Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

ANÀLISI DE XARXES SOCIALS MITJANÇANT CADENES DE MARKOV

Autora: Laura Guerra Aragonés

Directora:	**Dra. Maria Isabel García Planas**
Realitzat a:	**Departament de Matemàtiques, ETSEIB**
Directora:	**Dra. Maria Eulàlia Montoro López**
Realitzat a:	**Departament de Matemàtiques i Informàtica, UB**
Barcelona,	**20 de juny de 2021**

Abstract

Markov chains are a mathematical tool that permits us to predict the short- and long-term behaviour of systems that can change state at any instant of time and that fulfil Markov's property, that is, that the future of the system, in from a known present, it is independent of the past. While it will not be known with certainty, the state of the system in the future can make predictions of future behaviours with the Markov Chains. Markov chains can be studied from the point of view of linear and matrix algebra, specifically from the theory of non-negative matrices.

This work aims to analyze the theoretical bases of non-negative matrices, on which Markov chains are based, to be used to design a simple mathematical model applied to the analysis of social networks.

Resum

Les cadenes de Markov són una eina matemàtica que permeten predir el comportament a curt i a llarg termini de sistemes que poden canviar d'estat en cada instant de temps i que compleixen la propietat de Markov, és a dir, que el futur del sistema, a partir d'un present conegut, és independent del passat. Si bé no es coneixerà amb certesa l'estat del sistema a futur, amb les Cadenes de Markov es poden fer prediccions de comportaments futurs. Les cadenes de Markov poden estudiar-se des del punt de vista de l'àlgebra lineal i matricial, en concret a partir de la teoria de les matrius no negatives.

L'objectiu d'aquest treball és analitzar les bases teòriques de les matrius no negatives, en les quals se sustenten les cadenes de Markov, per a ser utilitzades en el disseny d'un model matemàtic senzill, aplicat a l'anàlisi de les xarxes socials.

2020 Mathematics Subject Classification. 15A18, 15B48, 60J10

No crec que hi hagi res útil que els homes poden conèixer amb exactitud que no es pugui saber mitjançant l'aritmètica i l'àlgebra.

Malebranche (París 1638-1715)

Agraïments

Aprofito aquest apartat per expressar el meu agraïment a totes les persones que han fet possible aquest treball. En especial vull agraïr a les meves tutores ja que gràcies a elles ha anat agafant forma i consistència dia a dia. A la doctora Maria Eulàlia Montoro López per dur a terme un seguiment exhaustiu, donant consells i estructura al treball. A la doctora Maria Isabel García Planas, per aportar els seus coneixements sobre el tema, pel constant suport, l'orientació i la confiança d'acompanyar-me durant la trajectòria del treball.

Al meu agrupament escolta, l'A.E. Joan Maragall, i tota la gent que hi forma part, ja que per poder continuar realitzant la seva tasca educativa durant la pandèmia s'ha reinventat i ha usat les xarxes socials com a vehícle pedagògic; fet que m'ha inspirat a la tria del tema del treball.

A les meves amistats, les meves companyes de la universitat pel seu interès i alleugeriment de la feixuguesa del camí; i a totes aquelles amistats extrauniversitàries que m'han acompanyat i han fet més amè el recorregut.

A la meva família: al Joaquín, la meva parella, pel seu estímul, suport i estima inqüestionable; als meus pares, les meves germanes i la meva àvia, sense ells no hagués pogut arribar tan lluny ja que són un pilar fonamental.

Índex

1 Introducció i motivació del projecte

La pandèmia provocada pel coronavirus SARS-CoV-2 (COVID-19), és la primera crisi mundial de l'era digital. Les Xarxes socials s'han convertit en el mitjà de comunicació més potent per a mantenir el contacte social i ha suposat un gran creixement de la seva activitat no sols a nivell de comunicació sinó també com a mitjà per a la realització d'altres activitats.

Les activitats dels agrupaments escoltes han hagut també d'adaptar-se a les noves circumstàncies, i en aquesta adaptació les xarxes socials estan jugant un paper clau. La impossibilitat de sortir de casa ha tallat d'arrel la viabilitat de les activitats habituals d'aquests grups. No obstant això, gràcies a xarxes socials com Instagram o Youtube, els membres d'aquests grups han pogut continuar exercint la tasca pedagògica que fan habitualment.

L'objectiu d'aquest treball és mostrar un model matemàtic simplificat basat en cadenes de Markov que permet analitzar la fidelitat dels seguidors en les xarxes socials amb la finalitat de seleccionar la que pot ser més adient per a mantenir les activitats en un agrupament escolta. És conegut que hi ha una correlació positiva important entre l'eficàcia d'un grup i la quantitat i qualitat de les informacions i la seva fluïdesa dins del grup [19], també s'ha comprovat que hi ha una correlació positiva entre la satisfacció i les possibilitats de rebre i establir comunicacions [15].

El projecte

L'objectiu del projecte és fer una revisió sistemàtica de la teoria de Cadenes de Markov per tal d'utilitzar-les per estudiar les xarxes socials. L'estudi de les xarxes socials consisteix en l'estudi del comportament col·lectiu d'un conjunt d'elements entre els quals existeix algun tipus d'interacció. La recollida de dades a través de l'observació de diferents elements que interactuen entre si, permet crear models predictius que tracten de reproduir el comportament real d'aquests elements, i que tenen aplicació ja que el comportament col·lectiu és el resultat de la interacció entre els diferents elements que componen la xarxa ([11]).

Les cadenes de Markov permeten predir el comportament a curt i a llarg termini de sistemes que poden canviar d'estat en cada instant de temps i que compleixen la propietat de Markov, és a dir, que el futur del sistema, a partir d'un present conegut, és independent del passat. Una curiosa aplicació de les cadenes de Markov és PageRank, que és l'eina que utilitza el cercador Google per a classificar les pàgines web i així poder proporcionar a l'usuari aquelles pàgines que serien del seu interès, [5].

L'estudi de les cadenes de Markov, des del punt de vista de l'àlgebra lineal, passa per l'estudi de les matrius no negatives i les matrius positives, de les seves propietats i les seves potències; ja que molts dels resultats sobre cadenes de Markov es poden obtenir a través de propietats d'aquests tipus de matrius, ([1], [2], [7]). En particular, els resultats de Perron per a matrius positives i els ampliats per Frobenius a matrius no negatives han proporcionat propietats significatives relatives a l'espectre d'aquesta mena de matrius tals com garantir l'existència d'un valor propi positiu, que delimita en mòdul a la resta de valors propis de la matriu, i té associat un vector propi positiu; aquestes proietats ajuden, en el cas en què ens ocupa, a estudiar el comportament de les cadenes de Markov. De fet, més en general, aquests teoremes proporcionen un instrument per aconseguir condicions d'existència, unicitat, positivitat i estabilitat de les solucions en sistemes lineals dinàmics tant discrets com continus.

Per als càlculs necessaris per al cas concret d'estudi plantejat en el projecte, s'ha utilitzat l'eina MATLAB. El seu nom ve de l'abreviatura de "MATrix LABoratory"i va ser creada pel matemàtic i programador de computadores Cleve Moldre en 1984, amb la idea de poder ser usat en l'àmbit de l'àlgebra lineal i l'anàlisi numèrica.

Estructura de la Memòria

Aquesta memòria està dividida en diferents parts. Una primera part de preliminars d'àlgebra lineal on es fa un recordatori d'alguns conceptes i propietats, vistes durant el grau de matemàtiques, que es necessiten per al treball.

Una segona part d'ampliació sobre alguns conceptes d'àlgebra lineal, no vistos al grau però de gran rellevància per al projecte, dividida en dues seccions: una sobre les matrius no negatives i les seves propietats on es defineixen, s'enuncien i es demostren alguns resultats importants; i una altra secció sobre les cadenes de Markov, on s'estudia la presa de decisions sota incertesa mitjançant aquests processos en la qual un dels objectius és estudiar el comportament d'una cadena a llarg termini.

L'última part del treball és on es fa una aplicació pràctica de tot l'estudiat durant el treball. Es fa la descripció i l'anàlisi del model per a estudiar el seguiment de la població objecte d'estudi a les xarxes socials.

2 Preliminars d'àlgebra lineal

L'objectiu d'aquest apartat és esmentar els conceptes d'àlgebra lineal necessaris per a la realització d'aquest treball. Hi ha molta bibliografia relativa al tema d'àlgebra Lineal, i aquest projecte s'ha basat en els textos que tracten els conceptes explicats com els citats a continuació: [8], [12].

Per a l'estudi que volem fer és necessari considerar les matrius quadrades amb coeficients en el cos dels reals. Doncs, tot i que alguns resultats són generalitzables a altres cossos (com els complexos) o a altres dimensions, per a fer el treball considerarem $M_n(\mathbb{R})$ el conjunt de les matrius quadrades a coeficients reals i denotarem per $GL(n;\mathbb{R})$ al subgrup multiplicatiu de les matrius invertibles. Donada una matriu $A \in M_n(\mathbb{R})$, denotem per A^t la matriu transposada, $\det A$ al seu determinant i per $tr\, A$ a la seva traça.

2.1 Propietats espectrals

Recordem que, si $A \in M_n(\mathbb{R})$ i $c_A(x) = \det(A - xI)$ és el seu polinomi característic, es diu espectre de la matriu al conjunt dels seus valors propis, que a la vegada són les arrels del polinomi característic:

$$Spec\,(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid c_A(\lambda) = 0\}$$

(Escriurem simplement $c(\lambda)$ si no dona lloc a confusió).

És comprensible que una mesura de magnitud per a matrius pugui basar-se en les magnituds dels valors propis, encara que això pot resultar de poca utilitat pràctica ja que els valors propis són, sovint, difícils de calcular. No obstant això, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ són els valors propis de A, una cota per a les normes d'aquests valors pot ser una mica més fàcil d'obtenir, en aquest sentit definim el concepte següent del qual es poden obtenir cotes usant normes de matrius.

