La paradoxa de Sant Petersburg

Un estudi històrico-matemàtic i una
reivindicació didàctica

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

TREBALL DE FINAL DE GRAU

Per Lluis Ferrer Moradell

Dirigit per
Jordi Font González

Grau en Matemàtiques

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 20 de juny del 2021

La paradoxa de Sant Petersburg

Un estudi històrico-matemàtic i una reivindicació didàctica

TREBALL DE FINAL DE GRAU

Grau en Matemàtiques

Curs 2020–2021

Per Lluis Ferrer Moradell

Dirigit per

Jordi Font González

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

Universitat de Barcelona

Barcelona, 20 de juny del 2021

In mathematics, the art of proposing a question
must be held of higher value than solving it.

Georg Cantor, 1867.

ÍNDEX

RESUM/ABSTRACT

El present treball parteix de la contradicció que genera la paradoxa de Sant Petersburg en relació a l'esperança matemàtica de guanys i la probabilitat d'obtenir-los. Davant d'aquest misteri, el nostre objectiu fou estudiar la paradoxa a nivell teòric, tot intentant comprendre la seva perplexitat i analitzant els nombrosos debats que ha generat al llarg de les èpoques. La immensa riquesa d'aquests últims ha conduit a elaborar un estudi històrico-matemàtic de les propostes de solucions de diferents teòrics i experts; anàlisi que conforma l'estructura de la primera part del treball. Seguidament, i ja introduint-nos en la segona part del document, la motivació personal de voler-nos dedicar a l'ensenyança però, i sobretot, els problemes que, opinem, estan presents avui en dia en aquest acte ens han generat la necessitat de portar aquest tema a les aules; a realitzar una breu, però no per això menys important, unitat didàctica que englobi tot aquest món matemàtic tan important i alhora tan desconegut, avui, per la major part de la població.

Paraules clau: paradoxa de Sant Petersburg, esperança matemàtica, probabilitat, teoria de jocs, activitat didàctica, ensenyança matemàtica.

The starting point of this paper is the contradiction that the St. Petersburg paradox poses between the mathematical expectation of gains and the probability of obtaining them. Faced with this scenario, our main purpose was to understand the perplexity of the paradox by carrying out a theoretical study which included an analysis of the many discussions it has generated over time. The unparalleled richness of this debate led us to elaborate a historical and mathematical study of the solutions to the paradox reached by many experts; an analysis that shapes the first part of our thesis. Hereinafter, there is the second part of our work. Driven by the motivation of devoting ourselves to teaching, but, above all, by the problems that we believe are currently to be sought in the act of educating, we deemed it necessary to bring the paradox into the classrooms. In a word, we realized that our assignment was to create a brief, but not less important lesson plan on this part of the mathematical world, which is still barely known today by most of the population, though it is proving to be highly important.

Key words: St. Petersburg paradox, expected value, probability, game theory, lesson plan, mathematical teaching.

2010 Mathematics Subject Classification. 91A05, 91A30, 91A35, 91A60, 91A80, 91B06, 91B16, 97K50, 97K80, 97M20

INTRODUCCIÓ

L'aspiració inicial, més tard modificada, amb la qual havíem pensat dirigir el present treball, consistia en estudiar una de les nocions més importants en l'àmbit de la probabilística matemàtica: l'aparentment banal concepte d'esperança. Aquest fou introduït en l'àmbit de la teoria de jocs i la teoria de la probabilitat durant la primera meitat del segle XVII, i s'utilitzà per, entre d'altres, estudiar els beneficis a llarg termini esperats per un jugador quan realitza un nombre seguit d'apostes a un joc d'atzar donat, sigui aquest la loteria, els daus o la ruleta del casino, entre d'altres. En el seu moment, ens va interessar el cas de la ruleta, doncs aquest fonamentava una opinió de carrer força comuna, que tots hem sentit emetre en més d'una ocasió: la famosa "la banca sempre guanya". Un judici que no sols és compartit entre la *vox populi* sinó també entre els erudits matemàtics i que, de fet, es pot demostrar mitjançant el càlcul probabilístic. Com veurem, en jocs com el de la ruleta, tota quota d'entrada (suposem que és $= 1$) que un jugador pugui apostar sempre resultarà, a llarg termini, econòmicament desfavorable, en tant que l'esperança matemàtica d'obtenir beneficis en un joc com aquest és inferior a la quantitat d'entrada apostada (en el nostre cas, és < 1). Una dada, aquesta, que ens semblava certament interessant i molt oportuna d'utilitzar com a pretext per comprendre detalladament el concepte d'esperança matemàtica. Tanmateix, les nostres aspiracions es van veure mínimament capgirades quan vam descobrir l'existència d'un problema força anòmal, que proporcionava resultats diferents als obtinguts per casos com el de la ruleta. Més en concret, proveïa un resultat que ningú havia esperat —ni matemàticament ni subjectiva— fins aleshores, l'estranyesa del qual va provocar l'aparició de llargs debats a l'època. Aquest era el cas del problema de la paradoxa de Sant Petersburg (d'ara en endavant, PSP).

La PSP consisteix en un joc d'atzar on el valor esperat no és inferior a la quantitat d'entrada apostada, sinó estranyament molt més superior. Tant, que resulta ser infinit. Dit en altres paraules: l'esperança matemàtica d'obtenir beneficis en el joc de Sant Petersburg es multiplica exponencialment, cosa que fa recomanable l'aposta de qualsevol suma de diners, per molt gran que aquesta sigui. Nogensmenys, i com és si més no obvi, aquest curs d'acció que prediu la paradoxa no seria acceptat per cap individu sota condicions normals de judici i raciocini, en tant que la probabilitat de guanyar també disminueix exponencialment (Inoue & Parmigiani, 2008). Com es veu, la perplexitat de l'assumpte és força apreciable i, en el seu moment, va esdevenir un pretext prou ferm per matemàtics i estudiosos d'arreu del món per assajar-ne una explicació i consegüent resolució; solucions que, en algunes ocasions, havien consistit inclús en la suspensió del judici sobre el que tradicionalment es coneix per esperança matemàtica. Sigui com sigui, conèixer el problema de Sant Petersburg va ser, per nosaltres, una raó suficient per modificar aquells objectius que inicialment havíem plantejat. A partir d'aleshores, el nostre propòsit consistiria en fer una investigació sobre la PSP. Anàlisi que, en cap moment, volia caure en el risc d'aportar una possible solució absoluta, a la que encara ningú ha aconseguit arribar, al problema de Sant Petersburg. Per contra, vam actuar seguint el consell del matemàtic rus Georg Cantor (1845–1918) qui, a la seva tesi doctoral de l'any 1867, va advertir sobre el fet que en moltes ocasions, en matemàtiques, és més important plantejar un problema que aconseguir trobar una solució. És per això que la part teòrica del nostre treball serà descriptiva i formal, i farà un resum del problema que planteja la paradoxa per estudiar, conseqüentment, com, amb el pas del temps, la PSP s'ha anat convertint en un problema de magnitud molt més complexa. Per tant, aquest objectiu primer es pot resumir com un intent de comprendre sistemàticament la PSP i la seva història.

L'anterior, tot i ser el nostre objectiu principal, no és l'únic que ens vam plantejar, ni potser tampoc el més interessant d'acomplir. Com veurem, una de les conclusions que podem extreure de la primera part del treball és que si bé durant l'època moderna la PSP havia estat objecte d'estudi i centre de nombrosos debats, avui en dia sembla que ha perdut una mica la seva rellevància en el món educatiu. A més, el concepte d'esperança matemàtica, en concret, i la teoria de la probabilitat, en general, són aspectes de les matemàtiques que acostumen a ser omesos en l'ensenyament secundari i de batxillerat; es tracten com conceptes de segona categoria i no se'n prioritza el seu aprenentatge ni se'n vindica la seva importància. Tot i així, nosaltres creiem que l'explicació d'una temàtica com aquesta és molt rellevant en el context educacional. Quan arribem al final del nostre treball veurem les raons d'aquesta notabilitat, que són vàries; per ara, tan sols ens cal sostenir que aquestes foren l'excusa per proposar-nos realitzar una reivindicació didàctica del terme d'esperança a partir de la introducció de la PSP a les aules de batxillerat científic. Vindicació que consistirà, primordialment, en una pràctica real i que configurarà el nucli de la segona part del nostre treball. Tanmateix, abans, en aquest mateix apartat ens proposem fer una severa i humil crítica al mètode d'ensenyança tradicional així com un breu resum d'aquell que considerem millor per l'explicació de les matemàtiques i del tema de la probabilitat. Només havent comprès prèviament el mètode que més s'ajusta a l'ensenyament matemàtic, podrem realitzar-ne, després, una aplicació didàctica en la nostra pràctica d'explicar la PSP.

Amb tot, i per acabar, creurem que el nostre treball ha estat acomplert si, primerament, aconseguim aportar una explicació planera i formal de la paradoxa i de la immensa història que l'envolta i, en segon lloc, si podem donar compte de l'enorme importància de mantenir viu el seu llegat; d'estudiar-la i d'explicar-la a aquells individus que, si les vicissituds del temps així ho permeten, seran els que continuaran amb la tasca de desemmascarar aquells estranys misteris matemàtics que encara avui disten d'estar resolts. En aquest punt, la noció d’esperança i tot el que la PSP ens permet comprendre sobre ella només és un exemple; un dels molts que, com a futurs docents, estem obligats fer perdurar al llarg de les èpoques.

MARC TEÒRIC

Estudi formal de la paradoxa de Sant Petersburg

En aquest apartat s'intentarà acomplir el primer dels propòsits que ens hem formulat; el que consisteix en realitzar un estudi teòric i formal de la PSP. Per fer-ho, estarà dividit en tres subapartats. El primer capítol actuarà a mode de pròleg, i consistirà en una aproximació conceptual d'aquells temes i/o conceptes que ajudaran a la comprensió sistemàtica dels altres apartats. Segonament, inclourem un capítol que descriurà de forma detallada el problema de la PSP, tot incloent-hi els exemples i càlculs que siguin pertinents per propiciar-ne una explicació complerta. Finalment, i per acabar d'arrodonir aquesta part més teòrica del treball, realitzarem un resum dels debats i les propostes de solucions que coneguts experts matemàtics d'arreu del món van aportar per resoldre el problema que plantejava la paradoxa.

1. Aproximacions conceptuals

A les següents pàgines s'inclouran un seguit de definicions, observacions i, si es donés el cas, de demostracions d'aquells temes que resulten més rellevants i decisius en l'àmbit de la teoria de jocs i la teoria de la probabilitat. Cal tenir en compte que hem pressuposat que el lector ja disposa d'un coneixement bàsic previ sobre la matèria a tractar i, per tant, hem omès fer referència a aquella informació de caràcter més elemental. Mencionar, també, que tota la teoria que aportarem aquí haurà estat extreta d'un conjunt bibliogràfic ampli sobre teoria de la probabilitat (veure Alabert, 1997; Naulart & Sanz, 1990; Sanz, 1999).

Definició 1.1. Un espai de probabilitats és una terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on:[1]

- Ω és un conjunt que correspon al dels resultats possibles de l'experiència aleatòria. S'anomena espai mostral.
- $\mathcal{A}$ és una família de parts d'Ω que té estructura de σ–àlgebra.[2] És a dir:
  1. $\Omega \in \mathcal{A}$
  2. $\mathcal{A}$ és estable per pas al complementari: si $A \in \mathcal{A}$, també $A^c \in \mathcal{A}$

[1] D'ara en endavant, per cada definició i/o observació que anotarem, fixarem un espai de probabilitat de referència $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

[2] La σ–àlgebra $\mathcal{A}$ serveix per descriure tots els esdeveniments possibles relacionats amb l'experiència aleatòria.

3. $\mathcal{A}$ és estable per unions numerables: si $\{A_n, n \geq 1\} \subset \mathcal{A}$, es compleix $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$

- P és l'assignació de versemblança als esdeveniments (s'anomena probabilitat). És una aplicació $P: \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ que té les següents propietats:
  1. $P(\emptyset) = 0$
  2. $P(\Omega) = 1$
  3. Si $A \in \mathcal{A}, 0 \leq P(A) \leq 1$
  4. Si A i B són conjunts de $\mathcal{A}$, aleshores $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  5. (σ–additivitat) Si $\{A_n, n \geq 1\}$ és una successió de conjunts de $\mathcal{A}$ disjunts dos a dos, aleshores:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Definició 1.2. La probabilitat d'un esdeveniment A es calcula mitjançant la fórmula

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

on la notació $\#A$ indica el cardinal del conjunt A.

Observació 1.1. Per poder definir amb rigor la noció de variable aleatòria necessitem introduir la σ–àlgebra de Borel; la denotarem per $\mathcal{B}$ i és la σ–àlgebra generada pels conjunts oberts de $\mathbb{R}$. És a dir, la més petita de les σ–àlgebres de parts de $\mathbb{R}$ que contenen tots els conjunts oberts de $\mathbb{R}$ respecte de la topologia euclidiana.

Definició 1.3. Una variable aleatòria és una aplicació $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que compleix la propietat següent:

$$\forall B \in \mathcal{B}, X^{-1}(B) \in \mathcal{A} \tag{1.3.1}$$

Una variable aleatòria proporciona, doncs, una assignació numèrica als elements de l'espai mostral. La condició (1.3.1) prèviament esmentada ens ajudarà a calcular quantitats com ara $P\big(X^{-1}(B)\big) = P\{w: X(w) \in B\}$, per qualsevol $B \in \mathcal{B}$.

Definició 1.4. Sigui X una variable aleatòria discreta. Diem probabilitat de x_i a $P(X = x_i) = f(x_i)$ on x_i representa cada resultat possible. Els números $f(x_i)$ amb $i = 1, 2, ...$ han de satisfer les següents condicions:

a) $f(x_i) \geq 0 \; \forall i$

b) $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1$

La funció f s'anomena distribució de probabilitat de la variable aleatòria X.

Definició 1.5. Una noció de mitjana dels valors presos per una variable aleatòria, en el cas que aquesta sigui simple, té una representació

$$X(w) = \sum_{i=1}^{r} a_i \mathbb{1}_{A_i}(w) \tag{1.5.1}$$

on $a_i \in \mathbb{R}$, i $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, \dots, r$.

Definició 1.6. L'esperança matemàtica de la variable aleatòria definida en $(1.5.1)$, que denotarem per E, es defineix per

$$E = \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot P(A_i)$$

Dit d'una manera més intuïtiva, l'esperança matemàtica és la suma del producte de la probabilitat de cada succés pel valor d'aquest succés.

Definició 1.7. Una altre manera de definir l'esperança matemàtica i que ens ajudarà a entendre més fàcilment la seva utilitat en aquest treball, consisteix en veure-la com la relació entre la probabilitat d'encertar i el premi obtingut en un determinat joc d'atzar. Concretament, podem dir que l'esperança és la suma de tots els productes resultants de multiplicar els premis que s'obtindrien en un determinat joc per les seves respectives probabilitats.

Observació 1.2. D'una manera més informal, l'esperança matemàtica és aquella quantitat de diners que un individu espera (matemàticament parlant) obtenir en un determinat joc després de un nombre finit de jugades. És a dir, aquell resultat al que una persona tendeix arribar en mitjana.

Observació 1.3. En teoria de jocs, per valorar si un joc és considerat just o no hem d'aplicar l'anomenat criteri del joc just a partir del qual calcularem l'esperança matemàtica. Existeixen tres possibilitats:

a) Quan l'esperança matemàtica és igual a la quota d'entrada, el joc es considerarà just. Per exemple, si suposem que el premi per encertar el resultat del llançament d'una moneda és de 2€ per euro apostat, aleshores el valor de l'esperança matemàtica d'aquest joc és $E = 2 \cdot (1/2) = 1$. Aquest resultat ens està indicant que el jugador tindrà l'esperança de mantenir la quantitat monetària que ha apostat.

b) Quan l'esperança matemàtica és menor a la quota d'entrada, el joc resultarà desfavorable pel jugador. Per exemple, si el premi per encertar el nombre on caurà la pilota de la ruleta del casino és de 36€ per euro apostat, aleshores, i donat que no només hi ha 36 nombres sinó també el número zero, tenim que l'esperança matemàtica del joc serà de $E = 36 \cdot (1/37) = 0'97$. Aquest resultat significa que per cada 1€ que un jugador aposti, tindrà l'esperança de quedar-se amb $0'97$€ o, i el que és el mateix, de cada 100€ que aposti, tindrà l'esperança de perdre 3€.

c) Quan l'esperança matemàtica és major a la quota d'entrada, el joc serà favorable pel jugador. Per exemple, si suposem que el premi per encertar el número que sortirà en el llançament d'un dau és de 10€ per euro aposta, aleshores el valor de l'esperança és $E = 10 \cdot (1/6) = 1'67$. Això significa que per cada 1€ que un jugador hagi apostat tindrà l'esperança matemàtica de guanyar $0'67$€ o, de la mateixa manera, de cada 100€ invertits, tindrà l'esperança de guanyar 67€.

Definició 1.8. La teoria de la utilitat esperada és un concepte que serveix com a guia de referència per jutjar decisions que involucren la incertesa. La teoria recomana quina opció hauria d'escollir un individu racional en una situació complexa, basant-se en la tolerància al risc del jugador així com en les seves preferències personals. Aquesta es representa a través de la funció d'utilitat.

Definició 1.9. La funció d'utilitat és un concepte abstracte que fa referència a la satisfacció o utilitat que obté un individu quan gaudeix d'una quantitat determinada de béns o serveis; una satisfacció que sempre està determinada per la renta o riquesa d'aquesta persona.

Definició 1.10. Sigui $u: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funció d'utilitat, aleshores la utilitat esperada d'un joc ve determinada per

$$E\big(u(x)\big) = \sum_{i=1}^{r} p_i \cdot u(x_i)$$

on p_i representa la probabilitat de cada esdeveniment i x_i el valor o premi del mateix.

Observació 1.5. El concepte d'utilitat és subjectiu i, per tant, no es pot mesurar. Tot i així, és possible fer-se'n una idea gràcies a la funció d'utilitat.

Definició 1.11. Llei dèbil dels grans nombres: sigui $\{X_n, n \geq 1\}$ una successió de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes amb una esperança comú de $E(X_1) = \xi < \infty$, aleshores $\forall \varepsilon > 0$ tenim que

$$\lim_{n \to \infty} (|\overline{X_n} - \xi| < \varepsilon) = 1$$

on $\overline{X_n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$. En altres paraules, $\overline{X_n}$ convergeix en probabilitat a ξ.

2. Descripció del problema de Sant Petersburg

El problema de Sant Petersburg consisteix en una paradoxa matemàtica que s'inscriu en l'àmbit de la teoria de la decisió i la teoria de la probabilitat, però que també ha estat estudiat des del prisma d'altres disciplines, com és el cas de l'economia o la filosofia. En funció de la branca d'estudi que l'ha analitzat, l'enunciat del problema ha pogut patir certes variacions, essent el cas que la proposta original s'ha vist modificada. Sigui com sigui, el seu significat primer s'ha mantingut i el problema de fons ha restat intacte. La versió original del que posteriorment seria conegut com la PSP fou plantejada pel matemàtic suís Nicolaus Bernoulli (1687–1759). Ell n'és el seu "inventor" i, arrel d'un seguit de discussions que va mantenir amb altres teòrics, l'enunciat canònic del problema esdevingué el següent:

> Pedro arroja una moneda al aire una y otra vez hasta que al caer la misma al suelo aparece "cara". Él se compromete a entregar a Pablo un ducado, si en la primera caída aparece una "cara", dos ducados si la "cara" aparece en la segunda caída, cuatro ducados si aparece en la tercera, ocho si aparece en la cuarta, y así sucesivamente, doblándole el número de ducados en cada caída adicional. Supongamos que queremos determinar el valor de la expectativa de ganancia de Pablo (Sánchez, 1984, pp.12–13).

Després d'haver formulat el problema anterior,[3] Nicolaus es va fer una pregunta que estava directament lligada al tema de l'esperança matemàtica. En concret, es qüestionà quin és el valor esperat dels guanys que pot adquirir el jugador Pablo. Un càlcul, aquest, que està fonamentat en la definició elemental d'esperança matemàtica (que es pot localitzar a la definició **1.6**) i per la qual s'obté que l'esperança del jugador Pablo és:

$$E = \sum_{i=1}^{\infty} 2^i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i = 2^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 2^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots = 1 + 1 + 1 + \cdots$$

Com es veu, aquest resultat ens proporciona una suma infinita de 1's i, per tant, el seu valor és infinit. Quantitat, aquesta, que ens està indicant que tot jugador que participi en el joc tindrà una esperança de guanys infinita. En conseqüència, si el jugador Pedro ofereix a en Pablo participar al joc amb una quota d'entrada de, suposem, dos milions de ducats, en Pablo racionalment hauria d'acceptar, perquè la mitjana de guanys que pot adquirir és molt més alta que la suma d'entrada que ha pagat —és, de fet, infinitament superior. Nogensmenys, i com es preveu, aquesta situació condueix a una paradoxa.

[3] Com es sobreentén, en la formulació original el premi a retornar és de 2^n monedes, essent n el número de llançament on ha aparegut "cara". Tanmateix, al llarg dels anys, alguns matemàtics han utilitzat la notació de 2^{n-1} per referir-se a la quantitat monetària a retornar (Solé, 2012). Com veurem més endavant, aquest és el cas de Cramer, matemàtic suís contemporani de Nicolaus que va continuar amb la tasca del francès.

Òbviament, ni el jugador Pablo ni cap altre estaria disposat a pagar una quantitat com la que hem anotat, bàsicament perquè aquest joc «proporciona premios muy cuantiosos con probabilidad extremadamente pequeña […] [Es decir] las ganancias crecen exponencialmente mientras que las probabilidades decrecen también exponencialmente, siendo siempre el valor medio de cada posible premio igual a un euro» (Parrondo, 2007, p.63). Això ocorre d'aquesta manera perquè si, per exemple, la "cara" apareix per primera vegada a la tirada número 17, els guanys seran de $2^{17} = 131.072$ ducats. Beneficis que s'obtindran amb una probabilitat de:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{17} = \frac{1}{131072} \simeq 7'63 \cdot 10^{-6}$$

Quelcom que ens està demostrant que cap individu sota plenes condicions racionals apostaria una quantitat tan elevada. En paraules del propi Daniel Bernoulli (1700–1782), qui era cosí de Nicolaus i és reconegut per haver estudiat en profunditat el problema que planteja la paradoxa: «Although the standard calculation shows that the value of Paul's expectation is infinitely great, it has [...] to be admitted that any fairly reasonable man would sell his chance, with great pleasure, for twenty ducats» (citat per Huang, 2013, p.2). Paraules que, com estudiarem just a continuació, han fet reflexionar a matemàtics d'arreu del món, els quals han aportat resolucions molt diferents sobre el problema de la PSP.

3. Estudi històrico-matemàtic de les respostes

Abans d'estudiar en profunditat els debats posteriors que es van generar sobre el problema proposat originàriament per Nicolaus Bernoulli, ens sentim obligats a fer una breu introducció sobre els antecedents que van incitar el seu plantejament. Amb seguretat, podem afirmar que fou el físic i matemàtic neerlandès Christiaan Huygens (1629–1695) qui, a la segona meitat del segle XVII, va realitzar un estudi sistemàtic del concepte d'esperança al seu llibre titulat *De ratiociniis in ludo aleae*. Tot i que el concepte que introduí no fou l'esmentat sinó el d'*expectatio* —que s'acabaria traduint per la paraula "esperança" (Ruiz, 1999)—, amb la seva conceptualització, Huygens va donar nom a una de les qüestions matemàtiques que a l'època eren objecte de debat: la que consistia en determinar quina havia de ser la quantitat fixa de diners que un individu hauria d'estar disposat a intercanviar en un joc d'atzar (Inoue & Parmigiani, 2009).

