Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Càlcul en Anells Locals

Autor: Noelia Sánchez Ruiz

Director: Dr. Carlos D'Andrea
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 24 de gener de 2022

Abstract

Local Rings are rings with a single maximal ideal. This report consists on the study of this type of rings and, following a parallel structure to the one used in the study of Multivariate Polynomial Rings, we arrive at the construction of standard bases.

In order to define standard bases, we will have to study previous theorems and algorithms. Among the most important ones, we can find Mora's algorithm. This algorithm will allow us to divide polynomials in Local Rings.

Finally, we will apply the standard bases using a program called `Singular`.

Resum

Els Anells Locals són anells amb un únic ideal maximal. Aquesta memòria consisteix en l'estudi d'aquest tipus d'anells i, seguint una estructura paral·lela a l'estudi dels Anells de Polinomis en Diverses Variables, arribem a la construcció de les bases estàndards.

Per poder definir les bases estàndards haurem d'estudiar teoremes i algorismes previs. Entre els més importants es troba l'algorisme de Mora. Aquest algorisme ens permetrà dividir polinomis en Anells Locals.

Finalment, aplicarem les bases estàndards per fer càlculs mitjançant el programa `Singular`.

2010 Mathematics Subject Classification. 13Pxx, 13-01, 14-01, 14Qxx

Agraïments

En primer lloc, m'agradaria agraïr al meu tutor, el Dr. Carlos D'Andrea, per acompanyar-me en aquest projecte i donar-me les pautes i l'ajuda necessàries durant tot el procés.

A l'Adrià, la Zaniah, el Marc i els amics que he conegut durant aquesta etapa. Tot ha estat molt més senzill al vostre costat.

Per últim, als meus pares. Ells sempre han cregut en mi, m'han ensenyat a aprendre dels errors i m'han fet entendre el significat de l'esforç. Gràcies per ser-hi sempre.

Índex

1 Introducció

El projecte

En aquell treball, estudiarem els Anells Locals, els elements necessaris per la construcció de les bases estàndards i les diferents aplicacions d'aquestes. L' estudi d'aquests diferents elements s'ha realitzat seguint com a guia el Capítol 4: *Computation in Local Rings* del llibre *Using Algebraic Geometry* de David A. Cox, John Little i Donal O'Shea.

Els coneixements previs per realitzar aquest treball han estat els estudiats a l'assignatura d'Anells de Polinomis en Diverses Variables. Aquesta assignatura ha estat clau pels conceptes apressos, definicions i teoremes que aplicarem en l'estudi dels Anells Locals ja que, com veurem, la construcció de les bases estàndards en Anells Locals segueix una metodologia anàloga a la construcció de la base de Gröbner en Anells de Polinomis.

És en aquesta assignatura on l'alumne pot aprendre teoremes com el Nullstellensatz de Hilbert, algorismes com l'algorisme de divisió o el criteri de Buchberger, elements amb una gran importància en la construcció de les bases de Gröber i, anàlogament, en les bases estàndards. També s'estudien algorismes per poder computar les diferents definicions i teoremes del curs amb `Mathematica`.

Amb aquesta base prèvia, podrem començar a introduir-nos en els Anells Locals. L'objectiu primer serà entendre què és un Anell Local i definirem els diferents tipus d'Anells Locals depenent de quin és el cos en el què estem treballant.

Estudiarem també el concepte de multiplicitat en aquest nou tipus d'anell, com calcular-les i les aplicacions d'aquestes. Una de les aplicacions més interessants que estudiarem seran els nombres de Milnor i Tjurina.

A continuació, començarem amb l'estudi dels elements previs per la construcció de les bases estàndards. És aquí on introduirem el concepte d'ordre local, un tipus d'ordre antigraduat. En l'assignatura d'Anells de Polinomis en Diverses Variables, vam estudiar també diferents ordres com l'ordre lexicogràfic, *lex*, que s'utilitzaran en la definició d'alguns ordres locals.

Serà important entendre els ordres locals ja que, com vam veure a l'assignatura anterior, s'utilitzen per la divisió entre diferents elements de l'anell que estudiem. Per fer la divisió, vam veure que s'ha d'emprar l'algorisme de divisió conegut en el cas d'Anells de Polinomis. Veurem que l'anàleg d'aquest algorisme en Anells Locals és l'algorisme de Mora.

Aquest algorisme serà el més important de tot el treball. Sense ell no podríem arribar a l'objectiu final, ja que per construir bases estàndards és necessari tenir un bon algorisme de divisió adequat al tipus d'anell en el que estem treballant.

Veurem que entre aquests dos algorismes hi ha similituds però també diferències, aquestes últimes degudes a les definicions d'ordres locals.

Un cop estudiat Mora, i després de donar una definició formal d'una base estàndard, ja podrem definir conceptes estudiats en Anells de Polinomis però ara en Anells Locals. Definirem què és un $S-$polinomi, l'anàleg al Criteri de Buchbeger, l'anàleg a l'algorisme de Buchberger, conceptes necessaris per després construir les bases estàndards.

Quan estudiàvem la construcció de bases de Gröbner, vam aprendre diferents mètodes i funcions de `Mathematica` per obtenir resultats mitjançant aquest programa. Si bé és cert que `Mathematica` també seria útil per poder operar en Anells Locals, `Singular` ofereix llibreries i paquets més especialitzats en els anells que estudiarem. És per això que mostrarem com calcular les bases estàndards utilitzant aquest programa.

Per últim, tractarem les diferents aplicacions de les bases estàndards. Entre aquestes aplicacions podrem veure si diferents polinomis pertanyen a un ideal radical o si pertanyen a l'ideal generat per altres polinomis. Per trobar aquests resultats també utilitzarem `Singular` i és que aquest programa serà clau en l'execució d'alguns exemples i en fer més entenedors conceptes ja estudiats anteriorment, com els nombres de Milnor i Tjurina.

Ja per últim, i amb tot el bagatge anterior, tractarem de manera breu operacions entre ideals, en particular, la intersecció.

Amb això, haurem estudiat els Anells Locals i els seus càlculs més bàsics.

Estructura de la Memòria

Aquesta memòria consta de 6 capítols, sense tenir en compte la introducció i les conclusions.

Com ja hem dit a la introducció, per estudiar els Anells Locals calen uns coneixements previs, els quals es van estudiar a l'assignatura d'Anells de Polinomis en Diverses Variables. El segon capítol de la memòria, *Definicions i teoremes previs*, recull des de definicions bàsiques, com la definició d'un anell i un ideal, fins teoremes de major importància com el Teorema de Hilbert. Aquest capítol és necessari per completar definicions, teoremes i demostracions que es veuran més endavant.

El tercer capítol, *Anells locals*, és el punt de partença. Es defineix que són els Anells Locals i s'estudia com afecta l'existència i unicitat d'un ideal maximal a un anell R. S'estudien anells definits a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

A continuació, tractarem com calcular les multiplicitats dels punts de $\mathbf{V}(I)$, I un ideal de dimensió zero. És al quart capítol, *Multiplicitats i nombres de Milnor*, on es pot trobar tota aquesta informació. Es veurà que la multiplicitat és una eina per conèixer propietats d'un ideal, per exemple, si l'ideal I de dimensió zero és un ideal radical. Per acabar aquest capítol, trobem la definició dels nombres de Milnor i Tjurina. Al capítol *Aplicació de les bases estàndards* calculem aquests nombres mitjançant el programa `Singular`.

Un dels elements que ens permetrà estudiar un algorisme de divisió en el cas dels Anells Locals són els ordres locals. El capítol *Ordres de termes i divisió* introdueix els ordres i acaba amb l'algorisme de Mora, l'algorisme més important de tota la memòria.

Utilitzant coneixements previs, definim els ordres en Anells Locals, així com elements que ja hem vist: el multigrau (*multideg*), coeficient líder (LC), monomi líder (LM) i terme líder (LT).

L'objectiu final d'aquest capítol, com ja hem dit, és l'estudi de l'algorisme de Mora, l'anàleg a l'algorisme de divisió en Anells de Polinomis. Podrem trobar el pseudocodi i un exemple de la seva aplicació que facilita poder entendre l'algorisme. L'algorisme s'estudia primer en el cas de polinomis homogenis i s'explica com aplicar-ho a polinomis no homogenis.

Ja estudiat l'algorisme de Mora, podem definir que és una base estàndard i com calcular-les al capítol *Bases estàndards*. Com vam veure a l'assignatura d'Anells de Polinomis en Diverses Variables, les bases estàndards depenen de termes líders. Anomenem el Criteri de Buchberger i l'Algorisme de Buchberger adaptats als Anells Locals. Introduïm el concepte de monomi estàndard i donat R anell local, $I \subset R$ un ideal, trobem un algorisme per escriure $f \in R$ com la suma de $g + r$, on r és una combinació de monomis estàndards i $g \in I$.

Per últim, a *Aplicació de les bases estàndards*, es poden trobar les diferents utilitats de les bases estàndards. Entre elles, el càlcul dels nombres de Milnor i Tjurina, ja definits anteriorment, saber si un polinomi pertany a un ideal radical i definir els cons tangents. Una de les eines més importants per l'estudi d'aquestes aplicacions és l'us de `Singular`, un programa similar a `Mathematica` però amb llibreries especialitzades en Anells Locals. En aquest capítol podem trobar el codi per trobar bases estàndards i nombres de Milnor, entre altres.

2 Definicions i teoremes previs

Abans de començar a estudiar els anells locals, cal considerar unes definicions i teoremes previs que seran necessaris posteriorment. Les demostracions que es veuran a continuació són necessàries durant la resta de la memòria.

Definició 2.1. *Un anell és un conjunt R amb*

1. *una operació binària interna, la suma (+) tal que $(R, +)$ és un grup abelià;*
2. *una operació binària interna, el producte $(\cdot)$, que compleix*
   (a) *la propietat associativa:*
   $$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall a, b, c \in R,$$
   (b) *la propietat distributiva respecte la suma:*
   $$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a, \forall a, b, c \in R.$$

Un anell R és commutatiu si $x \cdot y = y \cdot x$ per tot $x, y \in R$.

Si existeix un element neutre pel producte de l'anell R, és a dir, un element $u \in R$ tal que $u \cdot a = a \cdot u = a$ per tot $a \in R$, llavors diem que R és un anell unitari.

Definició 2.2. *Donat un anell R, un ideal de R és un subconjunt I de R tal que*

1. *$(I, +)$ és subgrup de $(R, +)$;*
2. *$a \cdot x \in I$, per a tot parell d'elements $a \in R, x \in I$.*

Definició 2.3. *Un ideal maximal d'un anell R és un ideal I, $I \neq R$, tal que no hi ha altres ideals M on $I \subset M \subsetneq R$. És a dir, sigui M ideal de R tal que $I \subset M$, llavors $I = M$ o $M = R$.*

Definició 2.4. *Un ideal I serà propi si i només si no és trivial i $1 \notin I$.*

Definició 2.5. *Sigui $V \subset k^n$ una varietat afí. Definim*

$$\mathbf{I}(V) = \{f \in k[x_1, \ldots, x_n] : f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ per a tot } (a_1, \ldots, a_n) \in V\}.$$

Lema 2.6. *Si $V \subset k^n$ és una varietat afí, llavors $\mathbf{I}(V) \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ és un ideal. Anomenarem a $\mathbf{I}(V)$ l'ideal de V.*

Teorema 2.7 (Nullstellensatz feble)**.** *Sigui k un cos algebraicament tancat i sigui $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal que satisfà $\mathbf{V}(I) = \emptyset$. Llavors $I = k[x_1, \ldots, x_n]$.*

Teorema 2.8 (Nullstellensatz)**.** *Sigui k un cos algebraicament tancat. Si $f, f_1, \ldots, f_s \in k[x_1, \ldots, x_n]$ són tal que $f \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s))$, llavors existeix un enter $m \geq 1$ tal que*

$$f^m \in \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$$

i a la inversa.

Definició 2.9. *Un ordre monomial $>$ a $k[x_1, \ldots, x_n]$ és qualsevol relació $>$ a $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, o equivalentment, tota relació en el conjunt dels monomis x^α, $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, que satisfà:*

i) $>$ *és un ordre total a* $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$.

ii) *Si* $\alpha > \beta$ *i* $\lambda \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, $\alpha + \lambda > \beta + \lambda$.

iii) $>$ *és un bon ordre a* $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. *Això vol dir que tot subconjunt no buit de* $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ *té un element més petit sota* $>$.

Definició 2.10. *Sigui* $f = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha$ *un polinomi diferent de 0 a* $k[x_1, \dots, x_n]$ *i sigui* $>$ *un ordre monomial. Definim:*

i) *El multigrau de* f *és* $\textit{multideg}\,(f) = \textit{max}\,(\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} : a_\alpha \neq 0)$.

ii) *El coeficient líder de* f *és* $\mathrm{LC}(f) = a_{\textit{multideg}(f)} \in k$.

iii) *El monomi líder de* f *és* $\mathrm{LM}(f) = x^{\textit{multideg}(f)}$ *amb coeficient 1.*

iv) *El terme líder de* f *és* $\mathrm{LT}(f) = \mathrm{LC}(f) \cdot \mathrm{LM}(f)$.

Per qualsevol ordre monomial, tenim

$$\dim_k\, k[x_1, \dots, x_n]/I = \dim_k k[x_1, \dots, x_n]/\langle LT(I)\rangle,$$

on aquesta segona part és el nombre de monomis x^α tal que $x^\alpha \notin \langle LT(I)\rangle$.

Definició 2.11 (Ordre lexicogràfic)**.** *Sigui* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ *i* $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. *Diem que* $\alpha >_{lex} \beta$ *si, al vector diferència* $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$*, el primer valor del vector començant per l'esquerra diferent de zero és positiu. Escrivim* $x^\alpha >_{lex} x^\beta$ *si* $\alpha >_{lex} \beta$.

Lema 2.12. *Sigui* A *subconjunt de* $\mathbb{Z}^n_{\leq 0}$ *i* $I = \langle x^\alpha \colon \alpha \in A\rangle$ *un ideal monomial. Llavors* x^β *pertany a* I *si i solament si* x^β *és divisible per algun* x^α *amb* $\alpha \in A$.

Proposició 2.13. *Sigui* $>$ *un ordre monomial i* $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ *un ideal. Llavors,* $\langle \mathrm{LT}(I)\rangle$ *és un ideal monomial i existeixen* $g_1, \dots, g_t \in I$ *tal que* $\langle \mathrm{LT}(I)\rangle = \langle \mathrm{LT}(g_1), \dots, \mathrm{LT}(g_t)\rangle$.

Teorema 2.14 (Teorema de Finitud)**.** *Sigui* $k \subset \mathbb{C}$ *un cos, sigui* $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ *un ideal. Llavors, són equivalents:*

a) $A = k[x_1, \dots, x_n]/I$ *té dimensió finita sobre* k.

b) $\mathbf{V}(I) \subset \mathbb{C}^n$ *és un conjunt finit.*

Teorema 2.15 (Teorema de Hilbert en ordres monomials)**.** *Tot ideal* $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ *té un conjunt finit de generadors. Això vol dir que* $I = \langle g_1, \dots, g_t\rangle$ *per alguns* $g_1, \dots, g_t \in I$.

Demostració. Si $I = \{0\}$, agafem com a conjunt generador el $\{0\}$, que és finit. Si I conté cap polinomi diferent de zero, llavors podem construir el conjunt de generadors $g_1, \dots, g_t$ de I de la següent manera. Sabem que existeixen $g_1, \dots, g_t \in I$ tal que $\langle \mathrm{LT}(I)\rangle = \langle \mathrm{LT}(g_1), \dots, \mathrm{LT}(g_t)\rangle$ utilitzant la Proposició 2.13. Volem veure que $I = \langle g_1, \dots, g_t\rangle$.

És evident que $\langle g_1, \dots, g_t\rangle \subset I$ ja que cada $g_i \in I$. Per veure que $\langle g_1, \dots, g_t\rangle \supset I$, prenem $f \in I$ qualsevol polinomi. Aplicant l'algorisme de divisió, dividim f entre $\langle g_1 \dots, g_t\rangle$,

$$f = a_1 g_1 + \cdots a_t g_t + r$$

on r no és divisible per cap $\mathrm{LT}(g_1), \ldots, \mathrm{LT}(g_t)$. L'objectiu és veure que $r = 0$.

