



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Volatilidad implícita. Modelizando la sonrisa.

Autor: Marc Martínez Castells

Director: José Manuel Corcuera

Departament: Matemàtiques i Informàtica

Barcelona,

20 de junio de 2021

Agradecimientos

A mi tutor, José Manuel Corcuera, por guiarme y permitirme aprender sobre la cara más apasionante de las matemáticas.

A mis padres. Gracias por no perder nunca la pasión por hacerme feliz.

A mis amigos y especialmente a mis compañeros... sois el motivo por el que sonreiré al echar la vista atrás a este duro camino.

A Tomás. Por enseñarme a querer.

Índice

1. Introducción	1
1.1. Contexto y marco histórico	1
1.2. La volatilidad	2
1.3. El origen de la volatilidad implícita	3
1.4. Sonrisa de volatilidad	4
2. Terminología básica	6
2.1. Producto derivado	6
2.2. Arbitraje	6
2.3. Opciones elementales	6
2.4. Clasificación de opciones	7
2.5. Posiciones larga y corta	7
2.6. Valor de una opción	7
2.7. Tipo de interés	8
2.8. Dividendos	8
2.9. Portafolio	8
3. Fórmula de Black-Scholes	9
3.1. Modelo de Samuelson	9
3.2. Ecuación de Black-Scholes	12
3.3. Paridad <i>put-call</i>	13
4. Cálculo de la volatilidad implícita	15
4.1. Existencia y unicidad	15
4.2. Métodos de cálculo	17
4.2.1. ¿Fórmula cerrada?	17
4.2.2. Métodos iterativos	20
4.3. Error y paridad <i>put-call</i> con dividendos	22
5. Volatilidad estocástica	24
5.1. Modelo de Heston	26
5.2. <i>Smile</i> y volatilidad estocástica.	29
6. Volatilidad local	31
6.1. <i>Smile</i> y volatilidad local	35
7. Sonrisa de la volatilidad	37

7.1. Origen	37
7.2. <i>Smile</i> y <i>skew</i> de la volatilidad	39
7.3. El problema en tres dimensiones: superficie de volatilidad	42
8. Conclusiones	44
9. Anexo: códigos en lenguaje C	45

1. Introducción

1.1. Contexto y marco histórico

El concepto de finanzas cuantitativas parece, en sí mismo, redundante ya que las finanzas se basan, por su puesto, en cálculos. Sin embargo, en las últimas décadas dicha área de trabajo ha virado hacia un conjunto de métodos y modelos matemáticos empleados en la gran mayoría de sectores financieros. Para la realización de un adecuado estudio sobre el desarrollo de esta rama y más concretamente de la volatilidad, nos basaremos en Mayhew (1995) [18] y Corcuera (2021) [4].

El camino histórico de las finanzas cuantitativas ha avanzado siempre de la mano de las matemáticas y sus continuos avances. A medida que dicha ciencia avanzaba, sus conceptos eran introducidos y empleados en el mundo financiero. El auge normalmente se ubica a principios de la década de los setenta, cuando Fischer Black, Robert Merton y Myron Scholes publicaron sus estudios (véase [2]) basados en instrumentos financieros, los cuales servirán de eje central en este trabajo.

Sin embargo, siglos atrás ya podíamos ver pinceladas de esta nueva área de trabajo que acabaría eclosionando en el siglo XX. El primer libro en el que aparecen términos puramente cuantitativos es *Liber Abaci*, publicado por Fibonacci en 1202. Además de introducir los números arábigos, en él aparecen conceptos vitales para la rama financiera de las matemáticas, como el cambio de divisa, el valor tiempo del dinero ² y las tasas de interés.

Más adelante, el desarrollo de áreas como la probabilidad fueron absolutamente necesarias para comprender a día de hoy el mercado financiero y sus operaciones. Autores como Cardano, Galileo, Pascal, Fermat, Huygens, Bernoulli revolucionaron y dieron pasos de gigante en esta dirección.

Uno de los puntos de inflexión en el recorrido histórico de la rama cuantitativa es, sin lugar a dudas, la publicación en 1900 de la tesis doctoral de Louis Bachelier. Bachelier dedujo y obtuvo el comportamiento browniano ³, y lo empleó para explicar los movimientos del mercado.

Albert Einstein, en 1905, que aún no conocía el trabajo de Brown, trató el movimiento térmico de las partículas puntuales en un fluido desde un punto de vista estadístico, encontrando una ecuación para la distribución de la probabilidad de una partícula en un gas.

El punto en común del trabajo de ambos matemáticos es el teorema del límite central. En resumidas cuentas, afirma que en una situación en la que aparece un número suficiente de influencias aleatorias no relacionadas sobre una variable (como la posición de un grano de polen en agua), esta variable toma valores repartidos acorde con la distribución normal.

Posteriormente Andrey Kolmogorov, Kiyoshi Itô, Robert Wiener y Paul Lévy introdujeron importantes conceptos y en el caso de Itô, asentó los fundamentos del cálculo estocástico.

Sin embargo, como hemos comentado antes, el desarrollo de la base matemática para

²Conjetura financiera que se basa en la existencia de un mayor beneficio recibiendo una determinada cantidad de dinero ahora en vez de en un futuro.

³Robert Brown en 1827 observó que los granos de polen en suspensión en un medio acuoso seguían un comportamiento ('movimiento browniano') de gran interés científico.

esta nueva corriente financiera se asentó y formalizó a partir de la década de los setenta. Concretamente, el *Seminaire de Probabilités de Strasbourg*, dirigido por Paul André Meyer sirvió de guía para los matemáticos del momento. En él se desarrolló la teoría de las integrales estocásticas respecto a martingalas que después dieron lugar a teoremas y modelos fundamentales para el desarrollo en esta área.

1.2. La volatilidad

La preocupación por la estabilidad del entorno financiero ha dado a lugar a una constante supervisión del estado de los mercados. El precio de los activos financieros constituyen probablemente la fuente de información más importante sobre la situación pasada, actual y futura de los mercados financieros.

La volatilidad es una de las variables utilizadas en el análisis financiero la cual representa la incertidumbre sobre el precio futuro de un activo subyacente. Una definición más intuitiva es la que se refiere a la volatilidad como la medida del nivel de fluctuaciones del precio de un determinado activo. Cuando los movimientos del precio son bruscos y notables, la volatilidad es elevada.

El concepto de volatilidad a lo largo de los años ha pasado de ser una idea puramente teórica cuyo uso se restringía al ámbito académico a ser una herramienta fundamental en la inversión.

La primera vez que se introdujo el concepto en publicaciones formales fue en la década de los cincuenta. En su primer trabajo, Markowitz, un recién graduado de la Universidad de Chicago, argumentaba que el rendimiento de una operación debe considerarse en función del riesgo que esta conlleva. Markowitz, que se refería a la volatilidad como “varianza”, desarrolló un modelo académico con el que los inversores podían cuantificar el equilibrio entre el riesgo y el beneficio de sus operaciones financieras. Desde ese momento, la volatilidad se convirtió en la herramienta dominante para cuantificar el riesgo de una operación. Su uso se fue extendiendo a prácticamente todos los campos del análisis financiero de forma que los avances que se produjeron alrededor del concepto cada vez eran mayores y más rápidos. Tanto es así que la volatilidad acabó diseminándose en diferentes definiciones que recogían y dependían de unas u otras variables y cuyo uso no es el mismo: la volatilidad histórica y la volatilidad implícita.

La volatilidad histórica refleja los movimientos del precio del activo que se dieron en el pasado. Su cálculo se basa en emplear el conjunto de datos sobre el precio del activo en un determinado periodo pasado. Usualmente se emplea la desviación típica sobre dichos precios pasados.

Por otro lado, la volatilidad implícita, que se deriva de la ecuación de Black-Scholes que más adelante veremos, puede usarse para representar las expectativas futuras de las fluctuaciones del precio de un activo. A diferencia de la volatilidad histórica, su cálculo se realiza a partir de modelos sobre el precio de las opciones y los precios de mercado de las opciones a estudiar.

Las opciones, al igual que la mayoría de instrumentos financieros, son contratos que conllevan la evaluación del mercado de sus participantes. La fijación teórica de los precios de estos instrumentos requiere el conocimiento de un conjunto de parámetros, todos los cuales, menos uno, son observables. El único parámetro cuyo valor no se puede conocer a priori es la volatilidad en un determinado instante del activo subyacente a lo largo del periodo que cubre el contrato. Es por ello que los modelos sobre el precio de las

opciones proporciona una relación uno a uno entre el precio teórico de la opción y la volatilidad esperada del activo subyacente en cuestión. Además es importante destacar, y ya lo veremos más adelante, que la volatilidad implícita incorpora las expectativas de los participantes en el mercado sobre acontecimientos futuros.

1.3. El origen de la volatilidad implícita

Pese a que el mercado tal y como lo conocemos se estructuró ya hace más de quinientos años, no ha sido hasta el último siglo cuando las matemáticas han jugado un papel clave en su estudio, aplicándose potentes herramientas en el sector de las finanzas. Para este apartado seguiremos muy de cerca Mayhew (1995) [18].

La volatilidad implícita permite a los operadores comparar los precios de las opciones sobre diferentes subyacentes y con diferentes precio de ejercicio y vencimientos. Como ya hemos comentado anteriormente, la volatilidad implícita puede llegar a ser útil en el pronóstico de la futura volatilidad de los mercados y se obtiene a partir de modelos matemáticos sobre el precio de los activos.

En los primeros años de la década de los 70, Fisher Black y Myron Scholes [2] desarrollaron un modelo explícito que permitía obtener una estimación teórica del precio de determinados contratos financieros en función de diversas variables que más adelante enunciaremos y estudiaremos. El modelo se construye sobre varias hipótesis que lo alejan de una aproximación real. Una de ellas consiste en considerar la volatilidad como una variable conocida y con un valor constante.

Partiendo de que los parámetros que participan en la fórmula de Black-Scholes son relativamente fáciles de observar, a excepción de la volatilidad, uno puede invertir (lo que explica el adjetivo de implícita) dicha ecuación para determinarla. Es así como surge el concepto de volatilidad implícita. Es fácil ver que la volatilidad implícita no es una función constante, sino que depende del precio de ejercicio y del tiempo de madurez de la opción.

En términos generales, la incorporación de los efectos del riesgo en la teoría financiera y de precios no solo da lugar a una representación más precisa de los mercados sino que también permite una sofisticación de la propia teoría cuantitativa. Actualmente los modelos matemáticos sirven de sólida base para el estudio de la compleja estructura de los mercados financieros.

Diversos científicos a lo largo de la historia reciente han estudiado el beneficio de emplear la volatilidad implícita para pronosticar la tendencia futura de la volatilidad frente a otros métodos como puede ser el empleo de la volatilidad histórica.

Latané y Rendleman (1976), Chiras y Manaster (1978), Schmalensee y Trippi (1978), y Beckers (1981) tras estudios basados en la fórmula de Black-Scholes concluyeron que la volatilidad implícita explica de manera más precisa las variaciones futuras de la volatilidad. De hecho, además de no encontrar una relación entre ambas volatilidades, obtuvieron resultados que mostraban que la volatilidad implícita parece disminuir con el aumento de los precios de las opciones. Sus trabajos, pese a ser pioneros, consideraban despreciables los efectos de algunas variables como el pago de dividendos.

En estudios posteriores, en los que se trabajó con métodos más sofisticados, los resultados obtenidos no afianzaban una misma línea concluyente en cuanto a la aportación de la volatilidad implícita.

Xu y Taylor (1993) comprobaron que en la mayoría de casos que estudiaron, la volatilidad implícita jugaba un mejor papel en la predicción de la volatilidad frente a los valores obtenidos a partir de datos históricos. Diz y Finucane (1994) concluyeron que la volatilidad implícita y la volatilidad media esperada a lo largo del contrato de una opción no diferían en exceso. Por otro lado, las investigaciones de Fleming (1994) le llevaron a considerar que aunque la volatilidad implícita es un estimador sesgado al alza de la volatilidad futura, el pronóstico que se obtiene a partir de ella es más preciso que el obtenido con la volatilidad histórica. Estudios realizados por Christensen y Prabhala (1988) concluyeron en la misma línea.

Contrariamente a los estudios anteriores, los cuales valoraban positivamente la aportación de la volatilidad implícita, se opusieron diferentes científicos del momento. Canina y Figlewski (1993) obtuvieron resultados que mostraban que la volatilidad implícita es una herramienta poco acertada en el cálculo de la volatilidad. Además, Day y Lewis (1992) y Lamoureux y Lastrapes (1993) apoyaron esta conclusión afirmando que la volatilidad histórica era un recurso más fiable en el pronóstico de la volatilidad.

Por tanto, es evidente que la comunidad científica no consiguió unificar sus conclusiones en cuanto al impacto de introducción de la volatilidad implícita. Fruto de ello es el amplio espectro de mercados y variables que se tienen en cuenta en los estudios realizados. La mayoría de estos no presentan completitud en cuanto a los tipos de activos o conjunto de mercados a considerar.

1.4. Sonrisa de volatilidad

Para describir el fenómeno de la sonrisa nos centraremos Derman (2003) [5] y Lee (2002) [15].

La sonrisa a la que nos referimos no es más que el nombre que se le otorga a la relación observable entre el precio de ejercicio de una opción y la volatilidad implícita asociada a dicha opción.

Como ya hemos comentado, el modelo de referencia para el cálculo del valor de una opción es el de Black-Scholes. A partir de él obtenemos una estimación de la volatilidad, lo que conocemos como volatilidad implícita. Esta estimación presenta una fuerte dependencia con el precio de ejercicio y el tiempo de madurez de la opción.

Hablamos de estimación ya que no se conoce ninguna expresión analítica que permita aislar y calcular de forma exacta la volatilidad implícita obtenida del modelo de Black-Scholes. Por tanto deberemos centrarnos en estudiar qué modelos o algoritmos matemáticos son adecuados para su aproximación.

Es necesario destacar que aunque la fórmula de BS sea la más usada para la valoración de opciones, diversos estudios, como Rubinstein (1994) [24], han demostrado la falta de exactitud y diferencia de la realidad de los resultados obtenidos con la fórmula.

Más adelante veremos que el modelo de BS asume que la volatilidad del rendimiento futuro de un activo es constante. Si el modelo fuera correcto, un gráfico de las volatilidades implícitas obtenidas a partir de la ecuación de Black-Scholes para opciones con el mismo vencimiento en un rango de strikes sería una recta horizontal (o una superficie plana si introducimos como variable también el tiempo de madurez). Por tanto, nos encontramos ante una incoherencia del modelo de Black-Scholes, que asegura que la volatilidad implícita es independiente del precio de ejercicio del activo y del tiempo de madurez asociado a

la opción. En las próximas secciones veremos que aunque todas las opciones utilizadas para generar la sonrisa estén asociadas al mismo activo subyacente, cada opción tiene una volatilidad implícita diferente. Esto es incompatible con el modelo de Black-Scholes, el cual implica que la volatilidad implícita solo puede tomar un único valor.

El precio de la opción se deriva del precio del activo, pero la volatilidad de la acción no debería depender de la opción. Aunque la sonrisa apareció de manera más dramática en los mercados de opciones de índices bursátiles después de la crisis de 1987, siempre había habido una leve sonrisa en los mercados de opciones de divisas. Una sonrisa en el sentido literal que aparece al representar las volatilidades implícitas en función del precio de ejercicio, adoptando una forma convexa.

Por tanto, el desafío actual del sector cuantitativo es encontrar un modelo que explique y describa la curvatura de la superficie de la volatilidad implícita. Dicho reto se puede enfocar desde diversos puntos de vista. A lo largo del trabajo estudiaremos los modelos de volatilidad local y volatilidad estocástica.

A día de hoy el problema de la sonrisa de la volatilidad no ha sido resuelto de manera firme así que el uso de uno u otro modelo sigue siendo discrecional.

2. Terminología básica

En esta sección nos centraremos en definir y relacionar los conceptos o términos de cariz financiero que serán necesarios para el desarrollo de nuestro trabajo. Para esta sección seguiremos de cerca Mariani (2019) [17].

