremont y Gevers (1977) [8]): ON, OC, CC y CIC.

Para terminar esta sección, vamos a introducir las condiciones de justicia que, en el marco de trabajo en el que nos encontramos, se considera que debe cumplir una función de bienestar social:

Condición A **(Anonimato)**. Sean $U_1, U_2 \in \mathcal{U}^n$ y σ una permutación en el conjunto N. Si, $\forall\, i \in N$ y $\forall\, a \in X$, se cumple que $u_1(a,i) = u_2(a, \sigma(i))$; entonces, $R_{U_1} = R_{U_2}$.

Condición EP **(Principio estricto de Pareto)**. Sean $a, b \in X$ y $U \in \mathcal{U}^n$ tal que, $\forall\, i \in N$, se tiene $u(a,i) \geq u(b,i)$; entonces, aRb. Si, además, $\exists\, j \in N$ tal que $u(a,j) > u(b,j)$; entonces, aPb.

Condición IU **(Independencia)**. Sean $U_1, U_2 \in \mathcal{U}^n$ y $a, b \in X$, si $U_1 = U_2$ en $\{a,b\} \times N$; entonces, $R_{U_1} = R_{U_2}$ en el conjunto de alternativas $\{a,b\}$.

Condición S **(Suppes)**. Sean $a, b \in X$, si existe una permutación σ sobre N tal que, $\forall\, i \in N$, $u(a,i) = u(b, \sigma(i))$; entonces, aIb.

Cabe destacar que todas estas condiciones se pueden escribir de forma análoga en términos de los órdenes de preferencia. Notamos, por tanto, que en realidad A, EP y IU son las condiciones D, P y I, respectivamente fortalecidas.

Introducimos ahora el concepto de individuos preocupados, los *individuos preocupados* son aquellos que no son indiferentes respecto a todo par de alternativas de X. Por lo tanto, los *individuos no-preocupados* son aquellos que son indiferentes respecto a todo par de alternativas de X. Queremos eliminar la posible influencia de los individuos no-preocupados en la elección colectiva.

Condición SE **(Separabilidad de los individuos no - preocupados)**. Sean $U_1, U_2 \in \mathcal{U}^n$ y $M \subset N$. Si, $\forall\, i \in M$ y $\forall\, a \in X$, se tiene que $u_1(a,i) = u_2(a,i)$ y, $\forall\, j \notin M$ y $\forall\, a, b \in X$, se cumple $u_1(a,j) = u_1(b,j)$ y $u_2(a,j) = u_2(b,j)$; entonces, $R_{U_1} = R_{U_2}$.

Observamos que, tal y como hemos dado la condición SE, M es el conjunto de los individuos preocupados; mientras que $N \setminus M$ representa los individuos no-preocupados. La relevancia de esta condición reside en que, si consideramos que todos los individuos menos dos, son indiferentes sobre un par de alternativas; podemos replantear el problema, sobre este par de alternativas, como un conflicto entre solo los dos individuos preocupados. Si imaginamos además que uno de los dos está menos aventajado en la sociedad que el otro, es natural introducir unas condiciones que permitan favorecer a uno de los dos con respecto al otro.

Condición EQ **(Equidad)**. Sean $U \in \mathcal{U}^n$, $i, j \in N$ y $a, b \in X$. Si, $\forall\, p \in N \setminus \{i,j\}$, se cumple que $u(a,p) = u(b,p)$ y $u(b,i) < u(a,i) < u(a,j) < u(b,j)$; entonces, aP_Ub.

Condición $INEQ$ **(Inequidad)**. Sean $U \in \mathcal{U}^n$, $i, j \in N$ y $a, b \in X$. Si se tiene, $\forall\, p \in N \setminus \{i, j\}$, $u(a, p) = u(b, p)$ y $u(b, i) < u(a, i) < u(a, j) < u(b, j)$; entonces, $bP_U a$.

Es evidente que la condición de equidad favorece a los individuos menos aventajados, ya que se priorizan sus preferencias; mientras que la de inequidad favorece a los más aventajados. D'Aspremont y Gevers (1977) [8] demuestran el siguiente resultado:

Teorema 2.1. *Si una función de bienestar social f cumple las condiciones A, EP, IU y SE, además de la condición OC; entonces f, o bien satisface la condición EQ, o bien satisface la condición $INEQ$.*

Una vez introducidas las diferentes condiciones que podemos pedir que cumpla una función de bienestar social, estamos en posición de estudiar las principales teorías de justicia distributiva que se han desarrollado en los últimos años.

2.2. El utilitarismo

El término utilitarismo surge en torno al 1781 a manos de Jeremy Bentham como modelo de sociedad basado en la búsqueda de "la mayor felicidad para el mayor número de personas". En su libro *Introduction to the Principles of Morals and Legislation* (1823) [4], define la utilidad como aquella propiedad de un objeto por la cual tiende a producir beneficios, ventajas, felicidad... Defiende que la utilidad es la única herramienta efectiva para determinar si un objeto, ley o sistema es el adecuado. Así pues, este concepto es la base del *principio de utilidad* sobre el que construye su jurisprudencia y moralidad.[4]

Definimos *el utilitarismo* como la función de bienestar social f que ordena las alternativas del conjunto X según la suma de las utilidades individuales, sin hacer distinciones. Si R es la relación de preferencia utilitaria y $a, b \in X$; tenemos que,

$$aRb \iff \sum_{i=1}^{n} u(a, i) \geq \sum_{i=1}^{n} u(b, i).$$

Está claro que, para poder hablar de utilitarismo, necesitamos que se cumpla la condición CIC es decir, que las funciones de utilidad sean cardinales y se puedan comparar los beneficios y las pérdidas entre individuos.

Proposición 2.1. *La función de bienestar social utilitaria f satisface las condiciones U, IU, A y EP.*

Demostración. Observemos, en primer lugar, que podemos considerar cualquier perfil de funciones de utilidad; por lo tanto, el dominio de f es $\mathcal{U}^n$ y se cumple la condición U.
En segundo lugar, sean $U_1, U_2 \in \mathcal{U}^n$ y $a, b \in X$ tales que $U_1(a) = U_2(a)$ y $U_1(b) = U_2(b)$; es evidente que $\sum_{i=1}^{n} u_1(a, i) = \sum_{i=1}^{n} u_2(a, i)$ y $\sum_{i=1}^{n} u_1(b, i) = \sum_{i=1}^{n} u_2(b, i)$, por lo que $R_{U_1} = R_{U_2}$ sobre $\{a, b\}$ y se cumple la condición IU.
En tercer lugar, sean $U_1, U_2 \in \mathcal{U}^n$ y σ una permutación en N tal que, $\forall\, i \in N$ y $\forall\, a \in X$, se cumple $u_1(a, i) = u_2(a, \sigma(i))$; entonces, tenemos que $\sum_{i=1}^{n} u_1(a, i) = \sum_{i=1}^{n} u_2(a, \sigma(i))$,

[4] Nosotros interpretamos la utilidad como una medida del grado de satisfacción que proporciona una alternativa.

por lo que $R_{U_1} = R_{U_2}$ y se cumple la condición A.
Por último, si $U \in \mathcal{U}^n$, $a, b \in X$ y se cumple que $u(a,i) \geq u(b,i)\ \forall i \in N$, claramente, $\sum_{i=1}^{n} u(a,i) \geq \sum_{i=1}^{n} u(b,i)$; por lo tanto, $aR_U b$ y se cumple la condición EP. □

De hecho, tal y como se demuestra en Blackorby (1984) [6], se obtiene el siguiente teorema:

Teorema 2.2. *Si $|X| \geq 3$, y asumiendo que se cumple CIC, una función de bienestar social f satisface las condiciones U, IU, A y EP si, y solo si, se trata del utilitarismo.*

Si prescindimos de la condición A de anonimato, hablamos del *utilitarismo generalizado*. Un orden de preferencia R es un *orden utilitario generalizado* si, y solo si, dados $a, b \in X$, existen $\alpha_i \geq 0\ \ \forall i \in N$ y $\alpha_j > 0$ para algún $j \in N$, tales que

$$aRb \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot u(a,i) \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot u(b,i).$$

Teorema 2.3. *Si $|X| \geq 3$, y asumiendo que se cumple CIC, una función de bienestar social f satisface las condiciones U, IU y EP si, y solo si, se trata del utilitarismo generalizado.*

Demostración. La demostración de este teorema se encuentra en Blackorby (1984) [6]. □

El economista Amartya Sen critica al utilitarismo apelando a que no reconoce la heterogeneidad existente en una sociedad. Desde la perspectiva de Sen, aplicando la función de bienestar utilitaria, en muchos casos no se obtiene una elección social justa.

2.3. Principios de justicia de Rawls

Como alternativa al utilitarismo, Rawls propone en el 1971 dos principios de justicia que sirvieran de pilares para la determinación de las preferencias de una sociedad. El primer principio consiste en requerir que todas las personas tengan el mismo *derecho a la libertad básica* más amplia posible. El segundo, en el que nos centraremos en este trabajo, requiere que las desigualdades sociales sean corregidas para obtener el mayor beneficio posible de los sectores más desfavorecidos de la sociedad. Según Rawls, los beneficios no se deberían considerar en términos de las utilidades (en el sentido en el que las entiende Bentham) sino en términos de bienes primarios. Es decir, considera que de entre un conjunto de posibles estados sociales, la alternativa más justa es aquella que proporciona a todos los miembros de la sociedad los bienes primarios necesarios para llevar a cabo sus futuros planes.

Este principio, conocido como *el principio de maximin*, nos dice que, dados $a, b \in X$ y $i \in N$ tal que i es el individuo menos favorecido de la sociedad con respecto a la alternativa b; la alternativa a será estrictamente preferida a b si, y solo si, todos los individuos de la sociedad (incluido i) están mejor con respecto a la alternativa a de lo que el individuo i está respecto a b. Formalmente el principio de maximin se define como:[5]

$$aP^M b \quad \Longleftrightarrow \quad [\forall\, j \in N,\ (b,j)\widetilde{R}(b,i) \Rightarrow \forall\, j \in N,\ (a,j)\widetilde{P}(b,i)].$$

Denotamos por R^M al orden de preferencia asociado y por f^M a la función de bienestar social de maximin. Entonces, dado cualquier orden $\widetilde{R}$ en $X \times N$ de forma que $(a,i)\widetilde{R}(b,j) \Longleftrightarrow u(a,i) \geq u(b,j)$; podemos definir $R^M := f^M(\widetilde{R})$. Se puede comprobar que f^M cumple las condiciones U, I, S, A y P. Demostramos, además, el siguiente lema:

Lema 2.1. *f^M cumple la condición EQ.*

Demostración. Sean $a, b \in X$, $i, j \in N$ y suponemos que, $\forall\, k \in N \setminus \{i, j\}$, $(a,k)\widetilde{I}(b,k)$. Suponemos también que $(a,j)\widetilde{P}(a,i)$ y $(b,j)\widetilde{P}(b,i)$. Por último, consideramos que $(a,i)\widetilde{P}(b,i)$ y $(b,j)\widetilde{P}(a,j)$.

Notamos que f^M satisface la condición de equidad si se cumple que $aR^M b$. Vamos a comprobarlo: tomamos $l \in N$ tal que, $\forall\, k \in N$, $(a,k)\widetilde{R}(a,l)$. Es evidente que $l \neq j$ ya que hemos supuesto $(a,j)\widetilde{P}(a,i)$. Entonces, puesto que $\forall\, k \in N \setminus \{i,j\}$, $(a,k)\widetilde{I}(b,k)$ y $(a,i)\widetilde{P}(b,i)$, por fuerza $(a,l)\widetilde{R}(b,l)$. En consecuencia, no se tiene que $(b,k)\widetilde{P}(a,l)$, $\forall\, k \in N$. Es decir, $\forall\, k \in N$, $(a,k)\widetilde{R}(a,l)$ pero no es cierto que $(b,k)\widetilde{P}(a,l)$. Por lo tanto, por la definición del principio de maximin, no tenemos $bP^M a$; por lo que, $aR^M b$ y se cumple la condición EQ. □

Vamos a centrarnos ahora en la versión lexicográfica de este principio, el principio de leximin. Para caracterizarlo, se ordenan a los individuos de la sociedad considerada según un ranking. A cada individuo en $N = \{1, \cdots, n\}$, para cada alternativa en el conjunto X, se le otorga una posición dentro del ranking a modo de indicador de lo favorecida que se encuentra dicha persona respecto a dicho estado. El principio de leximin convierte a la persona que ocupa la peor posición del ranking en un "dictador posicional", dando mayor prioridad a sus preferencias.

[5]Denotamos con el superíndice M a las relaciones de preferencia, así como a la función de bienestar social, que se deducen del principio de maximin.

Dados n individuos, $a \in X$ y un perfil de utilidades $U \in \mathcal{U}^n$ sobre a, denotamos por $r_a(U)\,(1 \leq r \leq n)$ a la persona que ocupa la posición r dentro del ranking; esto es, la r-ésima persona menos favorecida de la sociedad respecto a a. De este modo, $1_a(U)$ será el individuo más desfavorecido (el que ocupa la peor posición) con respecto a a, mientras que $n_a(U)$ será el más favorecido. Vamos a ver un ejemplo que aclare esta notación:

Ejemplo 2.1. Consideramos un perfil de utilidades $U(a) = (4, 7, 5)$ que nos proporciona las utilidades de los individuos $1, 2$ y 3, respectivamente, sobre la alternativa a. Tenemos que:

$$1_a(U) = 1,\ 2_a(U) = 3,\ 3_a(U) = 2;$$

es decir, como el individuo 2 es el más favorecido, ya que su valor en el perfil de utilidades es el más alto, ocupa la tercera posición en el ranking; en cambio, el individuo 1 es el más desfavorecido y ocupa la primera.

El principio de maximin pide que, dados $a, b \in X$ y $U \in \mathcal{U}^n$, la preferencia social sobre U se comporte del siguiente modo:

$$aR_U b \Longleftrightarrow u(a, 1_a(U)) \geq u(b, 1_b(U));$$

es decir, que a sea elegido sobre b si, y solo si, la utilidad del individuo menos favorecido con respecto al estado a es mayor que la utilidad del individuo menos favorecido con respecto al estado b.

