



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Mesures de risc financer i aplicacions a casos reals

Autor: Luis Rodríguez Ballabriga

Director: Dr. Josep Vives i Santa-Eulàlia

Realitzat a: Departament de Probabilitat i Estadística

Barcelona, 19 de juny de 2021

Abstract

The main objective of this project is to study the financial risk measures, their evolution over the years adapting to the needs that have emerged and improving to a more complete version, pointing out the importance of coherence. The flaws that caused the need to rethink them and the construction of new measures are identified and analysed. Finally, as an example to understand all the details presented, a computer program is created in order to calculate the different measures and to be able to observe in real cases the shortcomings and advantages of each of them.

Resum

L'objectiu principal d'aquest treball és estudiar les mesures de risc financer, la seva evolució amb el pas dels anys, adaptant-se a les necessitats que han anat sorgint i millorant cap a una versió més completa, tot destacant la importància de la coherència. Es detecten i s'analitzen els defectes que van provocar la necessitat de reinventar-se i la construcció de noves mesures. Finalment, com a exemple per a comprendre tots els detalls tractats, es crea un programa informàtic per a calcular les diferents mesures i poder observar, en casos reals, les mancances i avantatges de cadascuna d'elles.

Agraïments

En primer lloc voldria agrair al Dr. Josep Vives i Santa-Eulàlia, el seu compromís durant tot el treball. L'ajuda en la tria i enfocament de la temàtica així com les completes revisions.

En segon lloc voldria donar les gràcies a la meva família, especialment als meus pares i al meu germà, per haver-me ajudat, no només durant aquest treball, sinó des que tinc record, a no conformar-me ni donar-me per vençut, a somiar i a creure sempre en mi mateix.

Finalment voldria agrair a tot aquell que en algun moment m'ha animat a seguir endavant i a prendre nous reptes. També a la universitat, per haver-me ajudat a créixer en qualsevol aspecte que se'm pugui venir a la ment.

Índex

1	Presentació del treball	1
1.1	Motivació de la temàtica	1
1.2	Mesures de risc	1
1.3	Objectius del treball	2
1.4	Estructura de la memòria	2
1.5	Referències imprescindibles	3
2	Introducció	5
2.1	Introducció al risc financer	5
2.2	Nocions bàsiques	5
3	Mesures de risc financer	9
3.1	Mesures coherents de risc	9
3.2	Conjunts d'acceptació	11
4	Value at Risk	14
4.1	Quantils	14
4.2	VaR	17
5	Expected Shortfall	21
5.1	Construcció de l'Expected Shortfall	21
6	Creació d'un programa per al càlcul del <i>VaR</i> i l'<i>ES</i>	28
6.1	Plantejament pràctic	28
6.2	Creació del codi	30
6.3	Resultats	36
7	Conclusions	40
8	Annexos	42
8.1	Codi emprat per a l'apartat 6	42

1 Presentació del treball

1.1 Motivació de la temàtica

Quan es comença a veure el final d'una etapa sorgeixen dubtes, s'han de prendre decisions que definiran, encara més, el futur. Després de realitzar-me moltes preguntes, tractar moltes àrees i contrastar diferents opcions sobre el meu esdevenir en acabar la carrera, vaig decidir buscar unes pràctiques universitàries d'anàlisi de dades, per tal de comprovar si l'opció que creia més encertada era també un entorn on em sentia còmode.

A l'inici del curs 2020/21 vaig trobar pràctiques en una empresa de caràcter financer, on l'anàlisi de dades i la modelització formen part del dia a dia. Després de més de vuit mesos en aquest sector, no només he donat resposta a moltes de les meves preguntes i he confirmat que estava en la direcció correcta, sinó que he pogut descobrir una branca nova per mi, les finances, les quals, relacionades amb les matemàtiques, poden arribar a ser d'allò més interessants. És per això que vaig començar documentar-me sobre la temàtica i relacionar-la amb conceptes que havia tractat durant la carrera, per simple curiositat i interès personal.

El dia que vaig començar a pensar en la temàtica del Treball Final de Grau de Matemàtiques, repassant la llista de professors i temàtiques proposades, vaig tenir clar que les matemàtiques financeres havien de ser la meua primera opció, per tal de poder seguir aprenent i formant-me sobre aquesta branca. Per aquest motiu, em vaig posar en contacte amb el Dr. Josep Vives i Santa-Eulàlia, qui em va proposar tractar l'àmbit de les mesures de risc, un tema sobre el qual jo no havia llegit gaire, però que després de documentar-me i comprovar les seves aplicacions en el món real em va semblar un repte molt enriquidor a acceptar, que em permetria comprendre molts aspectes del món financer, sempre des d'un vessant matemàtic i formal.

1.2 Mesures de risc

El risc constitueix un aspecte central, bàsic, en el desenvolupament humà. Concretament, la valoració del risc forma part del procés de presa de decisions, en el qual l'ésser humà es troba de manera permanent. La necessitat d'entendre el risc des d'una perspectiva racional ha portat, en diferents àmbits, a la formulació i l'ús d'eines específiques amb la finalitat de quantificar a partir del coneixement objectiu i empíric, també d'interpretacions de caràcter subjectiu, els nivells de risc en situacions reals concretes o possibles escenaris.

És en aquest punt on neix una nova branca temàtica, quan es duen a terme esforços per definir i establir el concepte abstracte de mesura de risc mitjançant una teoria formal. Per a tot això ha estat fonamental el paper de la probabilitat i l'estadística, àrees essencials que han permès desenvolupar aquesta branca, que és rellevant i atractiva per les seves implicacions en l'entorn científic, econòmic i social.

En el cas de l'àmbit financer, temàtica central del treball, aquesta teoria ha anat avançant, adaptant-se a les situacions i factors que podien no haver-se considerat, donant lloc a diferents propietats necessàries per a les mesures de risc que s'han anat enriquint amb el pas del temps.

1.3 Objectius del treball

Els objectius del treball han estat els següents:

- (i) Definir les mesures de risc i les propietats necessàries d'aquestes en l'àmbit financer, remarcant la importància de la coherència i exposant els possibles conflictes que pot comportar no satisfer les diferents propietats.
- (ii) Conèixer i tractar les mesures de risc més destacades.
- (iii) Identificar les debilitats del *Value at Risk* i exposar-les mitjançant contraexemples, així com mostrar els seus avantatges.
- (iv) Construir una nova mesura de risc a partir del *Value at Risk* que satisfaci les propietats necessàries per a poder mesurar i tractar risc de forma correcta, l'*Expected Shortfall*.
- (v) Crear un programa informàtic on poder calcular les diferents mesures de risc estudiades. Realitzant tot el procés, des de l'obtenció i tractament de les dades i fins a arribar al resultat final.
- (vi) Aplicar les mesures de risc tractades a casos reals, mitjançant el programa comentat, per tal de poder comparar resultats i observar els diferents aspectes que s'han observat per cadascuna de les mesures en els apartats de caràcter més teòric.

1.4 Estructura de la memòria

El treball presenta una estructura progressiva, on no es pressuposen coneixements financers, aquests són introduïts a mesura que es requereixen, acompanyats pels detalls matemàtics adients. Els aspectes generals necessaris per poder introduir-se en la temàtica a tractar queden descrits en l'apartat 2.2.

A continuació, es detalla l'estructura del treball, la qual ha permès assolir els objectius comentats en l'apartat anterior.

En l'apartat **2. Introducció al risc financer** es realitza una introducció al món del risc i de les finances, per tal de posar en context tot allò que es tractarà més tard. Servirà també per definir diferents conceptes que s'utilitzaran durant el treball, alguns d'ells coneguts pel lector, però que convé comentar per tal de recordar detalls. Tot això permetrà situar-se en el punt de partida, amb els coneixements necessaris per poder endinsar-se en la temàtica.

En el següent apartat, **3. Mesures de risc coherent**, es tracta el problema sobre el qual es basa el treball: quantificar el risc d'una o un conjunt d'operacions financeres. Es presenten, de forma ordenada, les diferents famílies de mesures de risc, establint relacions entre les seves propietats. També s'interpreta la seva validesa a l'hora d'emprar-les per a acceptar o rebutjar una operació, mitjançant la definició de conjunts d'acceptació, que permetran conèixer quines operacions o conjunts d'operacions són acceptables per una mesura de risc.

Seguidament, en l'apartat **4. Value at Risk** es defineix una mesura de risc que, durant molts anys, ha estat la més utilitzada per les entitats financeres, el *Value at Risk*.

Es donen a conèixer els seus avantatges i les seves debilitats, tot posant exemples que permeten comprendre l'impacte que poden arribar a tenir aquestes i, consegüentment, la necessitat que va sorgir de crear noves mesures més robustes on se solucionessin aquests inconvenients.

En l'apartat **5. *Expected Shortfall***, es construeix una mesura de risc alternativa a partir de la definició del *Value at Risk*, l'*Expected Shortfall*, amb intenció de solucionar els defectes d'aquest. La deducció es fa pas a pas, donant resposta a les necessitats i passant per mesures de risc intermèdies que, tot i resoldre algunes de les mancances, encara poden persistir-hi d'altres. Es comprova que la nova mesura satisfà totes les propietats requerides.

A continuació, en l'apartat **6. Creació d'un programa per al càlcul del *VaR* i l'*ES*** es desenvolupa des de zero un programa en el llenguatge de programació *Python* per al càlcul de les dues mesures de risc tractades, tot utilitzant els dos mètodes més emprats per part de les entitats en el dia a dia. S'aplica el programa a diferents horitzons temporals i es comparen els resultats obtinguts, tractant de justificar-los i exposant les diferències entre les mesures.

Finalment, es presenten les **Conclusions** del treball, en l'apartat 7, on es repassen i comenten els resultats obtinguts, així com els objectius, comprovant si s'ha donat resposta a tots els plantejats.

En els **Annexos** es pot trobar la totalitat del codi desenvolupat per a la realització de l'apartat 6. Just després es troben les **Referències**, amb les quals conclou el treball.

1.5 Referències imprescindibles

Totes les referències utilitzades per a la realització de treball queden detallades en l'apartat **Referències**, tot i això, a continuació es comenten quins han estat els diferents llibres i articles utilitzats en cadascun dels apartats.

En l'**Apartat 2**, per descriure la introducció matemàtica dels coneixements financers i probabilístics s'han consultat, principalment, [1].

Tot seguit, l'**Apartat 3**, on es tracta el problema i es donen definicions i propietats fonamentals que seran útils i necessàries per a la resta del treball, s'ha basat en [3] i [4]. No obstant això, també han estat importants per comprendre l'apartat 3.2 els articles [5] i [9].

En l'**Apartat 4**, per tal de poder definir la primera de les mesures, s'han seguit [3], concretament el capítol 7, i [5].

Quant al següent apartat, l'**Apartat 5**, s'han seguit diferents articles que han permès aportar una visió general, la qual ha servit per realitzar una construcció pas a pas, passant per una versió intrínseca de la mesura de risc que es tracta. Els documents en qüestió han estat [6], [7] i [8], tot i que també s'ha contrastat la informació amb [3], concretament el capítol 8.

Per tal de poder realitzar l'**Apartat 6** s'ha seguit, principalment el llibre [10], on es tracten conceptes bàsics del món de les finances des d'un punt de vista computacional i que ha ajudat a adquirir una base a partir de la qual partir en el procés de creació del codi. Per a això, també han estat importants les webs de les llibreries utilitzades, [11]

i [12], mitjançant les quals s'ha pogut realitzar el tractament i l'obtenció de les dades necessàries de forma correcta i el posterior desenvolupament dels càlculs.

2 Introducció

2.1 Introducció al risc financer

El risc no és un concepte nou per a ningú, està present en el dia a dia de l'ésser humà. Qualsevol presa de decisions comporta un risc, no sempre en el sentit negatiu, més aviat en el sentit de repte. I és aquest el que ha permès a la societat avançar al llarg dels anys, el fet de sortir de la zona de confort, haver de reinventar-se i valorar els possibles beneficis enfront allò a perdre.

Existeix una extensa literatura sobre la història del concepte de risc, fins i tot des d'una perspectiva probabilística i estadística, teories essencials que han permès tractar en els darrers temps el risc des d'un punt de vista matemàtic. Una de les primeres referències trobada sobre aquest aspecte va ser en el primer article del tractat *Miscellanies*, publicat el 1776 i escrit pel matemàtic William Emerson, titulat *Les lleis de l'atzar*, on s'estableixen un conjunt de lleis i axiomes per tractar el risc, no des d'una visió especialment probabilística, però sí d'una conceptualització formal. La idea d'aquest és que conegudes les quantitats *probabilitat* (P), que ocorri un succés, i *efecte* (E), en termes de pèrdua; el *risc* (R) ha de definir-se com

$$R = P \cdot E. \quad (2.1)$$

Aquesta relació bàsica de proporcionalitat directa ha prevalgut, en un sentit que es podria qualificar d'intrínsec, encara que de manera flexible, en el desenvolupament posterior.

En finances, el concepte de risc està relacionat amb la possibilitat que ocorri un esdeveniment que es tradueixi en pèrdues per als participants en els mercats financers, com poden ser inversors, deutors o entitats financeres. Les operacions financeres es basen a esperar que una inversió augmenti de valor amb el temps. Qui la realitza busca maximitzar el rendiment de la seva operació, és a dir, augmentar el valor de l'actiu en proporció a la inversió inicial. Usualment, els valors futurs d'aquests actius són incerts. Lògicament, com major sigui la incertesa d'aquests valors, major serà el risc. És per això, que cal descriure els diferents valors que poden prendre els actius mitjançant variables aleatòries. Aquestes permetran, mitjançant el seu valor esperat, estimar el rendiment d'una operació amb un únic nombre que tindrà en compte tots els resultats possibles.

La incertesa sobre els valors futurs dels actius, sobre el comportament que tindrà el mercat, ens obliga a pensar en el risc associat a les diferents operacions i en les maneres de tenir-lo en compte a l'hora de dur a terme un moviment. És per aquest motiu que al llarg dels anys s'han desenvolupat diferents maneres per a poder quantificar el risc sota certes condicions, mitjançant la dispersió del valor final d'una variable aleatòria, la qual els inversors intentaran minimitzar al mateix temps que maximitzaran el seu rendiment.

2.2 Nocions bàsiques

Per tal de comprendre tota la teoria relacionada amb les mesures de risc, és necessari introduir diferents conceptes relacionats amb el món financer i la teoria de probabilitats, que permetran partir d'una base.

Definició 2.1. *Un espai de probabilitat és una terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on:*

- (i) Ω és un conjunt no buit, anomenat espai mostral o conjunt d'escenaris.

(ii) $\mathcal{F}$ és una família de parts d' Ω , que s'anomenaran esdeveniments, amb estructura de σ -àlgebra. És a dir:

(a) $\Omega \in \mathcal{F}$.