2.1. Producto derivado

Un derivado se puede definir como un instrumento financiero el valor del cual se relaciona con activos subyacentes a un precio que se observa en el mercado. Siempre que conozcamos el valor de dicho activo subyacente podremos obtener el potencial beneficio del derivado.

2.2. Arbitraje

Es un concepto fundamental dentro de las matemáticas financieras. Se basa sencillamente en ser capaz de obtener un beneficio sin riesgo. Un activo financiero puede tener diferentes precios según el mercado en el que se encuentre. Un tipo de arbitraje podría ser obtener beneficios a partir de la diferencia de precios entre mercados. En general, una inadecuada valoración de un contrato financiero puede generar una oportunidad de arbitraje.

2.3. Opciones elementales

Los derivados u opciones más elementales son las de compra y venta en las que el poseedor de la opción tiene el derecho, pero no la obligación, de comprar (opción *call*) o vender (opción *put*) el activo subyacente en la fecha de expiración a un precio concreto. Los posibles activos son acciones, bonos, futuros...

Es importante puntualizar que la emisión y contratación de opciones sobre una compañía, por norma general, no incrementa su liquidez. A diferencia de las acciones, que sí que son emitidas por la empresa con el objetivo de financiarse, las opciones no son emitidas por la propia compañía, y es por ello que diferenciamos entre mercados de derivados (en los que participan las opciones) y mercados originarios (propios de los activos subyacentes).

Una de las propiedades características de estos derivados es la opcionalidad que otorgan a una de las partes del contrato, permitiendo que esta decida, una vez finalizado el plazo acordado (fecha de vencimiento), si desea ejercer su derecho a compra o venta.

En el contrato de una opción existen diversos conceptos que debemos definir. El primero es el activo sobre el cual se dispone la opción. Suelen ser activos financieros o bienes, y lo referiremos como activo subyacente.

Ya hemos establecido que la opción otorga el derecho al comprador a efectuar la operación acordada sobre el activo subyacente. El precio fijado al que se realizará la compra o venta es el precio de ejercicio y este permanecerá constante hasta la fecha de vencimiento.

La compra de una opción requiere del pago de una cuantía monetaria en concepto de señal llamada prima. La prima que se estipule en el contrato dependerá de la cotización

o el precio en el mercado del activo sobre el cual se esté considerando la opción.

Las opciones *call* son contratos en los que el comprador de la opción obtiene el derecho a adquirir el activo subyacente al precio acordado (precio de ejercicio) una vez venza el contrato. Por tanto, es fácilmente deducible que la compra de opciones *call* se puede considerar una operación beneficiosa siempre y cuando el precio en el mercado del activo sea mayor que el precio de ejercicio. Por otro lado las opciones *put* son aquellas que ofrecen el derecho (pero no la obligación) a vender el activo a un precio determinado una vez se cumpla la fecha de vencimiento y estas se ejercerán si el precio de mercado del activo subyacente es inferior al de ejercicio.

2.4. Clasificación de opciones

Existen diferentes tipos de opciones. A lo largo de todo nuestro trabajo nos centraremos en opciones vanilla Europeas. A diferencia de las opciones exóticas (que pueden depender de la trayectoria del activo subyacente), las vanilla son las más comunes y simples del mercado.

Existen dos tipos de opciones vanilla: las europeas y las americanas. Las opciones vanilla europeas, que son con las que nosotros trabajaremos, solo pueden ser ejercidas una vez finalizado el plazo acordado entre las dos partes. Por otro lado, las opciones americanas se diferencian de las anteriores en su flexibilidad por parte del poseedor de ejercer el derecho. Este puede ejercer su opción en cualquier momento a antes de la madurez del contrato.

2.5. Posiciones larga y corta

En la negociación del contrato de una opción, donde se fija el precio de ejercicio y también el tiempo de madurez, las partes que participan contraen dos posiciones: la larga (*long*) y la corta (*short*). La posición larga es aquella que se refiere a la persona que compra la opción obteniendo así el derecho a ejercerla. Por otro lado, la corta representa a la parte que vende la opción y por tanto adquiere una obligación.

2.6. Valor de una opción

El *payoff* o beneficio de una opción vanilla de tipo europeo es el valor de esta cuando se cumple la fecha de vencimiento. A cada opción se le puede asociar un valor intrínseco definido como

$$V(t) = \begin{cases} (S(t) - K)^+ & \text{si call,} \\ (K - S(t))^+ & \text{si put,} \end{cases} \quad (2.1)$$

donde K es precio de ejercicio y $S(t)$ es el valor del activo subyacente. Por tanto, las opciones *call* en posición *long* se ejercen cuando el valor del activo es mayor que el precio de ejercicio y las *put* en caso contrario. En este caso, cuando $V(t) > 0$ decimos que la opción está *in the money* (ITM). Cuando $V(t) = 0$, la opción está *at the money* (ATM). En las opciones *cal*, si el precio de ejercicio está por encima del valor del activo ($V(t) < 0$) diremos que la opción está *out of the money* (OTM).

De la definición 2.1 se deduce que el valor intrínseco de una opción *call* aumenta con la subida del valor del activo y por tanto también su prima en el contrato. Por tanto el precio

de la prima será mucho más alto si el comprador adquiere la opción en una situación de OTM que en una ATM o ITM.

2.7. Tipo de interés

La tasa o tipo de interés es la cuantía que se paga en una unidad de tiempo por cada unidad de capital invertido. El valor de una opción *call* está en relación directa con el tipo de interés. Una opción *put*, en cambio, sigue una relación inversa con el tipo de interés.

2.8. Dividendos

Solamente afectan a los poseedores de las acciones y no a los propietarios de opciones sobre ellas. Sin embargo, el precio del activo sí depende del pago de dividendos y por tanto también el valor de la opción. Cuando el subyacente recibe un dividendo, el precio de dicho activo disminuye para ajustar el ingreso percibido. Por tanto, el pago de dividendos afecta positivamente al valor de las opciones *put* y negativamente a las *call*.

2.9. Portafolio

Una cartera de valores o portafolio, es el grupo de activos subyacentes, derivados e inversiones financieras que tiene un inversor. Su valor es simplemente la suma de todos los valores de cada instrumento.

3. Fórmula de Black-Scholes

El modelo que Fisher Black, Myron Scholes y Robert Merton [2] desarrollaron en 1973 para la valoración de opciones fue un modelo pionero que fue reconocido con el premio Nobel de Economía en 1997, su éxito no solo residía en la originalidad del método, sino en la precisión con el que este calculaba los precios teóricos de las opciones a partir de una fórmula relativamente sencilla que depende de un número cerrado de variables o parámetros. Dicha fórmula, deducible de la ecuación de Black-Scholes, dio lugar a un encumbramiento del mercado de derivados que hasta el momento carecía de un modelo riguroso que permitiese valorar opciones.

En la valoración de una opción financiera dada por la fórmula Black Scholes participan cinco variables: el precio del activo subyacente, el precio de ejercicio, la fecha de vencimiento del contrato, el tipo de interés y la volatilidad.

Para el desarrollo teórico del modelo nos basaremos en los escritos de Lee (2002) [15] y Gatheral (2011) [10].

La fórmula que propició el avance de las finanzas cuantitativas publicada por Black y Scholes en 1973 implementa una de las revelaciones más importantes para la modelización de los mercados financieros: el movimiento browniano. Un movimiento browniano es el descrito por las micropartículas de un líquido, las cuales están en constante movimiento chocando unas con otras. Aunque no conocía las observaciones de Brown, dichas trayectorias fueron descritas matemáticamente, como ya hemos comentado, por Einstein en 1905. Este proceso resultó ser lo que luego se llamaría movimiento browniano o proceso de Wiener. Su desarrollo más puramente matemático llegó de la mano de Louis Bachelier (que incluso antes del modelo browniano ya introdujo una teoría precursora en este sentido) y posteriormente de Robert Wiener, y no fue hasta el 1965 cuando Paul Samuelson encontró la utilidad de dicho instrumento matemático en la economía. Las aportaciones de Osborne a la aplicación más financiera también fueron destacables.

3.1. Modelo de Samuelson

Como puede intuirse, el cálculo estocástico estará presente a lo largo de todo el desarrollo y para ello seguiremos Petters y Dong (2016) [19]. En resumidas cuentas, el modelo principal que permitió el desarrollo de la fórmula fue la consideración de que el valor del activo subyacente se comporta siguiendo el modelo de Samuelson (1969) [25], es decir, se puede escribir:

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}, \quad (3.1)$$

donde S es el precio del activo subyacente (que depende del tiempo t), σ y μ son parámetros reales que posteriormente veremos qué representan y $W(t) = W_t$ es un movimiento browniano. Veamos en detalle estos conceptos necesarios para entender el origen del modelo propuesto por Samuelson.

Definición 3.1. *Un proceso estocástico (o aleatorio) es una colección o conjunto de variables aleatorias $\{X(t), t \geq 0\}$ definidas en un espacio de probabilidad.*

Definición 3.2. *Un proceso estocástico W se dice que sigue un proceso de Wiener o movimiento browniano estándar si se satisface:*

- a) $W(0) = 0$ c.s.
- b) $t \mapsto W(t)(w)$ es una aplicación continua c.s.
- c) $W(t_n) - W(t_{n-1}), W(t_{n-1}) - W(t_{n-2}), \dots, W(t_1) - W(t_0)$ son variables aleatorias independientes para $t_0 \leq t_1 \dots \leq t_n$.
- d) $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$.

Para poder comprender los siguientes pasos es necesario introducir una serie de resultados obtenidos principalmente de Williams (1991) [26].

Definición 3.3. Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Una filtración $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ es un conjunto creciente de σ -álgebras $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ que cumplen $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ si $s \leq t$. Tomamos $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ y $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

La filtración \mathcal{F}_t es una manera de describir la información (conjunto de eventos ocurridos) obtenida hasta el instante t . De esta manera tenemos que las variables medibles respecto a \mathcal{F}_0 son constantes.

Para simplificar la teoría siempre supondremos que las filtraciones son completas. Es decir, que \mathcal{F}_0 incluye todos los conjuntos de probabilidad nula. De manera que dada una variable observable (medible), otra variable igual a esta salvo en el conjunto de probabilidad nula también es medible.

Definición 3.4. Un proceso estocástico X definido en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ se dice que es adaptado a una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ si para cada $t \geq 0$, la función $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisface que

$$X_t^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{F}_t, \quad (3.2)$$

para toda $x \in \mathbb{R}$. Esto es que el proceso X es adaptado a la filtración si para todo t , X_t es \mathcal{F}_t -medible.

De manera intuitiva podemos entender que un proceso es adaptado a una filtración si en ella está contenida la información del valor de dicho proceso.

Introduzcamos ahora un resultado fundamental que será necesario para la deducción de la fórmula de Black-Scholes. Por un lado hemos de definir un proceso de Itô y entonces hacer referencia a la fórmula de Itô (o Lema de Itô). La fórmula será clave para asentar las bases del cálculo estocástico. A partir de ahora emplearemos $S(t) = S_t$ para referirnos al precio variable en el tiempo del activo subyacente.

Definición 3.5. Un proceso de Itô en $[0, T]$ es un proceso estocástico S que verifica

$$S_t = X_0 + \int_0^t \mu(t) dt + \int_0^t \sigma(t) dW_t, \quad (3.3)$$

para $X_0 \in \mathbb{R}$ y $0 \leq t \leq T$ donde $\mu(t)$ y $\sigma(t)$ son lo que se conoce como parámetros de deriva y de difusión.

Dichos parámetros verifican

$$\int_0^T [|\mu(t)| + \sigma^2(t)] dt < \infty, \quad (3.4)$$

y están adaptados a la filtración completada generada por el browniano $\mathcal{F}_t^W = \overline{\sigma(W_s, 0 \leq s \leq t)}$.

Teorema 3.6. *Dada una ecuación diferencial del tipo*

$$dY_t = \alpha(t, Y_t)dt + \beta(t, Y_t)dW_t, \quad (3.5)$$

tal que las funciones $\alpha(t, y)$ y $\beta(t, y)$ son Lipschitz respecto a y , con crecimiento lineal, y continuas respecto a t , de manera que existe una constante $K > 0$ tal que

$$|\alpha(t, y)| + |\beta(t, y)| \leq K(1 + |y|), \quad (3.6)$$

$\forall x \in \mathbb{R}, t \in [0, T]$. *Entonces, la ecuación diferencial estocástica tiene solución única [véase Capinski, Kopp y Traple (2012)].*

Teorema 3.7. *Sea S_t un proceso de Itô del tipo*

$$dS_t = f(t, S_t)dt + g(t, S_t)dW(t), \quad S_0 > 0, \quad (3.7)$$

con f y g funciones suficientemente regulares como para la existencia y unicidad de una solución de la ecuación.

Entonces para una función $V_t = V(t, S_t)$ de valores reales de tipo $C^{1,2}$ se satisface la siguiente fórmula:

$$dV_t = \left(g(t, S_t) \frac{\partial V_t}{\partial S_t} dW_t \right) + \left(\frac{\partial V_t}{\partial t} + f(t, S_t) \frac{\partial V_t}{\partial S_t} + \frac{g(t, S_t)^2}{2} \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2} \right) dt. \quad (3.8)$$

Concretamente, en nuestro caso, aplicaremos la fórmula de Itô al proceso de Itô definido por las funciones $f(t, S_t) = S_t \mu$ y $g(t, S_t) = S_t \sigma$ donde S_t es el precio del activo subyacente, μ es una media del retorno del precio del mismo, y σ corresponde a la volatilidad (la desviación estándar del retorno de un activo).

Definimos el retorno como

$$R = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{S(t_1)}. \quad (3.9)$$

Por tanto, podemos construir la siguiente ecuación diferencial estocástica que representa la rentabilidad instantánea:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t. \quad (3.10)$$

Tenemos así una ecuación estocástica para la que podemos aplicar el Lema de Itô a la función $V(t, S_t) = \log S_t$ obteniendo así la siguiente ecuación:

$$dV_t = \sigma dW_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt. \quad (3.11)$$

Por tanto, S_t es log-normal, es decir, que la variación en los precios del activo sigue un proceso de Wiener de forma que el logaritmo de los precios se pueden explicar mediante una distribución normal:

$$\log S_t \sim N \left(\log S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t, \sigma^2 t \right), \quad (3.12)$$

para un $t \geq 0$ dado.

3.2. Ecuación de Black-Scholes

Tenemos ya detallado el modelo que Samuelson introdujo. A partir de él, el objetivo será obtener la ecuación de Black-Scholes y posteriormente su correspondiente fórmula. Por tanto, basándose en el modelo que afirma que el *stock* sigue un browniano geométrico, Black y Scholes proponen como modelo de mercado ese tipo de stock con una cuenta bancaria. Nuestro modelo por tanto verifica

- i) El precio S_t del activo sigue un movimiento Browniano geométrico:

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}. \quad (3.13)$$

- ii) No se realizan pagos de dividendos.
 iii) El tipo de interés r es constante y el mismo para todos los tiempos de vencimiento.
 iv) La volatilidad se supone constante.