Prenem $r = f - a_1 g_1 - \cdots - a_t g_t \in I$. Si $r \neq 0$, llavors $\mathrm{LT}(r) \in \langle \mathrm{LT}(I) \rangle = \langle \mathrm{LT}(g_1), \ldots, \mathrm{LT}(g_t) \rangle$. Per tant, $\mathrm{LT}(r)$ ha de ser divisible per algun $\mathrm{LT}(g_i)$ utilitzant el Lema 2.12, fet contradictori amb la definició de residu. Acabem de veure que $f = a_1 g_1 + \cdots + a_t g_t \in \langle g_1, \ldots, g_t \rangle$ i, per tant, $I \subset \langle g_1, \ldots, g_t \rangle$, com volíem. $\square$

Teorema 2.16 (La condició de la cadena ascendent)**.** *Sigui $I_1 \subset I_2 \subset I_2 \subset \ldots$ una cadena d'ideals ascendent a $k[x_1, \ldots, x_n]$. Llavors, existeix un $N \leq 1$ tal que*

$$I_N = I_{N+1} = I_{N+2} = \cdots .$$

Teorema 2.17. *Sigui $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle \neq \{0\}$ un ideal polinomial i $>$ un ordre monomial. Podem construir una base de Gröbner de I amb un nombre finit de passos utilitzant el següent algorisme:*

```
Input : F = (f_1, ... , f_s)
Output : una base de Gröbner G = (g_1, ... , g_t) de I, amb F inclòs a G.

G:= F
Repetim
    G' := G
    Per cada parella {p, q}, p diferent a q en G' fem
        S := residu de la divisió de S(p, q) entre G'
        Si S diferent de 0, llavors G := G unió {S}
Fins que G = G'
```

Recordem que $S(p,q)$ és el $S-$polinomi, és a dir, $S(p,q) = \frac{x^\alpha}{\mathrm{LT}(p)} \cdot p - \frac{x^\alpha}{\mathrm{LT}(q)} \cdot q$ on $x^\alpha = \mathrm{LCM}(\mathrm{LM}(p), \mathrm{LM}(q))$.

Demostració. Sigui $G = \{g_1, \ldots, g_t\}$, llavors

$$\langle G \rangle = \langle g_1, \ldots, g_t \rangle, \langle \mathrm{LT}(G) \rangle = \langle \mathrm{LT}(g_1), \ldots, \mathrm{LT}(g_t) \rangle.$$

Primer, cal veure que $G \subset I$ en cada estat de l'algorisme. En el primer pas això és cert i, després, els elements que afegim a G són els residus $\overline{S(p,q)}^{G'}$ per $p, q \in G$. Per tant, si $G \subset I$, llavors $p, q, S(p,q) \in I$ i, al dividir per $G' \subset I$, obtenim $G \cup \{S\} \subset I$. Com G conté la base F de I, aleshores G és una base de I.

L'algorisme acaba quan $G = G'$, és a dir, quan $\overline{S(p,q)}^{G'} = 0$ per tota $p, q \in G$. Així és com veiem que G és una base de Gröbner de I.

Per últim, cal veure que l'algorisme acaba. Observant el que passa en cada *loop*, veiem que $G = G' \cup \{S\}$, on $\{S\}$ són els residus diferents de 0. Com $G' \subset G$, $\langle \mathrm{LT}(G') \rangle \subset \langle \mathrm{LT}(G) \rangle$. A més a més, si $G' \neq G$, $\langle \mathrm{LT}(G') \rangle$ és més petit que $\langle \mathrm{LT}(G) \rangle$. Anem a veure això.

Suposem r residu diferent de zero del S-polinomi i l'afegim a G. Com r és un residu de la divisió entre G', $\mathrm{LT}(r)$ no és divisible per cap terme líder de G', per tant, $\mathrm{LT}(r) \notin \langle \mathrm{LT}(G') \rangle$. Aleshores, $\mathrm{LT}(r) \in \langle \mathrm{LT}(G) \rangle$.

Com $\langle \mathrm{LT}(G') \rangle \subset \langle \mathrm{LT}(G) \rangle$, els ideals $\langle \mathrm{LT}(G') \rangle$ formen una cadena d'ideals ascendents a $k[x_1, \ldots, x_n]$. Per la condició de la cadena ascendent (Teorema 2.16), després d'un nombre finit d'iteracions, la cadena s'estabilitzarà, és a dir, $\langle \mathrm{LT}(G') \rangle = \langle \mathrm{LT}(G) \rangle$. Això implica que $G = G'$. Hem vist que l'algorisme acaba. $\square$

3 Anells Locals

En tot aquest text, R és un anell commutatiu unitari, $1 \in R$.

Definició 3.1. *Definim com $k[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle}$ la col·lecció de totes les funcions racionals f/g de $x_1, \ldots, x_n$ amb $g(p) \neq 0$, on $p = (0, \ldots, 0)$.*

Proposició 3.2. *Sigui $R = k[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle}$. Llavors*

a. R és un subanell del cos de les funcions racionals $k(x_1, \ldots, x_n)$ que conté $k[x_1, \ldots, x_n]$.

b. Sigui $M = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \subset R$ l'ideal generat per $x_1, \ldots, x_n$ a R. Llavors cada element a $R \backslash M$ és una unitat a R, per tant, té inversa multiplicativa a R.

c. M és un ideal maximal a R i R no té altres ideals maximals.

Demostració. Sigui $p = (0, \ldots, 0)$.

a. Tenim que R és tancat per la suma i el producte a $k(x_1, \ldots, x_n)$. Per tant, si f_1/g_1 i f_2/g_2 són dos funcions racionals amb $g_1(p), g_2(p) \neq 0$, es té

$$f_1/g_1 + f_2/g_2 = (f_1 \cdot g_2 + f_2 \cdot g_1)/(g_1 \cdot g_2).$$

Com $g_1(p), g_2(p) \neq 0$, el producte $g_1(p) \cdot g_2(p) \neq 0$. Acabem de veure que la suma és un element de R.

De forma anàloga, estudiem el producte:

$$(f_1/g_1) \cdot (f_2/g_2) = (f_1 f_2)/(g_1 g_2).$$

Com abans, $g_1 g_2 \neq 0$ i així, el producte també pertany a R.

Per últim, com $f = f/1 \in R$ per tot $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$, l'anell de polinomis està contingut a R.

b. Els elements de $M = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ són les funcions racionals $f/g \in R$ tal que $f(p) = 0$. Això és així ja que si $f(p) \neq 0$, f seria de la forma $f = c_0 + x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n$ amb $c_0 \neq 0$, $c_0 \in k$ i $x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Al calcular el quocient, obtindríem $\frac{f}{g} = \frac{c_0}{g} + x_1 \frac{f_1}{g} + x_2 \frac{f_2}{g} + \cdots + x_n \frac{f_n}{g} \notin M$ ja que $\frac{c_0}{g} \notin M$. Veiem, doncs, que és necessari que $f(p) = 0$.

Per tant, si $f/g \notin M$, implicarà que $f(p) \neq 0$ i, per la definició de R, $g(p) \neq 0$. Aleshores, g/f és la inversa multiplicativa de f/g a R.

c. Suposem que M no és un ideal maximal i arribem a contradicció. Sigui $N \neq M$ un ideal a R tal que $M \subset N \subset R$. Llavors, N conté un element f/g tal que f/g també pertany al complementari de M. Per l'apartat b., f/g és una unitat a R i $1 = (f/g)(g/f) \in N$. Això implica que $N = R$.

M és l'únic maximal a R ja que, utilitzant l'apartat b. de nou, cada ideal propi $I \subset R$ està contingut a M. Si això no fos cert, és a dir, si $I \not\subset M$, existiria $\frac{f}{g} \in I \backslash M \subset R \backslash M$. Per tant, $\frac{f}{g}$ seria una unitat i $I = R$.

□

De manera anàloga, podem demostrar aquesta proposició amb $p = (a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$.

Proposició 3.3. *Sigui* $p = (a_1, \ldots, a_n)$ *i*

$$R = \{f/g : f, g \in k[x_1, \ldots, x_n], g(p) \neq 0\},$$

a. R és un subanell del cos de les funcions racionals $k(x_1, \ldots, x_n)$.

b. Sigui M l'ideal generat per $x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n$ a R. Aleshores, tot element $R \backslash M$ és una unitat a R (té una inversa multiplicativa a R).

c. M és un ideal maximal a R i aquest últim no té altres ideals maximals.

Demostració. Per començar amb aquesta demostració, escriurem R com

$$R = k[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle},$$

on $\langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$ és l'ideal $\mathbf{I}(\{p\})$ a $k[x_1, \ldots, x_n]$.

Recordem que $p = (a_1, \ldots, a_n)$.

a. R és tancat per la suma i el producte a $k(x_1, \ldots, x_n)$. Com abans, si f_1/g_1 i f_2/g_2 són dos funcions racionals amb $g_1(p), g_2(p) \neq 0$, es té

$$f_1/g_1 + f_2/g_2 = (f_1 g_2 + f_2 g_1)/(g_1 g_2).$$

Com $g_1(p), g_2(p) \neq 0$, el producte tampoc és 0. Ja hem vist que la suma és un element de R. De forma anàloga a la proposició anterior, es pot veure que el producte també és un element de R.

b. Els element de $M = \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$ són les funcions racionals $f/g \in R$ tal que $f(p) = 0$. Si $f/g \notin M$, $f(p) \neq 0$ i $g(p) \neq 0$ per definició. Per tant, g/f és la inversa multiplicativa de f/g a R.

c. La demostració és igual que en la proposició anterior.

□

Definició 3.4. *Un anell local és un anell que té exactament un ideal maximal.*

Proposició 3.5. *Un anell R amb un ideal propi $M \subset R$ és un anell local si tot element de $R \backslash M$ és una unitat a R.*

Demostració. Si tot element de $R \backslash M$ és una unitat a R, l'únic ideal maximal és M. Per demostrar-ho, suposarem el contrari i arribarem a contradicció. Sigui I un ideal maximal diferent de M i $\frac{f}{g} \in I \backslash M \subset R \backslash M$. Cada element de $R \backslash M$ és una unitat ja que M maximal, per tant, $I = R$.

Si veiem que M realment és maximal, la demostració acaba per la definició d'anell local.

Suposem N ideal tal que $M \subset N \subset R$. El que volem trobar és $N = R$ o $N = M$. M és ideal propi, per tant, $1 \notin M$. Com que tot element $R \backslash M$ és una unitat i $1 \notin M$, els elements de $N \backslash M$ són unitats. Sigui $n \in N \backslash M$. Com n és una unitat, existeix $\bar{n}$ tal que $n \cdot \bar{n} = 1 \in N$ i, per tant, $N = R$.

Hem vist que M és maximal. Aleshores, R és un anell local. □

Definició 3.6. *Sigui $k = \mathbb{C}$ o $k = \mathbb{R}$, podem considerar el conjunt de series convergents al voltant de l'origen amb n variables*

$$k\{x_1, \dots, x_n\} = \{ \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} c_\alpha x^\alpha : c_\alpha \in k \text{ i la sèrie convergeix al voltant de } 0 \in k^n \}$$

Definició 3.7. *Per qualsevol cos k, definim el conjunt $k[[x_1, \dots, x_n]]$ com*

$$k[[x_1, \dots, x_n]] = \{ \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} c_\alpha x^\alpha : c_\alpha \in k \}.$$

Proposició 3.8. *$k[[x_1, \dots, x_n]]$ és un anell local. Si $k = \mathbb{R}$ o $k = \mathbb{C}$ llavors $k\{x_1, \dots, x_n\}$ és també un anell local.*

Demostració. Per veure que $k[[x_1, \dots, x_n]]$ és un anell local considerarem l'ideal $M = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \subset k[[x_1, \dots, x_n]]$ generat per $x_1, \dots, x_n$. Si $f \notin M$, llavors $f = c_0 + g$ amb $c_0 \neq 0$, $c_0 \in k$ i $g \in M$. Utilitzant la sèrie geomètrica

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^n + \cdots ,$$

podem escriure

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{c_0 + g} = \frac{1}{c_0(1 + g/c_0)} = (1/c_0)(1 - g/c_0 + (g/c_0)^2 + \cdots).$$

Primer, cal veure que la sèrie geomètrica està ben definida, és a dir, $\frac{1}{1+t} \in \bar{k}, \bar{k}$ un cos, si $t \in \bar{k}$. Això és cert perquè $\frac{1}{1+t}$ es pot escriure com a combinació d'elements que pertanyen al cos $\bar{k}$.

Escrivim $\frac{1}{c_0+g}$ com

$$\frac{1}{c_0 + g} = \frac{1}{c_0} \frac{1}{1 + g/c_0} \text{ amb } g \in M \text{ i } c_0 \neq 0.$$

Com que $\frac{g}{c_0} \in M$ amb $c_0 \neq 0$, llavors $\frac{1}{1+\frac{g}{c_0}} \in M$ i $\frac{1}{c_0+g} \in M \subset k[[x_1, \dots, x_n]]$. $f = c_0 + g \notin M$ és unitat i té inversa multiplicativa a $k[[x_1, \dots, x_n]]$, utilitzant la Proposició 3.5, $k[[x_1, \dots, x_n]]$ és un anell local, ja que tot element de $R \backslash M$ és unitat i $k[[x_1, \dots, x_n]]$ és un anell amb un ideal maximal M. Recordem que tot ideal maximal és ideal propi per definició.

Ara, per veure que $k\{x_1, \dots, x_n\}$ és un anell local, cal demostrar que l'expansió $\frac{1}{c_0+g}$ dóna una serie convergent. Serà suficient amb demostrar que si $h = \frac{g}{c_0} \in \langle x_1, \dots, x_n \rangle \subset k\{x_1, \dots, x_n\}$ és convergent en un entorn al voltant de l'origen, llavors l'expansió $\frac{1}{1+h}$ també és convergent en un entorn (més petit generalment) al voltant de l'origen.

Podem escriure $h = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} c_\alpha x^\alpha$. Com $h \in \langle x_1, \dots, x_n \rangle, c_0 = 0$. Partim de que h convergeix al voltant del 0, per tant, $\exists r$, $0 < r < 1$ tal que $||(z_1, \dots, z_n)|| < r$ i $|h(z_1, \dots, z_n)| < r < 1$.

Aleshores, $\frac{1}{1+h}$ convergeix ja que $|h| < r < 1$ i sabem que $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots$ és convergent si t satisfà $|t| < 1$.

$\square$

4 Multiplicitats i nombres de Milnor

L'objectiu d'aquesta secció és veure com els anells locals es poden utilitzar per assignar multiplicitats locals dels punts de $\mathbf{V}(I)$ per un ideal I de dimensió zero. També definirem els nombres de Milnor i Tjurina d'un punt singular d'una hipersuperfície.

Al llarg d'aquesta secció, utilitzarem la següent notació: sigui I un ideal de $k[x_1, \ldots, x_n]$, denotarem l'ideal generat per I al major anell $k[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle}$ com $Ik[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle}$.

Definició 4.1. *Sigui k un cos i $f_1, \ldots, f_s$ polinomis a $k[x_1, \ldots, x_n]$. Llavors definim*

$$\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in k^n : f_i(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ per a tot } 1 \leq i \leq s\}.$$

Anomenem $\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s)$ la varietat afí definida per $f_1, \ldots, f_s$.