(b) Sigui $A \in \mathcal{F}$, llavors $A^C = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$.

(c) Sigui $A_i \in \mathcal{F}$ per $i = 1, 2, \dots$, llavors $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

(iii) El darrer element, P , correspon a una aplicació que assigna valors als diferents esdeveniments:

$$P : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$$

S'anomena probabilitat i té les següents propietats:

(a) $P(\Omega) = 1$.

(b) P és σ -additiva, és a dir, donats $A_i \in \mathcal{F}$ per $i = 1, 2, \dots$ disjunts dos a dos aleshores:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Definició 2.2. Donat un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, una variable aleatòria X és una aplicació $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que proporciona una assignació numèrica real als elements de l'espai mostral.

Mitjançant aquests dos conceptes es poden tractar les operacions financeres que seran d'interès per al desenvolupament d'aquest treball, les quals només tenen en compte un valor en el present, conegut, que es denotarà com $S(0)$, i un valor futur, desconegut, que es denotarà com $S(1)$. Aquest valor serà associat a una variable aleatòria no negativa

$$\begin{aligned} S(1) : \Omega &\longrightarrow [0, +\infty) \\ w &\longmapsto S(1)(w) = S(1, w) \end{aligned}$$

que pendrà valors en funció dels diferents escenaris de l'espai mostral Ω , el qual serà considerat finit durant tot l'estudi, $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ amb $n \in \mathbb{N}$.

És important tenir en compte que, tot i poder considerar un espai de probabilitat qualsevol, cal excloure els valors negatius en la variable aleatòria $S(1)$, ja que els actius amb preus negatius no tenen sentit des del punt de vista econòmic, per tant es té

$$P(S(1) \geq 0) = 1.$$

Observació 2.3. Un conjunt d'operacions financeres s'anomena cartera.

A partir de les diferents idees anteriors es pot parlar el concepte de rendiment d'una operació o cartera, definició important a tenir en compte per al tractament de les mesures de risc que es realitzarà durant el treball.

Definició 2.4. El rendiment d'una operació financera és una variable aleatòria $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida com

$$X = \frac{S(1) - S(0)}{S(0)}. \quad (2.2)$$

Usant la linealitat de l'esperança matemàtica, la qual es tracta a continuació, es pot demostrar que

$$E[X] = \frac{E[S(1)] - S(0)}{S(0)}. \quad (2.3)$$

Observació 2.5. És senzill veure que, usant la definició 2.4 i aquesta última equació (2.3), es poden obtenir els valors present i futur de l'actiu donat el valor del rendiment.

Observació 2.6. El requisit que $S(1)$ no sigui negatiu, comentat anteriorment, implica que $X \geq -1$. Resultat coherent tenint en compte que un inversor pot perdre, com màxim, la quantitat invertida.

Es pot definir doncs del valor final esperat d'una variable aleatòria i la variància d'aquesta, els quals seran relacionats directament amb el rendiment.

Definició 2.7. *Sigui X una variable aleatòria definida en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, l'esperança matemàtica d'aquesta es defineix com:*

$$E[X] = \int_{\Omega} X(w) \cdot dP(w), \quad (2.4)$$

sempre que

$$\int_{\Omega} |X(w)| \cdot dP(w) < \infty. \quad (2.5)$$

A continuació, es presenten un seguit de propietats de l'esperança que convé tenir presents i que seran útils en alguns punts del treball.

Proposició 2.8. *Sigui X i Y dues variables aleatòries, definides en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, amb esperança finita i $\alpha \in \mathbb{R}$ es té:*

- (i) $E[\alpha] = \alpha$
- (ii) Si $X \leq Y$, llavors $E[X] \leq E[Y]$.
- (iii) $E[\alpha X] = \alpha \cdot E[X]$.
- (iv) $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$.

Demostració.

Les demostracions que no es dedueixen directament de la definició 2.7 poden trobar-se en [1] i [2].

Definició 2.9. *Sigui X una variable aleatòria amb esperança $E[X]$, la variància d'aquesta es defineix com:*

$$V(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2. \quad (2.6)$$

Es descriuen ara un tipus d'operacions que seran necessàries per a poder tractar de forma correcta les mesures de risc i definir algunes de les seves propietats. Aquestes són les mesures lliures de risc, operacions on en cas que succeeixi un escenari negatiu la inversió inicial realitzada no es veu afectada i és recuperada. És a dir, passi el que passi, es recuperarà, com a mínim, la inversió inicial. Quan es parla d'aquestes operacions, es parla d'afegir capital sense risc o de quantitats segures a la cartera.

Per acabar amb la introducció es presenten dues distribucions de probabilitat per a variables aleatòries contínues, la distribució normal i la distribució *t-Student*, les quals seran necessàries per a la part final del treball.

Definició 2.10. S'anomena distribució normal d'una variable aleatòria X a la distribució definida per la següent funció de densitat:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V(X)}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2V(X)}}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad (2.7)$$

on μ fa referència al valor esperat.

Definició 2.11. S'anomena distribució t -Student d'una variable aleatòria X amb v graus de llibertat a la distribució que té per funció de densitat:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{v\pi} \cdot \Gamma(\frac{v}{2})} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad (2.8)$$

on Γ fa referència a la funció gamma.

Observació 2.12. Pot provar-se que per al cas $v = \infty$, la distribució t -Student coincideix amb la distribució normal.

3 Mesures de risc financer

En aquest apartat es tracta el problema de quantificar el risc d'una operació financera o conjunt d'operacions financeres, anomenat cartera, denotant les propietats necessàries per a poder definir els diferents tipus de mesures de risc, així com la seva validesa. Les mesures de risc permeten obtenir informació decisiva a l'hora de dur a terme o no una operació financera.

3.1 Mesures coherents de risc

Al llarg d'aquest apartat es formulen diferents propietats per a les mesures de risc que acabaran establint-se com a principis axiomàtics i que permetran definir diverses famílies de mesures de risc.

Es comença donant una definició general per a les mesures de risc a partir dels diferents conceptes explicats en la introducció.

Definició 3.1. Donat un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, sigui una variable aleatòria X fent referència al rendiment d'una operació financera, que pertany a un subespai lineal de variables aleatòries definides sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i que s'anomenarà $\mathcal{G}$. Es defineix mesura de risc com una funció

$$\rho : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}$$

que satisfà les següents condicions per tot $X, Y \in \mathcal{G}$:

- (i) *Monotonia:* Siguin $X \leq Y$, llavors $\rho(X) \geq \rho(Y)$.
- (ii) *Invariància per translacions:* Siguin $M \in \mathcal{G}$ una operació amb un rendiment assegurat $m \in \mathbb{R}$, llavors $\rho(X + M) = \rho(X) - m$.

La primera condició fa referència al fet que si el rendiment d'una operació és superior al d'una altra per a qualsevol escenari d' Ω , llavors el risc d'aquesta serà menor. La segona implica que l'addició d'una quantitat segura de capital redueix el risc en la mateixa quantitat. Concretament, l'operació M consisteix a afegir una quantitat de capital m a l'operació X . En particular, si $m = \rho(X)$, llavors $\rho(X + M) = \rho(X) - \rho(X) = 0$. D'ara endavant, per fer referència a una operació M amb rendiment assegurat m es cometrà l'abús de notació $M = m$ i, per aquest motiu, la condició (ii) de la definició 3.1 es podrà reescriure com $\rho(X + m) = \rho(X) - m$.

Observació 3.2. Descriure el risc per un únic número implica una gran pèrdua d'informació. No obstant això, la decisió real sobre assumir un risc o permetre'l és fonamentalment binària, del tipus 'sí o no'.

Proposició 3.3. Una mesura de risc ρ qualsevol és Lipschitz, amb constant $L = 1$, respecte la norma del suprem $\|\cdot\|$:

$$|\rho(X) - \rho(Y)| \leq 1 \cdot \|X - Y\|. \quad (3.1)$$

Demostració.

Evidentment, $X \leq Y + \|X - Y\|$. Aplicant-hi ara les condicions (i) i (ii) de la definició 3.1 es té $\rho(X) \geq \rho(Y) - \|X - Y\|$. A partir d'aquesta expressió i de la simètrica es dedueix la desigualtat (3.1).

□

A partir de la definició 3.1 han sorgit diferents principis a partir dels quals definir famílies de mesures de risc. D'entre tots ells en destaquen dos: el principi de coherència i el principi de convexitat. En aquest treball es tracta principalment el primer d'ells, donat que és el més complet i que permetrà estudiar l'evolució de diverses mesures de risc. Tot i això, es creu necessari parlar de les mesures de risc definides usant el principi de convexitat per a poder establir la seva relació amb les mesures coherents.

Definició 3.4. Una mesura de risc ρ es diu que és coherent si satisfà les següents condicions per tot $X, Y \in \mathcal{G}$:

(i) *Homogeneïtat positiva:* Sigui $\alpha \geq 0$, llavors $\rho(\alpha X) = \alpha \cdot \rho(X)$.

(ii) *Subadditivitat:* $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.

La subadditivitat fa referència al fet que la diversificació és beneficiosa, no ha d'augmentar el risc, és a dir, el risc global de dues o més operacions juntes en un carter no pot ser superior a la suma dels riscos individuals de cadascuna de les operacions. D'altra banda, l'homogeneïtat positiva implica que el risc d'una posició és proporcional a la seva mida.

Observació 3.5. De la definició 3.4 es pot comprovar que $\rho(0) = 0$. Es dirà que la mesura de risc està normalitzada. Per tant, tota mesura de risc positivament homogènea està normalitzada.

L'homogeneïtat positiva no sempre se satisfà, en certes situacions el risc no creix de forma lineal respecte la mida de l'operació i, per tant, no és raonable imposar-ho. És per aquest motiu que les condicions de mesura de risc coherent es poden relaxar en certes ocasions donant lloc a les mesures de risc convexes.

Definició 3.6. Una mesura de risc ρ es diu que és convexa si per tot $X, Y \in \mathcal{G}$ satisfà:

Convexitat: $\rho(\alpha X + (1 - \alpha)Y) \leq \alpha \cdot \rho(X) + (1 - \alpha) \cdot \rho(Y)$, per a tot $0 \leq \alpha \leq 1$.

A continuació, es mostren dues propietats de les mesures convexes.

Proposició 3.7. Sigui ρ una mesura de risc convexa i normalitzada en $\mathcal{G}$, llavors:

(i) $\rho(\alpha X) \leq \alpha \cdot \rho(X)$ per $0 \leq \alpha \leq 1$;

(ii) $\rho(\alpha X) \geq \alpha \cdot \rho(X)$ per $\alpha \geq 1$.

Demostració.

La primera de les dues propietats, (i), es dedueix de forma directa de la convexitat. Sigui $\alpha \in [0, 1]$:

$$\rho(\alpha X) = \rho(\alpha X + (1 - \alpha) \cdot 0) \leq \alpha \cdot \rho(X) + (1 - \alpha) \cdot \rho(0) = \alpha \cdot \rho(X). \quad (3.2)$$

Per la segona de les propietats, (ii), es suposa $\beta \in [0, 1]$. Partint de

$$\rho(X) = \rho(\beta \cdot \frac{1}{\beta} \cdot X) \quad (3.3)$$

i procedint com en la demostració de (i), s'arriba a

$$\rho(X) \leq \beta \cdot \rho(\frac{1}{\beta} \cdot X). \quad (3.4)$$

Definint ara $\alpha := \frac{1}{\beta}$, $\alpha \in [0, 1]$ es té el que es busca.

□

És senzill veure ara la relació entre aquestes dues famílies de mesures.

Proposició 3.8. *Tota mesura de risc coherent és també convexa.*

Demostració.

És directe usant les condicions de la definició 3.4.

□

3.2 Conjunts d'acceptació

El conjunt de rendiments que es poden obtenir d'una operació o cartera són els elements que s'han de considerar a l'hora d'acceptar o rebutjar un risc. Les mesures de risc són una eina que permet descriure com de prop o de lluny es troba una operació de ser considerada acceptable.

Definició 3.9. *Es diu que una operació o conjunt d'operacions X és acceptable per una mesura de risc ρ si $\rho(X) \leq 0$.*

Aquesta definició permet parlar d'un conjunt d'operacions que són acceptables per una mesura de risc concreta. Aquest conjunt serà anomenat *Conjunt d'acceptació* de la mesura en qüestió i vindrà definit per la següent expressió:

$$\mathcal{A}_\rho := \{X \in \mathcal{G} : \rho(X) \leq 0\}. \quad (3.5)$$

A continuació, es presenten dues proposicions que permetran establir una relació entre les mesures de risc i els seus conjunts d'acceptació.

Proposició 3.10. *Si ρ és una mesura de risc amb conjunt d'acceptació $\mathcal{A}$, on $\mathcal{A} := \mathcal{A}_\rho$. Llavors:*

(i) *$\mathcal{A}$ és no buit, tancat en $\mathcal{G}$ respecte la norma del suprem i satisfà les dues condicions següents:*

$$\inf\{m \in \mathbb{R} : m \in \mathcal{A}\} > -\infty ; \quad (3.6)$$

$$X \in \mathcal{A}, Y \in \mathcal{G}, Y \geq X \implies Y \in \mathcal{A}. \quad (3.7)$$

(ii) *Es pot obtenir ρ coneixent $\mathcal{A}$. Concretament:*

$$\rho(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} : m + X \in \mathcal{A}\}. \quad (3.8)$$

(iii) Si una mesura de risc ρ és convexa, $\mathcal{A}$ és convex.

Demostració.

(i) Les propietats (3.6) i (3.7) són directes usant les definicions de conjunt d'acceptació i de mesura de risc, 3.1. El fet que $\mathcal{A}$ sigui tancat es dedueix de la proposició 3.3.

(ii) Usant la condició d'invariància per translacions, per $X \in \mathcal{G}$ es té

$$\begin{aligned} \inf\{m \in \mathbb{R} : m + X \in \mathcal{A}\} &= \inf\{m \in \mathbb{R} : \rho(m + X) \leq 0\} \\ &= \inf\{m \in \mathbb{R} : \rho(X) \leq m\} \\ &= \rho(X). \end{aligned} \quad (3.9)$$

(iii) És dedueix de forma directe de la definició 3.6. □

Si es pren ara un conjunt d'acceptació $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$, per una posició X es pot definir el capital requerit per tal que una posició esdevingui acceptable com la mínima quantitat m tal que $\rho(m + X) \leq 0$. Es denotarà per $\rho_{\mathcal{A}}(X)$:

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) := \inf\{m \in \mathbb{R} : m + X \in \mathcal{A}\}. \quad (3.10)$$

Cal notar que, usant aquesta notació i a partint de l'expressió (3.8), per una mesura de risc ρ amb conjunt d'acceptació $\mathcal{A}_{\rho}$,

$$\rho_{\mathcal{A}_{\rho}} = \rho. \quad (3.11)$$

Observació 3.11. Es pot interpretar el valor $\rho(X)$ que assigna una mesura de risc ρ a una operació X com la quantitat mínima de capital que s'ha d'afegir per tal que l'operació esdevingui acceptable.