La manera en que Black y Scholes obtuvieron la ecuación para el precio de una opción es la siguiente:

Partimos de un portafolio constituido por x unidades de un activo subyacente determinado, cuyo precio es S_t , y una posición *short* en una opción del tipo europeo de valor $V(t, S_t)$. El valor del portafolio será:

$$P(t, S_t) = xS_t - V(t, S_t). \quad (3.14)$$

Tomando diferenciales, imponiendo la primera hipótesis de la ecuación y asumiendo la autofinanciación de la cartera, obtenemos que

$$dP(t, S_t) = x dS_t - dV(t, S_t) = x(S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t) - dV_t. \quad (3.15)$$

Podemos de nuevo aplicar el lema de Itô para la función V de forma que obtenemos lo siguiente (obviamos explicitar las dependencias de cada variable):

$$dV_t = \left(\sigma S_t \frac{\partial V_t}{\partial S_t} dW_t \right) + \left(\frac{\partial V_t}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V_t}{\partial S_t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2} \right) dt. \quad (3.16)$$

Y sustituyendo en la expresión del valor del portafolio nos queda:

$$\begin{aligned} dP_t &= x dS_t - dV_t = \\ &= x(S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t) - \left(\sigma S_t \frac{\partial V_t}{\partial S_t} dW_t \right) - \left(\frac{\partial V_t}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V_t}{\partial S_t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2} \right) dt. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Podemos tomar $x = \frac{\partial V_t}{\partial S_t}$ y por tanto la ecuación se simplifica hasta llegar a

$$dP_t = - \left(\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2} \right) dt. \quad (3.18)$$

La hipótesis de no arbitraje implica que todos los portafolios que son libres de riesgo tienen el mismo retorno, el cual solo depende de la tasa r :

$$dP_t = P_t r dt. \quad (3.19)$$

Por tanto, igualando las dos ecuaciones anteriores, obtenemos:

$$P_t r dt = - \left(\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2} \right) dt. \quad (3.20)$$

Como

$$P_t = x S_t - V_t, \quad x = \frac{\partial V_t}{\partial S_t}, \quad (3.21)$$

y simplificando los diferenciales de ambos lados de la igualdad y usando la ecuación (3.18) llegamos a:

$$-\frac{\partial V_t}{\partial t} - \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2} = \frac{\partial V_t}{\partial S_t} S_t r - V_t r. \quad (3.22)$$

Teorema 3.8. *El precio de una opción satisface la ecuación*

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} + r S_t \frac{\partial V_t}{\partial S_t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2} - r V_t = 0, \quad (3.23)$$

donde $V_t = V(t, S_t)$ es el valor de la opción asociada a un determinado activo subyacente de precio S_t dependiente del tiempo t , σ es la volatilidad del activo en cuestión y r es la tasa de interés.

Por tanto, hemos obtenido una ecuación diferencial en derivadas parciales cuya solución puede obtenerse imponiendo las condiciones de contorno oportunas (dependerán del tipo de opción). En el caso de una opción *call* tenemos que $V(T, S_T) = (S_T - K)^+$ con T la madurez del contrato (fecha de vencimiento). Los cambios de variable oportunos permiten transformar la ecuación anterior en la ecuación de calor y resolverla utilizando la solución fundamental.

Fórmula de Black-Scholes. A partir de la Ecuación (3.21) podemos obtener la fórmula de Black-Scholes que permite calcular el precio de una opción europea. Para una de tipo *call* tenemos

$$V_{BS}(t, S_t) = S_t \Phi(d_1) - K \Phi(d_2) e^{-r(T-t)}, \quad (3.24)$$

donde

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

con S_t el precio del activo, K el precio de ejercicio, T el tiempo de vencimiento en años, σ la volatilidad, r el tipo de interés y $\Phi(x) := \mathbb{P}(N(0, 1) \leq x)$ es la función de distribución normal estándar acumulada.

3.3. Paridad *put-call*

Para trasladar la solución de la ecuación a un una opción de tipo *put* se hace uso de lo que se conoce como paridad *put-call*. Es una relación relativamente intuitiva entre el precio de una opción europea de tipo *put* y una de tipo *call*, ambas con las mismas características (activos subyacentes, fechas de vencimiento y precios de ejercicio iguales).

De hecho, dicha relación es independiente del modelo en el que se base el valor de la opción.

Supongamos un activo, de precio S_t en el tiempo t , por el cual no se pagan dividendos. Construimos un portafolio formado por la compra de una opción *call* y la venta de una opción *put* con exactamente los mismos tiempos de maduración y precios de ejercicio. Por tanto, el *payoff* del portafolio es:

$$(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K. \quad (3.25)$$

Pero este *payoff* puede ser replicado comprando una unidad del stock y un bono que pague exactamente K en un tiempo T . Para en cierta manera representar el "precio del dinero" podemos introducir el concepto de bono sin cupones: el cual es un bono que no lleva asociado el pago de intereses periódicos sino que cuando este se emite, es vendido a un precio inferior debido a los intereses. Desde un punto de vista más formal, podemos definir un bono cupón cero como el precio a tiempo t de un instrumento que paga 1\$ en algún momento futuro T . Dicho precio, para un tipo de interés constante y continuo a lo largo del periodo entre t y T es

$$P(t, T) = e^{-r(T-t)}. \quad (3.26)$$

Si dos portafolios tienen el mismo beneficio (o *payoff*), y teniendo en cuenta que no se permite el arbitraje), su valor debe ser el mismo para cualquier t . Así que, la relación entre *call* y una *put* para todo t es:

$$V_{call}(t) - V_{put}(t) = S_t - e^{-r(T-t)}K, \quad (3.27)$$

donde K corresponde al precio de ejercicio y el término exponencial representa el valor actual del dinero.

4. Cálculo de la volatilidad implícita

4.1. Existencia y unicidad

Definición 4.1. *La volatilidad implícita σ es la volatilidad para la cual el precio determinado por la fórmula de Black-Scholes iguala al precio observado en el mercado:*

$$V_{BS}(t, S_t; K, T, \sigma) = V_{mercado}. \quad (4.1)$$

Es fácil ver, a partir de la paridad *put-call*, que opciones *call* y *put* con el mismo precio de ejercicio tienen idénticas volatilidades implícitas. Por tanto, para calcularla puede emplearse la fórmula tanto para las opciones *call* como para las *put* indistintamente (véase la sección 4.3).

Dicha volatilidad puede utilizarse para representar las expectativas del mercado sobre la volatilidad del activo subyacente hasta la fecha de expiración del contrato.

Desde una perspectiva económica, es una herramienta fundamental para el trading de opciones ya que en cierto modo representa las expectativas del precio de un activo subyacente a un posible desplazamiento.

Más adelante demostraremos que no existe una fórmula exacta para determinarla, sino que debe calcularse un valor aproximado a partir de métodos numéricos iterativos que verifiquen la condición expresada en la definición.

Antes de introducirnos en las herramientas del cálculo aproximativo de la volatilidad implícita debemos demostrar su existencia y unicidad.

Tomemos una opción europea de tipo *call* con precio de ejercicio K . Si consideramos, a diferencia de toda la anterior sección, que la tasa r_t de interés es variable en el tiempo, tenemos que su precio $V(t, S_t; K)$ verifica

$$\begin{aligned} V(S_t, K) &= \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) E[(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] \\ &= \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) \int_K^\infty (S_T - K) f_{t, S_t}(T, S_T) dS_T, \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ es la filtración generada por el movimiento browniano W_t . Es importante remarcar que la segunda igualdad se da ya que $E[\cdot | \mathcal{F}_t]$ representa la esperanza condicional respecto a la probabilidad neutral. Dicha probabilidad tiene $f_{t, S_t}(T, S_T)$ como función de densidad; es lo que se conoce como función de densidad neutral al riesgo. Ésta verifica que el precio actual del valor es igual a la expectativa descontada. Las condiciones para asegurar la existencia de dicha función se pueden ver en Duffie (2010).

Lema 4.2. *Dada una opción de tipo call, siempre se verifica*

$$\max(0, S_t - Ke^{-r(T-t)}) \leq V(t, S_t) \leq S_t, \quad (4.3)$$

con S_t el precio actual del stock, K el precio de ejercicio, r la tasa de interés (para simplificar los cálculos la suponemos constante) y T el tiempo de madurez de la opción.

Demostración: la cota superior se explica con la hipótesis de no arbitraje sobre la que trabajamos. En cualquier instante t , el valor de la opción en el mercado no puede superior

a S_t . En caso contrario, podríamos adquirir S_t a un precio menor que el propio valor de la opción. Una vez cumplido el tiempo de madurez ($t = T$) tendríamos que el valor de la opción *call* es $(S_T - K)^+ \leq S_T$ obteniendo así un beneficio gracias al arbitraje.

Emplearemos un argumento basado en la paridad *call-put* para demostrar la cota inferior. Tenemos que

$$V_{call}(t, S_t) - V_{put}(t, S_t) = S_t - Ke^{-r(T-t)}. \quad (4.4)$$

Teniendo en cuenta que $V_{put}(S_t, t) \geq 0$, tenemos que

$$V(t, S_t) = P(t) + S_t - Ke^{-r(T-t)} \geq S_t - Ke^{-r(T-t)}. \quad (4.5)$$

□

Lema 4.3. *la función $V_{BS}(t, S_t; K, T, \sigma)$ es continua, monótona y estrictamente creciente con σ para todo S_t .*

Demostración: vemos que

$$\nu = \frac{\partial V_{BS}}{\partial \sigma} = \frac{xe^{-d_1^2/2}\sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}} > 0. \quad (4.6)$$

□

Proposición 4.4. *Existe una única función positiva σ^{imp} tal que se satisface*

$$V_{BS}(t, S_t; K, T, \sigma^{imp}) = V_{mercado}. \quad (4.7)$$

Demostración: analizando la fórmula de BS sabemos que el precio de la opción satisface $V_{BS}(t, S_t; K, T, \sigma \rightarrow 0) = (S_t - Ke^{-r(T-t)})^+$. Por otro lado, $V_{BS}(t, S_t; K, T; \sigma \rightarrow \infty) = S_t$. Justamente dicho intervalo de valores que toma la función obtenida con la fórmula de BS V_{BS} se corresponde al intervalo de valores entre los que se mueve el valor de la opción en el mercado $V_{mercado}$ por el lema anterior.

La función $\sigma^{imp} \mapsto \mathbb{E}[V_{BS}(t, S_t; K, T, \sigma^{imp})]$ presenta las propiedades enunciadas en los lemas anteriores. Por tanto, por el teorema de la función inversa, para cada precio del activo subyacente contenido en el rango de no arbitraje, existe una única función que corresponde a la volatilidad implícita. □

La función $\sigma^{imp} = \sigma^{imp}(t, K, T)$ también depende del precio del activo. Una vez fijado este, según el modelo de Black-Scholes la función $\sigma^{imp}(K, T)$ debería ser una función constante. Este hecho se aleja mucho del comportamiento real del mercado (véase por ejemplo Derman [5]). En próximas secciones profundizaremos en ello.

Es interesante destacar que la volatilidad implícita asociada a la fórmula de Black-Scholes en ocasiones se escribe en función del parámetro *moneyness*. Se tiene que

$$x := \log \left(\frac{K}{S_t e^{r(T-t)}} \right). \quad (4.8)$$

De esta manera, la volatilidad implícita que hemos definido anteriormente puede escribirse como

$$\sigma^{imp}(t, x, T) = \sigma^{imp} \left(t, S_t e^{x+r(T-t)}, T \right). \quad (4.9)$$

4.2. Métodos de cálculo

Analizando datos de opciones de tipo *call* para una amplia variedad de precios de ejercicio, es observable que la hipótesis de volatilidad constante no refleja en absoluto el comportamiento real del mercado.

Fue a partir de finales de la década de los noventa cuando se comenzó a observar la variabilidad de la volatilidad con el precio de ejercicio y con la fecha de vencimiento. Esta contradicción con la suposición realizada en el modelo dio lugar al surgimiento de nuevos modelos de cálculo del precio de las opciones para los activos como pueden ser los modelos de volatilidad estocástica o los modelos con saltos.

Los primeros se basan en suponer que la volatilidad se comporta siguiendo un proceso estocástico correlacionado con el que sigue el precio del activo subyacente.

En los modelos de difusión con saltos se ofrece más flexibilidad al comportamiento del activo, permitiendo que este realice saltos. Estos modelos, cuyos ejemplos más populares son el modelo de Heston y el modelo de Merton, no han sido capaces de convertirse en modelos estándar como el modelo de Black-Scholes por su difícil calibración y complejidad.

El comportamiento del mercado da lugar a lo que se conoce como sonrisa de la volatilidad que más adelante estudiaremos. En esta sección seguimos Fengler (2005) [8].

Observando la fórmula de Black-Scholes, se puede concluir que todas las variables o parámetros que participan en ella son conocidas a excepción de la volatilidad. El precio del stock es conocido, la tasa de interés se puede aproximar por un valor medio según el mercado, y el precio de ejercicio y el tiempo del contrato son ambos conocidos. La volatilidad que participa en la ecuación es la única variable que no es directamente observable.

El problema que ahora surge es la no existencia de ninguna fórmula empírica y explícita que permita invertir la ecuación de Black-Scholes obteniendo así el valor de la volatilidad implícita en función del resto de parámetros observables. Por tanto, lo necesario será recurrir a diferentes métodos numéricos y fórmulas que proporcionan un valor aproximado.

4.2.1. ¿Fórmula cerrada?

Desde que la volatilidad implícita se introdujo como una variable de interés en la valoración de los mercados, ha existido un incesante esfuerzo por encontrar una fórmula que permita calcular, sin margen de error, dicha variable. La solución exacta proveniente de la inversión de la fórmula de Black-Scholes sería lo que se denomina una solución cerrada, y por tanto debe poder ser expresable a partir de funciones analíticas elementales.

James Ang publica en 2009 una solución cerrada para la volatilidad implícita para opciones ATM imponiendo una condición sobre el precio del activo subyacente: su valor debe ser el mismo que el precio de ejercicio. Bajo la hipótesis de $S = K$, y suponiendo $r = 0$, aplica a la fórmula de Black-Scholes el desarrollo de Taylor de primer orden alrededor del cero. Brenner y Subrahmanyam (1988) [3] obtienen:

$$\sigma\sqrt{T} = \frac{\sqrt{2\pi}V}{S}, \quad (4.10)$$

lo cual es una aproximación ya que estamos despreciando los términos de orden superior. No obstante, utilizando la hipótesis sobre la cual estamos trabajando y características de

la función normal de distribución que participa en la fórmula obtenemos

$$V = S \left[N \left(\frac{\sigma\sqrt{T}}{2} \right) - N \left(\frac{-\sigma\sqrt{T}}{2} \right) \right] = S \left[2N \left(\frac{\sigma\sqrt{T}}{2} \right) - 1 \right]. \quad (4.11)$$

Ahora, sabiendo que la distribución de probabilidad normal es una aplicación monótona creciente, por el teorema de la función inversa, $N^{-1}(\cdot)$ existe y es única y por tanto

$$\sigma = 2N^{-1} \left[\frac{V + S}{2S} \right], \quad (4.12)$$

es una fórmula cerrada que nos permite calcular la volatilidad implícita asociada a una opción europea siempre que se verifique la condición $S = K$.

Ya hemos visto que bajo unas condiciones determinadas podemos encontrar una fórmula apropiada. Sin embargo, Stephan Gerhold, en *Can there be an explicit formula for implied volatility?* (2012) [11], demuestra matemáticamente que es imposible encontrar una fórmula cerrada que permita calcular la volatilidad implícita en un caso general.

En dicho artículo, se prueba efectivamente que la función de la volatilidad implícita no está incluida en grupo de las clases *D-finitas*. Así que no puede escribirse a partir de funciones elementales.

Definición 4.5. *Sea f una función de clase C^∞ definida en un abierto $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que la función es *D-finita* si satisface:*

$$\begin{aligned} P_{1,d_1}(x) \frac{\partial^{d_1} f(x)}{\partial x_1^{d_1}} + P_{1,d_1-1}(x) \frac{\partial^{d_1-1} f(x)}{\partial x_1^{d_1-1}} + \dots + P_{1,1}(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} + P_{1,0}(x) f(x) &= 0, \\ P_{n,d_n}(x) \frac{\partial^{d_n} f(x)}{\partial x_n^{d_n}} + P_{n,d_n-1}(x) \frac{\partial^{d_n-1} f(x)}{\partial x_n^{d_n-1}} + \dots + P_{n,1}(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} + P_{n,0}(x) f(x) &= 0, \end{aligned}$$

con $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{D}_f$, $d_i \geq 1$ para $i = 1, \dots, n$ y P_{ij} polinomios tales que P_{id_i} no puede ser idénticamente nulo en \mathcal{D}_f .