Definició 2.1. *Es diu radi espectral d'una matriu $A \in M_n(\mathbb{R})$ al màxim dels valors propis en mòdul, és a dir,*

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in Spec(A)} |\lambda|$$

Exemple 2.2. Considerem les matrius següents:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

els espectres corresponents són:

$$\begin{aligned} Spec\,(A_1) &= \{-1, 3\} \\ Spec\,(A_2) &= \{2, \tfrac{1+\sqrt{3}i}{2}, \tfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\} \\ Spec\,(A_3) &= \{1, 2, 4\}. \end{aligned}$$

Llavors,

$$\rho(A_1) = 3, \qquad \rho(A_2) = 2, \qquad \rho(A_3) = 4$$

Proposició 2.3. *Per a tot valor propi $\lambda \in \mathbb{C}$ d'una matriu $A \in M_n(\mathbb{R})$, es compleix*

$$|\lambda| \leq max\{|a_{11}| + \cdots + |a_{1n}|, \ldots, |a_{n1}| + \cdots + |a_{nn}|\}$$

$$|\lambda| \leq max\{|a_{11}| + \cdots + |a_{n1}|, \ldots, |a_{1n}| + \cdots + |a_{nn}|\}$$

En particular,

$$\rho(A) \leq max\{|a_{11}| + \cdots + |a_{1n}|, \ldots, |a_{n1}| + \cdots + |a_{nn}|\}$$

$$\rho(A) \leq max\{|a_{11}| + \cdots + |a_{n1}|, \ldots, |a_{1n}| + \cdots + |a_{nn}|\}$$

Aquesta proposició és conseqüència del teorema següent:

Teorema 2.4 (Geršhgorin, 1931)**.** *Sigui $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{C})$ i $r_i = \sum_{i\neq j=1}^{n} |a_{ij}|$. Llavors,*

$$Spec\,(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{D(a_{ii}, r_i)}$$

on $\overline{D(a_{ii}, r_i)}$ són els discos tancats de centre a_{ii} i radi r_i.

Això és, per a cada valor propi $\lambda \in Spec(A)$ existeix un i, $1 \leq i \leq n$ tal que $|\lambda - a_{ii}| \leq r_i$.

En l'espai $M_n(\mathbb{R})$ en tant que espai vectorial real, es pot definir una norma $\|\cdot\|$, en particular la norma euclidea: si $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, $\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$.

La possibilitat de multiplicar dues matrius qualsevol $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ dona lloc a una pregunta important sobre la relació entre la norma $\|A\|$, $\|B\|$ i la norma $\|AB\|$ del seu producte.

Definició 2.5. *Donada una norma $\|\cdot\|$ a $M_n(\mathbb{R})$, direm que és una norma submultiplicativa, o norma de matrius, si es compleix que*

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Tot i que el radi espectral no és una norma, aquest valor està molt relacionat amb la magnitud norma de matrius i ho veiem en el teorema següent.

Teorema 2.6. *Sigui $A \in M_n(\mathbb{R})$ i $\rho(A)$ el seu radi espectral. Llavors,*

$$\|A\| \geq \rho(A)$$

per a qualsevol norma de matriu.

Demostració. Donat $\lambda \in Spec(A)$ i un vector propi corresponent $v \in \mathbb{R}^n$, construïm la matriu $V \in M_n(\mathbb{R})$ amb totes les seves columnes iguals al vector v. De manera que, utilizant la submultiplicativitat de la norma, obtenim tenim

$$|\lambda|\|V\| = \|\lambda V\| = \|AV\| \leq \|A\|\|V\|$$

i per tant $\rho(A) \leq \|A\|$. □

No sempre es dona la igualtat per a veure-ho hi ha prou amb considerar

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A \neq 0$, per tant $\|A\| \neq 0$; no obstant això, $\rho(A) = 0$.

Observació 2.7. El fet de que $\rho(A) = 0$ amb $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ confirma que ρ no és una norma ja que, com veiem, és un operador degenerat.

El radi espectral està estretament lligat amb el comportament de la convergència de la successió de potències d'una matriu, com es mostra en el següent teorema:

Teorema 2.8. *Sigui $A \in M_n(\mathbb{R})$ i $\rho(A)$ el seu radi espectral, llavors:*

$$\lim_{k\to\infty} A^k = 0 \quad \textit{si i només si} \quad \rho(A) < 1.$$

Demostració. Suposem que $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$ anem a veure que $\rho(A) < 1$.

Sigui $\lambda \in \mathbb{C}$ un valor propi qualsevol i $v \in \mathbb{C}^n$ un vector propi associat, es té que

$$A^k(v) = A^{k-1}A(v) = \lambda A^{k-1}(v) = \ldots = \lambda^k v.$$

Llavors:

$$0 = 0(v) = \lim_{k\to\infty} A^k(v) = \lim_{k\to\infty} \lambda^k v = (\lim_{k\to\infty} \lambda^k)v.$$

Donat que $v \neq 0$, es té que

$$\lim_{k\to\infty} \lambda^k = 0 \;\Rightarrow\; |\lambda| < 1.$$

Tenint en compte que el valor propi era qualsevol, podem concloure que $\rho(A) < 1$.

Pel recíproc només cal considerar la forma reduïda de Jordan (complexa) de la matriu A i tenir en compte que, si $A = SJS^{-1}$ llavors:

$$\lim_{k\to\infty} A^k = S(\lim_{k\to\infty} J^k)S^{-1}.$$

on la matriu J^k és una matriu diagonal per blocs $J_{ij}(\lambda_i)$ cadascun de la forma

$$J_{ij}^k = \begin{pmatrix}
\lambda_i^k & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} & \ldots & \binom{k}{k-1}\lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & \lambda_i^k & \ldots & & \binom{k}{k-1}\lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\
 & & \ddots & & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & & & \ddots & 1 \\
 & & & & & & & \binom{k}{k-1}\lambda_i \\
 & & & & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & & & \ddots & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} \\
 & & & & & & & \lambda_i^k
\end{pmatrix}.$$

□

Exemple 2.9. Considerem la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 1.2 & 0 & -1 \\ 1 & 0.2 & -1 \\ 0 & 1 & -0.8 \end{pmatrix}.$$

La seva forma reduïda de Jordan és: $\begin{pmatrix} 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0.2 & 1 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$ sent $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

LLavors,

$$\lim_{k\to\infty} A^k = S(\lim_{k\to\infty} J^k)S^{-1} = S \lim_{k\to\infty} \begin{pmatrix} 0.2^k & k \cdot 0.2^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2} \cdot 0.2^{k-2} \\ 0 & 0.2^k & k \cdot 0.2^{k-1} \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} S^{-1} = 0$$

3 Matrius no negatives. Propietats

En múltiples aplicacions de la teoria de matrius, els coeficients de les matrius que intervenen són tots no negatius. La utilitat d'aquesta teoria, tant per a la programació lineal com els processos estocàstics, la resolució de certs tipus d'equacions en derivades parcials, diversos models economètrics i altres aplicacions, ha crescut molt i ràpid, i això ha fet créixer l'interès en el seu estudi. Pel que respecta a aquest treball, el seu interès és per la seva aplicació a l'estudi de cadenes de Markov.

En relació a les matrius no negatives, la bibliografia és més específica, i el treball s'ha basat en textos més concisos com ([1], [2], [7], [11], [14]).

Definició 3.1. *Una matriu* $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ *es diu no negativa si* $a_{ij} \geq 0$, $\forall 1 \leq i,j \leq n$ *i escriurem* $A \geq 0$. *Si* $a_{ij} > 0$, $\forall 1 \leq i,j \leq n$, *llavors diem que* A *és una matriu positiva i escriurem* $A \gg 0$.

De manera similar es defineix un vector (tant per files com per columnes) $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ *com no negatiu si* $v_i \geq 0\, \forall i = 1, \ldots, n$, *i s'escriu* $v \geq 0$*; i un vector positiu si* $v_i > 0$ $\forall i = 1, \ldots, n$, *i s'escriu* $v > 0$.

Exemples 3.2.

$$a) \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad c)\ (1,0,0), \quad d) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) exemple d'una matriu no negativa

b) exemple d'una matriu positiva

c) exemple d'un vector fila no negatiu

d) exemple d'un vector columna positiu

Siguin ara $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}, B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{R})$, seguint amb la notació introduïda podem escriure

$$\begin{array}{rcll} A \geq B & \text{si} & a_{ij} \geq b_{ij} & \forall i,j \\ A > B & \text{si} & a_{ij} \geq b_{ij} & A \neq B \\ A \gg B & \text{si} & a_{ij} > b_{ij} & \forall i,j \end{array}$$

escrivint doncs, $A \gg 0$ per les matrius positives.

Observació 3.3. El concepte de matriu no negativa i matriu positiva es defineix, en general, per a matrius rectangulars, ens restringim a les matrius quadrades pel fet que són els tipus de matrius que necessitem per a l'estudi de les xarxes socials.

Denotem per $MN_n(\mathbb{R})$ al conjunt de matrius quadrades no negatives i per $MP_n(\mathbb{R})$ al conjunt de les matrius quadrades positives.

Els conjunts $MN_n(\mathbb{R})$ i $MP_n(\mathbb{R})$ són tancats per les operacions de suma i producte de matrius.

Observació 3.4.

a) $A \in MN_n(\mathbb{R}) \;\Rightarrow\; -A \notin MN_n(\mathbb{R})$

b) $A \in MN_n(\mathbb{R}) \cap Gl(n;\mathbb{R}) \;\not\Rightarrow\; A^{-1} \notin MN_n(\mathbb{R})$ ni $A^{-1} \in MN_n(\mathbb{R})$

Exemple 3.5. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in MN_n(\mathbb{R})$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \in MN_n(\mathbb{R})$, en canvi $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in MN_n(\mathbb{R})$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin MN_n(\mathbb{R})$.

c) $A \in MP_n(\mathbb{R}) \cap Gl(n;\mathbb{R}) \;\Rightarrow\; A^{-1} \notin MN_n(\mathbb{R})$

Teorema 3.6 ([2])**.** *Si $A \in MN_n(\mathbb{R})$, llavors:*

a) $\rho(A)$, el radi espectral d'A, és un valor propi de A,

b) A té un vector propi no negatiu de valor propi $\rho(A)$,

c) A^t té un vector propi no negatiu de valor propi $\rho(A)$.

Dins dels tipus de matrius no negatives, hi ha algunes que són de més rellevància per a aquest projecte. Concretament, és important recalcar les següents: les *irreduïbles*, les *primitives* i les *estocàstiques*.