Tanmateix, cal considerar que, a principis del segle anotat, un seguit de matemàtics, tals com els francesos Pierre De Fermat (1601–1665) i Blaise Pascal (1623–1662), ja havien calibrat com d'atractiu podria ser realitzar el càlcul del valor esperat d'un joc. El problema és que els seus estudis, tot i interessants i molt rellevants, van quedar en una posició antagònica

(Solé, 2012), sense tenir massa repercussió en l'època, cosa que ha provocat que la història no els hagi atribuït el mateix honor que el donat a Huygens quant al plantejament i teorització del concepte. Sigui com sigui, tant els matemàtics francesos citats com el propi Huygens van establir unes bases prou fermes per realitzar estudis d'un caire més complex sobre el concepte esmentat. Un d'aquests serà el que realitzarà Nicolaus Bernoulli i que continuarà el seu cosí Daniel i d'altres matemàtics contemporanis i posteriors.

3.1- Plantejament original de la paradoxa

El 9 de setembre de 1713, el matemàtic Nicolaus Bernoulli va enviar una carta a Pierre Raymond de Montmort (1678–1719) on li proposava cinc problemes relacionats amb la teoria de jocs i la teoria de la probabilitat (per la lectura complerta dels problemes citats, consulteu l'annex **1**). Els dos últims problemes que li va plantejar són certament importants, en tant que consistien en una versió bàsica del que posteriorment seria conegut com la PSP. Bàsicament, el quart o penúltim problema plantejava un joc on participaven dos jugadors, A i B, i on el jugador A llançava un dau tantes vegades com fos necessari fins obtenir el número 6. Si aquest fet es produïa a la primera tirada, aleshores A havia d'entregar al seu contrincant, el jugador B, una moneda; si ocorria a la segona tirada, A havia de donar a B dues monedes; si passava a la tercera, A havia de donar a B tres monedes, i així successivament. Amb tot, si el resultat 6 s'obtenia a l'enèsim llançament, A havia d'entregar a B 2^{n-1} monedes per $n = 12$ o més gran (Peterson, 2020; Ruiz, 1999). Llavors, Nicolaus preguntava quina és l'esperança del jugador B. Aquesta era la mateixa qüestió que es plantejava al cinquè i últim problema però, aquest cop, l'enunciat ens deia que el jugador A prometia donar a B monedes en successions diferents; concretament les de $1, 2, 4, 8, 16 \ldots$ o $1, 3, 9, 27 \ldots$ o $1, 4, 9, 16, 25 \ldots$ o $1, 8, 27, 64 \ldots$ (Ruiz, 1999).

Passats uns mesos, concretament el 15 de novembre de 1713, Montmort va contestar a Nicolaus esmentant que la solució no era massa difícil de trobar, doncs aquesta consistia en la realització d'un càlcul simple de suma de sèries (quadrades, cúbiques o la convenient); una operació que, de fet, ja havia estat ideada per l'oncle de Nicolaus, Jacob. Aplicant el mètode d'aquest últim sobre el quart problema, l'esperança matemàtica del jugador B esdevenia la següent (González & Landro, 2018):

$$E = \frac{1}{6} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{j-1} = \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{5}{6}\right)^{-2} = 6$$

Nogensmenys, el 20 de febrer de l'any següent, Nicolaus va enviar una nova carta a Montmort on hi feia notar que, per trobar els guanys esperats del jugador B, es podien utilitzar dos mètodes: o bé mitjançant una suma de termes d'una sèrie infinita, tal com Montmort ja havia observat, o bé a partir d'inducció matemàtica. Amb aquesta, la solució consisteix en el següent:[4] sigui x el valor esperat al principi del joc i y el valor esperat un cop s'hagi realitzat la primera jugada, obtenim que

$$x = \frac{1 + 5y}{6}$$

Aleshores, en tant que el jugador B espera rebre algunes monedes amb la progressió $2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ —on cada terme és una unitat major que el valor de la progressió dels premis, $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$— tenim que el valor de y ha de ser exactament $x + 1$. Com vegem, un cop hem substituït, obtenim un resultat idèntic a la solució a la que va arribar Montmort amb l'altre mètode:

$$x = \frac{1 + 5 \cdot (x + 1)}{6} = \frac{6 + 5x}{6} \to 6x = 6 + 5x \to x = 6$$

Quant a la solució del cinquè problema, a Montmort li van sorgir dues discrepàncies que el feren dubtar sobre el significat d'esperança establert a l'època. En primer lloc, havent resolt el problema de la mateixa manera que el quart —a partir d'una sèrie infinita de sumes, tenint en compte que la probabilitat de treure un 6 és $\frac{1}{6}$ i emprant la mateixa successió de premis $1, 2, 4, 8, \ldots$—, Montmort va obtenir que l'esperança matemàtica era infinita:

$$E = \frac{1}{6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n \cdot 2^n = \frac{1}{6} \cdot \left[1 + \left(\frac{5}{6}\right) \cdot 2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot 2^2 + \cdots + \left(\frac{5}{6}\right)^n \cdot 2^n + \cdots\right] = \frac{1}{6} \cdot \infty = \infty$$

En segon lloc, i en tant que en la majoria de jocs d'atzar l'aposta justa s'establia tenint en compte els guanys esperats per part del jugador, Montmort va pensar que ningú en el seu sa judici estaria disposat a pagar una quantitat infinita de diners per entrar al joc —ni tampoc una quantitat monetària massa elevada (Faccarello, 2016). Observació que, de fet, va ser enviada a Nicolaus a una carta del 24 de març del 1714, i a la qual Bernoulli va indicar molt prudentment[5] que si pel cinquè problema s'usa el procediment d'inducció matemàtica emprat pel quart però, en aquest cas, amb la sèrie de premis $1, 2, 4, 8, \ldots$, s'obté que s'ha de complir que $y = 2x$. Per tant, aquí el resultat serà:

---

[4] Per si el lector hi està interessat, les paraules literals de Nicolaus foren: «Il est vrai ce que vous dites que les deux derniers de mes Problèmes n'ont aucune difficulté, cependant vous auriez bien fait d'en chercher la solution, car elle vous auroit fourni l'occasion de faire une remarque très curieuse [...] Substitués donc $x + 1$ au lieu de y, et Vous aurés $x = (5x + 6)/6$, et partant $x = 6$. Ce que Vous auriés aussi trouvé par la voye des suites infinies» (citat per Meusnier, 2006, p.10).

[5] Les paraules literals de Bernoulli foren: «Mais si Vous suives la même analyse dans les exemples du 5^{me} Probléme comme dans l'exemple de cette progression 1,2,4,8 ..., où Vous aurés $y = 2x$, Vous trouverés $x = (1 + 10x)/6$, et partant $x = -1/4$, ce qui est une contradiction» (citat per Meusnier, 2006, p.11).

$$x = \frac{1+5y}{6} = \frac{1+5\cdot(2x)}{6} = \frac{1+10x}{6} \rightarrow 6x = 1+10x \rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

Com s'observa, aquest resultat és completament diferent al que va trobar Montmort, el qual era infinit. Sigui com sigui, Bernoulli va comentar que trobar un resultat negatiu pel valor d'un joc en el qual només es poden obtenir quantitats positives era realment curiós. De fet, segons ell, era fins i tot contradictori (Meusnier, 2006). Per aquesta raó, Bernoulli va intentar resoldre el seu problema mitjançant el mètode de la sèrie infinita de sumes, pel qual va obtenir, paradoxalment, un resultat infinit. Quelcom que va generar dues contradiccions importants. Per una banda, que la primera resolució donava un resultat negatiu mentre que la segona atorgava un resultat infinit i, per l'altra, que el resultat d'infinit s'oposava a les deduccions a les que s'havien arribat fins llavors pel càlcul de l'esperança matemàtica.[6] Amb tot, Nicolaus es va veure obligat a concloure que, en contra de la regla de Montmort i la seva mateixa, el valor just d'un joc no sempre ve determinat per l'esperança de guanys que pot adquirir el jugador:

> For Nikolaus then, and for many of his successors, the paradox was the discrepancy between the nominal mathematical expectation, which heretofore had been accepted in evaluating games of chance, and the actual value of the retorn one might anticipate in the game (Dutka, 1988, p.19).

Havent arribat a aquestes conclusions, Montmort va enviar una carta a Nicolaus on, en essència, acceptava el seu argument però sense per això abandonar les seves deduccions, tot i que també va suggerir que no hi havia ningú millor qualificat que el propi Nicolaus per dur a terme una investigació profunda sobre el tema. Llavors, llevat que Nicolaus va seguir intentant involucrar a Montmort en la seva recerca, ell es va mantenir apartat de l'assumpte.

3.2- La proposta de Cramer

La prematura mort de Montmort l'any 1719 va provocar que el debat anterior quedés suspès durant uns anys fins que el matemàtic suís Gabriel Cramer (1704–1752), un cop hagué llegit el problema original plantejat per Nicolaus, reactivés la discussió l'any 1728. El 21 de

[6] L'anomalia dels resultats va provocar que Nicolaus Bernoulli realitzés un seguit de càlculs per buscar-ne la seva resolució. Fins i tot va procurar compaginar els dos resultats obtinguts —el de $-\frac{1}{4}$ i el de infinit— per, així, reduir les contradiccions que havia generat el cinquè problema. Per fer-ho, bàsicament va igualar ambdós resultats: «Pour répondre à cette contradiction, on pourrait dire que cette fraction regardée comme ayant le dénominateur négatif et par conséquent plus petit que zéro, est plus grande que $\frac{1}{0}$, et qu'ainsi le sort de *B* est plus qu'infini, ce qu'on trouve aussi effectivement par la voye des suites infinies» (citat per Meusnier, 2006, p.11). Una operació que ha estat titllada, per alguns, de fal·làcia matemàtica (Dutka, 1988).

maig d'aquell mateix any, Cramer va enviar una carta a Nicolaus on li proposava una versió més simple del problema (per la lectura complerta de la carta, vegeu annex **2**), que consistia en realitzar llançaments amb una moneda tantes vegades com fos necessari fins que aparegués "cara" per primer cop; moment en el qual es pagaria al jugador una quantitat de 2^{n-1}, essent n el número de llançament en què ha aparegut "cara" (Faccarello, 2016; Solé, 2012). En tant que l'esperança matemàtica d'aquest joc tornava a ser infinita, com de fet ja havia ocorregut en el cas dels daus original, Cramer va observar que existeix una discrepància entre el càlcul matemàtic i el sentit comú; oposició que resulta del fet que «mathematicians value money in proportion its quantity, whereas reasonable people value it in proportion to its use» (citat per Huang, 2013, p.8).

A la carta mencionada, Cramer també va intentar resoldre el problema a partir de dues suposicions (Ruiz, 1999; Solé, 2012). En primer lloc, va considerar que un guany econòmic igual o superior a 2^{24} provocava el mateix grau de satisfacció a tot jugador, independentment del nivell adquisitiu de cada participant particular. Gràcies a aquesta hipòtesis, va aconseguir arribar a un resultat molt més raonable que aquell obtingut per Nicolaus, doncs va descobrir que la quota d'entrada que el jugador havia de pagar no era infinita, sinó de 13 ducats (Ruiz, 1999):

$$E = \sum_{n=1}^{24} 2^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=25}^{\infty} 2^{24} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 13 \qquad (3.2.1)$$

La segona suposició va consistir en establir (sense cap justificació conceptual) com a valor moral de la riquesa l'arrel quadrada d'aquesta mateixa, de manera que la funció d'utilitat vindria donada per $u(x) = \sqrt{x}$, essent x la fortuna del jugador. A continuació, va realitzar el càlcul de l'esperança matemàtica però, aquest cop, tenint en compte la funció d'utilitat $u(x)$ i, doncs, obtenint el següent resultat (Ruiz, 1999):

$$E\big(u(x)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2^{n-1}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \qquad (3.2.2)$$

Nogensmenys, el resultat anterior no és el que Cramer estava cercant en tant que, com ell mateix va afirmar, «for the equivalent ought to be not equal to the (moral) expectation, but equal to the regret for the loss of the moral expectation of the pleasure which he had hoped to receive by winning» (Dutka, 1988, p.23). A continuació, assignant a α el resultat obtingut a (3.2.2) elevat al quadrat, extraiem la següent resolució (Gonzalez & Landro, 2018):

$$\alpha = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{12 - 8\sqrt{2}} \simeq 2'9$$

Concloem, amb tot, que el jugador B hauria de pagar $2'9$ ducats. Una conclusió de la qual Cramer no estava massa satisfet, però pensava que aquesta estimació s'apropava més a la lògica de la realitat que el resultat de $(3.2.1)$. En conseqüència, va afirmar haver resolt molt més afinadament el problema, i va declarar que els seus càlculs demostraven que cap persona racional donaria una quantitat infinita de monedes per participar a aquest joc (Huang, 2013).

Cal tenir en compte que l'aportació de Cramer no fou la de donar una definició general de la funció que representa el valor moral dels diners, sinó que va demostrar que, en certs casos, la funció de pagaments podia conduir a una esperança matemàtica finita (Dutka, 1988; Gonzalez & Landro, 2018). Un fet que, juntament amb la falta de justificació racional de la proposta, va provocar que Nicolaus Bernoulli no acceptés la seva solució. De fet, va rebutjar l'argument segons el qual el plaer que s'obté a l'obtenir una suma infinita de monedes no és major al que s'obté per una suma molt gran, però finita, de diners (Dutka, 1988). Altrament, Bernoulli pensava que realitzant apostes com aquestes un individu té molt poques possibilitats de guanyar una suma de diners superior a l'apostada. De fet, va sostenir que el jugador està moralment segur de perdre-hi capital. Com s'observa, Bernoulli va tenir molt més en compte el punt de vista pràctic del problema. És a dir, només va considerar les probabilitats relatives de guanyar o perdre sense parar atenció en les magnituds dels possibles guanys. Per això, va argumentar que una probabilitat molt petita de guanyar una quantitat molt gran no es veu contrarestada per una probabilitat molt gran de perdre una quantitat molt petita. Mentre el primer cas fou catalogat d'impossible, el segon es va judicar de segur. Tot i que Cramer no va acceptar l'argument anterior de Nicolaus, va reconèixer-li la dificultat de determinar les magnituds de les probabilitats susceptibles de ser menystingudes. Un fet que, amb tot, va restar sense cap resolució (Dutka, 1988).

3.3- La solució de Daniel Bernoulli

Mentre Nicolaus dialogava amb Cramer, aquest primer va procurar que el seu cosí Daniel Bernoulli (1700–1782), aleshores resident a Sant Petersburg, mostrés interès pel seu problema. Tot i que el seu parent, en un principi, es va prendre el tema força a la lleugera, va acabar dedicant-hi anys de reflexió i estudi. Unes indagacions que acabarien donant els seus fruits amb la publicació d'un article l'any 1738 titulat *Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis*, que passaria a ser considerat com el primer document que va gosar introduir la funció d'utilitat (Solé, 2012), i on també aparegueren les anàlisis del propi Daniel sobre el problema, així com la seva proposta de solució.

L'article mencionat fou publicat a una de les revistes científiques més importants del segle XVIII, l'anomenada *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*. De fet, és justament perquè Daniel va publicar el seu article a la revista mencionada —que, com el seu nom indica, tenia seu a la ciutat russa de Sant Petersburg—, que el problema rep el nom de paradoxa de Sant Petersburg. A continuació farem un estudi detallat de la proposta de Daniel, i per fer-ho prendrem el seu article com a fil conductor principal.

En un principi, Daniel Bernoulli, tot seguint els passos de Huygens, va considerar que l'esperança matemàtica és en sí mateixa insuficient per determinar el valor del risc que pot experimentar un jugador. Aquesta insuficiència es pot corroborar mitjançant un argument de vessant pràctica (Dutka, 1988). En opinió de Daniel, l'obtenció o la pèrdua d'una determinada suma de diners no té el mateix calibre per a tots els individus en igualtat de condicions, doncs aquesta és relativa als béns que disposa cadascú. En conseqüència, el matemàtic va observar que és necessari fer una distinció entre preu i utilitat, essent el cas que el primer és una variable objectiva, idèntica per a totes les persones, i la segona subjectiva, dependent de les circumstàncies personals. Per donar compte de les seves explicacions, Daniel va aportar un exemple força il·lustratiu al seu article, on, com llegirem, deixava clar que un benefici de, per exemple, 1.000 ducats és molt més significatiu per un individu amb baix nivell econòmic que per un amb un alt nivell adquisitiu:

> Somehow a very poor fellow obtains a lottery ticket that will yield with equal probability either nothing or twenty thousand ducats. Will this man evaluate his chance of winning at ten thousand ducats? Would he not be ill-advised to sell this lottery ticket for nine thousand ducats? To me it seems that the answer is in the negative (citat per Faccarello, 2016, p.12).

Amb tot, la proposta de Daniel per resoldre la paradoxa consistia en fer un càlcul de l'esperança matemàtica del joc en termes d'utilitat i no en termes monetaris. Aquesta era una estratègia força rentable, perquè, per una banda, el concepte de riquesa que va utilitzar es definia «in a broad and modern way: [not consisting only] in the material wealth already possessed, but also [taking] into account the future incomes that a given human capital is susceptible to yield» (Faccarello, 2016, p.8) i, per l'altra, perquè imposant restriccions sobre la funció d'utilitat era possible aconseguir que l'esperança matemàtica adquirís un valor finit.[7] Per fer el càlcul, va proposar que la utilitat o el valor que per una persona representa un increment dels seus béns és inversament proporcional al capital primitiu d'aquest mateix

[7] Tal com es sobreentén, aquesta solució serà molt semblant a la proposta feta per Cramer al 1728. De fet, així mateix li va fer notar Nicolaus quan el seu cosí estava a punt de publicar l'article esmentat, tot enviant-li una còpia de la carta que Cramer li havia escrit i on hi figurava el treball realitzat pel suís. Havent llegit el treball del seu predecessor, a la versió final del seu text, Daniel va reconèixer el següent: «Indeed I have found his theory so similar to mine that it seems miraculous that we independently reached such close agreement on this sort of subject» (Bernoulli, 1954, p.33).

individu.[8] Pel jugador, el que importa no és la suma de diners sinó, i usant les paraules del propi Daniel, el *emolumentum* —és a dir, el benefici, l'avantatge, generalment traduït com "la utilitat"—; o, i dit altrament, els guanys del jugador, els quals depenen de la riquesa que posseïa prèviament (Faccarello, 2016).

Aleshores, i basant-se en la hipòtesis segons la qual els increments infinitesimals de la utilitat del jugador —siguin aquests $du(y)$— són directament proporcionals als increments infinitesimals de la seva fortuna —sigui aquesta y— i inversament proporcionals a la suma de la fortuna inicial —que anomenarem y_0—, i, alhora, havent considerat k com una constant positiva que depèn del comportament del jugador, tenim que (Gonzalez & Landro, 2018):

$$du(y) = k \cdot \frac{dy}{y} \longrightarrow \frac{du(y)}{dy} = \frac{k}{y}$$

A continuació, i resolent l'anterior igualtat, Daniel va obtenir que la funció d'utilitat de la fortuna del jugador era proporcional al seu logaritme:

$$u(y) = \int_{y_0}^{y} \left(\frac{k}{x}\right) dx = k \cdot [\log(y) - \log(y_0)] + C$$

Tanmateix, era necessari continuar el càlcul i trobar el valor de C, doncs aquesta és una constant desconeguda. Per realitzar-ho, s'ha de tenir en compte que s'ha de complir que $u(y_0) = 0$, a partir del qual obtenim que $C = 0$. A més, per tal que la funció d'utilitat estigui definida a tot punt s'ha de verificar que $y > 0$ doncs, en paraules de Daniel, «nadie puede alegar que no posee absolutamente nada [...] Para la gran mayoría la más importante de sus posesiones debe ser su capacidad productiva» (citat per Gonzalez & Landro, 2018, p.71). Amb tot, Bernoulli obtingué que la funció d'utilitat ha de ser la següent:

$$u(y) = k \cdot \log\left(\frac{y}{y_0}\right) = k \cdot \log(y) - k \cdot \log(y_0)$$

Com es veu, la segona derivada d'aquesta funció és negativa, cosa que òbviament vol dir que la utilitat marginal de la riquesa i/o renta és decreixent. Quelcom que va permetre al matemàtic francès concloure que en tot joc equitatiu l'esperança moral és negativa per als dos jugadors, degut al fet que els possibles guanys són menors a les possibles pèrdues (Gonzalez & Landro, 2018).

[8] Les paraules exactes de Daniel, que figuren al sisè punt de l'article de l'any 1738, eren les que segueixen: «Now it is highly probable that any increase in wealth, no matter how insignificant, will always result in an increase in utility which is inversely proportional to the quantity of goods already possessed» (citat per Dutka, 1988, p.27).

Suposant, just a continuació, que l'individu rep una riquesa addicional de x unitats monetàries, el seu increment d'utilitat vindrà donat per $u(y_0 + x)$. Aquesta increment, amb una funció d'utilitat com la postulada per Bernoulli, tindrà un valor de

$$u(y_0 + x) = k \cdot \log(y_0 + x) - k \cdot \log(y_0)$$

En conseqüència, podem escriure la utilitat esperada del joc de la manera següent (Sánchez, 1984):

$$u(E) = k \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \log(y_0 + 1) + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \log(y_0 + 2^{n-1}) + \cdots\right] - k \cdot \log(y_0) \quad (3.3.1)$$

Finalment, aplicant el criteri del matemàtic francès Jean le Rond d'Alembert (1717–1783), anomenat "Criteri d'Alembert",[9] a la suma de termes que tenim dins els claudàtors a (3.3.1), es comprova que la utilitat esperada té un valor finit. Per veure-ho més a fons, cal realitzar el següent càlcul:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}} \cdot \log(y_0 + 2^n)}{\frac{1}{2^n} \cdot \log(y_0 + 2^{n-1})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log\left(2^n \cdot \left(\frac{y_0}{2^n} + 1\right)\right)}{\log\left(2^n \cdot \left(\frac{y_0}{2^n} + \frac{1}{2}\right)\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log(2^n) + \log\left(\frac{y_0}{2^n} + 1\right)}{\log(2^n) + \log\left(\frac{y_0}{2^n} + \frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \frac{\log\left(\frac{y_0}{2^n} + 1\right)}{\log(2^n)}}{1 + \frac{\log\left(\frac{y_0}{2^n} + \frac{1}{2}\right)}{\log(2^n)}} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{2}$$

D'altra banda, anomenant r al preu del joc, observem que el jugador tindrà una pèrdua d'utilitat igual a

$$u(y_0 - r) = k \cdot \log(y_0 - r) - k \cdot \log(y_0)$$

Aquesta expressió té clarament signe negatiu i, si volem mesurar el cost del joc en termes d'utilitat, haurem de fer ús del valor absolut. Així podrem comparar la utilitat perduda al pagar r monedes amb la utilitat guanyada al participar al joc. El màxim valor de r que s'estarà disposat a pagar serà aquell pel qual es compleixi que $|u(y_0 - r)| = u(y_0 + x)$. Aleshores, obtindrem la següent igualtat:[10]

[9] Aquest criteri ens diu que la sèrie $\sum_n a_n$, amb $a_n > 0$, té límit si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ (Sánchez, 1984).