Con intención de simplificar la demostración se supone tipo de interés nulo. Para no hacer suposiciones sobre la función del *call* en el mercado, trabajamos con una función \mathcal{G} definida en el conjunto

$$\mathcal{D}_{\mathcal{G}} := \{(S, K, v) \in \mathbb{R}^3 : S, K > 0, (S - K)^+ < v < S\}, \quad (4.13)$$

que verifica lo siguiente

$$V_{BS}(S, K, \mathcal{G}(S, K, v)) = v, \quad (4.14)$$

$$(S - K)^+ < v < S, \quad (4.15)$$

con $S, K > 0$. En toda la prueba consideramos $T > 0$ constante. Nótese que la segunda condición ya la hemos argumentado en la prueba de la existencia y unicidad de la volatilidad implícita. Por tanto, en el rango establecido en el que oscilan los posibles valores de una opción *call* siempre respetando la hipótesis de no arbitraje (ya hemos visto que V_{BS} crece a medida que aumenta σ), la función \mathcal{G} existe. Como la función V_{BS} del precio obtenido de la fórmula de BS es analítica para $S, \sigma, K > 0$, y $\frac{\partial V_{BS}}{\partial \sigma} \geq 0$, tenemos que la función \mathcal{G} que hemos definido también es analítica en $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$.

Para un $T > 0$ fijo, si el precio de una opción $V(S, K)$ verifica la desigualdad del Lema 4.2, entonces la volatilidad implícita la podemos expresar como

$$\sigma_{imp}(K, T) = \mathcal{G}(S, K, V(S, K)) \quad (4.16)$$

La prueba por tanto consiste en efectivamente demostrar que la función \mathcal{G} no pertenece al conjunto de funciones $D - finitas$ (ver Gerhold [11]) y por tanto podemos asegurar que no existe una fórmula explícita y cerrada para la volatilidad implícita.

Como veremos más adelante, los métodos iterativos que se usan para encontrar un valor aproximado de la volatilidad implícita son, en muchas ocasiones, lentos y presentan problemas de divergencia y pueden dar lugar a lo que denotamos como sonrisa de volatilidad. De hecho, en Chance et al. (2017), aún usando opciones que siguen exactamente el modelo de Black-Scholes, se observan sonrisas y trayectorias desviadas debido a la imprecisión de los algoritmos iterativos usados.

Desde el punto de vista de las aplicaciones prácticas, la computación de la volatilidad implícita para un gran rango de precios de opciones es una importante componente de cualquier herramienta de valoración financiera.

Sin embargo, Xia y Cui (2018) [27] obtienen, por primera vez, una fórmula exacta (pero no cerrada) para calcular el valor de la volatilidad implícita basada en el desarrollo en serie y el Teorema de Inversión de Lagrange. En términos generales, consistirá en derivar el desarrollo de Taylor de la función V_{BS} respecto a la volatilidad σ en términos de un valor inicial σ_0 . Después, se invierte el desarrollo de Taylor para obtener la fórmula deseada. Por tanto, el objetivo será, a partir de la fórmula de Black-Scholes, escribir $V_{mercado}$ en términos de $(\sigma - \sigma_0)$ y después, invirtiendo dicha relación tendremos una representación en serie de σ . Además, en la fórmula obtenida no participan métodos iterativos por lo que todos sus coeficientes están bien definidos, sin margen de error.

Para desarrollar la serie, es necesario que obtengamos las funciones derivadas n -ésimas de V_{BS} respecto de la volatilidad. Antes obtenemos las siguientes⁴ respecto a $x = \log S$:

$$\partial_x^n V(S, T) = e^x \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf}(g(x)) + \frac{e^x}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^n \binom{n-1}{j} (-1)^{j-1} (\sqrt{2}\sigma\sqrt{T})^{-j} \left(e^{-g^2(x)} H_{j-1}(g(x)) \right) \right), \quad (4.17)$$

donde

$$g(x) := \frac{x - \ln K + (r - q)T + \sigma^2 T/2}{\sqrt{2}\sigma\sqrt{T}}, \quad (4.18)$$

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (4.19)$$

Y $H_n(\cdot)$ corresponde a los polinomios de Hermite.

Teorema 4.6. *Para $n = 1, 2, \dots$, el orden de la derivada del valor de una opción de tipo call respecto a σ se puede escribir como*

$$\partial_\sigma^n V(S, T) = \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(2k-n)!(n-k)!} \frac{T^k \sigma^{2k-n}}{2^{n-k}} \sum_{j=0}^k k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \partial_x^{k+j} V(S, T). \quad (4.20)$$

Demostración: véase Xia y Cui (2018) [27].

Definición 4.7. *El n -ésimo término del desarrollo en serie de Taylor de la fórmula de Black-Scholes respecto a σ alrededor de un valor $\sigma_0 > 0$ es:*

$$\mathcal{V}(S, T; \sigma) = V(S, T; \sigma_0) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial_\sigma^k V(S, T; \sigma_0)}{k!} (\sigma - \sigma_0)^k. \quad (4.21)$$

⁴cálculo para una opción de tipo *call* sin dividendos.

Proposición 4.8. *Haciendo $n \rightarrow \infty$, $\mathcal{V}(S, T; \sigma)$ converge a $V(S, T; \sigma)$ si $0 < \sigma < 2\sigma_0$. Por tanto, tenemos que*

$$V_{\text{mercado}} = V(S, T; \sigma^{\text{imp}}) = \mathcal{V}_{\infty}(S, T; \sigma^{\text{imp}}). \quad (4.22)$$

Ahora solo nos queda invertir V_{mercado} en función de $(\sigma - \sigma_0)$ y sumando σ_0 a ambos lados obtendremos la fórmula buscada. La inversión de la ecuación anterior está garantizada por el Teorema de Inversión de Lagrange:

Teorema 4.9. *Sea $f(\cdot)$ una función analítica en el punto x_0 , y con $f'(x_0) \neq 0$, por tanto, podemos expresar la función $f(\cdot)$ en expansión de Taylor. Además, la función inversa $f^{-1}(\cdot)$ también puede representarse en serie de Taylor, con un radio de convergencia no nulo.*

En nuestro caso, es directo observar que $\mathcal{V}(\sigma_0)$ es analítica y su derivada no nula. Por tanto, por el teorema anterior podemos asegurar la existencia de la función inversa ⁵.

Pese a los intentos de encontrar fórmulas aproximadas que den un mejor resultado que los métodos iterativos que a continuación mencionaremos, en la literatura no se encuentra una fórmula ampliamente aceptada.

4.2.2. Métodos iterativos

En esta sección resolveremos el problema siguiente. Dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que quizá presenta una forma complicada, nuestro objetivo será encontrar la solución a $f(x) = 0$. Supongamos que podemos conocer el valor de la función en todos sus puntos del dominio. En nuestro caso usaremos la función dada por el modelo de Black-Scholes. En la función, conocemos todas las variables excepto la volatilidad. Por tanto, definimos la función

$$f(\sigma) = V_{BS}(S, K, r, T, \sigma) - V_{\text{mercado}} = 0. \quad (4.23)$$

V_{mercado} corresponde al precio observable del mercado y puede obtenerse de distintas formas. En muchas ocasiones, se observa el *bid-ask spread* ⁶ que denominamos como A y B para una opción en concreto. Por tanto, es habitual emplear $V_{\text{mercado}} = \frac{A+B}{2}$.

En la Sección 9 correspondiente al Anexo se encuentran los códigos de programación que ejemplifican el cálculo de la volatilidad a partir del Método de Newton-Raphson y de bisección.

■ Método de Newton-Raphson:

Es un método iterativo potente para resolver numéricamente ecuaciones de la forma

$$f(x) = 0 \quad (4.24)$$

el cual converge normalmente rápido. Las condiciones para aplicarlo son que la función $f(x)$ sea una función derivable cuyas derivadas no se anulan ($f \in C^2[a, b]$). Se puede deducir, a partir del desarrollo en series de Taylor:

$$f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2!}(x - x_n)^2 + \dots \quad (4.25)$$

⁵Para ver más detalles consultar Xia y Cui (2018) [27]

⁶Este concepto financiero representa la diferencia entre el mayor precio que un comprador está dispuesto a pagar por un activo y el menor precio que un vendedor está dispuesto a aceptar.

En el caso en que x sea un valor próximo a x_n , podemos despreciar los términos $\frac{f''(x_n)}{2!}(x - x_n)^2 + \dots$ de forma que tenemos

$$f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n). \quad (4.26)$$

Ahora, podemos sustituir $x = x_{n+1}$ y consideramos que la función en el valor x_{n+1} presenta una raíz $f(x_{n+1}) = 0$. Por tanto, tenemos que

$$f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0, \quad (4.27)$$

que simplificando se queda de la siguiente manera:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (4.28)$$

La ventaja de este método reside en que solo necesitamos un valor inicial a partir del cual el algoritmo converge rápidamente. Sin embargo, presenta inconvenientes que debemos tener en cuenta. El primero es que necesitamos conocer el valor exacto de la derivada de la función a estudiar, y además este debe no ser demasiado próximo al cero ya que entonces el conjunto de iteraciones puede no converger. Por otro lado, debemos tener en cuenta que el valor inicial que utilizamos debe ser suficientemente cercano a la raíz de la función para asegurarnos la convergencia.

- **Método de bisección:** Este método está basado en el teorema de Bolzano en una dimensión. Trabajaremos con la función $f(\sigma) = V_{BS}(\sigma) - V_{mercado} = 0$. Partiremos de valores de la volatilidad a y b que satisfacen que $V_{BS}(a) < V_{mercado}$ y $V_{BS}(b) > V_{mercado}$.

El valor encontrado por el algoritmo corresponderá con una aproximación de la raíz de la función. La distancia entre ambos valores la acotaremos con el parámetro de la tolerancia. El algoritmo, en un caso general para una función f definida en un intervalo $[a, b]$ de manera que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, trabaja de la siguiente manera:

- Calcula el punto intermedio $c = \frac{a+b}{2}$.
- Evalúa la función en dicho punto. Si $sign(f(c)) = sign(f(a))$ entonces sustituimos a por c , dejando inalterado el valor de b . Si $sign(f(c)) = sign(f(b))$ sustituimos b por c y mantenemos el valor de a .
- Volvemos al primer paso calculando el valor de c con la redefinición anterior de las variables.

Las ventajas de dicho algoritmo son que su convergencia está garantizada. Sin embargo, suele presentar un tiempo de convergencia hasta una solución aceptable mayor que otros métodos iterativos.

- **Método de Brent:**

Este método de cálculo consiste en un algoritmo que aúna diferentes métodos de cálculo de raíces: bisección, interpolación cuadrática inversa y método de la secante. El método de la bisección ya hemos visto cómo funciona.

La interpolación cuadrática inversa consiste en la implementación de un método iterativo basado en el cálculo de la interpolación cuadrática a partir de la fórmula de Lagrange de interpolación. En vez de calcular el siguiente término de la serie

iterativa, la interpolación utiliza tres puntos previos para determinar una función cuadrática inversa:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} = & \frac{x_n f(x_{n-1}) f(x_{n-2})}{(f(x_n) - f(x_{n-1}))(f(x_n) - f(x_{n-2}))} \\
& + \frac{x_{n-1} f(x_{n-2}) f(x_n)}{(f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}))(f(x_{n-1}) - f(x_n))} \\
& + \frac{x_{n-2} f(x_{n-1}) f(x_n)}{(f(x_{n-2}) - f(x_{n-1}))(f(x_{n-2}) - f(x_n))}.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Si al aplicar dicho algoritmo, nos encontramos con $x_n = x_{n-1}$, la función cuadrática inversa se sustituye por un algoritmo basado en la utilización del método de Newton-Raphson pero con una aproximación del valor de la derivada en el punto:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{4.30}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{4.31}$$

Y por tanto, sustituyendo la expresión de la derivada en la fórmula de recurrencia que empleábamos en el método de Newton-Raphson, obtenemos que:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \tag{4.32}$$

4.3. Error y paridad *put-call* con dividendos

En esta sección analizaremos la relación entre el precio de una opción europea *call* y una *put* con los mismos precios de ejercicio añadiendo además la existencia de dividendos que representaremos como q :

$$V_{put} + S_0 e^{-qT} = V_{call} + K e^{-rT}, \tag{4.33}$$

donde K es el precio de ejercicio, T el tiempo de madurez, S_0 representa el precio del activo subyacente a día de hoy, r es la tasa de interés a madurez T .

Suponemos ahora que V_{put}^{BS} y V_{call}^{BS} son los valores de las correspondientes opciones obtenidos a partir de la ecuación de Black-Scholes.

Por otro lado, denominamos $V_{put}^{mercado}$ y $V_{call}^{mercado}$ los valores del mercado de las mismas opciones.

En el anterior capítulo hemos visto que la relación entre ambos tipos de opción no depende del modelo utilizado para valorarlas, por tanto, se cumplirá:

$$V_{put}^{BS} + S_0 e^{-qT} = V_{call}^{BS} + K e^{-rT}, \tag{4.34}$$

y por otro lado también

$$V_{put}^{mercado} + S_0 e^{-qT} = V_{call}^{mercado} + K e^{-rT}. \tag{4.35}$$

Por tanto, llegamos a que

$$V_{put}^{BS} - V_{put}^{mercado} = V_{call}^{BS} - V_{call}^{mercado}. \tag{4.36}$$

Esta última igualdad prueba que el error cometido al emplear el método de Black-Scholes para valorar una opción de tipo *call* es exactamente el mismo que el error obtenido si usamos dicho modelo para valorar una opción de tipo *put* cuando ambas opciones tiene el mismo precio de ejercicio y mismo tiempo de madurez.

Además esta fórmula nos ilustra lo que ya hemos comentado sobre el uso de la fórmula para *call* y para *put* indistintamente. Vemos que la función σ^{put} que verifique la definición de volatilidad implícita para un lado de la igualdad será la misma que la función σ^{call} que la verifique en el otro lado. Es decir, $\sigma^{put} = \sigma^{call}$.

5. Volatilidad estocástica

Uno de los principales inconvenientes de la fórmula de Black-Scholes es la suposición de que la volatilidad que participa en el proceso es un valor constante, lo cual, como ya hemos comentado, se aleja mucho de la realidad.

Una vez que el modelo de Black-Scholes tratado hasta ahora se popularizó, uno de los objetivos fue ir un paso más allá en la valoración de activos, modelizando la volatilidad como un proceso de difusión. La búsqueda por mejorar el modelo de Black-Scholes eliminando sus hipótesis falsas dio lugar a nuevos caminos. Uno de ellos es la volatilidad estocástica.

Por tanto, en este capítulo presentaremos el modelo general de volatilidad estocástica y en concreto uno de sus modelos más popularizados: el modelo de Heston. Además, veremos detalladamente la obtención de su fórmula final. Para ello nos basaremos en Gatheral (2011) [10], Fengler (2006) [8] y Mariani (2020) [17].

Tanto en la descripción de la volatilidad estocástica como en la volatilidad local (en la próxima sección), emplearemos la función $\sigma(\cdot)$ cuyas características dependerán del modelo que empleemos.

Ya sabemos que observando el mercado es fácil ver que la volatilidad es una variable que varía con el tiempo. Por tanto, según la tendencia impredecible que presenta, lo mejor será considerarla como una variable aleatoria estocástica. Con ello, nuestro objetivo será obtener y modelizar de forma más precisa la sonrisa de la volatilidad de la que ya hemos hablado. Como hemos comentado, dicho término se utiliza para expresar una importante discrepancia entre los precios de mercado y los obtenidos a partir de la fórmula de valoración de Black-Scholes. La deficiencia será el motivo para desarrollar nuevos modelos, como el de volatilidad estocástica. Hull White [13], Scott y Wiggins fueron pioneros en sus estudios de 1987.

El precio del activo subyacente se modelará siguiendo un proceso estocástico que ahora es impulsado por un proceso de Itô de volatilidad aleatoria que puede o no ser independiente.

La base del modelo general de volatilidad estocástica, será considerar, a parte del movimiento Browniano por el que se rige el precio del activo subyacente, un segundo proceso estocástico que gobierna el comportamiento de la volatilidad implícita. Por tanto, trabajaremos con una ecuación diferencial estocástica muy similar a la utilizada en el modelo de Black-Scholes. A diferencia de dicho modelo, donde solo teníamos una fuente de aleatoriedad (la dinámica del precio del activo subyacente), ahora aparecen cambios aleatorios también en la volatilidad. De esta forma, dotamos al modelo de más información que puede contemplar ciertas correlaciones y dependencias entre el precio del activo y la volatilidad.

Por tanto, tomamos σ_t como un proceso no constante:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t, \quad (5.1)$$

donde S_t es el precio del activo subyacente, W_t un proceso Browniano, μ_t el parámetro de deriva, y $\sigma_t = f(Y_t)$ una función positiva y creciente.