3.1 Matrius Irreduïbles

Respecte les propietats de les matrius no negatives, Frobenius va observar que algunes estaven relacionades amb la posició en la que es troben els zeros de la matriu. El que porta a definir el següent concepte:

Definició 3.7. *Una matriu $A \in M_n(\mathbb{R})$ amb $n \geq 2$ es diu que és reduïble quan existeix una matriu permutació $P \in Gl(n;\mathbb{R})$ (i.e. les columnes de P són una permutació de les columnes de la matriu identitat) tal que*

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

on $B \in M_r(\mathbb{R})$ i $D \in M_{n-r}(\mathbb{R})$. Si no existeix P, llavors es diu que A és irreduïble.

Exemple 3.8. La següent matriu no és irreduïble

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ja que si prenem la matriu de permutació

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

es té que la matriu

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

és de la forma donada a la Definició 3.7 amb:

$$B = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Definició 3.9. *Donades dues matrius $A, M \in M_n(\mathbb{R})$, es diu que són cogredients i ho notarem $A \sim_c M$ si i només si existeix una matriu permutació $P \in Gl(n;\mathbb{R})$ tal que*

$$PAP^{-1} = M$$

Exemple 3.10. Pel vist a l'Exemple 3.8,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \sim_c \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

La cogrediència és una relació d'equivalència.

La Definició 3.9 ens permet donar una definició alternativa de matrius reduïbles:

Definició 3.11. *Una matriu $A \in M_n(\mathbb{R})$ és reduïble si i només si*

$$A \sim_c \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

on $B \in M_r(\mathbb{R})$ i $D \in M_{n-r}(\mathbb{R})$.

i tenim el següent resultat

Proposició 3.12. *Siguin $M, A \in M_n(\mathbb{R})$ amb $M \sim_c A$. Llavors*

$$A \text{ és reduïble } \Leftrightarrow \ M \text{ és reduïble.}$$

Demostració. És conseqüència de la transitivitat de $\sim_c$:

De $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ i $M = P_1AP_1^{-1}$ es té:

$$(PP_1^{-1})M(PP_1)^{-1} = PP_1^{-1}MP_1P^{-1} = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}.$$

□

El concepte de reductibilitat, a nivell geomètric, es tradueix en què un endomorfisme és reduïble si té un subespai lineal invariant generat per vectors de la base canònica.

Exemple 3.13. Prenent la matriu de l'Exemple 3.8, es veu que el subespai generat per vectors de la base canònica $F = [(1,0,0),(0,0,1)]$, és invariant per A.

Proposició 3.14. *Sigui $A \in M_n(\mathbb{R})$, llavors:*

$$A \text{ és reduïble } \Leftrightarrow \ A^t \text{ és reduïble.}$$

Demostració. Sigui A reduïble, llavors existeix una matriu de permutació $P \in Gl(n;\mathbb{R})$ de manera que $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ amb $B \in M_r(\mathbb{R})$ i $D \in M_{n-r}(\mathbb{R})$, d'on $PA^tP^{-1} = (PAP^{-1})^t = \begin{pmatrix} B^t & C^t \\ 0 & A^t \end{pmatrix}$.

Considerem ara la permutació $P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & J_r \\ 0 & I_{n-2r} & 0 \\ J_r & 0 & 0 \end{pmatrix}$ on $J_r = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ és la matriu amb tot zeros excepte la diagonal secundària que són uns.

Llavors $P_0PA^tP^{-1}P_0 = \begin{pmatrix} \widetilde{B} & 0 \\ \widetilde{C} & \widetilde{D} \end{pmatrix}$ on $\widetilde{B} \in M_{n-r}(\mathbb{R})$ i $\widetilde{D} \in M_r(\mathbb{R})$.

Ara només cal observar que $P^{-1}P_0 = (P_0P)^{-1}$ i P_0P és una matriu permutació.

Recíprocament, si A^t és una matriu reduïble llavors $A = (A^t)^t$ és també reduïble. $\square$

Proposició 3.15. *Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ és una matriu reduïble, aleshores A^p també és reduïble $\forall p \in \mathbb{N}$.*

Demostració. $A \in M_n(\mathbb{R})$ reduïble $\Rightarrow$ $\exists P \in Gl(n;\mathbb{R})$ matriu permutació tal que

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix},$$

on B i D són matrius quadrades. Llavors,

$$PA^pP^{-1} = \begin{pmatrix} B^p & 0 \\ E & D^p \end{pmatrix},$$

on E és la matriu dels productes creuats, (així per $p = 2$: $E = CB + DC$ i per $p = 3$: $E = CB^2 + DCB + D^2C$), i B^p i D^p són matrius quadrades, i per tant, A^p és reduïble. $\square$

No obstant això, si una matriu és irreduïble alguna de les seves potències pot ser reduïble, com es pot veure en el següent exemple:

Exemple 3.16. La matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

és irreduïble i

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

és reduïble.

Per tant, necessitem alguna condició addicional per a garantir la irreductibilitat de la potència d'una matriu irreduïble. Tenim la següent proposició.

Proposició 3.17. *Si $A \in MN_n(\mathbb{R})$ és irreduïble i $\exists i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $a_{ii} > 0$, llavors A^p també és irreduïble per a qualsevol enter $p > 0$.*

Una manera senzilla d'identificar una matriu reduïble ve donada pel següent lema.

Lema 3.18 ([1])**.** *Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ amb $n \geq 2$. Sigui $a_{ij} = 0$ per $i \in I$, $j \notin I$ per algun subconjunt no buit I de $\{1, 2, \dots, n\}$, llavors A és reduïble.*

Aquest lema dona lloc a una definició equivalent de matriu irreduïble.

Definició 3.19 ([14]). *Suposem que* $\{1, 2, \ldots, n\} = I \cup J$ *on*

$$I = \{i_1, i_2, \ldots, i_\mu\} \text{ i } J = \{j_1, j_2, \ldots, j_\nu\}, \ (\mu + \nu = n), \mu\nu \neq 0$$

i sigui $A \in M_n(\mathbb{R})$. *Direm que* A *és irreduïble si*

$$a_{i_\alpha j_\beta} = 0, \ (\alpha = 1, \ldots, \mu, \beta = 1, \ldots, \nu).$$

Exemple 3.20. Sigui la matriu

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considerem els conjunts d'índexs complementaris $I = \{2, 3\}$, $J = \{1, 4\}$.

Tenim $a_{21} = 0$, $a_{24} = 0$, $a_{31} = 0$, $a_{34} = 0$. Per tant, la matriu és reduïble.

En canvi, per

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cap de les possibles particions d'índexs compleix la condició: Si prenem, per exemple,

- $I = \{1\}$ i $J = \{2, 3\}$, $a_{12} \neq 0$
- $I = \{1, 3\}$ i $J = \{2\}$, $a_{12} \neq 0$

i així amb totes les possibles particions es comprova que la condició no es compleix. Per tant la matriu A_2 és irreduïble.

Observació 3.21. La Definició 3.19, ens permet donar una demostració alternativa de la Proposició 3.14:

Només cal considerar els índexs $I = \{r + 1, \ldots, n\}$ i $J = \{1, \ldots, r\}$ de la matriu $\begin{pmatrix} B^t & C^t \\ 0 & A^t \end{pmatrix}$.

El següent resultat relaciona les matrius irreduïbles i no negatives amb les positives.

Proposició 3.22. *Sigui* $A \in MN_n(\mathbb{R}) \quad n > 1$, *llavors*

$$A \textit{ irreduïble} \Rightarrow (I + A)^{n-1} \in MP_n(\mathbb{R}).$$

Demostració.

$$[(I + A)^{n-1}]_{ij} = [\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} A^k] = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a_{ij}^{(k)} > 0.$$

Per tant, $(I + A)^{n-1} \in MP_n(\mathbb{R})$. □

No cal arribar a la potència $n - 1$ per aconseguir la positivitat de la matriu $I + A$.

Corol·lari 3.23. *Si $A \in MN_n(\mathbb{R})$, llavors*

$$(I + A)^{m-1} > 0$$

on m és el grau del polinomi mínim de A.

Un resultat recíproc ve donat per la proposició següent.

Proposició 3.24. *Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ és tal que $(I + A)^j > 0$, per a un cert $j \in \mathbb{N}$, llavors A és irreduïble.*

Demostració. Suposem que A és reduïble, llavors $\exists P \in Gl(n; \mathbb{R})$ una matriu de permutació tal que

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

Ara bé,

$$P(I + A)P^{-1} = (I + PAP^{-1}) = \begin{pmatrix} I + B & 0 \\ C & I + D \end{pmatrix}$$

i, com hem vist en la Proposició 3.15, qualsevol potència d'aquesta matriu és d'aquesta forma, per la qual cosa cap potència de $I+A$ pot ser positiva, fet que contradiu la hipòtesi. Per tant, A és irreduïble. □

3.1.1 Teoremes de Perron i Frobenius

Un resultat important per a matrius positives irreduïbles i que s'ha convertit en una eina de treball fonamental per les seves múltiples aplicaciones, és el següent:

Teorema 3.25 (Perron, 1907)**.** *Una matriu $A \in MP_n(\mathbb{R})$ té sempre un valor propi λ_1 que és simple, real, positiu i igual al radi espectral $\lambda_1 = \rho(A)$. Els altres valors propis tenen mòdul estrictament menor. Per a aquest valor propi, existeix un vector propi amb totes les components estrictament positives.*

Observació 3.26. Aquest teorema falla, en general, si $A \in MN_n(\mathbb{R})$ però no és positiva. Així, per exemple, si considerem la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

els valors propis són 1 i -1, tots dos del mateix mòdul i igual al radi espectral.

Aquest teorema va ser generalitzat per Frobenius al cas de matrius no negatives, de la següent manera:

Teorema 3.27 (Frobenius, 1912)**.** *Una matriu $A \in MN_n(\mathbb{R})$ i irreduïble té sempre un valor propi λ_1, que és simple, real, positiu i igual al radi espectral. Per a aquest valor propi, existeix un vector propi amb totes les components estrictament positives. A més, si existeixen altres valors propis $\lambda_2, \ldots, \lambda_h$, de mòdul $\rho(A)$, llavors $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_h$ són les h arrels diferents de l'equació*

$$\lambda^h - \rho(A)^h = 0.$$

A més, els punts del pla complex que representen als n valors propis $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ formen un conjunt invariant per rotacions al voltant de l'origen d'angle $\frac{2\pi}{h}$.