Por tanto, la forma de elegir entre varias alternativas para una sociedad formada por n individuos, siguiendo el principio de leximin, es la siguiente: $\forall\ U \in\ \mathcal{U}^n$, $\forall\ a, b \in X$; tenemos que $aP_U b$ si, y solo si, $\exists\, k \in \{1, \cdots, n\}$ tal que:

$$u(a, k_a(U)) > u(b, k_b(U)) \text{ y } u(a, l_a(U)) = u(b, l_b(U)) \qquad \forall\, l < k, l \geq 1.$$

Partimos de la utilidad del individuo que ocupa la peor posición, si esta es la misma sobre las dos alternativas, vamos bajando de menos o más favorecido por el ranking hasta llegar a una posición en la cual la utilidad sobre una de las dos alternativas sea mayor que sobre la otra.

Ejemplo 2.2. Sea $U \in \mathcal{U}^n$ tal que $U(a) = (7, 5, 8, 4, 3)$ y $U(b) = (3, 4, 6, 5, 8)$, de modo que $1 \leq r \leq 5$. Tenemos que, para la peor posición, $u(a, 5) = u(b, 1)$; para $r = 2$, obtenemos $u(a, 4) = u(b, 2)$ y, para $r = 3$, $u(a, 2) = u(b, 4)$. Ahora bien, para $r = 4$, obtenemos $u(a, 1) > u(b, 3)$. Con esto, el principio de maximin llegaría a la conclusión de que $aI_U b$, ya que para $r = 1$ las utilidades sobre a y b son las mismas. En cambio, el principio de leximin establece que $aP_U b$ puesto que, para una cierta posición $k = 4$, tenemos que $u(a, k_a(U)) > u(b, k_b(U))$; mientras que, para $l < k$, $u(a, l_a(U)) = u(b, l_b(U))$.

En los resultados que demostramos a continuación, trabajamos con la relaciones de preferencia y no con las utilidades. Vamos a prescindir del subíndice que acompaña a las posiciones, y escribimos (a, r) en lugar de $(a, r_a)\ \forall\, a \in X$, cuando nos refiramos a la situación en a del individuo que, con respecto a esta alternativa, ocupa la r-ésima posición del ranking.[6] Es evidente que, $\forall\, a \in X$ y para $1 \leq r \leq n - 1$, $(a, r + 1)\widetilde{R}(a, r)$.

De este modo, dados $a, b \in X$, *el principio de leximin* viene descrito por:

$$aP^L b \Longleftrightarrow \exists\, m \in \{1, \ldots, n\} \text{ tal que } (a, m)\widetilde{P}(b, m) \text{ y } (a, r)\widetilde{I}(b, r)\ \forall\, 1 \leq r < m.$$

[6]Utilizamos las letras r, s, k y m cuando nos referimos a las posiciones; mientras que, i, j y p sirven para denotar directamente a los individuos.

Denotemos a la función de bienestar social dada por el principio de leximin por f^L; podemos enunciar, tal y como encontramos en el texto D'Aspremont y Gevers (1977) [8], el siguiente teorema:

Teorema 2.4. *El principio de leximin está caracterizado por las condiciones A, IU, EP y EQ.*

De hecho, tenemos un resultado más fuerte (ver el artículo de Hammond (1976) [12]):

Teorema 2.5 (Teorema de leximin). *Si $|X| \geq 3$, f^L es la única función de bienestar social que satisface U, S, I, EP y EQ.*

Diferimos hasta la página 23 la demostración de este teorema puesto que, para poder realizarla, la hemos dividido en varias partes.

Teorema 2.6. *f^L satisface las condiciones EP y EQ.*

A su vez, la prueba de este teorema se realiza a través de cuatro lemas que enunciamos seguidamente. Escribimos $N(k) = \{1, \ldots, k\}$, $k \in N$, para designar al conjunto de k individuos de la sociedad N.

Lema 2.2. *Sea σ una permutación en el conjunto $N(n)$. Si $r > k \geq \sigma(r)$, donde $r \in N(n)$ denota al individuo que ocupa la posición r en el ranking; entonces, $\exists\ s \leq k$ tal que $\sigma(s) > k$.*

Demostración. Vamos a verlo por reducción al absurdo: supongamos que $r > k \geq \sigma(r)$ pero, $\forall\, s \leq k$, $\sigma(s) \leq k$; entonces, $\sigma(N(k) \cup \{r\}) \subseteq N(k)$. Ahora bien, $\sigma(N(k) \cup \{r\})$ está formado por $k+1$ elementos y $N(k)$ solo tiene k. Por lo tanto, σ no puede ser una permutación y hemos llegado a contradicción. □

Observamos que este lema lo que nos dice es que, si consideramos los individuos ordenados y una permutación que envía a uno de ellos a una posición peor, uno de los individuos que estaba peor sube a una posición más aventajada.

Lema 2.3. *Sea σ una permutación en $N(n)$ y $a, b \in X$. Si, para cualquier $m \in \{1, \ldots, n\}$, $(a, r)\widetilde{R}(b, \sigma(r))$, donde $r \in \{1, \ldots, m\}$; entonces, $(a, r)\widetilde{R}(b, r)$.*

Demostración. Para $r \in \{1, \ldots, m\}$, tenemos dos posibles casos:

i) $\sigma(r) \geq r$; entonces, $(a, r)\widetilde{R}(b, \sigma(r))$ por hipótesis y $(b, \sigma(r))\widetilde{R}(b, r) \Rightarrow (a, r)\widetilde{R}(b, r)$.

ii) $\sigma(r) < r$; tomamos $k = r - 1$ y, por el Lema 2.2, $\exists\ s < r$ tal que $\sigma(s) \geq r$. Entonces, $(a, r)\widetilde{R}(a, s)\widetilde{R}(b, \sigma(s))\widetilde{R}(b, r) \Rightarrow (a, r)\widetilde{R}(b, r)$.

En ambos casos hemos obtenido $(a, r)\widetilde{R}(b, r)\ \forall\ r \in \{1, \ldots, m\}$. □

Lema 2.4. *Sea σ una permutación en $N(n)$. Si, para cualquier $m \in \{1, \ldots, n\}$, $(b, r)\widetilde{I}(a, r)$ y $(a, r)\widetilde{R}(b, \sigma(r))$, donde $r \in \{1, \ldots, m\}$; entonces, $(a, r)\widetilde{I}(b, \sigma(r))$.*

Demostración. Notemos que demostrar $(a, r)\widetilde{I}(b, \sigma(r))$, $r \in \{1, \ldots, m\}$, consiste en ver estas dos cosas:

i) $(a,r)\widetilde{R}(b,\sigma(r))$; esto se cumple por hipótesis.

ii) $(b,\sigma(r))\widetilde{R}(a,r)$; ahora bien, como $(b,r)\widetilde{I}(a,r)$ por hipótesis, esto es equivalente a probar $(b,\sigma(r))\widetilde{R}(b,r)$. Vamos a suponer que es falso, es decir que $\exists\,\bar{r} \in \{1,\ldots,m\}$ tal que $(b,\bar{r})\widetilde{P}(b,\sigma(\bar{r})) \Rightarrow \bar{r} > \sigma(\bar{r})$. Entonces, $\exists\,k \in N$ tal que $\bar{r} > k \geq \sigma(\bar{r})$ y $(b,k+1)\widetilde{P}(b,k)$. Por el Lema 2.2, $\exists\,s \leq k$ tal que $\sigma(s) > k \Rightarrow \sigma(s) \geq k+1$. Tenemos

$$(b,k+1)\widetilde{P}(b,k)\widetilde{I}(a,k)\widetilde{R}(a,s)\widetilde{R}(b,\sigma(s))\widetilde{R}(b,k+1) \Rightarrow (b,k+1)\widetilde{P}(b,k+1),$$

y hemos llegado a contradicción; por lo que, $(b,\sigma(r))\widetilde{R}(b,r)$.

Hemos demostrado con esto las dos implicaciones que prueban que $(a,r)\widetilde{I}(b,\sigma(r))$. □

Lema 2.5. *Si, para un individuo $j \in N$, tenemos $(a,j)\widetilde{P}(b,j)$ y, $\forall\,p \in N$ tal que $(b,p)\widetilde{P}(a,p)$, tenemos $(a,p)\widetilde{P}(a,j)$; entonces, aP^Lb.*[7]

Demostración. Definimos, en el conjunto $N(n)$, la permutación σ de la siguiente manera: $\forall\,i \in N$, denotamos ahora por r_a y r_b las posiciones que ocupa el individuo i con respecto a las alternativas a y b, respectivamente. Entonces,

$$r_b = \sigma(r_a).$$

Denotamos ahora por s a la posición r_a del individuo j y por r a la r_a de p. Por hipótesis,

$$(a,s)\widetilde{P}(b,\sigma(s)) \quad \text{y} \quad \forall\,r \in N(n) : (b,\sigma(r))\widetilde{P}(a,r) \Rightarrow (a,r)\widetilde{P}(a,s);$$

entonces,

$$\forall\,r \in N(n) : (b,\sigma(r))\widetilde{P}(a,r) \Rightarrow r > s.$$

Por lo tanto, si $r \in \{1,\cdots,s\}$, tenemos $(a,r)\widetilde{R}(b,\sigma(r))$. Por el Lema 2.3, llegamos a que $(a,r)\widetilde{R}(b,r)$, $r \in \{1,\cdots,s\}$. Vamos a suponer que $(a,r)\widetilde{I}(b,r)$, $\forall\,r \in \{1,\cdots,s\}$. Puesto que $(a,r)\widetilde{R}(b,\sigma(r))$, por el Lema 2.4, tenemos $(a,r)\widetilde{I}(b,\sigma(r))$; pero esto contradice $(a,s)\widetilde{P}(b,\sigma(s))$. Entonces, para algún $m \in \{1,\cdots,s\}$, $(a,m)\widetilde{P}(b,m)$. Como hemos visto que $(a,r)\widetilde{R}(b,r)$, $\forall\,r \in \{1,\cdots,s\}$, obtenemos que aP^Lb. □

Estamos ahora en disposición de demostrar el Teorema 2.6:

Demostración. (Teorema 2.6). Comenzamos demostrando que f^L cumple la condición EP. Vamos a suponer que, $\forall\,i \in N$, tenemos $(a,i)\widetilde{R}(b,i)$ y $\exists\,j \in N$ tal que $(a,j)\widetilde{P}(b,j)$. Observamos que se cumplen las hipótesis del Lema 2.5 y obtenemos que aP^Lb. Por lo tanto, f^L cumple la condición EP.

Vamos a probar ahora que se cumple la condición EQ. Para $i,j \in N$ y $a,b \in X$, supongamos que

$$(a,j)\widetilde{P}(b,j) \text{ y } (b,i)\widetilde{P}(a,i),$$
$$(b,i)\widetilde{P}(b,j) \text{ y } (a,i)\widetilde{P}(a,j),$$
$$\forall\,p \in N \setminus \{i,j\}\,\text{tenemos}\,(a,p)\widetilde{I}(b,p).$$

Nuevamente se satisfacen las hipótesis del Lema 2.5, de modo que aP^Lb y f^L cumple también la condición EQ. □

[7] Aquí j y p son directamente los individuos que consideramos y no la posición que ocupan respecto a la alternativa.

Para demostrar el Teorema 2.5 (Teorema de leximin), necesitamos un último lema. Consideremos un orden de preferencia $\widetilde{R}$ en $X \times N$, dos alternativas $a, b \in X$ y un subconjunto $J \subseteq N$; definimos el *orden parcial estricto* en X como sigue: $aP(J)b$ si, y solo si, tenemos:

i) $J = \{j \in N : (b, j)\widetilde{P}(a, j)\}$,

ii) $\exists\, i \in N : \forall\, j \in J \cup \{i\}, (a, j)\widetilde{P}(b, i)$.

Lema 2.6. *Supongamos que $|X| \geq 3$ y f es una función de bienestar social que cumple las condiciones U, I, EP y EQ. Entonces, para cualesquiera $a, b \in X$ y para cualquier $J \subseteq N$, si $aP(J)b$; entonces, aPb.*

Demostración. Vamos a demostrarlo por inducción sobre el número de individuos en J.

En primer lugar, si $J = \emptyset$, tenemos que $aP(\emptyset)b$ y, por la condición EP, aPb.

Suponemos ahora que J está formado por m individuos y tenemos que $aP(J)b$, con las propiedades *i)* y *ii)* del orden parcial estricto. Cogemos ahora $k \in J$ y definimos $K := J \setminus \{k\}$. Por hipótesis de inducción, el lema se cumple para K: para cualquier orden de preferencia $\widetilde{R}'$ en $X \times N$, si $x, y \in X$ y $xP'(K)y$, tenemos que $xP'y$.
Tomamos $c \in X \setminus \{a, b\}$, $i, k \in N$ y construimos el orden $\widetilde{R}'$ sobre $X \times N$ de la siguiente manera:

iii) $a\widetilde{R}'b \Longleftrightarrow a\widetilde{R}b$,

iv) $\forall\, j \in J,\ (a, j)\widetilde{P}'(c, i)$,

v) $(a, i)\widetilde{P}'(c, i)\widetilde{P}'(b, i)$,

vi) $(a, k)\widetilde{I}'(c, k)$,

vii) $\forall\, j \in N \setminus \{i, k\},\ (b, j)\widetilde{I}'(c, j)$;

evidentemente, este orden existe y, por la condición U, podemos definir $R' := f(\widetilde{R}')$.

Procedemos ahora en dos pasos:

1. Vemos que $aP'c$. Por hipótesis de inducción, basta con demostrar que $aP'(K)c$. Para ello, hay que comprobar las dos propiedades de la definición de orden parcial estricto. Comprobamos, en primer lugar, que

$$K = \{j \in N : (c, j)\widetilde{P}'(a, j)\}.$$

Tenemos que,

$$(c, j)\widetilde{P}'(a, j) \Longleftrightarrow (b, j)\widetilde{P}'(a, j) \text{ y } j \in N \setminus \{i, k\} \qquad \text{por vii)}$$

$$\Longleftrightarrow (b, j)\widetilde{P}(a, j) \text{ y } j \in N \setminus \{i, k\} \qquad \text{por iii)}$$

$$\Longleftrightarrow j \in K \qquad \text{por i), ii) y la definición de K,}$$

y hemos visto que se cumple la primera propiedad. Vamos a ver la segunda, es decir que

$$\exists\, i \in N :\ \forall\, j \in K \cup \{i\}, (a, j)\widetilde{P}'(c, i).$$

Tenemos $(a,i)\widetilde{P}'(c,i)$ por la propiedad v) y, $\forall j \in K$, $(a,j)\widetilde{P}'(c,i)$ por la propiedad iv). Concluimos que $aP'(K)c$ y, en consecuencia, $aP'c$.