Dicha redefinición de la volatilidad a partir de la función $f(\cdot)$ nos permitirá imponer condiciones necesarias sobre ella simplemente escogiendo la función que las cumpla.

Por otro lado, Y_t es un proceso unidimensional que verifica

$$dY_t = \alpha(Y_t)dt + \beta(Y_t)dZ_t, \quad (5.2)$$

con $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$. De nuevo, trabajamos con un browniano estándar, en este caso Z_t .

Estamos trabajando en el espacio de probabilidad filtrada $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ generada por ambos brownianos.

Es conveniente además descomponer Z_t en términos de W_t y un nuevo Browniano estándar B_t de la siguiente manera:

$$Z_t = \rho W_t + \sqrt{1 - \rho^2} B_t, \quad (5.3)$$

donde $|\rho| < 1$ es el parámetro de correlación entre (Z_t) y (W_t) .

En un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas de la forma

$$dX_t^i = \mu_i(t, X_t) dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j}(t, X_t) dW_t^j, \quad i = 1, \dots, d, \quad (5.4)$$

con W_t^j , $j = 1, \dots, d$ son d movimientos brownianos estándar y $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^d)$ un proceso d -dimensional. Suponemos además que las funciones son adecuadas para la existencia de una única solución adaptada a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ generada por todos los movimientos brownianos. Entonces, definimos

$$d\langle X^i, X^j \rangle_t = \sum_{k=1}^d \sigma_{ik}(t, X_t) \sigma_{jk}(t, X_t) dt = (\sigma \sigma^T)_{i,j}(t, X_t) dt. \quad (5.5)$$

Es decir, en nuestro caso tenemos que

$$d\langle W, Z \rangle_t = \rho dt, \quad (5.6)$$

mientras que B_t es independiente de W_t .

En nuestro caso, nos interesa que a ecuación diferencial que rige el movimiento de Y_t tienda a un valor medio θ de Y_t a un ritmo k . A este tipo de modelos se les conoce como modelos de reversión a la media ya que la volatilidad es tratada como una función monótona del proceso Y_t tendiendo a θ .

Por tanto, escribimos la ecuación de Y_t como:

$$dY_t = k(\theta - Y_t)dt + \beta(Y_t)dZ_t, \quad (5.7)$$

con $k\theta > 0$ y $\beta(Y_t)$ es un coeficiente de difusión. Diferenciamos ahora dos procesos Y_t que suelen considerarse en el estudio de la volatilidad estocástica por su fácil manejo y propiedades adecuadas:

- Proceso de Ornstein–Uhlenbeck:

$$dY_t = k(\theta - Y_t)dt + \beta dZ_t. \quad (5.8)$$

- Proceso de Cox–Ingersoll–Ross:

$$dY_t = k(\theta - Y_t)dt + \beta \sqrt{Y_t} dZ_t. \quad (5.9)$$

Es interesante destacar que la solución de la segunda ecuación diferencial estocástica es de la forma

$$Y_t = \theta + (Y_0 - \theta) e^{-kt} + \beta \int_0^t e^{-k(t-s)} dZ_s, \quad (5.10)$$

que, dado un Y_0 puede escribirse en forma Gaussiana.

5.1. Modelo de Heston

El modelo que propuso Steven Heston [12] en 1993 es un caso concreto del modelo de volatilidad estocástica explicado anteriormente.

Está constituido por las dos ecuaciones diferenciales que hemos introducido en la sección anterior, en el caso de un proceso de Cox-Ingersoll-Ross (CIR).

Entre los modelos de volatilidad estocástica, el modelo de Heston goza de popularidad porque proporciona una fórmula integral explícita y fácil de obtener para calcular los precios de las opciones europeas. En términos de recursos computacionales necesarios para calibrar un modelo con los datos del mercado, la existencia de dicha fórmula hace que el modelo de Heston sea extremadamente eficiente en comparación con modelos que se basan en técnicas de ecuaciones diferenciales parciales.

Por tanto, tenemos

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{Y_t} S_t dW_t, \quad (5.11)$$

$$dY_t = k(\theta - Y_t) dt + \sigma \sqrt{Y_t} dZ_t, \quad (5.12)$$

donde, Y_t representa la varianza del retorno del activo y k es el ritmo de reversión a la media θ de la volatilidad.

Igual que antes, estamos trabajando con dos Brownianos $(W_t)_{t \geq 0}$ y $(Z_t)_{t \geq 0}$ correlacionados con factor ρ en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Sea $V(t, S_t, Y_t)$ el precio de una opción *call* europea para un activo subyacente cuyo precio S_t verifica la ecuación diferencial estocástica planteada en el modelo. Nuestro objetivo será encontrar una solución para $V(t, S_t, Y_t)$ según el modelo.

Para llegar a la ecuación diferencial que obtuvo Heston seguiremos un proceso similar al de la obtención de la fórmula de Black-Scholes.

Construiremos un portafolio, para el cual trataremos de eliminar el riesgo. Estará formado por una opción europea cuyo precio $V(t, S_t, Y_t)$ queremos determinar, con $-\Delta$ unidades de *stock*, y una cantidad $-\Delta_1$ de otro activo subyacente cuyo valor V_1 depende de la volatilidad. El valor Π del portafolio es

$$\Pi = V - \Delta S - \Delta_1 V_1. \quad (5.13)$$

Si asumimos la condición de autofinanciación, tenemos que

$$d\Pi = dV - \Delta dS - \Delta_1 dV_1. \quad (5.14)$$

El siguiente paso será aplicar el Lema de Itô en dos dimensiones a V y V_1 .

Teorema 5.1. *Fórmula de Itô en dos dimensiones. Sean $(X_t), (Y_t)$ dos procesos de Itô que verifican:*

$$dX_t = a_t dt + b_t dB_t^1, \quad (5.15)$$

$$dY_t = c_t dt + d_t dB_t^2, \quad (5.16)$$

con $(B_t^1), (B_t^2)$ movimientos Brownianos correlacionados con factor ρ . Además, dada $f \in \mathbb{C}^{1,2}([0, t] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ consideramos el proceso de Itô $W_t = f(t, X_t, Y_t)$ que verifica

$$dW_t = \left(f_t + f_x a_t + f_y c_t + \frac{1}{2} f_{yy} d_t^2 + \frac{1}{2} f_{xx} b_t^2 + f_{xy} b_t d_t \right) dt + f_x b_t dB_t^1 + f_y d_t dB_t^2. \quad (5.17)$$

Si aplicamos dicha fórmula al precio $V(t, S_t, Y_t)$ nos queda

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial V}{\partial Y_t} dY_t + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} Y_t S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial Y_t^2} \sigma^2 Y_t + \frac{\partial^2 V}{\partial S_t \partial Y_t} \sigma Y_t S_t \rho \right) dt. \quad (5.18)$$

Entonces ahora aplicando la ecuación anterior sobre el precio del portafolio una vez asumida la autofinanciación, tenemos que

$$\begin{aligned} d\Pi = & \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} Y_t S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + \rho \sigma Y_t S_t \frac{\partial^2 V}{\partial S_t \partial Y_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 Y_t \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right] dt - \\ & - \Delta_1 \left[\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} Y_t S_t^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S_t^2} + \rho \sigma Y_t S_t \frac{\partial^2 V_1}{\partial S_t \partial Y_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 Y_t \frac{\partial^2 V_1}{\partial S_t^2} \right] dt \\ & + \left[\frac{\partial V}{\partial S_t} + \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial S_t} + \Delta \right] dS_t + \left[\frac{\partial V}{\partial Y_t} + \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial Y_t} \right] dY_t. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Para obtener un portafolio sin riesgo hemos de imponer que los dos últimos términos de la ecuación diferencial se anulen, de forma que eliminemos los términos en dS_t y en dY_t

$$\left[\frac{\partial V}{\partial S_t} + \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial S_t} + \Delta \right] dS_t = 0, \quad (5.20)$$

$$\left[\frac{\partial V}{\partial Y_t} + \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial Y_t} \right] dY_t = 0, \quad (5.21)$$

de esta manera, obtenemos que $\Delta_1 = \left(\frac{\partial V}{\partial Y_t} \right) / \left(\frac{\partial V_1}{\partial Y_t} \right)$ y $\Delta = -\Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial S_t} - \frac{\partial V}{\partial S_t}$.

Como estamos trabajando con un portafolio sin riesgo, sabemos que su retorno debe ser igual a la tasa r :

$$d\Pi = r\Pi dt = r(V\Delta S + \Delta_1 V_1). \quad (5.22)$$

Igualamos por tanto las dos ecuaciones diferenciales que tenemos para el valor del portafolio, sustituyendo además los valores de Δ_1 y Δ :

$$\begin{aligned} & \frac{\left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} Y_t S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + \rho \sigma Y_t S_t \frac{\partial^2 V}{\partial S_t \partial Y_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 Y_t \frac{\partial^2 V}{\partial Y_t^2} \right] - rV + rS_t \frac{\partial V}{\partial S_t}}{\frac{\partial V}{\partial Y_t}} \\ & = \frac{\left[\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} Y_t S_t^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S_t^2} + \rho \sigma Y_t S_t \frac{\partial^2 V_1}{\partial S_t \partial Y_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 Y_t \frac{\partial^2 V_1}{\partial Y_t^2} \right] - rV_1 + rS_t \frac{\partial V_1}{\partial S_t}}{\frac{\partial V_1}{\partial Y_t}}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Analizando esta última expresión vemos que un lado está escrito en función de V y el otro en función de V_1 . Para que esta igualdad se dé, entonces ambos lados deben ser iguales a una función $f(S_t, Y_t, t)$ que no depende de la madurez del contrato T . Sin pérdida de generalidad podemos escribir $f(S_t, Y_t, t) = k(\theta - Y_t) + \lambda(S_t, Y_t, t)$.

Por tanto, tenemos que para el conjunto de ecuaciones diferenciales estocásticas propuesto, el precio de la opción $V(t, S_t, Y_t)$ verifica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} Y_t S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + \rho Y_t \sigma S_t \frac{\partial^2 V}{\partial S_t \partial Y_t} + \\ + \frac{1}{2} \sigma^2 Y_t \frac{\partial^2 V}{\partial Y_t^2} + r S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + [K(\theta - Y_t) - \lambda(Y_t, S_t, t)] \frac{\partial V}{\partial Y_t} - rV = 0. \end{aligned}$$

La función $\lambda(S_t, Y_t, t)$ corresponde al precio del riesgo de la volatilidad. Heston propone

$$\lambda(S_t, Y_t, t) = \lambda Y_t, \quad (5.24)$$

llegando entonces a la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} Y_t S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + \rho Y_t \sigma S_t \frac{\partial^2 V}{\partial S_t \partial Y_t} + \\ + \frac{1}{2} \sigma^2 Y_t \frac{\partial^2 V}{\partial Y_t^2} + r S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + [K(\theta - Y_t) - \lambda Y_t] \frac{\partial V}{\partial Y_t} = rV. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Para dicha ecuación estocástica Heston propone una solución análoga a la fórmula de Black-Scholes. Seguiremos entonces Heston (1993) [12] y Lewis (2000) [16].

$$\begin{aligned} V_T(K) &= e^{-r\tau} E[(S_T - K)^+] \\ &= e^{s_t} P_1(s_t, Y_t, \tau) - e^{-r\tau} K P_2(s_t, Y_t, \tau), \end{aligned} \quad (5.26)$$

con $s_t = s = \ln S_t$ y $\tau = T - t$ con T el tiempo de madurez de la opción a valorar. Para determinar P_i reescribimos la última ecuación diferencial estocástica en función de s_t y τ .

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2} Y_t \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + \rho Y_t \sigma \frac{\partial^2 V}{\partial s \partial Y_t} + \\ + \frac{1}{2} \sigma^2 Y_t \frac{\partial^2 V}{\partial Y_t^2} + \left(r - \frac{1}{2} Y_t \right) \frac{\partial V}{\partial s} + [K(\theta - Y_t) - \lambda Y_t] \frac{\partial V}{\partial Y_t} = rV. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Ahora, derivamos $V(K)$ respecto de τ , s , y Y_t de la ecuación (5.26) y sustituimos las expresiones en la ecuación (5.27).

Imponemos $K = 0$ y $S = 1$ para obtener la ecuación diferencial de P_1 . Para obtener la de P_2 hacemos $S = 0$, $K = -1$ y $r = 0$. Una expresión general de la ecuación diferencial es

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P_j}{\partial \tau} + \rho \sigma Y_t \frac{\partial^2 P_j}{\partial s \partial Y_t} + \frac{1}{2} Y_t \frac{\partial^2 P_j}{\partial s^2} + \frac{1}{2} Y_t \sigma^2 \frac{\partial^2 P_j}{\partial Y_t^2} \\ + (r + u_j Y_t) \frac{\partial P_j}{\partial s} + (a - b_j Y_t) \frac{\partial P_j}{\partial Y_t} = 0, \end{aligned} \quad (5.28)$$

con $u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = -\frac{1}{2}$, $a = K\theta$, $b_1 = K + \lambda - \rho\sigma$ y $b_2 = K + \lambda$.

Obteniendo las funciones características $f_j(\phi; s, Y_t)$ y resolviendo la Ecuación de Heston Riccati (véase Heston (1993) [12]) llegamos a:

$$P_j(s, Y_t, T, K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\phi \ln(K)} f_j(s, V_t, T, \phi)}{i\phi} \right) d\phi, \quad j = 1, 2, \quad (5.29)$$

con

$$\begin{aligned} f_j(s, Y_t, T, \phi) &= e^{C(T-t, \phi) + D(T-t, \phi) Y_t + i\phi s}, \\ C(T-t, \phi) &= r\phi i r + \frac{a}{\sigma^2} \left[(b_j - \rho\sigma\phi i + d) \tau - 2 \ln \left(\frac{1 - g e^{dr}}{1 - g} \right) \right], \\ D(T-t, \phi) &= \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{dr}}{1 - g e^{dr}} \right), \\ g &= \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{b_j - \rho\sigma\phi i - d}, \\ d &= \sqrt{(\rho\sigma\phi i - b_j)^2 - \sigma^2 (2u_j\phi i - \phi^2)}. \end{aligned}$$

Como hemos comentado, este nuevo modelo surgió con la intención de representar de manera más realista el comportamiento del mercado.

5.2. *Smile* y volatilidad estocástica.

Nuestro objetivo en esta sección será explicitar la relación existente entre la volatilidad implícita y la volatilidad estocástica. Para ello nos centraremos en la demostración de Lee (2005) [15].

Trabajaremos en la situación en que $\rho = 0$. Es decir, W_t y Z_t son movimientos brownianos no correlacionados.

Para este caso se demuestra que la volatilidad implícita tiene forma de "sonrisa simétrica" ya que tendremos

$$\sigma_{imp}(x, T) = \sigma_{imp}(-x, T), \quad (5.30)$$

y además σ_{imp} creciente para $x > 0$. Recordemos que

$$x = \log \left(\frac{K}{S_t e^{r(T-t)}} \right). \quad (5.31)$$

Por un lado desarrollamos en serie de Taylor la función valor de una opción $V_{BS} \left(\sqrt{\mathbb{E}[\sigma^2]} \right)$ alrededor de $\mathbb{E}[\sigma^2]$ donde

$$\overline{\sigma^2} = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_s^2 ds, \quad (5.32)$$

definida como la varianza media. Tenemos pues,

$$V = V_{BS}(\sigma_{imp}) \approx V_{BS}(\mathbb{E}[\overline{\sigma^2}]) + \left(\sigma_{imp}^2 - \mathbb{E}[\overline{\sigma^2}] \right) \frac{\partial V_{BS}}{\partial (\sigma^2)}. \quad (5.33)$$

Por otro lado, a partir de la fórmula de Hull y White (1987) [13] con $\rho = 0$:

$$V = \mathbb{E} \left[e^{-r(T-t)} (S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}[V_{BS}(\overline{\sigma^2})], \quad (5.34)$$

expandimos de nuevo en serie de Taylor y nos queda

$$V \approx V_{BS}(\mathbb{E}[\overline{\sigma^2}]) + \frac{1}{2} \text{Var}(\overline{\sigma^2}) \frac{\partial^2 V_{BS}}{\partial (\overline{\sigma^2})^2}. \quad (5.35)$$

Tenemos entonces dos aproximaciones que podemos igualar de manera que tenemos

$$\sigma_{imp}^2 \approx \mathbb{E}[\overline{\sigma^2}] + \frac{1}{4} \frac{\text{Var}(\overline{\sigma^2})}{(\mathbb{E}[\overline{\sigma^2}])^2} \left(\frac{x^2}{T} - \mathbb{E}[\overline{\sigma^2}] - \frac{1}{4} (\mathbb{E}[\overline{\sigma^2}])^2 T \right), \quad (5.36)$$

que es cuadrática en x y presenta un mínimo en $x = 0$. De esta manera, queda evidenciada la relación entre el modelo de volatilidad implícita y el de volatilidad estocástica.