Si $h > 1$ llavors existeix una matriu permutació P tal que

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A_{h-1} \\ A_h & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

on els blocs al llarg de la diagonal principal són matrius quadrades nul·les.

Aquesta matriu rep el nom de forma de Frobenius.

Exemple 3.28. Sigui la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix};$$

el polinomi característic d'A és $c(\lambda) = \lambda^6 - \lambda^3 = \lambda^3(\lambda^3 - 1)$; d'aquí que els valors propis d'A són 0 (triple) i les arrels cúbiques de la unitat: $-0.5 \pm 0.866i$, 1.

Prenent

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es té que la seva forma de Frobenius és:

$$A_F = PAP^{-1} = \left(\begin{array}{cc|ccc|c} 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

És conseqüència del Teorema de Frobenius el següent corol·lari.

Corol·lari 3.29. *Siguin $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.*

a) Si $0 \le A \le B$, llavors $\rho(A) \le \rho(B)$

b) Si $0 \le A < B$ i $A + B$ irreduïble, llavors $\rho(A) < \rho(B)$.

Els teoremes de Perron i de Frobenius tenen moltes aplicacions i això és degut a les diferents situacions en les quals les interaccions entre els diferents elements d'un sistema venen parametritzades per nombres positius o, almenys, per nombres no negatius. El cas de la taxa de supervivència d'una espècie entre dos estrats d'edat, el del temps que es triga a portar una mercaderia entre dos magatzems, o el de la quantitat d'energia necessària per a produir una unitat d'un producte d'una determinada indústria en són exemples ([11]).

3.2 Matrius Primitives

Els teoremes de Perron i de Frobenius deixen clar que l'estructura d'una matriu irreduïble no negativa depèn del nombre h de valors propis els mòduls dels quals són iguals al radi espectral de A. En particular, és convenient distingir entre els casos $h = 1$ i $h > 1$, el que ens porta al concepte de matriu primitiva o imprimitiva, concepte, per tant, lligat al valor propi dominant de les matrius no negatives.

El concepte de primitivitat juga un paper important en l'estudi, per exemple, de sistemes dinàmics discrets i està lligat amb l'estabilitat dinàmica del sistema. En el cas de les cadenes de Markov, el número h està relacionat amb el possible període de repetició d'un cert patró.

Definició 3.30. *Sigui $A \in MN_n(\mathbb{R})$ irreduïble. Diem que A és una matriu primitiva si i només si té un únic valor propi de mòdul igual al seu radi espectral $\rho(A)$. En cas contrari, es diu que és imprimitiva. El nombre h de valors propis d'A diferents amb valor absolut igual a $\rho(A)$ s'anomena índex d'imprimitividad d'A.*

Exemple 3.31. La matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

té valors propis -1 i 1, per tant el seu radi espectral és 1. Doncs, A és una matriu imprimitiva amb índex d'imprimitividad 2.

Pel Teorema de Frobenius 3.27, tenim que l'índex d'imprimitivitat està relacionat amb el número de blocs A_i de la forma de Frobenius. Por tant, en l'Exemple 3.28, A és una matriu irreduïble amb índex de imprimitividad 3.

L'índex d'imprimitivitat es troba fàcilment coneixent el polinomi característic, ([14]).

Proposició 3.32. *Sigui $A \in MN_n(\mathbb{R})$ i irreduïble, i sigui $c(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n_1} + a_2\lambda^{n_2} + \ldots + a_t\lambda^{n_t}$, (amb $a_1, a_2, \ldots, a_t$ no nuls i $n > n_1 > n_2 > \ldots > n_t \geq 0$) el seu polinomi característic. Llavors, l'índex d'imprimitivitat és el màxim comú divisor de les diferències $n - n_1$, $n - n_2$, …, $n - n_t$.*

Exemple 3.33. Sigui

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El polinomi característic és $c(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda$ per tant l'índex d'imprimitivitat és 2.

Observació 3.34. La condició d'irreduïble en aquesta proposició no es pot eliminar. Com es pot observar en l'Exemple 3.31 on la matriu és reduïble, la proposició falla ja que el seu polinomi característic és $c(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$ i $n - n_1 = n - n_2 = 1$ però l'índex és 2.

Una caracterització força diferent de matrius primitives és la següent:

Teorema 3.35. *Una matriu $A \in MN_n(\mathbb{R})$ és primitiva si i només si existeix $p \in \mathbb{N}$ tal que $A^p \in MP_n(\mathbb{R})$.*

Demostració. Suposem, primer, que $A^p > 0$, i en aquest cas A^p és una matriu irreduïble.

Tenint en compte la Proposició 3.15, la matriu A és irreduïble. Si la matriu A fos imprimitiva, existirien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ amb $\lambda_1 = |\lambda_2| = \dots = |\lambda_r| = \rho(A)$, per la qual cosa $\lambda_1^p, \dots, \lambda_r^p$ serien valors propis de A^p amb $\lambda_1^p = |\lambda_2^p| = \dots = |\lambda_r^p| = \rho(A^p)$ el que contradiria el Teorema de Perron, que afirma que el valor propi de mòdul igual al radi espectral és únic per a matrius positives. Així doncs, la matriu A és primitiva.

Recíprocament, veure [14] Teorema 1, p. 546. $\square$

Aquest resultat ens permet observar que una matriu de permutació no pot ser primitiva perquè qualsevol potència d'una matriu permutació és de permutació i, per tant, no pot ser positiva.

És conseqüència immediata d'aquesta proposició, el següent corol·lari:

Corol·lari 3.36. *Tota matriu positiva és primitiva.*

Es pot demostrar que es pot acotar el valor de p per $n^2 - 2n + 2$.

Proposició 3.37 ([14])**.** *Si una matriu $A \in MN_n(\mathbb{R})$ és tal que A^q té algun element nul $\forall q = 1, \dots, n^2 - 2n + 2$, llavors A no és primitiva.*

En el cas de matrius no negatives i irreductibles la seva traça ens proporciona informació sobre la primitivitat .

Proposició 3.38 ([6])**.** *Sigui $A \in MN_n(\mathbb{R})$ una matriu irreduïble. Si $\operatorname{tr} A > 0$ llavors la matriu A és primitiva, com es veu en la següent proposició.*

Demostració. Com que la matriu és no negativa, tots els seus coeficients són no negatius i per tant la traça és major o igual a 0. Si la traça de la matriu es no nul·la, llavors el coeficient corresponent a λ^{n-1} del polinomi característic és no nul. Per la Proposició 3.32, tenim que $n - n_1 = n - (n-1) = 1$ i m.c.d. $(n - n_1, \dots, n - n_t) = 1$.

$\square$

3.3 Matrius Estocàstiques

Definició 3.39. *Una matriu $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in MN_n(\mathbb{R})$ es diu que és estocàstica si la suma dels elements de cada fila d'A és 1.*

És a dir, si

$$a_{ij} \ge 0 \quad i \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \ \forall i = 1, \dots n.$$

Exemple 3.40. Un exemple d'una matriu estocàstica és:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Definició 3.41. *Una matriu $A \in MN_n(\mathbb{R})$ es diu que és estocàstica (per columnes) si la seva trasposada és estocàstica.*

És a dir, si

$$a_{ij} \geq 0 \quad i \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \ \forall j = 1, \dots n.$$

Exemple 3.42. Un exemple d'una matriu estocàstica per columnes és:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & 1/2 \\ 0 & 1/5 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Les matrius que s'utilitzaran en aquest treball seran estocàstiques per columnes.

Definició 3.43. *S'anomen matrius doblement estocàstiques a les matrius que són alhora estocàstiques per files i per columnes.*

Exemple 3.44. La matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

és doblement estocàstica.

És important tenir en compte que, si una matriu $A \in MN_n(\mathbb{R})$ és estocàstica (tant per files com per columnes), llavors 1 és un valor propi i, per la Propietat 2.3, $\rho(A) = 1$.

Més concretament:

Teorema 3.45. *Sigui $A \in MN_n(\mathbb{R})$, llavors A és estocàstica per files si i només si té el valor propi 1 amb vector propi (per la dreta) $v = (1, 1, \dots, 1)$.*

A més, si A és estocàstica $\Rightarrow$ $\rho(A) = 1$.

Demostració. Tenim que

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

Si la matriu A és estocàstica llavors $\sum_{j=1}^{n} a_{1j} = \ldots = \sum_{j=1}^{n} a_{nj} = 1$, i

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

per tant 1 és valor propi i v és vector propi.

Recíprocament, si v és vector propi de valor propi 1, llavors $A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ d'on $\sum_{j=1}^{n} a_{1j} = \ldots = \sum_{j=1}^{n} a_{nj} = 1$, i per tant, la matriu és estocàstica per files ja que $A \in MN_n(\mathbb{R})$.

A més la Proposició 2.3 ens permet assegurar que $\rho(A) = 1$.

□

Corol·lari 3.46. *Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ és una matriu estocàstica per columnes, 1 és valor propi d'A i $\rho(A) = 1$.*

Demostració. Tenint en compte que una matriu A i la seva trasposada A^t tenen els mateixos valors propis, tenim que 1 és valor propi de A^t. La Propietat 2.3 ens confirma que el radi espectral és 1. □

Proposició 3.47. *Si una matriu A és estocàstica llavors A^k és estocàstica per a tot $k \in \mathbb{N}$.*

Demostració. De fet, com podem veure el producte de dues matrius estocàstiques és estocástica, (ho provem per a matrius estocàstiques per columnes però de manera anàloga es prova per a matrius estocàstiques per files):

Siguin $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ amb $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ per a tot $1 \le i \le n$ i $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}$ amb $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 1$ per a tot $1 \le i \le n$

$$C = AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \ldots a_{1n}b_{n1} & \ldots & a_{11}b_{1n} + \ldots a_{1n}b_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b_{11} + \ldots a_{nn}b_{n1} & \ldots & a_{n1}b_{1n} + \ldots a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} &= (a_{11}b_{11} + \ldots a_{1n}b_{n1}) + \ldots + (a_{n1}b_{11} + \ldots a_{nn}b_{n1}) = \\ & (a_{11} + \ldots + a_{n1})b_{11} + \ldots + (a_{1n} + \ldots + a_{nn})b_{n1} = b_{11} + \ldots + b_{n1} = 1 \\ & \vdots \\ & (a_{11}b_{1n} + \ldots a_{1n}b_{nn}) + \ldots + (a_{n1}b_{1n} + \ldots a_{nn}b_{nn}) = \\ & (a_{11} + \ldots + a_{n1})b_{1n} + \ldots + (a_{1n} + \ldots + a_{nn})b_{nn} = b_{1n} + \ldots + b_{nn} = 1. \end{aligned}$$

□

Considerem ara una matriu A estocàstica i la successió de potències d'aquesta matriu

$$A, A^2, A^3, \ldots$$

i ens preguntem per l'existència de límit d'aquesta successió.