[10] El procediment pel qual hem obtingut el càlcul del valor de r és el següent:

$$\log(y_0) - \log(y_0 - r) = \log(y_0 + x) - \log(y_0) \leftrightarrow \log\left(\frac{y_0}{y_0 - r}\right) = \log\left(\frac{y_0 + x}{y_0}\right) \leftrightarrow \frac{y_0}{y_0 - r} = \frac{y_0 + x}{y_0}$$

$$-k \cdot [\log(y_0 - r) - \log(y_0)] = k \cdot [\log(y_0 + x) - \log(y_0)] \leftrightarrow r = \frac{y_0 \cdot x}{y_0 + x}$$

En tot aquest enfocament, cal considerar, com de fet ja hem afirmat anteriorment, que Daniel valora la utilitat marginal de forma decreixent, utilitzant una funció d'utilitat diferent a la que havia proposat Cramer en el seu moment. Concretament, planteja la hipòtesis segons la qual l'increment d'utilitat és donat pel quocient $\Delta x/x$ quan la fortuna x del jugador creix en una quantitat Δx. Aleshores, si la fortuna inicial del jugador és x_0, i prenent en consideració les anteriors explicacions, el que obtenim és que l'increment d'utilitat a x_1 serà:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{1}{x}\right) dx = \ln\left(\frac{x_1}{x_0}\right)$$

Tot seguit, Bernoulli considera que la quota d'entrada q justa pel joc serà aquella que fa que l'esperança de l'increment d'utilitat Δu sigui nul·la. Per tant, tenim que:

$$E(\Delta u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \ln\left(\frac{x_0 - q + 2^n}{x_0}\right)$$

Suposant que invertim tota la nostra fortuna ($q = x_0$), la condició $E(\Delta u) = 0$ es calcula de la manera següent, obtenint un resultat finit en comptes d'un d'infinit (Solé, 2012):

$$E(\Delta u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \ln\left(\frac{2^n}{q}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2^n}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln q}{2^n} = 2 \cdot \ln 2 - \ln q = 0 \leftrightarrow q = 4$$

També cal tenir en compte que Daniel va fer un estudi summament complert sobre el principi de la utilitat esperada, basant-se en les actituds individuals que un jugador pot adoptar davant el risc. En conseqüència, va poder observar que en tota ocasió en què es determina el preu de la quota de participació en funció de l'esperança dels guanys d'un determinat joc, el jugador serà un perdedor perquè «the disutility of the stake would always be greater than the utility of the expected gain» (Faccarello, 2016, p.11).

Finalment, i com a conclusió, cal dir que assignar probabilitats a cada resultat possible d'un problema en qüestió i, a partir d'aquí, calcular la utilitat esperada de cada acció possible pot ajudar notablement a l'hora d'escollir la decisió més convenient de totes. Això és el que, a grans trets, va realitzar Daniel Bernoulli a la seva època, i el seu llegat ha perdurat, de forma indefinida, al llarg dels segles i fins a l'actualitat. No per atzar, la paradoxa va rebre el nom de PSP en honor a les investigacions d'aquest matemàtic.

$$\leftrightarrow\ y_0 - r = \frac{(y_0)^2}{y_0 + x} \ \leftrightarrow\ -r = \frac{(y_0)^2}{y_0 + x} - y_0 \ \leftrightarrow\ -r = \frac{-y_0 \cdot x}{y_0 + x} \ \leftrightarrow\ r = \frac{y_0 \cdot x}{y_0 + x}$$

3.4- Aportacions secundàries de l'època

Matemàtics i probabilistes del segle XVIII, contemporanis dels pioners Cramer, Daniel i Nicolaus, van intentar nombroses solucions al problema de Sant Petersburg a partir de vàries alternatives. Aquells que la història ha considerat més rellevants seran estudiades de forma detallada, i seran obviades, no per voluntat pròpia sinó atenent-nos a l'economia del present treball, aquelles aportacions subsidiàries i/o les que no tingueren massa repercussió en l'època ni tampoc en els segles posteriors. Alguns noms d'aquests últims són, entre molts d'altres, Leonhard Euler (1707–1783), Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) o Pierre-Simon Laplace (1749–1827).[11] Com veurem, ni els estudis d'aquests últims ni dels que analitzarem detingudament van arribar a una solució absoluta pel problema (Gonzalez & Landro, 2018). Tanmateix, no per això han de ser menyspreats, doncs van edificar les bases de les reflexions que es desenvoluparien posteriorment.

3.4.1- A. Fontaine. Guanys del jugador < Fortuna del banquer

El retorn a l'estudi del concepte d'esperança matemàtica per part de Cramer i del cosí de Nicolaus va incitar al francès Alexis Fontaine (1704–1771) a realitzar la seva pròpia proposta de solució. Aquesta es basava en un principi segons el qual els guanys adquirits per un jugador mai poden superar la fortuna del banquer —fortuna que es suposava finita, i que anomenarem x—, a partir de la qual va cercar quina havia de ser la quota monetària d'entrada —que anomenarem y— que el jugador havia de pagar per tal que el joc fos equitatiu i/o just. Aleshores, i havent estipulat prèviament un màxim de $n+1$ llançaments, Fontaine va afirmar que l'esperança del jugador havia de venir donada per la regla següent (Gonzalez & Landro, 2018):

$$E = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{2^j} \cdot (2^{j-1} - y) + \sum_{j=n+2}^{\infty} \frac{x}{2^j} = \frac{n+1}{2} - \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \cdot y + \frac{x}{2^{n+1}}$$

En aquest cas, el valor de l'esperança matemàtica que converteix el joc de Sant Petersburg en equitatiu és aquella que té un límit igual a zero quan n tendeix a infinit.[12] Ara, resolent aquesta equació obtindrem el valor de y; és a dir, sabrem quina ha de ser l'aposta que ha de pagar el jugador per tal que el joc sigui just (Fontaine, 1764):

[11] Si el lector està interessat en conèixer les aportacions d'autors com els anotats, pot consultar Gonzalez & Landro, 2018, pp.81–84 i Todhunter, 1865, p.470 (pel cas de Laplace); Dutka, 1988, p.26 i Parrondo, 2007, pp.71–72 (pel cas d'Euler) i Todhunter, 1865, pp.301–320 (per Lagrange). En general, el volum citat de Todhunter és una eina molt útil per estudiar les propostes d'altres matemàtics de l'època, no només quant al problema de Sant Petersburg sinó pel que fa a teoria de jocs i la teoria de la probabilitat en general.

[12] L'equació que ens permet corroborar-ho és la següent: $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{n+1}{2} - \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \cdot y + \frac{x}{2^{n+1}}\right] = 0$ (Gonzalez & Landro, 2018).

$$y = \frac{(n+1)\cdot 2^n + x}{2^{n+1} - 1}$$

A més, i ara tenint en compte la desigualtat $2^n < x + y \leq 2^{n+1}$ —on n és un nombre enter—, és possible acotar el capital que hauria de disposar el banquer per complir la condició que el joc sigui just. Substituint el valor de y a la desigualtat anterior,[13] obtenim el següent resultat (Dutka, 1988):

$$\frac{2^{n+1} - n - 2}{2} < x \leq \frac{2^{n+2} - n - 3}{2}$$

Concloem, amb tot, que Fontaine no va trobar un preu fix com a quota d'entrada sinó una fórmula variable, la qual depenia del nombre de llançaments realitzats així com del capital que disposa el banquer.

3.4.2- G. Buffon. Una visió pràctica de la probabilitat

Després d'un conjunt de propostes heterodoxes desenvolupades durant el període que abracen els anys 1728 —moment en què començaren les discussions entre Cramer i Daniel— fins el 1777, el matemàtic francès Georges-Louis Leclerc de Buffon (1707–1788) va intentar resoldre el problema de la PSP al seu llibre *Essai d'Arithmétique Morale*. Aquest autor, per interpretar més adequadament el principi d'aversió al risc, va argumentar que tot jugador hauria d'ignorar la possibilitat de guanyar una quantitat monetària important, donat que la probabilitat d'aconseguir-ho és molt escassa. A més, també va sostenir que tot resultat suficientment improbable és, alhora, moralment impossible i, per tant, susceptible de ser ignorat. Al mateix temps, Buffon va expressar, irònicament i en un to humorístic, que la quantitat no és una bona mesura del valor:

> El ávaro se asemeja al matemático. Ambos aprecian el dinero por su cantidad numérica. El hombre sensato desprecia tanto su masa como su medida numérica. Ve solamente las ventajas que puede sacar del dinero. Razona mejor que el matemático. La pieza de cinco centavos que el pobre ahorra para sus gastos o la pieza idéntica que sirve para completar el millón de pesos del banquero, tienen el mismo valor para el avaro y el matemático. El avaro la tomará con placer igual y el matemático la contará con la misma

[13] El procediment de substitució a realitzar és el següent:

$$2^n < x + \frac{(n+1)\cdot 2^n + x}{2^{n+1}-1} \leq 2^{n+1} \leftrightarrow 2^n < \frac{x\cdot 2^{n+1} - x + (n+1)\cdot 2^n + x}{2^{n+1}-1} \leq 2^{n+1} \leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{x + \frac{1}{2}\cdot(n+1)}{2^{n+1}-1} \leq 1 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{2x + (n+1)}{2^{n+2}-2} \leq 1 \leftrightarrow \frac{2^{n+1} - 1 - (n+1)}{2} < x \leq \frac{2^{n+2} - 2 - (n+1)}{2} \leftrightarrow \frac{2^{n+1} - n - 2}{2} < x \leq \frac{2^{n+2} - n - 3}{2} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \frac{2^{n+1} - n - 2}{2} < x \leq \frac{2^{n+2} - n - 3}{2}$$

unidad de medida. Pero el hombre razonable considerará la pieza de cinco centavos del pobre como si fuera un peso y el peso del banquero como una monedita (citat per Parrondo, 2007, pp.69-70).

Amb tot, la solució de Buffon es va basar en el principi segons el qual el coneixement s'adquireix exclusivament per observació o per analogia. Amb aquest, va concloure que sols si el joc és repetit un gran nombre de vegades, era possible assegurar una aproximació entre la quantitat adquirida pel jugador i la suma de les seves apostes —és a dir, aproximar l'aposta del jugador a la seva esperança matemàtica (Gonzalez & Landro, 2018). A continuació, i en tant que pel matemàtic francès «if a head does not appear until after the twenty-ninth toss, there would not be sufficient money in the whole French kingdom to pay the player» (citat per Dutka, 1988, p.31), va suggerir, si més no en coincidència amb l'opinió d'Alembert, que les probabilitats suficientment petites podien ser catalogades de nul·les. Per demostrar aquest fet, va sostenir el següent:

> To arrive at a suitable threshold value, he notes that a fifty-six-year-old man, believing his health to be good, would disregard the probability that he would die within twenty-four hours, although mortality tables indicate that the odds against his dying in this period are only 10.189 to 1. Buffon thus takes a probability of $1/10.000$ or less for an event as a probability which may be disregarded (citat per Dutka, 1988, p.33; també per Huang, 2013, p.6).

En opinió de Buffon, l'argument anterior és altament convincent. La raó d'aquest fet es troba en un estudi, realitzat per ell mateix, sobre taules de mortalitat, i consisteix en que persones de la seva edat —al voltant dels 56 anys— tenen una probabilitat de $1/10.189$ de morir en el transcurs d'un dia natural, però no tenen cap preocupació i/o temor envers aquest esdeveniment (Peterson, 2020). Alhora, el matemàtic també va confirmar «[the] absurdity of paying too many *écus* [moneda francesa de l'època] for a game» (Salov, 2014, p.9). Amb les anteriors premisses, i tenint en compte que a partir del tretzè llançament la probabilitat és menor a la mencionada anteriorment $\left(\frac{1}{2^{14}} = \frac{1}{16.384} < \frac{1}{10.189}\right)$, l'esperança matemàtica del joc vindrà donada per un màxim de 13 llançaments (Ruiz, 1999):

$$E = \sum_{n=1}^{13} 2^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 6'5$$

No del tot satisfet amb l'anterior resultat, Buffon va realitzar un experiment empíric l'any 1777 un tant que anòmal, doncs aquest consistia en fer que un nen jugués al joc de Sant Petersburg en un total de 2048 ocasions (Hayden & Platt, 2009). Els resultats que va obtenir es poden trobar resumits a la taula **1**, i bàsicament conclouen que el nen va obtenir un benefici de 10.057 ducats. En conseqüència, el preu estimat de cada partida és de $\frac{10.057}{2.048} = 4'91$ ducats, és a dir, $\simeq 5$ ducats (Ruiz, 1999). Finalment, i com es mostra a la taula, va comprovar que els resultats empírics eren una confirmació dels resultats que ell mateix havia calculat a priori a nivell teòric.

		Distribution of games	
Rank of toss ending the game	Value of the game	Observed	Theorical
1	1	1.061	1.024
2	2	494	512
3	4	232	256
4	8	137	128
5	16	56	64
6	32	29	32
7	64	25	16
8	128	8	8
9	256	6	4
10	512		2
11	1.024		1
Total payout		10.057	11.264
Payout per game		4’91	5’5

Taula **1**. Resultats de l’experiment teòric i empíric de Buffon

Font: Dutka, 1988, p.35; Huang, 2013, p.17

3.4.3- J. d’Alembert. Una versió diferent de la probabilitat

L’any 1768, el matemàtic francès Jean le Rond d’Alembert (1717–1783) va sostenir que la probabilitat convencional no reparava adequadament en el comportament psicològic del jugador davant un cas d’incertesa, raó per la qual va pensar que allò que s’havia de tenir en compte sobre l’esperança matemàtica no eren els guanys dels jugadors, sinó la probabilitat d’obtenir-los (Gonzalez & Landro, 2018). A part, també va comentar que només s’havia de considerar si l’expectativa del jugador i el risc que aquest assumeix són realment infinits. Tot plegat perquè, emprant les paraules de Todhunter (1865), «the risk augments with the number of throws, and this number may, by the conditions of the game, proceed to any extent» (p. 259). És a dir, hi ha la possibilitat, per molt remota que sigui, que un individu estigui jugant un nombre infinit de temps, cosa que, en la seva opinió, és el que desencadena que l’esperança matemàtica sigui infinita.[14] Alhora, també va observar que és necessari distingir entre el que és matemàticament possible i el que és físicament possible, doncs, per exemple, tirar dos daus i obtenir dos sisos cent vegades seguides és quelcom que es pot catalogar de matemàticament possible, però és raonable afirmar que no ha passat en cap circumstància històrica i que, per tant, i probabilísticament parlant, no ocorrerà mai. És, doncs, físicament impossible. Quelcom que es pot resumir amb el fet que les probabilitats molt petites han de ser considerades nul·les (Todhunter, 1865).

Tenint en compte les observacions anteriors, d'Alembert es va proposar resoldre la PSP. Per fer-ho, i havent-se plantejat l'objectiu d'obtenir un resultat finit en l'esperança del jugador, va definir la probabilitat d'obtenir cara a l'enèsima tirada d'una manera un tant que peculiar. En comptes de sostenir que la probabilitat d'extreure cara a l'enèsim llançament era de $\frac{1}{2^n}$, va afegir una constant arbitrària β i va afirmar, sense cap raonament, que la probabilitat era $\frac{1}{2^n \cdot (1+\beta n^2)}$. En conseqüència, i donades les anteriors condicions, l'esperança matemàtica del jugador era la següent (Todhunter, 1865):

$$E = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{j-1}}{2^j \cdot (1+\beta j^2)} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1+\beta j^2} < \infty$$

No obstant, el seu suggeriment més curiós fou substituir 2^n per $2^n \cdot \left[1 + \frac{B}{(K-n)^{\frac{q}{2}}}\right]$ on B i K eren constants i q un enter imparell. Sobre això, d'Alembert va comentar:

> Nous mettons le nombre pair 2 au dénominateur de l'exposant, afin que quand on est arrivé au nombre n qui donne la probabilité égale à zéro, on ne trouve pas la probabilité négative, en faisant n plus grand que ce nombre, ce qui serait choquant; car la probabilité ne saurait jamais être au-dessous de zéro. Il est vrai qu'en faisant n plus grand que le nombre dont il s'agit, elle devient imaginaire; mais cet inconvénient me parôit moindre que celui de devenir négative (citat per Todhunter, 1865, p.275).

Alhora, cal considerar que d'Alembert va proposar un nou mètode per trobar una esperança matemàtica finita, però aquest cop definint la probabilitat d'una manera diferent a l'anterior.[15] Sigui com sigui, obté també un resultat finit. Tanmateix, les seves hipòtesis foren

[14] En paraules del propi d'Alembert: «la raison pour laquelle on trouve l'enjeu infini, c'est la supposition tacite qu'on fait que le jeu peut avoir une durée infinie, ce que n'est pas admissible, attendu que la vie des hommes ne dure qu'un temps» (citat per Todhunter, 1865, p.280).

[15] Donada la importància del primer raonament, el segon hem decidit deixar-lo breument explicat en aquesta secció. Amb aquest, d'Alembert va sostenir que la probabilitat d'obtenir cara al segon llançament era de $\frac{1+a}{2}$, la d'obtenir-la al tercer era de $\frac{1+a+b}{2}$, al quart de $\frac{1+a+b+c}{2}$, i així successivament. Les variables $a, b, c, \ldots$ són quantitats positives molt petites, tals que la seva suma és inferior a 1. Llavors, i considerant la manera

tan arbitràries com les utilitzades pel primer mètode. A més, és important fer notar que aquest matemàtic va considerar que l'única dificultat important que presenta la PSP és que dóna una esperança infinita; resultat que es va esforçar en modificar. Per això, la seva conclusió sobre el problema de Sant Petersburg pot ser, i de fet fou, la següent:

> En voilà assez pour faire voir que les termes de l'enjeu vont en diminuant dès le troisième coup, jusqu'au dernier. Nous avons prouvé d'ailleurs quo l'enjeu total, somme de ces termes, est fini, en supposant même le nombre de coups infini. Ainsi le résultat de la solution que nous donnons ici du problème de Pétersbourg, n'est pas sujet à la difficulté insoluble des solutions ordinaires (citat per Todhunter, 1865, p.289).

3.4.4- N. Condorcet. Una definició lleugerament diferent d'*E*

Nicolas de Condorcet (1743–1794), a la segona part de la seva obra *Mémoire sur le càlcul des probabilités*, publicada l'any 1784, tot i estar d'acord amb Daniel sobre el tema de la utilitat marginal, va criticar la seva hipòtesis segons la qual «the utility resulting from any small increase in wealth will be inversely proportionate to the quantity of goods previously possessed» (citat per Facarello, 2006, p.28). A més, Condorcet va senyalar que per individus que disposen de diferents nivells de riquesa, un augment en la mateixa proporció dels seus béns tindrà, per a cadascun, un valor subjectiu molt diferent:

> If I have wealth [just] sufficient to my needs, I would act in a very unwise manner if I were to halve it and become destitute, having just the probability of $1/2$ of doubling my wealth; and I would act less unwisely if, having significant wealth, I risk losing half of it in order to double it, for this half would still be sufficient for my needs (citat per Facarello, 2006, p.28).

Aleshores, va argumentar que un preu infinit no era just per un jugador aleatori, doncs aquest no tindria temps suficient de repetir els llançaments tantes vegades com fos necessari fins que els guanys mitjos s'aproximessin a la quota d'entrada (Ruiz, 1999). Per aquesta raó, va limitar el joc a un nombre finit de llançaments —que anomenarem m—, essent el cas que l'esperança matemàtica del joc va quedar definida de la manera següent (Dutka, 1988):

$$E = \sum_{i=1}^{m} 2^{i-1} \cdot \frac{1}{2^i} + \frac{2^m}{2^m} = \frac{m}{2} + 1$$

---

en com el joc de Sant Petersburg està formulat, es pot demostrar que el jugador ha de donar al banquer la meitat de la sèrie següent: $1 + (1 + a) + (1 - a) \cdot (1 + a + b) + (1 - a) \cdot (1 - a - b) \cdot (1 + a + b + c) + \cdots$. Considerant que cada factor $1 + a$, $1 + a + b$, $1 + a + b + c$,... és menor que 2 i que $1 - a > 1 - a - b > 1 - a - b - c > \cdots$, obtenim que la sèrie anterior (excloent els dos primers termes) és menor, i en conseqüència finita, que la progressió geomètrica següent: $2 \cdot [1 - a + (1 - a)^2 + (1 - a)^3 + (1 - a)^4 + \cdots]$ (per a més informació, consulteu Todhunter, 1865).

A la fórmula anterior, l'últim terme de la dreta ens indica que el jugador rep 2^m unitats si es dóna el cas que els m llançaments s'esdevenen en una seqüència interrompuda de creus. Llavors, el jugador començarà a guanyar en el moment en què, havent sortit cara a l'enèsima tirada, es compleixi la següent desigualtat (Dutka, 1988):

$$2^{n-1} > \frac{m}{2} + 1 \rightarrow m < 2^n - 2$$

L'equivalència entre els avantatges dels jugadors es produirà quan aparegui cara a la tirada $m = 2^n - 2$, essent el cas que no hi haurà ni guanys ni pèrdues. Tenint en compte la igualtat anterior, ocorrerà un dels esdeveniments següents: (1) la probabilitat que cap dels dos individus guanyi vindrà donada per $\frac{1}{2^n}$, (2) la probabilitat que un jugador guanyi serà el resultat de $(3.4.4.1)$ o (3) la probabilitat que el jugador perdi vindrà donada per $(3.4.4.2)$:

$$\sum_{i=n+1}^{m} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+m}} \qquad (3.4.4.1)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \qquad (3.4.4.2)$$

A més, i suposant que y es correspon a la quota d'entrada, tenim que el banquer només podrà obtenir uns guanys de $y - 1 = \frac{m}{2}$ monedes en el cas més favorable i de perdre $2^m - y$ monedes en el més desfavorable (Dutka, 1988; Gonzalez & Landro, 2018).

Tots els resultats anteriors van permetre a Condorcet demostrar la seva tesis principal, la qual consistia en el fet que la definició establerta i convencional d'esperança matemàtica era la única que permetia aconseguir «la mayor aproximación posible entre dos condiciones esencialmente diferentes de los jugadores» (citat per Gonzalez & Landro, 2018, p.81).

3.5- El llegat contemporani

Els estudis concebuts durant el segle XIX no resulten massa imprescindibles pel nostre treball com els que es van realitzar durant l'època moderna, doncs aquells estaven més aviat dirigits pels fonaments de la teoria de la utilitat i no pas per la teoria de jocs i la teoria de la probabilitat com els del segle XVIII. Tanmateix, i encara que sigui breument, hem considerat oportú fer-ne una exposició general. Una de les teories ideades durant la primera meitat del segle XIX fou realitzada pel francès Pierre-Simon Laplace (1749–1827) a la seva obra *Théorie analítique des probabilités* de l'any 1812, on va introduir el concepte d'esperança moral i va concloure que si la fortuna del jugador fos infinita, aleshores la seva aposta també hauria de ser infinita (Gonzalez & Landro, 2018). Després, Simon Denis Poisson (1781–1840) va desconsiderar la possibilitat d'establir la PSP a la realitat material i empírica —doncs creia que una quantitat desorbitant de diners com la de, per exemple, 50 milions de francs era una suma impossible d'usufructuar per a qualsevol persona de l'època i, fins i tot, impossible d'acumular per l'Administració en l'erari públic (Ruiz, 1999)—; argument, aquest, que també fou si més no apreciat per l'anglès Alfred Marshall (1842–1924) a un volum publicat a finals del segle mencionat on, mitjançant un argument més econòmic que matemàtic, va assumir que cap individu racional de l'època estaria disposat a participar al joc i que, doncs, la seva aplicació pràctica era inversemblant.