Proposició 3.12. *Sigui $\mathcal{A}$ un subconjunt no buit de $\mathcal{G}$ que satisfà les propietats (3.6) i (3.7). Llavors $\rho_{\mathcal{A}}$ satisfà les següents propietats:*

(i) $\rho_{\mathcal{A}}$ és una mesura de risc.

(ii) Si $\mathcal{A}$ és un conjunt convex, llavors $\rho_{\mathcal{A}}$ és una mesura de risc convexa.

Demostració.

(i) Cal veure que $\rho_{\mathcal{A}}$ satisfà les condicions de la definició 3.1. La monotonicitat és directe usant (3.10) i suposant dues operacions $X, Y \in \mathcal{G}$ tal que $X \leq Y$. Per demostrar la invariància per translacions, se suposa $m' \in \mathbb{R}$ tal que

$$\rho(X + m') = \inf\{m'' \in \mathbb{R} : m'' + X + m' \in \mathcal{A}\}. \quad (3.12)$$

Definint $m := m' + m''$ s'obté:

$$\inf\{m \in \mathbb{R} : m + X \in \mathcal{A}\} = \rho(X). \quad (3.13)$$

Per tant, usant la relació definida, es pot comprovar que $\rho(X + m') = \rho(X) - m'$.

Falta veure que $\rho_{\mathcal{A}}$ només pren valors finits. Es fixa un $Y \in \mathcal{A}$, i per a un $X \in \mathcal{G}$ donat, existeix un nombre m finit tal que $m + X > Y$, ja que X i Y són acotats. Llavors

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) - m = \rho_{\mathcal{A}}(m + X) \leq \rho_{\mathcal{A}}(Y) \leq 0, \quad (3.14)$$

d'on es dedueix $\rho_{\mathcal{A}}(X) \leq m < \infty$. Per veure que donat un $X \in \mathcal{G}$, $\rho_{\mathcal{A}}(X) > -\infty$, es pren un m tal que $X + m \leq 0$ i, usant la monotonia i la invariància per translacions, es té $\rho_{\mathcal{A}}(X) \geq \rho_{\mathcal{A}}(0) + m$, on usant (3.6) s'obté $\rho_{\mathcal{A}}(0) > -\infty$ i, per tant,

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) \geq \rho_{\mathcal{A}}(0) + m > -\infty. \quad (3.15)$$

Queda vist doncs que $\rho_{\mathcal{A}}$ és una mesura de risc.

(ii) Se suposen $X_1, X_2 \in \mathcal{G}$ i $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ tal que $m_1 + X_1, m_2 + X_2 \in \mathcal{A}$. Per $\lambda \in [0, 1]$, la convexitat del conjunt $\mathcal{A}$ implica $\lambda \cdot (m_1 + X_1) + (1 - \lambda) \cdot (m_2 + X_2) \in \mathcal{A}$. Usant ara la invariància per translacions de $\rho_{\mathcal{A}}$, ja que s'ha vist que és una mesura de risc, es té,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \rho_{\mathcal{A}}(\lambda \cdot (m_1 + X_1) + (1 - \lambda) \cdot (m_2 + X_2)) \\ &= \rho_{\mathcal{A}}(\lambda \cdot X_1 + (1 - \lambda) \cdot X_2) - (\lambda \cdot m_1 + (1 - \lambda) \cdot m_2), \end{aligned} \quad (3.16)$$

d'on s'obté la convexitat de $\rho_{\mathcal{A}}$.

□

4 Value at Risk

Tal com s'ha comentat en l'apartat anterior, quan es busquen mesures quantitatives del risc d'una operació es busca una mesura general que permeti comparar els riscos de diferents tipus d'operacions. Idealment, un nombre (o conjunt de nombres) que expressi la pèrdua potencial amb un determinat nivell de confiança, fet que permet classificar el risc com a acceptable o no.

En aquest apartat es presenta el *Value at Risk*, abreujat com *VaR*, com a mesura del risc financer. Es tracta la seva construcció i propietats, així com els inconvenients i limitacions que van portar a desenvolupar mesures de risc alternatives.

4.1 Quantils

El càlcul del *VaR* està directament relacionat amb els valors que prengui la variable aleatòria X , el rendiment de l'operació a estudiar. Per posar context, per exemple, un inversor que posseeix un actiu el valor futur del qual és incert pot voler determinar si el seu guany descomptat X en una inversió té almenys una probabilitat p de mantenir-se per sobre d'un determinat nivell. El *VaR* amb probabilitat $(1 - p)$ respon a aquesta pregunta especificant la pèrdua mínima obtinguda en el 100p% dels pitjors escenaris.

Sigui $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espai de probabilitat, es defineix la funció distribució d'aquesta variable aleatòria X com $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, amb $F_X(x) = P(X \leq x)$, que és monòtona creixent i contínua per la dreta. Això permet tractar els quantils de F_X , elements essencials per a poder definir el *VaR*. Aquests són punts de tall que divideixen el rang d'una distribució de probabilitat en intervals continus en funció d'una probabilitat fixada α .

Definició 4.1. *Sigui $\alpha \in (0, 1)$,*

(i) s'anomena α -quantil superior de X al valor

$$q^\alpha(X) = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\} = \sup\{x : P(X < x) \leq \alpha\}. \quad (4.1)$$

(ii) s'anomena α -quantil inferior de X al valor

$$q_\alpha(X) = \inf\{x : \alpha \leq F_X(x)\} = \sup\{x : P(X < x) < \alpha\}. \quad (4.2)$$

(iii) s'anomena α -quantil de X a un valor qualsevol $q \in [q_\alpha(X), q^\alpha(X)]$.

A continuació es presenten algunes propietats bàsiques que permetran comprendre els diferents elements definits.

Proposició 4.2. *Siguin X i Y dues variables aleatòries es té:*

(i) Si $X \leq Y$, llavors $q^\alpha(X) \leq q^\alpha(Y)$.

(ii) Per un real qualsevol a , $q^\alpha(X + a) = q^\alpha(X) + a$.

(iii) Sigui $a \in \mathbb{R}^+$, $q^\alpha(aX) = a \cdot q^\alpha(X)$.

(iv) $q^\alpha(-X) = -q_{(1-\alpha)}(X)$.

Demostració.

(i) Si $X \leq Y$, llavors per a un $x \in \mathbb{R}$ qualsevol,

$$F_X(x) = P(X \leq x) \geq P(Y \leq x) = F_Y(x). \quad (4.3)$$

Per tant, si $\alpha < F_Y(x) \implies \alpha < F_X(x)$, que implica

$$\{x : \alpha < F_Y(x)\} \subset \{x : \alpha < F_X(x)\}, \quad (4.4)$$

i d'on es dedueix

$$q^\alpha(Y) = \inf\{x : \alpha < F_Y(x)\} \geq \inf\{x : \alpha < F_X(x)\} = q^\alpha(X). \quad (4.5)$$

Que és el que es volia veure.

(ii) Es té:

$$\begin{aligned} q^\alpha(X + a) &= \inf\{x + a : \alpha < F_{(X+a)}(x + a)\} \\ &= \inf\{x : \alpha < F_{(X+a)}(x + a)\} + a. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Usant ara que $F_{(X+a)}(x + a) = P(X + a \leq x + a) = P(X \leq x) = F_X(x)$ en l'equació (4.6) s'obté

$$q^\alpha(X + a) = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\} + a = q^\alpha(X) + a, \quad (4.7)$$

que és el que es volia demostrar.

(iii) Per tal de veure el que es demana es procedirà de forma semblant a (ii). En aquest cas $F_{aX}(x) = P(x \geq aX) = P(\frac{x}{a} \geq X) = F_X(\frac{x}{a})$, on cal recordar que $a > 0$. Per tant,

$$q^\alpha(aX) = \inf\{x : \alpha < F_{(aX)}(x)\} = \inf\{x : \alpha < F_X(\frac{x}{a})\}. \quad (4.8)$$

Definint ara $y := \frac{x}{a}$ i aplicant-ho a l'equació anterior,

$$\begin{aligned} q^\alpha(aX) &= \inf\{a \cdot y : \alpha < F_X(y)\} \\ &= a \cdot \inf\{y : \alpha < F_X(y)\} = a \cdot q^\alpha(X). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Que és el que es volia veure.

(iv) Partint de l'enunciat,

$$q^\alpha(-X) = \inf\{x : \alpha < F_{(-X)}(x)\} = -\sup\{-x : \alpha < F_{(-X)}(x)\}. \quad (4.10)$$

Usant ara

$$F_{(-X)}(x) = P(-X \leq x) = 1 - P(-X > x) = 1 - P(X < -x) \quad (4.11)$$

es té, seguint l'equació (4.10) i definint $y := -x$,

$$\begin{aligned} q^\alpha(-X) &= -\sup\{y : \alpha < 1 - P(X < y)\} \\ &= -\sup\{y : P(X < y) < 1 - \alpha\} \\ &= -\inf\{y : 1 - \alpha < P(X < y)\}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Per tal de poder realitzar l'última de les igualtats de l'equació anterior s'ha utilitzat que $P(X < y)$ és una funció no decreixent.

Si es veu ara que

$$\inf\{x : 1 - \alpha \leq P(X \leq x)\} = \inf\{x : 1 - \alpha \leq P(X < x)\} \quad (4.13)$$

es tindrà el que es vol demostrar, donat que, seguint l'equació (4.12),

$$\begin{aligned} q^\alpha(-X) &= -\inf\{y : 1 - \alpha < P(X \leq y)\} \\ &= -\inf\{y : 1 - \alpha < F_X(y)\} = -q_{1-\alpha}(X). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Es veurà (4.13) per un valor $a \in \mathbb{R}$ qualsevol, de forma que, en particular, se satisfaci per $(1 - \alpha)$. Per tant es vol demostrar

$$\inf\{x : a \leq P(X \leq x)\} = \inf\{x : a \leq P(X < x)\}. \quad (4.15)$$

Donat que $P(X < x) \leq P(X \leq x)$, per a un $a \leq P(X < x)$, llavors $a \leq P(X \leq x)$. D'on es pot deduir

$$\{x : a \leq P(X < x)\} \subset \{x : a \leq P(X \leq x)\}. \quad (4.16)$$

Utilitzant ara el mateix raonament que en (i),

$$\inf\{x : a \leq P(X < x)\} \leq \inf\{x : a \leq P(X \leq x)\}. \quad (4.17)$$

Imposant que la desigualtat no sigui estricta s'arriba a una contradicció. Per tal de veure-ho cal suposar un valor y diferent i entre els dos ínfims. Amb això conclou la demostració de propietat (iv) i totes les anteriors.

□

Lema 4.3. *Sigui $F_X(x)$ continua i estrictament creixent, llavors*

$$q^\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha) = q_\alpha(X). \quad (4.18)$$

Demostració.

Sota les condicions donades, $F_X(x)$ és invertible, i aquesta, $F_X^{-1}(\alpha)$, és contínua. A més, $\alpha < F_X(x) \implies F_X^{-1}(\alpha) < x$. Per tant, partint del primer terme de la igualtat (4.18),

$$q^\alpha(X) = \inf\{x : \alpha < F_X(x)\} = \inf\{x : F_X^{-1}(\alpha) < x\}. \quad (4.19)$$

I aquest últim terme correspon a $F_X^{-1}(\alpha)$, fet que conclou la primera part demostració.

La segona igualtat es dedueix del fet que $F_X(\alpha)$ és continua i estrictament creixent i, per tant,

$$q_\alpha(X) = \inf\{x : F_X^{-1}(\alpha) \leq x\}, \quad (4.20)$$

també correspon a $F_X^{-1}(\alpha)$. Amb això conclou la demostració.

□

Proposició 4.4. *Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció continua per la dreta i monòtona creixent i X una variable aleatòria, llavors*

$$q^\alpha(f(X)) = f(q^\alpha(X)). \quad (4.21)$$

Demostració.

Caldrà veure doncs les dues desigualtats. Es comença veient $q^\alpha(f(X)) \leq f(q^\alpha(X))$. Per a fer-ho es considera $F_{f(X)}(f(q^\alpha(X)))$, que per la definició de la funció de distribució és igual a $P(f(X) \leq f(q^\alpha(X)))$. Per les condicions de l'enunciat es pot afirmar

$$P(f(X) \leq f(q^\alpha(X))) \geq P(X \leq q^\alpha(X)) = F_X(q^\alpha(X)) \geq \alpha. \quad (4.22)$$

D'on es pot veure

$$f(q^\alpha(X)) \leq F_{f(X)}^{-1}(\alpha) = q^\alpha(f(X)). \quad (4.23)$$

Per provar ara que $q^\alpha(f(X)) \geq f(q^\alpha(X))$ es comprova que per a un z qualsevol, $z > f(q^\alpha(X))$, es té $y \geq q^\alpha(f(X))$.

Donat que f és una funció continua per la dreta i no decreixent,

$$\{x \leq q^\alpha(X)\} \subset \{x : f(x) \leq f(q^\alpha(X))\} \subset \{x : f(x) < z\}. \quad (4.24)$$

Per a un valor $k \in \mathbb{R}$, $\{x : f(x) < z\} = \{x < k\}$, fet que comporta l'existència de un valor k^* tal que $q^\alpha(X) < k^* < k$. Aleshores,

$$F_{f(X)}(z) = P(f(X) \leq z) \geq P(f(X) < z) = P(X < k) \geq P(X \leq k^*) = F_X(k^*) > \alpha. \quad (4.25)$$

L'última desigualtat és dedueix del fet que $q^\alpha(X) < k^*$. L'equació (4.25) implica que $z \geq q^\alpha(f(X))$, que és el que es volia veure.

□

4.2 VaR

Arran dels col·lapses financers ocorreguts a finals de la dècada dels vuitanta, amb el denominat *Black Monday* l'any 1987, el *Value at Risk* es va convertir en una referència estàndard per mesurar el risc financer.

El *VaR* calcula quant pot perdre un conjunt d'operacions, donades les condicions normals de mercat, en un període de temps determinat. Les empreses i els reguladors del sector financer solen utilitzar el *VaR* per mesurar la quantitat d'actius necessaris per a cobrir possibles pèrdues. Donada una cartera d'operacions, un horitzó temporal i una probabilitat α , el *VaR* es pot definir informalment com la mínima pèrdua possible en aquest període de temps.