El Teorema 2.8 ens assegura que aquest límit existeix i val 0 en el cas en què $\rho(A) < 1$, a més la forma de Jordan de la matriu també ens assegura que si la matriu té algun valor propi que, en valor absolut, és més gran que 1, llavors el límit no existeix. Queda per analitzar el cas en què $\rho(A) = 1$.

Tenim el resultat següent

Teorema 3.48. *Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ eś una matriu irreduïble i estocàstica. Existeix $\lim_{k\to\infty} A^k$ si i només si A és primitiva.*

Demostració. La demostració es basa en la resolució espectral de funcions de matrius (veure [14] Teorema 9.5.1), aplicat a la funció $f(A) = A^k$ i en el fet que 1 és valor propi simple i igual al radi espectral d'A. □

3.3.1 Construcció de matrius estocàstiques

A partir d'una matriu positiva $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in MP_n(\mathbb{R})$ es pot construir una matriu estocàstica de la següent manera:

1) Construïm una matriu que anomenarem de *normalització* i que notem per ΣA:

$$\Sigma A = \begin{pmatrix} a_{11} + \ldots + a_{1n} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{21} + \ldots + a_{2n} & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n1} + \ldots + a_{nn} \end{pmatrix} \in Gl(n; \mathbb{R}).$$

2) A partir de ΣA construïm la matriu que anomenarem *matriu normalitzada de A* i que notarem per $N(A)$:

$$N(A) = (\Sigma A)^{-1} A.$$

La matriu normalitzada així obtinguda és tal que la suma dels elements de cada fila val 1. Això és, $N(A)$ és una matriu estocàstica (per files).

Anàlogament podem construir una matriu estocàstica per columnes multiplicant la matriu, en aquest cas, per la dreta per la matriu

$$(\Sigma_c A)^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} + \ldots + a_{n1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{12} + \ldots + a_{n2} & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & a_{1n} + \ldots + a_{nn} \end{pmatrix}^{-1}.$$

La matriu $N_c(A) = A(\Sigma_c A)^{-1}$ és estocàstica per columnes.

En el següent teorema, mostra com algunes matrius no negatives es poden reduir a una estocàstica mitjançant una transformació.

Teorema 3.49. *Sigui $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in MN_n(\mathbb{R})$ i $r = \rho(A)$ el seu radi espectral. Si $r > 0$ i existeix un vector propi positiu $v = (v_1, \ldots, v_n)$, llavors, la matriu $P = r^{-1}V^{-1}AV$ on $V = \operatorname{diag}(v_1, \ldots, v_n)$, és estocàstica.*

Demostració. Atès que $Av = rv$, tenim

$$A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} v_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rv_1 \\ \vdots \\ rv_n \end{pmatrix}.$$

Per definició de la matriu P, els seus elements són:

$$p_{ij} = r^{-1} v_i^{-1} a_{ij} v_j$$

Per tant

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = r^{-1} v_i^{-1} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = r^{-1} v_i^{-1} r v_i = 1,$$

és a dir, la matriu P és estocàstica. □

Exemple 3.50. Sigui $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in MN_n(\mathbb{R})$.

Els valors propis són 1,2 i 3, per tant $\rho(A) = 3$.

Un vector propi positiu associat al valor propi 3 és $v = (3, 4, 2)$

Calculem la matriu P:

$$P = \quad r^{-1} V^{-1} A V = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1/3 & & \\ & 1/4 & \\ & & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 4 & \\ & & 2 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1/3 & 4/9 & 2/9 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que és estocàstica per files.

Exemple 3.51. Sigui $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in MN_n(\mathbb{R})$.

En aquest cas $\rho(B) = 3$ però no hi ha cap vector propi d'aquest valor propi amb les coordenadaes positives, ni tan sols no nul·les. L'únic valor propi amb un vector propi associat amb les coordenades no nul·les és 1 i un vector propi és $v = (1, -4, -2)$ (o qualsevol múltiple escalar).

Si calculem la matriu P del toerema amb aquest valor i vector propis obtenim

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1/4 & \\ & & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -4 & \\ & & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que no és no negativa. Observem però, que les sumes dels termes de cada fila sumen 1.

4 Introducció als processos de Markov. Presa de decisions sota incertesa

4.1 Introducció a les cadenes de Markov

Les cadenes de Markov van ser introduïdes pel matemàtic rus Andrey Markov l'any 1907. Encara que Markov va desenvolupar la seva teoria de cadenes des d'un punt de vista totalment teòric, també va aplicar aquestes idees a cadenes de dos estats (vocals i consonants) en els textos literaris amb la intenció de crear un model probabilístic per a analitzar la freqüència amb la qual apareixen les vocals en poemes i textos literaris. L'èxit del model proposat per Markov radica en el fet que és prou complex com per a descriure unes certes característiques no trivials d'alguns sistemes, però al mateix temps és prou senzill per a ser analitzat matemàticament.

Les cadenes de Markov (veure [1], [7], [9]) constitueixen una eina per a estudiar el comportament de processos que evolucionen de forma no determinista, al llarg del temps sobre un conjunt d'estats possibles. Aquesta eina és considerada essencial en disciplines com l'enginyeria, l'economia i la investigació operativa entre altres, així per exemple Solorio et Al. ([20]) utilitzen cadenes de Markov en el modelatge de l'evolució del deteriorament de carreteres; Hernández-del-Valle ([10]) proposa un mètode, emprant també cadenes de Markov, per a l'estimació de probabilitats "estructurals"de creixement i contracció econòmica; i López Hung i Joa Triay ([16]) consideren cadenes de Markov per a l'anàlisi de l'execució dels projectes de recerca. En l'actualitat les cadenes de Markov s'estan utilitzant en la predicció i el control del desenvolupament de la pandèmia provocada per al virus SARS-CoV-2 ([3]).

Definició 4.1. *Una cadena de Markov és un procés estocàstic amb les següents propietats:*

a) És discret en el temps.

b) Es defineix en un espai finit d'estats possibles.

c) El canvi entre estats està determinat per un conjunt de probabilitats p_{ij}.

d) La probabilitat que el procés passi de l'estat i a l'estat j (p_{ij}) depén únicament de l'estat actual i no dels estats anteriors.

Més concretament, considerem un procés aleatori en el que es produeix un canvi d'estat en uns certs instants de temps discrets $k = 0, 1, 2, \ldots$ en el qual hi ha un nombre finit d'estats possibles $E_1, E_2, \ldots, E_n$. D'aquesta manera, s'obté una cadena de situacions $X_0, X_1, \ldots, X_k, \ldots$, en les quals cada X_k és igual a un dels n estats. Aquest procés es diu cadena de Markov si les probabilitats condicionades que expressen aquest canvi de situacions satisfan la propietat de Markov:

$$P(X_{k+1} = E_j \mid X_k = E_i, X_{k-1} = E_{i_{k-1}}, \ldots, X_0 = E_{i_0}) = \\ P(X_{k+1} = E_j \mid X_k = E_i) = p_{ij}(k)$$

per a tots els instants k, tots els estats E_i, E_j, i totes les possibles successions $E_{i_0}, \ldots, E_{i_{k-1}}$ d'estats previs.

Intuïtivament, aquesta equació implica que, conegut l'estat "present"d'un sistema, l'estat futur és independent del seu estat "passat". És a dir, una cadena de Markov és un procés aleatori sense memòria.

El valor $p_{ij}(k) = P(X_{k+1} = E_j \mid X_{k-1} = E_i)$ és la probabilitat que la cadena estigui en l'estat E_j en l'instant k donat i que hagi passat per l'estat E_i en l'instant $k-1$; per això, $p_{ij}(k)$ rep el nom de la *probabilitat de transició* de moure's de l'estat E_i al E_j en l'instant k.

Si $p_1(k), \ldots, p_n(k)$ són les probabilitats dels n estats en l'instant k i $p_{ij}(k)$ la probabilitat de l'evolució de l'estat i al j en l'instant k, $1 \leq i, j \leq n$. llavors el vector $p(k) = (p_1(k), \ldots, p_n(k))$ es pot descriure a partir dels teoremes del càlcul de probabilitats:

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ quan A i B són successos disjunts,
- $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$.

obtenint:

$$\left.\begin{aligned} p_1(k+1) &= p_{11}(k)p_1(k) + \ldots + p_{1n}(k)p_n(k) \\ &\vdots \\ p_n(k+1) &= p_{n1}(k)p_1(k) + \ldots + p_{nn}(k)p_n(k) \end{aligned}\right\}$$

D'on es veu que les cadenes de Markov es poden descriure matricialment:

$$p(k+1) = \begin{pmatrix} p_1(k+1) \\ \vdots \\ p_n(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}(k) & \ldots & p_{1n}(k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}(k) & \ldots & p_{nn}(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(k) \\ \vdots \\ p_n(k) \end{pmatrix} = A(k)p(k)$$

La matriu $A(k)$ rep el nom de *matriu de transició d'estats* i el vector $p(k)$ el de *vector de distribució de probabilitat*.

Quan la matriu $A(k)$ no depèn de l'instant de temps k es diu que la cadena de Markov és *homogènia*. En aquest cas es té que

$$p(k) = A^k p(0).$$

És a dir, la probabilitat en l'instant k, només depèn de l'estat inicial $p(0) = (p_1(0), \ldots, p_n(0))$.