2. Vemos que $cP'b$. Para demostrarlo, por la condición de EQ, es suficiente con probar:

$$\begin{aligned}
&\text{I)}\ (c,i)\widetilde{P}'(b,i),\\
&\text{II)}\ (b,k)\widetilde{P}'(c,k),\\
&\text{III)}\ \forall j \in N \setminus \{i,k\}, (b,j)\widetilde{I}'(c,j),\\
&\text{IV)}\ (c,k)\widetilde{P}'(c,i),\\
&\text{V)}\ (b,k)\widetilde{P}'(b,i).
\end{aligned}$$

Observamos que I) se cumple por la propiedad v). Como $k \in J$, por i), tenemos que $(b,k)\widetilde{P}(a,k) \Rightarrow (b,k)\widetilde{P}'(a,k)$ (por iii)); entonces, por vi), llegamos a que $(b,k)\widetilde{P}'(c,k)$ y se cumple II). La condición III) se satisface por la propiedad vii). De nuevo, como $k \in J$ y teniendo en cuenta iv) y vi), deducimos $(c,k)\widetilde{P}'(c,i)$ y obtenemos IV). Y, por último, de i) y ii), $(b,k)\widetilde{P}(a,k)\widetilde{P}(b,i) \Rightarrow (b,k)\widetilde{P}'(b,i)$ (por iii)), por lo que se cumple también V). Concluimos que $cP'b$.

En resumen, hemos obtenido que $aP'c$ y $cP'b \Rightarrow aP'b$. Por la propiedad iii) y la condición I, llegamos a que aPb. □

Disponemos ahora de todos los resultados necesarios para demostrar finalmente el Teorema 2.5 (Teorema de leximin):

Demostración. (Teorema 2.5). Hasta el momento hemos visto, gracias al Teorema 2.6, que la función f^L cumple las condiciones EP y EQ. Es evidente, además, que f^L cumple U, I y S.
Ahora tenemos que ver que, si f es una función de bienestar social que satisface todas estas condiciones, entonces es f^L. Para probar esto necesitamos demostrar que, dados $a, b \in X$, $aR^Lb \iff aRb$.

1. Supongamos que aP^Lb; entonces, existe una posición en el ranking $m \in \{1,\dots,n\}$ tal que $(a,m)\widetilde{P}(b,m)$ y, $\forall r \in \{1,\cdots,m-1\}$, $(a,r)\widetilde{I}(b,r)$. Si r_a es el individuo que ocupa la posición r con respecto a a, cogemos $c \in X \setminus \{a,b\}$ y construimos ahora el orden de preferencia $\widetilde{R}'$ en $X \times N$ de forma que:

$$\begin{aligned}
&\text{iii)}\ a\widetilde{R}'b \iff a\widetilde{R}b\\
&\text{iv)}\ (b,r_b)\widetilde{I}'(c,r_a) \text{ para } r \in \{1,\cdots,n\}.
\end{aligned}$$

Como consecuencia de la propiedad iii), las posiciones que ocupa un mismo individuo con respecto a a y b serán las mismas para los órdenes $\widetilde{R}$ y $\widetilde{R}'$. Claramente $\widetilde{R}'$, tal como la hemos definido, existe y, por la condición U, podemos definir $R' := f(\widetilde{R}')$.

Sea σ la permutación en N tal que $\sigma(r_b) = r_a$, $r \in \{1,\dots,n\}$. De la propiedad iv), tenemos que $(b,r_b)\widetilde{I}'(c,\sigma(r_b))$ y, por la condición S, $bI'c$.[8]

[8]Es una permutación sobre el conjunto de los individuos, no sobre las posiciones.

Vamos a ver ahora que $aP'c$; para ello utilizamos el lema 2.6. Queremos demostrar que, $\forall\, J \subseteq N$, $aP'(J)c$. Es decir que, $\forall\, J \subseteq N$, tenemos las propiedades i) y ii). Esto es equivalente a demostrar que existe un $i \in N$ tal que:

$$\text{I)}\;\; (a,i)\widetilde{P}'(c,i)$$
$$\text{II)}\;\; \forall\, j \in N : (c,j)\widetilde{P}'(a,j) \Rightarrow (a,j)\widetilde{P}'(c,i).$$

Ahora bien, por iii), $(a,m)\widetilde{P}(b,m) \Rightarrow (a,m)\widetilde{P}'(b,m)$ y, por iv), $(b,m_b)\widetilde{I}'(c,m_a)$. Tomamos $i := m_a$ y tenemos $(a,i)\widetilde{P}'(b,m_b)\widetilde{I}'(c,i) \Rightarrow (a,i)\widetilde{P}'(c,i)$ y hemos visto así I).

Suponemos ahora que $(c,j)\widetilde{P}'(a,j)$, sea r la posición del individuo j con respecto a a $(j = r_a)$; entonces,

$$\begin{aligned}(c,j)\widetilde{I}'(b,r) \text{ y } (c,j)\widetilde{P}'(a,j) &\Longrightarrow (b,r)\widetilde{P}'(a,r) \qquad \text{por iv)}\\ &\Longrightarrow (b,r)\widetilde{P}(a,r) \qquad \text{por iii)}\\ &\Longrightarrow r > m\end{aligned}$$

ya que, $\forall\, r \in \{1,\ldots,m-1\}$, $(a,r)\widetilde{I}(b,r)$ y $(a,m)\widetilde{P}(b,m)$. Hemos llegado, por tanto, a que $(a,r)\widetilde{R}'(a,m)$.
Ahora bien, como $i = m_a$ y hemos demostrado I), $(a,m)\widetilde{P}'(c,i)$. Entonces, $(a,r)\widetilde{P}'(c,i)$ y, por la definición de r, $(a,j)\widetilde{P}'(c,i)$. Vemos con esto que satisface II) y, con todo, obtenemos que $aP'c$.

Como hemos visto que $bI'c$ y $aP'c$, concluimos que $aP'b$ y, por iii) y la condición I, tenemos aPb.

2. Supongamos que aI^Lb; evidentemente $(a,r)\widetilde{I}(b,r)$ $\forall\, r \in \{1,\cdots,n\}$. Si definimos σ como la permutación en N tal que, $\forall\, i \in N$, la posición que ocupa el individuo i con respecto a a es igual a la posición que ocupa el individuo $\sigma(i)$ con respecto a b. Entonces, $\forall\, i \in N$, $(a,i)\widetilde{I}(b,\sigma(i))$ y, por la condición S, obtenemos aIb. □

En contraposición al principio de leximin, tenemos el denominado *principio de leximax*, que procede al revés a la hora de beneficiar a ciertos grupos sociales. Este principio comienza por lo más alto de los niveles de utilidad y va subiendo por el ranking convirtiendo, de esta forma, a los miembros más favorecidos de la sociedad en los "dictadores posicionales".

Teorema 2.7. *El principio de leximax está caracterizado por las condiciones A, IU, EP y $INEQ$.*[9]

Introducimos ahora un nuevo axioma, que muestra explícitamente el objetivo de Rawls de favorecer a los individuos menos favorecidos de la sociedad:

Axioma mínimo de equidad (MEQ). La función de bienestar social no es el principio de leximax.

Es decir, la función que estamos buscando no puede ser aquella que priorice a los miembros más aventajados de la sociedad. Este axioma nos permite dar una nueva caracterización del principio de leximin (la demostración es consecuencia directa del Teorema 2.5).

[9]Podemos encontrarlo enunciado en el texto D'Aspremont y Gevers (1977) [8].

Teorema 2.8. *El principio de leximin está caracterizado por las condiciones* IU, EP, A*,* SE*,* OC *y* MEQ*.*

Tradicionalmente se había juzgado el bienestar de una sociedad desde el punto de vista de las utilidades alcanzadas por cada individuo. A la práctica, la relevancia de la teoría de Rawls reside en alejarse un poco de este concepto de bienestar, eliminando el énfasis en la utilidades y proponiendo la noción de *bien primario* como la nueva herramienta para hacer comparaciones interpersonales en el campo de la justicia social.

Rawls da un primer paso hacia una teoría formal que base la justicia distributiva en la igualdad de oportunidades y no de utilidades. Dicho informalmente, el principio sobre el que asienta su pensamiento es el de "maximizar el mínimo, sobre todos los individuos de una sociedad, del conjunto de bienes primarios". A grandes rasgos, estos bienes primarios son (ver Rawls (1971) [19]): los derechos y las libertades, las oportunidades, los ingresos y el poder. Rawls defiende su perspectiva de justicia argumentando su imparcialidad y el hecho de que, según él, es la solución que los individuos elegirían si no conociesen la posición que ocupan dentro de la sociedad (si estuvieran detrás del denominado "velo de ignorancia").

Estos argumentos fueron criticados por Sen (1980, 1993) y Roemer (1996) apelando a que los bienes no son importantes por si mismos, lo importante es lo que estos pueden hacer por las personas y, evidentemente, esto depende de muchos factores. El principal punto que Sen ataca es el hecho de que el principio de leximin ponga el foco en las materias primas y no en los propósitos y libertades individuales. Expone que, en muchas ocasiones, este principio puede ser indiferente ante la heterogeneidad y los deseos de los distintos individuos. Roemer también hace referencia a esto afirmando que la idea de bienes primarios debería depender también de la concepción que cada persona tenga de lo que es "bueno" o "necesario".

Capítulo 3

Funcionamientos y capacidades

Se puede considerar que la forma de afrontar los temas de justicia social del utilitarismo y de Rawls pecan de ser algo restrictivas a la hora de determinar lo que constituye el bienestar de una persona. Para hacer frente a este problema, comienza a desarrollarse una nueva corriente que reemplaza las nociones de bienes y utilidades por las de funcionamientos y capacidades. La principal aportación a esta nueva forma de enfocar la justicia distributiva es el *Tanner Lectures* [26] a manos de Amartya Sen en el 1979.

Sen habla de *funcionamiento* como aquello que una persona consigue ser o hacer, mientras que un *bien* es un instrumento que permite alcanzar ciertos funcionamientos. No obstante, defiende que lo que importa no son los funcionamientos logrados por una persona sino la libertad que dicha persona tiene para elegir entre un conjunto de posibles funcionamientos, a esto se le conoce como la *capacidad* de la persona. Del mismo modo, tampoco se debe confundir funcionamiento y utilidad; los funcionamientos pueden ayudar a conseguir cierto nivel de utilidad, pero no son lo mismo.

3.1. Formalismo de Sen y Herrero

Dar una estructura formal a una teoría que trata el bienestar de las personas puede resultar una tarea muy complicada. Esta noción concierne muchos aspectos abstractos que son, en general, difíciles de medir y suelen depender, además, de infinitas variables. Evidentemente, tenerlas todas en consideración es imposible. No obstante, en esta nueva corriente de pensamiento dentro de la justicia distributiva, lo que se pretende es tener en cuenta muchos más aspectos de los que se habían considerado hasta el momento a la hora de tomar decisiones que afecten a las personas.
Es en el 1985 cuando Sen [28] intenta formalizar la propuesta de entender el bienestar social en términos de los funcionamientos y las capacidades (además de este texto, seguimos el *Handbook of Social Choice and Welfare (Volume 1)* [2]).

3.1.1. Conceptos generales

De las definiciones dadas por Sen para los funcionamientos y las capacidades, recogidas al inicio de este capítulo, se puede entender la capacidad de un individuo como un conjunto de vectores de funcionamientos que refleja la libertad que dicha persona tiene para elegir un tipo de vida u otro. Así pues, para medir cómo de bien se encuentra cada individuo de la sociedad, necesitamos conocer:

a) el conjunto de vectores de funcionamientos sobre el cual cada uno es libre de escoger, esto es la capacidad de cada persona,

b) los funcionamientos que realmente logra. Cada vector del conjunto capacidad representa todas las cosas que el individuo puede lograr si escoge dicho vector; ahora bien, esta es una elección personal.

Por consiguiente, a la gran pregunta que se plantea al hablar de justicia social, *"¿Igualdad de qué?"* (ver Sen (1980) [26]), la respuesta para Sen es: igualdad de las capacidades. Es decir, que todos los individuos de una sociedad tengan las mismas oportunidades (puedan elegir entre el mismo conjunto de posibilidades). Con todo, la teoría de Sen consiste en la aplicación del principio de leximin de Rawls pero en términos de las capacidades, esto es "maximizar la capacidad de aquellos individuos cuyas capacidades sean menores".[1] Cabe destacar que igualar las capacidades no significa igualar el vector de funcionamientos logrado por las personas (ya que, como hemos dicho, esto al final involucra una decisión personal).

Denotamos por X_i al conjunto de vectores de bienes a los que el individuo i puede acceder. Sea $x_i \in X_i$ un vector de bienes, una serie de recursos que i puede utilizar, llamamos *función de utilización del individuo* i a una función f_i que convierte el vector de bienes en un vector de funcionamientos. Llamamos F_i al conjunto de posibles funciones de utilización entre las que i puede escoger.[2]

Denotamos ahora por b_i al vector de funcionamientos que una persona logra dado el vector de bienes $x_i \in X_i$ y habiendo elegido una función de utilización $f_i \in F_i$, es decir

$$b_i = f_i(x_i)$$

y definimos

$$P_i(x_i) := \{b_i : b_i = f_i(x_i), \quad f_i \in F_i\},$$

que es el conjunto de los vectores de funcionamientos que está al alcance de i dado x_i.

Con todo, podemos definir la capacidad como la libertad que el individuo i tiene para elegir dados el conjunto de vectores de bienes de que dispone X_i y el conjunto F_i de posibles funciones de utilización para convertir estos bienes en funcionamientos. La capacidad de i viene dada, entonces, por:

$$Q_i = \{b_i : b_i = f_i(x_i), \quad f_i \in F_i,\ x_i \in X_i\}.$$

Como ya hemos comentado, este nuevo enfoque de justicia distributiva que vamos a estudiar consiste en aplicar los principios de justicia de Rawls vistos en el apartado 2.3 a las capacidades. Para ello, lo ideal sería poder hacer comparaciones entre estas capacidades. Veremos a lo largo de la siguientes secciones que esto, en general, no es posible.