Definició 4.5. Fixat un $\alpha \in (0, 1)$, es defineix el *Value at Risk* d'una operació X a un nivell de confiança $(1 - \alpha)$ com:

$$VaR^\alpha(X) := -q^\alpha(X) = -\inf\{x : \alpha < F_X(x)\}. \quad (4.26)$$

Observació 4.6. Si computem ara el *VaR* en funció de l'oposat del rendiment X , les pèrdues $(-X)$, obtenim

$$VaR^\alpha(X) = \inf\{x : P(x < -X) \leq \alpha\} = \inf\{x : P(x + X < 0) \leq \alpha\}. \quad (4.27)$$

Això proporciona una definició alternativa de *VaR*: la menor quantitat de capital que, si s'afegeix a X i s'inverteix en una operació sense risc, manté la probabilitat d'obtenir pèrdues per sota del nivell α .

Proposició 4.7. *Siguin X, Y dues variables aleatòries, representant dues operacions financeres, es té:*

- (i) *Sigui $X \leq Y$, llavors $VaR^\alpha(X) \geq VaR^\alpha(Y)$.*
- (ii) *Per a tot $m \in \mathbb{R}$, llavors $VaR^\alpha(X + m) = VaR^\alpha(X) - m$.*
- (iii) *Sigui $a \geq 0$, llavors $VaR^\alpha(aX) = a \cdot VaR^\alpha(X)$.*

Demostració.

(i) Per la proposició 4.2,

$$X \leq Y \implies q^\alpha(X) \leq q^\alpha(Y) \implies -q^\alpha(X) \geq -q^\alpha(Y). \quad (4.28)$$

Usant ara la definició de VaR es té el que es demana.

(ii) A partir de la proposició 4.2 i la definició 4.5,

$$\begin{aligned} VaR^\alpha(X + m) &= -q^\alpha(X + m) = -(q^\alpha(X) + m) \\ &= -q^\alpha(X) - m = VaR^\alpha(X) - m. \end{aligned} \quad (4.29)$$

(iii) Directe usant la propietat (iii) de la proposició 4.2 i la definició de VaR :

$$VaR^\alpha(aX) = -q^\alpha(aX) = -a \cdot q^\alpha(X) = a \cdot (-q^\alpha(X)) = a \cdot VaR^\alpha(X). \quad (4.30)$$

□

Per tal de comprovar si el VaR és o no una mesura de risc coherent només resta demostrar la subadditivitat, és a dir,

$$VaR^\alpha(X + Y) \leq VaR^\alpha(X) + VaR^\alpha(Y), \quad (4.31)$$

però usant un contraexemple es veu que el VaR no és una mesura de risc convexa i, per tant, usant el corol·lari 3.8, el VaR no és una mesura de risc coherent.

Contraexemple. Es considera un actiu i dues operacions en un període de temps T sobre aquest. La primera operació, A , amb un preu inicial a , i un rendiment de $(1000 - a)$ si el valor de l'actiu en l'instant T , S , és superior a un valor μ i un rendiment de $-a$ en cas contrari. La segona operació, B , amb un preu inicial b , tindrà un rendiment de $(1000 - b)$ si S és inferior a un valor γ , amb $\gamma < \mu$, i rendiment de $-b$ en cas contrari.

Triant μ i γ tal que $P(S < \gamma) = P(S > \mu) = 0.008$, els valors del $VaR^{\alpha=0,01}$ seran $-2 \cdot a$ i $-2 \cdot b$ per les operacions A i B respectivament. D'altra banda, el $VaR^{\alpha=0,01}(A + B)$ serà $(1000 - a - b)$. Conseqüentment, el conjunt d'acceptació no és convex i, per la proposició 3.12, no és una mesura de risc convexa.

Es pot afirmar doncs que el VaR no és una mesura de risc usualment convexa i, per la proposició 3.8, no és una mesura coherent de risc. A continuació, amb la finalitat de comprendre millor aquest fet, es presenta un cas on el VaR no satisfà la subadditivitat.

Exemple. Sigui Ω un conjunt infinit i X_1 i X_2 dues variables aleatòries independents amb funció de distribució

$$F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-\infty, -2) \\ 0.05 & \text{si } x \in [-2, 0) \\ 0.9 & \text{si } x \in [0, 3) \\ 1 & \text{si } x \in [3, \infty) \end{cases} . \quad (4.32)$$

Se suposa que cadascuna d'elles representa un valor de rendiment amb un valor esperat positiu. Computant, en termes de quantils, s'obté $VaR^{\alpha=0.1}(X_1) = VaR^{\alpha=0.1}(X_2) = 0$, d'altra banda, $VaR^{\alpha=0.1}(X_1 + X_2) \neq 0$ i, per tant,

$$VaR^{0.1}(X_1 + X_2) \not\leq VaR^{0.1}(X_1) + VaR^{0.1}(X_2),$$

és a dir, no se satisfà la subadditivitat.

Aquest fet implica que sota el varem del VaR , la diversificació comporta l'aparició d'un risc addicional que no existia quan es consideraven les dues operacions independentment, un fet contradictori a com s'hauria de comportar el risc. Per il·lustrar com s'hauria de comportar, només cal pensar en una gran empresa amb diferents departaments, la subadditivitat garanteix que el risc global de l'empresa és igual o inferior a la suma dels riscos de cada departament de l'empresa. En cas de no ser així, no tindria sentit per a l'empresa expandir-se. De fet, la subadditivitat garanteix el principi de diversificació de la *Modern Portfolio Theory*².

Aquest és un dels dos grans inconvenients del VaR , l'altre, es deu al fet que no proporciona informació sobre l'impacte potencial dels esdeveniments extrems, és a dir, molt poc probables, aquells que tenen una probabilitat succeir per sota de l' α fixat. Això comporta problemes en escenaris com podria ser el d'una pandèmia mundial com l'actual. A continuació s'il·lustra aquest fet amb un exemple simple que permetrà visualitzar la magnitud d'aquest problema.

Exemple. Es considera el rendiment d'una operació X que depenent de l'escenari pot prendre 3 valors diferents: -10 , -5 i 10 . Cadascun d'aquests valors el pren amb les següents probabilitats p :

$$X = \begin{cases} -10 & \text{amb } p = 0.025 \\ -5 & \text{amb } p = 0.025 \\ 10 & \text{amb } p = 0.95 \end{cases} . \quad (4.33)$$

Es pot obtenir doncs la funció de distribució d'aquesta variable aleatòria X :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < -10 \\ 0.025 & \text{si } -10 \leq x < -5 \\ 0.05 & \text{si } -5 \leq x < 10 \\ 1 & \text{si } 10 \leq x < \infty \end{cases} . \quad (4.34)$$

² Teoria de les finances que intenta maximitzar el rendiment esperat de la cartera per a una quantitat donada de risc de cartera, o, equivalentment, minimitzar el risc per a un nivell donat de rendiment esperat, escollint acuradament les proporcions de diversos actius.

Prenent $\alpha = 0.025$ i el $VaR^{0.025}(X) = -q^{0.025}(x) = 5$. Per qualsevol valor $\alpha' < 0.025$, $VaR^{\alpha'} = 10$. Si ara es canvia el valor -10 que pot prendre la variable aleatòria a -1000 , el valor del $VaR^{0.025}$ es manté, és a dir, el VaR és independent del valors dels casos improbables per sota de la probabilitat α fixada, no té en compte els pitjors escenaris.

El VaR té grans avantatges com la seva relativa senzillesa, facilitat d'ús quan es disposa de dades suficients i fàcil interpretació. Però no complir la definició de coherència és necessàriament un problema. En aquesta punt, la coherència no és només un conjunt de ' propietats boniques', és un paradigma completament nou que permet classificar mesures de risc bones i dolentes o fins i tot dir què és una mesura de risc i què no.

És per aquest motiu que els dos problemes comentats el penalitzen fins al punt de poder ser perillós per a la salut financera d'una empresa. S'han buscat, doncs, mesures alternatives per tal de poder determinar el risc financer d'una cartera d'operacions, especialment després de la crisi dels anys 2007/08, on les debilitats del VaR van poder observar-se. Algunes d'aquestes noves mesures estan basades en el propi VaR i tracten de corregir els seus errors, com és el cas de l'*Expected Shortfall*, mesura que ha pres molta importància i que es tractarà en el proper apartat.

5 Expected Shortfall

Després de detectar els principals inconvenients del VaR , es busca una mesura alternativa de risc. A simple vista, el camí més lògic a seguir consisteix a construir una mesura a partir del VaR , de manera que puguin conservar-se els seus avantatges.

En aquest apartat, es vol mostrar com sorgeix una alternativa coherent al VaR com a resposta natural a preguntes senzilles sobre una mostra específica dels pitjors casos d'una distribució. Es construeix aquesta mesura de manera progressiva per a apreciar millor que aquesta no permet molta llibertat i condueix de manera natural a una solució robusta.

5.1 Construcció de l'Expected Shortfall

Sigui $X \in \mathcal{G}$, com anteriorment, una variable aleatòria fent referència al rendiment d'una operació o cartera d'operacions financeres en un instant de temps fixat T i $\alpha \in (0, 1)$ un valor que, expressat en percentatge $100\alpha\%$, representa una mostra dels pitjors casos per a la cartera que es vol analitzar.

Usant els diferents conceptes explicats en l'apartat 4.2, el VaR de la cartera amb els paràmetres T i α ve donat per la pèrdua associada al quantil corresponent $q^\alpha(X)$ de la distribució:

$$VaR^\alpha = -q^\alpha(X). \quad (5.1)$$

Aquesta mesura, tal com s'ha definit en l'apartat anterior, respon a la pregunta

(A). Quina és la mínima pèrdua en els $100\alpha\%$ pitjors casos de la cartera en el període de temps T ?

A causa de l'aparició d'aquest mínim en la definició, el VaR no és una mesura de risc que satisfà la subadditivitat i, consegüentment, no és coherent. A més, donat que és només el llindar de les possibles pèrdues dels $100\alpha\%$ pitjors casos, és indiferent a la gravetat de les pèrdues més enllà d'aquest valor.

Arribats a aquest punt, un es pot plantejar doncs, que la mesura de risc necessària hauria de respondre la següent qüestió:

(B). Quina és la pèrdua esperada en el $100\alpha\%$ pitjors casos de la cartera?

Aquesta és una pregunta més natural que l'anterior a realitzar quan es considera una mostra dels pitjors casos. Sembla lògic pensar que la mesura de risc que dóna resposta a aquesta pregunta sigui definida per un valor esperat condicional per sota del llindar fixat pel quantil. Es defineix a continuació aquesta mesura.

Definició 5.1. Es defineix el Tail Conditional Expectation (TCE) de X , com:

$$TCE^\alpha(X) = -E[X \mid X \leq q^\alpha(X)] = -E[X \mid X \leq -VaR^\alpha(X)]. \quad (5.2)$$

A continuació es prova que compleix les propietats per a ser mesura de risc.

Proposició 5.2. *El TCE és una mesura de risc.*

Demostració.

Per veure-ho cal comprovar les dues propietats necessàries per ser mesura de risc, la monotonia (i) i la invariància per translacions (ii). Per tal de demostrar-les s'usarà la proposició 4.2, on es tracten diverses propietats dels quantils.

(i) Donades dues operacions X i Y tal que $X \leq Y$, $q^\alpha(X) \leq q^\alpha(Y)$. D'on es dedueix

$$E[X \mid X \leq q^\alpha(X)] \leq E[Y \mid Y \leq q^\alpha(Y)]. \quad (5.3)$$

Multiplicant ara per (-1) a banda i banda s'obté el que es vol demostrar:

$$TCE^\alpha(X) \geq TCE^\alpha(Y). \quad (5.4)$$

(ii) Es considera ara una operació X i un valor qualsevol $m \in \mathbb{R}$, per la definició de TCE^α i les propietats dels quantils:

$$\begin{aligned} TCE^\alpha(X + m) &= -E[X + m \mid X + m \leq q^\alpha(X + m)] \\ &= -E[X + m \mid X + m \leq q^\alpha(X) + m] \\ &= -E[X + m \mid X \leq q^\alpha(X)]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Utilitzant ara la linealitat de l'esperança es té $TCE^\alpha(X + m) = TCE^\alpha(X) - m$, que és el que es volia veure. □

Cal veure ara si és una mesura de risc coherent. Primer, en la proposició 5.3, es comprovarà que és una mesura homogèniament positiva i, a continuació, mitjançant un contraexemple es veurà que no satisfà la subadditivitat.

Proposició 5.3. *El TCE és una mesura de risc homogèniament positiva, és a dir, sigui $a \in \mathbb{R}^+$, llavors*

$$TCE^\alpha(aX) = a \cdot TCE^\alpha(X). \quad (5.6)$$

Demostració.

Signi $a \in \mathbb{R}^+$, la demostració es dedueix aplicant les següents propietats dels quantils (5.7) i de la esperança matemàtica (5.8) a la definició de $TCE^\alpha(aX)$:

$$q^\alpha(aX) = a \cdot q^\alpha(X); \quad (5.7)$$

$$E(aX) = a \cdot E(X). \quad (5.8)$$

□

Contraexemple. Signi $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ amb $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = 0.03$ i $P(\{\omega_3\}) = 0.94$, $\alpha = 0.05$ i $X, Y \in \mathcal{G}$ dues variables aleatòries indicant el rendiment de dues operacions en els escenaris anteriors de la següent manera:

$$X(\omega) = \begin{cases} -100 & \text{si } \omega = \omega_1 \\ 0 & \text{si } \omega = \omega_2 \\ 0 & \text{si } \omega = \omega_3 \end{cases}; \quad (5.9)$$

$$Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega = \omega_1 \\ -100 & \text{si } \omega = \omega_2 \\ 0 & \text{si } \omega = \omega_3 \end{cases} . \quad (5.10)$$

Es té $q^{0.05}(X) = \inf\{x : F_X(x) > 0.05\} = 0$. Es pot calcular ara el valor de la mesura de risc:

$$\begin{aligned} TCE^{0.05}(X) &= -E[X \mid X \leq q^{0.05}(X)] = -E[X \mid X \leq 0] \\ &= -E[X \mid X \in \Omega] = -E(X) = 3. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Repetint els càlculs per l'operació Y es té $TCE^{0.05}(Y) = 3$.

Si es defineix ara $Z := X + Y$, es té

$$q^{0.05}(Z) = \inf\{x : F_Z(x) > 0.05\} = -100, \quad (5.12)$$

I, consegüentment

$$\begin{aligned} TCE^\alpha(Z) &= -E[Z \mid Z \leq q^{0.05}(Z)] = -E[Z \mid Z \leq -100] \\ &= -E[Z \mid Z \in \{\omega_1, \omega_2\}] = 100. \end{aligned} \quad (5.13)$$

És evident doncs que

$$TCE^\alpha(X + Y) \geq TCE^\alpha(X) + TCE^\alpha(Y). \quad (5.14)$$

De l'exemple es dedueix que el TCE comparteix un dels defectes de VaR , no satisfà la subadditivitat i, consegüentment, no és una mesura de risc coherent. Aquest fet, fa replantejar-se la resposta a la pregunta (B).