Definició 4.2. *Sigui I un ideal de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Direm que I és un ideal de dimensió zero si $\mathbf{V}(I) \subseteq \bar{k}^n$ és finita, on $\bar{k}^n$ és la clausura algebraica tancada de k.*

Definició 4.3. *Sigui I un ideal de dimensió zero a $k[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle}$, $\mathbf{V}(I)$ és un conjunt de punts finits a k^n i assumim que $(0, \ldots, 0)$ és un d'aquests punts. Aleshores, la multiplicitat de $(0, \ldots, 0)$ com un punt de $\mathbf{V}(I)$ és*

$$dim_k \ k[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle}/Ik[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle}.$$

De forma més general, sigui $p = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{V}(I)$, la multiplicitat de p, $m(p)$, és la dimensió de l'anell obtingut localitzant $k[x_1, \ldots, x_n]$ a l'ideal maximal $M = \mathbf{I}(\{p\}) = \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n\rangle$ corresponent a p, i prenent el quocient

$$dim_k \ k[x_1, \ldots, x_n]_M/Ik[x_1, \ldots, x_n]_M.$$

Proposició 4.4. *El quocient $k[x_1, \ldots, x_n]_M/Ik[x_1, \ldots, x_n]_M$ és també un anell local.*

Demostració. Primer, definim $\begin{array}{rcl} k[x_1, \ldots, x_n]_M/Ik[x_1, \ldots, x_n]_M & \to & k[x_1, \ldots, x_n]_M \\ [a] & \to & a \end{array}$. Cal veure que està ben definida, és a dir, si $[a] = [b]$, llavors $a = b$. Si $[a] = [b], a - b \in Ik[x_1, \ldots, x_n]_M$. Això implica que $a - b = 0$ i $a = b$, com volíem.

Com $k[x_1, \ldots, x_n]_M$ és un anell local, suposem $a \notin M$. Com a no pertany al maximal, a és unitat i existeix b tal que $a \cdot b = 1$. Per tot element de $k[x_1, \ldots, x_n]_M$, podem definir la seva classe lateral. En aquest cas, si $a \cdot b = 1$, llavors $[a] \cdot [b] = [1]$. Per tant, $[a]$ també és una unitat i $[a]$ tampoc pertany a M.

Utilitzant la Proposició 3.5, hem vist que a $k[x_1, \ldots, x_n]_M/Ik[x_1, \ldots, x_n]_M$ és també un anell local. $\square$

Definició 4.5. *Sigui $\{p_1, \ldots, p_m\}$ un subconjunt finit de k^n, $M_i = \mathbf{I}(\{p_i\})$ l'ideal maximal de $k[x_1, \ldots, x_n]$ que correspon a p_i, escrivim*

$$k[x_1, \ldots, x_m]_{M_i} = \{f/g : g(p_i) \neq 0\} = \mathcal{O}_i$$

per simplificar notació.

Lema 4.6. *Sigui $S = \{p_1, \ldots, p_m\}$ un subconjunt finit de $\mathbb{C}^n$. Existeixen polinomis $g_i \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n], i = 1, \ldots, m$, tal que*

$$g_i(p_j) = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq j \\ 1 & si \quad i = j \end{cases}$$

Demostració. Sigui $p_i \neq p_j$. Existeix una $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $p_{ik} \neq p_{jk}$. Si $\Phi_{ij} = \frac{x_k - p_{jk}}{p_{ik} - p_{jk}}, \Phi_{ik}(p_i) = 1, \Phi_{ik}(p_k) = 0$. Per tant, escrivim $g = \Phi_{i1}\Phi_{i2}\ldots\Phi_{i(i+1)}\ldots\Phi_{in}$, i $g_i(p_i) = 1, g_i(p_j) = 0$ $, \forall k \neq i$. □

Lema 4.7. *Sigui I un ideal de dimensió zero a $k[x_1, \ldots, x_n]$ (k algebraicament tancat) i sigui $M_i = \mathbf{I}(\{p_i\})$ a $k[x_1, \ldots, x_n]$.*

a. Existeix un enter $d \geq 1$ tal que $(\cap_{i=1}^m M_i)^d \subset I$.

b. Hi ha polinomis $e_i \in k[x_1, \ldots, x_n], i = 1, \ldots, m$, tal que $\sum_{i=1}^m e_i \equiv 1$ mod $I, e_i e_j \equiv 0$ mod I si $i \neq j$, i $e_i^2 \equiv e_i$ mod I. A més a més, $e_i \in I\mathcal{O}_j$ si $i \neq j$ i $e_i - 1 \in I\mathcal{O}_i \forall i$

c. Si $g \in k[x_1, \ldots, x_n] \backslash M_i$, existeix $h \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $hg \equiv e_i$ mod I.

Demostració. Utilitzarem la notació $f \equiv g$ mod I per $f - g \in I$.

$\boxed{a.}$ Sigui $\cap_{i=1}^m M_i = \langle f_1, \ldots, f_l \rangle$. Aplicant Nullstellensatz, el Teorema 2.8, si $f_i \in \cap_{i=1}^m M_i$, existeix una d_i tal que $f_i^{d_i} \in I$.

Volem trobar la d necessària per a què donat $f \in (\cap_{i=1}^m M_i)$, $f^d \in I$.

Sigui $f \in (\cap_{i=1}^m M_i)$, $f = \sum_{i=0}^l g_i f_i$ i $f^d = (\sum_{i=0}^l g_i f_i)^d$. Si desenvolupem mitjançant el binomi de Newton, obtenim

$$f^d = \sum C \cdot f_1^{\alpha_1} \ldots f_l^{\alpha_l},$$

on C és la resta d'elements obtinguts mitjançant la fórmula del binomi. A partir d'aquest desenvolupament, veiem que perquè $f^d \in I$, és necessari que cada element del sumatori també pertanyi a I. Com hem vist anteriorment, per cada f_i existeix un d_i tal que $f_i^{d_i} \in I$. D'aquesta forma, si determinem $d > d_1 + \cdots + d_l$, ja tindrem el resultat desitjat i haurem vist que $(\cap_{i=1}^m M_i)^d \subset I$.

$\boxed{b.}$ El Lema 4.6 implica l'existència dels polinomis $g_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $g_i(p_j) = 0$ si $i \neq j$, i $g_i(p_i) = 1$ per cada i. Sigui

$$e_i = 1 - (1 - g_i^d)^d,$$

on d és com a l'apartat a. Desenvolupem la part dreta de la igualtat utilitzant el binomi de Newton:

$$e_i = 1 - (1 - g_i^d)^d = 1 - \left(\sum_{k=0}^{d} (-1)^k \frac{d!}{k!(d-k)!} (g_i^d)^k \right) = 1 - \left(1 + \sum_{k=1}^{d} (-1)^k \frac{d!}{k!(d-k)!} (g_i^d)^k \right)$$

Cancel·lant els 1's

$$e_i = -\sum_{k=1}^{d} (-1)^k \frac{d!}{k!(d-k)!} (g_i^d)^k$$

Sabem que $e_j \in M_i^d$ si $j \neq i$ ja que $e_j(p_i) = -\sum_{k=1}^d (-1)^k \frac{d!}{k!(d-k)!} (g_j^d(p_i))^k = 0$ pel Lema 4.6, és a dir, $e_j \in M_i^d$ (si $f \in I, f^d \in I^d$).

Per altra banda, aquesta igualtat implica que $e_i - 1 \in M_i^d$ per tot i ja que $(1 - g_i^d)^d \in M_i^d$. Per cada i,

$$\sum_j e_j - 1 = e_i - 1 + \sum_{j \neq i} e_j$$

és un element de M_i^d ja que $e_i - 1 \in M_i^d$ i $\sum_{j \neq i} e_j \in M_i^d$.

Com això és cert per tot i, $\sum_j e_j - 1 \in \cap_{i=1}^m M_i^d$ i, per tant, pertany a tota M_i^d. Com les M_i són diferents ideals maximals, $M_i + M_j = k[x_1, \dots, x_n]$ sempre que $i \neq j$. Anem a veure-ho. Sabem que totes les M_i son diferents i escollim M_i i M_j amb $i \neq j$.

$$V(M_i) \cap V(M_j) = \emptyset \Longrightarrow V(M_i + M_j) = \emptyset \Longrightarrow M_i + M_j = k[x_1, \dots, x_n].$$

L'última implicació és gràcies al Nullstellensatz feble, Teorema 2.7. Com $M_i + M_j = k[x_1, \dots, x_n]$ i M_i i M_j són comaximals podrem veure que $\cap_{i=1}^m M_i^d = (\cap_{i=1}^m M_i)^d$.

Per demostrar la igualtat $\cap_{i=1}^m M_i^d = (\cap_{i=1}^m M_i)^d$, dividim la demostració en diferents parts. Siguin I, J ideals comaximals:

- $I \cdot J = I \cap J$

  $\boxed{\subseteq}$ Sigui $a \in I, b \in J \Longrightarrow_{\text{per ser ideal}} ab \in I, ab \in J \Longrightarrow ab \in I \cap J$

  $\boxed{\supseteq}$ I, J comaximals, $\exists a \in I, b \in J$ respectivament tal que $a + b = 1$. Sigui $c \in I \cap J \Longrightarrow c(a+b) = c \Longrightarrow ca + cb = c$ però $ca \in IJ$ ja que $c \in J$ i $a \in I$ i $cb \in IJ$ ja que $c \in I, b \in J$. Això implica que $c \in IJ$.

- $I^d \cap J^d = (I \cap J)^d$

  Sabem que $IJ = I \cap J \Longrightarrow (IJ)^d = (I \cap J)^d$ i $(IJ)^d = I^d J^d = I^d \cap J^d$

- Sigui $I_1, \dots I_r$ ideals tal que $I_i + I_j = k$ si $i \neq j$. Llavors $(I_1^d \cap \dots \cap I_r^d) = (I_1 \cap \dots \cap I_r)^d$.

  Primer, cal veure que si $I_1, \dots, I_r$ són ideals comaximals a un anell R, llavors $I_1 + I_2 \cap \dots \cap I_r = R$, és a dir, també són comaximals.

  Suposem $r = 3$. Existeixen $a, b \in I_1, c, d \in I_2, e, f \in I_3$ tals que $1 = a + c = b + e = d + f$.

  Llavors,

  $$1 = 1 \cdot 1 = (a + c)(b + e) = A + c \cdot e$$

  amb $A = a \cdot b + a \cdot e + b \cdot c \in I_1$, i clarament $c \cdot e \in I_2 \cdot I_3 \subset I_2 \cap I_3$. Tenim $1 \in I_1 + I_2 \cap I_3$, que implica que $I_1 + I_2 \cap I_3 = R$, el que volíem demostrar.

  Per $r \geq 3$, el raonament és molt similar. Suposem cert per r, per tant, tenim que $I_1, \dots, I_r$ comaximals i I_1 i $I_2 \cap \dots \cap I_r$ comaximals també. Si ara $I_1 \dots, I_r, I_{r+1}$ comaximals, obtenim que $I_1, (I_2 \cap \dots \cap I_r)$ i I_{r+1} són comaximals entre ells. Apliquem el raonament anterior i ja tenim el que volíem veure.

  Un cop demostrat això, és molt fàcil veure que $(I_1^d \cap \dots \cap I_r^d) = (I_1 \cap \dots \cap I_r)^d$. Fem inducció. Sigui $r = 2$, sabem que $I_1 I_2 = I_1 \cap I_2 \Longrightarrow (I_1 I_2)^d = (I_1 \cap I_2)^d$. A més, $(I_1 \cdot I_2)^d = I_1^d \cdot I_2^d = I_1^d \cap I_2^d$.

  Suposem que és cert per r i siguin $I_1, \dots, I_{r+1}$ ideals tal que I_i i $\cap_{i \neq j} I_j$ són comaximals. Això vol dir que I_{r+1} i $\cap_{1 \leq i \leq r} I_i$ són comaximals (com hem demostrat anteriorment). Ara podem aplicar la hipòtesi d'inducció als ideals $I_1, \dots, I_{r+1}$,

  $$I_{r+1}^d \cap (\cap_{1 \leq i \leq r)} I_i)^d = (I_{r+1} \cdot (\cap_{1 \leq i \leq r} I_i))^d = (I_{r+1} \cap (\cap_{1 \leq i \leq r} I_i))^d.$$

  Aleshores

  $$I_{r+1}^d \cap \dots \cap I_1^d = (I_{r+1} \cdot \dots \cdot I_1)^d = (I_{r+1} \cap \dots \cap I_1)^d.$$

Per tant, $\sum_j e_j - 1 \in (\cap_{i=1}^m M_i)^d \subset I$. De forma similar, $e_j e_i \in \cap_{i=1}^m M_i^d = (\cap_{i=1}^m M_i)^d \subset I$ quan $i \neq j$. Això és perquè $e_j(p_i)e_i(p_i) = 0$, per tant, $e_j e_i \in M_i^d$ per tota i. Com es compleix per tota i, tenim també $e_j e_i \in \cap_{i=1}^m M_i^d = (\cap_{i=1}^m M_i)^d \subset I$, com volíem veure.

La congruència $e_i^2 \equiv e_i \mod I$ és gairebé immediata. Anem a veure-ho.

Tenim que

$$\sum_j e_j - 1 = e_i - 1 + \sum_{j \neq i} e_j$$

és un element de M_i^d. Multipliquem per $e_i \in M_i^d$ i

$$e_i(\sum_j e_j - 1) = e_i^2 - e_i + e_i \sum_{j \neq i} e_j$$

Per tant,

$$\begin{array}{rcl} e_i^2 & = & e_i + e_i(\sum_j e_j - 1) - e_i \sum_{j \neq i} e_j \\ e_i^2 - e_i & = & e_i(\sum_j e_j - 1) - e_i \sum_{j \neq i} e_j \end{array}$$

on tots els element de la dreta de la igualtat pertanyen a $\cap M_i^d \subset I$ i, per definició de congruència, $e_i^2 \equiv e_i \mod I$.

Això implica que $e_i(e_i - 1) \in I\mathcal{O}_j$ per tot i, j, ja que $I\mathcal{O}_j$ és l'ideal generat per I a l'anell més gran $\mathcal{O}_j$. Si $i \neq j$, $e_i - 1$ és una unitat de $\mathcal{O}_j$ ja que $e_i(p_j) = 0$ i $e_i \in I\mathcal{O}_j$ perquè les unitats no poden pertànyer a l'ideal maximal. De la mateixa manera, si treballem al cas $e_i(e_i - 1) \in I\mathcal{O}_i$, e_i és unitat de $\mathcal{O}_i$ ja que $e_i(p_i) = 1$. Per tant, com les unitats no pertanyen a l'ideal maximal, és $e_i - 1 \in I\mathcal{O}_i$.

$\boxed{c.}$ En aquest apartat, suposem que $g(p_i) = 1$ sense pèrdua de generalitat ja que $g \in k[x_1, \ldots, x_n] \backslash M_i$ i, conseqüentment, tot g és diferent de 0.

Sabem que $1 - g \in M_i$, ja que $1 - g = 0$ no és unitat.

Prenem $h = (1+(1-g)+\cdots+(1-g)^{d-1})e_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$, ja que $e_i \in k[x_1, \ldots, x_n], g \in k[x_1, \ldots, x_n] \backslash M_i$ i és una combinació lineal. Calculem hg,

$$\begin{array}{rcl} hg = h(1-(1-g)) & = & (1 + (1-g) + \cdots + (1-g)^{d-1})(1-(1-g))e_i \\ & = & (1-(1-g)^d)e_i = e_i - (1-g)^d e_i \end{array}$$

Com a resultat, $hg - e_i = -(1-g)^d e_i$. Si veig que la part dreta de la igualtat pertany a I, ja hem acabat.

Sigui $(1-g)^d \in M_i^d$ i $e_i \in M_j^d$ per tot $j \neq i$, com hem vist a l'apartat b. Per tant, $(1-g)^d e_i \in M_k^d, \forall k$. És equivalent a dir que $(1-g)^d e_i \in \cap M_k^d = (\cap M_k)^d \subseteq I$ utilitzant l'apartat a.

El lema està demostrat. □

Teorema 4.8. *Sigui I un ideal de dimensió zero a $k[x_1, \ldots, x_n]$, k algebraicament tancat, i sigui $\mathbf{V}(I) = \{p_1, \ldots, p_m\}$. Llavors, hi ha un isomorfisme entre $k[x_1, \ldots, x_n]/I$ i el producte directe d'anells $A_i = \mathcal{O}_i/I\mathcal{O}_i$, per $i = 1, \ldots, m$.*

Demostració. Per cada $i, i = 1, \ldots, m$, hi ha homomorfismes d'anells

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_i : & k[x_1, \ldots, x_n] & \longrightarrow & A_i \\ & f & \longmapsto & [f]_i, \end{array}$$

on $[f]_i$ és la classe lateral de f en l'anell quocient $\mathcal{O}_i/I\mathcal{O}_i$. Tenim l'homomorfisme d'anells

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_i\colon & k[x_1,\dots,x_n] & \longrightarrow & A_i \times \cdots \times A_m \\ & f & \longmapsto & ([f]_1,\dots,[f]_m). \end{array}$$

Com $f \in I$ implica que $[f]_i = 0 \in A_i$ per a tot i, $I \subset \ker(\varphi)$.