[1] Esto requiere compensar a las personas también por aquellas diferencias de las que no son responsables, ya que la capacidad de cada persona depende, en cierto grado, de una serie de factores personales.

[2] Notamos que en esta sección el formalismo aún es muy general, solo se da la idea intuitiva de como se trabajará con los nuevos conceptos y por eso aún no se especifica en qué espacios nos encontramos.

3.1.2. Función de capacidad

Carmen Herrero desarrolla su formalismo en este campo en el artículo *Capabilities and utilities* (1996) [13].[3] Empezamos haciendo una serie de consideraciones que nos permiten, por un lado, simplificar un poco la gran cantidad de información con la que tenemos que lidiar cuando tratamos temas sociales y, por otro, trabajar de una manera mucho más clara y rigurosa.

Englobamos todas aquellas cosas que una persona puede lograr en su vida en m funcionamientos principales (estos podrían ser: tener salud, estar bien nutrido, etc...), que son los que tendremos en cuenta en adelante. Suponemos, además, que podemos hacer una medición de la cantidad lograda por cada individuo sobre cada uno de estos m funcionamientos. En otras palabras, podemos pensar en las componentes de los vectores de funcionamientos como elementos de $\mathbb{R}$ que nos proporcionan un idea de cuánto de cada funcionamiento se logra. Consideramos, también, que hay solo h tipos de bienes distintos a tener en cuenta y que todos tienen la misma importancia.

Denotamos por $\mathbb{R}^m$ al espacio vectorial al que pertenecen los vectores de funcionamientos y por $\mathbb{R}^h_+$ al espacio vectorial al que pertenecen los vectores de bienes, por lo que $x \in \mathbb{R}^h_+$ es un vector de bienes al que los individuos pueden acceder.[4]

Claramente, los bienes que una persona posee influyen en el vector de funcionamientos que dicha persona puede obtener. Representamos esta correspondencia, para el individuo i, a través de una función

$$C_i : \mathbb{R}^h_+ \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^m),$$

a la que denominamos *función de capacidad*, donde $\mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ denota las partes de $\mathbb{R}^m$. Cada vector de bienes nos proporciona un subconjunto de $\mathbb{R}^m$ constituido por todos los posibles vectores de funcionamientos que i puede lograr en función del uso que haga de los bienes $x \in \mathbb{R}^h_+$.[5] Así pues, $C_i(x)$ denota la capacidad del individuo i sobre el vector de bienes x (los vectores de funcionamientos posibles para i sobre x).

Notamos que la función C_i depende de cada individuo puesto que, dados unos ciertos recursos, no todas las personas hacen el mismo uso de estos debido a una serie de condicionantes personales. Esto es, para un mismo vector de bienes, dos individuos diferentes pueden tener vectores de funcionamientos totalmente diferentes. Vamos a suponer que la sociedad está formada por n individuos, $N = \{1, \ldots, n\}$; podemos, por tanto, entender también la función de capacidad como:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^h_+ \times N &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^m) \\ (x, i) &\longmapsto C_i(x) \end{aligned}$$

que, dados unos bienes y un individuo, nos da la capacidad de este sobre dichos bienes. Trabajamos, en adelante, con $C_i(x)$ como conjunto.

Vamos a caracterizar C_i a través de una serie de propiedades, necesarias para que sea coherente con la idea de capacidad que estamos desarrollando. Consideramos las siguientes condiciones:

[3] El cual constituye la fuente principal del resto del trabajo.

[4] Cada componente de x indica la cantidad que hay del tipo de bien correspondiente.

[5] La función C_i, definida por Herrero, recoge de forma implícita la idea de la función de utilización de Sen.

1) $C_i(0) = \emptyset$,

2) Si $y < x$, entonces $C_i(y) \subseteq C_i(x) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^h_+$,[6]

3) $\forall\, x \in \mathbb{R}^h_+$, $C_i(x)$ es compacto,

4) $\forall\, x \in \mathbb{R}^h_+$, $\forall\, g \in \partial C_i(x)$, $\{\lambda g : \lambda \in [0,1]\} \subseteq C_i(x)$ y $\{\lambda g : \lambda \geq 0\} \cap \partial C_i(x) = \{g\}$,

5) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión, $x_n \in \mathbb{R}^h_+$, tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$ y $f_n \in C_i(x_n)$ tal que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to f$; entonces, $f \in C_i(x)$.

6) $\exists\, x \in \mathbb{R}^h_+$, $f \in C_i(x)$ tal que $f_j > 0 \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, m\}$.

Vamos a interpretar que nos indica cada una de ellas: la condición 1) nos dice que sin ningún recurso no es posible llegar a adquirir ningún funcionamiento. En la 2) vemos que si aumentan los recursos que una persona posee, la capacidad de la persona no puede disminuir. La 3) pide que el límite de funcionamientos alcanzables también sea alcanzable. La condición 4) nos dice que $C_i(x)$ es un dominio estrellado con respecto al origen. Esta es, de hecho, una condición algo más fuerte que la de dominio estrellado, en la que solo se pediría que si $g \in C_i(x)$ entonces $\{\lambda g : \lambda \in [0,1]\} \subseteq C_i(x)$. Básicamente la idea es que, si empezamos en un vector de funcionamientos que se encuentra en la frontera de C_i, cualquier vector con menos funcionamientos “en la misma dirección” también es alcanzable. Por la 5), C_i es continua; si tenemos un vector de funcionamientos que es límite de vectores alcanzables bajo ciertos bienes, entonces este es alcanzable bajo el límite de los bienes correspondientes . Por la condición 6), consideramos que existe un vector de bienes que proporciona un vector de funcionamientos estrictamente positivo.

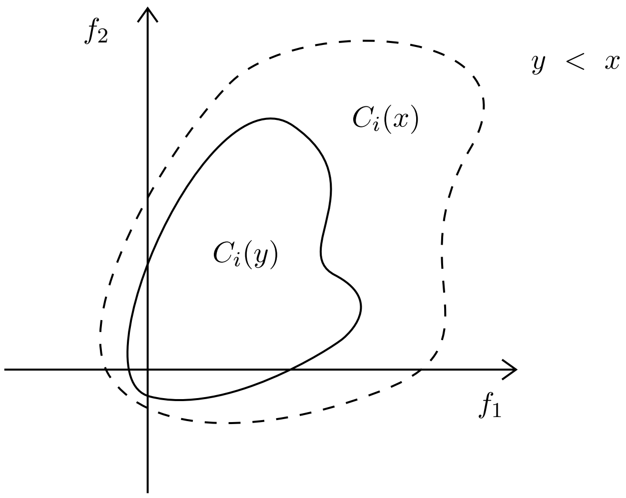

Figura 3.1: Ejemplo de capacidad de un individuo.

Podemos, por tanto, entender $C_i(x)$ como un conjunto eventualmente no-convexo y estrellado respecto al origen que crece al aumentar los bienes (la Figura 3.1 ayuda a

[6] Las desigualdades entre vectores se entienden, en este contexto, como: $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$,

$$x > y \Longleftrightarrow x_i \geq y_i \;\forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \quad \text{y} \quad x_j > y_j \quad \text{para algún} \quad j \in \{1, \ldots, n\}.$$

El hecho de entender las desigualdades de este modo se debe a que, si las considerásemos a través de una norma, entraríamos en un debate acerca de si todos los tipos de bienes tienen la misma importancia.

visualizarlo).[7] Notamos que $x > y$ significa que la cantidad de todos los bienes en x es mayor (o igual para algunos tipos) que en y; por consiguiente, la capacidad sobre x no puede disminuir puesto que, en particular, recoge todas los posibles vectores de funcionamientos que se pueden alcanzar sobre y.

3.1.3. Capacidad y utilidad

Ahora la utilidad que un individuo puede adquirir, entendida como una medida de lo bien que se encuentra dicha persona, dependerá tanto de los bienes a los que dicho individuo puede acceder como de los funcionamientos que puede alcanzar. Formalmente, *la función de utilidad del individuo* i, ν_i, vendrá dada por:

$$\nu_i : \mathbb{R}^h_+ \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Herrero asume que, dado $x \in \mathbb{R}^h_+$, el individuo i elige aquel vector $f' \in C_i(x)$ tal que

$$\nu_i(x, f') \geq \nu_i(x, f) \quad \forall\, f \in C_i(x);$$

es decir, escoge aquellos funcionamientos que maximizan su utilidad. Si denotamos por

$$\nu_i(x) := \max_{f \in C_i(x)} \nu_i(x, f),$$

podemos encontrarnos con la siguiente situación: $x, y \in \mathbb{R}^h_+$ tal que

$$C_i(x) \subset C_i(y) \quad \text{pero} \quad \nu_i(x) > \nu_i(y).$$

Ejemplo 3.1. Vamos a considerar $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$ y un individuo i con,[8]

$$C_i(x) = \Big\{ (f_1, f_2, f_3) \in \mathbb{R}^3 : (f_1, f_2) \in Com\Big\{ (x_1 + x_2 - f_3, x_1 + x_2), \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, x_1 + x_2\right), \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, x_1 + x_2 + f_3\right) \Big\}, \quad 0 \leq f_3 \leq 1 \Big\}.$$

Cogemos $y, z \in \mathbb{R}^2_+$ de la forma $y = (0, 4/5)$ y $z = (1, 0)$. Tenemos:

$$C_i(y) = \left\{ Com\Big\{ \left(\frac{4}{5} - f_3,\ \frac{4}{5},\ f_3\right), \left(\frac{2}{5},\ \frac{4}{5},\ f_3\right), \left(\frac{2}{5},\ \frac{4}{5} + f_3,\ f_3\right), \quad 0 \leq f_3 \leq 1 \Big\} \right\} \quad \text{y}$$

$$C_i(z) = \left\{ Com\Big\{ (1 - f_3,\ 1,\ f_3), \left(\frac{1}{2},\ 1,\ f_3\right), \left(\frac{1}{2},\ 1 + f_3,\ f_3\right), \quad 0 \leq f_3 \leq 1 \Big\} \right\},$$

por lo que $C_i(y) \subset\ C_i(z)$. Consideramos ahora la función de utilidad:

$$\nu_i(x, f) = (f_1 + x_1)(f_2 + 10x_2).$$

[7]En geometría, un subconjunto de un espacio afín sobre los reales es convexo si, dados dos puntos cualesquiera del subconjunto, el segmento que los une está contenido en el subconjunto. Tal y como hemos considerado $C_i(x)$, no tiene porqué ser convexo.

[8]Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, denotamos por $Com(A)$ al "comprehensive hull" del conjunto A; esto es, el menor convexo que lo contiene tal que, si $v \in C_i(x)$ y $w < v$; entonces, $w \in C_i(x)$.

Para y, el vector de funcionamientos que maximiza esta función es $(4/5,\ 4/5,\ 0)$ y el valor correspondiente es $\nu_i(y, f) = 7.04$. Para z, el vector de funcionamientos que maximiza esta función es $(1/2,\ 2,\ 1)$ y el valor es $\nu_i(z, f) = 3$. Hemos llegado a que $C_i(y) \subset\ C_i(z)$ pero $\nu_i(z, f) < \nu_i(y, f)$.

Nos percatamos de las dificultades que vamos a tener que afrontar a la hora de hacer comparaciones entre las capacidades. En general, no podemos comparar las capacidades sobre dos vectores de bienes distintos ni siquiera para un mismo individuo. Además, en el caso en que pudiéramos hacerlo, la relación entre las capacidades y las utilidades no es directa.

3.2. El problema de la distribución de recursos

Vamos a centrarnos ahora en un problema típico dentro del marco de la justicia distributiva: el reparto de recursos entre los individuos de una sociedad.[9] Buscamos mecanismos para asignar los recursos disponibles de una forma justa desde el punto de vista de Sen. Una distribución justa será aquella que siga el principio de leximin introducido por Rawls (ver apartado 2.3); esto es, cuando priorice a los menos favorecidos de la sociedad en términos de las capacidades.

Supongamos que tenemos h tipos bienes a distribuir entre los n individuos que conforman la sociedad y conocemos las capacidades $C_i : \mathbb{R}^h_+ \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^m) \quad \forall\, i \in \{1, \dots, n\}$. El objetivo es igualar las capacidades de todas las personas. Como hemos comentado, tratar de igualar las capacidades directamente es imposible puesto que no son, en general, comparables.

Para hacer frente a este problema, Herrero (1996) [13] asigna un índice de capacidad a las capacidades $C_i(x)$ que nos permite tratar con estas de una forma más práctica. Dada la función $C_i : \mathbb{R}^h_+ \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ ($i \in \{1, \dots, n\}$), un *índice de capacidad* c_i es una función continua

$$c_i : \mathbb{R}^h_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que $c_i(0) = 0$ y, dados $x, y \in \mathbb{R}^h_+$, $C_i(x) \subset C_i(y)$ implica $c_i(x) \leq c_i(y)$. Un aumento en la capacidad de un individuo se traduce en un índice de capacidad igual o mayor.[10]

Dada una familia de capacidades $\{C_i\}_{i \in N}$ $(N = \{1, \dots, n\})$, nos interesan aquellos índices de capacidad c_i asociados para los que, si tenemos $i, j \in\ \{1, \dots, n\}$ y $x, y \in \mathbb{R}^h_+$ con $C_i(x) = C_j(y)$, entonces $c_i(x) = c_j(y)$.

Vemos un ejemplo de función que define una familia de índices de capacidad con las características que buscamos:

Ejemplo 3.2. Notamos que, tal y como se introducen los índices de capacidad, una forma natural de entenderlos es considerando que el valor $c_i(x)$ asociado a la capacidad $C_i(x)$ nos da una medida de lo grande que es el conjunto capacidad sobre el vector x. Sabemos, de la condición 3), que $C_i(x)$ es un conjunto compacto $\forall\, x \in \mathbb{R}^h_+$. Se deriva, por tanto, que $C_i(x)$ es un conjunto cerrado y, en consecuencia, un conjunto medible. Esto es, podemos considerar una medida μ^* en $C_i(x)$ que nos da una idea del tamaño del conjunto. Tomamos, por ejemplo, la medida exterior de Lebesgue: denotamos por

[9] Hablamos de recursos y bienes indistintamente.