Per tal de poder veure quina mesura de risc està realment darrere de la qüestió (B), es considera una gran quantitat de possibles escenaris, $n \in \mathbb{N}$, per a l'operació X , és a dir, $\Omega = \{\omega_i\}_{1 \leq i \leq n}$. Aquests comportaran diferents rendiments per a X . Per fer referència a cadascun d'aquests possibles rendiments usarem la notació $X(\omega_i) := x_i$ on $\omega_i \in \Omega$. S'obté el següent conjunt de rendiments $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$. Ordenant-lo de forma creixent i calculant la mitjana dels primers $\alpha\%$ valors, sembla que es tindria la resposta a la pregunta.

Per tal de fer-ho, es defineix l'ordre $x_{1:n} \leq \dots \leq x_{n:n}$ com els valors ordenats de la n -tupla $(x_1, \dots, x_n)$ i s'aproxima el nombre d'elements en la $100\alpha\%$ part de la mostra mitjançant la part sencera de $n \cdot \alpha$, que definirem com $w := \max\{m : m \leq n \cdot \alpha, m \in \mathbb{N}\}$, una elecció que, per a n gran, podria canviar-se amb qualsevol altre arrodoniment d'enters o truncament pròxim a $n \cdot \alpha$. Per tant, el conjunt dels $100\alpha\%$ pitjors casos està representat pels escenaris $\{x_{1:n}, \dots, x_{w:n}\}$.

Es pot definir doncs la següent igualtat per al α -quantil superior:

$$q_n^\alpha(X) = x_{w:n}. \quad (5.15)$$

L'estimador natural per a la pèrdua esperada de X_i en el pitjor $100\alpha\%$ dels casos és expressat per

$$ES_n^\alpha(X) = -\frac{1}{w} \sum_{i=1}^w x_{i:n} \quad (5.16)$$

el qual s'anomenarà el 100 $\alpha\%$ *Expected Shortfall* de la mostra. A partir dels continguts descrits, es pot reformular l'expressió (5.2) com la mitjana de tots els $c_i \leq q^\alpha(X) = x_{w:n}$, és a dir,

$$TCE_n^\alpha = -\frac{\sum_{i=1}^n X_i \cdot \mathbb{1}_{x_i \leq x_{w:n}}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{x_i \leq x_{w:n}}}, \quad (5.17)$$

que, en general, és la mitjana de més dels $\alpha\%$ pitjors casos de la mostra³. Per exemple, quan en el cas d'una distribució discreta existeixen diferents escenaris tal que $x_i = x_{w:n}$.

Es pot veure ara que ES_n^α és subadditiva per qualsevol n fixat. Es consideren dues variables aleatòries X i Y i un nombre n d'escenaris, de manera que per a cadascun d'ells s'obté la parella de rendiments $\{(x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq n}$. Calculant el ES_n^α de $X + Y$,

$$\begin{aligned} ES_n^\alpha(X + Y) &= -\frac{1}{w} \sum_{i=1}^w (x + y)_{i:n} \leq -\frac{1}{w} \sum_{i=1}^w (x_{i:n} + y_{i:n}) \\ &= -\frac{1}{w} \left(\sum_{i=1}^w x_{i:n} + \sum_{i=1}^w y_{i:n} \right) = ES_n^\alpha(X) + ES_n^\alpha(Y). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Observació 5.4. La comprovació realitzada en l'equació (5.18) no se satisfà per al cas del TCE_n^α .

Es pot ara expandir la definició de 100 $\alpha\%$ *Expected Shortfall*:

$$\begin{aligned} ES_n^\alpha &= -\frac{1}{w} \sum_{i=1}^w x_{i:n} = -\frac{1}{w} \sum_{i=1}^n x_{i:n} \cdot \mathbb{1}_{i \leq w} \\ &= -\frac{1}{w} \left(\sum_{i=1}^n x_{i:n} \cdot \mathbb{1}_{x_{i:n} \leq x_{w:n}} - \sum_{i=1}^n x_{i:n} (\mathbb{1}_{x_{i:n} \leq x_{w:n}} - \mathbb{1}_{i:w}) \right) \\ &= -\frac{1}{w} \left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot \mathbb{1}_{x_i \leq x_{w:n}} - x_{w:n} \cdot \sum_{i=1}^n (\mathbb{1}_{x_{i:n} \leq x_{w:n}} - \mathbb{1}_{i:w}) \right) \\ &= -\frac{n}{w} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot \mathbb{1}_{x_i \leq x_{w:n}} - x_{w:n} \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{x_{i:n} \leq x_{w:n}} - \frac{w}{n} \right) \right). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Calculant el límit en $n \rightarrow \infty$ de l'expressió (5.19) es té

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ES_n^\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} (E(X \cdot \mathbb{1}_{X \leq q^\alpha(X)}) - q^\alpha(X) \cdot (P(X \leq q^\alpha(X)) - \alpha)). \quad (5.20)$$

Es pot donar ara la següent definició,

Definició 5.5. Sigui $X \in \mathcal{G}$ una variable aleatòria fent referència al rendiment d'una operació financera en un instant de temps T i $\alpha \in (0, 1)$ un nivell de probabilitat. L'*Expected Shortfall* de la operació ve definit per la següent expressió:

$$ES^\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} (E(X \cdot \mathbb{1}_{X \leq q^\alpha(X)}) - q^\alpha(X) \cdot (P(X \leq q^\alpha(X)) - \alpha)). \quad (5.21)$$

L'equació (5.21) pot semblar, a simple vista, complicada. No obstant això, el concepte que expressa és senzill, ja que és la traducció matemàtica literal de la pregunta (B) anterior

³ La funció $\mathbb{1}_{\{Relació\}}$ és la funció indicador. Pren valor 1 si se satisfà la relació i valor 0 en cas contrari.

i el límit per a n gran de (5.16). És fàcil adonar-se que la mesura de risc TCE^α , malgrat que la seva formulació matemàtica és més senzilla, està relacionada amb una pregunta diferent de la plantejada en (B).

Per tal de comprendre millor (5.21), es pot interpretar el terme $q^\alpha(X) \cdot (P(X \leq q^\alpha(X)) - \alpha)$ com el terme restant que ha de ser eliminat del valor esperat $E(X \cdot \mathbb{1}_{X \leq q^\alpha(X)})$ quan $\{X \leq q^\alpha(X)\}$ té una probabilitat superior a α .

Observació 5.6. Quan $P(X \leq q^\alpha(X)) = \alpha$, fet que succeeix sempre que la distribució de probabilitat és contínua, es pot comprovar que

$$ES^\alpha(X) = TCE^\alpha(X). \quad (5.22)$$

Per tal de poder observar la simplicitat del ES^α , es planteja a continuació una definició equivalent on es s'observa la seva relació directa amb el paràmetre α i la funció de distribució F_X .

Proposició 5.7. *Si X una variable aleatòria representant el rendiment d'una operació financera en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i $\alpha \in (0, 1)$, llavors*

$$ES^\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha q^\mu(X) d\mu. \quad (5.23)$$

Demostració.

Per tal de demostrar la proposició es parteix de l'expressió (5.23) i s'arriba, mitjançant equivalències, a la definició d'*Expected Shortfall* donada més amunt:

$$-\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha q^\mu(X) d\mu = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha (q^\mu(X) - q^\alpha(X)) d\mu - q^\alpha(X). \quad (5.24)$$

Es defineix ara x^- com la part negativa de x , és a dir, $x^- := -\min\{x, 0\}$. Utilitzant això i que per a $\beta \leq \alpha$, llavors $q^\beta(X) \leq q^\alpha(X)$, el segon terme de l'equació (5.24) és igual a

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\alpha} \int_0^1 -(q^\mu(X) - q^\alpha(X))^- d\mu - q^\alpha(X) \\ &= -\frac{1}{\alpha} \int_0^1 -q^\mu(X - q^\alpha(X))^- d\mu - q^\alpha(X), \end{aligned} \quad (5.25)$$

on la igualtat es dedueix de la proposició 4.2. Es nota que el límit superior d'integració s'ha estès d' α a 1, donat que per valors de $\mu \geq \alpha$ es té $q^\mu(X) \geq q^\alpha(X)$ i, conseqüentment, $(q^\mu(X) - q^\alpha(X))^- = 0$.

Usant ara la proposició 4.4 per a una funció $f(x) = -x^-$ que és monòtona creixent es té que per a una variable aleatòria Z qualsevol i un valor $\mu \in (0, 1)$,

$$q^\mu(-Z^-) = q^\mu(f(Z)) = f(q^\mu(Z)) = -q^\mu(Z)^-. \quad (5.26)$$

Aplicant (5.26) a l'última expressió de l'equació (5.25), es té

$$-\frac{1}{\alpha} \int_0^1 q^\mu(-(X - q^\alpha(X))^-) d\mu - q^\alpha(X). \quad (5.27)$$

Usant ara que donada una variable aleatòria T uniformement distribuïda en l'interval $(0, 1)$, la variable Y definida com $Y(x) := q^{T(x)}(X)$ té la mateixa distribució que X , deducció que pot trobar-se en les pàgines 154-155 de [3] (*Lemma 8.4*), es té

$$\int_0^1 Y d\mu = \int_0^1 q^\mu(X) d\mu = E(Y) = E(X). \quad (5.28)$$

Aplicant (5.28) a l'expressió (5.27) es té

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\alpha} E(-(X - q^\alpha(X))^-) - q^\alpha(X) \\ &= -\frac{1}{\alpha} \int_{\{X \leq q^\alpha(X)\}} (X - q^\alpha(X)) dP - q^\alpha(X) \\ &= -\frac{1}{\alpha} \left(\int_{\{X \leq q^\alpha(X)\}} X dP - \int_{\{X \leq q^\alpha(X)\}} q^\alpha(X) dP \right) - q^\alpha(X) \\ &= -\frac{1}{\alpha} (E(X \cdot \mathbb{1}_{\{X \leq q^\alpha(X)\}}) - q^\alpha(X) \cdot (P(X \leq q^\alpha(X)) - \alpha)) = ES^\alpha(X). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Queda vista doncs la igualtat (5.23), que és el que es volia demostrar. $\square$

Aquesta és la formulació més coneguda de l'*Expected Shortfall*. És senzill ara, comparar aquesta mesura de risc amb el VaR i el TCE definits anteriorment.

Per tal de fer-ho amb la primera:

$$ES^\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha q^\beta(X) d\beta \geq -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha q^\alpha(X) d\beta = -q^\alpha(X) = VaR^\alpha(X), \quad (5.30)$$

on s'ha utilitzat que $\beta \leq \alpha$ implica $q^\beta(X) \leq q^\alpha(X)$.

Per tal de comparar l' ES amb el TCE es partirà de l'equació (5.21), multiplicant i dividint aquesta per $P(X \leq q^\alpha(X))$ es tindrà

$$ES^\alpha = TCE^\alpha + (\lambda - 1) \cdot (TCE^\alpha - VaR^\alpha) \quad (5.31)$$

on $\lambda = \frac{P(X \leq q^\alpha(X))}{\alpha} \geq 1$. Aquest fet, sumat a que, tal com s'ha mostrat anteriorment el TCE es defineix com

$$TCE^\alpha(X) = -E[X \mid X \leq -VaR^\alpha(X)], \quad (5.32)$$

es té $TCE^\alpha \geq VaR^\alpha$, que posa en evidència que $ES^\alpha \leq TCE^\alpha$.

Es comprova ara que, efectivament, l' ES^α és una mesura de risc i satisfà les propietats comentades en els apartats anteriors.

Proposició 5.8. *Siguin X i Y dues variables aleatòries fent referència al rendiment de dues operacions financeres, tal que $X \leq Y$ i $m \in \mathbb{R}$, es té:*

$$(i) \quad ES^\alpha(X) \geq ES^\alpha(Y).$$

$$(ii) \quad ES^\alpha(X + m) = ES^\alpha(X) - m.$$

$$(iii) \quad \text{Siguei } a \geq 0, \text{ llavors } ES^\alpha(aX) = a \cdot ES^\alpha(X).$$

(iv) $ES(X + Y) \leq E(X) + E(Y)$.

Demostració.

Per tal de realitzar les demostracions es partirà de la definició de ES^α mencionada en la proposició 5.7 i s'usaran les propietats dels quantils comentades en la proposició 4.2.

(i) Utilitzant que per $X \leq Y$, $q^\alpha(X) \leq q^\alpha(Y)$,

$$ES^\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha q^\mu(X) d\mu \geq -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha q^\mu(Y) d\mu = ES^\alpha(Y). \quad (5.33)$$

(ii)

$$\begin{aligned} ES^\alpha(X + m) &= -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha q^\mu(X + m) d\mu = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha (q^\mu(X) + m) d\mu \\ &= -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha q^\mu(X) d\mu - m = ES^\alpha(X) - m. \end{aligned} \quad (5.34)$$

(iii)

$$ES^\alpha(aX) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha q^\mu(aX) d\mu = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha a \cdot q^\mu(X) d\mu = a \cdot ES^\alpha(X). \quad (5.35)$$

(iv) Ampliant ara la demostració de la subadditivitat vista en l'equació (5.18) per a $n \rightarrow \infty$ es té que l' ES és una mesura de risc subadditiva.

□

Queda vist, amb la proposició anterior, que l' ES és una mesura coherent de risc.

S'ha construït una mesura risc coherent derivada del VaR en la qual queden solucionats els dos problemes principals d'aquest. S'ha vist que l' ES satisfà la subadditivitat i, donat que es defineix com la integral de tots els valors $\mu \in [0, \alpha]$, té en compte tots els escenaris per sota de la probabilitat fixada. A més, conserva els avantatges del VaR : és un concepte simple que permet una avaluació global única per a la cartera.

6 Creació d'un programa per al càlcul del VaR i l' ES

Amb la finalitat de comprendre la teoria descrita en els apartats anteriors, es proposa la creació d'un programa informàtic que usant dades reals permeti comprovar el comportament de les diferents mesures.

Això permetrà observar l'ús del VaR i de l' ES en situacions que s'acosten molt a la realitat i al dia a dia de les empreses, així com entendre la seva interpretació.

6.1 Plantejament pràctic

Les mesures a calcular seran el VaR i l' ES , fet que permetrà evidenciar en situacions reals els déficits de la primera d'elles i la millora de la segona.

El càlcul es realitzarà seguint dos mètodes utilitzats per les entitats i es durà a terme mitjançant un programa usant el llenguatge de programació *Python*.