Per demostrar el teorema, primer cal veure que $I = \ker(\varphi)$, que pel teorema fonamental dels homomorfismes d'anells, implicarà que $\mathrm{im}(\varphi) \cong k[x_1,\dots,x_n]/I$, i després que φ és exhaustiva.

Sigui $f \in \ker(\varphi)$, on $\ker(\varphi)$ és:

$$\begin{aligned} \ker(\varphi) &= \{f \in k[x_1,\dots,x_n] : [f]_i = 0 \forall i\} \\ &= \{f : f \in I\mathcal{O}_i \forall i\} \\ &= \{f : \exists g_i \notin M_i \text{ amb } g_i f \in I\} \end{aligned}$$

Per cada g_i, per la part c del Lema 4.7, existeix un h_i tal que $h_i g_i \equiv e_i \bmod I$. Com a resultat, $f \cdot \sum_{i=1}^m h_i g_i = \sum_{i=1}^m h_i(g_i f)$ és un element de I, ja que cada $g_i f \in I$. Per altra banda, $f \cdot \sum_{i=1}^m h_i g_i \equiv f \cdot \sum_i e_i \equiv f \bmod I$ per part b del Lema 4.7. Combinant aquestes dues observacions, veiem que $f \in I$. Per tant, $\ker(\varphi) \subset I$. Com abans hem vist que $I \subset \ker(\varphi)$, tenim la igualtat que buscàvem.

Per acabar, necessitem demostrar que φ és exhaustiva. Sigui $([n_1/d_1],\dots,[n_m/d_m])$ un element arbitrari de $A_1 \times \cdots \times A_m$, on $n_i, d_i \in k[x_1,\dots,x_n], d_i \notin M_i$ i $[n_i/d_i]$ és una classe lateral a A_i. Per la part c del Lema 4.7, hi ha $h_i \in k[x_1,\dots,x_n]$ tal que $h_i d_i \equiv e_i \bmod I$. Sigui $F = \sum_{i=1}^m h_i n_i e_i \in k[x_1,\dots,x_n]$ és fàcil veure que $\varphi_i(F) = [n_i/d_i]$ per cada i, ja que $e_i \in I\mathcal{O}_j$ per $i \neq j$ i $e_i - 1 \in I\mathcal{O}_i$ com a la part b del Lema 4.7. Per tant, φ és exhaustiva. □

Com a resultat d'aquest teorema, tenim aquest corol·lari.

Corol·lari 4.9. *Sigui k algebraicament tancat, I un ideal de dimensió zero a $k[x_1,\dots,x_n]$. Llavors dim $k[x_1,\dots,x_n]/I$ és el nombre de punts de $\mathbf{V}(I)$ tenint en compte les multiplicitats. Explícitament, si $p_1,\dots,p_m$ són els diferents punts de $\mathbf{V}(I)$ i $\mathcal{O}_i$ és l'anell de funcions racionals definit a p_i, llavors*

$$dim\ k[x_1,\dots,x_n]/I = \sum_{i=1}^m dim\ \mathcal{O}_i/I\mathcal{O}_i = \sum_{i=1}^m m(p_i).$$

Demostració. És conseqüència directa del Teorema 4.8 perquè tenim un homomorfisme i

$$\dim\ k[x_1,\dots,x_n]/I = \dim\ A_1 + \cdots + \dim\ A_n.$$

□

Teorema 4.10. *Sigui I un ideal de dimensió zero a $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ i sigui $A = \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]/I$. Llavors $dim_{\mathbb{C}}(A)$ és més gran o igual que el nombre de punts de $\mathbf{V}(I)$. Tenim la igualtat si i solament si I és un ideal radical.*

Demostració. Sigui I un ideal de dimensió zero. Pel Teorema de Finitud, Teorema 2.14, $V(I)$ és un conjunt finit a $\mathbb{C}^n$, on $V(I) = \{p_1,\dots,p_m\}$. Considerem

$$\begin{array}{rrcl} \varphi\colon & \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]/I & \longrightarrow & \mathbb{C}^m \\ & [f] & \longmapsto & (f(p_1),\dots,f(p_m)), \end{array}$$

que avalua la classe lateral als punts de $V(I)$. Anem a veure que està ben definida.

Sigui $[f],[g] \in \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]/I$ tal que $[f]=[g]$. Per tant, $[f]-[g]=0$ i $f-g \in I$. Això implica que $(f-g)(p_i)=0$, és a dir, $f(p_i)=g(p_i)$, com volíem veure.

Per veure la primera part, és suficient veure que φ és exhaustiva. Sigui $g_1,\ldots,g_m$ la col·lecció de polinomis tal que

$$g_i(p_j) = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq j \\ 1 & si \quad i = j \end{cases}$$

Donat $(\lambda_1,\ldots,\lambda_m) \in \mathbb{C}^m$ arbitraris. Sigui $f=\sum_{i=1}^m \lambda_i g_i$. Llavors,

$$\varphi\left(\sum \lambda_i g_i\right) = (f(p_1),\ldots,f(p_m)) = \left(\sum \lambda_i g_i(p_1),\ldots,\sum \lambda_i g_i(p_m)\right) = (\lambda_1,\ldots,\lambda_m).$$

Per tant, ja hem vist que és exhaustiva i que la $\dim(A) \geq m$.

Anem a veure la segona part. Suposem que I és radical. Si $[f] \in \ker(\varphi)$, llavors $f(p_i)=0, \forall i$. Això implica, per Nullstellensatz, que $f \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \sqrt{I} = I$, ja que I és radical. Per tant, $[f]=0$, fet que vol dir que és una funció injectiva. Llavors, φ és un isomorfisme i $\dim(A)=m$ si I és radical.

Si $\dim(A)=m$, llavors φ és isomorfisme ja que és una funció lineal entre espais vectorials de la mateixa dimensió. Per tant, φ injectiva. Solament cal veure que I és radical.

Si $f \in \sqrt{I}$, llavors $f(p_i)=0, \forall i$. Obtenim que $\varphi([f])=(0,\ldots,0)$. Com φ és injectiva, $[f]=[0]$. En altres paraules, $f \in I$. □

Corołari 4.11. *Sigui k algebraicament tancat, I ideal de dimensió zero a $k[x_1,\ldots,x_n]$. Llavors I és radical si i solament si tot $p \in \mathbf{V}(I)$ té multiplicitat $m(p)=1$.*

Demostració. Si $\mathbf{V}(I)=\{p_1,\ldots,p_m\}$, llavors $\dim k[x_1,\ldots,x_n]/I \geq m$, amb igualtat si i solament si I és radical, com hem demostrat al teorema anterior. Pel Corol·lari 4.9, ho podem escriure com $\sum_{i=1}^m m(p_i) \geq m$. Com $m(p_i) \geq 1$ sempre, llavors $\sum_{i=1}^m m(p_i) \geq m$. Serà una igualtat si i solament si $m(p_i)=1$. □

Ara anem a calcular les multiplicitats. Donat un ideal de dimensió zero $I \subset k[x_1,\ldots,x_n]$ i un polinomi $f \in k[x_1,\ldots,x_n]$, sigui m_f la multiplicació de f a $k[x_1,\ldots,x_n]/I$. Llavors, el polinomi característic $\det(m_f - uI)$ està determinat pels punts de $V(I)$ i les seves multiplicitats.

Proposició 4.12. *Sigui k un cos algebraicament tancat i sigui I un ideal de dimensió zero a $k[x_1,\ldots,x_n]$. Si $f \in k[x_1,\ldots,x_n]$, llavors*

$$det\,(m_f - uI) = (-1)^d \prod_{p \in V(I)} (u - f(p))^{m(p)}$$

on $d = dim\, k[x_1,\ldots,x_n]/I$ i m_f com hem definit abans.

Demostració. Sigui $V(I)=\{p_1,\ldots,p_m\}$. Utilitzant el Teorema 4.8, tenim:

$$\begin{array}{ccc} k[x_1,\ldots,x_n]/I & \cong & A_1 \times \cdots \times A_m \\ m_f \downarrow & & \downarrow m_f \\ k[x_1,\ldots,x_n]/I & \cong & A_1 \times \cdots \times A_m \end{array}$$

on $m_f : A_1 \times \cdots \times A_m \longrightarrow A_1 \times \cdots \times A_m$ és la multiplicació de f a cada factor. Podrem treballar amb m_f si ho restringim a $m_f : A_i \longrightarrow A_i$ i serà suficient amb veure que det $(m_f - uI) = (-1)^{m(p_i)}(u - f(p_i))^{m(p_i)}$.

Equivalentment, cal veure que $f(p_i)$ és l'únic valor propi de m_f a A_i. Per veure això, considerem $\begin{array}{cccc} \varphi_i \colon & k[x_1, \ldots, x_n] & \longrightarrow & A_i \\ & f & \longrightarrow & [f]_i \end{array}$, com hem definit al Teorema 4.8. Sigui $Q_i = \ker\,(\varphi_i)$, cal veure que Q_i és part de la descomposició primària de I, que $V(p_i) \equiv \{p_i\}$ i que $k[x_1, \ldots, x_n]/Q_i \cong A_i$.

Anem a veure-ho. Com hem vist a la demostració del Teorema 4.8, $I \subset Q_i$ i podem escriure $Q_i = \{f\colon$ existeix $u \in k[x_1, \ldots, x_n]/M_i$ tal que $u \cdot f \in I\}$ on $M_i = \mathbf{I}(\{p_i\})$. En aquest cas, les u són les diferents g_i definides al mateix Teorema.

Hem definit els g_j tals que $g_j(p_i) = 0$ si $i \neq j$ i $g_j(p_j) = 1$. Llavors, si $i \neq j$, $g_j(p_i) = 0$, i $g_j \in M_i$. Això implica que $g_j \in \cap_{i=1, i\neq j}^{n} M_i$. Com hem vist al Lema 4.7, existeix una d tal que $(\cap_{i=1,i\neq j}^{n} M_i)^d \subset I \subset Q_i$. Per tant, $g_j^d \in Q_i$.

Ara, cal veure que $\mathbf{V}(Q_i) = \{p_i\}$. Just abans, hem vist que $g_j^d \in Q_i$. Fent la implicació contrària de Nullstellensatz, $g_j \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(Q_i)))$, però també $g_j \in M_i = \mathbf{I}(\{p_i\})$. Per tant, $\mathbf{V}(Q_i) = \{p_i\}$. Com que $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \sqrt{I}$, és clar que $\sqrt{Q_i} = \mathbf{I}(\mathbf{V}(Q_i)) = \mathbf{I}(Q_i) = M_i$.

A continuació, ja podem veure que Q_i és un ideal primari, és a dir, si $fg \in Q_i$, llavors $f \in Q_i$ o $g^d \in Q_i$. Per la construcció dels nostres g, en aquest cas podem tenir g_i o g_j amb $j \neq i$.

Sigui $g_i \notin M_i$, llavors si $fg_i \in Q_i$ vol dir que existeix un $g_i' \notin M_i$ tal que $fg_ig_i' \in I$. En aquest cas, utilitzant el Lema 4.7, existeix un h_i tal que $h_ig_ig_i' \equiv e_i \mod I$. Aleshores, $f \cdot \sum_{i=1}^{m} h_ig_ig_i' = \sum_{i=1}^{m} h_i(g_ig_i'f) \in I$ ja que $g_ig_i'f \in I$. Per altra banda, $f \cdot \sum_{i=1}^{m} h_ig_i'g_i \equiv f \cdot \sum_i e_i \equiv f \mod I$. Combinant ambdós resultats, $f \in I \subset Q_i$.

L'altre cas és si treballem amb g_j amb $j \neq i$. Sabem que $g_j \in M_i$ i hem vist anteriorment que $M_i = \sqrt{Q_i}$. Per tant, existeix un d tal que $g_j^d \in Q_i$. Acabem de veure que Q_i és un ideal primari.

Ara, cal demostrar que $I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_m$.

$\boxed{\subset}$ A l'inici de la demostració, obtenim que $I \subset Q_i$ per tota i. Per tant, $I \subset Q_i \cap \cdots Q_m$.

$\boxed{\supset}$ Com veiem en la demostració del Teorema 4.8, $Q_i \subset I$ per tota i. Per tant, $Q_i \cap \cdots \cap Q_m \subset I$.

Així arribem a la igualtat desitjada, $I = Q_1 \cap \cdots Q_m$. Hem trobat la descomposició primària.

Per acabar, cal veure que $k[x_1, \ldots, x_n]/Q_i \cong A_i$, és a dir, cal demostrar l'exhaustivitat. Sigui $[n_i/d_i]$ un element de A_i, on $n_i, d_i \in k[x_1, \ldots, x_n], d_i \notin M_i$. Utilitzant el Lema 4.7, sabem que existeix un $h_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $h_id_i \equiv e_i \mod I$. Sigui $F = \sum_{i=1}^{m} h_in_ie_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$. És conegut que $e_i \in I\mathcal{O}_j$ per $i \neq j$ i $e_i - 1 \in I\mathcal{O}_i$, per tant, $\varphi(F) = [n_i/d_i]$. L'exhaustivitat de φ ja està demostrada.

Aquesta demostració implica que tot valor propi de m_f a A_i és igual al valor propi de m_f a $k[x_1, \ldots, x_n]/Q_i$.

Per continuar la demostració, cal veure el següent teorema:

Teorema 4.13. *Sigui $I \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ de dimensió zero, $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ i h_f el polinomi minimal de m_f a $A = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I$. Llavors per $\lambda \in \mathbb{C}$ és equivalent:*

a. λ *és una arrel de l'equació* $h_f(t) = 0$.

b. λ *és un valor propi de la matriu* m_f.

c. λ *és un valor de la funció* f *en* $V(I)$.

Demostració. A continuació, demostrarem les equivalències anteriors.

$\boxed{a \Leftrightarrow b}$: per resultats d'àlgebra lineal.

$\boxed{b \Rightarrow c}$: Sigui λ un valor propi de m_f. Llavors hi ha un vector propi $[z] \neq [0] \in A$ tal que $[f - \lambda][z] = [0]$. Busquem arribar a contradicció. Suposem que λ no és un valor de f a $V(I)$. Això vol dir, prenent $V(I) = \{p_1, \ldots, p_m\}$, suposar que $f(p_i) \neq \lambda$, $\forall i = 1, \ldots, m$.

Sigui $g = f - \lambda$, o equivalentment, $g(p_i) \neq 0, \forall i$. Existeixen polinomis g_i tal que $g_i(p_j) = 0$ si $i \neq j$ i $g_i(p_i) = 1$. Considerem el polinomi $g' = \sum \frac{1}{g(p_i)} g_i$. Segueix que $g'(p_i)g(p_i) = 1, \forall i$ i $1 - g'g \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(I))$.

Per Nullstellensatz, Teorema 2.8, $(1 - g'g)^l \in I$ per un $l \geq 1$. Si utilitzem el binomi de Newton i agafem termes que contenen g com a factor, tenim $1 - \tilde{g}g \in I$ per un $\tilde{g} \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. En A, aquesta inclusió implica que $[1] = [\tilde{g}][g]$. Per tant, g té inversa $[\tilde{g}]$ a A. Però, $[g][z] = [f - \lambda][z] = [0]$ en A, per tant, $[z] = [\tilde{g}][g][z] = [\tilde{g}][f - \lambda][z] = [0]$. Contradicció. Aleshores, λ ha de ser un valor de f en $V(I)$.

$\boxed{c \Rightarrow a:}$ Sigui $\lambda = f(p)$ per $p \in V(I)$. Com $h_f(m_f) = 0$, tenim que $h_f([f]) = [0]$ i $h_f(f) \in I$. Això vol dir que $h_f(f) = 0$ a tots els punts de $V(I)$. Per tant, $h_f(\lambda) = h_f(f(p)) = 0$.