Una demostración alternativa de que los precios de las opciones europeas de volatilidad estocástica producen la curva de la sonrisa para cualquier proceso de volatilidad no correlacionado se encuentra en Fouque et al. (2011) [9].

Se obtiene que en un modelo de volatilidad estocástica donde σ_t es independiente del browniano W_t , la curva de la volatilidad implícita $\sigma_{imp}(K)$ para t , S_t y T fijados reproduce la sonrisa y es localmente convexa alrededor del mínimo $K_{min} = S_t e^{r(T-t)}$. La demostración de este resultado se realiza por inducción sobre el número de posibles valores de

$$\overline{\sigma^2} = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_s^2 ds, \quad (5.37)$$

tratándola como una variable aleatoria y aplicando la fórmula de Hull-White (véanse Hull y White (1987) [13] y Renault y Touzi (1996) [20]).

6. Volatilidad local

Ya hemos visto el modelo de Black Scholes, con el que obtenemos aproximaciones de la volatilidad, que conocemos como volatilidad implícita. Este modelo no representa de forma acorde el comportamiento real de la volatilidad en los mercados. No es capaz de capturar la dependencia de dichos valores de la volatilidad con el precio de ejercicio y el tiempo de madurez (lo que ya hemos denominado como sonrisa de la volatilidad). Pese a ello, es cierto que el modelo de Black-Scholes puede funcionar relativamente bien para opciones vanilla de tipo europeo, pero no será una buena herramienta para valorar opciones exóticas o americanas.

Con el objetivo de encontrar modelos que representen de una manera más realista el comportamiento de la volatilidad, hemos visto el modelo de volatilidad estocástica y un ejemplo concreto: el modelo de Heston.

Dada la complejidad computacional de los modelos de volatilidad estocástica y la dificultad de ajustar los parámetros a los precios actuales de las opciones, necesitamos otro modelo que también reproduzca el comportamiento real de los mercados.

Para este capítulo seguiremos de cerca Gatheral (2011) [10] y Derman (1996) [5]. Para la deducción de la expresión de Dupire seguiremos Rouah y Vainberg (2007) [22].

En este modelo, usaremos un proceso de difusión de un factor con una función de volatilidad que depende del precio del activo subyacente y del tiempo. Desde este punto de vista determinista, la función que hemos definido será lo que denominemos como volatilidad local.

Intuitivamente se puede pensar en la volatilidad local como el consenso del mercado sobre la volatilidad instantánea para un precio de ejercicio en una fecha determinada.

Fue Dupire (1994) [7] quien enfocó el problema tal y como lo hemos definido. Es cierto que su idea probablemente no fuese la de crear un modelo que sirviera para describir la dinámica de la volatilidad. Más bien tomaba la volatilidad local como una representación de la volatilidad media instantánea entre todos sus valores posibles.

En el modelo de volatilidad local se trabaja con un activo subyacente cuyo precio se rige según la ecuación diferencial estocástica siguiente:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_L(S_t, t) S_t dW_t = (r_t - q_t) S_t dt + \sigma_L(S_t, t) S_t dW_t, \quad (6.1)$$

donde W_t es un movimiento browniano. Ha de tenerse en cuenta que el modelo de volatilidad local pretende ser óptimo para cualquier tipo de opción y por tanto vamos a considerar el pago de dividendos q_t a lo largo del proceso. También consideraremos la tasa de interés, r_t , como una función no constante. El objetivo del modelo será introducir flexibilidad a la función de la volatilidad.

Nótese que estamos considerando en la ecuación diferencial estocástica la función $\sigma_L(S_t, t)$ cuya dependencia con S_t y t representa una importante diferencia con el modelo de volatilidad estocástica, en el que considerábamos una función σ_t que dependía únicamente del tiempo. A partir de ahora, en este capítulo trataremos $\sigma_L(S_t, t) = \sigma(S_t, t)$.

Sea $V(S_t, K)$ el precio de una opción europea de tipo *call*, con K el precio de ejercicio. Ya hemos visto en secciones anteriores que podemos escribir

$$V(S_t, K) = \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) \int_K^\infty (S_T - K) f_{t, S_t}(T, S_T) dS_T, \quad (6.2)$$

donde $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ es la filtración generada por el movimiento Browniano W_t y $f_{t,S_t}(T, S_T)$ es la función densidad neutral al riesgo. Vamos a trabajar en el instante $t = T$ y obviaremos la dependencia de la función de densidad con t y S_t .

Para la obtención de la fórmula de Dupire es necesario introducir la ecuación de Fokker-Planck, que pertenece al grupo de lo que se conoce como ecuaciones de Kolmogorov (véase Björk [1]). Dada una ecuación diferencial estocástica del tipo

$$dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, \quad (6.3)$$

con X_t su solución. Si X_t tiene una función de densidad $p(y, s; t, x)$. Entonces p satisface la ecuación de Kolmogorov:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(y, s; t, x) = \mathcal{A}^* p(y, s; t, x), \quad (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}, \quad (6.4)$$

donde el operador adjunto⁷ se define como

$$(\mathcal{A}^* f)(t, x) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [\mu_i(t, x) f(t, x)] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [C_{ij}(t, x) f(t, x)]. \quad (6.5)$$

La ecuación, aplicada a nuestro caso concreto, tomando $C(t, S_t) = \sigma^2(t, S_t)$, presenta la forma:

$$\frac{\partial f(t, S_t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial S_t} [\mu_t S_t f(t, S_t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S_t^2} [\sigma^2(t, S_t) S_t^2 f(t, S_t)]. \quad (6.6)$$

Por tanto, nuestro objetivo será calcular los términos que participan en dicha ecuación diferencial y sustituirlos:

- La primera derivada de la función del precio de la opción con la que estamos trabajando respecto al precio de ejercicio será:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial K} &= \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) \int_K^\infty \frac{\partial}{\partial K} (S_T - K) f(T, S_T) dS_T \\ &= - \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) \int_K^\infty f(T, S_T) dS_T. \end{aligned} \quad (6.7)$$

- La segunda derivada tendrá la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial K^2} &= - \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) [f(T, S_T)]_{S=K}^{S=\infty} \\ &= f(T, K) \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right). \end{aligned} \quad (6.8)$$

- Ahora, aplicando la regla de la cadena obtenemos la derivada respecto al tiempo de madurez:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial T} &= \frac{\partial V}{\partial T} \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) \times \int_K^\infty (S_T - K) f(T, S_T) dS_T + \\ &\quad \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) \times \int_K^\infty (S_T - K) \frac{\partial}{\partial T} [f(T, S_T)] dS_T. \end{aligned} \quad (6.9)$$

⁷ \mathcal{A}^* es el operador adjunto de lo que se conoce como operador infinitesimal \mathcal{A} de X_t (véase Björk [1]).

Para simplificar las ecuaciones tomaremos $P = -\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)$ y como $\frac{\partial P}{\partial T} = -r_T P(t, T)$ entonces nos queda

$$\frac{\partial V}{\partial T} = -r_T V + P(t, T) \int_K^\infty (S_T - K) \frac{\partial}{\partial T} [f(T, S_T)] dS_T. \quad (6.10)$$

Ya podemos entonces aplicar la ecuación de Fokker-Planck para la función f en el instante $t = T$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial T} + r_T V = \\ P(t, T) \int_K^\infty (S_T - K) \times \left\{ -\frac{\partial}{\partial S} [\mu_T S_T f(T, S_T)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S^2} [\sigma^2(T, S_T) S_T^2 f(T, S_T)] \right\} dS_T. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Entonces nos queda una ecuación diferencial con las siguientes integrales a calcular.

- Tenemos la integral

$$I_1 = \mu_T \int_K^\infty \frac{\partial}{\partial S} [S_T f(T, S_T)] (S_T - K) dS_T. \quad (6.12)$$

Integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned} I_1 &= [\mu_T (S_T - K) S_T f(T, S_T)]_{S=K}^{S=\infty} - \mu_T \int_K^\infty S_T f(T, S_T) dS_T \\ &= [0 - 0] - \mu_T \int_K^\infty S_T f(T, S_T) dS_T. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Ahora, usando la expresión de

$$\frac{V}{P(t, T)} = \int_K^\infty (S_T - K) f(T, S_T) dS_T, \quad (6.14)$$

llegamos a

$$\int_K^\infty S_T f(T, S_T) dS_T = -\frac{\partial V}{\partial K} \frac{K}{P(t, T)} + \frac{V}{P(t, T)}. \quad (6.15)$$

Sustituyendo la expresión de la integral en la ecuación de I_1 obtenemos:

$$I_1 = \frac{\mu_t}{P(t, T)} \left[K \frac{\partial V}{\partial K} - V \right]. \quad (6.16)$$

- Para la segunda integral

$$I_2 = \int_K^\infty \frac{\partial^2}{\partial S^2} [\sigma^2(T, S_T) S_T^2 f(T, S_T)] (S_T - K) dS_T, \quad (6.17)$$

procedemos de un modo similar. Integrando por partes esta segunda integral nos queda:

$$\begin{aligned} I_2 &= \left[(S_T - K) \frac{\partial}{\partial S} \{ \sigma^2(T, S_T) S_T^2 f(T, S_T) \} \right]_{S=K}^{S=\infty} - \int_K^\infty \frac{\partial}{\partial S} [\sigma^2(T, S_T) S^2 f(T, S_T)] dS_T \\ &= [0 - 0] - [\sigma(T, K)^2 S_T^2 f(T, S_T)]_{S=K}^{S=\infty} \\ &= \sigma(T, K)^2 K^2 f(T, K). \end{aligned} \quad (6.18)$$

En este caso utilizamos la expresión de la segunda derivada respecto a K que hemos calculado antes para escribir la función como

$$f(T, K) = \frac{1}{P(t, T)} \frac{\partial^2 V}{\partial K^2}, \quad (6.19)$$

y por tanto, tenemos que

$$I_2 = \frac{\sigma(T, K)^2 K^2}{P(t, T)} \frac{\partial^2 V}{\partial K^2}. \quad (6.20)$$

Ahora podemos sustituir las expresiones de ambas integrales en la ecuación de Fokker-Planck, tomando $\mu_T = r_T - q_T$ nos queda:

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{1}{2} \sigma(T, K)^2 K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial K^2} - q_T V - (r_T - q_T) K \frac{\partial V}{\partial K}, \quad (6.21)$$

con condición inicial $V(0, K) = (S_0 - K)^+$.

Aislado, tenemos la expresión general de la ecuación de Dupire para la volatilidad local:

$$\sigma(T, K) = \left(2 \frac{\frac{\partial V}{\partial T} + (r_T - q_T) K \frac{\partial V}{\partial K} + q_T V}{K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial K^2}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.22)$$

A este término se le conoce como la volatilidad implícita local y corresponde a la volatilidad local que es consistente con los precios de las opciones. Se trata de una fórmula para un t fijado.

En general, la función del precio de la opción nunca se conocerá analíticamente, ni tampoco sus derivadas. Por lo tanto, hay que hacer aproximaciones numéricas para las derivadas que, por su propia naturaleza, son aproximaciones. Los problemas pueden surgir cuando los valores a aproximar son muy pequeños, y pequeños errores absolutos en la aproximación pueden conducir a grandes errores relativos, perturbando la cantidad estimada. En este caso, el resultado de la fórmula es muy sensible a pequeños cambios en la segunda derivada con respecto al precio de ejercicio que aparece en el denominador. Esta derivada será muy pequeña para las opciones que están muy OTM o ITM (es decir el efecto es especialmente grande para las opciones con vencimientos cortos). Los pequeños errores en la aproximación de esta derivada se multiplicarán por el valor del precio de ejercicio al cuadrado, dando lugar a grandes errores en estos valores.

La ecuación de Dupire se puede escribir en función del *log-moneyness* (véase Lee [16]). Recordemos que la volatilidad implícita verifica

$$V_{mercado} = V_{BS} \left(\sigma_{imp}(S_t e^{x+r(T-t)}, T) \right). \quad (6.23)$$

Por tanto, sustituyendo en la ecuación de Dupire y tomando una opción sin dividendos tenemos que

$$\sigma(T, x) = \left(\frac{2T \sigma_{imp} \frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial T} + \sigma_{imp}^2}{\left(1 - x \frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial x} / \sigma_{imp}\right)^2 + T \sigma_{imp} \frac{\partial^2 \sigma_{imp}}{\partial x^2} - \frac{1}{4} T^2 \sigma_{imp}^2 \frac{\partial^2 \sigma_{imp}}{\partial x^2}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.24)$$

6.1. *Smile* y volatilidad local

Un enfoque directo obvio podría ser invertir la expresión obtenida en la sección anterior y expresar la volatilidad implícita en términos de volatilidad local. Sin embargo este procedimiento no da buenos resultados en general.

Para esta sección seguiremos de cerca Gatheral (2011) [10]. Partimos de la definición de la volatilidad implícita $\sigma^{imp}(K, T)$ a partir de la fórmula de Black-Scholes. Por definición, tenemos que

$$V_{mercado,t=0}(K, T) = V_{BS}(t = 0, K, \sigma_{t=0}^{imp}(K, T), T).$$

Para simplificar los cálculos definimos la varianza implícita total de la fórmula de Black-Scholes expresando explícitamente la dependencia de la volatilidad implícita con el precio S_t del activo:

$$w(S_0, K, T) := \sigma_{imp}^2(S_0, K, T) T.$$

Por otro lado definimos

$$y = \ln \frac{K}{F_T},$$

con

$$F_T = S_0 \exp\left(\int_0^T (r_t - q_t) dt\right)$$

representando el precio del activo a tiempo $t = 0$. Además, podemos parametrizar $K = F_T e^y$. Así que tomamos $w = w(y)$. Tengamos en cuenta que de nuevo estamos trabajando con opciones en las que pueden darse pago de dividendos de forma que $\mu_t = r_t - q_t$. La fórmula de Black-Scholes podemos reescribirla de manera que

$$\begin{aligned} V_{BS}(S_0, K, \sigma(K, T), T) &= V_{BS}(S_0, F_T e^y, w(y), T) \\ &= F_T \{N(d_1) - e^y N(d_2)\}, \end{aligned} \quad (6.25)$$

con

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + \int_0^T (r_t - q_t) dt + \frac{w}{2}}{\sqrt{w}} = -yw^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}w^{\frac{1}{2}}. \quad (6.26)$$

Derivando ahora la ecuación de Black-Scholes, tenemos que

$$\frac{\partial^2 V_{BS}}{\partial w^2} = \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{2w} + \frac{y^2}{2w^2}\right) \frac{\partial V_{BS}}{\partial w}, \quad (6.27)$$

$$\frac{\partial^2 V_{BS}}{\partial y \partial w} = \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{w}\right) \frac{\partial V_{BS}}{\partial w}. \quad (6.28)$$

La ecuación de Dupire de la sección anterior podemos escribirla con v_L la volatilidad local como:

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{v_L}{2} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial V}{\partial y} \right] + \mu_T V. \quad (6.29)$$

Ahora sustituimos en la ecuación de Dupire los siguientes términos (véase Douglas 2006 [21]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{\partial V_{BS}}{\partial y} + \frac{\partial V_{BS}}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 V_{BS}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 V_{BS}}{\partial y \partial w} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 V_{BS}}{\partial w^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial V_{BS}}{\partial w} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial V}{\partial T} &= \frac{\partial V_{BS}}{\partial T} + \frac{\partial V_{BS}}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial T} = \frac{\partial V_{BS}}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial T} + \mu(T) V_{BS}. \end{aligned}$$

Una vez substituidos y cancelando $\mu_T V$ de ambos lados de la igualdad nos queda

$$\frac{\partial V_{BS}}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial T} = \frac{v_L}{2} \left[\frac{\partial^2 V_{BS}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 V_{BS}}{\partial y \partial w} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial V_{BS}}{\partial w} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_{BS}}{\partial w^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial V_{BS}}{\partial y} + \frac{\partial V_{BS}}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} \right]. \quad (6.30)$$

Sustituyendo (6.22) y (6.23), sacando factor común de $\frac{\partial V_{BS}}{\partial w}$ y simplificando, nos queda que

$$\frac{\partial w}{\partial T} = v_L \left\{ 1 - \frac{y}{w} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{w} + \frac{y^2}{w^2} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\}. \quad (6.31)$$

Y por tanto, tenemos que

$$v_L = \frac{\frac{\partial w}{\partial T}}{1 - \frac{y}{w} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{w} + \frac{y^2}{w^2} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}. \quad (6.32)$$

Por tanto, vemos que el modelo de volatilidad local es capaz capturar la sonrisa de volatilidad.