El primer dels dos mètodes s'anomena mètode històric i correspon a fer un recull dels valors de la cartera els últims n dies i assumir que la cartera es comportarà de la mateixa manera, des de la perspectiva de risc, durant els propers n dies. Com més gran sigui el valor de n , més conservador serà el valor obtingut, donat que es tindran en compte més escenaris. També pot interessar agafar un període concret del temps per poder pronosticar el risc en una època amb escenaris molt dolents fora de la tendència habitual.

De l'apartat 4.2 es té que la definició de VaR a un nivell de confiança $1 - \alpha$ és:

$$VaR^\alpha(X) := -q^\alpha(X) = -\inf\{x : \alpha < F_X(x)\}. \quad (6.1)$$

Per la definició de α -quantil superior, el valor del VaR correspondrà al valor del millor rendiment del $100\alpha\%$ pitjors casos, és a dir, al valor superior de l'interval que conté el $100\alpha\%$ pitjors rendiments. Per exemple, si es fixa $n = 100$, el valor corresponen al VaR a un nivell de confiança del 95% serà el valor del cinquè pitjor dia.

Recuperant ara l'expressió descrita per l'*Expected Shortfall* en l'apartat 5.1 es té:

$$ES^\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha q^\mu(X) d\mu, \quad (6.2)$$

on, relacionant les equacions (6.1) i (6.2), es pot obtenir una nova definició de l' ES ,

$$ES^\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR^\mu(X) d\mu. \quad (6.3)$$

Aquesta última definició permet deduir que el valor de l' ES , usant el mètode històric, serà el corresponen a realitzar la mitja dels valors que es troben en aquest conjunt dels $100\alpha\%$ pitjors casos. És a dir, reprenent l'exemple anterior, l' ES al 95% serà el valor resultant de realitzar la mitja dels rendiments dels 5 pitjors dies.

Un dels avantatges del mètode històric és la senzillesa del seu càlcul. A més, és fàcil d'explicar als no professionals del risc. Un dels principals desavantatges és que pot ser molt lent a l'hora de reaccionar als canvis de mercat. A més, per tal de poder aplicarlo de forma correcta caldrà que les dades recollides siguin independents i idènticament distribuïdes, d'ara endavant *iid*. Les dades temporals no tenen per què ser-ho, caldrà buscar doncs algun mètode per poder comprovar-ho. El test escollit ha estat el test de

Ljung-Box, el qual permet comprovar si l'autocorrelació entre les dades és *iid*. Es defineix a continuació:

Test de Ljung-Box: És un test d'hipòtesis definit de la següent manera:

- H_0 : Les dades es distribueixen de forma independent.
- H_1 : Les dades no es distribueixen de forma independent.

I el següent estadístic:

$$Q = n(n+2) \sum_{k=1}^h \frac{r_k^2}{n-k}, \quad (6.4)$$

on n correspon a la mida de la mostra, r_k a l'autocorrelació de retard k i h és el nombre de retards que s'estan testejant, usualment és de l'ordre de $\ln(n)$. S'haurà de calcular el p -valor i el resultat permetrà acceptar o rebutjar la hipòtesi nul·la. De manera que imposant un nivell de confiança del 95%, si s'obté un p -valor > 0.05 es podrà acceptar la hipòtesi nul·la i, per tant, podrà aplicar-se el mètode. En cas que p -valor < 0.05 no podrà garantir-se que se satisfaci la hipòtesi nul·la i, per tant, no es podrà suposar que les variables siguin *iid*.

El segon dels mètodes s'anomena mètode paramètric. En aquest s'assumeix que els rendiments futurs s'ajustaran a una distribució de probabilitat i es calcula el valor de la mesura de risc en un nivell de confiança determinat. Durant molt de temps la distribució més utilitzada ha estat la distribució normal. Tot i això, l'evidència empírica mostra que els rendiments financers d'actius no acostumen a seguir una distribució normal, sinó que si ajusta millor una distribució *t-Student*. Això es deu al fet que la distribució mencionada té més pes a les cues, tal com pot evidenciar-se en la Figura 1. Per tal de poder definir aquestes distribucions i donar-les un nivell, s'utilitzen els valors de l'esperança i la desviació estàndard de la cartera en un període passat.

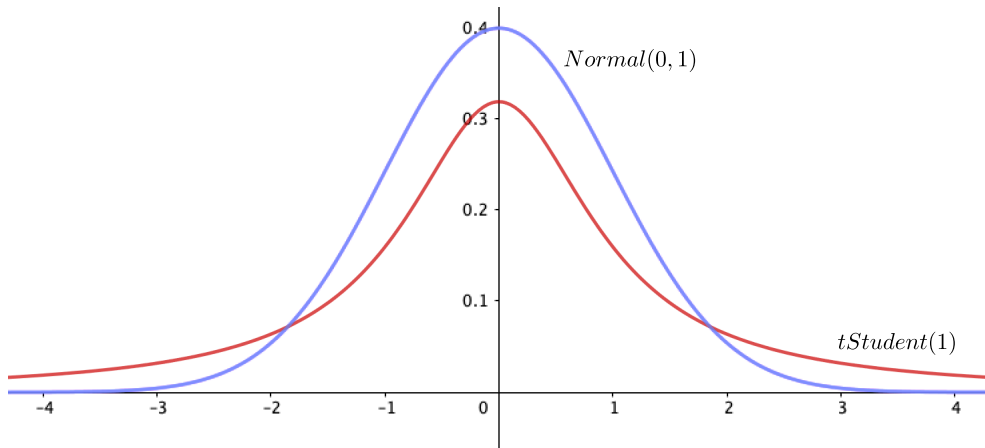


Figura 1: Comparació de les distribucions Normal(0,1) i *t-Student*(1).

Aquest mètode permet calcular el *VaR* d'una manera senzilla: obtenint el α -quantil superior de la distribució. Per al cas de l'*ES* caldrà aplicar l'expressió (6.3).

En aquest mètode és necessari també que les dades temporals reals recollides, que tal i com s'ha comentat són utilitzades per definir l'esperança i la desviació típica de la distribució que s'assumeix que seguiran els valors futurs, siguin *iid*.

Un cop explicades les diferents metodologies que s'utilitzaran per a calcular les diferents mesures de risc, es poden plantejar les situacions a tractar.

Es considera una cartera formada pels següents cinc actius:

- Apple (AAPL);
- Facebook (FB);
- Alphabet Inc. - Google (GOOG);
- Tesla (TSLA);
- Microsoft (MSFT);

on cadascun d'aquests té un pes concret dins de la cartera⁴

$$Pes = \{0.25, 0.10, 0.20, 0.10, 0.35\}, \quad (6.5)$$

respectivament. I els períodes temporals escollits per a l'anàlisi seran dos:

- (i) Un període de 6 anys. De 01/05/2015 a 01/05/2021.
- (ii) Un període de 3 anys previ a la pandèmia de la Covid-19. De 01/03/2017 a 01/03/2020.

El primer d'ells permetrà observar el comportament de les mesures de risc amb totes les dades completes incloent tots aquells escenaris que han succeït en els últims temps i, per tant, aquelles que s'acostaran més a la realitat. D'altra banda, el segon període ens permetrà veure com el *VaR* no té en compte els pitjors escenaris i, conseqüentment, no va poder anticipar-se a un fet extraordinari com ha estat la pandèmia.

6.2 Creació del codi

En aquest apartat s'aplica el plantejament comentat en l'apartat anterior en la creació d'un codi que permeti obtenir els diferents resultats i extreure'n conclusions. El procés detallat i l'explicació dels aspectes més tècnics del codi es mostrarà de forma general i, quan sigui necessari, com per exemple en la creació de la cartera; per a un dels períodes temporals. La totalitat del codi es troba en els Annexos. Els resultats del *VaR* i de l'*ES* sí que es mostraran i comentaran per a tots els casos en el següent apartat.

Tal com s'ha mencionat, el llenguatge utilitzat per a la creació del programa ha estat *Python*. El motiu principal per a l'elecció d'aquest envers altres ha estat l'existència de certes llibreries que permetien, d'una forma còmoda, recollir les dades necessàries per a la creació de la cartera. S'explica primer la part del codi corresponent a la creació de la cartera, donat que és comuna per als diferents mètodes.

Recollida de dades i creació de la cartera

Es comença descrivint les diferents llibreries utilitzades per aquesta part del codi. Les mostrades a continuació permeten llegir les dades necessàries de la pàgina web *Yahoo Finance*, portal on existeix un recull històric dels valors diaris de les empreses en borsa,

⁴Els pesos per als actius definits s'han generat de forma aleatòria mitjançant la web `random.org`.

```
import pandas as pd
from pandas_datareader import data as pdr
import yfinance as yf.
```

Aquestes, combinades amb la llibreria

```
import datetime as dt,
```

permetran seleccionar els períodes temporals comentats anteriorment. Finalment, caldrà importar la llibreria que permet tractar i definir vectors, així com realitzar operacions matemàtiques

```
import numpy as np.
```

Un cop importades totes les llibreries necessàries, es poden definir els vectors referits als actius triats i al pes d'aquests. El primer d'ells permetrà buscar-los en el portal *Yahoo Finance* i recollir la informació. Donat que en la web els actius es troben ordenats segons els símbols borsaris, el vector haurà de crear-se com

```
actius = ['AAPL', 'FB', 'GOOGL', 'TSLA', 'MSFT'];
pesos = [0.25, 0.10, 0.20, 0.10, 0.35].
```

Poden recollir-se ara les dades usant les llibreries comentades, definint les dates, en format AAAA-MM-DD, i usant la comanda

```
data_ini = "2015-05-01"
data_fi = "2021-05-01"
dades_actius_1 = pdr.get_data_yahoo(actius, start=data_ini, end=data_fi)
dades_actius_1 = dades_actius_1['Close'].
```

Les dades agafades corresponen als valors d'obertura, tancament, màxim i mínim diaris dels actius en el mercat. Cal tenir en compte que els mercats només estan oberts entre setmana, es per això que no es prenen dades per als caps de setmana. D'entre tots els valors informats, cal indicar-li que només es volen els valors amb els quals tanca el dia cada actiu, els quals es troben en una columna encapçalada pel text *'Close'*. La taula resultant per al cas del primer dels dos períodes serà el que es mostra en la Figura 2.

Es poden definir a continuació els valors diaris de la cartera, realitzant el producte de la matriu mostrada amb els valors dels diferents actius pel vector que conté el pes de cadascun dels actius com

```
cartera = dades_actius_1@pes.
```

Amb aquests valors de la cartera es poden obtenir els rendiments diaris, en aquest cas, definits com la variació en percentatge respecte al dia anterior. Usant la comanda

```
rendiments = cartera.pct_change()
rendiments = rendiments.dropna(),
```

Symbols	AAPL	FB	GOOGL	TSLA	MSFT
Date					
2015-05-01	32.237499	78.989998	551.159973	45.206001	48.660000
2015-05-04	32.174999	78.809998	552.840027	46.102001	48.240002
2015-05-05	31.450001	77.559998	543.039978	46.590000	47.599998
2015-05-06	31.252501	78.099998	535.080017	46.085999	46.279999
2015-05-07	31.315001	78.430000	542.039978	47.360001	46.700001
...	...	...	...	...	...
2021-04-26	134.720001	303.040009	2309.929932	738.200012	261.549988
2021-04-27	134.389999	303.570007	2290.979980	704.739990	261.970001
2021-04-28	133.580002	307.100006	2359.040039	694.400024	254.559998
2021-04-29	133.479996	329.510010	2392.760010	677.000000	252.509995
2021-04-30	131.460007	325.079987	2353.500000	709.440002	252.179993

Figura 2: Taula amb els valors diaris dels actius que formen la cartera.

```

Date
2015-05-04    0.003166
2015-05-05   -0.013629
2015-05-06   -0.009325
2015-05-07    0.012118
2015-05-08    0.009007
...
2021-04-26    0.007318
2021-04-27   -0.019780
2021-04-28    0.006602
2021-04-29    0.007901
2021-04-30    0.006811
Length: 1510, dtype: float64

```

Figura 3: Rendiments de la cartera obtinguts per al primer període temporal.

on la segona línia elimina la primera de les observacions, donat que no es pot calcular aquesta variació i per tant, el valor que s'obté és *missing* i cal desfer-se d'ell.

El vector final amb els rendiments diaris de la cartera, per al primer dels períodes temporals, serà el mostrat a la Figura 3 i tindrà 1510 observacions.

Un cop s'ha realitzat el tractament de les dades es poden començar a realitzar els càlculs utilitzant els diferents mètodes.

Mètode Històric

Abans de calcular les mesures de risc usant aquest mètode caldrà comprovar, tal com s'ha comentat en l'apartat 6.1, si les dades són *iid*. Per fer-ho s'utilitzarà la llibreria

```
from statsmodels.stats.diagnostic import acorr_ljungbox.
```

Aquesta incorporà una funció que permet calcular el *p-valor* del test de Ljung-Box. El procés a seguir és el següent

```
lb_test = acorr_ljungbox(rendiments, lags = int(np.log(len(rendiments))))
```

```
print('Els p-valors són: ', lb_test[1]),
```

on la funció `len()` indica la longitud del vector que es tracta. Els *p-valors* obtinguts per al primer dels períodes han estat

```
[2.6454931e-04 5.0931601e-04 1.6239862e-03 3.4224075e-03
4.7731307e-03 1.0164083e-04 1.9600139e-07 2.0830923e-09].
```

Tots ells per sota del llindar fixat per a un nivell de confiança del 95%, per tant, cal rebutjar la hipòtesi nul·la i, conseqüentment, no té sentit aplicar-los el mètode per tal de calcular les mesures de risc. Fet ja esperable, donat que la realitat de les últimes dècades diu que el que va ocórrer ahir influeix en el que ocorre avui i en el que ocorrerà demà. No existirien tendències, ni mitjanes, ni expectatives sobre preus que van augmentant o disminuint, ni anàlisi possible de no ser així.

En un intent de poder aplicar el mètode i comparar els resultats, s'ha decidit espaiar l'interval de selecció de les dades: en lloc d'agafar-les diàriament, s'han agafat setmanalment. Per tal de fer-ho, s'ha partit de les dades diàries dels actius ja calculades i s'ha agafat una de cada cinc observacions. La primera dada agafada ha estat la del primer divendres informat (01/05/2015). El codi emprat per a fer-ho ha estat

```
aux_1 = dades_actius_1.copy()
aux_2 = aux_1.iloc[[i for i in range(0, len(aux_1),5)]]
cartera_week = aux_2@pesos
rendiments_week = cartera_week.pct_change().
```

Procedint com anteriorment s'han calculat els *p-valors* de les dades obtingudes,

```
[0.4429155 0.5404511 0.6973595 0.8278290 0.7191235].
```

Donat que tots es troben per sobre de 0.05 es pot acceptar la hipòtesi nul·la i suposar que els rendiments setmanals són *iid*. Es representen aquests rendiments en un histograma, en la Figura 4.