□

Amb aquest teorema veiem que els valors propis que hem mencionat abans són els valors de f a $\mathbf{V}(Q_i) = \{p_i\}$ i que $f(p_i)$ és l'únic valor propi, com volíem. □

Proposició 4.14. *Sigui* $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ *un ideal de dimensió zero tal que l'origen és un punt de* $\mathbf{V}(I)$ *de multiplicitat* m. *Llavors*

$$m = dim\ k[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle} / I k[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle} = dim\ k[[x_1, \ldots, x_n]] / I k[[x_1, \ldots, x_n]].$$

Si, a més a més, $k = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$, *de tal forma que podem parlar de convergència, tenim*

$$m = dim\ k\{x_1, \ldots, x_n\} / I k\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Demostració. La demostració d'aquest teorema la farem més endavant, ja que tindrem més eines per facilitar el procés. □

Definició 4.15. *Sigui* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *una funció analítica en un conjunt obert* $U \subset \mathbb{C}^n$. *Tindrà una singularitat al punt* $p \in U$ *si la* n *derivada de primer ordre de* f *té un zero comú amb* f *a* p.

Definició 4.16. *Sigui* p *un punt singular. Direm que és aïllat si hi ha un entorn de* p *que no conté cap altres punts singulars de* f.

Definició 4.17. *Sigui $f \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ amb una singularitat aïllada a l'origen. El nombre de Milnor del punt singular, amb la notació de μ, està donat per*

$$\mu = dim\ \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}/\langle \partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n \rangle.$$

Com més gran sigui el nombre de Milnor, més complexa és l'estructura del punt singular.

Definició 4.18. *El nombre de Tjurina es defineix com*

$$\tau = \ dim\ k[[x_1, \ldots, x_n]]/\langle f, \partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n \rangle.$$

Per qualsevol k, el nombre de Tjurina és finit quan f té una singularitat aïllada.

Veurem exemples de càlcul d'aquests nombres al capítol *Aplicació de les bases estàndards.*

5 Ordres de termes i divisió

Quan treballem amb un ideal $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$, podem reemplaçar I amb l'ideal dels termes líders $\langle \mathrm{LT}(I) \rangle$. Per exemple, si I és de dimensió zero, podem trobar la dimensió de l'anell quocient $k[x_1, \ldots, x_n]/I$ utilitzant que $\dim k[x_1, \ldots, x_n]/I = \dim k[x_1, \ldots, x_n]/\langle \mathrm{LT}(I) \rangle$. Aquesta última dimensió és fàcil de calcular ja que $\langle \mathrm{LT}(I) \rangle$ és un ideal monomial, per tant, la dimensió és el nombre de monomis que no es troben a l'ideal. Ens adonem que el més important és trobar $\langle \mathrm{LT}(I) \rangle$, que es pot trobar mitjançant la base de Gröbner de l'ideal I en ordres monomials.

Una pregunta natural seria si el mateix procés podria funcionar en un anell local. Per fer aquest procés anàleg, haurem d'estudiar els ordres antigraduats. Per definició, aquests ordres satisfan

$$|\alpha| < |\beta| \Rightarrow x^\alpha > x^\beta.$$

Treballarem amb ordres totals i compatibles amb la multiplicació.

Definició 5.1. *Direm que un ordre és total si per qualsevol $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, solament un dels següents és veritat:*

$$x^\alpha > x^\beta, x^\alpha = x^\beta, \text{ o } x^\alpha < x^\beta.$$

Definició 5.2. *Direm que un ordre és compatible per multiplicació si per qualsevol $\gamma \in \mathbb{Z}^n_{\leq 0}$ es compleix que si $x^\alpha > x^\beta$, llavors $x^{\alpha+\gamma} > x^{\beta+\gamma}$.*

Anem a veure un exemple. Considerem els termes a $k[x]$. Sigui l'ordre

$$1 > x > x^2 > x^3 > \cdots.$$

Aquest és l'únic ordre antigraduat ja que si $|\alpha| < |\beta| \Rightarrow x^\alpha > x^\beta$. Aquest ordre no és un bon ordre ja que no hi ha element mínim, sempre trobarem γ tal que $|\alpha| < |\gamma|, \forall \alpha$ i per tant, sempre hi haurà un x^γ tal que $x^\alpha > x^\gamma$.

Tot ordre total que sigui compatible amb la multiplicació i que satisfaci $1 > x_i$ per tota $i, 1 \leq i \leq n$ s'anomena ordre local. Un ordre antigraduat és un ordre local però no la implicació inversa.

A continuació, altres tipus d'ordres.

Definició 5.3 (Ordre Lexicogràfic Antigraduat)**.** *Sigui $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. Direm que $x^\alpha >_{alex} x^\beta$ si*

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i < |\beta| = \sum_{i=1}^{n} \beta_i,$$

o si

$$|\alpha| = |\beta| \text{ i } x^\alpha >_{lex} x^\beta.$$

Definició 5.4 (Ordre Revlex Antigraduat)**.** *Sigui $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. Diem que $x^\alpha >_{arevlex} x^\beta$ si*

$$|\alpha| < |\beta|, \text{ o } |\alpha| = |\beta| \text{ i } x^\alpha >_{revlex} x^\beta.$$

Podem generalitzar aquest tipus d'ordres amb els ordres de semigrups.

Definició 5.5. *Un ordre $>$ a $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ o, equivalentment, en el conjunt de monomis x^α, $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ a $k[x_1, \ldots, x_n]$ o qualsevol dels anells locals $k[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle}$, o $k[[x_1, \ldots, x_n]]$, s'anomenarà ordre de semigrup si satisfà:*

a. $>$ *és un ordre total a* $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$.

b. $>$ *és compatible amb la multiplicació dels monomis.*

Els ordres de semigrups inclouen els ordres monomials, que tenen la propietat de bon ordre sobre la suma.

Podem especificar ordres monomials com matrius. Sigui M una matriu $m \times n$ real amb files $w_1, \ldots, w_m$, definim $x^\alpha >_M x^\beta$ si hi ha $l \leq m$ tal que $\alpha \cdot w_i = \beta \cdot w_i$ per $i = 1, \ldots, l-1$, però $\alpha \cdot w_l > \beta \cdot w_l$. El càlcul de la matriu M també es pot fer amb ordres de semigrup.

Anem a estudiar propietats algunes propietats de M i donar alguns exemples.

- $>_M$ és compatible amb la multiplicació per tota matriu M.

  Si $x^\alpha >_M x^\beta$, cal veure que també es compleix $x^{\alpha+\gamma} >_M x^{\beta+\gamma}$. Sabem que si $x^\alpha >_M x^\beta$, tenim $l \leq m$ tal que $\alpha \cdot w_i = \beta \cdot w_i$ per $i = 1, \ldots, l-1$, però $\alpha \cdot w_l > \beta \cdot w_l$. Aleshores,
  $$1 \cdot \alpha \cdot w_i = \frac{\gamma}{\gamma} \cdot \alpha \cdot w_i = \beta \cdot w_i,$$
  que això és equivalent a
  $$\gamma \cdot \alpha \cdot w_i = \gamma \cdot \beta \cdot w_i.$$
  En el cas de $i = l$, també es compleix la desigualtat si multipliquem per γ:
  $$\beta \cdot \alpha \cdot w_l > \gamma \cdot \beta \cdot w_l.$$

- L'ordre monomial *lex* amb $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$ és l'ordre $>_I$, on I és la matriu identitat $n \times n$.

  Sigui $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ i $x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_n^{\beta_n}$. Sigui w_i les files de la matriu Identitat.

  Al fer el producte de $\alpha \cdot w_i$ i $\beta \cdot w_i$, anirem obtenint vectors amb tots els valors iguals a 0 menys el de la posició i que serà igual a α_i i β_i, respectivament. Per tant, si tenim que $\alpha \cdot w_i = \beta \cdot w_i$, $\alpha_i - \beta_i$ serà igual a 0. En canvi, en el moment que tinguem $\alpha \cdot w_l > \beta \cdot w_l$, el valor $\alpha_l - \beta_l > 0$ i, per tant, complirà les propietats de l'ordre lexicogràfic. Haurem vist que $\alpha >_{\text{lex}} \beta$, que és el mateix que $\alpha >_I \beta$.

- L'ordre *alex* és l'ordre $>_M$ definit per la matriu
  $$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}.$$

  Sigui $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. Sigui $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_n^{\beta_n}$ i la matriu M definida. Volem fer el producte de $\alpha \cdot w_i$ on w_i són les files, per tant, multiplicarem $M \cdot \alpha$ per a que tot es vegi en la mateixa matriu resultant. Fem el producte i obtenim: $\begin{pmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 - \alpha_2 \cdots - \alpha_n \\ -\alpha_2 \cdots - \alpha_n \\ \vdots \\ -\alpha_n \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta_1 - \beta_2 \cdots - \beta_n \\ -\beta_2 \cdots - \beta_n \\ \vdots \\ -\beta_n \end{pmatrix}$. Seguint amb la definició de $>_M$, si $\alpha \cdot w_1 < \beta \cdot w_1$,

$\alpha <_M \beta$. Però $\alpha \cdot w_1 < \beta \cdot w_1$ és el mateix que $-\sum_{j=1}^n \alpha_j < -\sum_{j=1}^n \beta_j$, que és igual a $|\sum_{j=1}^n \alpha_j| > |\sum_{j=1}^n \beta_j|$. Seguint la definició de *alex*, vol dir que $\alpha <_{\text{alex}} \beta$, com obtenim amb $>_M$.

Suposem ara que tenim $\alpha \cdot w_i = \beta \cdot w_i$ per $i = 1, \dots, l-1$ i $\alpha \cdot w_l > \beta \cdot w_l$. En aquest cas $x^\alpha >_M x^\beta$. Sabem que $\alpha \cdot w_i = \beta \cdot w_i$ és igual a $-\sum_{j=i}^n \alpha_j = -\sum_{j=i}^n \beta_j$ per $i = 1, \dots l-1$ i que $-\sum_{j=l}^n \alpha_j > -\sum_{j=l}^n \beta_j$, equivalent a $\sum_{j=l}^n \alpha_j < \sum_{j=l}^n \beta_j$. Per tant, $\sum_{j=l}^n \beta_j - \sum_{j=l}^n \alpha_j > 0$ que això implica $x^\beta >_{\text{lex}} x^\alpha$. Segueix la definció de *alex*.

- L'ordre *arevlex* és l'ordre $>_M$ amb la matriu

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sigui $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$, $x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n}$ i M la matriu donada anteriorment.

Volem fer el producte de $\alpha \cdot w_i$ on w_i són les files, per tant, multiplicaré $M \cdot \alpha$ per a que tot es vegi en la mateixa matriu resultant, com abans. Fem el producte i obtenim: $\begin{pmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 - \alpha_2 \cdots - \alpha_n \\ -\alpha_n \\ \vdots \\ -\alpha_2 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta_1 - \beta_2 \cdots - \beta_n \\ -\beta_n \\ \vdots \\ -\beta_2 \end{pmatrix}$.

En el cas on $\alpha \cdot w_1 > \beta \cdot w_1$ ($x^\alpha >_M x^\beta$), tindríem $-\sum_{i=1}^n \alpha_i > -\sum_{i=1}^n \beta_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i < \sum_{i=1}^n \beta_i \Rightarrow |\sum_{i=1}^n \alpha_i| < |\sum_{i=1}^n \beta_i| \Rightarrow |\alpha| < |\beta| \Rightarrow x^\alpha >_{\text{arevlex}} x^\beta$.

Si $\alpha \cdot w_i = \beta \cdot w_i$ per $i = 1, \dots, l-1$ i $\alpha \cdot w_l > \beta \cdot w_l$, que és igual a dir que $x^\alpha >_M x^\beta$, he de veure que $x^\alpha >_{\text{revlex}} x^\beta$. Si es compleix ja haurem vist que $x^\alpha >_{\text{arevlex}} x^\beta$.

Si $\alpha \cdot w_l > \beta \cdot w_l \Rightarrow -\alpha_{n+2-l} > -\beta_{n+2-l} \Rightarrow \alpha_{n+2-l} < \beta_{n+2-l} \Rightarrow \alpha_{n+2-l} - \beta_{n+2-l} < 0 \Rightarrow x^\alpha >_{\text{revlex}} x^\beta$, com volíem veure ja que sabem que els valors a l'esquerra de $n+2-l$ són 0, ja que $\alpha \cdot w_i = \beta \cdot w_i$, $i = 1, \dots, l-1$.

Sigui $f = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha \in k[x_1, \dots, x_n]$ un polinomi i $>$ un ordre de semigrup. Definim el multigrau, el coeficient líder, el monomi líder, i el terme líder de f exactament igual que en un ordre monomial:

$$\text{multideg}(f) = \max\{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n : c_\alpha \neq 0\}$$

$$\text{LC}(f) = c_{\text{multideg}(f)}$$

$$\text{LM}(f) = x^{\text{multideg}(f)}$$

$$\text{LT}(f) = \text{LC}(f) \cdot \text{LM}(f).$$

A més a més, cada ordre de semigrup $>$ defineix un anell particular de fraccions a $k(x_1, \dots, x_n)$. Donat $>$, considerem el conjunt

$$S = \{1 + g \in k[x_1, \dots, x_n] : g = 0 \text{ o } \text{LT}_>(g) < 1\}.$$

S és tancat sota la multiplicació ja que si $\mathrm{LT}_>(g) < 1$ i $\mathrm{LT}_>(g') < 1$, $(1+g)(1+g') = 1 + g + g' + gg'$, i $\mathrm{LT}(g + g' + gg') < 1$ també per la definició d'ordre de semigrup.

Definició 5.6. *Sigui $>$ un ordre de semigrup en monomis a l'anell $k[x_1, \ldots, x_n]$ i sigui $S = \{1 + g : \mathrm{LT}(g) < 1\}$. La localització de $k[x_1, \ldots, x_n]$ respecte $>$ és l'anell*

$$Loc_>(k[x_1, \ldots, x_n]) = S^{-1}k[x_1, \ldots, x_n] = \{f/(1 + g) : 1 + g \in S\}.$$

Per exemple, si $>$ és un ordre monomial, no hi haurà monomis diferents de zero més petits que 1 tal que $S = \{1\}$ i $\mathrm{Loc}_>(k[x_1, \ldots, x_n]) = k[x_1, \ldots, x_n]$. Per l'altra banda, si $>$ és un ordre local, com $1 > x_i$ per tota i,

$$\{g : g = 0,\ \text{o } \mathrm{LT}_>(g) < 1\} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle.$$

A més a més, per un ordre local, tenim que S està contingut en un conjunt d'unitats a $k[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle}$, per tant, $\mathrm{Loc}_>(k[x_1, \ldots, x_n]) \subset k[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle}$. Ajustant constants entre el numerador i el denominador en $f/h \in k[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle}$, és fàcil veure que $f/h = f'/(1 + g)$ per un $1 + g \in S$. Si $>$ és un ordre local, llavors

$$\mathrm{Loc}_>(k[x_1, \ldots, x_n]) = k[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle}.$$

Com a exemple, utilitzant $>_{\mathrm{alex}}$ als termes de x i $>_{\mathrm{lex}}$ als termes de y, definim l'ordre mixte $>_{\mathrm{mixed}}$ amb $x^\alpha y^\beta >_{\mathrm{mixed}} x^{\alpha'} y^{\beta'}$ si $y^\beta >_{\mathrm{lex}} y^{\beta'}$, o $y^\beta = y^{\beta'}$ i $x^\alpha >_{\mathrm{alex}} x^{\alpha'}$.

És clar que $>_{\mathrm{mixed}}$ és un ordre de semigrup perquè està definit amb la combinació de dos ordres que sí que són de semigrup, *lex* i *alex*.

Si volem trobar la matriu M tal que $>_M = >_{\mathrm{mixed}}$, sabem que haurà de tenir relació amb les matrius M corresponents a *lex* i *alex*.