7. Sonrisa de la volatilidad

7.1. Origen

A lo largo de todo el trabajo hemos ido mencionando el problema de la conocida como sonrisa de la volatilidad y tratando de encontrar modelos que de alguna manera solucionaran dicha cuestión.

Para contextualizar el surgimiento de este desajuste entre los modelos desarrollados y la realidad de los mercados nos basaremos en Derman (2003) [6]. En su artículo *Laughter in the Dark - The Problem of the Volatility Smile* se refería así al primer momento, en 1990, en que observó lo que hoy denominamos como sonrisa de la volatilidad:

That December, our trader in Tokyo showed me the implied volatilities of Nikkei^a options on his screen. What perturbed him was that three-month options of low strike had much higher implied volatilities than three-month options of high strike, as shown in Figure 1. This skew or asymmetry in the implied volatilities had been absent before the infamous stock market crash of Oct. 19 1987, and had begun to appear shortly afterwards, in index markets all over the world.

(Derman, 2003)

^aÍndice bursátil compuesto por las 225 principales empresas japonesas que cotizan en la Bolsa de Tokio.

Según algunos los estudios realizados al respecto, por ejemplo Rubenstein (1994) [24], la función de la volatilidad tenía un valor constante el cual no dependía del precio de ejercicio. A partir del *crash* bursátil de 1987, el valor de la volatilidad comenzó a depender del precio de ejercicio y en menor grado del tiempo de madurez de la opción.

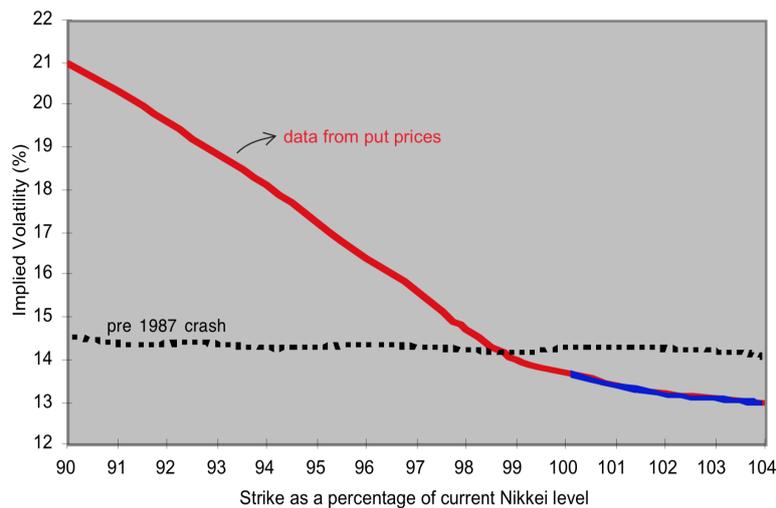


Figura 1: Curva típica de la volatilidad implícita de las opciones a tres meses del índice Nikkei a finales de 1994. La línea punteada muestra la curva antes de la crisis de 1987. Fuente: Derman (2003) [6].

Para contextualizar mejor el nacimiento de las sonrisas de volatilidad debemos saber qué ocurrió en 1987. El lunes negro es el nombre con el que se conoce el desplome global,

repentino, grave y en gran medida inesperado del mercado de valores el 19 de octubre de 1987. Los veintitrés principales mercados mundiales experimentaron un fuerte descenso. Este, se inició en Hong Kong y fue extendiéndose hacia el oeste, llegando a Europa y finalmente a Estados Unidos. Allí, el índice bursátil Dow Jones bajó 508 puntos.

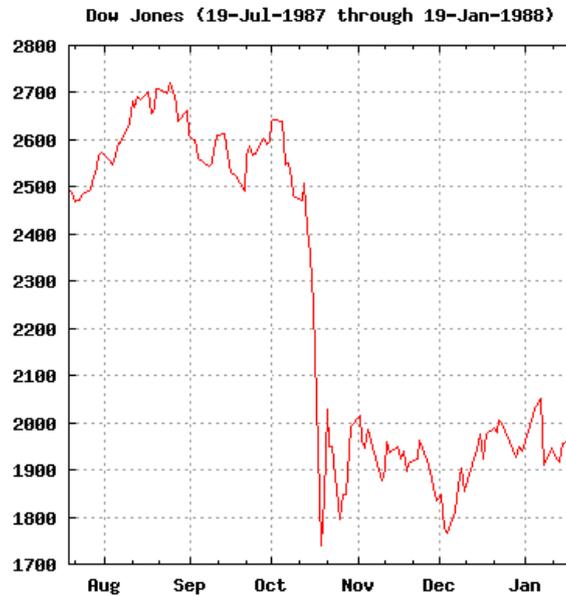


Figura 2: Gráfico del índice bursátil norteamericano Dow Jones.

Los primeros trabajos que hallaron pruebas de la sonrisa de volatilidad describieron cómo los errores de fijación de precios de Black-Scholes varían sistemáticamente con el precio de ejercicio o con el tiempo hasta el vencimiento. Macbeth y Merville (1979), por ejemplo, encontraron que el modelo Black-Scholes infravalora las opciones *call* ITM y sobrevalora las OTM. Otros autores encontraron el resultado contrario, que el modelo Black-Scholes infravalora las opciones de compra OTM. Estos y otros resultados relevantes son resumidos por Galai (1983).

El estudio más sistemático y completo que documenta los perfiles de volatilidad es el de Rubinstein (1985) [23], cuyo resultado más sólido es que, para las opciones OTM, la volatilidad implícita es sistemáticamente mayor para las opciones con plazos de vencimiento más cortos. Sus otros resultados son estadísticamente significativos, pero cambian a lo largo de los subperíodos. Así pues, parece que existen desviaciones sistemáticas del modelo Black-Scholes, pero el patrón de desviaciones varía a lo largo del tiempo.

Muchos otros autores han encontrado pruebas de sonrisas de volatilidad y estructuras temporales no planas de volatilidades implícitas en varios mercados.

Las causas de dicho fenómeno no son claras y la literatura presenta diferentes motivos no unánimes por los que se pudo originar.

Según Rubenstein (1994) [24], una de las causas por las que el *crash* produjo el cambio en la dependencia de la volatilidad con respecto a las variables que ya hemos comentado podría ser el miedo generalizado a un nuevo desplome que llevaría a aumentar el coste de las opciones de tipo *put* OTM.

Otra de las causas se basa en pensar que el comportamiento de los precios supuesto en el modelo de Black-Scholes no se corresponde con los precios reales de mercado. No

fue hasta el *crash* cuando se dieron movimientos tan bruscos que se reflejó una clara discrepancia en el modelo.

Según Hull (2012) [14], las condiciones para que el precio de un activo presente una distribución log-normal son que la volatilidad del activo subyacente sea un valor constante y que su precio no varíe bruscamente. No obstante, en el mercado dichos movimientos bruscos o saltos son muy comunes.

7.2. *Smile* y *skew* de la volatilidad

Analizaremos ahora, siguiendo Hull (2012) [14] cómo se comporta la sonrisa de la volatilidad en función de la discrepancia del comportamiento del precio del activo respecto al modelo log-normal.

En esta sección analizaremos la función $\sigma_{imp}(K)$. Recordemos que dicha función, según el modelo de Black-Scholes debería ser constante. Sin embargo, la dependencia real de la volatilidad con el precio de ejercicio puede diferenciarse en *smile* y *skew*.

Con *smile* nos referimos a la función de la volatilidad implícita respecto al precio de ejercicio cuando esta sigue una forma cuadrática. Suele darse cuando el activo financiero asociado a la opción son divisas. Por otro lado, cuando dicha función es decreciente, se le acostumbra a denominar *skew*, y se da principalmente al emplear acciones.

Una explicación naíf a la existencia de ambas formas reside en la idiosincrasia de los movimientos de los precios según el activo subyacente que estemos considerando. Es decir, la diferencia en la sonrisa se debe a que en el conjunto de cambios en el precio de las acciones, los desplomes o saltos a la baja son más comunes que los crecimientos abruptos. Sin embargo, en el mercado de las divisas estos movimientos se dan en ambos sentidos.

En la Figura 3, a simple vista se pueden diferenciar las dos clases de sonrisa según la distribución del precio del activo. En el caso de la Figura 3(a), vemos que los precios de opciones de tipo *call* y *put* que están muy en OTM o ITM serán mayores que los que tendríamos si empleáramos la fórmula de Black-Scholes. Esto se debe a que las colas (Figura 3(b)) de la función implícita del precio del activo son más pesadas que las de la función log-normal correspondiente al modelo de Black-Scholes. Es decir, hay una probabilidad mayor de que las opciones entren en la region ITM de la que existiría según el modelo teórico.

Por ejemplo, para que una opción *call* con precio de ejercicio K_2 en OTM genere un beneficio, el precio de la opción al final del contrato debe ser superior a K_2 . Observando la gráfica (b) de la Figura 3, la probabilidad de que eso ocurra es mayor para la distribución real que en el caso de la lognormal, así que tendremos un precio real mayor que el que obtendríamos empleando la fórmula de Black-Scholes. Por tanto, tendremos una mayor volatilidad.

El mismo argumento puede usarse para una opción de tipo *put* con precio de ejercicio K_1 que en este caso esté en OTM. Para que esta obtenga un beneficio, el precio final del contrato debe ser inferior a K_1 . En la gráfica podemos ver de nuevo que la probabilidad de este suceso es mayor para la distribución implícita de forma que tendremos un precio mayor y por lo tanto una volatilidad mayor.

Podemos emplear un argumento parecido para la *skew* de la volatilidad representada en la Figura 3(c). Tomamos una opción con precio de *strike* K_2 de tipo *call* en OTM. Para conseguir un beneficio a partir de ella, necesitaremos que el precio una vez finalizado

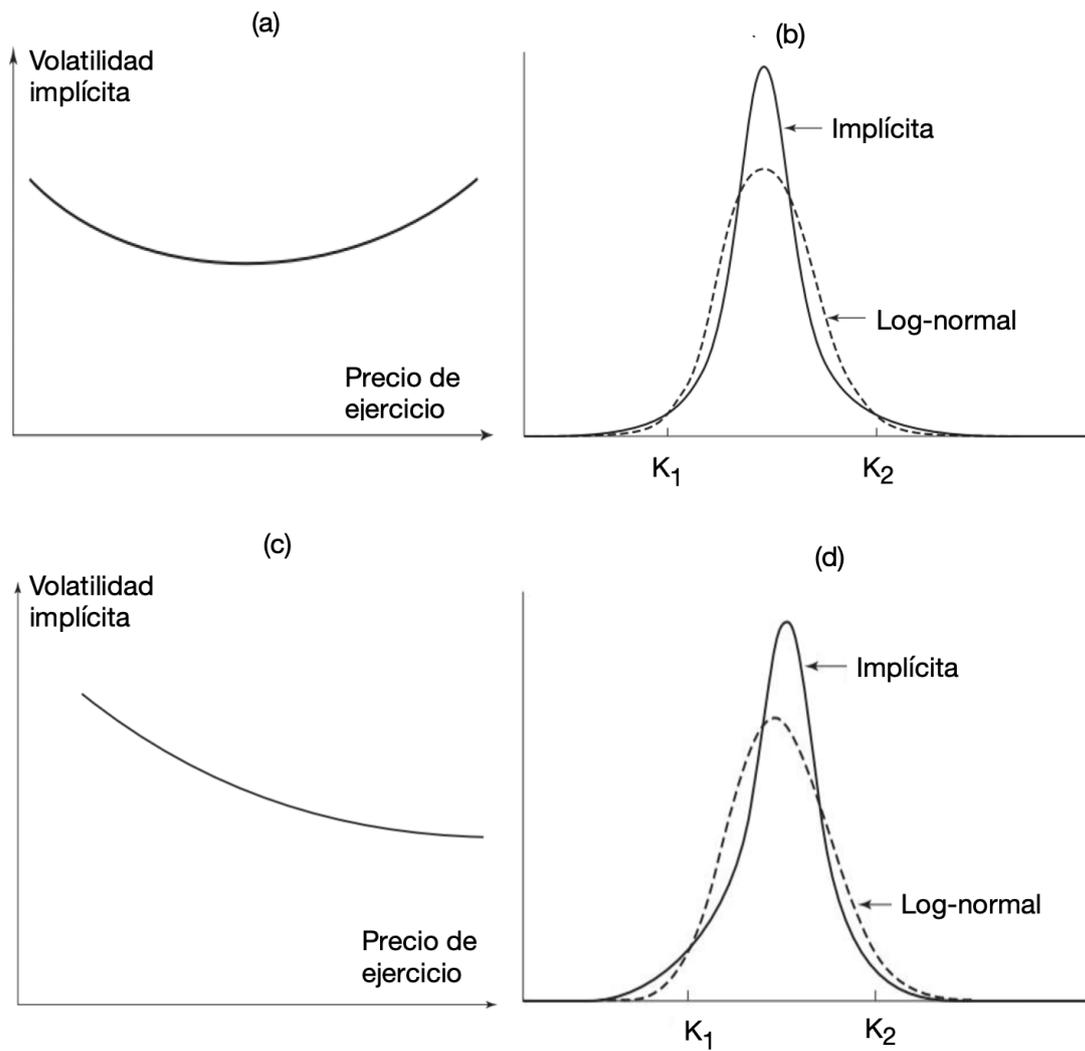


Figura 3: Funciones de la volatilidad para el smile *smile* (a) el *skew* (c) y las correspondientes distribuciones de la volatilidad implícita (b) y (d) real y según el modelo Log-normal. Fuente: Hull (2012) [14].

el contrato sea mayor que K_2 . Como antes, pero ahora con la Figura 3(d), tenemos que la probabilidad de que se de esa situación es menor en la distribución real que en la lognormal presentada por el modelo. Tendremos entonces que el precio real es menor que el obtenido a partir de la fórmula de Black-Scholes resultando así en una volatilidad menor.

Por otro lado, una opción *put* con *strike* K_1 y en OTM generará beneficios si el precio al final del contrato es menor que K_1 . Como la probabilidad de que ocurra es mayor con la distribución real, el precio de la opción sería más grande y por tanto también la volatilidad.

Vemos por tanto que la distribución real en el caso de la *skew* genera una función decreciente al representar la volatilidad en función del precio de ejercicio.