Observació 4.2. Donat que

$$\begin{aligned} p_{11} + \ldots + p_{n1} &= 1 \\ &\vdots \\ p_{1n} + \ldots + p_{nn} &= 1 \end{aligned}$$

i A és no negativa, es té que A^t és una matriu estocàstica. La matriu A rep el nom de *matriu de Markov*.

Exemple 4.3 ([4])**.** Cadena de Markov per a l'estudi i control de l'evolució de l'epidèmia del VIH/SIDA.

Es defineixen quatre possibles estats per a un individu de la població a estudiar:

- S: individu susceptible de ser infectat.
- I: individu infectat per la malaltia.
- N: individu mort per mort natural.

- M: individu mort a causa de la malaltia.

Com a unitat de temps es pren l'any, generant llavors una cadena de Markov en temps discret quan l'estat d'un individu és registrat, per exemple, el dia 1 de març de cada any, si aquest se sotmetés a proves diagnòstiques amb una periodicitat anual. Les probabilitats associades a l'evolució de l'estat d'un individu entre dues etapes consecutives, és a dir, des d'una revisió diagnòstica a la següent, es denoten per:

- $\alpha = p_{SS}(k)$: probabilitat de mantenir-se en l'estat de susceptible.
- $\beta = p_{II}(k)$: probabilitat de mantenir-se en l'estat d'infectat.
- $\mu = p_{NS}(k) = p_{NI}(k)$ probabilitat de mort natural.
- $\gamma = p_{SI}(k)$: probabilitat de, estant en l'estat susceptible, passar a l'estat d'infectat.
- $\varepsilon = p_{MI}(k)$: probabilitat de, estant en l'estat infectat, passar a l'estat de mort.

Per tant, si a l'instant de temps k els estats són $S(k)$, $I(k)$, $N(k)$ i $M(k)$, en l'instant $k+1$ es té que els estats són $S(k+1)$, $I(k+1)$, $N(k+1)$ i $M(k+1)$ relacionats mitjançant la matriu de transició d'estats:

$$\begin{pmatrix} S(k+1) \\ I(k+1) \\ N(k+1) \\ M(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \beta & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(k) \\ I(k) \\ N(k) \\ M(k) \end{pmatrix}$$

4.2 Distribució límit o estacionària

En diferents aplicacions de les cadenes de Markov és d'interès identificar la probabilitat que la variable aleatòria X_k adopti un valor j (entre una col·lecció estats possibles) al cap d'un nombre de transicions k que tendeix a infinit.

En cas d'existir aquest terme, li direm distribució estacionària de la cadena de Markov en temps discret i consisteix en una distribució d'estat estable per als estats de la cadena que és independent de la distribució inicial.

Més formalment,

Definició 4.4. *S'anomena distribució estacionària d'una cadena, en cas d'existir, al següent límit:*

$$\pi = \lim_{k\to\infty} p(k)$$

Si la cadena de Markov és homogènia es té que

$$\lim_{k\to\infty} p(k) = \lim_{k\to\infty} A^k p(0) = (\lim_{k\to\infty} A^k)p(0)$$

i, a més, el problema matemàtic al qual es fa front és saber si aquest límit existeix. En aquest cas el problema es redueix al càlcul de límits de potències d'una matriu i en els quals la forma canònica és de gran utilitat.

No sempre existeix aquest límit tal com es pot observar en el següent exemple.

Exemple 4.5. Sigui

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Veiem que si $p(0) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ es té que $p(2k) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ i $p(2k+1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i per tant, no existeix el límit. Però, sí que existeix per alguns casos particulars, com per exemple, si prenem $p(0) = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$ amb el que es té que $p(k) = p(0)$ per a tot k.

Tot i que buscant la forma canònica de la matriu podem resoldre el problema del límit, si la matriu és molt gran és una tasca molt costosa. Per tant, intentarem buscar altres propietats que ens ajudin a obtenir la informació.

Com per exemple, tenim el següent resultat.

Proposició 4.6.

a) Si A és irreduïble, el límit π existeix.

b) Si A és irreduïble i primitiva, el límit π és independent de la distribució inicial de probabilitat $p(0)$ i igual al vector propi de valor propi 1 de la matriu:

$$\pi = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} v_i} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Demostració. El teorema de Frobenius ens assegura que 1 és el valor propi igual al radi espectral i és l'únic amb aquest mòdul en cas de ser A primitiva.

També ens assegura l'existència d'un vector propi no negatiu per a aquest valor propi.
□

El fet que la matriu A sigui irreduïble es tradueix, en termes de cadenes de Markov, en que cada estat pot ser aconseguit per un altre estat mitjançant un nombre finit de passos. Això és, existeix $k \geq 0$ per al qual $p_{ij}(k) > 0$. Les cadenes que verifiquen aquesta condició reben el nom de cadenes de Markov *irreduïble o ergòdiques.* Les cadenes de Markov en que la matriu de transició d'estats és primitiva reben el nom de *regulars.*

El fet que la cadena de Markov no sigui primitiva no impedeix que existeixi distribució estacionària, si bé aquesta dependrà de la distribució inicial.

Definició 4.7. *Diem que l'estat i en la cadena de Markov és absorbent si es té que $p_{ii} = 1$ i $p_{ij} = 0$ per a $i \neq j$. Una cadena de Markov es diu que és absorbent si existeix algun estat absorbent. En una cadena de Markov absorbent, els estats que no ho són es diuen transitoris.*

Exemple 4.8. Considerem un sistema aleatori on la matriu de transició d'estats ve donada per

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En aquest cas, els estats 4 i 5 són absorbents i els estats 1, 2 i 3 són transitoris.

Donada una cadena de Markov absorbent amb $n-r$ estats absorbents, sempre podem canviar de nom els estats de manera que la matriu de transició d'estats sigui de la forma

$$A = \begin{pmatrix} T & 0 \\ Q & I \end{pmatrix}$$

sent $I \in M_{n-r}(\mathbb{R})$ la matriu identitat d'ordre el nombre d'estats absorbents.

Amb aquestes notacions i si partim el vector de probabilitat $p(k) = \begin{pmatrix} p_1(k) \\ \vdots \\ p_n(k) \end{pmatrix}$ en dos vectors $p(k) = \begin{pmatrix} u(k) \\ v(k) \end{pmatrix}$ segons els ordres de les matrius T i I, respectivament, això és $u(k) \in M_{r\times 1}(\mathbb{R})$ i $v \in M_{(n-r)\times 1}(\mathbb{R})$, llavors, tenim el següent resultat:

Proposició 4.9.

a) Spec(T) ⊂ Spec(A) i com a conseqüència $\rho(T) \leq \rho(A)$ *i si* $Q \in MP_{(n-r)\times r}(\mathbb{R})$ *llavors* $\rho(T) < \rho(A)$.

b) Si $w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ *(partició segons els ordres de les matrius T i I,és un vector propi de A de valor propi* λ*, llavors v és un vector propi de T del mateix valor propi*

Demostració. a) $\det(A - xI) = \det(T - xI) \cdot (1-x)^{n-r}$

b) $\begin{pmatrix} T & 0 \\ Q & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Tu \\ Qu + w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u \\ \lambda v \end{pmatrix}$ □

A més, tenim que

Proposició 4.10.

$$u(k) = T^k u(0)$$
$$v(k) = v(k-1) + QT^{k-1}u(0) = v(0) + \sum_{r=0}^{k-1} QT^r u(0)$$

Demostració. Es demostra per inducció;

És cert per a $k = 1$:

$$\begin{pmatrix} u(1) \\ v(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & 0 \\ Q & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Tu(0) \\ Qu(0) + v(0) \end{pmatrix}$$

Suposem que és cert per a $k-1$:

$$\begin{pmatrix} u(k-1) \\ v(k-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & 0 \\ Q & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(k-2) \\ v(k-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{k-1}u(0) \\ v(0) + \sum_{r=0}^{k-2} T^r u(0) \end{pmatrix}$$

Llavors:

$$\begin{pmatrix} u(k) \\ v(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & 0 \\ Q & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(k-1) \\ v(k-1) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} T & 0 \\ Q & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{k-1}u(0) \\ v(0) + \sum_{r=0}^{k-2} T^r u(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{k}u(0) \\ v(0) + \sum_{r=0}^{k-1} T^r u(0) \end{pmatrix}$$

□

Corol·lari 4.11. *En el cas particular en que $\rho(T) < 1$, llavors*

$$\lim_{k\to\infty} T^k = 0$$
$$\sum_{r=0}^{\infty} T^r = \lim_{k\to\infty} \sum_{r=0}^{k} T^r = (I-T)^{-1}$$

i

$$\lim_{k\to\infty} v(k) = v(0) + Q(I-T)^{-1}u(0).$$

De forma més general tenim el següent resultat

Proposició 4.12. *Si A és la matriu de transició d'estats d'una cadena de Markov absorbent tal que la matriu $T \in M_r(\mathbb{R})$ és irreduïble i Q és no nul·la, llavors $\lim_{k\to\infty} T^k = 0$ i, per tant, existeix $\lim_{k\to\infty} v(k)$.*

Exemple 4.13. Seguint amb l'Exemple 4.8 tenim que

$$\lim_{k\to\infty} v(k) = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/3 & 1 & -1/3 \\ 0 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} u(0) =$$
$$\begin{pmatrix} 0.8333 & 0.5000 & 0.1667 \\ 0.1667 & 0.5000 & 0.8333 \end{pmatrix} u(0).$$

4.3 Grafs i Cadenes de Markov

Un graf és un diagrama que representa, mitjançant punts i línies, les relacions entre parells d'elements i que s'utilitza per a resoldre problemes lògics, topològics i de càlcul combinatori. La teoria de grafs és una de les branques de les matemàtiques i de les ciències de computació que es centra en estudiar les propietats dels grafs.

L'origen de la teoria de grafs es remunta al segle XVIII amb el problema dels ponts de Königsberg, el qual consistia en trobar un camí que recorregués els set ponts del riu a la ciutat de Königsberg (en l'actualitat anomenada Kaliningrad), de manera que es recorreguessin tots els ponts passant una sola vegada per cadascun d'ells. A finals dels anys 40 del segle passat es va introduir la teoria de grafs com a eina clau per a la sociometría i l'anàlisi de xarxes socials [21].