Sigui $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \ldots y_m^{\beta_m}$ i $x_1^{\alpha'_1} x_2^{\alpha'_2} \ldots x_n^{\alpha'_n} y_1^{\beta'_1} y_2^{\beta'_2} \ldots y_m^{\beta'_m}$. La proposta de la matriu M és la següent:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\
\hline
-1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0
\end{array}\right)$$

on el quadrant que representa l'ordre *alex* és de dimensió $n \times n$ i el quadrant que representa *lex* és de dimensió $m \times m$. La matriu és de dimensió $(m + n) \times (m + n)$.

Aquesta és la matriu que busquem ja que si fem la multiplicació de $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n & \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_m \end{pmatrix}$ per la nostra matriu M obtenim:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\
\hline
-1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0
\end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_n \\ -\alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_n \\ -\alpha_2 - \cdots - \alpha_n \\ \ldots \\ -\alpha_n \end{pmatrix}$$

La matriu compleix el que cal ja que primer mirarem si compleix l'ordre *lex*. Si hi ha una desigualtat, ja hem acabat, però si es compleix que $\beta_i = \beta_i^{'}$, compararem les α_i i $\alpha_i^{'}$ amb l'ordre *alex*, com volíem.

L'ordre $>_{\text{mixed}}$ no és un ordre ben ordenat perquè l'ordre lexicogràfic antigraduat és un ordre local i tot ordre local no és un ordre ben ordenat. Això es pot veure clarament si ordenem amb *mixed* $x^\alpha y^0$ amb $x^{\alpha'} y^0$.

Tampoc és un ordre antigraduat perquè l'ordre *lex* no ho és, no compleix la definició d'ordre antigraduat ($|\alpha| < |\beta| \Rightarrow x^\alpha > x^\beta$). Es veu clar si comparem amb l'ordre *mixed* $x^0 y^\beta$ amb $x^0 y^{\beta'}$.

Finalment, sigui $g \in k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$. Veurem que $1 >_{\text{mixed}} \mathrm{LT}_{>_{\text{mixed}}}(g)$ si i solament si g depèn solament de $x_1, \ldots, x_n$ i $g \in \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \subset k[x_1, \ldots, x_n]$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $1 >_{\text{mixed}} \mathrm{LT}_{>_{\text{mixed}}}(g)$, llavors *mixed* hauria de ser un ordre local. Però això solament passa si *mixed* és igual a *alex* perquè *lex* no és un ordre local. Per aconseguir això, l'element que volem ordenar en relació amb 1 solament pot dependre de les x_i, ja que si hi hagués una y_j, l'ordre *lex* faria que aquesta desigualtat no es pogués complir.

Com ja hem vist que g depèn solament de x_i podem escriure $g = \sum c_\alpha x^\alpha$. Suposem ara que $\mathrm{multideg}(g) = 0$ i $c_0 > 0$. Per tant, $c_0 >_{\text{mixed}} 1$ que contradiu la hipòtesi inicial. És a dir, perquè l'ordre sigui local sempre, $c_0 = 0$ a tota g tal que $1 >_{mixed} \mathrm{LT}_{>_{\text{mixed}}}(g)$. Però si $g = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 1}} c_\alpha x^\alpha$, això vol dir que $g \in \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \subset k[x_1, \ldots, x_n]$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si g depèn solament de $x_1, \ldots, x_n$ i $g \in \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in k[x_1, \ldots, x_n]$, vol dir que $c_0 = 0$ a $g = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$, ja que pertany al maximal $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. A més a més, l'ordre que utilitzarem a l'ordre *mixed* és l'ordre *alex* ja que no depèn de y_i. Sabem que *alex* és un ordre antigraduat i tot ordre antigraduat és local, és a dir, $1 > x_i$ per tota $i, 1 \leq 1 \leq n$. En particular, es complirà que $1 >_{\text{mixed}} \mathrm{LT}_{>_{\text{mixed}}}(g)$ ja que $\mathrm{LT}_{>_{\text{mixed}}}(g) = \mathrm{LC}(g) \cdot \mathrm{LM}(g)$ i $\mathrm{LT}(g) = c_{\mathrm{multideg}(g)}, \mathrm{LM}(g) = x^{\mathrm{multideg}(g)}, \mathrm{multideg}(g) = \max\{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} : c_\alpha \neq 0\}$ i $c_0 = 0$.

Proposició 5.7. *Sigui* $R = k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$. *Llavors,* $Loc_{>_{mixed}}(R)$ *és l'anell* $k[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle}[y_1, \ldots, y_m]$, *on els seus elements es poden escriure com polinomis a* y_j *amb coeficients que són funcions racionals de* x_i *a* $k[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle}$.

Demostració. Per definició, sabem que $\mathrm{Loc}_{>_{\text{mixed}}}(R) = S^{-1} k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m] = \{\frac{f}{1+g} : 1 + g \in S\}$ i $S = \{1 + g \in k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m] : \mathrm{LT}_{>_{\text{mixed}}}(g) < 1\}$.

Per tant, tindrem que $\frac{f}{1+g} = \frac{1}{1+g} \sum_{\{\alpha,\beta\}} c_\theta x^\alpha y^\beta = \sum_{\{\alpha,\beta\}} \frac{c_\theta x^\alpha}{1+g} y^\beta$ on $\frac{c_\theta x^\alpha}{1+g}$ és una funció racional de x_i a $k[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle}$.

Efectivament, $\mathrm{Loc}_{>_{\text{mixed}}}(R)$ definit d'aquesta forma és un anell perquè compleix les propietats d'anell que són:

(Loc, $+$)
- Sigui $g, f, h \in \mathrm{Loc}_{>_{\text{mixed}}}$ es compleix l'associativitat respecte la suma.
- $0 \in \mathrm{Loc}_{>_{\text{mixed}}}$. Per tant, existeix el neutre.
- Si $\frac{f}{1+g} \in \mathrm{Loc}_{>_{\text{mixed}}}$, llavors $\frac{-f}{1+g} \in \mathrm{Loc}_{>_{\text{mixed}}}$.
- Sigui $f, g \in \mathrm{Loc}_{>_{\text{mixed}}}$, llavors $f + g = g + f$, és a dir, es compleix la commutativitat.

(Loc, $\cdot$)
- Sigui $f, g, h \in \mathrm{Loc}_{>_{\text{mixed}}}$, llavors $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$, és a dir, es compleix l'associativitat respecte el producte.

– Sigui $f, g, h \in \mathrm{Loc}_{>_{\text{mixed}}}$, llavors $(f+g)\cdot h = f\cdot h + g\cdot h$, és a dir, es compleix la propietat distributiva respecte la suma.

$\square$

De forma anàloga a l'ordre anterior, comparant els termes que depenen de x primer, tenim un nou ordre definit per $>_{\text{mixed}'}$ amb $x^{\alpha}y^{\beta} >_{\text{mixed}'} x^{\alpha'}y^{\beta'}$ si $x^{\alpha} >_{\text{alex}} x^{\alpha'}$ o $x^{\alpha} = x^{\alpha'}$ i $y^{\beta} >_{\text{lex}} y^{\beta'}$.

És evident que $>_{\text{mixed}'}$ és un ordre de semigrup ja que $>_{\text{mixed}'}$ és una combinació de l'ordre *lex* i l'ordre *alex*, ambdós ordres de semigrup.

Ara, trobarem la matriu U tal que $>_{\text{mixed}'} = >_U$. Sigui $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}y_1^{\beta_1}y_2^{\beta_2}\dots y_m^{\beta_m}$. La proposta de la matriu U tal que $>_{\text{mixed}'} = >_U$ és la següent:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}
-1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{array}\right)$$

on el quadrant que representa l'ordre *alex* és de dimensió $n \times n$ i el quadrant que representa *lex* és de dimensió $m \times m$. La matriu U és de dimensió $(m+n)\times(m+n)$.

Aquesta és la matriu que busquem ja que el producte

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}
-1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_n \\ -\alpha_2 - \cdots - \alpha_n \\ \cdots \\ -\alpha_n \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

té com a resultat un vector que compleix el que volíem al comparar-ho amb $x^{\alpha'}y^{\beta'}$. La matriu U és la correcta per l'ordre que estem estudiant.

Com l'ordre anterior, $>_{\text{mixed}'}$ no és un ordre ben ordenat perquè l'ordre lexicogràfic antigraduat és un ordre local i tot ordre local no és un ordre ben ordenat.

Tampoc és un ordre antigraduat perquè l'ordre *lex* no ho és.

Ens podem preguntar quins elements $f \in k[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ satisfan $1 >_{\text{mixed}'} \mathrm{LT}_{>_{\text{mixed}'}}(f)$.

Com hem vist abans, que $1 >_{\text{mixed}'} \mathrm{LT}_{>_{\text{mixed}'}}(f)$ és que $>_{\text{mixed}'}$ es comporta com un ordre local. Per a què això passi, no hauríem d'utilitzar l'ordre *lex* per trobar $\mathrm{LT}_{>_{\text{mixed}'}}(f)$.

Si utilitzem *lex* per definir $\mathrm{LT}_{>_{\text{mixed}'}}(f)$, això vol dir que tot element de f no depèn de x_i. Per tant, estaríem comparant 1 amb un element que no depèn de x_i. Això implica que $1 >_{\text{mixed}} \mathrm{LT}_{>_{\text{mixed}'}}(f)$ mai seria cert ja que aquesta desigualtat mai es compleix amb l'ordre *lex*.

Dit això, és necessari que, com a mínim, un element de f depengui de x_i. D'aquesta forma, $\mathrm{LT}_{>_{\mathrm{mixed}'}}(f)$ sempre serà un element que dependrà de x_i i la desigualtat desitjada sempre serà certa.

Per acabar amb l'estudi de l'ordre $>_{\mathrm{mixed}'}$, calcularem $\mathrm{Loc}_{>_{\mathrm{mixed}'}}(k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m])$.

Per definició, $\mathrm{Loc}_{>_{\mathrm{mixed}}}(R) = S^{-1}k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m] = \{\frac{g}{1+f} : 1 + f \in S\}$ i $S = \{1 + f \in k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m] : \mathrm{LT}_{>_{\mathrm{mixed}}}(f) < 1\}$.

Hem vist quins són els f tal que $\mathrm{LT}_{>_{\mathrm{mixed}}}(f) <_{\mathrm{mixed}} 1$. Per tant, els element de $\mathrm{Loc}_{>_{\mathrm{mixed}}}(R)$ són de la forma $\frac{g}{1+f}$ on f té com a mínim un element que depèn de x_i.

Definit d'aquesta forma, $\mathrm{Loc}_{>_{\mathrm{mixed}}}(R)$ també és un anell ja que compleix les propietats dites anteriorment.

L'ordre $>_{\mathrm{mixed}}$ té la propietat d'eliminació: si $x^\alpha >_{\mathrm{mixed}} x^{\alpha'}y^{\beta'}$, llavors $\beta' = 0$. Equivalentment, qualsevol monomi que conté un y_j és més gran que els altres monomis que solament contenen x_i. Si el terme líder d'un polinomi amb ordre $>_{\mathrm{mixed}}$ depèn únicament de x_i, el polinomi no depèn de cap y_j.

Donat qualsevol ordre de semigrup $>$ en monomis a $k[x_1, \ldots, x_n]$, hi ha una extensió natural de $>$ a $\mathrm{Loc}_>(k[x_1, \ldots, x_n])$, que també anomenarem $>$. Si $1 + g \in S = \{1 + g : \mathrm{LT}(g) < 1\}$, la funció racional $1/(1 + g)$ és una unitat a $\mathrm{Loc}_>(k[x_1, \ldots, x_n])$, així que no hauria d'afectar en la definició del terme líder de $f/(1 + g)$. Per qualsevol $h \in \mathrm{Loc}_>(k[x_1, \ldots, x_n])$, escrivim $h = f/(1 + g)$ i definim

$$\mathrm{multideg}(h) = \mathrm{multideg}(f)$$

$$\mathrm{LC}(h) = \mathrm{LC}(f)$$

$$\mathrm{LM}(h) = \mathrm{LM}(f)$$

$$\mathrm{LT}(h) = \mathrm{LT}(f).$$

Proposició 5.8. *Sigui $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ i sigui $h \in A$. Llavors multideg(h) $\mathrm{LC}(h)$, $\mathrm{LM}(h)$, $\mathrm{LT}(h)$ estan ben definits a Loc$_>(A)$. És a dir, si $h = f/(1 + g) = f'/(1 + g')$, el multideg$(h)$, $\mathrm{LC}(h)$, $\mathrm{LM}(h)$, $\mathrm{LT}(h)$ són iguals si utilitzem f o f' a h. També si $r \in R$ es defineix amb l'equació*

$$h = \mathrm{LT}(h) + r,$$

aleshores $r = 0$ o $\mathrm{LT}(r) < \mathrm{LT}(h)$.

Demostració. Per demostrar la primera part, sabem que si $m \in \mathrm{Loc}_>(A)$ i $m = \frac{f}{1+g}$, llavors $\mathrm{LT}(m) \in \mathrm{Loc}_>(A)$.

El que volem veure és que si $h = \frac{f}{1+g} = \frac{f'}{1+g'} \in A$, llavors $\mathrm{multideg}(h) = \mathrm{multideg}(f) = \mathrm{multideg}(f'), \mathrm{LC}(h) = \mathrm{LC}(f) = \mathrm{LC}(f'), \mathrm{LM}(h) = \mathrm{LM}(f) = \mathrm{LM}(f')$ i $\mathrm{LT}(h) = \mathrm{LT}(f) = \mathrm{LT}(f')$.

Primer, cal veure que $h \in \mathrm{Loc}_>(A)$, ja que de moment, solament tenim $h \in A$. Però si el $\mathrm{LT}(h) \in \mathrm{Loc}_>(A)$, això vol dir que $\mathrm{LT}(h)$ serà de la següent forma $\frac{c_\alpha x^\alpha}{1+g}$, que implica que $1 + g$ és una unitat a $\mathrm{Loc}_>(A)$. Per tant, $h \in \mathrm{Loc}_>(A)$ també (per ser $1 + g$ unitat).

Un cop hem vist que $h \in \mathrm{Loc}_>(A)$, és molt fàcil demostrar que es compleix el que demana l'enunciat, ja que en ambdós casos, tant $1+g$ com $1+g'$ seran unitats a $\mathrm{Loc}_>(A)$. D'aquesta forma, per determinar $\mathrm{multideg}(h), \mathrm{LC}(h), \mathrm{LM}(h), \mathrm{LT}(h)$ solament ens haurem de fixar en f i f'.

Però com hem definit abans, es compliran les igualtats desitjades.

A continuació, anem a estudiar la r de $h = \mathrm{LT}(h) + r$. D'una altra forma , $r = h - \mathrm{LT}(h)$.

Per veure quina serà la r, treballarem amb les propietats que hem definit anteriorment, és a dir, si $h \in \mathrm{Loc}_{>}(A)$, amb $h = \frac{f}{1+g}$, llavors $\mathrm{multideg}(h) = \mathrm{multideg}(f), \mathrm{LC}(h) = \mathrm{LC}(f), \mathrm{LM}(f) = \mathrm{LM}(f), \mathrm{LT}(h) = \mathrm{LT}(f)$.

Per tant, en aquest cas, s'hauria de complir que $\mathrm{LT}(r) = \mathrm{LT}(h - \mathrm{LT}(h))$.

Estudiem casos. Si $\mathrm{LT}(r) = 0$, $0 = \mathrm{LT}(h - \mathrm{LT}(h))$ i $r = 0$. Per a què es compleixi aquesta igualtat, h ha de ser igual a $\mathrm{LT}(h)$. D'aquesta manera, $0 = 0$. Tindríem la igualtat inicial desitjada, que és $h = \mathrm{LT}(h)$.