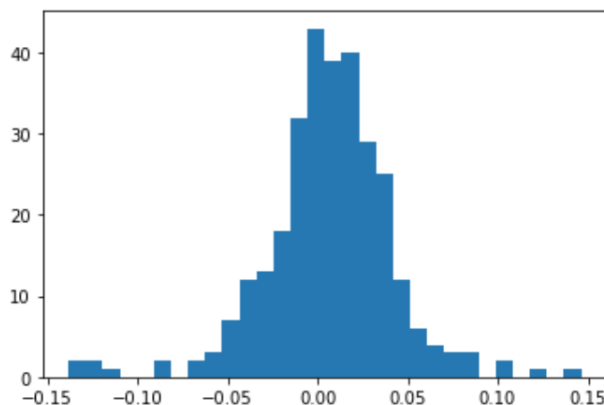


Figura 4: Histograma dels rendiments setmanals per al primer període temporal.

Ara, es poden calcular el *VaR* i l'*ES*. Per al cas del *VaR*, tal com s'ha comentat anteriorment, només caldrà buscar el valor del millor rendiment del α -quantil superior i

canviar-lo de signe. Per tant, buscant el valor superior de l'interval que conté els $100\alpha\%$ pitjors rendiments ja es tindria el que es busca. Es crea una funció que rep com a inputs els rendiments i el nivell de confiança i calcula el *VaR*:

```
def VaR_Historic (rendiments, alpha = 0.05):  
    return (-np.percentile(rendiments, alpha*100)).
```

És necessari comentar que en la funció definida per al *VaR*, i en les següents, es fixa $\alpha = 0.05$, tal que, per defecte, si no s'indica en declarar la funció; es calcularà la mesura de risc al 95% de confiança. Els nivells de confiança més usats per les entitats a l'hora de mesurar el risc són 95% i 99%.

Per al cas de l'*ES*, caldrà calcular la mitja de tots els rendiments que es troben per sota del valor del *VaR*:

```
def ES_Historic (rendiments, alpha = 0.05):  
    VaR = VaR_historic(rendiments, alpha)  
    return (-rendiments[rendiments <= -VaR].mean()).
```

S'han obtingut doncs les dues mesures de risc que es buscaven mitjançant aquest mètode. S'explica, a continuació, com obtenir-les mitjançant el segon dels mètodes, el paramètric.

Mètode Paramètric

Per al càlcul de les mesures de risc mitjançant aquest mètode caldrà importar les llibreries

```
from scipy.stats import norm  
from scipy.stats import t,
```

aquestes permeten tractar les diferents distribucions que s'estudien, normal i *t-Student*.

Caldrà calcular la mitja i la desviació dels retorns, per tal de poder construir la distribució ajustada als valors diaris obtinguts. Per tant, un cop obtinguts els valors dels rendiments,

```
mean_rend = rendiments.mean()  
std_rend = rendiments.std().
```

Es poden construir ara les funcions que permetran obtenir les mesures de risc per a les dues distribucions. En ambdós casos es parteix de les distribucions centrades en el 0 i, en el cas de la normal, amb desviació típica 1 i després s'ajusten als valors de la mitja i la desviació calculats.

Es tracta primer el cas de la normal. Per al cas del *VaR* només caldrà obtenir el valor que deixa a la seva dreta el $100\alpha\%$ dels escenaris, o, donat que la distribució és simètrica, el valor que deixa la seva esquerra el $100(1-\alpha)\%$ dels rendiments i que ja serà positiu. Per simplificar els càlculs posteriors i homogeneïtzar el tractament que es realitzarà donades les funcions disponibles en *Python* es calcularà el valor positiu. La funció que el calcula rep com a inputs α i els valors de la mitja i la desviació típica:

```
def VaR_normal (mean_rend, std_rend, alpha = 0.05):
    return (norm.ppf(1-alpha)*std_rend - mean_rend).
```

Per al cas de l'*ES* cal seguir la formulació plantejada en (6.3). Des del punt de vista de la programació aquesta equació es traduirà en la següent expressió per la distribució normal:

$$ES^\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \cdot \varphi(\Phi^{-1}(\alpha)) \cdot \sigma - \mu, \quad (6.6)$$

on φ fa referència a la funció de densitat de probabilitat, Φ a la funció de distribució, σ a la desviació estàndard i μ a l'esperança de la mostra. Es pot construir ara doncs, la funció que retornarà l'*ES* per al cas de la distribució normal:

```
def ES_normal (mean_rend, std_rend, alpha = 0.05):
    ES = (1/alpha)*norm.pdf(norm.ppf(alpha))*std_rend - mean_rend
    return ES.
```

Per al cas de la distribució *t-Student*, el càlcul del *VaR* és similar al de la distribució normal, cal obtenir el valor que deixa a la seva dreta el $100\alpha\%$ dels casos, però seguint amb el raonament anterior, donat que la distribució *t-Student* és simètrica es buscarà el valor que deixa a la seva esquerra el $100(1 - \alpha)\%$ dels rendiments. Per tant, usant les funcions disponibles en la llibreria comentada anteriorment es té:

```
def VaR_tStudent (mean_rend, std_rend, alpha = 0.05, dof = 3):
    VaR = np.sqrt((dof-2)/dof)*t.ppf(1-alpha, dof)*std_rend - mean_rend
    return VaR.
```

Dof fa referència als graus de llibertat de la distribució, *degrees of freedom* en anglès. En cas de no indicar-se en implementar la funció, es fixarà en 3, donat que és el valor a partir del qual es pot tractar la variància de la distribució d'una manera simple i, també, donades les possibilitats de la llibreria importada, no comportarà un increment en la dificultat del codi. Aquest valor influirà en l'amplitud de les cues de la distribució, sent el cas $dof = 3$ el més extrem dels considerats, per al qual s'obtindrà el valor més gran del *VaR*. Les entitats trien aquest valor en funció de com de conservadores volen ser o de la manera que millor s'ajusti a la realitat. Cal recordar que, tal com s'ha vist en la introducció, com més gran sigui el valor de *dof* més s'aproparà la distribució *t-Student* a una distribució normal, concretament per a valors de *dof* superiors a 30 són pràcticament indistingibles. Fet que pot observar-se en la Figura 5, on s'ha representat la distribució *t-Student* per a diferents valors del *dof* i la distribució normal centrada en el 0 i amb desviació estàndard igual a 1.

Per tal d'obtenir l'*ES* caldrà seguir el procediment realitzat per a la distribució normal i, a partir de les funcions disponibles en la llibreria importada, calcular la funció equivalent a l'expressió 6.3, la qual es traduirà en la següent expressió:

$$ES^\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{(\gamma - 2 + (\Phi^{-1}(\alpha, \gamma))^2)}{1 - \gamma} \cdot \varphi(\Phi^{-1}(\alpha, \gamma)) \cdot \sigma - \mu, \quad (6.7)$$

on γ correspon als *dof*, φ a la funció de densitat de probabilitat de la distribució *t-Student*, Φ a la funció de distribució, σ a la desviació estàndard i μ a l'esperança de la mostra. Es pot obtenir ara la versió en *Python* d'aquesta expressió, que permetrà calcular l'*ES*:

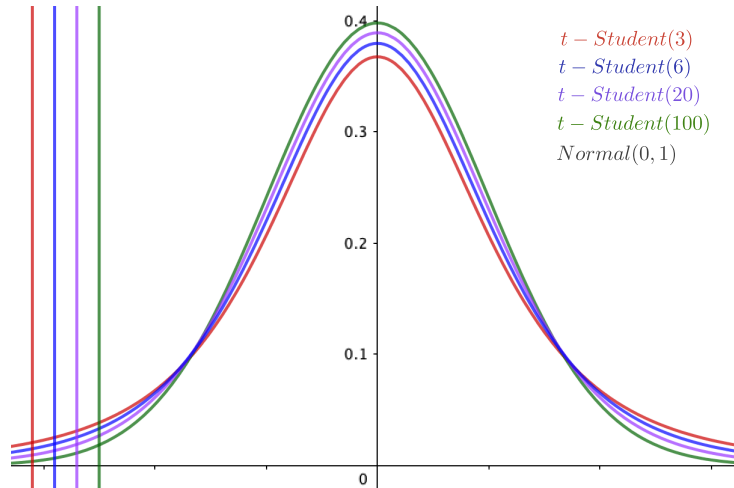


Figura 5: Representació de la *t-Student* per a diferents valors de *dof* i de la *Normal(0,1)*. Es mostra també un valor aproximat del *-VaR* per a cadascuna de les distribucions, en el mateix color que la distribució a la qual estan associats. La normal i el valor del *-VaR* associat a aquesta són indistingibles donat que queden just per sota de les representacions de la *t-Student* de *dof*=100.

```
def ES_tStudent (mean_rend, std_rend, alpha = 0.05, dof = 3):
    phi = t.ppf(alpha, dof)
    A = (dof - 2 + phi**2)/(1-dof)
    ES = -(1/alpha)*A*t.pdf(phi, dof)*std_rend - mean_rend.
```

Es poden ara aplicar les diferents funcions definides per als períodes temporals comentats i obtenir els valors de les mesures de risc.

6.3 Resultats

En aquest apartat s'apliquen els codis mostrats i s'obtenen els diferents valors per a les mesures de risc, tot comparant i analitzant els resultats.

Es comença pels resultats obtinguts usant el mètode històric. Tal com s'ha vist en l'apartat anterior, per al primer període temporal (01/05/2015 - 01/05/2021) les dades diàries no són *iid* i per tant cal prendre valors setmanals. És per aquest motiu que els resultats del *VaR* i *ES* correspondran a la mínima pèrdua possible en una setmana a un nivell de confiança del $100(1 - \alpha)\%$. En cas que els valors fossin diaris correspondrien a la mínima pèrdua diària en un nivell de confiança del $100(1 - \alpha)\%$.

Els resultats obtinguts han estat doncs:

```
VaR Històric al 95%: 4.62 %
ES Històric al 95% : 8.10 %
```

Es pot observar com l'*ES* dobla, pràcticament, el valor del *VaR*, fet que deixa evident la millora estudiada i com l'*ES* té en compte aquells escenaris més improbables o puntuals. En el cas concret del període que s'està contemplant, l'*ES* està tenint en compte tots els valors de l'època de la Covid, els quals l'influencien fent créixer el valor. D'altra banda, el *VaR* només pren el valor d'un dia concret i, únicament en cas de tenir molts dies amb

baixades fortes que representin més d'un 5% de tots els valors recollits, serà capaç de captar la gravetat de la situació i tenir-les en compte per al risc futur. Aquest és el fet que hauria de succeir si es puja el nivell de confiança fins al 99%, donat que el període Covid, on es van produir les baixades de mercat més fortes, representa un període superior al 1% de les dades recollides. És per aquest motiu que els valors obtinguts han estat:

VaR Històric al 99%: 12.15 %

ES Històric al 99% : 12.90 %

Tal com és d'esperar, aquests valors s'assemblen molt més que en el cas anterior i es deu al fet comentat. Tot i que, lògicament, es manté un valor superior de l'*ES*.

S'estudien ara els resultats per al segon període (01/05/2015 - 01/05/2021). Cal comprovar primer si les dades diàries són *iid*. Els *p-valors* obtinguts han estat

[0.5297785 0.1992761 0.1676196 0.2781577 0.1040649 0.1179258].

Per tant, en aquest cas, es pot suposar que els valors diaris són *iid* i té sentit calcular-hi el *VaR* i l'*ES*. Per aquest període s'espera obtenir uns valors de les mesures de risc més petits, donat que el fet de no incloure l'època de la Covid el penalitzarà a l'hora de tenir en compte esdeveniments improbables. Els resultats han estat:

VaR Històric al 95%: 2.41 %

ES Històric al 95% : 3.61 %

Cal tenir en compte que aquests valors representen les pèrdues mínimes diàries i no setmanals com en el cas anterior. Per tal de poder comparar-los es tornen a calcular el *VaR* i l'*ES* per a aquest període temporal, però agafant dades setmanals. El procediment seguit ha estat el mateix que el descrit en l'apartat anterior per al primer dels períodes temporals. S'ha comprovat també, mitjançant el test de Ljung-Box que les dades fossin *iid*, obtenint *p-valors* > 0.05. Els valors de les mesures de risc per a les dades resultants han estat:

VaR Històric al 95%: 4.82 %

ES Històric al 95% : 5.81 %

VaR Històric al 99%: 6.42 %

ES Històric al 99% : 7.88 %

Tal com era d'esperar, per al 95% de nivell de confiança els valors de les dues mesures de risc són molt semblants, perquè aquestes no incorporen cap època realment dolenta, on els mercats sofrissin grans decrements durant un període llarg de temps. Per al cas del 99% les possibles pèrdues són més elevades, però tot i això no s'apropen als valors obtinguts considerant el primer període. Per exemple, el valor de l'*ES* al 99% per al segon període temporal és inferior al valor de l'*ES* al 95% per al primer.

Aquesta comparació també permet observar la mancança del *VaR* que s'ha comentat al llarg del treball tenint en compte els esdeveniments improbables i com, arran la crisi de 2008, una situació econòmicament semblant a la soferta en el període de la Covid, va sorgir la necessitat de reinventar-se i buscar una nova mesura de risc on s'haguessin solucionat els defectes del *VaR*.

Es tracten ara els resultats usant el mètode paramètric. S'obtindran primer aquells vinculats al primer període, és a dir, aquells que usen la mitja i la desviació del primer espai temporal per donar un nivell als valors. Això permetrà comparar les mesures de risc usant les diferents distribucions. Cal remarcar que, com en el cas anterior, si les dades que s'utilitzen corresponen als valors setmanals s'obtindran els resultats setmanals per al *VaR* i l'*ES*. En cas d'usar els valors diaris, s'obtindran els resultats diaris. És per aquest motiu que, donat que es requereix que les dades siguin *iid*, per als dos períodes temporals es mostraran els setmanals, fet que permetrà també comparar-los. En tots els casos, es fixaran els graus de llibertat de la distribució *t-Student* en 3, per tal d'obtenir el valor més diferenciat de la distribució normal. Tot i això, és important recordar que les entitats fixen aquest valor en funció dels estudis a realitzar i els tipus d'anàlisis a estimar.