El segle XX, tanmateix, fou un tant que més productiu i algunes de les teories que allí es van concebre estaven més enfocades des de l'àmbit en què s'inscriu el nostre treball. Aquí estudiarem aquelles teories més notòries i, com havia ocorregut a l'apartat anterior, ometrem la referència detallada d'aquelles aportacions de caire secundari. Algunes d'aquestes últimes són les que van realitzar economistes i matemàtics com John Maynard Keynes (1883–1946), Carl Menger (1840–1921) o el rus Aleksandr Yakovlevich Khinchin (1894–1959).[16]

3.5.1- W. Whitworth. Un percentatge fix

Durant la primera meitat del segle XX, el matemàtic anglès William Allen Whitworth (1840–1905) va arribar als mateixos resultats que Daniel però des de premisses diferents. La seva proposta es basava en la idea que tot jugador posseïdor d'una fortuna finita pot tenir la certesa que si juga al joc en infinites ocasions, el més probable és que acabi perdent tota la seva riquesa. En conseqüència, és racional no apostar una quantitat fixa de diners en cada ocasió, sinó un percentatge fix, que dependrà dels diners que el jugador posseeix abans de realitzar cada llançament (Gonzalez & Landro, 2018). És a dir, per Whitworth era necessari buscar una proporció adequada entre l'aposta del jugador i la seva fortuna per tal que el joc pogués arribar, a llarg termini, a una situació d'equilibri en la qual no hi hagués ni guanys ni pèrdues.[17]

Llavors, i havent assumit prèviament que «the price which the man may prudently give is not even the price which the same man may prudently take if he change sides with his fellow gambler» (Whitworth, 1886, p.236) i també havent plantejat que a és la fortuna inicial

[16] Si el lector està interessat en conèixer les aportacions d'autors com els anotats, pot consultar Gonzalez & Landro, 2018, pp.91–92 (pel cas de Keynes) i l'article de Vareii Salov (2014) en general per les teories dels dos últims matemàtics. Sobre el matemàtic rus, és també interessant llegir el seu article (Khinchin, 1925).

[17] Les paraules exactes de Whitworth (1886) són certament esclaridores: «We have not assigned any new value to the mathematical expectation; we have not substituted a new expression for the old; but we have deduced a separate result, which without disturbing the mathematical expectation has a definite meaning of its own. […] We have simply determined the terms at which a man may purchase a contingent prospect of advantage, so that by repeating the operation —each time on a scale proportionate to his funds at that time— he may be left neither richer nor poorer» (p.236).

del jugador, x l'aposta del jugador, b els possibles guanys en cada joc i p i q les probabilitats de guanyar i perdre respectivament, va definir les següents regles: (1) cada vegada que el jugador guanya el seu capital es multiplica per $\frac{a+b-x}{a}$ i (2) cada vegada que el jugador perd el seu capital es multiplica per $\frac{a-x}{a}$. Aleshores, i per poder garantir una situació equilibrada a llarg termini s'haurà de verificar que $\left(1+\frac{b}{a}-\frac{x}{a}\right)^p \cdot \left(1-\frac{x}{a}\right)^q = 1$. A continuació, i suposant que els guanys del jugador són $g_1, g_2, \dots, g_n$ on $g_j \geq 0 \; \forall j$ amb probabilitats $p_1, p_2, \dots, p_n$ respectivament, el corresponent multiplicador del capital inicial es podrà expressar de dues possibles maneres:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{g_i}{a}-\frac{x}{a}\right)^{p_i} = 1$$

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{g_i}{a}\right)^{p_i} = \prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{x}{a+g_i}\right)^{p_i} \tag{3.5.1.1}$$

Seguidament, i utilitzant la hipòtesis que $x \ll a$, podem desconsiderar els termes d'ordre superior dels quocients $\frac{x}{a+g_i}$. Així, és possible aproximar l'expressió $(3.5.1.1)$ com segueix:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{g_i}{a}\right)^{p_i} \simeq 1 + x \cdot \sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{a+g_i} \tag{3.5.1.2}$$

Donat que $n \to \infty$ $(3.5.1.2)$ és convergent, llavors Whitworth va arribar a la següent aproximació:

$$x \simeq \frac{\prod_{i=1}^{\infty}\left(1+\frac{g_i}{a}\right)^{p_i} - 1}{\sum_{i=1}^{\infty}\frac{p_i}{a+g_i}}$$

Finalment, aplicant aquest resultat al problema de la PSP va obtenir que l'aposta del jugador que garantia una situació equilibrada a llarg termini era:

$$x = \frac{\prod_{i=1}^{\infty}\left(1+\frac{2^{i-1}}{a}\right)^{\frac{1}{2^i}} - 1}{\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^i}{a+2^{i-1}}}$$

Amb tot, aquest matemàtic va subratllar que la seva teoria era completament diferent a les propostes anteriors, les quals mai havien procedit utilitzant el mètode que hem comentat;

el de canviar un valor fix per un percentatge fix. De fet, sobre aquestes teories prèvies, aquest matemàtic que

> They have often had no intelligible basis to rest upon, or, if they have been established on sound principles, sufficient care has not been taken to draw a distinguishing line between the significance of the result obtained, and the different result arrived at when the mathematical expectation is calculated (Whitworth, 1886, p.235).

3.5.2- W. Feller. El punt de vista del banquer

En el seu clàssic llibre de text d'estadística *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* publicat al 1968, el matemàtic nord-americà William Feller (1906–1970) va advertir que «there is no paradox in the St. Petersburg game simply because it is not a fair game and thus there is no such thing as a fair entrance fee» (citat per Da Silva & Matsushita, 2015, p.70). Per aquesta raó, va considerar oportú fixar-se no en el paper del jugador sinó en el del banquer, i es va preguntar a continuació quin hauria de ser el valor de la quota d'entrada per tal que la banca pogués fer front a qualsevol pagament de premis (Parrondo, 2007). Va pensar que perquè el joc fos just no era racional pagar una quota fixa en cada joc, sinó que per contra s'havia d'estipular una quota variable que depengués del nombre de jocs realitzats prèviament. Havent assignat e_n a la suma de les quotes satisfetes fins al joc n inclòs —és a dir, a la quota acumulada—, i essent S_n la suma dels premis obtinguts en tots els n jocs, va proposar la condició que (Solé, 2012):

$$\frac{S_n}{e_n} \xrightarrow{P} 1, \;\; n \to \infty$$

Conseqüentment, en un document datat de l'any 1937 va tenir en compte que no era possible aplicar la llei feble dels grans nombres original (concretada a la definició **1.11**) al joc de Sant Petersburg —doncs, com sabem, la seva esperança és infinita— i va generalitzar-la per una mostra aleatòria independent i idènticament distribuïda amb esperança infinita. Amb tot, va obtenir que si $X_1, X_2, X_3, \ldots$ denoten els pagaments del joc en qüestió tenim que:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\left| \frac{\overline{X_n}}{\log_2 n} - 1 \right| < \varepsilon \right) = 1$$

Feller va suggerir quelcom força similar al resultat al qual va arribar Buffon, doncs va afirmar que l'aposta justa per jugar a n jocs hauria de ser d'ordre $n \cdot \log_2 n$ (Huang, 2013; Jaafar, 2019). Per tant, el joc es convertia en "just" si es complia que $e_n = n \cdot \log_2 n$ (Solé, 2012). Per comprovar el seu càlcul, Feller va utilitzar el mètode del truncament que ja havia emprat en la demostració de la seva llei dels grans nombres per variables sense esperança. La demostració va procedir a partir de definir les variables U_k i V_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ com

$$\begin{cases} U_k = X_k, \quad V_k = 0 \quad si\; X_k < n \cdot \log_2 n\,; \\ U_k = 0, \quad V_k = X_k \quad si\; X_k > n \cdot \log_2 n\,; \end{cases}$$

Aleshores, si S_n són els guanys acumulats, obtindrem que

$$P\{|e_n^{-1} \cdot S_n - 1| > \varepsilon\} \leq P\{|U_1 + \cdots + U_n - e_n| > \varepsilon \cdot e_n\} + P\{V_1 + \cdots + V_n \neq 0\} \quad (3.5.2.1)$$

perquè l'esdeveniment de l'esquerra no pot ocorre si no succeeix un esdeveniment de la dreta. A continuació, és possible resoldre $P\{V_1 + \cdots + V_n \neq 0\} \leq n \cdot P\{X_1 > n \cdot \log_2 n\} \leq \frac{2}{\log_2 n} \to 0$. Llavors, per verificar el resultat (3.5.2.1) és necessari provar

$$P\{|U_1 + \cdots + U_n - n \cdot \log_2 n| > \varepsilon \cdot n \cdot \log_2 n\} \to 0 \qquad (3.5.2.2)$$

Ara, posem $\mu_n = E(U_k)$ i $\sigma_n^2 = Var(U_k)$. Aquestes quantitats depenen de n, però són comunes a $U_1, U_2, \dots, U_n$. Si r és el major nombre enter tal que $2^r \leq n \cdot \log_2 n$, aleshores $\mu_n = r$ i, per tant, per un n de valor suficientment elevat, es compleix

$$\log_2 n < \mu_n \leq \log_2 n + \log_2(\log_2 n) \qquad (3.5.2.3)$$

De forma similar, també tenim que $\sigma_n^2 < E(U_k^2) = 2 + 2^2 + \cdots + 2^r < 2^{r+1} \leq 2n \cdot \log_2 n$. Seguidament, donat que la suma $U_1 + \cdots + U_n$ té mida $n \cdot \mu_n$ i variància $n \cdot \sigma_n^2$, tenim, donada la desigualtat de Txebixev,[18] que

$$P\{|U_1 + \cdots + U_n - n\mu_n| > \varepsilon n \mu_n\} \leq \frac{n\sigma_n^2}{\varepsilon^2 n^2 \mu_n^2} < \frac{2}{\varepsilon^2 \cdot \log_2 n} \to 0 \qquad (3.5.2.4)$$

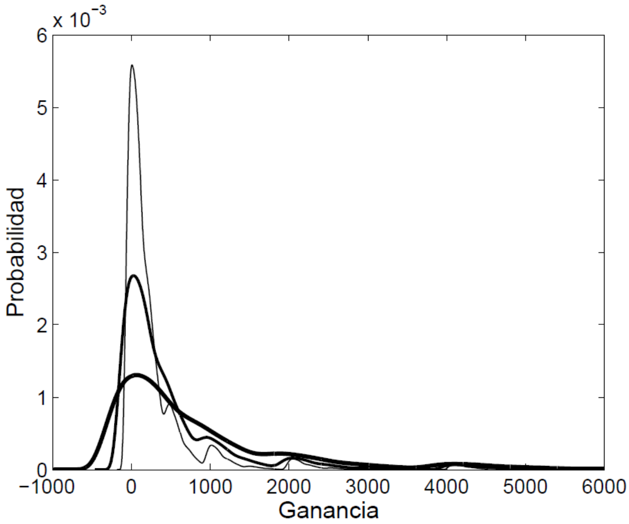
Finalment, concloem que per (3.5.2.3), $\mu_n \sim \log_2 n$, i, per tant, el resultat (3.5.2.4) és equivalent a (3.5.2.2) (Feller, 1968).

Fixant-nos, ara, en la gràfica **1**, podem veure que la distribució de probabilitat per diferents valors de n on les corbes estan concentrades al voltant del zero —esdeveniment que ha d'ocórrer necessàriament en qualsevol joc just— els guanys pel jugador són lleugerament superiors a les pèrdues. Quelcom que significa que la recaptació total de diners no pot ser

[18] La desigualtat esmentada es defineix de la manera següent (Alabert, 2002): Sigui $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espai de probabilitat, $X: \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatòria no negativa i $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ una funció creixent tal que $0 < f(a) < +\infty$. Aleshores $\forall a \in \mathbb{R}$ es compleix que

$$P(X \geq a) \leq \frac{E[f(x)]}{f(a)}$$

igual al nombre de jocs. Contràriament, per cada joc la banca ha de cobrar una quantitat lleugerament superior a $n \cdot \log_2 n$, essent n el nombre total de jocs que la banca estarà disposada a jugar amb tots els seus clients per tal de poder cobrir les pèrdues.



Gràfica **1**. Distribució de probabilitat dels guanys totals del jugador després de 50 (corba prima), 100 (corba intermitja) i 200 (corba gruixuda) torns, suposant una quota total de $x = n \cdot \log_2 n$.

Font: Parrondo, 2007, p.67

Finalment, cal mencionar que la proposta de Feller pot ser una bona indicació de quina ha de ser l'acció que ha de dur a terme el casino en el joc de Sant Petersburg. Nogensmenys, si ens fixem en el punt de vista del jugador individual i no en el de tots els clients obtenim resultats absurds, perquè ningú estarà disposat a pagar per jocs en els que no participarà. Fins i tot si tenim en compte una situació en la qual només hi ha un jugador que participa en el joc, resulta força peculiar que la quota d'entrada que aquest ha de pagar sigui proporcional al nombre de jocs total en què ha intervingut. Una nova peculiaritat, força problemàtica, s'esdevé quan suposem que el casino i el banquer s'avenen en prolongar el nombre de jocs fins a un milió de vegades més. Si es donés aquest cas, segons els càlculs de Feller, el valor esperat seria infinit (Jaafar, 2019; Parrondo, 2007).

3.5.3- Martin-Löf. Considerant les pèrdues de la banca

Una de les conclusions que podem extreure de l'anàlisi de Feller és que a tot jugador que participi en el joc de Sant Petersburg li semblarà absurd haver de pagar per jocs en què no participarà. Havent pres consciència de la problemàtica, el matemàtic suec Per Martin-Löf (1942–), l'any 1958, va refinar el resultat del seu col·lega a un volum titulat *A Limit Theorem*

Which Clarifies the "Petersburg Paradox". En aquest, havent observat que el resultat de Feller era indeterminat quan $n \to \infty$, va decidir fer un estudi de la paradoxa sota propòsits diferents (Parrondo, 2007). Suposant que el jugador juga un nombre N de jocs i $S_N = \sum_{i=1}^{n} x_i$ —on cada x_n és el premi obtingut en el joc enèsim— va considerar el quocient

$$\frac{S_N - 2N \cdot \log_2 N}{2N}$$

Martin-Löf va demostrar que si $N = 2^n$, l'anterior expressió té un límit en llei amb resultat $\frac{S_N}{N} - n$ quan $n \to \infty$. A més, va comprovar que si els guanys mitjos tenen una funció de distribució $G(x)$ —que es pot expressar explícitament (veure Martin-Löf, 1985)—, s'obté $P(S \leq x) = G(x)$ —essent S una variable aleatòria (Solé, 2012). El que aquest matemàtic està realitzant aquí és un argument heurístic, on la funció $G(x)$, que resulta ser la mateixa que la de

$$S = \sum_{i=-\infty}^{0} \left(x_i - \frac{1}{2^i}\right) \cdot 2^i + \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot 2^i$$

on $x_1, x_2, \ldots$ són variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes, segueix una distribució Poisson de paràmetre 2^{-i} (Huang, 2013). Més endavant, Martin-Löf il·lustra el comportament que ha de seguir la funció G. Aquest és el següent:

$$1 - G(2^m + x) = P(S > 2^m + x) \sim 2^{-m} \cdot \big(2 - G(x)\big), \;\; m \to \infty$$

Finalment, considerant el criteri plantejat de $N = 2^n$, arriba a una aproximació suficientment adequada per una n no molt petita i $m \geq 5$ (Huang, 2013; Solé, 2012):

$$P\left(\frac{S_N}{N} - n > 2^m + x\right) \simeq 2^{-m} \cdot \big(2 - G(x)\big)$$

Si es té en compte el punt de vista del banquer, la igualtat anterior ens està indicant que si es dóna el cas que aquest exigeix una quota d'entrada de $y = n + 2^m + x$ per cada joc, aleshores la probabilitat que aquesta quantitat sigui insuficient passades N partides és de $r = 2^{-m} \cdot \big(2 - G(x)\big)$. Aquesta aproximació ajudarà al banquer a determinar quin ha de ser el valor de l'aposta amb la finalitat que la probabilitat de no poder assumir tots els pagaments de premis sigui baixa o nul·la. Per exemple, suposem que el casino decideix cobrar una quota y pel joc de manera que, després de 2^n jocs, tingui una probabilitat de 10^{-3} de no poder assumir el pagament dels premis totals. Llavors, i donat que $r = 10^{-3}$, obtenim (a partir de la funció G) que $m \simeq 11$. Mitjançant aquestes premisses, arriba a la conclusió que la quota d'entrada per participar al joc hauria de ser de $y = n + 2048$ monedes (Martin-Löf, 1985; Solé, 2012).

En conclusió, els resultats de Martin-Löf són interesants, però no es poden considerar una "solució" a la paradoxa, perquè cap individu estaria disposat a pagar una quantitat tan gran de diners per jugar al joc de Sant Petersburg. La raó és que la distribució dels guanys després d'haver-se realitzat un gran nombre de jugades és una dada rellevant pel casino, però no pel jugador, que només hi juga en un nombre força escàs d'ocasions (Parrondo, 2007).

3.5.4- T. Cover. Beneficis en relació al pagament

Thomas M. Cover (1938–2012), professor de la Universitat de Stanford, i alguns dels seus col·legues, van analitzar la PSP durant la segona meitat del segle XX, pels volts de l'any 1980, d'una manera força diferent, arribant a una solució molt enginyosa. Van considerar una petita modificació del joc original, i van suposar que es podia pagar qualsevol quota d'entrada fent que el premi fos proporcional al pagament. En general, si la quota d'entrada és c i el capital inicial que disposa el jugador és S_0, aquest rebrà una unitat d'inversió per cada c unitats que hagin estat pagades com a quota d'entrada. Aleshores, s'inverteix una quantitat de $b \cdot S_0$, $0 \leq b \leq 1$ i, conseqüentment, es reté $(1-b) \cdot S_0$. Amb tot, la rendibilitat del joc ve donada per $S = S_0 \cdot \left((1-b) + \frac{b}{c} \cdot x\right)$, on x és el valor del premi que rebrà el jugador. Ara, si $a \in [0,1]$ maximitza $E(\ln S)$, calculem el següent (Bell & Cover, 1980):

$$Y = \frac{dE(\ln S)}{db} = E\left(\frac{S'}{S}\right) = E\left(\frac{-1 + \frac{x}{c}}{(1-b) + \frac{b}{c} \cdot x}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \cdot \frac{\frac{2^i}{c} - 1}{\frac{2^i \cdot b}{c} + (1-b)}$$

Si posem $b = 1$, veiem que $Y = 1 - \frac{c}{3} \geq 0$ per $c \leq 3$. Per tant, $a = 1$ per $0 \leq c \leq 3$ (Bell & Cover, 1980). Si suposem, a més, que el capital del jugador abans del joc t és $S(t)$ i el premi en aquest joc és $x_t = 2^t$, aleshores tenim que:

$$S(t+1) = \frac{S(t) \cdot x_t}{c} \longrightarrow \ln\big(S(t+1)\big) = \ln\big(S(t)\big) + \ln(x_t) - \ln(c)$$

Per tant, perquè el capital no creixi ni disminueixi en mitjana, s'ha de complir que $S(t+1) = S(t)$. D'aquesta manera, obtenim l'equació $\ln(x_t) = \ln(c)$ en la qual, a partir d'un càlcul similar al realitzat per Daniel Bernoulli, s'obté que la quota d'entrada ha de ser precisament de 4 monedes, resultat igual al que havia proposat Daniel.

$$\ln(x_t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2^n}{2^n} = 2 \cdot \ln 2 = \ln 4 = \ln(c) \rightarrow c = 4$$

3.6- Una breu mirada a l'actualitat

Un dels estudis que hem considerat més importants d'aquells que s'han realitzat durant el segle actual és el que va dur a terme l'any 2001 l'investigador de la Universitat de Iowa, Shrisha Rao (1969–). Aquest intentà resoldre el joc de Sant Petersburg amb l'objectiu que no es pogués considerar com una paradoxa. Per fer-ho, va proposar que per arribar a una solució calia considerar que no tenia sentit parlar d'esperança infinita en tant que tot recurs monetari existent té un valor finit. És a dir, donat que hi ha una quantitat finita de diners al món, no té cap mena de sentit parlar d'un joc amb rendiment infinit.

Per aconseguir demostrar el seu argument, Rao va suposar que la persona que ofereix la participació al joc disposa d'una quantitat M de diners. En conseqüència, només es podrà jugar mentre el banquer pugui pagar la retribució econòmica adequada. Donat que, per premissa, les regles del joc sostenen que tot participant rebrà una quantitat de 2^{n-1} monedes si surt cara a l'enèsim llançament, serà possible jugar al joc indefinidament sempre i quan es compleixi la desigualtat $2^{n-1} \leq M$. Ara, si volem fer una inversió de m unitats monetàries per aconseguir que el nostre rendiment esperat —que vindrà donat per $\frac{1}{2} \cdot n$ on n és el nombre de llançaments—, sigui igual o superior a la nostra inversió s'haurà de complir que $\frac{n}{2} \geq m$. Considerant les dues desigualtats, es pot deduir que $M \geq 2^{2m-1}$. També es pot observar, mitjançant la primera desigualtat, que el número de llançaments n creix com el logaritme en base 2 dels diners M disponibles per la persona que ofereix l'aposta: $n \leq \log_2 M + 1$ (Rao, 2001). Per exemple, per invertir $10€$ en aquest joc el banquer hauria de disposar de $524.288€$ destinats en el joc. Aquesta és l'explicació correcta de per què, tal com ja havia senyalat d'Alambert, ningú estaria disposat a invertir ni tan sols sumes modestes per participar-hi. Degut al fet que M creix exponencialment amb m, si s'inverteixen $50€$ per jugar al joc obtindrem que la quantitat de diners que hauria de posseir el banquer hauria de ser de $6'33 \cdot 10^{29}€$; quantitat que és molt superior a la suma total de diners que es troba disponible al món.

A part de l'anterior proposta de Rao existeixen, lògicament, altres investigacions que tenen un caràcter lleugerament secundari. La majoria d'aquestes discussions s'han centrat en la impossibilitat que es pugui arribar a multitud de resultats diferents sobre un mateix joc o, fins i tot, que pugui existir una banca que tingui fons suficients per pagar premis molt grans (Gonzalez & Landro, 2018). Tot i així, els debats no s'han centrat solament en la crítica a les propostes anteriors, sinó que també han continuat una línia pròpia de recerca. Alguns dels noms més rellevants són l'economista anglès Matthew Rabin (1963–) o el filòsof i matemàtic James M. Joyce (1958–), qui va definir el joc de Sant Petersburg com una mena de cercle viciós, perquè en tant que l'esperança matemàtica de guanys sempre serà major a la quantitat finita que ha apostat el jugador, una decisió racional hagués estat pagar una quota d'entrada més elevada per participar-hi (Peterson, 2020). Cal fer menció, també, al matemàtic Sándor Csörgö (1947–2008) qui, en companyia d'altres estudiosos, va proposar una modificació de l'enunciat original de la paradoxa, on hi participaven dos jugadors en comptes d'un (veure Huang, 2013).