D'altra banda, suposem que $\mathrm{LT}(r) \neq 0$. Per tant, tindrem la següent igualtat

$$0 \neq \mathrm{LT}(r) = \mathrm{LT}(h - \mathrm{LT}(h)).$$

Això implica que $h = \mathrm{LT}(h) +$ altres elements, i per tant, $\mathrm{LT}(h - \mathrm{LT}(h)) < \mathrm{LT}(h)$. D'aquesta forma, ja hem vist el que si $\mathrm{LT}(r) \neq 0$, llavors $\mathrm{LT}(r) < \mathrm{LT}(h)$. □

5.1 L'algorisme de divisió en Anells Locals

La finalitat d'introduir els ordres de semigrups és desenvolupar una extensió de l'algorisme de divisió a $k[x_1, \ldots, x_n]$ que ens donarà informació sobre els ideals de $R = \mathrm{Loc}_{>}(k[x_1, \ldots, x_n])$. El pas clau de l'algoritme de divisió per polinomis és la reducció d'un polinomi f per un altre polinomi g. Si $\mathrm{LT}(f) = m \cdot \mathrm{LT}(g)$, per algun terme $m = cx^\alpha$, definim

$$\mathrm{Red}(f, g) = f - mg,$$

i diem que hem reduït f per g. El polinomi $\mathrm{Red}(f, g)$ és el residu de la primera divisió de f entre g. En general, l'algorisme de divisió divideix un polinomi pel conjunt d'altres polinomis reduint repetidament el polinomi per elements del conjunt i afegint termes líders al residu quan no hi ha reduccions possibles. Aquesta divisió sempre és finita en el cas dels polinomis perquè la successió de termes líders forma una seqüència estrictament decreixent, i aquestes seqüències sempre acaben perquè un ordre monomial sempre és un bon ordre.

En el cas d'un ordre local en anell de sèries de potències, podem definir $\mathrm{Red}(f, g)$ de la mateixa forma. S'ha de tenir en compte, però, que les reduccions no sempre són finites. Per exemple, suposem $f = x$ i decidim dividir f entre $g = x - x^2$. Tenim les següents reduccions:

$$f_1 = \mathrm{Red}(f, g) = x^2$$
$$f_2 = \mathrm{Red}(f_1, g) = x^3$$
$$\cdots$$
$$f_n = \mathrm{Red}(f_{n-1}, g) = x^{n-1}$$

i és evident que mai acaba. La dificultat és que sota l'ordre antigraduat a $k[x]_{\langle x \rangle}$ o $k[[x]]$, tenim la seqüència estrictament decreixent dels termes $x > x^2 > x^3 > \cdots$.

Per no tenir aquesta dificultat, podem utilitzar la idea de Mora. Quan dividim f_i per g, ens permeten reduir no únicament per g, sinó que també pel resultat de qualsevol reducció anterior. Aquestes reduccions són f mateix i qualsevol $f_1, \dots, f_{i-1}$. D'aquesta forma, tornant a l'exemple anterior on dividim $f = x$ per $g = x - x^2$, la primera reducció és $f_1 = \mathrm{Red}(f, g) = x^2$. Però al fer la següent reducció, podem reduir f_1 per f també. Per tant,

$$\mathrm{Red}(f_1, f) = \mathrm{Red}(x^2, x) = 0.$$

Que aquesta reducció sigui igual a zero implica que $x^2 = xf$. Si combinem això amb l'equació $f = 1 \cdot g + x^2$ (on $f_1 = \mathrm{Red}(f, g) = x^2$), obtenim la relació $f = g + xf$, o $(1 - x)f = g$. Aquesta última equació ens diu que a $k[x]_{\langle x \rangle}$, tenim

$$f = \frac{1}{1-x} g.$$

En altres paraules, el residu de la divisió de f entre g és zero ja que x i $x - x^2 = x(1-x)$ generen el mateix ideal a $k[x]_{\langle x \rangle}$ o $k[[x]]$.

El procés que s'ha seguit en aquest exemple, primer dividir per g i després per f, no sempre funcionarà per obtenir el resultat desitjat.

Podem veure que $f = x + x^2$ i $g = x + x^3 + x^5$ també generen el mateix ideal a $k[[x]]$ i $k[x]_{\langle x \rangle}$ encara que no es segueixi el mateix procés de divisió que en l'exemple anterior.

Sigui $f_0 = f = x + x^2$ i prenem l'ordre antigraduat.

$$\begin{array}{lllllll}
f_1 & = & \mathrm{Red}(f, g) & = & x + x^2 - 1 \cdot (x + x^3 + x^5) & = & x^2 - x^3 - x^5 \\
f_2 & = & \mathrm{Red}(f_1, f) & = & x^2 - x^3 - x^5 - x \cdot (x + x^2) & = & -2x^3 - x^5 \\
f_3 & = & \mathrm{Red}(f_2, f) & = & -2x^3 - x^5 - (-2x^2) \cdot (x + x^2) & = & 2x^4 - x^5 \\
f_4 & = & \mathrm{Red}(f_3, f) & = & 2x^4 - x^5 - 2x^3 \cdot (x + x^2) & = & -3x^5 \\
f_5 & = & \mathrm{Red}(f_4, f) & = & -3x^5 - (-3x^4) \cdot (x + x^2) & = & 3x^6
\end{array}$$

Arribats a aquest punt, $f_6 = \mathrm{Red}(f_5, f_4) = 0$.

Per tant, tenim

$$\begin{array}{lll}
f & = & 1 \cdot g + f_1 \\
f_1 & = & x \cdot f + f_2 \\
f_2 & = & -2x^2 \cdot f + f_3 \\
f_3 & = & 2x^3 \cdot f + f_4 \\
f_4 & = & -3x^4 \cdot f + f_5
\end{array}$$

És a dir, $f = g + (x - 2x^2 + 2x^3 - 3x^4)f + f_5$. També tenim que $f_5 = 3x^6 = 3x^5 \cdot x = 3x^5 \cdot \frac{x+x^2}{1+x} = \frac{3x^5}{1+x} f$, que és equivalent a $(1+x)f = (1+x)g + (1+x)(x - 2x^2 + 2x^3 - 3x^4)f + 3x^5 f$. Passant xf a l'altra banda, tenim

$$f = (1 + x)g + (1 + x)(x - 2x^2 + 2x^3 - 3x^4)f + (3x^5 - x)f,$$

és a dir, $1 + x$ unitat i $(1 + x)(x - 2x^2 + 2x^3 - 3x^4) + 3x^5 - x = 0$ quan $x = 0$.

Podem escriure f com $f = \frac{1+x}{1+(1+x)(x-2x^2+2x^3-3x^4)+3x^5-x} g$ on $\frac{1+x}{1+(1+x)(x-2x^2+2x^3-3x^4)+3x^5-x}$ és també una unitat.

Així hem vist el que volíem, f i g generen el mateix ideal tant en $k[x]_{\langle x \rangle}$ com $k[[x]]$.

Definició 5.9. *Cada ordre de semigrup $>$ de monomis a x_i s'estén a un grup de semiordre $>'$ de monomis a $t, x_1, \dots, x_n$ de la forma que segueix. Definim $t^a x^\alpha >' t^b x^\beta$ si $a + |\alpha| > b + |b|$ o bé $a + |\alpha| = b + |\beta|$ i $x^\alpha > x^\beta$.*

Definit aquest ordre de semigrup, podem enunciar el teorema que descriu l'algorisme de Mora. Abans, uns breus comentaris. Com ja sabem, l'algorisme de Mora és l'anàleg a l'algorisme de divisió en Anells de Polinomis. Una de les majors diferencies entre aquests dos algorismes és que, en el cas dels Anells de Polinomis, cap element del residu que obtenim és divisible per cap $\mathrm{LT}(f_i)$, on f_i són els polinomis pels quals volem dividir f. En canvi, en el cas de Mora, veurem que el terme líder del residu no serà divisible per cap $\mathrm{LT}(f_i)$ però la resta d'elements no han de complir aquesta propietat. També és important treballar l'algorisme de Mora sobre l'anell $k[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle}$. Si $R = k[[x_1, \ldots, x_n]]$ o $k\{x_1, \ldots, x_n\}$, $f, g \in R$, l'algorisme no es podrà acabar ja que hi haurà infinits càlculs si en la divisió de f entre g obtenim sèries amb infinits termes diferents de zero.

Teorema 5.10 (Algorisme de la Forma Normal Homogènia de Mora). *Donats polinomis homogenis diferents de zero $F, F_1, \ldots, F_s$ a $k[t, x_1, \ldots, x_n]$ i l'ordre monomial $>'$ que estén l'ordre de semigrup $>$ a monomis a x_i, hi ha un algorisme per produir polinomis homogenis $U, A_1, \ldots, As, H \in k[t, x_1, \ldots, x_n]$ que satisfan*

$$U \cdot F = A_1F_1 + \cdots + A_sF_s + H,$$

on $\mathrm{LT}(U) = t^a$ per alguna a,

$$a + \ deg(F) = \ deg(A_i) + \ deg(F_i) = \ deg(H)$$

per qualsevol $A_i, H \neq 0, t^a\mathrm{LT}(F) \geq' \mathrm{LT}(A_i)\mathrm{LT}(F_i)$, i cap $\mathrm{LT}(F_i)$ divideix $t^b\mathrm{LT}(H)$ per tot $b \geq 0$.

Demostració. A continuació, l'algorisme per calcular el residu H. Un component important de l'algorisme és el conjunt L que són els possibles divisors pels passos de reducció. A mida que l'algorisme va avançant, aquest conjunt guarda els resultats de les reduccions anteriors per utilitzar-los després.

Input $= F, F_1, \ldots, F_s \in k[t, x_1, \ldots, x_n]$ homogenis i diferents de zero.

Output $= H$ com diu el teorema.

```
H := F; L := {F1, ..., Fs}; M := { G pertany a L : LT(G)|LT(tªH) per alguna a}
WHILE( H != 0 i M != 0) DO
    SELECT G que pertany a M amb la menor a
    IF a>0 THEN
        L := L unió {H}
    H := Red(tªH, G)
    IF H!= 0 THEN
        M := {G pertany a L : LT(G) |LT(tªH) per alguna a}
```

L'algorisme acaba sigui quin sigui l'input inicial i calcula correctament H com es defineix a l'enunciat del teorema.

Per veure que acaba, sigui $\mathcal{M}_j$ l'ideal monomial

$$\langle \mathrm{LT}(L)\rangle = \langle \mathrm{LT}(G) : G \in L\rangle \subset k[t, x_1, \ldots, x_n]$$

després del pas j al WHILE ($j \geq 0$). Aquest while deixa L igual o bé afegeix el polinomi H. Això vol dir que

$$\mathcal{M}_j \subset \mathcal{M}_{j+1}.$$

Cal tenir en compte que quan H és afegit a L, $\mathrm{LT}(H)$ no pertany a $\mathcal{M}_j$, perquè si fos així tindriem

$$\mathrm{LT}(G)|\mathrm{LT}(H)$$

per un $G \in L$. Això vol dir que

$$\mathrm{LT}(G)|\mathrm{LT}(t^0 H),$$

i seria contradictori amb el nostre H escollit ja que a és minimal, i afegint H a L requereix que a sigui més gran que 0. Segueix que $\mathcal{M}_j \subset \mathcal{M}_{j+1}$ és una inclusió estricte amb un nou element afegit a L al pas j.

Com l'anell de polinomis $k[t, x_1, \ldots, x_n]$ compleix les condicions de cadena ascendent d'ideals, hi ha alguna N tal que $\mathcal{M}_N = \mathcal{M}_{N+1} = \cdots$. Com acabem de veure, no hi ha nous elements afegits a L després del N pas al while. A partir d'aquest moment, l'algorisme continua amb un conjunt fix de divisors L, i a cada pas, la reducció disminueix el terme líder de H amb l'ordre $>'$. Com $>'$ és un ordre monomial a $k[t, x_1, \ldots, x_n]$, el procés ha d'acabar com en la prova de l'algorisme de divisió que ja coneixem.

Per demostrar que l'algorisme és acurat, observem que l'algorisme acaba quan $H = 0$ o $M = \emptyset$. En aquest últim cas, $\{F_1, \ldots, F_n\} \subset L$ ens diu que $\mathrm{LT}(F_i)$ no divideix $\mathrm{LT}(t^b H) = t^b \mathrm{LT}(H)$ per qualsevol $1 \leq i \leq s$ i $b \geq 0$. Per tant, quan H és diferent a 0, compleix les propietats de divisibilitat.

Falta veure que H satisfà $U \cdot F = A_1 F_1 + \cdots + A_s F_s + H$ amb $\mathrm{LT}(U) = t^a$. Demostrarem per inducció que per cada $j \leq 0$ es compleix

$$U_k F = A_{1,k} F_1 + \cdots + A_{s,k} F_s + H_k, 0 \geq k \geq j, \tag{5.1}$$

on $U_k, A_{i,k}$ homogenis amb $\mathrm{LT}(U_k) = t^{a_k}$ tal que $a_k + \deg(F) = \deg(A_{i,k}) + \deg(F_i) = \deg(H_k)$ i, per $0 < k \leq j$ $a_{k-1} \geq a_k$ i $t^{a_k} \mathrm{LT}(H_{k-1}) >' t^{a_{k-1}} \mathrm{LT}(H_k)$.

Com $H_0 = F$, agafant $U_0 = 1$ i $A_{l,0} = 0$ per tota l es compleix la igualtat que volem per $j = 0$. Sigui ara $j > 0$. Cal veure que el H_{j+1} que s'obté al pas j també compleix les condicions anteriors.

Si cap $\mathrm{LT}(G)$ divideix $t^b \mathrm{LT}(H_j)$ per cap $b \leq 0$ i $G \in L$, l'algorisme acaba amb H_j i ja hem acabat. Si no tenim aquest cas, alguna $G \in L$ satisfà $\mathrm{LT}(G)|\mathrm{LT}(t^a H_j)$ amb a minimal. Per tant, existeix N tal que $\mathrm{LT}(t^a H_j) = N \mathrm{LT}(G)$. Arribats a aquest punt, hi ha dues opcions : G pot ser un F_i per alguna i o igual a H_l per alguna $l < j$.

Si $G = F_i$ per alguna i, llavors $t^a H_j = N F_i + H_{j+1}$, és a dir, $H_{j+1} = t^a H_j - N F_i$. Multipliquem (5.1) per t^a:

$$\begin{aligned} t^a U_j F &= t^a A_{1,j} F_1 + \cdots + t^a A_{s,j} F_s + t^a H_j \\ &= t^a A_{1,j} F_1 + \cdots + t^a A_{s,j} F_s + N F_i + H_{j+1}. \end{aligned}$$

Prenent $U_{j+1} = t^a U_j$ i $A_{l,j+1}(x) = \begin{cases} t^a A_{l,j} & si \quad l \neq i \\ t^a A_{l,j} + N & si \quad l = i \end{cases}$ obtenim una l'expressió de (5.1) amb $k = j+1$. També, $\mathrm{LT}(U_{j+1}) = t^{a+a_j}$.

Mirem que realment es compleix $a + \deg(F) = \deg(H)$. Construïm $H_{j+1} = t^a H_j - N F_i$.

Sigui $H_1 = t^{a_1}H_0 - NF_i = t^{a_1}F - \frac{\mathrm{LT}(t^{a_1}F)}{\mathrm{LT}(F_i)}F_i$, calculem el grau:

$$\begin{aligned}
\deg(H_1) &= \max\{\ \deg(t^{a_1}F),\ \deg(\tfrac{\mathrm{LT}(t^{a_1}F)}{\mathrm{LT}(F_i)}F_i)\} \\
&= \max\{\ \deg(t^{a_1}F),\ \deg(\tfrac{\mathrm{LT}(t^{a_1}F)}{\mathrm{LT}(F_i)}) +\ \deg(F_i)\} \\
&= \max\{\ \deg(t^{a_1}F),\ \deg(t^{a_1}F) -\ \deg(F_i) +\ \deg(F_i)\} \\
&= \deg(t^{a_1}F) \\
&= a_1 +\ \deg(F)
\end{aligned}$$

Suposem cert, doncs, pel cas $j = k$. Anem a veure que també es compleix pel cas $j = k+1$.