[10] De momento solo pedimos que si la capacidad aumenta, el índice de capacidad asociado no disminuya.

$\mathcal{R}(\mathbb{R}^m)$ al conjunto de todos los rectángulos cerrados m-dimensionales. [11] El volumen de $R \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^m)$ viene dado por:

$$\mu(R) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_m - a_m).$$

La *medida exterior de Lebesgue* $\mu^*(E)$ de un subconjunto $E \subset \mathbb{R}^m$ es:

$$\mu^*(E) = \text{ínf} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(R_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k,\ R_k \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^m) \right\}.$$

Observamos que, dados $x, y \in \mathbb{R}_+^h$, si $C_i(x) \subset C_i(y)$, tal y como hemos construido C_i (conjunto que crece, partiendo del vector cero de funcionamientos, a medida que aumentan los bienes), es evidente que $\mu^*[C_i(x)] \leq \mu^*[C_i(y)]$. Definimos $c_i(x) := \mu^*[C_i(x)]$. Evidentemente, de la definición, se cumple que si $C_i(x) \subset C_i(y) \Longrightarrow c_i(x) \leq c_i(y)$ y $c_i(0) = 0$ $(\forall\, i \in \{1, \dots, n\})$. Además, si $C_i(x) = C_j(y)$, para algún par $i, j \in \{1, \dots, n\}$, tenemos que $c_i(x) = c_i(y)$ (ya que podremos recubrir los dos conjuntos por la misma colección de rectángulos de $\mathcal{R}(\mathbb{R}^m)$). Por tanto, los índices de capacidad de este ejemplo se comportan de la forma deseada.

3.2.1. Mecanismos de distribución de bienes

Podemos plantear ahora el problema que nos ocupa desde el punto de vista de los índices de capacidad, se busca la forma de asignar los bienes que maximice la capacidad del individuo con menor índice de capacidad. Vemos a lo largo de esta sección que, teniendo en cuenta las condiciones 1) - 6), dado cualquier vector de bienes a repartir, existe solución. Para el desarrollo llevado a cabo a continuación se sigue, además del trabajo de Herrero (1996) [13], el artículo sobre teoría económica de la negociación de Roemer (1988) [20].

Con lo visto hasta ahora, vamos a tratar el problema de la distribución de recursos como una cuádrupla

$$\phi = \langle n, h, w, c \rangle,$$

donde $n \in \mathbb{N}$ es el número de individuos, $h \in \mathbb{N}$ es el número de tipos de bienes, $w \in \mathbb{R}_+^h$ son los recursos a repartir y $c = (c_1, \dots, c_n)$ es un vector de índices de capacidad, con $c_i : \mathbb{R}_+^h \to \mathbb{R} \quad (i \in \{1, \dots, n\})$.

Vamos a quedarnos ahora con los índices de capacidad que cumplen una serie de propiedades. Sea $h \in \mathbb{N}$, consideramos la familia de funciones:

$$F_h = \{f : \mathbb{R}_+^h \longrightarrow \mathbb{R} : f(0) = 0,\ f \text{ es monótona, continua y cóncava}\}.$$

Denotamos por Σ a la *colección de los posibles problemas* $\phi = \langle n, h, w, c \rangle$ tales que: a) $w \in \mathbb{R}_+^h$, b) $c = (c_1, \dots, c_n)$, $c_i \in F_h$ $\forall\, i \in \{1, \dots, n\}$, y c) $\text{lím}_{t \to \infty} (\frac{1}{t}) c_i(tx) = 0$.[12]

[11] Un *rectángulo cerrado* es un subconjunto $R \subset \mathbb{R}^m$ de la forma:

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_m, b_m],$$

con $-\infty < a_k \leq b_k < +\infty \quad \forall\, k = 1, \dots, m$.

[12] Lo que estamos pidiendo es que, como $x < y \Rightarrow C_i(x) \subseteq C_i(y) \Rightarrow c_i(x) \leq c_i(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}^h)$, el índice de capacidad crezca de manera suave al aumentar progresivamente los recursos del individuo i.

Una *distribución de bienes* cualquiera es un vector $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^{h\times n}$, donde $x_i \in \mathbb{R}_+^h$ ($i \in \{1, \dots, n\}$) es el vector de bienes asignado a i y $c(x) = (c_1(x_1), \dots, c_n(x_n))$ representa los índices de capacidad de los individuos bajo dicha distribución.

Dado un problema ϕ, definimos el *conjunto de las posibles distribuciones para* ϕ (todas las formas posibles de distribuir w entre n individuos) por:

$$Z(\phi) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^{h\times n} : \sum_{i=1}^{n} x_i \leq w,\ x_i \in \mathbb{R}_+^h \quad \forall\, i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

A partir de esto podemos definir también el *conjunto de las posibles capacidades para* ϕ como:

$$C(\phi) = \{c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n : \exists\, x \in Z(\phi) \text{ tal que } c(x) = (c_1, \dots, c_n)\}.$$

Por último, damos la definición de *conjunto de las distribuciones óptimas c-Pareto para* ϕ:

$$P_c(\phi) = \{x \in Z(\phi) : \text{ si } y \in \mathbb{R}_+^{h\times n} \text{ y } c(y) > c(x), \text{ entonces } y \notin Z(\phi)\}.$$

El conjunto de las distribuciones óptimas c-Pareto está formado por aquellas distribuciones tales que no existe otra posible distribución que proporcione índices de capacidad mayores para algunos individuos (quedándose el resto igual).

Lema 3.1. $\forall\, \phi \in \Sigma$, *$C(\phi)$ es un conjunto compacto y $P_c(\phi)$ es un conjunto cerrado no - vacío.*

Demostración. Tal y como está definido, $Z(\phi)$ es un conjunto cerrado y acotado, por tanto, compacto.
Tenemos que $c \in \mathbb{R}^n$ es continua, al ser todas las componentes funciones continuas, y podemos entender el conjunto $C(\phi)$ como $c[Z(\phi)]$. Sabemos que la imagen por una función continua de un compacto es un compacto; por tanto, $C(\phi)$ es compacto.
Como c es continua, por el Teorema de Weierstrass, existe el máximo absoluto, α, en $c[Z(\phi)]$. Escribimos así $P_c(\phi)$ como:

$$P_c(\phi) = \{x \in Z(\phi) : c(x) = \alpha\},$$

y, claramente, es no - vacío. Además, la antiimagen de un cerrado por una función continua es un cerrado y $\{\alpha\}$ es cerrado; por lo que, $P_c(\phi)$ es cerrado. □

Una vez introducidos estos conceptos, estamos al fin en posición de definir qué es un mecanismo de distribución de bienes.

Definición 3.1. Un *mecanismo de distribución de bienes* F es una correspondencia que asigna a cada problema $\phi \in \Sigma$ un subconjunto, no vacío, $F(\phi) \subseteq Z(\phi)$ de posibles distribuciones.[13]

Queremos pedir a un mecanismo de asignación de bienes que satisfaga una serie de condiciones, que consideramos necesarias para que nuestros resultados cumplan con los requisitos de justicia deseados. Estas condiciones son:

[13] De todas las distribuciones posibles para el problema, el mecanismo escoge unas cuantas.

Condición $PLEN$ **(Plenitud).** Sea $\phi = \langle n, h, w, c\rangle \in \Sigma$ y $x \in F(\phi)$. Si, para algún $y \in Z(\phi)$, se tiene $c(x) = c(y)$; entonces, $y \in F(\phi)$.

Si dos distribuciones nos proporcionan el mismo vector de índices de capacidad, si el mecanismo elige una de ellas, entonces debe elegir también la otra.

Condición COP **(Capacidades óptimas de Pareto).** Para todo problema de distribución de bienes, $\phi \in \Sigma$, $F(\phi) \subset P_c(\phi)$.

Es decir, el mecanismo de distribución de bienes escoge distribuciones óptimas (aquellas para las cuales los índices de capacidad son máximos).

Condición AC **(Anonimato).** Sea $\phi = \langle n, h, w, c\rangle \in \Sigma$, $N = \{1, \ldots, n\}$, σ una permutación sobre N y $\phi' = \langle n, h, w, \sigma c\rangle$. Entonces, si $x \in F(\phi)$, $\sigma x \in F(\phi')$.[14]

Introducimos ahora la noción de bien personal, un bien k es un *bien personal* para el individuo i si, y solo si, no varía la capacidad de ningún otro individuo a consecuencia de que i obtenga más cantidad de k (la capacidad de los otros individuos es independiente de k).

Definición 3.2. Sea $\phi = \langle n, h, w, c\rangle \in \Sigma$ y $i \in \{1, \ldots, n\}$ un individuo, decimos que k es un bien personal para i si, $\forall\, j \neq i$ $(j \in \{1, \ldots, n\})$ y $\forall\, x_j, x'_j \in \mathbb{R}^h_+$ tales que $x_{js} = x'_{js} \quad \forall\, s \neq k$ $(s \in \{1, \ldots, h\})$, tenemos que $c_j(x_j) = c_j(x'_j)$.

Dicho de otra manera si, para el individuo j, dos posibles vectores de bienes asignados a este solo se diferencian en la cantidad del bien k, entonces el índice de capacidad de j sobre ambas distribuciones es la misma.

Nos interesa asegurar la coherencia de nuestros resultados cuando hay bienes personales involucrados. Sea $\phi = \langle n, h + h', (w, w'), c\rangle \in \Sigma$ un problema donde $w \in \mathbb{R}^h_+$ está constituido por bienes que no son personales y $w' \in \mathbb{R}^{h'}_+$ está constituido por h' tipos de bienes, cada uno de los cuales es un bien personal para, a lo sumo, un individuo. Consideramos, en esta situación, una distribución escogida por el mecanismo de la forma $(x^*, y^*) \in F(\phi)$, donde $x^* = (x^*_1, \ldots, x^*_n)$, $x^*_i \in \mathbb{R}^h_+ \ \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$, reparte los bienes no - personales y $y^* = (y^*_1, \ldots, y^*_n)$, $y^*_i \in \mathbb{R}^{h'}_+ \ \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$, reparte los bienes personales. Designamos por $d_i(x_i) = c_i(x_i, y^*_i)$ al índice de capacidad del individuo i sobre el vector de bienes $x_i \in \mathbb{R}^h_+$, teniendo en cuenta también los bienes asignados para él por la distribución y^*. Vamos a considerar el problema de repartir los bienes no - personales $\phi' = \langle n, h, w, d\rangle \in \Sigma$.

Condición CON **(Consistencia).** Sea $\phi = \langle n, h + h', (w, w'), c\rangle \in \Sigma$ un problema tal que $(x^*, y^*) \in F(\phi)$, como el descrito en el párrafo anterior. Consideramos ahora el problema $\phi' = \langle n, h, w, d\rangle \in \Sigma$. Si $C(\phi) = C(\phi')$, entonces $x^* \in F(\phi')$.

Condición MRI **(Monotonía de los recursos individuales).** Sean dos problemas en Σ, $\phi = \langle n, h, w, c\rangle$ y $\phi' = \langle n, h, w', c\rangle$, $w = (w_1, \ldots, w_h)$ y $w' = (w'_1, \ldots, w'_h)$, tales que $w_k = w'_k \ \forall\, k \neq t$ y $w_t < w'_t$, donde t es un bien personal para el individuo j. Si $x \in F(\phi)$; entonces, $\forall\, y \in F(\phi')$, $c_j(x_j) \leq c_j(y_j)$.

[14]Sean $x \in \mathbb{R}^n$ y σ una permutación en $N = \{1, \ldots, n\}$, $\sigma x := (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$.

CON nos dice que, si consideramos el mismo problema eliminando los bienes personales, la distribución del resto de bienes propuesta al inicio sigue siendo válida. Observamos que MRI es una condición bastante intuitiva ya que pide que la capacidad de un individuo no disminuya al aumentar la cantidad de sus bienes personales.

Consideremos el problema $\phi = \langle n, h, w, c\rangle \in \Sigma$ y la solución $y \in F(\phi)$. Vamos a suponer que una parte de la sociedad $N = \{1, \ldots, n\}$, digamos "los individuos satisfechos", vive con los recursos asignados para ellos por y; denotamos por $M \subset N$ al resto de individuos. Los recursos que no se han asignado a los individuos satisfechos deben dividirse ahora entre el conjunto M restante. Nos referimos a este problema por $\phi_{F,M,y}$ y añadimos una última condición:

Condición ES (Estabilidad de la sociedad). Sean $N = \{1, \ldots, n\}$, $M \subset N$, $\phi = \langle n, h, w, c\rangle \in \Sigma$ y $y \in F(\phi)$. Si $\phi' = \phi_{M,F,y}$, entonces $y_M \in F(\phi')$.[15]

En otras palabras, si no tenemos en cuenta a algunos individuos de la sociedad junto con los bienes asignados a ellos, la distribución que resulta de asignar al resto de individuos exactamente los mismos bienes que se les había otorgado cuando estaban todos, es una distribución escogida por el mecanismo para este nuevo problema.

Una vez descritas las características que, bajo el punto de vista de Herrero, todo mecanismo de distribución de bienes debe tener, vamos a proceder a buscar las soluciones compatibles con el principio de leximin, puesto que son las que se consideran justas.

Definición 3.3. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, definimos el *orden lexicográfico* $>^L$ en $\mathbb{R}^n$ por:

$$x >^L y \quad \text{si} \quad \exists\, i \in \{1, \ldots, n\} \quad \text{tal que} \quad x_i > y_i \quad \text{y} \quad x_j = y_j \quad \forall\, j < i.$$

Sean ahora $x \in \mathbb{R}^n$ y ψ una permutación en $N = \{1, \ldots, n\}$; definimos $\sigma(x) := \psi x$, y escribimos $\sigma(x) = (\sigma_1(x), \ldots, \sigma_n(x))$, de forma que $\sigma_1(x) \leq \sigma_2(x) \leq \ldots \leq \sigma_n(x)$.[16]

Definición 3.4. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, el *orden lexicográfico de maximin* $>^{L_m}$ en $\mathbb{R}^n$ viene dado por:

$$x >^{L_m} y \Longleftrightarrow \sigma(x) >^L \sigma(y).$$

Damos un pequeño ejemplo para comprender mejor la diferencia entre estos dos órdenes:

Ejemplo 3.3. Consideramos que estamos en $\mathbb{R}^4$ y tenemos $x = (8, 5, 9, 2)$ y $y = (8, 2, 6, 7)$. Evidentemente, $x >^L y$. Ahora bien, $\sigma(x) = (2, 5, 8, 9)$ y $\sigma(y) = (2, 6, 7, 8)$, por lo que $\sigma(y) >^L \sigma(x) \Longrightarrow y >^{L_m} x$. Hemos visto así que $x >^L y$ y $y >^{L_m} x$.