Sigui com sigui, i com el lector haurà apreciat, totes aquestes propostes no gaudeixen d'un paper gaire remarcable o protagonista en la història matemàtica de la paradoxa. És a dir, sembla que mentre en el seu moment la paradoxa va tenir molt de ressò i fou estudiada per un munt de matemàtics i experts d'arreu del món, avui no és un tema massa considerable. Per això, opinem que la seva reivindicació ha de ser considerada com a summament adequada i significativa pel món actual.

MARC PRÀCTIC

Aplicació didàctica de la paradoxa de Sant Petersburg

El present apartat està destinat a complir el segon propòsit que havíem anunciat a la introducció; aquell que volia reivindicar la importància d'introduir didàcticament la paradoxa als educands de batxillerat. Per aconseguir-ho, hem decidit combinar explicació teòrica amb activitat pràctica, tot dividint aquest capítol en tres subapartats. En primer lloc, hem realitzat un resum d'aquells problemes, a vegades invisibles, que imperen a les aules de matemàtiques; unes dilemàtiques que es poden inscriure tant en un àmbit ampli, que engloba la matèria de matemàtiques en general, com en un de més limitat, que està relacionat amb la temàtica de la probabilitat en què s'inscriu la nostra paradoxa. Segonament, i un cop evidenciades aquestes problemàtiques, explicitarem teòricament el mètode que es pot seguir per la seva solució. Una metodologia que no és nova, doncs són molts els docents que guien la seva activitat didàctica a partir d'aquesta, però que en matemàtiques acostuma a ser obviada. Per aquesta raó, l'última part del nostre treball consistirà en aplicar didàcticament aquest mètode i, doncs, en intentar fer palesa la seva eficàcia a nivell pràctic.

1. L'ensenyança tradicional i els seus problemes

Les matemàtiques són una de les ciències més antigues que existeixen, l'ensenyança de les quals ens remunta als orígens de la democràcia i del pensament occidental, a la Grècia Clàssica dels grans mestres matemàtics, físics, geòmetres i astrònoms. Des d'aquests remots orígens, la transmissió del saber matemàtic ha seguit un pressupòsit bàsic, el qual consisteix en el fet que l'aprenentatge de les matemàtiques «dependía sólo del grado en que el profesor dominara dicho arte y, al mismo tiempo, de la voluntad y la capacidad de los alumnos para *dejarse moldear* por el artista» (Gascón, 1998, p.3. L'èmfasi és nostre). És a dir, la premissa que dominava l'educació era que els alumnes eren individus passius, buits de saber, i que el paper del mestre, com a dipositari únic del saber, era inculcar un coneixement als educands per, d'aquesta manera, emplenar la seva ignorància inicial. En aquest marc, l'aprenentatge significatiu i dinàmic era pràcticament inexistent, i que els educands consolidessin un saber propi era quelcom que ni tan sols es considerava possible. Uns supòsits que, a la pràctica, es traduïen en la utilització d'un mètode d'ensenyança estàtic, que feia del mestre el transmissor del saber i l'alumne el subjecte que còpia i memoritza les lliçons que el professor inculca. Per tant, ens trobem amb una relació vertical entre ambdós subjectes. És a dir, entre els alumnes i el professor existeix una jerarquia altament marcada que en cap cas dóna pas al debat o al diàleg constructiu.

Aquesta visió paternalista de l'ensenyança va continuar, amb certes modificacions, al llarg dels segles i encara va prevaldre durant bona part del segle XX (Brousseau, 2000). Tot i els esforços de pedagogies alternatives per canviar la manera tradicional d'ensenyar aquesta assignatura per una metodologia més dinàmica i activa, encara són molts els professors que, a l'actualitat, l'utilitzen com a eina única d'ensenyança i creuen en la seva eficàcia. El mètode que preval a les aules és de tipus memorístic i repetitiu, on l'educador presenta un concepte matemàtic, els alumnes l'interioritzen i, conseqüentment, l'exerciten per mitjà de la resolució de problemes i/o operacions per, finalment, a l'avaluació, comprovar fins a quin punt l'han aconseguit mecanitzar. Resumidament, podríem dir que la metodologia predominant fa de les matemàtiques un saber tècnic (Gascón, 1998) i, en conseqüència, assimila l'exercitació amb la comprensió. Les conseqüències d'aquest mètode d'ensenyança-aprenentatge són vàries, i totes elles han acabat conduint a que l'assignatura de matemàtiques es pensi com una matèria estàtica i repetitiva, fet que provoca que gairebé tots els alumnes d'institut la cataloguin de difícil i avorrida.

A més, s'ha de tenir en compte que el mètode tradicional no repara en aquelles raons i/o procediments que fan que la resolució d'un problema o la realització d'una operació sigui la que es coneix avui en dia. Dit altrament, l'explicació dels temes matemàtics curriculars es fa des d'una posició completament descontextualitzada, tractant els conceptes com si aquests no gaudissin de cap gènesi històrica (Ruiz, 1999) o com si les matemàtiques no poguessin ser aplicades en cap context real. Quelcom que no sempre afavoreix l'aprenentatge dels alumnes doncs, en paraules d'alguns matemàtics pedagogs, el fet que «los textos didácticos ofreciesen pocas situaciones no matemáticas que permitiesen a los alumnos conocer la aplicación de las matemáticas a la realidad, facilitaba preguntas del tipo *esto para qué sirve*» (Font & Núñez, 1995, p.295). En aquest tipus d'ensenyança és possible que l'alumne acabi coneixent la lògica interna de la matemàtica —és a dir, la seva manera autònoma de funcionar— però li resultarà impossible utilitzar i/o aplicar aquest coneixement en situacions de la vida diària. Utilitzant les paraules dels pedagogs prèviament citats, li resultarà impossible «fer matemàtiques» (Font & Núñez, 1995). Alhora, aquesta descontextualització pot ser un dels factors que provoca que els alumnes mostrin un interès menor per la matèria.

Aquest mètode tradicional pot disminuir l'afany d'aprenentatge dels educands per una altra raó, que ens porta a parlar de la manera en com s'imparteixen les classes. Si bé matèries de caire més teòric com són la història, la filosofia o les llengües es transmeten mitjançant el debat, l'aportació d'exemples i l'exercitació d'activitats dinàmiques i jocs, les matemàtiques acostumen a ensenyar-se mecànicament. Com ja hem dit, aquesta metodologia no genera un diàleg constructiu entre professor i alumne ni tampoc permet als educands que pensin pel seu compte o que arribin a conclusions pròpies (Gascón, 1998). Resumidament, podríem dir que avui en dia la majoria de professors consideren les matemàtiques com

> Un conjunto de verdades y reglas que dependen de la imposición de una autoridad paternalista y, por tanto, la educación matemática tiene por objetivo proporcionar al estudiante las destrezas básicas. El modelo de enseñanza es autoritario y presta mucha atención a la disciplina [...] Debido a que [el profesor] maneja y controla la autoridad de la clase no hay espacio para las iniciativas del estudiante, y su principal recurso es el lápiz y el papel (Font & Pochulu, 2011, p.364).

Tot i que som conscients com de necessari és el recurs del llapis i el paper a les aules de matemàtiques, i sabem en conseqüència que aquest no pot ser eliminat ni suplert per cap altre material, també considerem que cal combinar aquesta metodologia més tradicional amb una que implementi activitats, propostes i recursos que ajudin significativament als estudiants en l'aprenentatge matemàtic i aconsegueixin potenciar molt més l'interès dels alumnes.

1.1- L'omissió de l'àmbit de la probabilitat

Abans de pensar quina pot ser aquesta nova metodologia, vam comprovar que existeix un altre problema a les aules de matemàtiques; dilemàtica que, aquest cop, està directament relacionada amb el tema del present treball, doncs consisteix en l'omissió d'aquells aspectes relacionats amb la probabilitat i l'estadística. Segons el currículum oficial de la Generalitat de Catalunya, aquest àmbit de les matemàtiques ha de ser estudiat durant el curs de primer de batxillerat científic. En concret, el currículum demana que els estudiants, un cop hagin acabat l'ensenyança de primer de batxillerat, sàpiguen realitzar una «anàlisi del tipus i grau de relació entre dues variables en contextos científics i socials» i que puguin «aplicar les tècniques de recompte i del càlcul de probabilitats per resoldre situacions i problemes» (DOGC, núm.5183, 2008, p.14). Tanmateix, aquesta branca de les matemàtiques figura en última posició dins el currículum oficial, cosa que provoca que aquells docents que segueixen l'ordre reglamentari releguin la seva explicació al final de l'últim trimestre, i només si els tempos del curs ho han permès. Que la teoria de la probabilitat i l'estadística es trobi en aquesta posició curricular es deu, segurament, al fet que la temàtica no consta com a temari de la selectivitat. Per tant, la seva omissió en l'ensenyament del batxillerat s'acostuma a justificar per aquesta via, i són molts els docents que sostenen que s'ha de prioritzar l'explicació d'aquelles matèries que són temari per les proves d'accés a la universitat. Tot plegat genera que els estudiants finalitzin els estudis de batxillerat sense tenir cap tipus de coneixement probabilístic o almenys posseint una idea realment bàsica de la temàtica. Fet que pot ser interpretat com un problema o com quelcom sense massa importància. Encara que, d'entrada, es pugui pensar que aquesta branca de les matemàtiques no és tan rellevant com ho és, per exemple, l'àlgebra o la geometria, en realitat és summament indispensable. De fet, segons alguns estudiosos, els professors han de considerar l'explicació d'un tema als seus alumnes si aquest ajuda a resoldre alguna de les següents preguntes:

> ¿Es una parte de la educación general deseable para los futuros ciudadanos? ¿Es útil para la vida posterior, bien para el trabajo o para el tiempo libre? ¿Ayuda al desarrollo personal? ¿Ayuda a comprender otras materias de los planes de estudio? ¿Constituye una base para una especialización posterior en el mismo tema u otros relacionados? (Agnelli, 2009, p.25).

Com veurem, la teoria de la probabilitat permet resoldre gairebé tots els interrogants anteriors. En primer lloc, la comprensió de la probabilitat i de totes les seves variants dóna als alumnes una formació elemental però molt eficaç per desenvolupar-se en qualsevol àmbit professional, científic o lúdic. En general, podem afirmar que «la probabilidad tiene la enorme cualidad de representar adecuadamente la realidad de muchos procesos sociales y naturales, y, por lo tanto, su conocimiento permite comprender y predecir mucho mejor el mundo en que vivimos» (Castillo et al., 2000, p.15). Entrant directament en la temàtica del nostre treball, cal considerar que els alumnes, a una edat adolescent, es poden arribar a interessar i/o a tenir curiositat pel món de les apostes i dels jocs d'atzar. A més, gràcies a la globalització i a les eines que ens proporciona internet, els alumnes no necessiten anar als casinos sinó que poden realitzar un munt d'apostes a la xarxa i, fins i tot, participar en jocs com el pòquer, la ruleta o d'altres relacionats. És per aquest motiu que el coneixement del món probabilístic pot ajudar als nostres educands a l'hora de prendre decisions racionals, segures i assenyades, a més de donar-los eines per poder analitzar a priori si és o no convenient arriscar una suma de diners concreta en una aposta. Aquestes raons són les que, d'entrada, es podrien catalogar com un dels pretextos més importants per estudiar la probabilitat, doncs com tots sabem, el món actual en el que habitem funciona en bona part a partir de la competitivitat i l'acumulació monetària. Tot i que nosaltres, com a docents, no tenim eines per canviar aquesta realitat, sí que tenim el material suficient per ajudar als nostres alumnes a actuar racionalment. Per tant, si volem que els nostres estudiants estiguin preparats per la seva vida posterior o immediata, hem de fer-les servir i, així, millorar el seu aprenentatge.

Alhora, hi ha d'altres raons que converteixen l'estudi de la probabilitat en quelcom indispensable. Aquella que, podríem dir, engloba totes les altres és que l'ensenyament de la probabilitat atorga la possibilitat als alumnes a prendre decisions prudents davant situacions generals d'incertesa. Encara que, d'entrada, la presa racional de decisions es pugui considerar un procés simplista, en realitat, davant de tota decisió, hi ha més d'un resultat possible a tenir en compte. Amb això, si es posseeix una informació limitada o inexistent, és força més difícil fer una predicció aproximada de quina és la decisió més adequada. Per aquesta raó, «disponer de herramientas conceptuales y operativas que permitan al individuo comprender y manejar la incertidumbre, para disminuir el riesgo de tomar decisiones equivocadas, es una necesidad que tendría que ser satisfecha por un programa educativo» (Agnelli, 2009, p.25). Per tant, es pot dir que l'aprenentatge del tema de la probabilitat compleix el tercer requisit prèviament anunciat; afavoreix notablement el desenvolupament personal de l'alumne. A més, també cal tenir en compte que la teoria de la probabilitat manté relació amb moltes altres disciplines científiques[19] i, per tant, el domini d'aquesta matèria pot ajudar a l'estudiant a la comprensió global d'altres assignatures.

2. Proposta de canvi metodològic

Per tal de solucionar els problemes educatius que hem enunciat al capítol anterior, des de finals del segle XX i principis de l'actual (Brousseau, 2000) es va proposar un nou tipus de model d'ensenyança que rebia el nom de constructivisme o aprenentatge significatiu (Font & Pochulu, 2011; Ortiz, 2015). Bàsicament, aquest mètode s'oposava punt per punt a l'educació tradicional, doncs pensava que a les aules s'ha de generar un ambient didàctic i de debat que permeti la interacció entre professor i alumne. És a dir, aquest model demanava que el docent estigués involucrat en l'aprenentatge dels estudiants però que deixés de ser el centre d'atenció i el punt principal del procés educatiu —en paraules de Tünnerman (2011), es proposava un "desplaçament de l'accent"—, i que, per tant, es convertís en una mena de guia o co-aprenent (Ortiz, 2015).

Davant d'aquestes idees bàsiques, la metodologia d'ensenyança que més s'adapta a l'aprenentatge significatiu o constructivista és aquella que compleix amb les característiques que anotarem a continuació. En primer lloc, és necessari que els professors combinin la seva explicació teòrica amb preguntes, activitats i debats oberts sobre el tema per, així, incitar la participació. En el cas de les matemàtiques, som conscients que és necessari que el docent dediqui llargues hores a explicar la teoria bàsica o a ensenyar l'aplicació d'una fórmula. Com és obvi, la matèria de matemàtiques no és com la de filosofia —on hi ha tantes opinions vertaderes com persones hi pugui haver—, i, per tant, les classes no es poden limitar a la pluja

[19] Com el currículum oficial de matemàtiques publicat al DOGC afirma, el tema de la probabilitat es troba relacionat amb la física i la química —sobretot quant al tractament de les dades experimentals—, la biologia —pel tema de la genètica i l'evolució— i també, però menys notablement, amb l'electrotècnia i el dibuix tècnic (veure DOGC, núm.5183, 2008, pp.14–15). No solament el currículum, sinó també Agnelli (2009) ha assenyalat aquest aspecte de la teoria de la probabilitat: «Un curso sobre teoría de probabilidades sirve como preparación para muchas disciplinas (tales como la estadística, física estadística, ingeniería industrial, ingeniería en comunicaciones, genética, psicología estadística, y la econometría) en las que se emplean ideas y técnicas probabilísticas. Por consiguiente, debería intentarse darle al estudiante en un curso básico técnicas para resolver problemas de Probabilidad sin necesidad de utilizar la magia intuitiva» (p.26).

d'idees o al diàleg comú sobre un tema. Tanmateix, també creiem que és important que el docent faci preguntes sobre la matèria que ha explicat i que animi a la comprensió a través de proposar desafiaments, jocs o reptes que els alumnes hauran de solucionar (Gregorio, 2002). D'aquesta manera, no només augmentarà la seva motivació sinó també, i sobretot, la seva atenció i aprenentatge.

Un altre dels distintius de l'aprenentatge significatiu és el que sosté que el discurs del professor ha de ser contextualitzat. Dit altrament, que si el docent vol, per exemple, explicar el tema de les equacions, no és suficient subministrar la fórmula als alumnes sinó que també és rellevant transmetre'ls d'on s'ha extret aquesta fórmula històricament —qui en fou el seu autor, en quin context es va idear, etcètera.[20] En paraules de Ruiz (1999), per la resolució de problemes matemàtics, la seva contextualització «es conveniente para que el alumno llegue a comprender determinados conceptos en toda su extensión» (p.5). Per aquesta raó, el mètode constructivista defensa que els conceptes es tractin de manera global i particular a la vegada (Ortiz, 2015) i que, per tant, no només s'expliquin *ad hoc* sinó que també es tingui en compte la seva evolució i la seva aplicació pràctica a la realitat. Aquest últim tret de l'aprenentatge significatiu és certament rellevant, perquè si el docent mostra que els conceptes matemàtics es poden aplicar a la realitat immediata de l'alumne, aquest sentirà que la matèria és útil i el pot ajudar en la seva vida diària o el seu futur laboral. Tot plegat perquè, com afirma Albertí (2018), les matemàtiques no es troben en els llibres, de la mateixa manera que una llengua no es troba en un text. En realitat, els llibres «recogen los resultados elaborados y contrastados por quienes llevan a cabo la actividad matemática» i aquesta activitat matemàtica només es desenvolupa «mediante toda una serie de procesos en los que intervienen la experimentación, el ensayo y el error, la intuición y, por último, la formalización y la demostración» (p.12). Per això, segueix raonant Albertí (2018), en educació cal tenir present que

> No debemos esperar hallar en la vida cotidiana teoremas matemáticos ni demostraciones de resultados matemáticos, pero sí situaciones o problemas para los que se necesiten matemáticas o que inspiren nuevas ideas matemáticas. […] Si queremos que los adolescentes aprendan matemáticas de un modo creativo, práctico y con significado, ¿qué mejor oportunidad podremos encontrar que la que nos ofrecen las experiencias de la vida? (p.13).

Una nova característica de l'aprenentatge significatiu és que el professor ha de tenir en compte les nocions prèvies que disposen els seus alumnes sobre el tema que està explicant o que començarà a introduir. Aquesta última peculiaritat fou considerada pel conegut pedagog

[20] Un altre exemple força pertinent és el que il·lustra Ruiz (1999) al seu article, on afirma que les paradoxes de Zenó d'Elea —com la d'Aquil·les i la tortuga— poden ser significatives per comprendre detalladament el tema del moviment. Una altra és la paradoxa de Galileu, la qual pot demostrar una de les propietats dels conjunts infinits.

Jean Piaget (1896–1980), i tenia la seva raó de ser en el fet que els alumnes no són un paper en blanc sinó que arriben a les aules amb concepcions prèvies, que poden o bé ser errònies o, altrament, estar ben fundades. Per aquest motiu, Piaget va argumentar que

> El mecanismo básico de adquisición de conocimientos consiste en un proceso en el que las nuevas informaciones se incorporan a los esquemas o estructuras preexistentes en la mente de las personas, que se modifican y reorganizan según un mecanismo de asimilación y acomodación facilitado por la actividad del alumno (Tünnermann, 2011, p. 24).

En el cas de les matemàtiques, la tasca del professor haurà de consistir, en primer lloc, en esbrinar quin és el coneixement previ dels alumnes sobre el tema a explicar per, després, introduir la nova informació, la qual hauria d'ajudar a millorar, ampliar o modificar les idees que disposaven els alumnes a priori (Moreno & Waldegg, 1992). Llavors, l'estudiant haurà de reorganitzar aquella informació que ja posseïa per, després, integrar els nous coneixements i, així, completar el seu aprenentatge. Com es veu, en aquest tipus de metodologia hi ha, clarament, un diàleg entre professor i alumne i també entre l'alumne i els seus companys; un debat que permetrà que els alumnes no copiïn les matemàtiques, com feien sota les bases del model tradicional, sinó que les apliquin i les construeixin.

3. Ensenyament constructiu de l'esperança matemàtica

Les aportacions de l'aprenentatge constructiu en matemàtiques no es poden quedar a un nivell teòric, sinó que han de ser aplicades pràcticament. Per aquesta raó, vam pensar que el nostre treball s'havia d'acabar amb una part didàctica, que consistiria en reivindicar tant el nou mètode d'aprenentatge matemàtic com l'estudi de la temàtica de la probabilitat a primer de batxillerat científic. Per introduir breument alguna de les bases d'aquesta branca de les matemàtiques, vam decidir realitzar una explicació de la PSP, doncs creiem que pot afavorir la comprensió bàsica de la teoria de la probabilitat i, més concretament, el terme d'esperança matemàtica. La proposta didàctica que vam preparar tenia una durada d'unes dues hores lectives i la metodologia que vam aplicar seguia les línies de l'aprenentatge constructivista que hem esmentat en els capítols anteriors. Per reproduir-ho, ens vam haver de valdre d'un conjunt de material didàctic, el qual estava format per una fitxa que vam donar als alumnes (que es pot localitzar a l'annex **3**) i una simple moneda, que va servir als estudiants per poder entrar en contacte directe amb el joc de Sant Petersburg.

L'activitat que vam realitzar es pot agrupar, genèricament, en dos blocs; un primer de caire més autònom i que vol fomentar el pensament propi dels alumnes, i un segon on haurem actuat com a guia per acabar de completar l'aprenentatge que havien adquirit els estudiants. Amb aquesta idea, vam començar la lliçó preguntant als alumnes quines són les prenocions que disposen sobre la PSP i l'esperança matemàtica. La resposta que esperàvem, i que de fet ens van donar els estudiants, era que no tenen cap mena d'idea prèvia ni sobre la PSP ni, com és lògic, sobre l'esperança. Llavors, vam realitzar un petit discurs teòric que simplement volia fer conèixer la PSP i el seu context històric; vam explicar breument qui en fou el seu creador, quins foren els seus antecedents, en quin context històric es va crear, etcètera. Després d'haver aclarit els dubtes que van sorgir —que eren força simples i tan sols feien referència a si el joc s'havia portat o no a la pràctica—, vam organitzar la classe en grups de dos alumnes per poder dur a terme una activitat didàctica.

Aquest fou el nucli de la primera part de les nostres lliçons, doncs l'exercici consistia en fer que els estudiants es posessin en contacte directe amb la PSP. El mètode que vam seguir fou el següent: després d'haver-los repartit la fitxa esmentada i una moneda, vam demanar-los que simulessin el joc en un total de cinc ocasions i que apuntessin el resultat que havien obtingut (veure exercici 1 de la fitxa a l'annex **3**). Seguidament, vam simular una altra variant del joc (exercici 2), en la qual nosaltres ja havíem fixat el nombre de llançaments on apareix cara per primera vegada. L'activitat també demanava als estudiants que extraguessin les seves pròpies conclusions sobre la probabilitat que ocorrin aquests successos i el premi que algú obtindria si es donessin. Llavors, i a continuació, vam demanar als alumnes que responguessin unes preguntes breus (exercici 3) per tal que raonessin sobre la utilitat de participar al joc de Sant Petersburg, tant si fos el cas que estan ocupant el lloc del jugador com el del banquer i, a més, en mires a que extraguessin una idea aproximada sobre quin hauria de ser el valor que hauria de tenir la quota d'entrada per tal que el joc es pogués considerar just. Aquest últim fou un debat que van dur a terme els alumnes entre ells i on nosaltres simplement ens vam dedicar a solucionar els dubtes que van sorgir.