Por tanto ya hemos visto que las predicciones del modelo de Black-Scholes describen un modelo mucho más simple de lo que realmente es. Supone que las volatilidades implícitas σ^{imp} de opciones con el mismo tiempo de madurez y diferente valor del precio de ejercicio deberían ser iguales. Sigamos ahora estudiando el comportamiento real de la curva $\sigma_{imp}(K)$. Sabemos que verifica lo siguiente

$$V_{BS}(t, S(t); K, T, \sigma_{imp}) = V_{mercado}. \quad (7.1)$$

Sabemos que en condiciones de no arbitraje, el precio de una opción de tipo *call* debe ser decreciente con el precio de ejercicio. Derivando la ecuación anterior respecto K , tenemos

$$\frac{\partial V_{mercado}}{\partial K} = \frac{\partial V_{BS}}{\partial K} + \frac{\partial V_{BS}}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial K} \leq 0, \quad (7.2)$$

obteniendo la siguiente desigualdad

$$\frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial K} \leq -\frac{\partial V_{BS}^{call}/\partial K}{\partial V_{BS}^{call}/\partial \sigma}. \quad (7.3)$$

Para una opción *put* tenemos que

$$\frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial K} \geq -\frac{\partial V_{BS}^{put}/\partial K}{\partial V_{BS}^{put}/\partial \sigma}. \quad (7.4)$$

Nos queda entonces, empleando la fórmula de Black-Scholes deducida, que

$$-\frac{\sqrt{2\pi}}{S\sqrt{T-t}} (1 - N(d_2)) e^{-r(T-t) + \frac{1}{2}d_1^2} \leq \frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial K} \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{S\sqrt{T-t}} N(d_2) e^{-r(T-t) + \frac{1}{2}d_1^2}, \quad (7.5)$$

donde d_1 y d_2 son los definidos para la fórmula de Black-Scholes pero con la volatilidad σ_{imp} en este caso.

Esta última desigualdad nos proporciona información sobre la pendiente de volatilidad, la cual presenta una cota tanto superior como inferior.

Con lo visto hasta ahora y ojeando cualquier estudio sobre volatilidad, es evidente que tratar la volatilidad implícita como una variable constante es un error. Sin embargo, el modelo de Black-Scholes no está en desuso ya que en un contexto de pequeños intervalos proporciona un resultado suficientemente bueno para los *practioners*.

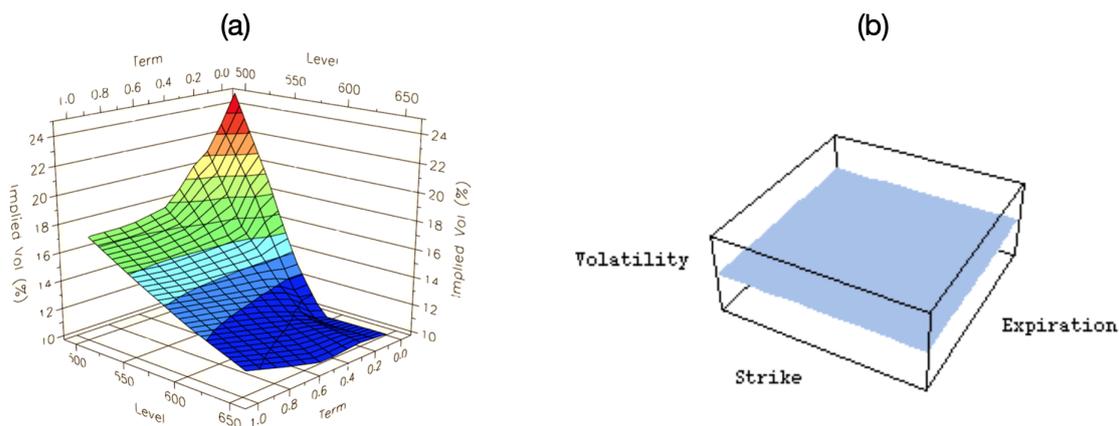


Figura 4: Superficie de volatilidad implícita real para opciones \$&P 500 (a) y para el modelo de Black-Scholes (b). Fuente: Derman (2003) [6].

7.3. El problema en tres dimensiones: superficie de volatilidad

Hasta ahora hemos abordado el problema de la volatilidad desde un punto de vista incompleto ya que hemos analizado el comportamiento de la volatilidad en función del precio de ejercicio. Sin embargo, ya hemos mencionado que la volatilidad es una función que depende también de los días de vencimiento del contrato. Por tanto, para hacer un análisis más profundo del asunto, podemos definir la superficie de volatilidad.

Definición 7.1. *La superficie de volatilidad es una aplicación*

$$\sigma_{imp} : (t, K, T) \rightarrow \sigma_{imp}(K, T). \quad (7.6)$$

Dicha superficie nos permite obtener una representación tridimensional del problema. Por lo tanto, cuando hablamos de *smile* y *skew*, nos referimos a la función (en dos variables) resultante de fijar una fecha de vencimiento en la representación de la superficie de volatilidad.

Las estimaciones de las superficies de volatilidad de una serie de diferentes activos subyacentes a partir de los precios de mercado de opciones son una actividad común en el mundo financiero. Algunos puntos de la superficie de volatilidad de un activo concreto pueden estimarse directamente, ya que corresponden a opciones negociadas activamente.

El resto de la superficie de volatilidad suele determinarse interpolando entre estos puntos.

Si los activos subyacentes se comportaran según lo establecido por Black-Scholes, su superficie de volatilidad sería plana e invariable. En la práctica, las superficies de volatilidad de la mayoría de los activos no son planas y cambian estocásticamente.

Rubinstein (1994) [24] y entre otros, muestra que las volatilidades implícitas de las opciones sobre acciones e índices bursátiles presentan una pronunciada dependencia (es decir, la volatilidad implícita es una función decreciente del precio de ejercicio). Ya hemos visto que en el caso de divisas esta dependencia mayoritariamente presenta forma similar a la del *smile* y para las acciones de una *skew*. Para ambos tipos de activos, la volatilidad implícita puede ser una función creciente o decreciente del tiempo hasta el vencimiento.

La superficie de la volatilidad cambia con el tiempo, pero la forma general de la relación entre la volatilidad y el precio de ejercicio tiende a mantenerse.

Los operadores utilizan la superficie de volatilidad como herramienta para valorar una opción europea cuando su precio no es directamente observable en el mercado. Para que la estimación a partir de la interpolación sea buena, ha de haber un número razonable de opciones europeas negociadas activamente y que éstas abarquen toda la gama de precios de ejercicio y plazos de vencimiento.

8. Conclusiones

Nuestro estudio ha basado su eje principal en el modelo de valoración de Black y Scholes de 1973. En él, se dan una serie de supuestos que ya hemos comentado, y de los cuales se destaca el tratamiento del precio del activo como una distribución lognormal. Bajo esta hipótesis, hemos visto el desarrollo de la fórmula de la valoración de opciones europeas empleada aún a día de hoy. Para su obtención hemos introducido resultados importantes del cálculo estocástico.

A partir de dicha fórmula, hemos definido el concepto de volatilidad implícita. Una vez demostrado que es imposible dar con una fórmula cerrada para encontrarla, hemos visto diferentes procedimientos, computaciones y de cálculo, para obtener una aproximación de su valor.

Dados los supuestos de la fórmula de Black-Scholes, todos los precios de las opciones sobre el mismo valor subyacente con la misma fecha de vencimiento pero con diferentes precios de ejercicio deberían tener la misma volatilidad implícita. Sin embargo, infinidad de estudios han demostrado la existencia de lo que se denomina sonrisa de la volatilidad. Esta sugiere que la fórmula Black-Scholes tiende, en general, a valorar mal las opciones.

Como solución a esta discrepancia entre el modelo y el comportamiento real, tenemos por un lado los modelos de volatilidad estocástica. Estos son útiles porque explican de forma coherente por qué las opciones con diferentes strikes y vencimientos tienen diferentes volatilidades implícitas. Hemos demostrado que el marco de volatilidad estocástica reduce las limitaciones del modelo de Black-Scholes. La solución cerrada para la valoración de opciones obtenida para el modelo de Heston es una muy buena herramienta con que obtener valoraciones de las opciones más fiables que las obtenidas con el modelo Black-Scholes

Por otro lado tenemos los modelos de volatilidad local. Sus impulsores: Dupire, Derman y Kani es poco probable que piensan en la volatilidad local como un modelo de cómo evolucionan realmente las volatilidades. Más bien piensan en las volatilidades como si representarían algún tipo de media (respecto de la probabilidad neutral) de todas las volatilidades instantáneas posibles en un mundo de volatilidad estocástica. La idea es hacer una suposición simplificadora que permita a los profesionales fijar el precio de las opciones exóticas con los precios conocidos de las opciones vainilla.

Sin embargo, los dos modelos no son claramente equivalentes: en el modelo de volatilidad local, las volatilidades son conocidas de antemano y en el caso de la volatilidad estocástica, las volatilidades son inciertas.

Ya hemos por tanto probado que la hipótesis de volatilidad constante no es cierta. De hecho, la volatilidad se puede considerar como una superficie la cual depende del precio de ejercicio y el tiempo de maduración de la opción. Esta superficie puede reproducirse a partir del modelo de volatilidad local tomando una función de volatilidad conveniente. Las volatilidades implícitas representan los precios de las opciones negociadas sobre el mismo activo subyacente, que están vinculadas por diversas relaciones de arbitraje. Por lo tanto, es obvio que las volatilidades implícitas para diferentes niveles de strike y vencimiento no pueden evolucionar de forma independiente y que forman un sistema multivariado altamente correlacionado. De hecho, el estudio de la dinámica de la superficie de volatilidad es actualmente una de las líneas de trabajo dentro de este campo.

9. Anexo: códigos en lenguaje C

A continuación, explicitamos el código en C correspondiente al cálculo de la volatilidad implícita implementado el método de Newton Raphson:

```
#include "funcion_BS.h"
#include "funcion_normal.h"
#include <cmath>

double_imp_vol_newton(const double& S, const double& X, const double& r,
    const double& t, const double& precio_opcion) {

double sigma_menor = 1e-5;
double precio = precio_black_scholes(S,X,r,sigma_menor,t);
//compruebo arbitraje:
if (precio > precio_opcion) return 0.0;
// si el precio para volatilidad casi nula es mayor, devuelvo 0

const int MAX_IT = 100;
const double TOL = 1.0e-4;
double t_raiz = sqrt(t);

double sigma = (precio_opcion/S)/(0.398*t_raiz); // valor inicial
for (int i=0;i<MAX_IT;i++){
precio = precio_black_scholes(S,X,r,sigma,t);
double resta= precio_opcion-precio;
if (fabs(resta)<TOL) return sigma;
double d1 = (log(S/X)+r*t)/(sigma*t_raiz) + 0.5*sigma*t_raiz;
double der = S * raiz * n(d1);
sigma = sigma + resta/der;
};
return -99e10; // fallo
};
```

Para calcular el valor de la opción a partir de la fórmula de Black-Scholes se ha programado el siguiente código:

```
#include <cmath>
#include "funcion_normal.h"
double precio_black_scholes(const double& S, // precio del activo)
const double& K, // precio de ejercicio ,
const double& r, // tasa de interes
const double& sigma, // volatilidad
const double& t// tiempo de madurez){
double t_raiz = sqrt(t);
double d1 = (log(S/K)+r*t)/(sigma*t_raiz)+0.5*sigma*t_raiz;
double d2 = d1-(sigma*t_raiz);
double c = S*N(d1) - K*exp(-r*t)*N(d2);
return c;
};
```

Para emplear dicho código es también necesaria la función que calcule un valor aproximado de la distribución normal.

Ahora, explicitamos el código en C correspondiente al cálculo de la volatilidad implícita implementado el método de bisección:

```
#include <cmath>
#include "funcion_BS.h"
```

```

double imp_vol_biseccion(const double& S, const double& X, const double& r,
    const double& t, const double& precio_opcion){
double sigma_menor=0.0001;
double precio = precio_black_scholes(S,X,r,sigma_menor,t);
//compruebo arbitraje:
if (precio>precio_opcion) return 0.0; / s i e l precio para v o l a t i
l i d a d casi nula es mayor , devuelvo 0

const double TOL = 1.0e-7;
const int MAX_IT = 100;
const double maximo_valor = 1e10;
const double ERROR = -1e40;
// quiero encontrar un intervalo donde este sigma, primero encuentro su
valor maximo
// uso un precio estimado mayor que el precio real
double sigma_mayor=0.3; //por ejemplo
precio = precio_black_scholes(S,X,r,sigma_mayor,t);
while (precio < precio_opcion) {
sigma_mayor = 2.0 * sigma_mayor;
precio = precio_black_scholes(S,X,r,sigma_mayor,t);
if (sigma_mayor>maximo_valor) return ERROR;
};
for (int i=0;i<MAX_IT;i++){
double sigma = (sigma_menor+sigma_mayor)*0.5;
precio = precio_black_scholes(S,X,r,sigma,t);
double test = (precio-precio_opcion);
if (fabs(test)<TOL) { return sigma; };
if (test < 0.0) { sigma_menor = sigma; }
else { sigma_mayor = sigma; }
};
return ERROR;
};

```

Referencias

- [1] Björk, T. (2009). *Arbitrage theory in continuous time*. Oxford university press.
- [2] Black, F. and M. Scholes (1973). *The Pricing of Option and Corporate Liabilities*. The Journal of Political Economy, Vol. 81, No.3, 637-654
- [3] Brenner, M., Subrahmanyam, M. (1988). *A Simple Formula to Compute the Implied Standard Deviation*. *Financial Analysts Journal*. 44(5), 80-83.
- [4] Corcuera, J.M. (2021). *The Golden Age of the Mathematical Finance*. arXiv: 210206693.
- [5] Derman, E., Kani, I., and M. Kamal (1996). *Trading and Hedging Local Volatility*. Goldman Sachs Quantitative Strategies Research Notes.
- [6] Derman, E. (2003). *Laughter in the Dark - The Problem of the Volatility Smile*. Working paper, University of Amsterdam, 2003.
- [7] Dupire, B. (1994). *Pricing With a Smile*. Risk 7, pp. 18.
- [8] Fengler, M. R. (2006). *Semiparametric modeling of implied volatility*. Springer Science Business Media.
- [9] Fouque, J. P., Papanicolaou, G., Sircar, R., Sølna, K. (2011). *Multiscale stochastic volatility for equity, interest rate, and credit derivatives*. Cambridge University Press.
- [10] Gatheral, Jim (2011). *The volatility surface: a practitioner's guide*. Vol. 357. John Wiley & Sons.
- [11] Gerhold, S. (2012). *Can there be an explicit formula for implied volatility?*. arXiv: 1211.4978.
- [12] Heston, S. (1993). *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options*. Review of Financial Studies 6(2): 327–43.
- [13] Hull, J. and White, A. (1987). *The pricing of options on assets with stochastic volatilities*. Journal of Finance, 42, 281—300.
- [14] Hull, J. C. (2012). *Options, futures, and other derivatives*. New Jersey: PrenticeHall, Pearson Education.
- [15] Lee, R. W. (2005). *Implied volatility: Statics, dynamics, and probabilistic interpretation*. *Recent advances in applied probability*. 241-268.
- [16] Lewis, A. (2000). *Option Valuation under Stochastic Volatility*. London: Finance Press.
- [17] Mariani, M. (2020). *Quantitative finance*. John Wiley Sons.
- [18] Mayhew, S. (1995). Implied Volatility. *Financial Analysts Journal*, 51:4, 8-20
- [19] Petters, A. O., Dong, X. (2016). *An introduction to mathematical finance with applications*. Springer.

- [20] Renault, E., Touzi, N. (1996). *Option hedging and implied volatilities in a stochastic volatility model*. *Mathematical Finance*, 6(3), 279-302.
- [21] Ruoah, F.D. (2006). *Derivation of local volatility*. arXiv: 108.4393v2.
- [22] Rouah, F. D., Vainberg, G. (2007). *Option pricing models and volatility using Excel-VBA*. (Vol. 361). John Wiley Sons.
- [23] Rubinstein, M. (1985). *Nonparametric tests of alternative option pricing model using all reported trades and quotes on the 30 most active CBOE option classes*. *Journal of Finance*, 40(June (2)), 455–480.
- [24] Rubinstein, M., (1994). *Implied binomial trees*. *Journal of Finance*. 771-820.
- [25] Samuelson, P. A. (1969). *The Review of Economics and Statistics*. 26-30.
- [26] Williams, D. (1991). *Probability with Martingales*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [27] Xia, Y., Cui, Z. (2018). *An exact and explicit implied volatility inversion formula*. *International Journal of Financial Engineering*, 5(03).