El orden lexicográfico de maximin nos permite introducir el *conjunto de las posibles distribuciones que cumplen el principio de leximin*. Lo denotamos por $L_c(\phi)$, de forma que:

$$L_c(\phi) = \{x \in P_c(\phi) : \quad \text{si} \quad c(y) >^{L_m} c(x), \quad \text{entonces} \quad y \notin Z(\phi)\}.$$

Es decir, cogemos aquellas distribuciones para las que los índices de capacidad, de los individuos con menores índices de capacidad, son los máximos posibles.

[15] y_M hace referencia a la distribución y restringida al conjunto de individuos M.

[16] Se ordenan las componentes del vector x de menor a mayor, $\sigma_i(x)$ tan solo denota la componente del vector $\sigma(x)$.

Observamos pues que las distribuciones en $L_c(\phi)$ son justas desde el punto de vista de la teoría de Rawls y, por consiguiente, de Sen (tal y como explicamos en la sección 2.3). Además, este conjunto cumple:

i) $L_c(\phi) \neq \emptyset$,

ii) $L_c(\phi)$ es cerrado,

iii) si $x, y \in L_c(\phi)$, entonces $\sigma[c(x)] = \sigma[c(y)]$.

Demostración. Las propiedades i) y ii) se derivan directamente de las condiciones 1) - 6), vistas en el apartado 3.1.2, y de las definiciones de los distintos conjuntos introducidos en este apartado.

Vamos a probar la propiedad iii), supongamos que $x, y \in L_c(\phi)$ y $\sigma[c(x)] \neq \sigma[c(y)]$. Podemos pensar, sin pérdida de generalidad, que $\sigma[c(x)] >^L \sigma[c(y)]$ es decir, $\exists\, i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\sigma_i[c(x)] > \sigma_i[c(y)]$ y $\sigma_j[c(x)] = \sigma_j[c(y)] \quad \forall\, j < i$. Por lo tanto, $c(x) >^{L_m} c(y)$ y, como $y \in L_c(\phi)$, $x \notin Z(\phi)$; hemos llegado a contradicción. □

De hecho, tenemos el siguiente siguiente resultado, del cual se deriva una propiedad interesante de L_c:

Proposición 3.1. *$\forall\, \phi \in \Sigma$ y $\forall\, x, y \in L_c(\phi)$, $c(x) = c(y)$.*

Demostración. Sean $x, y \in L_c(\phi)$ y supongamos que $c(x) \neq c(y)$. Como $\sigma[c(x)] = \sigma[c(y)]$, por la propiedad iii), $c(x)$ y $c(y)$ contienen los mismos índices de capacidad solo que ordenados de forma diferente.
Cogemos $d(\lambda) := c(x) + \lambda(c(y) - c(x))$ para $0 \leq \lambda \leq 1$. Como $C(\phi)$ es convexo, $d(\lambda) \in C(\phi)$. Entonces, por la definición de $C(\phi)$, $\exists\, z(\lambda) \in Z(\phi)$ tal que $c[z(\lambda)] = d(\lambda)$. Ahora bien, tal y como hemos definido $d(\lambda)$, $c[z(\lambda)] >^{L_m} c(y)$ para $0 < \lambda < 1$. Pero esto contradice la definición de $L_c(\phi)$ ya que $y \in L_c(\phi)$, $c[z(\lambda)] >^{L_m} c(y)$ y $z(\lambda) \in Z(\phi)$. Por tanto, $c(x) = c(y)$. □

Corolario 3.1. *$\forall\, \phi \in \Sigma$, $L_c(\phi)$ es un conjunto convexo.*

Demostración. Sean $x, y \in L_c(\phi)$ y tomamos $z := x + \lambda(y - x)$, $0 \leq \lambda \leq 1$. De la proposición 3.1, y por ser los índices de capacidad funciones continuas y monótonas, se deriva que $c(x) = c(z) = c(y)$. Si $v \in \mathbb{R}_+^{h \times n}$ con $c(v) >^L c(z)$, tenemos $c(v) >^L c(x)$ y $v \notin Z(\phi)$, por lo que $z \in P_c(\phi)$. Que $z \in L_c(\phi)$ se demuestra de forma análoga. Hemos visto que $z := x + \lambda(y - x)$, $\forall\, 0 < \lambda < 1$, por lo que $L_c(\phi)$ es convexo. □

Llegamos así al teorema en el que se demuestra que el único mecanismo de asignación de bienes que satisface todas las condiciones introducidas, condiciones para que el procedimiento sea justo, es de hecho el que escoge distribuciones que cumplen el principio de leximin. A este mecanismo lo llamamos *el mecanismo de leximin.*

Teorema 3.1 (Teorema del mecanismo de leximin). *Sea F un mecanismo de distribución de bienes en Σ. F satisface las condiciones $PLEN, COP, AC, CON$, MRI y ES si, y solo si, $F = L_c$.*[17]

[17]Es decir, dado $\phi \in \Sigma$, $F(\phi) = L_c(\phi)$.

Para poder demostrar el teorema, necesitamos introducir primero una serie de nuevas condiciones y tres lemas que nos relacionan estas condiciones con las vistas anteriormente.

Condición III (Independencia de la información irrelevante). Dados dos problemas $\phi = \langle n, h, w, c\rangle, \phi' = \langle n, h', w', c'\rangle \in \Sigma$ tales que $C(\phi) = C(\phi')$. Entonces, $c[F(\phi)] = c[F(\phi')]$.[18]

Es decir, el mecanismo debe comportarse del mismo modo para dos problemas que tengan el mismo número de individuos y el mismo conjunto de posibles capacidades.

Si tenemos un problema $\phi = \langle n, h, w, c\rangle \in \Sigma$, denotamos por $c_i^*(\phi)$ al *máximo índice de capacidad que puede obtener el individuo i en el problema ϕ*. De este modo, evidentemente, $c^*(\phi) = (c_1^*(\phi), \ldots, c_n^*(\phi)) \in \mathbb{R}^n$ es el *vector de capacidades ideal para el problema ϕ* (este vector es, en general, imposible de obtener).

Condición MI (Monotonía individual). Dados dos problemas $\phi = \langle n, h, w, c\rangle$, $\phi' = \langle n, h', w', c'\rangle \in \Sigma$ tales que $C(\phi) \subset C(\phi')$, con $c_k^*(\phi) = c_k^*(\phi')\ \forall k \neq i$ y $c_i^*(\phi) \leq c_i^*(\phi')$ $(i, k \in \{1, \ldots, n\})$. Entonces, $c_i[F(\phi)] \leq c_i'[F(\phi')]$.

MI pide que, al pasar de un problema a otro en el que la máxima capacidad que pueden obtener todos los individuos que no son i se mantiene y la de i no disminuye, los índices de capacidad de i, para todas las distribuciones escogidas por el mecanismo de distribución, no disminuyan.

Consideramos de nuevo la sociedad $N = \{1, \ldots, n\}$ y $M \subset N$ un subconjunto:

Condición $ESTAB$ (Estabilidad). Sean $\phi = \langle n, h, w, c\rangle$, $\phi' = \langle m, h', w', c'\rangle \in \Sigma$, con $m < n$. Sea $v = c[F(\phi)]$ y vamos a suponer que $z \in C(\phi')$ si, y solo si, $(z, v_{N\setminus M}) \in C(\phi)$. Entonces, $v_M = c'[F(\phi')]$.

Cabe señalar que, MI y $ESTAB$ son condiciones más fuertes que MRI y ES, respectivamente. Enunciamos a continuación los siguientes lemas, cuyas demostraciones se encuentran en Roemer (1988) [20]:

Lema 3.2 (Lema 5 de Roemer (1988)). *Si un mecanismo F satisface las condiciones CON y $PLEN$, entonces satisface III.*

Lema 3.3 (Lema 9 de Roemer (1988)). *Si un mecanismo F satisface las condiciones $PLEN, III$ y MRI, entonces satisface MI.*

Lema 3.4 (Lema 11 de Roemer (1988)). *Si un mecanismo F satisface las condiciones $PLEN, III$ y ES, entonces satisface $ESTAB$.*

Partiendo de estos lemas, podemos dividir la demostración del Teorema 3.1 (Teorema del mecanismo de leximin) en dos proposiciones. Damos una idea de las pruebas de ambas proposiciones, las demostraciones formales se pueden encontrar en los textos de Thomson y Lensberg (1989) [29] e Imai (1983) [14].

[18] $c[F(\phi)]$ y $c[F(\phi')]$ son los conjuntos formados por los vectores de índices de capacidad para las distribuciones escogidas por los mecanismos de distribución sobre ϕ y ϕ', respectivamente.

Proposición 3.2. *Sea $F = L_c$ el mecanismo de leximin en Σ y suponemos que L_c cumple CON. Entonces, F satisface las condiciones $PLEN, COP, AC, MI$ y $ESTAB$.*

Demostración. Las condiciones COP y AC se derivan directamente de las definiciones de estas y de L_c (que $L_c(\phi) \subset P_c(\phi)\ \forall\, \phi \in \Sigma$, es parte de la definición de $L_c(\phi)$).

Demostrar que se cumple $PLEN$ consiste en ver que, dados $\phi = \langle n, h, w, c\rangle \in \Sigma$ y $x \in L_c(\phi)$, si para $y \in Z(\phi)$ tenemos $c(x) = c(y)$, entonces $y \in L_c(\phi)$. Sean $y \in Z(\phi)$ y $x \in L_c(\phi)$ tales que $c(x) = c(y)$; entonces, $y \in P_c(\phi)$ ya que, si $z \in \mathbb{R}_+^{h\times n}$ es tal que $c(z) > c(y)$, se tiene $c(z) > c(x) \Longrightarrow z \notin Z(\phi)$ (por ser x de $P_c(\phi)$). Del mismo modo, si z es tal que $c(z) >^{L_m} c(y) \Longrightarrow c(z) >^{L_m} c(x) \Longrightarrow z \notin Z(\phi)$ y tenemos que $y \in L_c(\phi)$. Como L_c satisface CON y $PLEN$, por el Lema 3.2, L_c satisface III.

Probamos ahora que se cumple ES; sean $\phi = \langle n, h, w, c\rangle \in \Sigma$, $y \in L_c(\phi)$ y $M \subset N$, consideramos el problema $\phi' = \phi_{M,F,y}$ y tenemos que ver que $y_M \in L_c(\phi')$. Claramente $y_M \in Z(\phi')$ ya que $y \in Z(\phi)$. Ahora, si $z \in \mathbb{R}_+^{h\times m}$ y $c(z) > c(y_M)$, tenemos que el índice de capacidad de al menos un individuo de M es mayor sobre z que sobre y (mientras que los del resto son iguales). Si consideramos $z' = (z, y_{N\setminus M})$, la distribución que asigna los mismos bienes para M que z y para el resto atribuye los dados por y, tenemos que $c(z') > c(y) \Longrightarrow z' \notin Z(\phi)$. Así pues, $z \notin Z(\phi') \Longrightarrow y_M \in P_c(\phi')$. Además, si consideramos z tal que $c(z) >^{L_m} c(y_M) \Longrightarrow \sigma[c(z)] >^{L} \sigma[c(y_M)]$. Por tanto, $\sigma[c(z, y_{N\setminus M})] >^{L} \sigma[c(y)]$, de lo que se deriva $c(z, y_{N\setminus M}) >^{L_m} c(y) \Longrightarrow (z, y_{N\setminus M}) \notin Z(\phi)$. Llegamos pues a que $z \notin Z(\phi')$ y $y_M \in L_c(\phi')$. Tenemos que L_c satisface III y ES y, por el Lema 3.4, $ESTAB$.

Que el mecanismo L_c cumple MRI se ve directamente de la noción de bien personal dada en la Definición 3.2. En consecuencia, por el Lema 3.3, L_c satisface MI. □

Proposición 3.3. *Si F es un mecanismo de distribución de bienes que satisface las condiciones III, COP, AC, MI y $ESTAB$; entonces, $F = L_c$.*

Demostración. Vamos a demostrar este resultado por inducción sobre el número de individuos que conforman la sociedad.

Paso 1. Consideramos la sociedad formada por un único individuo, $\phi = \langle 1, h, w, c\rangle \in \Sigma$ y $F(\phi)$ un mecanismo de distribución que cumple con todas las propiedades mencionadas. Si $x \in F(\phi)$, por la condición COP, $x \in P_c(\phi)$. Si $y \in \mathbb{R}_+^h$ es tal que $c(y) >^{L_m} c(x)$, como solo hay un individuo, esto quiere decir que $c_1(y) > c_1(x)$ y, en consecuencia, tenemos que $c(y) > c(x) \Longrightarrow y \notin Z(\phi)$ (por ser x de $P_c(\phi)$). Así pues, $x \in L_c(\phi)$.

Paso 2. Vamos a suponer ahora que la proposición es cierta para una sociedad formada por $n - 1$ individuos y comprobamos que es cierta también para n individuos.

Sean $\phi = \langle n, h, w, c\rangle \in \Sigma$, $x \in F(\phi)$ y vamos a suponer que $x \notin L_c(\phi)$. Si $x \notin L_c(\phi)$, entonces existe una posible distribución sobre ϕ, $y \in Z(\phi)$, tal que $c(y) >^{L_m} c(x)$. Por tanto, tenemos que $\sigma[c(y)] >^{L} \sigma[c(x)]$. De la definición de orden lexicográfico de maximin, $\exists\, k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\sigma_k[c(y)] > \sigma_k[c(x)]$ y $\sigma_j[c(y)] = \sigma_j[c(x)]\ \forall\, j < k$. Es decir, para todos los individuos menos aventajados los índices de capacidad son iguales hasta llegar al que ocupa la posición k (consideramos que este individuo es el i), para el cual el índice de capacidad sobre la distribución y es mayor. Consideramos que $y \in L_c(\phi)$.