Com es veu, en aquesta primera part de l'activitat vam intentar compaginar el nostre discurs docent amb la possibilitat que els alumnes aprenguin de manera si més no autònoma, permetent així que el seu aprenentatge sigui significatiu i que no es limiti a la còpia. És per aquesta raó que només de començar la lliçó vam preguntar les idees prèvies dels estudiants i vam treballar a partir d'aquestes. A més, el fet que l'activitat seguís amb un exercici didàctic grupal va afavorir, per una banda, l'intercanvi d'idees i opinions de l'alumne amb els seus companys i, per l'altre, la motivació i l'interès. També cal tenir en compte que les preguntes que vam plantejar als estudiants (sobretot les que formen part de l'exercici 3) eren qüestions que, de fet, ja s'havien plantejat matemàtics i experts de diferents èpoques. D'aquesta manera, vam potenciar que els nois i noies participessin activament no només al joc de Sant Petersburg sinó també que juguessin a ser aquells individus que, segles enrere, es van veure obligats a respondre qüestions semblants.

La segona part de la nostra pràctica educativa va consistir en una explicació teòrica sobre l'esperança matemàtica, que englobava tant una breu introducció sobre el seu context històric com una mostra de la fórmula que s'ha d'aplicar per realitzar-ne el càlcul. Tanmateix, el nostre discurs també es va compaginar amb preguntes obertes i poc tècniques sobre el tema de l'esperança que apel·laven a la realitat que coneix l'alumne. Una de les preguntes que vam plantejar era la de quina és la probabilitat de guanyar i/o perdre en un joc d'atzar tan conegut com el de la ruleta del casino. La resposta fou unànime, doncs tots els alumnes van concloure aquella famosa frase "la banca sempre guanya". Amb aquest context, vam poder introduir de manera més amena i contextualitzada el terme d'esperança matemàtica.

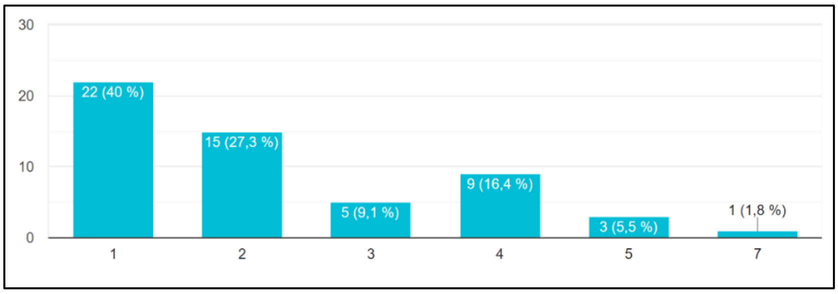
A continuació, i en aquesta ocasió actuant nosaltres com a guia i incitant als alumnes a participar activament, vam calcular conjuntament l'esperança matemàtica del joc de Sant Petersburg (exercici 4). Aquesta activitat grupal es va fer conjuntament, amb la participació de tots els alumnes i amb la nostra ajuda, perquè d'aquesta manera eliminàvem la possibilitat que el resultat que extraguessin fos erroni. Llavors, la primera pregunta que incorpora l'exercici 4 (a) es va respondre tot seguint la mateixa metodologia que la del càlcul de l'esperança; mitjançant un diàleg obert entre nosaltres i tots els estudiants. Seguidament, la segona pregunta de l'activitat 4 (b) es va resoldre en parelles, seguint la mateixa organització que la implementada per la primera part de l'activitat. Finalment, vam demanar als alumnes que responguessin novament les qüestions de l'activitat 3 (exercici 5), per així veure si, havent adquirit en aquell moment un coneixement més o menys complert de la PSP i l'esperança matemàtica, havien canviat les seves opinions inicials.

3.1- Resum dels resultats de l'activitat

Per tal que el lector pugui conèixer quina va ser la nostra experiència pràctica i pugui observar com vam desenvolupar les activitats de la fitxa, hem considerat oportú fer un resum de quins han estat els resultats que els alumnes van obtenir per cadascun dels exercicis que havíem preparat. D'aquesta manera, el lector podrà veure quines han sigut les seves opinions, si han comprès el tema correctament, quines decisions han considerat més oportunes, etcètera. A més, i si es vol complementar la informació que aquí aportarem, es pot consultar l'annex **4** on es poden trobar les fotocòpies de les fitxes que van emplenar els alumnes.

Exercici 1. Resultats obtinguts en la simulació de cinc jocs de Sant Petersburg

Sobre l'exercici de demanar que els alumnes simulessin cinc jocs de Sant Petersburg diferents, vam obtenir uns resultats si més no concordants amb els que havíem esperat: amb aquest primer exercici vam poder concloure afirmativament que la probabilitat que aparegui cara per primera vegada després d'un gran nombre de llançaments és escassa. Tal i com es pot observar a la gràfica **2**, de les 55 simulacions de jocs que es van realitzar, gairebé la meitat dels grups (un 40%) va obtenir cara per primera vegada en el primer llançament; si més no en 1 de cada 4 jocs va aparèixer cara per primera ocasió en el segon llançament (un 27'3%) i en els casos més remots vam obtenir cara per primera vegada en els llançaments tercer, quart i cinquè amb probabilitats del 9'1%, 16'4% i 5'5% respectivament. El cas més estrany tan sols va ocórrer en un únic joc; concretament en la segona simulació del grup 9, i el resultat fou que es va haver de llançar la moneda fins a un total de 7 ocasions abans que no aparegués cara; un succés que fou el menys probable de tots, amb una probabilitat del 1'8%. Vegem-ho més properament a la gràfica següent:



Gràfica **2**. Mostra dels resultats de l'exercici 1 de la fitxa
Font pròpia

Exercici 2. Resum de les conclusions a les quals han arribat els grups d'alumnes

Gràcies als resultats obtinguts en el primer exercici, pels quals vam concloure que la probabilitat que aparegui cara per primera ocasió després d'un nombre escàs de llançaments és quelcom raonable, i amb l'ajuda de l'exercici 2, els alumnes van poder arribar a deduccions força similars. Tanmateix, cal comentar que els alumnes no van extreure aquestes conclusions de manera autònoma, sinó guiada per les explicacions que nosaltres els vam proporcionar. Sigui com sigui, la gran majoria d'estudiants van deduir força encertadament el motiu pel qual el problema de Sant Petersburg és considerat una paradoxa; tots ells van sostenir que en el joc els premis augmenten exponencialment i que, alhora, les probabilitats disminueixen també exponencialment. Tot i així, alguns grups es van fixar en els guanys i no en les pèrdues, argumentant que aquests augmenten exponencialment. A més, dos dels grups d'educands, concretament el grup 7 i 9, van proporcionar una resposta si més no òbvia però que nosaltres no hauríem imaginat que ells poguessin concloure: el fet que els premis són inversament proporcionals a la probabilitat d'obtenir-los.

Exercici 3. Resultats als quals han arribat els grups per les preguntes a, b i c

Fent que els alumnes es posessin, primerament, en el paper del jugador, la majoria de grups van pensar, lògicament, en el benefici propi. Tenint en compte que el premi mínim que es pot obtenir són 2€, van afirmar que la quantitat que tot jugador hauria de pagar per entrar al joc hauria de ser inferior o igual al premi mínim que es pot aconseguir; aquest fou el cas dels grups 6, 7, 8, 9, 10 i 11. Sobre aquesta mateixa pregunta, també ens agradaria remarcar que les opinions entre els membres que formaven el grup 2 eren tan contradictòries que entre ells no es van poder posar d'acord i, just després d'haver debatut molt productivament, els vam suggerir que anotessin els dos resultats als quals havien arribat.

Simulant, llavors, que els alumnes eren el banquer, ens vam sorprendre pel fet que els educands no posessin una quantitat molt elevada com a quota d'entrada; doncs la major part de les seves opinions foren que aquesta no havia de ser superior als 10€. Nogensmenys, hi va haver l'excepció del grup 4, el qual va raonar de la manera que nosaltres esperàvem, tot argumentant que la quota d'entrada hauria de ser el més alta possible per, d'aquesta manera, obtenir un màxim benefici. També cal mencionar que els grups 1, 6 i 7 no es van fixar en el benefici màxim sinó simplement en que el banquer perdés el mínim de diners possible, i així van establir una quota d'entrada força adient.

Per últim, en el cas de buscar una quota per tal que el joc es pogués catalogar de just, la majoria dels nostres alumnes van cercar aquella quantitat que, aproximadament, provocava que tant el jugador com el banquer arrisquessin els mateixos diners. El grup que millor va explicat aquesta dada fou l'11.

Exercici 4b. Resum de les opinions dels alumnes sobre el fet que l'esperança matemàtica del joc és infinita

Aquesta activitat es podria considerar com la pregunta més important de la fitxa, en tant que aquesta és la qüestió que si més no van intentar resoldre els diferents matemàtics al llarg de les èpoques, generant així aquelles discussions que hem comentat a la part més teòrica del nostre treball. La major part dels alumnes, concretament els grups 1, 2, 3 i 10, van observar que el joc de Sant Petersburg no es pot portar a la pràctica pel simple fet que no hi ha infinits diners al món i que, en conseqüència, no tindria sentit tenir la possibilitat, per remota que sigui, d'obtenir més diners dels que hi ha en tot el planeta. De manera similar, els grups 2 i 3 es van fixar en la impossibilitat de jugar al joc en un nombre infinit d'ocasions, ja que això suposaria que tant el banquer com el jugador haurien de dedicar tota la seva vida a la realització d'aquest joc; una observació, aquesta, que és summament similar a la que va arribar Condorcet, qui va argumentar que un preu infinit no era just perquè no hi hauria suficient temps per repartir totes les tirades. A més, similarment als resultats obtinguts per Cramer, el grup 4 va deduir que, a partir d'una certa quantitat de diners, una persona ja no obtindrà la mateixa satisfacció; un fet que, com els alumnes van observar, podria ajudar a resoldre el problema de l'infinit. Altres, el grup 6 i 7, es van fixar simplement en la definició d'esperança matemàtica que els havíem ensenyat, tot referint-se a que si el premi s'obtingués a curt termini probablement no resultaria favorable pels interessos del jugador. Finalment, i seguint les deduccions de Poisson, el grup 11 va afirmar que la quota d'entrada del joc hauria de dependre de la fortuna que posseeix cada individu que hi participa.

Exercici 5. Resum dels resultats als que han arribat els grups per les preguntes a, b i c posseint coneixement de l'esperança

Quan els estudiants van haver adquirit un coneixement més complert de l'esperança i van haver observat empíricament que la PSP pot proporcionar guanys molt elevats, la major part dels alumnes, posant-se en el paper del banquer, van augmentar considerablement el preu de la quota d'entrada. Tanmateix, hi va haver alguns casos que van cridar la nostra atenció. Un d'aquests fou el grup 4, qui va pensar que el preu de la quota d'entrada que convertiria el joc en just havia de ser de 1.500€, tot argumentant que aquests són els diners estàndards que disposa cada individu. A més, el grup 6 va observar que aquest joc mai podria arribar a ser just. Finalment, i en el cas dels grups 2 i 7, aquest nou coneixement de l'esperança matemàtica no els va fer canviar la seva opinió inicial.

Valoració general. Conclusions de l'avaluació feta pels alumnes

Els resultats de la última pregunta, que consistia en fer una valoració general de la nostra pràctica com a docents i puntuar el grau de satisfacció de les nostres explicacions i del mètode utilitzat, han estat certament positius. De fet, la mitjana total de les sis qüestions que els demanàvem de valorar és de 4'48 sobre 5. Aquest fet demostra que explicar matemàtiques a partir d'una metodologia més dinàmica és altament eficient, i provoca que els educands estiguin més concentrats i mostrin un nivell més elevat d'interès. A més, i donat que el tema de l'esperança no es troba en el currículum oficial de matemàtiques de batxillerat, els alumnes van valorar positivament l'adquisició d'aquest tipus de coneixement. Sobre aquest tema, tots els grups han puntuat un 4 o un 5 sobre 5 a excepció d'un, que ha puntuat un 3. Quant a si la temàtica va ser explicada correctament, tant la que fa referència a la part més pràctica i matemàtica com la històrica i més teòrica, els resultats també han estat força positius. Per acabar, i sobre el fet que realitzéssim una pràctica grupal, els alumnes han mostrat una actitud molt assertiva, fins al punt que aquesta part de la nostra intervenció fou la que es va rebre amb més ànim i entusiasme. Quelcom que, en general, ens ha provocat una gran satisfacció i ens ha animat a continuar amb una tasca tan important com és l'ensenyança.

CONCLUSIONS

Ens resulta força difícil escriure aquesta última part del nostre treball, perquè al llarg d'aquest camí hem anat arribant a conclusions molt variades. Com el lector haurà observat, aquest ha estat un treball que s'ha proposat dos objectius i que, per complir-los, ha combinat dues metodologies. El primer, aquell que consistia en intentar comprendre sistemàticament la PSP i la seva història, s'ha intentat acomplir a partir d'una metodologia més teòrica, que ha consistit en la cerca bibliogràfica i en l'intent de realitzar una mena d'estat de la qüestió sobre la PSP, tot intentant agrupar aquella informació més rellevant que avui està disponible sobre el tema. El segon, aquell que consistia en ensenyar el concepte d'esperança matemàtica a les aules de primer de batxillerat i, d'aquesta manera, reivindicar l'estudi de la PSP, s'ha intentat acomplir mitjançant una metodologia més pràctica, que bàsicament ha consistit en la realització d'una unitat didàctica amb la qual s'ha volgut fer una petita proposta de millora de l'ensenyament matemàtic. Tenint aquest esquema en ment, ara ens agradaria resumir les idees que hem conclòs en cada apartat que composa el nostre treball.

L'apartat teòric ha permès concloure que, tot i que la PSP ha estat considerada durant molt de temps una proposta de joc d'atzar simple, aquesta ha inspirat desenvolupaments molt importants. Aquesta dada queda demostrada per la gran varietat de propostes de solució que matemàtics, economistes i físics d'arreu del món van idear per resoldre el problema de Sant Petersburg. Tanmateix, i sense menystenir els esforços d'aquests experts, podem concloure que no s'ha arribat a una solució massa satisfactòria sobre la paradoxa ni tampoc a cap tipus de consens sobre quin havia de ser el procediment per resoldre-la. Havent pres consciència d'aquesta realitat, ens vam adonar que si bé la matèria de matemàtiques sempre s'ha tractat com una ciència exacte els problemes de la qual només es poden resoldre a partir d'un únic camí, la PSP demostra justament el contrari. De fet, aquesta paradoxa ens permet afirmar que hi ha tantes vies de solució sobre un problema com persones s'han dedicat al seu estudi i a la seva comprensió. És per això que la cita que hem escollit per encapçalar el nostre treball fa referència al fet que, en ocasions, en matemàtiques és més valuós plantejar un problema que no pas trobar-ne una solució.

Nogensmenys, i aquesta última conclusió fou la que ens va fer pensar en la possibilitat d'ampliar el nostre treball a un nivell pràctic, tot i que l'intent de solucionar la PSP va ser una tasca a la que es van dedicar nombrosos matemàtics durant els segles XVIII i XIX, al llarg del segle anterior i l'actual, l'estudi de la paradoxa sembla una qüestió més aviat secundària o no tan rellevant. Aquest fet es pot deure, molt segurament, a la gran quantitat d'investigacions que es troben disponibles, cosa que pot haver provocat que els experts actuals no hagin trobat cap camí d'investigació nou, que no seguís els passos dels seus antecessors. Tanmateix, i si bé pot ser que no existeixi cap solució nova a plantejar, aquest fet no ha de ser un pretext per abandonar l'estudi de la PSP. Per aquesta raó, el nostre treball conté una segona part pràctica.

Ensenyar la PSP als alumnes de primer de batxillerat científic no només ens ha permès conèixer aquest misteri matemàtic, sinó que també ens ha ajudat a pensar un model alternatiu d'ensenyança de les matemàtiques. Una de les conclusions que es poden extreure del marc pràctic és que la matèria de matemàtiques sovint és menyspreada pels alumnes. Una realitat, aquesta, que ha provocat que el nombre d'estudiants matriculats al batxillerat d'especialitat científica es vegi reduït any rere any i que cada vegada hi hagi menys educands que tinguin interès en continuar estudis matemàtics superiors. Davant de dades com aquestes, la posició adoptada pels professors d'institut ha estat força variada. Mentre alguns no ho han considerat ni tan sols un problema real, d'altres s'han esforçat en transformar el mètode d'ensenyament. Seguint l'exemple d'aquests últims, nosaltres ens hem col·locat el que podríem anomenar les "ulleres de la crítica" i hem analitzat a comptagotes les dilemàtiques que prevalen a les aules de matemàtiques. És en aquest punt on va començar la nostra petita proposta de millora de l'educació matemàtica.

La reivindicació d'un mètode constructivista d'aprenentatge i l'explicació del tema de la probabilitat i l'esperança a partir d'aquest nou model va donar uns resultats certament positius. En primer lloc, incloure la PSP a l'estudi probabilístic va permetre als alumnes tenir coneixement del cas d'una variable amb esperança infinita. Donat que és lògic que les idees prèvies de l'alumne sobre aquesta temàtica siguin que les variables sempre tenen esperança finita (Ruiz, 1999), conèixer un problema com el de Sant Petersburg pot ajudar a completar i millorar la informació que els estudiants disposaven prèviament. A més, cal tenir en compte que explicar l'esperança matemàtica a partir de la PSP ajuda als alumnes a comprendre un dels conceptes més importats en ciències econòmiques i administratives com és el de la utilitat. També cal dir que per fer notar als alumnes com de petita és una probabilitat, com per exemple $\frac{1}{2^{100}}$, vam haver d'introduir idees que poden ajudar als estudiants a aprendre altres conceptes de les matemàtiques, com és el cas dels logaritmes. Sigui com sigui, la conclusió més important que podem extreure de la segona part del nostre treball és que la implementació d'un mètode alternatiu d'ensenyança que es basa en el diàleg, el joc i la proposta de reptes va augmentar considerablement l'interès i la motivació dels alumnes; fet que ens va generar una gran satisfacció personal i ens va fer pensar que la millora de la pràctica educativa és una de les feines més indispensables en l'àmbit de l'ensenyament matemàtic i general.

Tot plegat ens porta a parlar de les dificultats que ens han sorgit al nostre treball. La més important és que la pràctica didàctica s'hauria d'haver allargat, per així disposar de més hores lectives per realitzar una explicació més complerta sobre l'esperança. De fet, podríem dir que la nostra ni tan sols es pot considerar una unitat didàctica, sinó que consisteix en una o dues lliçons que volen mostrar quin ha de ser el funcionament que, segons opinem, ha de prevaldre a les aules de matemàtiques. Sobre la part teòrica, la dificultat principal ha estat que, donat que les propostes de solucions dels segles XVIII i XIX van ser tan prolífiques, ens hem vist obligats a incloure només aquelles aportacions que hem pensat més rellevants o que van tenir més repercussió, desconsiderant aquelles més menors però no per això menys importants. Un altre problema ha estat que no hem aconseguit localitzar cap font bibliogràfica que hagués realitzat un treball teòric previ sobre la PSP i que hagués inclòs tota la informació referent a les solucions a les que s'han arribat. En canvi, només vam aconseguir localitzar alguns documents i articles que parlaven molt breument sobre el tema, la majoria dels quals no estaven escrits en llengües properes a la nostra com és el cas del català o el castellà, sinó només en anglès o d'altres. Això ha generat que per escriure el marc teòric ens haguem vist obligats a fer una mena de *patchwork* d'escrits, tot agafant informació de diferents articles i llibres. Sigui com sigui, la nostra feina s'haurà acomplert si, com hem dit a la introducció, hem aconseguit realitzar una explicació de la PSP i incitar al seu coneixement.

Per tot plegat, afegit a la primera dificultat esmentada de no haver disposat de masses hores lectives per fer la nostra activitat didàctica, volem acabar el nostre treball concloent que la feina realitzada aquí no només es pot ampliar a nivell teòric sinó també, i sobretot, a nivell pràctic, i que per això sempre és important tenir en compte que *sit finis libri, non quaerendi* —que el final del llibre no sigui el final de la cerca.

BIBLIOGRAFIA

AGNELLI, H. (2009). Relevancia de la enseñanza de la Probabilidad. *Ciencias Económicas, 7*(2). pp.11–21.

ALABERT, A. (2002). *Mesura i probabilitat*. Barcelona: Servei de publicacions de la UAB.

ALBERTÍ, M. (2018). «La vida cotidiana como recurso de aprendizaje académico» dins: *Las matemáticas de la vida cotidiana* (pp.9–27). Albacete: FESPM.

BELL, R.M., & COVER, T.M. (1980). Competitive optimality of logarithmic investment. *Mathematics of Operations Research 5*(2). pp.161–166.

BERNOULLI, D. (1954). Exposition of a new theory of the measurement of risk. *Econometrica, 22*(1). pp.23–36.

BROUSSEAU, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación matemática, 12*(1). pp.5–38.

CAPPIELLO, A. (2016). Decision Making and Saint Petersburg Paradox: Focusing on Heuristic Parameters, Considering the Non-Ergodic Context and The Gambling Risks. *Rivista Italiana di Economia Demografia e Statistica, 70*(4). pp.147–158.

CASTILLO, A., DE LOS COBOS, S., & PÉREZ, B.R. (2000). *Introducción a la probabilidad*. Mèxic: Universidad Autónoma Metropolitana. Unidad Iztapalapa.

Catalunya. Currículum de matemàtiques de batxillerat. *Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya*, 14 de febrer de 2008, núm. 5183. pp.1–21.

DA SILVA, S., & MATSUSHITA, R. (2015). The St. Petersburg paradox: An experimental solution. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 445*. pp.66–74.

DUTKA, J. (1988). On the St. Petersburg Paradox. *Archive for History of Exact Sciences, 39*(1). pp.13–39.

FACCARELLO, G. (2006). An “Exception culturelle”? French Sensationist political economy and the shaping of públic econòmics. *Euro. J. History of Economic Thought 13*(1). pp.1–38.

_____________ (2016). «Daniel Bernoulli (1700–1782)» dins: FACCARELLO, G., & KURZ, H.D. (eds). (2016). *Handbook on the history of Economic Analysis*. Chentelham: Edward Elgar Publishing.

FELLER, W. (1968). *An introduction to probability theory and its applications (vol. I)*. Nova York: John Wiley & Sons.

FONT, V., & NÚÑEZ, J.M. (1995). Aspectos ideológicos en la contextualización de las matemáticas: una aproximación histórica. *Revista de Educación*, (306). pp.293–314.

FONT, V., & POCHULU, M. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14(3). pp.361–394.

FONTAINE, A. (1764). *Mémoires donnés à l'Académie Royale des Sciences*. Paris: Imprimerie Royale.

GASCÓN, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 18*(1). pp.7–33.

GONZALEZ, M.L., & LANDRO, A.H. (2018). *Teoría general de las variables aleatorias*. Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas.

GREGORIO, J.R. (2002). El constructivismo y las matemáticas. *SIGMA, 21*. pp.113–130.

GUT, A. (2004). An Extension of the Kolmogorov–Feller Weak Law of Large Numbers with An Application to the St. Petersburg Game. *Journal of Theoretical Probability, 17*(3). pp.769–779.

HAYDEN, B.Y., & PLATT, M.L. (2009). The mean, the median, and the St. Petersburg paradox. *Judgment and Decision Making, 4*(4). pp.1–10.