Definició 4.14. *Un graf G es defineix com un parell (V, E), on V és un conjunt tal que els seus elements es diuen vèrtexs o nodes i E és un subconjunt de parells no ordenats de vèrtexs i que reben el nom d'arestes o arcs, (veure figura 1).*

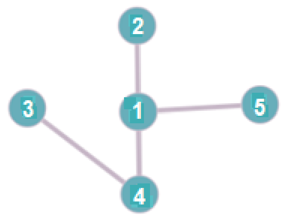

Figura 1: Graf

Distingirem els grafs dirigits i els ponderaats:

Direm que el graf és dirigit si les arestes tenen un sentit definit, (veure figura 2).

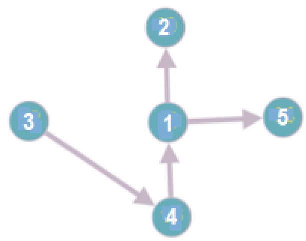

Figura 2: Graf dirigit

I finalment, un graf dirigit direm que és ponderat (o amb pes) si les seves arestes tenen un valor associat p_{ij}, (veure figura 3).

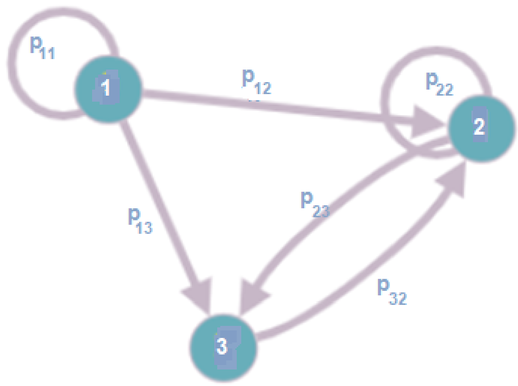

Figura 3: Graf ponderat

La fortalesa dels grafs es deu al fet que és natural representar-los gràficament. Comptant així amb una descripció clara i senzilla per a interpretar l'expressat mitjançant una notació formal. Per exemple, observant el graf de la figura 3 es veu que un cop s'ha sortit de l'estat 1 ja no s'hi pot tornar a entrar. Això ens porta al concepte de camí en un graf i es defineix com una successió d'arestes de manera que, a excepció de la primera, el segon vértex d'una és el primer vèrtex de la següent.

A cada graf se li pot associar una matriu quadrada de manera que les seves files i columnes representen ordenadament els vèrtexs del graf, i cada element ij indica el nombre (ponderat) d'arestes entre el vèrtex i i el vèrtex j. Aquesta matriu s'anomena *matriu d'adjacència.*

Per exemple, la matriu d'adjacència corresponent al graf de la figura 3 és

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ 0 & p_{22} & p_{23} \\ 0 & p_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

És possible representar les transicions entre els estats d'una cadena de Markov mitjançant grafs ponderats on:

- cada node representa un element de l'espai mostral.
- cada arc dirigit representa la probabilitat de transició p_{ij} (des d'i a j) associada al parell d'estats que connecta (i, j).

Per exemple si considerem la cadena de Markov on la seva matriu de transició d'estats és:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ 0 & p_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

aquesta cadena es pot representar de la manera que es mostra a la figura 3, on s'observa que la matriu adjacent corresponent al graf és la transposada d'aquesta matriu.

És a dir, podem representar les diferents relacions entre els estats d'una cadena de Markov per mitjà d'un diagrama format per nodes i fletxes orientades amb les probabilitats de transició. A aquesta representació se la coneix amb el nom de *diagrama de transició o d'estats.*

No sols les matrius que representen cadenes de Markov tenen un graf associat. De fet, existeix una relació biunívoca entre les matrius $n \times n$ i els grafs dirigits i ponderats amb n nodes, sent l'element a_{ij} de la matriu, el pes de l'aresta dirigida que té l'origen en el node i-èssim i l'extrem en el node j-èssim. A més, si A és la matriu d'adjacència d'un graf, A^k indica quants camins de longitud k hi ha entre els nodes. Més específicament, l'element ij de la matriu A^k indica el número de camins de longitud k des del node i al node j.

Certes propietats de les matrius poden ser observades a través de grafs, com per exemple, la que es posa de manifest a través de la següent proposició.

Proposició 4.15. *Una matriu és irreduïble, si i només si, el seu graf és tal que per a tot parell de vèrtexs v_i, v_j hi ha algun camí de v_i a v_j i un altre de v_j a v_i.*

Que en termes de cadenes de Markov ho enunciem dient.

Proposició 4.16. *Una cadena de Markov és irreduïble si i només si tots els seus estats estan comunicats entre si.*

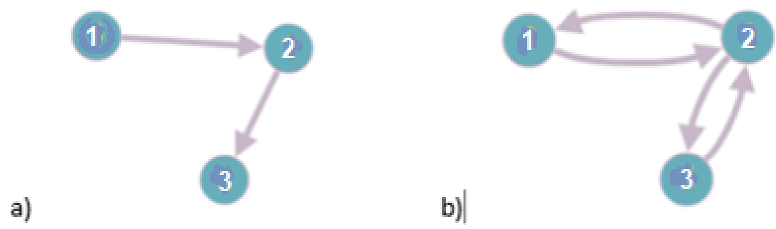

Figura 4: Irreductibilitat a través de grafs

Exemple 4.17. En la figura 4, el graf a) correspon a la matriu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que és reduïble i el graf b) correspon a la matriu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que és irreduïble.

5 Descripció del model per a estudiar el seguiment de la població objecte d'estudi a les xarxes socials

5.1 Interès de l'estudi de les xarxes socials

Compartir informació és intrínsec a l'ésser humà i des de sempre ha buscat la manera de fer-ho, creant les seves xarxes socials.

Una xarxa social és el conjunt de persones i les relacions que s'hi estableixen, els fils que les uneixen, que poden ser d'amistat, interessos, relacions comercials, valors, idees...

Els serveis de xarxes socials són serveis disponibles a Internet que faciliten la visualització de les relacions entre les persones que formen la xarxa a través de compartir contactes, interessos, activitats i artefactes, generalment multimèdia, com per exemple Facebook, [17].

Algunes de les xarxes socials més usades a internet són Facebook, Twitter, Instagram i YouTube, i aquestes dues últimes són de les més usades per a intercanvi de contingut multimèdia.

En aquest treball, aprofitant l'interès per les xarxes socials dels joves, es preten analitzar la repercussió que tenen diferents plataformes digitals fent ús de les cadenes de Markov.

5.2 Caràcter Markovià

De manera intuïtiva, la propietat markoviana diu que "el futur depèn del que passa en el present, però no del passat estricte".

Més formalment, la propietat markoviana diu que ([18])

$$P(X_2 = i_2 \mid X_1 = i_1) = P(X_2 = i_2 \mid X_0 = i_0; X_1 = i_1)$$

Una proposta de validació de la propietat de Markov consisteix a mostrar la gràfica de freqüències donades per les parelles

$$\begin{aligned} Y(i_0, i_1, i_2) &= \frac{\text{Nombre de vegades que } X_n \text{ pasa de } i_0, i_1, i_2}{\text{Nombre de vegades que } X_n \text{ pasa de } i_0, i_1} \\ X(i_1, i_2) &= \frac{\text{Nombre de vegades que } X_n \text{ pasa de } i_1, i_2}{\text{Nombre de vegades que } X_n \text{ surt de } i_1} \end{aligned}$$

Si en la gràfica els punts es troben al voltant de la bisectriu es considera una evidència de que la cadena compleix amb la propietat de Markov ([18]).

Pel fet que en xarxes socials existeix un important nivell d'interactivitat, és habitual suposar el caràcter Markovià.

5.3 Descripció del model

Considerem les quatre xarxes socials més utilitzades pels joves dels agrupaments escoltes, que són Facebook (F), Twitter (T), Instagram (I) i YouTube (Y); i que considerem relacionades entre si pel percentatge de “likes”o reexpedicions a una altra xarxa de la informació que es rep cada dia. Aquestes xarxes defineixen l’espai d’estats $\{F, T, I.Y\}$.

La manera d’obtenir les dades de la relació entre aquestes xarxes és sondejar cada dia (unitat de temps) els likes i reexpedicions que les pròpies xarxes proporcionen i observar la fluctuació i distribució al llarg del temps.

A la figura 5 es mostra el graf representatiu del moviment observat.

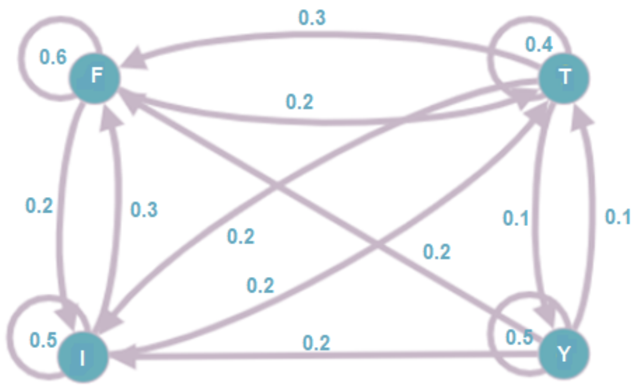

Figura 5: Graf del model

La matriu adjacent al graf de la figura 5 és:

$$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Per tant, la cadena de Markov relacionant els estats en l’instant k amb els estats en l’instant $k+1$ és:

$$p(k+1) = \begin{pmatrix} F(k+1) \\ T(k+1) \\ I(k+1) \\ Y(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(k) \\ T(k) \\ I(k) \\ Y(k) \end{pmatrix} = Ap(k)$$

Observem que, en efecte, la matriu de la cadena és una matriu estocàstica per columnes.

6 Anàlisi del model

6.1 Càlcul de valors propis i vectors propis

Per al càlcul dels valors propis de la matriu de la cadena utilitzem Matlab versió R2018b.