Denotamos por $v := c(x) \in c[F(\phi)]$ y por $M := \{i\}$. Consideramos ahora el problema $\phi' = \langle 1, h, w', c\rangle \in \Sigma$ tal que $z \in C(\phi') \Longleftrightarrow (z, v_{N\setminus M}) \in C(\phi)$. De la condición $ESTAB$, obtenemos que $v_M \in c[F(\phi')]$. Como $M = \{i\}$, tenemos que $v_M = c_i(x_i)$, donde claramente $x_i \in F(\phi')$. Por hipótesis de inducción, $x_i \in L_c(\phi')$; ahora bien, $y_i \in Z(\phi')$ ya que

$y \in Z(\phi)$ y hemos visto arriba que $c_i(y_i) > c_i(x_i)$. Esto no puede ser ya que $x_i \in L_c(\phi')$; por tanto, hemos llegado a contradicción y $x \in L_c(\phi)$.

Hemos demostrado así que un mecanismo de distribución de bienes que satisface todas las condiciones de la proposición, es el mecanismo de leximin. □

Estamos ahora en disposición de demostrar el Teorema 3.1 (Teorema del mecanismo de leximin):

Demostración. (Teorema 3.1). Se demuestra de los lemas de la página 38, la Proposición 3.2 y la Proposición 3.3 (ver Thomson y Lensberg (1989) [29]). □

Queda claro que este resultado, así como todo el desarrollo previo, es análogo al resultado que se muestra en el segundo capítulo para la función de bienestar social de leximin. Ambos resultados son muy relevantes puesto que manifiestan que, bajo una serie de condiciones de justicia muy razonables, el único principio que cumple dichas condiciones y, por tanto, es justo a la hora de que una sociedad tome una decisión, o reparta una serie de recursos, es el de leximin; es decir, aquel que favorece a los menos aventajados de la sociedad.

3.2.2. La distribución de utilidades

Una vez se han distribuido los recursos atendiendo a las capacidades, según el principio de leximin, es lógico preguntarse cuáles son las utilidades resultantes. Tal y como comentamos, no hay una relación clara entre las capacidades y las utilidades de los individuos. El índice de capacidad de un individuo es un indicador de la cantidad de opciones entre las que puede elegir; en función de lo que este elija, obtendrá una utilidad u otra (estará mejor o peor dentro de la sociedad).

Si nos fijamos, en el desarrollo del mecanismo de leximin en ningún momento hemos mencionado las funciones de utilidad; por consiguiente, de primeras no tiene porqué haber ninguna conexión entre estas y L_c. No obstante, puesto que las utilidades, tal y como las definimos en el apartado 3.1.3, dependen de los funcionamientos y, a su vez, estos determinan en cierto modo los índices de capacidad, podemos establecer una relación entre ambas.

Vamos a situarnos a partir de ahora en el caso en que existe una *relación positiva* entre el índice de capacidad de un individuo y la utilidad que este adquiere. Es decir, el caso en que:

$$c_i(x_i) > c_i(y_i) \Longrightarrow u_i(x_i) > u_i(y_i) \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\};$$

es decir, nos centramos en aquellas situaciones en las que si aumenta el índice de capacidad del individuo, por fuerza, también aumenta la utilidad que este adquiere.

Tratamos, en adelante, las funciones de utilidad como funciones continuas que dependen de los vectores de bienes, $u : \mathbb{R}^h_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, considerando que, dado un vector de bienes, se escoge aquel funcionamiento que maximiza la utilidad.
Vamos a introducir las utilidades en el problema de la distribución de recursos; consideramos ahora el conjunto Γ de los problemas:

$$\tau = \{\phi, u\} = \{\langle n, h, w, c\rangle, u\},$$

donde $\phi \in \Sigma$, $u = (u_1, \ldots, u_n)$, con $u_i : \mathbb{R}_+^h \longrightarrow \mathbb{R}\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$, y $c_i(x_i) > c_i(y_i)$ implica $u_i(x_i) > u_i(y_i)$.

Dado un problema $\tau = \{\phi, u\} \in \Gamma$, definimos el *conjunto de las posibles utilidades para* τ por:

$$U(\tau) = \{u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n : \exists\, x \in Z(\phi) \text{ tal que } u(x) = (u_1, \ldots, u_n)\},$$

e introducimos también el *conjunto de las distribuciones óptimas u-Pareto para* τ:

$$P_u(\tau) = \{x \in Z(\phi) : \text{ si } y \in \mathbb{R}_+^{h\times n} \text{ y } u(y) > u(x), \text{ entonces } y \notin Z(\phi)\}.$$

Observamos pues que, dadas dos distribuciones $x, y \in \mathbb{R}_+^{h\times n}$ sobre un problema en Γ, si $u(y) > u(x)$, entonces $c(y) \geq c(x)$. Tenemos, de hecho, un resultado muy interesante con respecto a las capacidades óptimas c-Pareto y las utilidades:

Proposición 3.4. *Sea $\tau = \{\phi, u\} \in \Gamma$, $y \in Z(\phi)$ y $x \in P_c(\phi)$ tales que $u(y) > u(x)$; entonces, $c(y) = c(x)$.*

Demostración. Vamos a suponer que no es cierto y tenemos $c(y) \neq c(x)$. En ese caso, puede ser:

i) $c(y) > c(x)$, esto no es posible puesto que $x \in P_c(\phi)$;

ii) $c(y) < c(x)$ es decir, que $c_i(y_i) \leq c_i(x_i)\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ y $c_j(y_j) < c_j(x_j)$ para algún $j \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces, $u_j(y_j) < u_j(x_j)$ y esto no puede ser por hipótesis.

Por la misma razón que en ii), notamos que no podemos tener $c(y) \neq c(x)$ de modo que $\exists\, i, j \in \{1, \ldots, n\}$ con $c_i(y_i) > c_i(x_i)$ y $c_j(y_j) < c_j(x_j)$. Tenemos, por tanto, que $c(y) = c(x)$. □

De la Proposición 3.4 se deduce que, si tenemos una distribución óptima c-Pareto de los recursos $x \in P_c(\phi)$ y otra posible distribución $y \in Z(\phi)$ tal que $u(y) > u(x)$ (la utilidad alcanzada por todos los individuos es igual o mayor en y), los índices de capacidad no varían (x sigue siendo una distribución óptima en términos de las capacidades). En cambio, el contrario no es cierto, mejoras en los índices de capacidad pueden reducir la utilidad de algún individuo (tal y como se ve en el Ejemplo 3.4).

Ejemplo 3.4. Sea un problema $\tau \in \Gamma$ de la forma $\tau = \{\phi, u\} = \{\langle 2, 2, (1, 1), c\rangle, u\}$. Designamos por $z_i = (x_i, y_i)$ al vector de distribución asignado al individuo i ($i = 1, 2$); consideramos así,

$$c_1(x_1, y_1) = \left[\text{mín}\left(x_1, \frac{1}{3}\right)\right]^{1/2} y_1^{1/2} \quad \text{y} \quad c_2(x_2, y_2) = \text{mín}\left(x_2, \frac{1}{3}\right),$$

$$u_1(x_1, y_1) = x_1 y_1 \quad \text{y} \quad u_2(x_2, y_2) = x_2.$$

Cogemos la distribución $v = [(1/3,\ 1/3), (2/3,\ 2/3)]$. Tenemos $c_1(v_1) = c_2(v_2) = 1/3$, $u_1(v_1) = 1/9$ y $u_2(v_2) = 2/3$. Consideramos ahora la distribución $t = [(2/3,\ 1), (1/3,\ 0)]$, obtenemos $c_1(t_1) = (1/3)^{1/2}$, $c_2(t_2) = 1/3$, $u_1(t_1) = 2/3$ y $u_2(t_2) = 1/3$. Por lo tanto, $c(t) > c(v)$ mientras que $u_2(t_2) < u_2(v_2)$.

Corolario 3.2. $\forall\, \tau = \{\phi, u\} \in \Gamma,\ L_c(\phi) \cap P_u(\tau) \neq \emptyset$.

Es decir, cuando asumimos que hay una relación positiva entre los índices de capacidad y las funciones de utilidad, algunas distribuciones óptimas y justas en términos de los índices de capacidad (que pertenecen a $L_c(\phi)$) son también óptimas en términos de las utilidades. Ahora bien, no se tiene, en general, $L_c(\phi) \subset P_u(\tau)$ (ver siguiente ejemplo).

Ejemplo 3.5. Sea un problema $\tau \in \Gamma$ de la forma $\tau = \{\phi, u\} = \{\langle 2, 2, (1,1), c\rangle, u\}$. Designamos por $z_i = (x_i, y_i)$ al vector de distribución asignado al individuo i $(i = 1, 2)$. Consideramos así,

$$c_i(x_i, y_i) = \left[\text{mín}\left(x_i, \frac{1}{3}\right)\right]^{1/2} \left[\text{mín}\left(y_i, \frac{1}{3}\right)\right]^{1/2} \quad \text{y} \quad u_i(x_i, y_i) = \frac{x_i y_i}{1 + x_i y_i}.$$

Cogemos $z_i = (1/3, 1/3)$, $i = 1, 2$; tenemos que $z = (z_1, z_2) \in L_c(\phi)$. Por otro lado, la utilidad es $u_i(1/3, 1/3) = 1/10$. Notamos que $v_i = (1/2, 1/2)$, $i = 1, 2$, es un vector de distribución que pertenece a $Z(\phi)$ y $u_i(1/2, 1/2) = 1/5 > 1/10$. Concluimos así que $z \notin P_u(\tau)$.

Vamos a profundizar más en este aspecto, dada una distribución de bienes $x \in \mathbb{R}^h_+$, el *entorno abierto de* x, $N_\varepsilon(x)$, es la bola abierta de centro x y radio ε. Introducimos la siguiente condición:

> **Condición NS (Individuo No-Saciado).** Para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un individuo $i \in \{1, \ldots, n\}$ para el cual, $\forall\, x_i \in \mathbb{R}^h_+$, $\exists\, y_i \in N_\varepsilon(x_i)$ tal que $c_i(x_i) < c_i(y_i)$.

Esta condición pide que haya un individuo para el que, para toda distribución de bienes que se le asigne, exista, en un entorno de esta, otra distribución sobre la cual su índice de capacidad sea mayor.

Nos referimos ahora por Γ^* al conjunto de problemas $\tau = \{\phi, u\} \in \Gamma$ para los que se cumple la condición NS.

Proposición 3.5. *Si* $\tau = \{\phi, u\} \in \Gamma^*$*, entonces* $P_c(\phi) \subset P_u(\tau)$.

Demostración. Sea $z \in P_c(\phi)$ y vamos a suponer que $z \notin P_u(\tau)$. Entonces, $\exists\, x \in Z(\phi)$ tal que $u(x) > u(z)$; esto es, $u_k(x_k) \geq u_k(z_k)\ \forall\, k \in \{1, \ldots, n\}$ y $u_j(x_j) > u_j(z_j)$ para algún $j \in \{1, \ldots, n\}$. Como $z \in P_c(\phi)$ y $u_k(x_k) \geq u_k(z_k)$, $c_k(x_k) \geq c_k(z_k)\ \forall\, k \in \{1, \ldots, n\}$. Ahora bien, si para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos $c_i(x_i) > c_i(z_i)$, entonces $c(x) > c(z)$. Esto no puede ser dado que $z \in P_c(\phi)$. Se sigue, por tanto, que $c(x) = c(z)$.

Dado que $u_j(x_j) > u_j(z_j)$, podemos coger $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño tal que $u_j(y_j) > u_j(z_j)\ \forall\, y_j \in N_\varepsilon(x_j)$; entonces, $c_j(y_j) \geq c_j(z_j)\ \forall\, y_j \in N_\varepsilon(x_j)$. Por la condición NS, para algún individuo $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\exists\, y_i \in N_\varepsilon(x_i)$ tal que $c_i(y_i) > c_i(x_i)$.
Tomamos así la distribución $y \in \mathbb{R}^{h \times n}_+$ de la forma $y_j = x_j + x_i - y_i$ y $y_k = x_k \quad \forall\, k \neq i, j$. Tal y como está construida, claramente, $y \in Z(\phi)$. Además, $c_k(y_k) = c_k(x_k)\ \forall\, k \neq i, j$ y $c_i(y_i) > c_i(x_i)$ por lo que, como $c(x) = c(z)$, $c(y) > c(z)$. Hemos llegado a contradicción ya que $z \in P_c(\phi)$. □

Dado que $L_c(\phi) \subseteq P_c(\phi)$, esta proposición nos dice que, si consideramos los problemas que satisfacen NS, las distribuciones justas según el principio de leximin son óptimas también desde el punto de vista de la utilidades. Notamos que la implicación contraria no es cierta a través de un ejemplo:

Ejemplo 3.6. Sea un problema $\tau \in \Gamma^*$ de la forma $\tau = \{\phi, u\} = \{\langle 2, 2, (1,1), c\rangle, u\}$. Designamos por $z_i = (x_i, y_i)$ al vector de distribución asignado al individuo i $(i = 1, 2)$. Consideramos así,

$$c_1(x_1, y_1) = \left[\text{mín}\left(x_1, \frac{1}{3}\right)\right]^{1/2} \left[\text{mín}\left(y_1, \frac{1}{3}\right)\right]^{1/2} \quad \text{y} \quad c_2(x_2, y_2) = x_2 y_2,$$

$$u_i(x_i, y_i) = \frac{x_i y_i}{1 + x_i y_i}.$$

La distribución $v = [(\,1/2,\ 1/2), (\,1/2,\ 1/2)] \in P_u(\tau)$, pero $v \notin P_c(\phi)$. Vamos a verlo, tenemos $c_1(\,1/2,\ 1/2) = 1/3$ y $c_2(\,1/2,\ 1/2) = 1/4$; ahora bien, si consideramos la distribución $t = [(\,1/3,\ 1/3), (\,2/3,\ 2/3)]$, evidentemente $t \in Z(\phi)$ y tenemos $c_1(\,1/3,\ 1/3) = 1/3$ y $c_2(\,2/3,\ 2/3) = 4/9$. Por lo tanto, $c(t) > c(v)$ y v no es una distribución óptima c-Pareto.

Vamos a hacer una observación: si, a partir del orden lexicográfico de maximin, introducimos el *conjunto de las posibles distribuciones cuyas utilidades cumplen el principio de leximin* por $L_u(\phi) = \{x \in Z(\phi) : \quad \text{si} \quad u(y) >^{L_m} u(x), \quad \text{entonces} \quad y \notin Z(\phi)\}$, es posible que $L_c(\phi) \cap L_u(\tau) = \emptyset$.