HUANG, K. (2013). *Three hundred years of the St. Petersburg paradox* [tesis de master, Michigan Technological University]. Departament of Mathematical Sciences.

INOUE, L.Y.T., & PARMIGIANI, G. (2009). *Decision Theory: Principles and Approaches*. Nova Jersey: John Wiley & Sons.

JAAFAR, M. (2019). *On the analysis of St. Petersburg paradox and its solution in terms of uniform treatment* [tesi de master, Near East University]. Near East University.

KHINCHIN, A. (1925). Über das Petersburger Spiel. *Mat. Sb., 32*(2). pp.330–341.

MARTIN-LÖF, A. (1985). A Limit Theorem which clarifies the "Petersburg Paradox". *Journal of Applied Probability, 22*(3). pp.634–643.

MEUSNIER, N. (2006). Nicolas, neveu exemplaire. *Electronic Journal for History of Probability and Statistics, 2*(1). pp.1–14.

MONTMORT, P.R. (1718). *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*. Paris: Quillau.

MORENO, L., & WALDEGG, G. (1992). Constructivismo y educación matemática. *Educación matemática, 4*(2). pp.7–15.

NUALART, D., & SANZ, M. (1990). *Curs de probabilitats*. Barcelona: PPU.

ORTIZ, D. (2015). El constructivismo como teoría y método de enseñanza. *Sophia. Colección de Filosofía de la Educación*, (19). pp.93–110.

PARRONDO, J.M.R. (2007). Sortis in ludis: de la paradoja de San Petersburgo a la teoría de la utilidad. *Curs Euler. Conferències FME, UPC, 4*. pp.61–78.

PETERSON, M. (2020). *The St. Petersburg paradox*. Stanford: Stanford Encyclopedia of Philosophy.

RAO, S. (2001). A Note on the St. Petersburg Paradox. *Elemente der Mathematik, 56*. pp.102–104.

RUIZ, G. (1999). La paradoja de San Petersburgo: una reivindicación didáctica. *Suma 32*. pp.5–9.

SALOV, V. (2014). "The Gibbon of Math History". Who Invented the St. Petersburg Paradox? Khinchin's resolution. *Cornell University, arXiv*. pp.1–17.

SÁNCHEZ, J.M. (1984). La contribución de Daniel Bernoulli y Gabriel Cramer a la teoría de la utilidad. *Cuadernos de Ciencias Económicas y Empresariales, 13*. pp.9–27.

SANZ, M. (1999). *Probabilitats*. Barcelona: Edicions Universitat de Barcelona.

SOLÉ, J.L. (2012). El món de les variables sense moments finits de tots els ordres: de la paradoxa de Sant Petersburg als processos de Lévy. *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques, 27*(1). pp.63–113.

TODHUNTER, I. (1865). *A history of the Mathematical Theory of Probability: From the Time of Pascal to That of Laplace*. Cambridge: Macmillan & Co.

TÜNNERMANN, C. (2011). El constructivismo y el aprendizaje de los estudiantes. *Universidades,* (48). pp.21–32.

WHITWORTH, W.A. (1886). *Choice and chance, an elementary treatise on permutations, combinations, and probability, with 640 exercises*. Cambridge: Deighton, Bell & Co.

ANNEXES

Annex 1. La carta de Bernoulli a Montmort de l'any 1713

401

Extrait d'une Lettre de M. N. Bernoulli à M. de M…
du 9 Septembre 1713.

LE Livre de feu mon Oncle vient de ſortir de la preſſe, le Libraire m'a dit qu'il en a envoyé un Exemplaire par la Poſte à M. Koenig; ſi vous êtes curieux de le voir, vous pourrés le faire retirer par quelqu'un de chés M. Koenig, à qui j'en donnerai avis, en attendant que je puiſſe lui envoyer quelqu'autres Exemplaires pour vous & pour mes autres amis de Paris. Il n'y aura gueres rien de nouveau pour vous. J'ai été empêché depuis quelque temps de faire de nouvelles recherches ſur la matiere du hazard, c'eſt pourquoi je ne puis rien vous communiquer; cependant en revanche des Problêmes que vous m'avés propoſés, & dont j'examinerai les ſolutions quand j'aurai du loiſir, je vous en propoſe quelqu'autres qui meritent votre application. *Premier Problême.* *A* & *B* jouent alternativement avec un dé à quatre faces marquées de 0, 1, 2, 3, *A* met une certaine ſomme d'écus au jeu, & commence à jouer; & après avoir amené ou 0, ou 1, ou 2, ou 3 points, il reprend autant d'écus du jeu qu'il a amené de points, & cede le cornet à *B*, qui prend auſſi du reſte autant d'écus qu'il a amené de points; mais s'il amene la face marquée de 0, il paye un écu à *A*; & s'il amene un plus grand nombre de points qu'il ne reſte d'écus au jeu, non ſeulement il ne prend rien, mais il met autant d'écus au jeu qu'il a amené de points de trop, & ils continuent ainſi juſqu'à ce qu'il ne reſte plus rien au jeu; je demande quelle eſt la ſomme que *A* doit mettre au jeu pour que leurs ſorts ſoient égaux. *Second Problême.* Si *B* au lieu de payer un écu à *A* quand il n'amene rien, met un écu au jeu, trouver ce qu'alors *A* doit mettre au jeu. *Troiſiéme Problême.* Deux Joueurs *A* & *B* jouent alternativement avec un dé ordinaire, *A* met un écu au jeu, *B* commence à jouer; s'il amene un nombre pair, il prend cet écu; s'il amene un nombre impair, il met un écu au jeu, enſuite

Eee

c'eſt *A* qui joue, lequel en amenant un nombre pair prend un écu au jeu comme *B*; mais il ne met rien au jeu quand il amene un nombre impair, & ils continuent juſqu'à ce qu'il ne reſte plus rien au jeu, toujours avec cette condition, qu'ils prennent l'un & l'autre un écu du jeu quand ils amenent un nombre pair; mais que *B* ſeul met un écu au jeu quand il amene un nombre impair, on demande leurs ſorts. *Quatriéme Problême.* *A* promet de donner un écu à *B*, ſi avec un dé ordinaire il amene au premier coup ſix points, deux écus s'il amene le ſix au ſecond, trois écus s'il amene ce point au troiſiéme coup, quatre écus s'il l'amene au quatriéme, & ainſi de ſuite; on demande quelle eſt l'eſperance de *B*. *Cinquiéme Problême.* On demande la même choſe ſi *A* promet à *B* de lui donner des écus en cette progreſſion 1, 2, 4, 8, 16, &c. ou 1, 3, 9, 27, &c. ou 1, 4, 9, 16, 25, &c. ou 1, 8, 27, 64, &c. au lieu de 1, 2, 3, 4, 5, &c comme auparavant. Quoique ces Problêmes pour la plûpart ne ſoient pas difficiles, vous y trouverés pourtant quelque choſe de fort curieux : je vous ai déja propoſé le premier dans ma derniere Lettre. Vous me ferés plaiſir de me communiquer enfin votre ſolution du Her, afin que je puiſſe vous donner l'explication de mon Anagramme. Au reſte, Monſieur, je me réjouis de ce que votre ſanté eſt meilleure; mais je vous plains de ce que vous avés perdu votre Princeſſe. J'ai l'honneur d'être avec un attachement inviolable,

MONSIEUR,

Votre très humble & très
obéiſſant Serviteur
N. BERNOULLY.

****

Extracte literal de la carta que va enviar Nicolaus Bernoulli a Montmort, on s'hi pot trobar la primera versió rudimentària de la paradoxa de Sant Petersburg. Sobretot, i com hem anunciat al cos principal del treball, és oportú fixar-se en l'última part de la carta, on apareixen els dos problemes que acabaran donant lloc a la paradoxa.

Font: Montmort, 1718, pp.401–402.

Annex 2. La carta de Cramer a Nicolaus de l'any 1738

Perhaps I am mistaken, but I believe that I have solved the extraordinary problem which you submitted to M. de Montmort in your letter of September 9, 1713, (problem 5, page 402). For the sake of simplicity I shall assume that A tosses a coin into the air and B commits himself to give A 1 ducat if, at the first throw, the coin falls with its cross upward; 2 if it falls thus only at the second throw, 4 if at the third throw, 8 if at the fourth throw, etc. The paradox consists in the infinite sum which calculation yields as the equivalent which A must pay to B. This seems absurd since no reasonable man would be willing to pay 20 ducats as equivalent. You ask for an explanation of the discrepancy between the mathematical calculation and the vulgar evaluation. I believe that it results from the fact that, in their theory, mathematicians evaluate money in proportion to its quantity while, in practice, people with common sense evaluate money in proportion to the utility they can obtain from it. The mathematical expectation is rendered infinite by the enormous amount which I can win if the coin does not fall with its cross upward until rather late, perhaps at the hundredth or thousandth throw. Now, as a matter of fact, if I reason as a sensible man, this sum is worth no more to me, causes me no more pleasure "and influences me no more to accept the game than does a sum amounting only to ten or twenty million ducats. Let us suppose, therefore, that any amount above 10 millions, or (for the sake of simplicity) above $2^{24} = 166777216$ ducats be deemed by him equal in value to 2^{24} ducats or, better yet, that I can never win more than that amount, no matter how long it takes before the coin falls with its cross upward. In this case, my expectation is ½ $+ 1/4 \cdot 2 + 1/8 \cdot 4 + \cdots + \frac{1}{2^{25}} \cdot 2^{24} + \frac{1}{2^{26}} \cdot 2^{24} + \frac{1}{2^{27}} \cdot 2^{24} + \cdots = 1/2 + 1/2 + 1/2 + \cdots + \text{ (24 times) } + \cdots + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots = 12 + 1 = 13.$ Thus, my moral expectation is reduced in value to 13 ducats and the equivalent to be paid for it is similarly reduced-a result which seems much more reasonable than does rendering it infinite.

The equivalent can turn out to be smaller yet if we adopt some alternative hypothesis on the moral value of wealth. For that which I have just assumed is not entirely valid since, while it is true that 100 millions yield more satisfaction than do 10 millions, they do not give ten times as much. If, for example, we suppose the moral value of goods to be directly proportionate to the square root of their mathematical quantities, e.g., that the satisfaction provided by 40000000 is double that provided by 10000000, my psychic expectation becomes

$$1/2\,\sqrt{1} + 1/4\,\sqrt{2} + 1/8\,\sqrt{4} + 1/16\,\sqrt{8} + \cdots = \frac{1}{2-\sqrt{2}}$$

However this magnitude is not the equivalent we seek, for this equivalent need not be equal to my moral expectation but should rather be of such a magnitude that the pain caused by its loss is equal to the moral expectation of the pleasure I hope to derive from my gain. Therefore, the equivalent must, on our hypothesis, amount to $\left(\frac{1}{2-\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{1}{6-4\sqrt{2}}\right) = 2.9 \ldots$, which is consequently less than 3, truly a trifling amount, but nevertheless, I believe, closer than is 13 to the vulgar evaluation.

****

Transcripció literal de la carta que va enviar Cramer a Nicolaus Bernoulli, on hi feia notar les dues solucions possibles del problema que el francès ja havia plantejat prèviament.

Font: Bernoulli, 1954, pp.33-35.

Annex 3. Fitxa de l'alumne

Primera part

Exercici 1. Recreeu 5 jocs de Sant Petersburg i completeu la taula següent:

Llançament en el que apareix cara per primer cop	Probabilitat d'aquest succés	Premi que s'obté

Exercici 2. Empleneu el següent quadre i expliqueu quines conclusions es poden extreure tot comparant-la amb la taula de l'Exercici 1 (com varia la probabilitat, com varien els premis...)

Llançament en el que apareix cara per primer cop	Probabilitat d'aquest succés	Premi que s'obté
5		
10		
50		
100		
n		
Conclusions:		

Exercici 3. Basant-vos en els resultats anteriors responeu les següents preguntes:

a) Quants diners estaríeu disposats a pagar com a quota d'entrada per participar al joc?

b) Si us poséssiu al lloc del banquer, quin preu posaríeu a la quota d'entrada?

c) Quin preu creieu que hauria de tenir la quota d'entrada perquè fos un joc "just"?

Segona part

Exercici 4. Calculeu l'esperança matemàtica del joc de Sant Petersburg i responeu les preguntes següents:

Nota: heu de tenir en compte que la probabilitat d'obtenir cara en un llançament determinat és $\frac{1}{2^n}$ i el premi depèn de quan ha sortit cara per primer cop, és a dir, si apareix en l'enèsim llançament el premi és 2^n.

a) Que creieu que significa aquest resultat?

b) Considereu que és un resultat correcte? Per què? (indiqueu tot allò que us sembli estrany)

Exercici 5. Basant-vos en els resultats anteriors torneu a respondre les següents preguntes:

a) Quants diners estaríeu disposats a pagar com a quota d'entrada per participar al joc?

b) Si us poséssiu al lloc del banquer, quin preu posaríeu a la quota d'entrada?

c) Quin preu creieu que hauria de tenir la quota d'entrada perquè fos un joc "just"?

Valoració final de l'activitat

Valora de l'1 al 10, essent 10 el màxim grau de satisfacció i 1 el mínim, els següents ítems.

He adquirit nous coneixements		La part històrica ha estat rellevant	
El tema s'ha explicat correctament		L'activitat en grup ha estat positiva	
L'activitat pràctica ha estat amena		Nota general de l'activitat	

Annex 4. Fotocòpies de les fitxes dels alumnes

La paradoxa de Sant Petersburg GRUP: 1

Exercici 1. Recreeu 5 jocs de Sant Petersburg i completeu la taula següent:

Llançament en el que apareix cara per primer cop	Probabilitat d'aquest succés	Premi que s'obté
1 cara	1/2	2€
~~[illegible]~~ 4	1/16	16€
1	1/2	2€
1	1/2	2€
1	1/2	2€

Exercici 2. Empleneu el següent quadre i expliqueu quines conclusions es poden extreure tot comparant-la amb la taula de l'Exercici 1 (com varia la probabilitat, com varien els premis...)

Llançament en el que apareix cara per primer cop	Probabilitat d'aquest succés	Premi que s'obté
5	1/32	32€
10	$\frac{1}{1024}$	~~1024€~~ 1024 €
50	$8,88... \times 10^{-16}$	$1,13 \times 10^{15}$
100	$7,89... \times 10^{-31}$	$1'26... \times 10^{30}$
n	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	2^n

Conclusions: Quant més vegades et surti creu abans que et surti la primera cara, obtindràs un premi més elevat però la probabilitat també serà menor

Exercici 3. Basant-vos en els resultats anteriors responeu les següents preguntes:

a) Quants diners estaríeu disposats a pagar com a quota d'entrada per participar al joc?

~~[illegible]~~ 10€

b) Si us posésssiu al lloc del banquer, quin preu posaríeu a la quota d'entrada?

500€

c) Quin preu creieu que hauria de tenir la quota d'entrada perquè fos un joc "just"?

29€

Exercici 4. Calculeu l'esperança matemàtica del joc de Sant Petersburg i responeu les preguntes següents:

Nota: heu de tenir en compte que la probabilitat d'obtenir cara en un llançament determinat és $\frac{1}{2^n}$ i el premi depèn de quan ha sortit cara per primer cop, és a dir, si apareix en l'enèsim llançament el premi és 2^n.

$$E = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^3 \cdot \frac{1}{8} + \cdots = \infty$$

a) Que creieu que significa aquest resultat?

Que sempre obtindràs un benefici.

b) Considereu que és un resultat correcte? Per què? (indiqueu tot allò que us sembli estrany)

No perquè no hi ha ∞ diners i per tant no té final.

Exercici 5. Basant-vos en els resultats anteriors torneu a respondre les següents preguntes:

a) Quants diners estaríeu disposats a pagar com a quota d'entrada per participar al joc?

10€

b) Si us poséssiu al lloc del banquer, quin preu posaríeu a la quota d'entrada?

5,000.000.000.000

c) Quin preu creieu que hauria de tenir la quota d'entrada perquè fos un joc "just"?

10.000.000

Valoració final de l'activitat

Valora de l'1 al 5, essent 5 el màxim grau de satisfacció i 1 el mínim, els següents ítems.

He adquirit nous coneixements		La part històrica ha estat rellevant	
El tema s'ha explicat correctament		L'activitat en grup ha estat positiva	
L'activitat pràctica ha estat amena		Nota general de l'activitat	

La paradoxa de Sant Petersburg GRUP: 2

Exercici 1. Recreeu 5 jocs de Sant Petersburg i completeu la taula següent:

Llançament en el que apareix cara per primer cop	Probabilitat d'aquest succés	Premi que s'obté
1	$\frac{1}{2}$	$2^1 = 2$ €
2	$\frac{1}{4}$	$2^2 = 4$ €
2	$\frac{1}{4}$	$2^2 = 4$. €
2	$\frac{1}{4}$	$2^2 = 4$. €
5	$\frac{1}{32}$	$2^5 = 32$ €

Exercici 2. Empleneu el següent quadre i expliqueu quines conclusions es poden extreure tot comparant-la amb la taula de l'Exercici 1 (com varia la probabilitat, com varien els premis...)

Llançament en el que apareix cara per primer cop	Probabilitat d'aquest succés	Premi que s'obté
5	$\frac{1}{32}$	$2^5 = 32$
10	$\frac{1}{1024}$	$2^{10} = 1024$
50	$8,88 \cdot 10^{-16}$	$2^{50} = 1.126 \cdot 10^{15}$
100	$7,89 \cdot 10^{-31}$	$2^{100} = 1,267 \cdot 10^{30}$
n	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	2^n

Conclusions: La probabilitat d'obtenir un benefici alt disminueix molt ràpidament.

Exercici 3. Basant-vos en els resultats anteriors responeu les següents preguntes:

a) Quants diners estaríeu disposats a pagar com a quota d'entrada per participar al joc?

Miriam: no jugaria / Marc 3 €

b) Si us posésiu al lloc del banquer, quin preu posaríeu a la quota d'entrada?

[illegible] 8 €

c) Quin preu creieu que hauria de tenir la quota d'entrada perquè fos un joc "just"?

5 €

Exercici 4. Calculeu l'esperança matemàtica del joc de Sant Petersburg i responeu les preguntes següents:

Nota: heu de tenir en compte que la probabilitat d'obtenir cara en un llançament determinat és $\frac{1}{2^n}$ i el premi depèn de quan ha sortit cara per primer cop, és a dir, si apareix en l'enèsim llançament el premi és 2^n.

a) Que creieu que significa aquest resultat?

b) Considereu que és un resultat correcte? Per què? (indiqueu tot allò que us sembli estrany)

- No hi ha diners infinits al món
- No es pot jugar infinites vegades

Exercici 5. Basant-vos en els resultats anteriors torneu a respondre les següents preguntes:

a) Quants diners estaríeu disposats a pagar com a quota d'entrada per participar al joc?

2 €

b) Si us posésiu al lloc del banquer, quin preu posaríeu a la quota d'entrada?

8 €

c) Quin preu creieu que hauria de tenir la quota d'entrada perquè fos un joc "just"?

5 €

Valoració final de l'activitat

Valora de l'1 al 5, essent 5 el màxim grau de satisfacció i 1 el mínim, els següents ítems.

He adquirit nous coneixements	5	La part històrica ha estat rellevant	5
El tema s'ha explicat correctament	4	L'activitat en grup ha estat positiva	5
L'activitat pràctica ha estat amena	5	Nota general de l'activitat	4,8

Exercici 1. Recreeu 5 jocs de Sant Petersburg i completeu la taula següent:

Llançament en el que apareix cara per primer cop	Probabilitat d'aquest succés	Premi que s'obté
5	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{32}$	$2^5 = 32$€
4	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$	$2^4 = 16$€
3	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$	$2^3 = 8$€
1	$\frac{1}{2}$	$2^1 = 2$€
4	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$	$2^4 = 16$€

Exercici 2. Empleneu el següent quadre i expliqueu quines conclusions es poden extreure tot comparant-la amb la taula de l'Exercici 1 (com varia la probabilitat, com varien els premis...)

Llançament en el que apareix cara per primer cop	Probabilitat d'aquest succés	Premi que s'obté
5	$\frac{1}{32}$	32 €
10	$\frac{1}{1024}$	1024 €
50	$8,88 \times 10^{-16}$	~~$8,88 \times 10^{16}$~~ $1,125 \times 10^{15}$
100	$7,89 \times 10^{-31}$	~~[illegible]~~ $1,27 \times 10^{30}$
n	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	2^n

Conclusions: com més tard surt cara més petita és la probabilitat i més gran el premi.

Exercici 3. Basant-vos en els resultats anteriors responeu les següents preguntes:

a) Quants diners estaríeu disposats a pagar com a quota d'entrada per participar al joc? 4€

~~1 € perquè així sempre guanyes 1€ i no perds tant~~

b) Si us posésiu al lloc del banquer, quin preu posaríeu a la quota d'entrada?

~~5 € perquè així amb menys tirades guanya més~~ 8€

c) Quin preu creieu que hauria de tenir la quota d'entrada perquè fos un joc "just"?

~~2 € està bé~~ 8 €

Exercici 4. Calculeu l'esperança matemàtica del joc de Sant Petersburg i responeu les preguntes següents:

Nota: heu de tenir en compte que la probabilitat d'obtenir cara en un llançament determinat és $\frac{1}{2^n}$ i el premi depèn de quan ha sortit cara per primer cop, és a dir, si apareix en l'enèsim llançament el premi és 2^n.

a) Que creieu que significa aquest resultat?

b) Considereu que és un resultat correcte? Per què? (indiqueu tot allò que us sembli estrany)

A la pràctica no, ja que ni pots estar jugant infinitament ni et poden donar infinits diners.

Exercici 5. Basant-vos en els resultats anteriors torneu a respondre les següents preguntes:

a) Quants diners estaríeu disposats a pagar com a quota d'entrada per participar al joc?

10€

b) Si us posèssiu al lloc del banquer, quin preu posaríeu a la quota d'entrada?

50 €

c) Quin preu creieu que hauria de tenir la quota d'entrada perquè fos un joc "just"?

16 €.

Valoració final de l'activitat

Valora de l'1 al 5, essent 5 el màxim grau de satisfacció i 1 el mínim, els següents ítems.

He adquirit nous coneixements	4	La part històrica ha estat rellevant	5
El tema s'ha explicat correctament	5	L'activitat en grup ha estat positiva	5
L'activitat pràctica ha estat amena	3	Nota general de l'activitat	4

Exercici 1. Recreeu 5 jocs de Sant Petersburg i completeu la taula següent:

Llançament en el que apareix cara per primer cop	Probabilitat d'aquest succés	Premi que s'obté
2	$\left(\frac{1}{4}\right)$	$2^2 = 4€$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$2^1 = 2€$
3	$\left(\frac{1}{8}\right)$	$2^3 = 8€$
2	$\left(\frac{1}{4}\right)$	$2^2 = 4€$
2	$\left(\frac{1}{4}\right)$	$2^2 = 4€$

Exercici 2. Empleneu el següent quadre i expliqueu quines conclusions es poden extreure tot comparant-la amb la taula de l'Exercici 1 (com varia la probabilitat, com varien els premis...)

Llançament en el que apareix cara per primer cop	Probabilitat d'aquest succés	Premi que s'obté
5	2^5	$\left(\frac{1}{2}\right)^5$
10	2^{10}	$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$
50	2^{50}	$\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$
100	2^{100}	$\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$
n	2^n	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Conclusions: El premi obtingut creix molt ràpidament, ja que és una exponencial.