La instrucció corresponent és la següent:

>> [V,D] = eig(A)

Obtenint els resultats:

ans =

V =

-0.7438	-0.5000	-0.5000	0.7071
-0.4303	-0.3090	0.8090	-0.0000
-0.5041	0.0000	0.0000	-0.7071
-0.0861	0.8090	-0.3090	-0.0000

D =

1.0000	0	0	0
0	0.4618	0	0
0	0	0.2382	0
0	0	0	0.3000

Els valors propis són doncs:

$$1,\ 0.4618,\ 0.2382 \text{ i } 0.3000$$

i el vector propi de probabilitat de valor propi dominant ($\lambda = 1$), és

$$v = (0.4216, 0.2439, 0.2857, 0.0488) \in MP_{4\times 1}(\mathbb{R})$$

obtingut normalitzant el vector $(-0.7438, -0.4303, -0.5041, -0.0861)$.

6.2 Cerca de la distribució estacionària

La distribució estacionària ens permetrà analitzar l'evolució al llarg del temps de la utilització de les diferents xarxes socials.

Com hem vist en l'apartat 4.2, la distribució estacionària, en cas d'existir, es troba de la següent manera:

$$\lim_{k\to\infty} p(k)$$

En el nostre cas tenim que $p(k) = A^k p(0)$.

$A^k = VD^kV^{-1}p(0) =$

$$\begin{pmatrix} -0.7438 & -0.5000 & -0.5000 & 0.7071 \\ -0.4303 & -0.3090 & 0.8090 & -0.0000 \\ -0.5041 & 0.0000 & 0.0000 & -0.7071 \\ -0.0861 & 0.8090 & -0.3090 & -0.0000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.0000^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4618^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2382^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3000^k \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} -0.7438 & -0.5000 & -0.5000 & 0.7071 \\ -0.4303 & -0.3090 & 0.8090 & -0.0000 \\ -0.5041 & 0.0000 & 0.0000 & -0.7071 \\ -0.0861 & 0.8090 & -0.3090 & -0.0000 \end{pmatrix}^{-1} p(0)$$

Per tant

$$\lim_{p\to\infty} A^k p(0) = V \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} V^{-1} p(0)$$

Dient v_i els vectors columna de la matriu V:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -0.7438 \\ -0.4303 \\ -0.5041 \\ -0.0861 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -0.5000 \\ -0.3090 \\ 0.0000 \\ 0.8090 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -0.5000 \\ 0.8090 \\ 0.0000 \\ -0.3090 \end{pmatrix} \text{ i } v_4 = \begin{pmatrix} 0.7071 \\ -0.0000 \\ -0.7071 \\ -0.0000 \end{pmatrix}$$

i

$$q(0) = V^{-1}p(0) = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix},$$

es té que:

$$A^k p(0) = 1^k q_1 v_1 + 0.4618^k q_2 v_2 + 0.2382^k q_3 v_3 + 0.3000^k q_4 v_4,$$

d'on:

$$\lim_{k\to\infty} A^k p(0) = q_1 v_1 = v = (0.4216, 0.2439, 0.2857, 0.0488).$$

Observació 6.1. Tenint en compte que p(0) és un vector de probabilitat, $A^k p(0)$ també és de probabilitat i, en conseqüència, $q_1 v_1$ també.

Observació 6.2. El límit és independent de la condició inicial.

6.3 Anàlisi de resultats

Analitzem el model dels quatre estats proposat, utilitzant la condició inicial $p(0) = (0.25, 0.25, 0.25, 0.25)$ que indica que inicialment pugem informació (la mateixa) a les quatre plataformes considerades.

La distribució estacionària obtinguda a l'apartat 6.2, ens diu que, a llarg termini la distribució de probabilitats és

$$(0.4216, 0.2439, 0.2857, 0.0488).$$

És a dir que a llarg termini la xarxa més utilizada amb un 42.16% és Facebook.

Usant MATLAB, podem determinar el nombre necessari d'iteracions (de potències de la matriu A) per a arribar a un vector prou pròxim a la distribució estacionària.

La funció creada per a aquest cas és:

```
A=[0.6, 0.3, 0.3, 0.2; 0.2, 0.4, 0.2, 0.1; 0.2, 0.2, 0.5, 0.2; 0, 0.1, 0, 0.5];
V=[0.4216; 0.2439; 0.2857; 0.0488];
W=[0.25;0.25;0.25;0.25];
E_r = 1*10^-4;
d = 1;
k=1;
        while d >= E_r
        vect = (A^k)*W;
        dist = abs(V-vect);
        d = max(dist);
        k = k+1;
    end
    n=k-1
    (A^n)*W
```

El resultat obtingut és:

```
ans =
    n =
    10
    ans =
    0.4215
    0.2439
    0.2857
    0.0489
```

És a dir que al cap de deu dies ja tenim una distribució d'ús de les diferents xarxes pròxima a l'estacionària amb una distància menor que 10^{-4}. De fet amb onze dies ja s'arriba a ella.

$$\begin{aligned} A^{10}p(0) &= (0.4215, 0.2439, 0.2857, 0.0489) \\ A^{11}p(0) &= (0.4216, 0.2439, 0.2857, 0.0488) \end{aligned}$$

Per tant si es plantegés seleccionar una xarxa social per l'enviament d'informació esperant la disseminació de la mateixa utilitzant una sola xarxa social, s'hauria de triar Facebook ja que presenta una probabilitat superior de ser usada per a aquesta finalitat.

7 Conclusions

En aquest treball s'ha mostrat que els coneixements adquirits en el curs d'àlgebra lineal del grau en Matemàtiques han permès aprofundir en alguns d'ells com els de les matrius no negatives i matrius positives i la seva aplicació a les cadenes de Markov de les quals interessa estudiar el seu comportament asimptòtic.

De fet, s'ha posat de manifest com uns teoremes essencialment teòrics com són els de Perron i Frobenius, poden tenir una aplicació pràctica com és l'anàlisi del comportament dels seguidors en diferents xarxes socials.

Les Cadenes de Markov són una eina d'una certa rellevància per les seves aplicacions en diferents camps tant de Ciències com d'Enginyeria ja que permeten tenir informació prèvia sobre les probabilitats que ocorrin o es repeteixin uns certs successos proporcionant elements que poden donar informació que permeti prendre decisions.

S'ha dut a terme un anàlisi exhaustiu de les propietats de les matrius no negatives les quals ens han proporcionat la manera d'obtenir informació sobre cadenes de Markov. De fet, ens han proporcionat la manera d'obtenir la distribució estacionària, un dels objectius del treball, així com saber a priori si aquesta és única, servint de base l'important Teorema de Perron-Frobenius.

Després de finalitzar tant amb la teoria sobre matrius no negatives com amb la teoria de les cadenes de Markov, s'ha exposat i analitzat una aplicació de les cadenes de Markov la qual ha estat la motivació de la realització del treball. Amb el model d'estudi proposat, s'ha posat de manifest la importància del teorema de Perron-Frobenius que ens assegura l'existència del valor propi dominant i la del vector propi positiu corresponent.

Un cop conclòs el treball i observant la informació que s'ha obtingut treballant amb matrius estic d'acord amb el que deia Gilbert Strang sobre les matrius: "les matrius actuen, no es queden allà assegudes".

Referències

[1] Bapat, R. B., Raghavan, T. E. S. (1997). Nonnegative Matrices and Applications, Encyclopedia of Mathematics and its Applications (No. 64), Cambridge University Press.

[2] Berman, A., Plemmons, R. J. (1994). Non-negative Matrices in Mathematical Sciences, SIAM. Filadelfia.

[3] Corral, A.G., de León, M. (2020). Las matemáticas de la pandemia. Los libros de la catarata.

[4] Delgado-Moya, E.M., Marrero-Severo, A. (2017). Modelo estocástico para la epidemia del VIH/SIDA. Revista de Matemática Teoría y Aplicaciones, 24(2), 277-286.

[5] Fernández, P. (2004). V Premio SEMA a la Divulgación de la Matemática Aplicada (2004):: El secreto de Google y el Algebra lineal. SeMA Journal: Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada, (30), 115-142.

[6] Fujimoto, T., Ekuni, F. (2004). Indecomposability and primitivity of nonnegative matrices. Política y cultura, (21), 163-176.

[7] García Planas, M. I., Domínguez García, J. L. (2013). Introducción a la teoría de matrices positivas: Aplicaciones. Universitat Politècnica de Catalunya. Iniciativa Digital Politècnica.

[8] García Planas, M. I., Planas, Magret, M. D. (2014). Eines d'àlgebra lineal i matricial per a l'enginyeria. Ed. Les autores.

[9] Gracia, J. M. (2002). Matrices no negativas, paseos aleatorios y cadenas de Markov, Universidad del País Vasco, Matemática aplicada y Estadística.

[10] Hernández-del-Valle, A. (2009). Método de la cadena de Markov-remuestreo-punto de rompimiento estructural del crecimiento económico. El trimestre económico, 76(303), 619-643.

[11] Herrero, R. C., del Río, M. R., Solá, L. (2014). Teoría de Perron-Frobenius: importancia, poder y centralidad. Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 17(3), 485-514.

[12] Lay, D. C. (2001). Álgebra lineal. México: Prentice Hall.

[13] Lang, S. (1990) Introducción al álgebra lineal. Wilmington (Del.) [etc.]: Addison-Wesley Iberoamericana.

[14] Lancaster, P., Tismenetsky, M. The Theory of Matrices with Applications, Academic Press (1985).

[15] Leavitt HJ, Mueller RAH. (1951). Some Effects of Feedback on Communication. Human Relations, 4(4), 401-410.

[16] López Hung, E., Joa Triay, L. G. (2017). Cadenas de markov aplicadas al análisis de la ejecución de proyectos de investigación. Revista Cubana de Informática Médica, 9(1), 44-51.

[17] Martínez, I. (2010). Les xarxes socials a Internet: la generació digital. Jornada Joves 2.0 i Privacitat Barcelona, Espanya.

[18] Palafox Duarte, M.C. (2009). Inferencia Estadística para Cadenas de Markov. Tesis, México.

[19] Palomar Negredo, M., Virgili Elvira, A. (2020). Intervenció en grups. IOC.

[20] Solorio Murillo, J.R., Márquez Mendoza, Z.D., Montoya Ortega Cárdenas Rodríguez, S.L., Hernández Domínguez, R.I. (2014). No, P. T. Aplicación de métodos markovianos en el modelado del deterioro de carreteras. Publicación Técnica No. 396

[21] Wasserman, S., Faust, K. (1994). Social network analysis: Methods and applications. Cambridge University Press.