Ejemplo 3.7. Sea un problema $\tau \in \Gamma$ de la forma $\tau = \{\phi, u\} = \{\langle 2, 2, (1,1), c\rangle, u\}$. Designamos por $z_i = (x_i, y_i)$ al vector de distribución asignado al individuo i $(i = 1, 2)$. Consideramos así,

$$c_i(x_i, y_i) = x_i^{1/2} y_i^{1/2}, \quad i = 1, 2,$$

$$u_1(x_1, y_1) = x_1 y_1 \quad \text{y} \quad u_2(x_2, y_2) = x_2^{1/4} y_2^{1/4}.$$

Cogemos $v = [(\,1/2,\ 1/2), (\,1/2,\ 1/2)]$, tenemos $c_1(v_1) = c_2(v_2) = 1/2$, $u_1(v_1) = 1/4$ y $u_2(v_2) = (1/2)^{1/2}$. Por tanto, $L_c(\phi) = \{v\}$. Consideramos $t = [(\,2/3,\ 2/3), (\,1/3,\ 1/3)]$, así $u_1(t) = 4/9$ y $u_2(t) = (1/3)^{1/2}$. Obtenemos $u(t) >^{L_m} u(v)$ y $t \in Z(\phi)$, de modo que $v \notin L_u(\tau)$.

De la Proposición 3.1, todos los elementos del conjunto $L_c(\phi)$ tienen el mismo vector de índices de capacidad. Si nos centramos ahora en los problemas que pertenecen al conjunto Γ^*, todos los elementos de $L_c(\phi)$ tienen también el mismo vector de utilidades.

Proposición 3.6. *Sea un problema $\tau = \{\phi, u\} \in \Gamma^*$ y $x, y \in P_c(\phi)$. Entonces, $c(x) = c(y)$ si, y solo si, $u(x) = u(y)$.*

Demostración. Vamos a ver cada implicación por separado: por un lado, si tenemos problemas en Γ, $u(x) = u(y) \Longrightarrow c(x) = c(y)$.
Por otro lado, dados $x, y \in P_c(\phi)$, $x, y \in P_u(\tau)$ por la Proposición 3.5; por tanto, por como está definido $P_u(\tau)$, o bien $u(x)$ y $u(y)$ no son comparables, o bien $u(x) = u(y)$.
Suponemos que no son comparables es decir, $\exists\, i, j \in \{1, \dots, n\}$ tales que $u_i(x_i) > u_i(y_i)$ y $u_j(y_j) > u_j(x_j)$.

Por continuidad, podemos coger $\varepsilon > 0$ tal que $u_i(z_i) > u_i(y_i)\ \forall\, z_i \in N_\varepsilon(x_i)$ y también $u_j(t_j) > u_j(x_j)\ \forall\, t_j \in N_\varepsilon(y_j)$. De modo que, $c_i(z_i) \geq c(y_i)\ \forall\, z_i \in N_\varepsilon(x_i)$ y también $c_j(t_j) \geq c_j(x_j)\ \forall\, t_j \in N_\varepsilon(y_j)$.
Vamos a considerar ahora el agente k para el que se cumple la condición NS; suponemos, sin pérdida de generalidad, que $k \neq i$. Sabemos que $\exists\, z_k \in N_\varepsilon(x_k)$ tal que $c_k(z_k) > c_k(x_k)$.

Cogemos $z_i = x_i + x_k - z_k$ y $z_s = x_s \forall s \neq i, k$. Evidentemente, $z \in Z(\phi)$ y, como $c(x) = c(y)$, tenemos $c(z) > c(y)$. Hemos llegado a contradicción puesto que $y \in P_c(\phi)$; concluimos así que $u(x) = u(y)$. □

Corolario 3.3. *Si $\tau = \{\phi, u\} \in \Gamma^*$, $x, y \in L_c(\phi)$; entonces, $u(x) = u(y)$.*

En resumen, hemos demostrado que, dado un problema que satisface las condición NS, todas las distribuciones de bienes elegidas por el mecanismo de leximin (las distribuciones justas) nos proporcionan el mismo vector de utilidades.[19]

Podemos caracterizar el conjunto L_c cuando tratamos con problemas en Γ^* por una condición más débil que la de plenitud:

> **Condición PLEN.D (Plenitud débil).** Sea $\tau = \{\phi, u\} \in \Gamma^*$ y $x \in F(\phi)$. Si, para $y \in Z(\phi)$, $c(x) = c(y)$ y $u(x) = u(y)$; entonces, $y \in F(\phi)$.[20]

Concluimos así con un teorema análogo al Teorema 3.1 (Teorema del mecanismo de leximin), cuando queremos tener en cuenta también las utilidades que obtienen al final los individuos de la sociedad:

Teorema 3.2. *Un mecanismo de distribución de bienes F en Γ^* satisface las condiciones $PLEN.D, COP, AC, CON, MRI$ Y ES si, y solo si, $F = L_c$.*

Demostración. La demostración de este teorema se encuentra en el artículo de Herrero (1996) [13]. □

La forma en que Herrero trata el problema de la distribución de bienes es una propuesta muy interesante y sólida a la hora de afrontar este tipo de cuestiones. No obstante, cabe remarcar que, para poder desarrollar este trabajo, se parte de una serie de consideraciones teóricas y no del todo realistas. Por ejemplo, se considera desde un inicio que todos los tipos de bienes a repartir son igual de buenos. También se asume que se puede asignar una escala que proporcione una medida de la cantidad de un funcionamiento que se puede obtener, pese a que es evidente que esto no es tan sencillo. Herrero asigna un valor en los reales a los funcionamientos ya que, sobre estos, tenemos una serie de propiedades que nos interesan; ahora bien, podríamos haber escogido otro tipo de medición. Además, se hace el paso del conjunto capacidad al índice de capacidad, que nos proporciona una idea de la cantidad de oportunidades que tiene un individuo pero no nos dice qué oportunidades son estas exactamente.

[19] Sin embargo, esto no significa que pertenezcan a $L_u(\tau)$.

[20] Ahora el mecanismo tiene en cuenta también las utilidades.

Resumen y Conclusiones

Es evidente que una tarea centrada en la búsqueda de la justicia social no puede, de ningún modo, resultar sencilla. Todos los aspectos que juegan un papel importante cuando se trata de integrar las necesidades y deseos de un conjunto de personas, cada una con sus respectivos rasgos característicos, son imposibles de recoger en una teoría. No obstante, la formalización de la teoría de la elección social, así como de los principios sobre los que se asientan las teorías de la justicia social, han permitido construir una base sólida sobre la que trabajar. A lo largo de este trabajo, se ha abordado esta búsqueda de la justicia a través de las elecciones tomadas por una sociedad, elegir una alternativa u otra nos puede acercar a una sociedad más justa o alejar de ella. Utilizando una serie de herramientas matemáticas (relaciones de preferencia, funciones de bienestar social, conjuntos adecuados, etc...) se han ido construyendo aquellos mecanismos de decisión colectiva que proporcionan preferencia sociales cumpliendo con los requisitos de justicia deseados. Se han evidenciado, sin embargo, las limitaciones que siempre se acaban presentando al intentar formalizar de una manera objetiva y rigurosa las reglas de elección que involucran a toda una sociedad.

En el primer capítulo, nos planteamos si era posible llegar a una elección conjunta agregando las preferencias que cada individuo tiene independientemente del resto. Esta, de hecho, sería la situación ideal, aquella en la que se pudieran satisfacer los verdaderos anhelos de todas las personas. Llegamos, pero, al Teorema de imposibilidad de Arrow que nos dice que, bajo unos mínimos de justicia, esto no es posible. Nos percatamos así de que, si queremos que las decisiones que se tomen cumplan con una serie de condiciones de justicia básicas, es importante poder hacer comparaciones interpersonales. De este modo, se tiene en cuenta la situación en la que se encuentra un individuo respecto al resto y cómo le pueden afectar las preferencias de los demás.
Entramos así en el segundo capítulo, en el que se presenta una de las teorías más importantes en este ámbito, la teoría de Rawls. Este defiende que a la hora de tomar una decisión colectiva, sobretodo cuando nos enfrentamos a un problema de distribución de bienes, la única decisión justa es aquella que favorece a aquellos sectores de la sociedad menos aventajados. Rawls trata el problema principalmente desde el punto de vista de los bienes materiales y las utilidades que los individuos pueden alcanzar; pide que se tomen decisiones que tiendan a igualar la posesión de bienes de todos los individuos de la sociedad a fin de que todos gocen del mismo bienestar. Pese a que, claramente, es importante intentar dotar a todas las personas de los recursos necesarios para vivir, este enfoque es un poco restrictivo en lo que se refiere al concepto de bienestar de un individuo.
Para intentar suplir este déficit, aparecen los conceptos de funcionamientos y capacidades a manos de Sen. La capacidad es el conjunto de todas las posibles cosas que un individuo puede ser o hacer, y es el pilar sobre el que se construyen las nuevas teorías de justicia social. Se reformulan así los principios de Rawls pero desde una nueva perspectiva, las

decisiones colectivas serán justas en la medida en que proporcionen igualdad de oportunidades para todos los individuos. Es precisamente sobre las ideas de esta nueva teoría que Herrero describe, de una manera formal, cómo debe ser un procedimiento de distribución de bienes justo. Entonces, ¿hemos logrado al fin un formalismo matemático que nos ayude a tomar decisiones colectivas justas? No del todo y, seguramente, lograr una solución perfecta sea un objetivo inalcanzable. En el trabajo de Herrero, el precio a pagar para poder trabajar bien, es la pérdida de información; se toman decisiones que tiendan a igualar el número de opciones entre las que los individuos pueden elegir, pero nada nos asegura que la calidad de estas opciones sea la misma para todos.

A pesar de estas barreras, el mérito y la importancia de estas teorías sociales, es enorme y se sigue trabajando, día tras días, para perfeccionarlas y acercarnos a una sociedad más justa.

Bibliografía

[1] Arrow, Kenneth J. (1951). *Social Choice and Individual Values.* New York: John Wiley & Sons.

[2] Arrow, Kenneth J., Sen, Amartya K. and Kotaro Suzumura (2002). *Handbook of Social Choice and Welfare (Volume 1).* Oxford and Amsterdam: North-Holland publications.

[3] Arrow, Kenneth J., Sen, Amartya K. and Kotaro Suzumura (2011). *Handbook of Social Choice and Welfare (Volume 2).* Oxford and Amsterdam: North-Holland publications.

[4] Bentham, Jeremy (2010). *An Introduction to the Principles of Morals and Legislation.* Liberty Fund, Inc.This Edition is a reprint of 'A New Edition, corrected by the Author,' which was published in 1823.

[5] Black, Duncan (1948). "On the Rationale of Group Decision-making". *Journal of Political Economy* 56, 23–34.

[6] Blackorby, Charles, Donaldson, David and Weymark, John A. (1984). "Social Choice with Interpersonal Utility Comparisons: A Diagrammatic Introduction". *International Economic Review* 25(2), 327–356.

[7] Bourguignon, F., and Chakravarty, S. (2003) "The mesasurement of multidimensional poverty". *Journal of Economic Inequality*, 1, 25-49.

[8] D'Aspremont, Claude and Gevers, Louis (1977). "Equity and the Informational Basis of Collective Choice". *Review of Economic Studies* 44(2), 199–209.

[9] Debreu, G., Hilderbrand, W. (1983). *Representation of a preference ordering by a numerical function.* Mathematical Economics (Twenty Papers of Gerard Debreu). Chapter 6.

[10] Gaertner, Wulf (2009). *A Primer in Social Choice Theory.* United States: Oxford University Press.

[11] Gehrlein, W.V. (1983). "Condorcet's Paradox". *Theory and Decision* 15, 161–197.

[12] Hammond, Peter J. (1976). "Equity, Arrow's Conditions, and Rawls' Difference Principle". *Econometrica* 44 (4), 793–804.

[13] Herrero, C. (1996). "Capabilities and utilities". *Economic Design* 2, 69–88.

[14] Imai, H. (1983). "Individual Monotonicity and Lexicographic Maximin Solutions", *Econometrica* 51, 389–401.

[15] Marx, K. (1973).*The economic and philisophic manuscripts of 1944*. English translation, London: Lawrence and Wishart.

[16] Mas-Colell, Andreu, Whinston, Michael D., Green, Jerry R. (1995). *Microeconomic Theory*. New York: Oxford University Press.

[17] May, Kenneth O. (1952). "A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decisions", *Econometrica* 20, 680–684.

[18] Murillo Pugès, Arnau (2020). *Preferences, Social Choice and Theories of Justice*. Trabajo final de grado. Facultad de matemática e informática. Universitat de Barcelona.

[19] Rawls, John (1971). *A Theory of Justice*. Cambridge, Massachusetts: Belknap Press of Harvard University Press.

[20] Roemer, J.E. (1988). "Axiomatic bargaining theory on economic environments", *Journal of Economic Theory* 45, 1–31.

[21] Roemer, J.E. (1988). *Theories of distributive justice*. Harvard University Press.

[22] Seebohm Rowntree, B. (1902) "Poverty: A Study of Town Life". *American Journal of Sociology*. Review by: C. R. Henderson.

[23] Sen, Amartya K. (1969). "Quasi-Transitivity, Rational Choice and Collective Decisions". *Review of Economic Studies* 36, 381-394.

[24] Sen, Amartya K. (1970). *Collective Choice and Social Welfare*. San Francisco, Cambridge: Holden-Day.

[25] Sen, Amartya K. (1977). "Social Choice Theory: A Re-examination". *Econometrica* 45 (1), 53–88.

[26] Sen, Amartya K. (1980). *Equality of what?*, in McMurrin, S. (ed.). *The Tanner Lectures on Human Values, Vol. 1.* Cambridge: Cambridge University Press.

[27] Sen, Amartya K. (1983). "Poor, relatively speaking". *Oxford Economic Papers, 35*, 153-169.

[28] Sen, Amartya K. (1985). *Commodities and capabilities*. Second Edition. *Business and Economics*. Oxford: Oxford University Press.

[29] Thomson, W. and T. Lensberg (1989). *Axiomatic theory of bargaining with a variable number of agents*. Cambridge University Press, Cambridge.