Exercici 3. Basant-vos en els resultats anteriors responeu les següents preguntes:

a) Quants diners estaríeu disposats a pagar com a quota d'entrada per participar al joc?

500€, ens sembla una quota acceptable.

b) Si us posésseu al lloc del banquer, quin preu posaríeu a la quota d'entrada?

El més alt possible, per exemple. 2000000000€

c) Quin preu creieu que hauria de tenir la quota d'entrada perquè fos un joc "just"?

50000€

Exercici 4. Calculeu l'esperança matemàtica del joc de Sant Petersburg i responeu les preguntes següents:

Nota: heu de tenir en compte que la probabilitat d'obtenir cara en un llançament determinat és $\frac{1}{2^n}$ i el premi depèn de quan ha sortit cara per primer cop, és a dir, si apareix en l'enèsim llançament el premi és 2^n.

a) Que creieu que significa aquest resultat?

b) Considereu que és un resultat correcte? Per què? (indiqueu tot allò que us sembli estrany)

No, ja que avegades hi ha un limit de diners, en que la gent els deixa d'importar. Ex: una persona a partir de 500000 li es igual la quantitat, que pugi més

Exercici 5. Basant-vos en els resultats anteriors torneu a respondre les següents preguntes:

a) Quants diners estaríeu disposats a pagar com a quota d'entrada per participar al joc?

1000000000 €, ja que es quan guanyarem més diners.

b) Si us poséssiu al lloc del banquer, quin preu posaríeu a la quota d'entrada?

El més poc posible, 2€ per exemple.

c) Quin preu creieu que hauria de tenir la quota d'entrada perquè fos un joc "just"?

15000€, ja que son els diners estandarts que te la societat.

Valoració final de l'activitat

Valora de l'1 al 5, essent 5 el màxim grau de satisfacció i 1 el mínim, els següents ítems.

He adquirit nous coneixements	4	La part històrica ha estat rellevant	3
El tema s'ha explicat correctament	4	L'activitat en grup ha estat positiva	5
L'activitat pràctica ha estat amena	4	Nota general de l'activitat	5

La paradoxa de Sant Petersburg GRUP: 5

Exercici 1. Recreeu 5 jocs de Sant Petersburg i completeu la taula següent:

Llançament en el que apareix cara per primer cop	Probabilitat d'aquest succés	Premi que s'obté
1	$\frac{1}{2}$	$2^1 = 2$ €
5	$\left(\frac{1}{2}\right)^5$	$2^5 = 32$ €
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$2^2 = 4$ €
1	$\frac{1}{2}$	$2^1 = 2$ €
1	$\frac{1}{2}$	$2^1 = 2$ €

Exercici 2. Empleneu el següent quadre i expliqueu quines conclusions es poden extreure tot comparant-la amb la taula de l'Exercici 1 (com varia la probabilitat, com varien els premis...)

Llançament en el que apareix cara per primer cop	Probabilitat d'aquest succés	Premi que s'obté
5	$\left(\frac{1}{2}\right)^5$	$2^5 = 32$€
10	$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$	$2^{10} = 1024$€
50	$\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$	$2^{50} = 1,1 \cdot 10^{15}$€
100	$\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$	$2^{100} = 1,2 \cdot 10^{30}$€
n	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	2^n

Conclusions:
Com que són exponencials, el premi puja molt ràpid.

Exercici 3. Basant-vos en els resultats anteriors responeu les següents preguntes:

a) Quants diners estaríeu disposats a pagar com a quota d'entrada per participar al joc?

20€

b) Si us posésiu al lloc del banquer, quin preu posaríeu a la quota d'entrada?

10€

c) Quin preu creieu que hauria de tenir la quota d'entrada perquè fos un joc "just"?

2€

Exercici 4. Calculeu l'esperança matemàtica del joc de Sant Petersburg i responeu les preguntes següents:

Nota: heu de tenir en compte que la probabilitat d'obtenir cara en un llançament determinat és $\frac{1}{2^n}$ i el premi depèn de quan ha sortit cara per primer cop, és a dir, si apareix en l'enèsim llançament el premi és 2^n.

a) Que creieu que significa aquest resultat?

b) Considereu que és un resultat correcte? Per què? (indiqueu tot allò que us sembli estrany)

Exercici 5. Basant-vos en els resultats anteriors torneu a respondre les següents preguntes:

a) Quants diners estaríeu disposats a pagar com a quota d'entrada per participar al joc?

75 €

b) Si us poséssiu al lloc del banquer, quin preu posaríeu a la quota d'entrada?

100 €

c) Quin preu creieu que hauria de tenir la quota d'entrada perquè fos un joc "just"?

2 €

Valoració final de l'activitat

Valora de l'1 al 5, essent 5 el màxim grau de satisfacció i 1 el mínim, els següents ítems.

He adquirit nous coneixements	4	La part històrica ha estat rellevant	3
El tema s'ha explicat correctament	5	L'activitat en grup ha estat positiva	5
L'activitat pràctica ha estat amena	5	Nota general de l'activitat	4

 GRUP: 6

Exercici 1. Recreeu 5 jocs de Sant Petersburg i completeu la taula següent:

Llançament en el que apareix cara per primer cop	Probabilitat d'aquest succés	Premi que s'obté
2	$\frac{1}{4}$	$2^2 = 4$
4	$1/16$	$2^4 = 16$
4	$1/16$	$2^4 = 16$
3	$1/8$	$2^3 = 8$
1	$1/2$	$2^1 = 2$

Exercici 2. Empleneu el següent quadre i expliqueu quines conclusions es poden extreure tot comparant-la amb la taula de l'Exercici 1 (com varia la probabilitat, com varien els premis...)

Llançament en el que apareix cara per primer cop	Probabilitat d'aquest succés	Premi que s'obté
5	$1/32$	2^5
10	$1/1024$	2^{10}
50	$1/8,88178 \cdot 10^{-16}$	2^{50}
100	$1/7,8886 \cdot 10^{-31}$	2^{100}
n	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	2^n

Conclusions: hi ha una probabilitat molt petita de conseguir grans beneficis en aquest joc ja que es molt poc probable que no tregui's cara en un nombre elevat de tirs.

Exercici 3. Basant-vos en els resultats anteriors responeu les següents preguntes:

a) Quants diners estaríeu disposats a pagar com a quota d'entrada per participar al joc?

~~Gratis~~ De gratis fins a 1,99 €

b) Si us posésiu al lloc del banquer, quin preu posaríeu a la quota d'entrada?

~~5 €~~ a partir de 5 €

c) Quin preu creieu que hauria de tenir la quota d'entrada perquè fos un joc "just"?

3 €

Exercici 4. Calculeu l'esperança matemàtica del joc de Sant Petersburg i responeu les preguntes següents:

Nota: heu de tenir en compte que la probabilitat d'obtenir cara en un llançament determinat és $\frac{1}{2^n}$ i el premi depèn de quan ha sortit cara per primer cop, és a dir, si apareix en l'enèsim llançament el premi és 2^n.

a) Que creieu que significa aquest resultat?

Significa que a la llarga surts guanyant (a la molt llarga).

b) Considereu que és un resultat correcte? Per què? (indiqueu tot allò que us sembli estrany)

És correcte, ja que et diu que quan s'allargui el joc ~~sempre~~ acabaràs guanyant un nombre positiu de diners.
~~El~~ que passa és ~~que~~ a curt plaç és difícil que surti a compte

Exercici 5. Basant-vos en els resultats anteriors torneu a respondre les següents preguntes:

a) Quants diners estaríeu disposats a pagar com a quota d'entrada per participar al joc?

~~[illegible]~~ Igual que abans

b) Si us poséssiu al lloc del banquer, quin preu posaríeu a la quota d'entrada?

a partir de 5 €

c) Quin preu creieu que hauria de tenir la quota d'entrada perquè fos un joc "just"?

~~3 €~~ No pot ser mai just

Valoració final de l'activitat

Valora de l'1 al 5, essent 5 el màxim grau de satisfacció i 1 el mínim, els següents ítems.

He adquirit nous coneixements		La part històrica ha estat rellevant	
El tema s'ha explicat correctament		L'activitat en grup ha estat positiva	
L'activitat pràctica ha estat amena		Nota general de l'activitat	

Exercici 1. Recreeu 5 jocs de Sant Petersburg i completeu la taula següent:

Llançament en el que apareix cara per primer cop	Probabilitat d'aquest succés	Premi que s'obté
1	50%	2€
2	25%	4€
1	50%	2€
1	50%	2€
2	25%	4€

Exercici 2. Empleneu el següent quadre i expliqueu quines conclusions es poden extreure tot comparant-la amb la taula de l'Exercici 1 (com varia la probabilitat, com varien els premis...)

Llançament en el que apareix cara per primer cop	Probabilitat d'aquest succés	Premi que s'obté
5	$2^{-5} \cdot 100\%$	2^{5}
10	2^{-10}	2^{10}
50	2^{-50}	2^{50}
100	2^{-100}	2^{100}
n	2^{-n}	2^{n}

Conclusions: La probabilitat del succés és inversament proporcional al premi

Exercici 3. Basant-vos en els resultats anteriors responeu les següents preguntes:

a) Quants diners estaríeu disposats a pagar com a quota d'entrada per participar al joc?

menys de 2€

b) Si us posésiu al lloc del banquer, quin preu posaríeu a la quota d'entrada?

16€ → 6% de perdre ~~(el banquer)~~ diners

c) Quin preu creieu que hauria de tenir la quota d'entrada perquè fos un joc "just"?

~~6€~~ ~~8~~ 4€

Exercici 4. Calculeu l'esperança matemàtica del joc de Sant Petersburg i responeu les preguntes següents:

Nota: heu de tenir en compte que la probabilitat d'obtenir cara en un llançament determinat és $\frac{1}{2^n}$ i el premi depèn de quan ha sortit cara per primer cop, és a dir, si apareix en l'enèsim llançament el premi és 2^n.

a) Que creieu que significa aquest resultat?

b) Considereu que és un resultat correcte? Per què? (indiqueu tot allò que us sembli estrany)

sí, perquè hauríes de jugar infinites vegades, sinó el resultat seria diferent

Exercici 5. Basant-vos en els resultats anteriors torneu a respondre les següents preguntes:

a) Quants diners estaríeu disposats a pagar com a quota d'entrada per participar al joc?

2€

b) Si us posséssiu al lloc del banquer, quin preu posaríeu a la quota d'entrada?

16 €

c) Quin preu creieu que hauria de tenir la quota d'entrada perquè fos un joc "just"?

6€

Valoració final de l'activitat

Valora de l'1 al 5, essent 5 el màxim grau de satisfacció i 1 el mínim, els següents ítems.

He adquirit nous coneixements	4	La part històrica ha estat rellevant	3
El tema s'ha explicat correctament	5	L'activitat en grup ha estat positiva	5
L'activitat pràctica ha estat amena	3	Nota general de l'activitat	5

Exercici 1. Recreeu 5 jocs de Sant Petersburg i completeu la taula següent:

Llançament en el que apareix cara per primer cop	Probabilitat d'aquest succés	Premi que s'obté
1	$\frac{1}{2}$	$2^1 = 2€$
2	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$2^2 = 4€$
1	$\frac{1}{2}$	$2^1 = 2€$
1	$\frac{1}{2}$	$2^1 = 2€$
4	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$	$2^4 = 16€$

Exercici 2. Empleneu el següent quadre i expliqueu quines conclusions es poden extreure tot comparant-la amb la taula de l'Exercici 1 (com varia la probabilitat, com varien els premis...)

Llançament en el que apareix cara per primer cop	Probabilitat d'aquest succés	Premi que s'obté
5	$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$	$2^5 = 32€$
10	$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$	$2^{10} = 1024€$
50	$\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$	$2^{50} = 1{,}16 \cdot 10^{15}€$
100	$\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$	$2^{100} = 1{,}27 \cdot 10^{20}€$
n	$\left(\frac{1}{2}\right)^m$	2^m

Conclusions: Com més tarda a sortir cara, més disminueix la probabilitat i augmenta el premi que s'obté.

Exercici 3. Basant-vos en els resultats anteriors responeu les següents preguntes:

a) Quants diners estaríeu disposats a pagar com a quota d'entrada per participar al joc?

1,99 €

b) Si us posésiu al lloc del banquer, quin preu posaríeu a la quota d'entrada?

2 €

c) Quin preu creieu que hauria de tenir la quota d'entrada perquè fos un joc "just"?

1,50 €

Exercici 4. Calculeu l'esperança matemàtica del joc de Sant Petersburg i responeu les preguntes següents:

Nota: heu de tenir en compte que la probabilitat d'obtenir cara en un llançament determinat és $\frac{1}{2^n}$ i el premi depèn de quan ha sortit cara per primer cop, és a dir, si apareix en l'enèsim llançament el premi és 2^n.

$$E = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^3 \cdot \frac{1}{2^3} + \ldots = 1+1+1+\ldots = \infty$$

a) Que creieu que significa aquest resultat?

Que el que juga sempre surt beneficiat, sempre i quan tinguessis ∞ diners.

b) Considereu que és un resultat correcte? Per què? (indiqueu tot allò que us sembli estrany)

És estrany poder guanyar ∞ diners però el resultat és correcte

Exercici 5. Basant-vos en els resultats anteriors torneu a respondre les següents preguntes:

a) Quants diners estaríeu disposats a pagar com a quota d'entrada per participar al joc?

10000 €

b) Si us poséssiu al lloc del banquer, quin preu posaríeu a la quota d'entrada?

5€

c) Quin preu creieu que hauria de tenir la quota d'entrada perquè fos un joc "just"?

1,99€

Valoració final de l'activitat

Valora de l'1 al 5, essent 5 el màxim grau de satisfacció i 1 el mínim, els següents ítems.

He adquirit nous coneixements	4	La part històrica ha estat rellevant	4
El tema s'ha explicat correctament	4	L'activitat en grup ha estat positiva	5
L'activitat pràctica ha estat amena	5	Nota general de l'activitat	4

La paradoxa de Sant Petersburg GRUP: 9

Exercici 1. Recreeu 5 jocs de Sant Petersburg i completeu la taula següent:

Llançament en el que apareix cara per primer cop	Probabilitat d'aquest succés	Premi que s'obté
1	$1/2$	2 €
7	$(1/2)^7$	128 €
3	$(1/2)^3$	8 €
2	$(1/2)^2$	4 €
3	$(1/2)^3$	8 €

Exercici 2. Empleneu el següent quadre i expliqueu quines conclusions es poden extreure tot comparant-la amb la taula de l'Exercici 1 (com varia la probabilitat, com varien els premis...)

Llançament en el que apareix cara per primer cop	Probabilitat d'aquest succés	Premi que s'obté
5	$(1/2)^5 = \frac{1}{32}$	32 €
10	$(1/2)^{10} = \frac{1}{1024}$	1024 €
50	$(1/2)^{50} = \frac{1}{2^{50}}$	$1{,}13 \cdot 10^{15}$ €
100	$(1/2)^{100} = \frac{1}{2^{100}}$	$1{,}27 \cdot 10^{30}$ €
n	$(1/2)^n = \frac{1}{2^n}$	2^n

Conclusions: El premi és l'invers de la probabilitat.

Exercici 3. Basant-vos en els resultats anteriors responeu les següents preguntes:

a) Quants diners estaríeu disposats a pagar com a quota d'entrada per participar al joc?

0 €

b) Si us posèssiu al lloc del banquer, quin preu posaríeu a la quota d'entrada?

50 €

c) Quin preu creieu que hauria de tenir la quota d'entrada perquè fos un joc "just"?

2 €

$E(x) = \sum^{r} a_i \cdot P(a_i)$

premi

Exercici 4. Calculeu l'esperança matemàtica del joc de Sant Petersburg i responeu les preguntes següents:

Nota: heu de tenir en compte que la probabilitat d'obtenir cara en un llançament determinat és $\frac{1}{2^n}$ i el premi depèn de quan ha sortit cara per primer cop, és a dir, si apareix en l'enèsim llançament el premi és 2^n.

–

a) Que creieu que significa aquest resultat?

–

b) Considereu que és un resultat correcte? Per què? (indiqueu tot allò que us sembli estrany)

Sí, ja que la probabilitat i els premis es simplifiquen i queda una suma infinita de 1.

Exercici 5. Basant-vos en els resultats anteriors torneu a respondre les següents preguntes:

a) Quants diners estaríeu disposats a pagar com a quota d'entrada per participar al joc?

∞

b) Si us poséssiu al lloc del banquer, quin preu posaríeu a la quota d'entrada?

∞

c) Quin preu creieu que hauria de tenir la quota d'entrada perquè fos un joc "just"?

∞

Valoració final de l'activitat

Valora de l'1 al 5, essent 5 el màxim grau de satisfacció i 1 el mínim, els següents ítems.

He adquirit nous coneixements	5	La part històrica ha estat rellevant	3
El tema s'ha explicat correctament	5	L'activitat en grup ha estat positiva	4
L'activitat pràctica ha estat amena	5	Nota general de l'activitat	4

La paradoxa de Sant Petersburg GRUP: 10

Exercici 1. Recreeu 5 jocs de Sant Petersburg i completeu la taula següent:

Llançament en el que apareix cara per primer cop	Probabilitat d'aquest succés	Premi que s'obté
2	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	4€
1	1	2€
4	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$	$2^4 = 16$€
4	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$	$2^4 = 16$€
4	$\frac{1}{16}$	$2^4 = 16$€

Exercici 2. Empleneu el següent quadre i expliqueu quines conclusions es poden extreure tot comparant-la amb la taula de l'Exercici 1 (com varia la probabilitat, com varien els premis...)

Llançament en el que apareix cara per primer cop	Probabilitat d'aquest succés	Premi que s'obté
5	$\left(\frac{1}{8}\right)^5 = 0'03125$	$2^5 = 32$€
10	$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 9'76 \cdot 10^{-4}$	$2^{10} = 1024$€
50	$\left(\frac{1}{2}\right)^{50} = 8'88 \cdot 10^{-16}$	$2^{50} = 1'12 \cdot 10^{15}$€
100	$\left(\frac{1}{2}\right)^{100} = 7'88 \cdot 10^{-31}$	$2^{100} = 1'26 \cdot 10^{30}$€
n	$\left(\frac{1}{2}\right)^n = n$	

Conclusions: Com menys vegades surt cara més gran és el premi

Exercici 3. Basant-vos en els resultats anteriors responeu les següents preguntes:

a) Quants diners estaríeu disposats a pagar com a quota d'entrada per participar al joc?

2€ perquè com a mínim te'n donaran 2 €.

b) Si us posèssiu al lloc del banquer, quin preu posaríeu a la quota d'entrada?

4€

c) Quin preu creieu que hauria de tenir la quota d'entrada perquè fos un joc "just"?

2€

Exercici 4. Calculeu l'esperança matemàtica del joc de Sant Petersburg i responeu les preguntes següents:

Nota: heu de tenir en compte que la probabilitat d'obtenir cara en un llançament determinat és $\frac{1}{2^n}$ i el premi depèn de quan ha sortit cara per primer cop, és a dir, si apareix en l'enèsim llançament el premi és 2^n.

$$E = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^3 \cdot \frac{1}{8} + \dots = \infty$$

a) Que creieu que significa aquest resultat?

Qe hi ha infinits diners

b) Considereu que és un resultat correcte? Per què? (indiqueu tot allò que us sembli estrany)

No hi na proues diners en el món per tenir ∞ diners

Exercici 5. Basant-vos en els resultats anteriors torneu a respondre les següents preguntes:

a) Quants diners estaríeu disposats a pagar com a quota d'entrada per participar al joc?

2€

b) Si us poséssiu al lloc del banquer, quin preu posaríeu a la quota d'entrada?

1000 €

c) Quin preu creieu que hauria de tenir la quota d'entrada perquè fos un joc "just"?

2€

Valoració final de l'activitat

Valora de l'1 al 5, essent 5 el màxim grau de satisfacció i 1 el mínim, els següents ítems.

He adquirit nous coneixements	5	La part històrica ha estat rellevant	5
El tema s'ha explicat correctament	5	L'activitat en grup ha estat positiva	5
L'activitat pràctica ha estat amena	5	Nota general de l'activitat	5

La paradoxa de Sant Petersburg GRUP: 11

Exercici 1. Recreeu 5 jocs de Sant Petersburg i completeu la taula següent:

Llançament en el que apareix cara per primer cop	Probabilitat d'aquest succés	Premi que s'obté
1	0,5 (50%)	$2^1 = 2$ €
1	0,5 (50%)	$2^1 = 2$ €
1	0,5 (50%)	$2^1 = 2$ €
2	0,25 (25%)	$2^2 = 4$ €
2	0,25 (25%)	$2^2 = 4$ €

Exercici 2. Empleneu el següent quadre i expliqueu quines conclusions es poden extreure tot comparant-la amb la taula de l'Exercici 1 (com varia la probabilitat, com varien els premis...)

Llançament en el que apareix cara per primer cop	Probabilitat d'aquest succés	Premi que s'obté
5	0,15625	$2^5 = 32$ €
10	0,0098	$2^{10} = 1024$ €
50	$4,42474 \cdot 10^{-14}$	$2^{50} = 1,13 \cdot 10^{15}$ €
100	$7,8125 \cdot 10^{-29}$	$2^{100} = 1,28 \cdot 10^{30}$ €
n	n	2^n = (Tots els núm +0)

Conclusions:

Exercici 3. Basant-vos en els resultats anteriors responeu les següents preguntes:

a) Quants diners estaríeu disposats a pagar com a quota d'entrada per participar al joc?

Pagaríem 2 € per a entrar.

b) Si us poséssiu al lloc del banquer, quin preu posaríeu a la quota d'entrada?

4 € pq. després el preu ja estarà elevat a +3 i seria molt car però no tant

c) Quin preu creieu que hauria de tenir la quota d'entrada perquè fos un joc "just"?

4 €, no és car i el següent ja té molt benefici per al que fa el pagament

Exercici 4. Calculeu l'esperança matemàtica del joc de Sant Petersburg i responeu les preguntes següents:

Nota: heu de tenir en compte que la probabilitat d'obtenir cara en un llançament determinat és $\frac{1}{2^n}$ i el premi depèn de quan ha sortit cara per primer cop, és a dir, si apareix en l'enèsim llançament el premi és 2^n.

$$E = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^3 \cdot \frac{1}{8} + \ldots = 1 + \ldots 1 = \infty$$

a) Que creieu que significa aquest resultat?

Significa que si jugues ∞ vegades, et sortirà rentable.

b) Considereu que és un resultat correcte? Per què? (indiqueu tot allò que us sembli estrany)

És correcte però fins a un límit que depèn dels diners que pugui gastar cada persona.

Exercici 5. Basant-vos en els resultats anteriors torneu a respondre les següents preguntes:

a) Quants diners estaríeu disposats a pagar com a quota d'entrada per participar al joc?

4

b) Si us poséssiu al lloc del banquer, quin preu posaríeu a la quota d'entrada?

c) Quin preu creieu que hauria de tenir la quota d'entrada perquè fos un joc "just"?

Valoració final de l'activitat

Valora de l'1 al 5, essent 5 el màxim grau de satisfacció i 1 el mínim, els següents ítems.

He adquirit nous coneixements	2	La part històrica ha estat rellevant	4
El tema s'ha explicat correctament	5	L'activitat en grup ha estat positiva	5
L'activitat pràctica ha estat amena	4	Nota general de l'activitat	5