Poden mostrar-se ara els valors setmanals per al primer període temporal:

```

VaR Normal al 95% : 5.25 %
ES Normal al 95%  : 6.74 %
VaR tStudent al 95%: 4.22 %
ES tStudent al 95% : 9.98 %

```

Contràriament al que un podria pensar, en el cas del *VaR* surt un valor superior per al cas de la distribució normal. Això es deu al fet que per al 5%-quantil superior la corba de la normal ja es troba per sobre de la corba de la *t-Student*. Si es comproven ara els resultats per al 99% de nivell de confiança, s'hauria d'obtenir el cas contrari, pel fet que la *t-Student* té més pes a les cues. Lògicament:

```

VaR Normal al 99% : 7.69 %
VaR tStudent al 99%: 8.74 %

```

Pot observar-se com per l'*ES* en el cas de la *t-Student* es capta un millor nivell, aquest fet queda encara més destacat en el cas del 99% de confiança, on la diferència entre els valors de les dues distribucions s'incrementa dràsticament:

```

ES Normal al 99% : 8.90 %
ES tStudent al 99%: 22.31 %

```

Queda plausible la importància de captar i tenir en compte aquells esdeveniments que, tot i representar un 1% de la mostra, poden ser d'elevada transcendència a l'hora de quantificar el risc d'una operació o cartera d'operacions.

Per al cas del segon període temporal succeeix un cas similar a l'anterior, però seguint amb la línia dels resultats obtinguts, es troben per sota a causa del nivell atorgat per les dades donat que aquestes no inclouen el període de la Covid. Com a exemple on quedi visible aquest fet, es mostren els valors de l'*ES* setmanal per a les dues distribucions al 99% de confiança:

```

ES Normal al 99% : 6.77 %
ES tStudent al 99%: 16.89 %

```

S'observa el que s'ha comentat abans i és visible la baixada de nivell justificada. Per a la resta de valors se segueix la mateixa dinàmica.

Amb la finalitat de poder comparar ara els dos mètodes es mostren els resultats setmanals per al segon període temporal mitjançant tots els mètodes i distribucions estudiats:

VaR Històric al 95%: 4.82 %
VaR Normal al 95% : 4.01 %
VaR tStudent al 95%: 3.23 %

ES Històric al 95% : 5.81 %
ES Normal al 95% : 5.14 %
ES tStudent al 95% : 7.58 %

Pot observar-se com els resultats per a la distribució normal, en aquest cas, corresponen a una versió relaxada dels resultats usant el mètode històric. Per al cas de la *t-Student* s'obtenen valors elevats tot i estar considerant el segon període temporal. En el cas de l'*ES* imposant un nivell de confiança del 99% s'eleva fins a aproximadament el 17%, un valor superior fins i tot a l'obtingut en el primer període usant el mètode històric (12.90%). Aquest fet permet observar l'estimació extremista realitzada per part de la distribució *t-Student* que s'ha comentat anteriorment.

7 Conclusions

En un món on saber el que pot arribar a passar demà és, pràcticament, impossible, poder mesurar el risc de la forma més acurada és gairebé una demanda per part de les autoritats i reguladors financers de les diferents empreses. En aquest treball, s'ha procurat, des d'un vessant formal i matemàtic, realitzar una introducció a aquest món i tractar de crear una idea global, partint des dels coneixements més bàsics, que permeti comprendre quins i per què són els requeriments necessaris per a poder mesurar el risc, en aquest cas de caràcter financer.

Per tal d'assolir-ho s'han definit els diferents objectius, en l'apartat 1.3, que han permès, d'una manera ordenada, enllaçar coneixements i anar donant resposta a preguntes que podien anar sorgint. Aquests objectius pot observar-se com s'han anat satisfent al llarg del treball.

S'ha començat realitzant una definició de mesures de risc, posant especial èmfasi en una família d'aquestes, les mesures de risc coherents, les propietats que les envolten i la seva importància. Definint també els conjunts d'acceptació i relacionant-los amb les mesures de risc mitjançant proposicions que permeten establir connexions en certes propietats.

Un cop adquirits els coneixements més globals sobre les mesures de risc, s'ha començat a tractar, en l'apartat 3, una de les mesures de risc més destacades dels últims temps, el *Value at Risk*. S'han observat les virtuts i els defectes d'aquest, constatant-ho tot amb contraexemples de casos similars a la realitat que han permès comprendre els motius pel qual aquesta mesura, després de ser començada a utilitzar a finals dels anys vuitanta, va requerir una sèrie de millores un cop vist el seu rendiment en la crisi financera de l'any 2007.

A continuació, partint de la qüestió concreta a la qual es vol donar resposta, s'ha construït pas a pas una nova mesura de risc, l'*Expected Shortfall*. Passant primer per una versió empírica i donant després una definició exacta. Aquesta nova mesura dóna solució als diferents problemes tractats. Mitjançant diferents exemples s'ha pogut observar la seva coherència i els principals avantatges que van permetre que s'imposés com a mesura de risc de referència, substituint al *VaR*.

Finalment, com a exemplificació en un cas real i amb la finalitat de comprendre tots els aspectes tractats, s'ha creat un programa informàtic on a partir de dades reals s'han calculat les diferents mesures. S'han emprat diferents mètodes utilitzats per les entitats, podent així comparar-los i extreure'n conclusions. En el mètode històric, el principal desavantatge és que reacciona lentament als canvis en el risc dels actius, a causa del fet que, tal com s'ha vist, fins que els valors associats a, per exemple, períodes dolents, no representen un 1% dels rendiments de la cartera, el *VaR* no els té en compte i tenen poca influència en el càlcul de l'*ES*. A més, quan només es té en compte un període de temps estable, com el segon dels considerats, aquest mètode no s'anticipa a situacions extraordinàries que puguin sorgir, com ha estat el cas de la Covid. Per contra, és un mètode senzill de calcular un cop entès el funcionament de les mesures de risc. En el mètode paramètric, on s'han utilitzat les distribucions normal i *t-Student*, el principal inconvenient és el fet de realitzar una estimació de la distribució, és a dir, assumir que el futur, en termes de risc, es comportarà d'una manera i que ho acabi fent d'una altra. Això comporta dificultats en l'elecció del model per part de les entitats.

Quant a les mesures considerades, el *VaR* i l'*ES*, s'ha pogut observar la millora en l'estimació introduïda per la segona d'elles, tal com s'havia construït i estudiat. En un

període temporal com el de la Covid ha pogut observar-se com l'*ES* té en compte tots els escenaris que han succeït, evidenciant així la millora en l'estimació realitzada sobre el risc.

Es pot concloure que no hi ha un mètode correcte, ni un més adient que un altre. Les entitats necessiten tenir disponible la quantitat més gran d'informació per poder mesurar el risc i estar preparades per a qualsevol esdevenir. És per això que qualsevol estimació del risc ha de ser considerada. Cal acompanyar aquestes mesures d'estimacions complementàries sobre el comportament del mercat que puguin ajudar, per exemple en el cas del mètode paramètric, a triar aquella distribució que es consideri més adient per a un període futur. Tot i això, pot ser interessant per a les empreses considerar casos extremistes, com l'estudiat per a la *t-Student* de 3 graus de llibertat, que permetin tenir una referència sobre allò que podria arribar a passar i que, tot i ser més improbable, no s'ha de descartar.

Tots aquests avanços en els darrers anys reflecteixen l'interès de la comunitat científica a desenvolupar una teoria fonamental i general sobre les mesures de risc, amb una forta motivació en la seva aplicació. Tot i això, encara queda feina per a seguir investigant millor les qüestions estadístiques, probabilístiques i computacionals que comporta l'ús de l'*ES*. Així també, a mesura que es vagin requerint, es puguin anar implementant les millores adients que permetin evolucionar cada cop cap a una mesura de risc més completa que permeti tenir en compte més aspectes.

Quant a treball futur, seguint en la línia de tot el que s'ha tractat en aquest treball, podria ser interessant la consideració d'un tercer mètode per al càlcul de les mesures de risc emprat per algunes entitats. Aquest és el mètode de la simulació Montecarlo, en el qual es generen una quantitat fixa de futurs aleatoris mitjançant el mètode que porta el mateix nom i, d'una manera similar a la del mètode històric, es calculen les mesures de risc. S'obté així un valor de cadascuna d'elles per a cada futur i es poden tractar de la manera adient en funció dels requeriments o necessitats de les entitats o empreses.

Amb la finalització d'aquest treball i tornant al tema tractat en l'apartat de la Motivació de la temàtica, puc afirmar que gràcies a aquest treball he ampliat, de forma considerable, els meus coneixements sobre aquesta branca, les matemàtiques financeres, augmentant el meu interès per tot el que les envolta i millorant la meua capacitat analítica. És per aquest motiu que no descarto, en un futur no gaire llunyà, continuar en la investigació d'aquesta temàtica, per afany personal i seguint els passos definits anteriorment.

8 Annexos

8.1 Codi emprat per a l'apartat 6

```
import pandas as pd
from pandas_datareader
import data as pdr
import yfinance as yf
import datetime as dt
import numpy as np

### Actius triats per a definir la cartera ###

actius = ['AAPL','FB', 'GOOGL', 'TSLA', 'MSFT']
pesos = [0.2, 0.3, 0.1, 0.3, 0.1]

### Cartera per al primer període temporal ###

data_ini1 = "2015-05-01"
data_fi1 = "2021-05-01"
dades_actius_1 = pdr.get_data_yahoo(actius, start=data_ini1, end=data_fi1)
dades_actius_1 = dades_actius_1["Close"]
print(dades_actius_1)

cartera_1 = dades_actius_1@pesos

rendiments_1 = cartera_1.pct_change()
rendiments_1 = rendiments_1.dropna()
print(rendiments_1)

### Cartera per al segon període temporal ####

data_ini2 = "2017-03-01"
data_fi2 = "2020-03-01"
dades_actius_2 = pdr.get_data_yahoo(actius, start=data_ini2, end=data_fi2)
dades_actius_2 = dades_actius_2["Close"]
print(dades_actius_2)

cartera_2 = dades_actius_2@pesos

rendiments_2 = cartera_2.pct_change()
rendiments_2 = rendiments_2.dropna()
print(rendiments_2)

### Mètode històric ###

from statsmodels.stats.diagnostic import acorr_ljungbox
lb_test = acorr_ljungbox(rendiments_1, lags = int(np.log(len(rendiments_1))))
```

```

print('Els p-valors són: ', lb_test[1])

aux_1 = dades_actius_1.copy()
aux_2 = aux_1.iloc[[i for i in range(0, len(aux_1),5)]]
cartera_week = aux_2@pesos
rendiments_week = cartera_week.pct_change()

rendiments_week = rendiments_week.dropna()
lb_test_week = acorr_ljungbox(rendiments_week,
                              lags = int(np.log(len(rendiments_week))))
print('Els p-valors són: ', lb_test_week[1])

import matplotlib.pyplot as plt
plt.hist(rendiments_week, bins=30)

def VaR_Historic (rendiments, alpha = 0.05):
    return (-np.percentile(rendiments, alpha*100))

def ES_Historic(rendiments, alpha = 0.05):
    VaR = VaR_Historic(rendiments, alpha)
    return (-rendiments[rendiments <= -VaR].mean())

print('Var Històric: ', VaR_Historic(rendiments_week, 0.05)*100)
print('ES Històric: ', ES_Historic(rendiments_week, 0.05)*100)

### Mètode paramètric ###

from scipy.stats import norm
from scipy.stats import t

mean_rend_1 = rendiments_week.mean()
std_rend_1 = rendiments_week.std()

aux_3 = dades_actius_2.copy()
aux_4 = aux_3.iloc[[i for i in range(0, len(aux_3),5)]]
cartera_week_2 = aux_4@pesos
rendiments_week_2 = cartera_week_2.pct_change()

mean_rend_2 = rendiments_week_2.mean()
std_rend_2 = rendiments_week_2.std()

def VaR_normal (mean_rend, std_rend, alpha = 0.05):
    return (norm.ppf(1-alpha)*std_rend - mean_rend)

def ES_normal (mean_rend, std_rend, alpha = 0.05):
    ES = (1/alpha)*norm.pdf(norm.ppf(alpha))*std_rend - mean_rend
    return ES

```

```

def VaR_tStudent (mean_rend, std_rend, alpha = 0.05, dof = 3):
    VaR = np.sqrt((dof-2)/dof)*t.ppf(1-alpha, dof)*std_rend - mean_rend
    return VaR

def ES_tStudent (mean_rend, std_rend, alpha = 0.05, dof = 3):
    phi = t.ppf(alpha, dof)
    A = (dof - 2 + phi**2)/(1-dof)
    ES = -(1/alpha)*A*t.pdf(phi, dof)*std_rend - mean_rend
    return ES

### Resultats per al primer període temporal ###

print('VaR Normal : ', VaR_normal(mean_rend_1, std_rend_1)*100)
print('VaR tStudent: ', VaR_tStudent(mean_rend_1, std_rend_1)*100)
print('ES Normal : ', ES_normal(mean_rend_1, std_rend_1)*100)
print('ES tStudent : ', ES_tStudent(mean_rend_1, std_rend_1)*100)

### Resultats per al segon període temporal ###

print('VaR Normal : ', VaR_normal(mean_rend_2, std_rend_2)*100)
print('VaR tStudent: ', VaR_tStudent(mean_rend_2, std_rend_2)*100)
print('ES Normal : ', ES_normal(mean_rend_2, std_rend_2)*100)
print('ES tStudent : ', ES_tStudent(mean_rend_2, std_rend_2)*100)

```

Referències

- [1] Kopp, E., Malczak, J, Zastawniak, T.: *Probability for Finance*. Cambridge University Press (2014).
- [2] Sanz i Solé, M.: *Probabilitats*. Publicacions UB (1999).
- [3] Kopp, E., Capinski, M., J.: *Portfolio Theory and Risk Management*. Cambridge University Press (2014).
- [4] Fölmer, H., Schied, A.: *Stochastic Finance: An introduction in discrete time*. Walter de Gruyter GmbH (2002).
- [5] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., Heath, D.: *Coherent Measures of Risk*. Mathematical Finance, Vol. 9, Núm. 3, 203–228 (1999).
- [6] Acerbi, C., Tasche, D.: *On the coherence of the Expected Shortfall*. Journal of Banking and Finance, pp. 1487-1503 (2002).
- [7] Acerbi, C., Tasche, D.: *Expected Shortfall: A Natural Coherent Alternative to Value at Risk*. Economic Notes by Banca Monte dei Paschi di Siena SpA, Vol. 31, pp. 379–388 (2002).
- [8] Acerbi, C., Nordio, C., Sirtori, C.: *Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk Management*. arXiv.org (2001).
- [9] Biagini, F., Fouque, J. P., Frittelli, M., Meyer-Brandis, T.: *A Unified Approach to Systemic Risk Measures via Acceptance Sets*. Mathematical Finance, Vol. 29, Núm. 2 (2015).
- [10] Lachowicz, P.: *Python for Quants*. QuantAtRisk eBooks, Vol. 1 (2015).
- [11] Pandas Development Team: <https://pandas.pydata.org/>.
- [12] Aroussi, R.: <https://pypi.org/project/yfinance/>.