Tindrem $H_{k+1} = t^{a_{k+1}}H_k - NF_i = t^{a_{k+1}}H_k - \frac{\mathrm{LT}(t^{a_{k+1}}H_k)}{\mathrm{LT}(F_i)}F_i$, calculem el grau:

$$\begin{aligned}
\deg(H_{k+1}) &= \max\{\ \deg(t^{a_{k+1}}H_k),\ \deg(\tfrac{\mathrm{LT}(t^{a_{k+1}}H_k)}{\mathrm{LT}(F_i)}F_i)\} \\
&= \max\{\ \deg(t^{a_{k+1}}H_k),\ \deg(\tfrac{\mathrm{LT}(t^{a_{k+1}}H_k)}{\mathrm{LT}(F_i)}) +\ \deg(F_i)\} \\
&= \max\{\ \deg(t^{a_{k+1}}H_k),\ \deg(t^{a_{k+1}}H_k) -\ \deg(F_i) +\ \deg(F_i)\} \\
&= \deg(t^{a_{k+1}}H_k) \\
&= a_{k+1} + a_k +\ \deg(F) \\
&= a +\ \deg(F)
\end{aligned}$$

Així demostrem la igualtat de graus.

L'altre cas és si $G = H_l$. En aquest cas, $H_{j+1} = t^a H_j - NH_l$. Prenent de nou (5.1) tenim

$$(t^a U_j - NU_l)F = (t^a A_{1,j} - MA_{1,l})F_1 + \cdots + (t^a A_{s,j} - NA_{s,l})F_s + H_{j+1}.$$

Definim $U_{j+1} = t^a U_j - NU_l$ i $A_{t,j+1} = t^a A_{t,j} - NA_{t,l}$ i així es compleix (5.1) per $k = j+1$.

La igualtat de graus $a +\ \deg(F) =\ \deg(H_j)$ també es compleix. El primer cas de construcció de residus en el cas $G = H_l$ serà amb $H_0 = F$ com a residu anterior. Per tant, $H_{j+1} = t^{a_j}H_j - NH_0 = t^{a_j}H_j - \frac{\mathrm{LT}(t^{a_j}H_j)}{\mathrm{LT}(H_0)}H_0$. Calculem el grau:

$$\begin{aligned}
\deg(H_{j+1}) &= \max\{\ \deg(t^{a_j}H_j),\ \deg(\tfrac{\mathrm{LT}(t^{a_j}H_j)}{\mathrm{LT}(H_0)}H_0)\} \\
&= \max\{\ \deg(t^{a_j}H_j),\ \deg(\tfrac{\mathrm{LT}(t^{a_j}H_j)}{\mathrm{LT}(H_0)}) +\ \deg(H_0)\} \\
&= \max\{\ \deg(\ \deg(t^{a_j}H_j)),\ \deg(t^{a_j}H_j) -\ \deg(H_0) +\ \deg(H_0)\} \\
&= \deg(t^{a_j}H_j = \\
&= a_j + a_{j-1} +\ \deg(F) \\
&= a +\ \deg(F)
\end{aligned}$$

Mitjançant inducció, la igualtat de graus sempre es complirà.

Cal veure quin és el $\mathrm{LT}(U_{j+1})$. Sabem que $t^{a_j}\mathrm{LT}(H_l) >' t^{a_l}\mathrm{LT}(H_j)$ ja que $l < j$. Per tant,

$$t^{a+a_j}\mathrm{LT}(H_l) = t^a t^{a_j}\mathrm{LT}(H_l) >' t^a t^{a_l}\mathrm{LT}(H_j) = t^{a_l}\mathrm{LT}(t^a H_j) = t^{a_l}N\mathrm{LT}(H_l),$$

i obtenim que $t^{a+a_j} >' t^{a_l}N$. Utilitzant $\mathrm{LT}(U_j) = t^{a_j}$ i $\mathrm{LT}(U_l) = t^{a_l}$, obtenim

$$\mathrm{LT}(U_{j+1}) = \mathrm{LT}(t^a U_j - NU_l) = t^{a+a_j}.$$

Per últim, hem vist que en ambdós casos $\mathrm{LT}(U_{j+1}) = t^{a+a_j}$ i, per tant, $a_{j+1} = a + a_j \leq a_j$. També $\mathrm{LT}(t^a H_j) >' \mathrm{LT}(H_{j+1})$ ja que H_{j+1} és una reducció de $t^a H_j$. Amb això, ja veiem que H compleix les propietats necessàries.

Per acabar la demostració, cal veure que $a+ \deg(F) = \deg(A_i) + \deg(F_i)$ i $t^a \mathrm{LT}(F) \geq' \mathrm{LT}(A_i)\mathrm{LT}(F_i)$ si $A_i \neq 0$.

Primer, mirem la igualtat de graus. Després estudiarem la desigualtat dels termes líders.

Si $G = F_i$, la construcció dels diferents $A_{l,j}$ serà $\begin{cases} t^a A_{l,j} & si \quad l \neq i \\ t^a A_{l,j} + N & si \quad l = i \end{cases}$

En el cas inicial, els diferents $A_{l,j}$ seran igual a 0 menys $A_{i,j}$, que serà igual a $\frac{\mathrm{LT}(t^a H_0)}{\mathrm{LT}(F_i)}$. Calculem el grau de $A_{i,j}$:

$$\begin{aligned} \deg(A_{i,j}) &= \deg(\tfrac{\mathrm{LT}(t^a H_0)}{\mathrm{LT}(F_i)}) \\ &= \deg(t^a H_0) - \deg(F_i) \end{aligned}$$

Per tant, $\deg(A_{i,j}) + \deg(F_i) = \deg(t^a H_0) - \deg(F_i) - \deg(F_i) = \deg(t^a H_0) = a_1 + \deg(F)$. Mitjançant inducció podem veure que sempre es compleix. Suposem cert per $j = k$ i veurem que és cert per $j = k + 1$.

$$\begin{aligned} \deg(A_{i,k+1}) &= \deg(t^a A_{i,k} + \tfrac{\mathrm{LT}(t^a H_k)}{\mathrm{LT}(F_i)}) \\ &= \max\{ \deg(t^a A_{i,k}),\ \deg(\tfrac{\mathrm{LT}(t^a H_k)}{\mathrm{LT}(F_i)})\} \end{aligned}$$

Si $\deg(A_{i,k+1}) = \deg(t^a A_{i,k})$, $\deg(A_{i,k+1}) + \deg(F_i) = k + 1 + \deg(A_{i,k}) + \deg(F_i) = a + a_k + \deg(F) = a_{k+1} + \deg(F)$, com volíem veure.

Si $\deg(A_{i,k+1}) = \deg(\frac{\mathrm{LT}(t^a H_k)}{\mathrm{LT}(F_i)}) = \deg(t^a H_k) - \deg(F_i) = a + \deg(H_k) - \deg(F_i) = a + a_k + \deg(F) - \deg(F_i)$ i també tenim el que volíem.

Abans de passar al cas $G = H_l$, mirem la desigualtat dels termes líders. En el cas inicial,

$$\mathrm{LT}(A_{i,j})\mathrm{LT}(F_i) = \mathrm{LT}(\frac{\mathrm{LT}(t^a H_0)}{\mathrm{LT}(F_i)})\mathrm{LT}(F_i) = \frac{\mathrm{LT}(t^a H_0)}{\mathrm{LT}(F_i)}\mathrm{LT}(F_i) = t^a \mathrm{LT}(F).$$

Què passa quan $A_{i,j+1} = t^a N' + N$ on $N' = \frac{\mathrm{LT}(t^{a'} H_0)}{\mathrm{LT}(F_i)}$, $N = \frac{\mathrm{LT}(t^a H_j)}{\mathrm{LT}(F_i)}$ i a' és la a que utilitzem en el primer pas? Calculem els termes líders.

$$\begin{aligned} \mathrm{LT}(A_{i,j+1})\mathrm{LT}(F_i) &= \mathrm{LT}(t^a \tfrac{\mathrm{LT}(t^{a'} H_0)}{\mathrm{LT}(F_i)} + \tfrac{\mathrm{LT}(t^a H_j)}{\mathrm{LT}(F_i)})\mathrm{LT}(F_i) \\ &= \mathrm{LT}(t^a \mathrm{LT}(t^{a'} H_0) + \mathrm{LT}(t^a H_j)) \\ &= t^a \mathrm{LT}(\mathrm{LT}(t^{a'} F) + \mathrm{LT}(H_j)) \\ &\leq' t^a t^{a'} \mathrm{LT}(F) \\ &= t^{a_j} \mathrm{LT}(F) \end{aligned}$$

ja que $\mathrm{LT}(t^a H_k) >' \mathrm{LT}(H_{k+1})$.

Ara, mirem el cas $G = H_l$. De manera molt similar, veurem primer que la igualtat de graus es compleix i després, la desigualtat dels termes líders.

Sabem que $A_{i,j+1} = t^a A_{i,j} - \frac{\mathrm{LT}(t^a H_j)}{\mathrm{LT}(H_l)} A_{i,l}$. Calculem el grau:

$$\deg(A_{i,j+1}) = \max\{a + \deg(A_{i,j}), a + \deg(H_j) - \deg(H_l) + \deg(A_{i,l})\}$$

Si el $\deg(A_{i,j+1}) = a + \deg(A_{i,j})$, la igualtat es complirà, seria el cas anterior.

Si $\deg(A_{i,j+1}) = a + \deg(H_j) - \deg(H_l) + \deg(A_{i,l}) = a + a_j + \deg(F) - a_l - \deg(F) + \deg(A_{i,l}) = a + a_j - a_l + \deg(A_{i,l})$.

Sumem $\deg(F_i)$, $\deg(A_{i,j+1}) + \deg(F_i) = a + a_j - a_l + \deg(A_{i,l}) + \deg(F_i) = a + a_j - a_l + a_l + \deg(F) = a_{j+1} + \deg(F)$, com volíem veure.

Per últim, els termes líders. Estudiem el cas inicial. Després, mitjançant inducció, és fàcil veure que es compleix sempre. El cas inicial que estudiem és dividim pel primer residu H_l tal que $A_{i,l}$ és diferent de 0. No estudiem el cas en que H_l és igual a H_0 perquè seria com estudiar el primer cas, els termes $A_{i,0} = 0$.

$$\begin{aligned} \mathrm{LT}(A_{i,j+1})\mathrm{LT}(F_i) &= \mathrm{LT}(t^a A_{i,j} - \tfrac{\mathrm{LT}(t^a H_j)}{\mathrm{LT}(H_l)} A_{i,l})\mathrm{LT}(F_i) \\ &= t^a \mathrm{LT}(A_{i,j} - \tfrac{\mathrm{LT}(H_j)}{\mathrm{LT}(H_l)} A_{i,l})\mathrm{LT}(F_i) \\ &\leq' t^a \mathrm{LT}(A_{i,j})\mathrm{LT}(F_i) \\ &= t^{a_{j+1}} \mathrm{LT}(F) \end{aligned}$$

Així, ja hem vist tots els casos i, efectivament, es compleix la desigualtat. □

Podem completar l'algorisme de Mora per a que retorni els quocients A_i i la unitat U:

Input: $F, F_1, \ldots, F_s \in k[t, x_1, \ldots, x_n]$ homogenis i diferents de zero

Output: H, U, A_i

```
H := F; L := {F1, ..., Fs}; M := { G pertany a L : LT(G)|LT(tªH) per alguna a}
A = {A_1, ..., A_s} = {0, ...., 0}; U = {U_1, ..., U_s}, N = 1, B = 0;

WHILE( H != 0 i M != 0) DO
    SELECT G que pertany a M amb la menor a
    N = LT(tªH)/LT(G)
    IF a>0 THEN
        L := L unió {H}
    H := Red(tªH, G)
    IF G = Fi
        U_i+1 = tªU_i
        Per cada component de A tindrem A_l = tªA_l     si l != i
                                              tªA_l + N si l  = i
    IF G = alguna H anterior, sigui H_p
        U_i+1 = tªU_i - N U_p
        B = A_p
        Per cada component de A tindrem A_l = tªA_l - N B
    IF H!= 0 THEN
        M := {G pertany a L : LT(G) |LT(tªH) per alguna a}
```

Corol·lari 5.11 (Algorisme de la forma normal de Mora). *Suposem que $f, f_1, \ldots, f_s \in k[x_1, \ldots, x_n]$ són diferents de 0 i $>$ és un ordre de semigrup de monomis amb x_i. Llavors hi ha un algorisme per obtenir polinomis $u, a_1, \ldots, a_s, h \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tal que*

$$uf = a_1 f_1 + \cdots + a_s f_s + h,$$

on $\mathrm{LT}(u) = 1$ (per tant u és una unitat a $Loc_>(k[x_1, \ldots, x_n])$), $\mathrm{LT}(a_i)\mathrm{LT}(f_i) \leq \mathrm{LT}(f)$ per tota i amb $a_i \neq 0$, i amb $h = 0$ o $\mathrm{LT}(h)$ no és divisible per cap $\mathrm{LT}(f_i)$.

Demostració. Sigui $g \in k[x_1, \ldots, x_n]$, llavors l'homogeneïtzació transforma el terme líder amb ordre $>$ de g al terme líder amb ordre $>'$ de g^h, és a dir, $\mathrm{LT}_{>'}(g^h) = t^a \mathrm{LT}_>(g)$, on $a = d - |\mathrm{multideg}_>(g)|$. D'altra banda, si G és homogeni a $k[t, x_1, \ldots, x_n]$, llavors deshomogeneïtzant (amb $t = 1$),$\mathrm{LT}_{>'}(G) = \mathrm{LT}_>(g)$, on $g = G|_{t=1}$.

Vist això, a partir del Teorema 5.10, considerant aquest polinomis amb $t = 1$, la resta de premisses del teorema seran equivalents per definició.

Al considerar $t = 1$, hi haurà la transformació dels polinomis $U \cdot F = A_1F_1 + \cdots + A_sF_s + H$ als polinomis $uf = a_1f_1 + \cdots + a_sf_s + h$.

Ara, el $\mathrm{LT}(u) = 1$ i es compleix que $t^a\mathrm{LT}(F) \leq' \mathrm{LT}(A_i)\mathrm{LT}(F_i)$, $\mathrm{LT}_{>'}(F) = \mathrm{LT}_>(f)$ i de la mateixa manera, $\mathrm{LT}_{>'}(A_i) = \mathrm{LT}_>(a_i)$ i $\mathrm{LT}_{>'}(F_i) = \mathrm{LT}_>(f_i)$ que implica que $\mathrm{LT}(a_i)\mathrm{LT}(f_i) \leq \mathrm{LT}(f)$.

Per últim, com al Teorema 5.10 cap $\mathrm{LT}(F_i)$ divideix $t^b\mathrm{LT}(H)$ per cap $b \geq 0$ amb l'ordre $>'$, amb $t = 1$ s'obté el resultat equivalent.

□

Podem utilitzar aquest algorisme per dividir $f = x^2+y^2$ entre $f_1 = x-xy$, $f_2 = y^2+x^3$ utilitzant l'ordre *alex* a $k[x, y]$.

Per començar, cal homogeneïtzar els polinomis f_1 i f_2. Això vol dir que cada sumand d'aquests polinomis ha de tenir el mateix grau. Per fer això, introduïm la nova variable t, amb ella igualarem els diferents graus.

Per tant, els nous polinomis homogenis seran

$$f_1^h = xt - xy, f_2^h = y^2t + x^3.$$

El nostre objectiu, com ja sabem, serà trobar $\tilde{u}, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{h}$ tal que

$$\tilde{u} \cdot f = \tilde{a}_1 \cdot f_1^h + \tilde{a}_2 \cdot f_2^h + \tilde{h}.$$

Després de trobar aquests elements, substituirem la t per 1, d'aquesta manera tindrem una igualtat amb els polinomis f_1 i f_2 inicials.

En el primer pas, comencem amb la igualtat $f = 0f_1^h + 0f_2^h + f$, és a dir,

$$U_0 = 1, A_{1,0} = 0, A_{2,0} = 0, H_0 = f.$$

A partir d'aquests elements, iniciem l'algorisme recursiu fins que H_i compleixi les característiques del teorema.

Definim el conjunt $L = \{f_1^h, f_2^h\}$ i $M = \{g \in L \colon \mathrm{LT}(g) | \mathrm{LT}(t^aH) \text{ per alguna } a\}$.

Aplicant l'ordre $>'$, $\mathrm{LT}(f_1^h) = xt$, $\mathrm{LT}(f_2^h) = y^2t, \mathrm{LT}(t^af) = t^ax^2$.

En aquest cas, $M = \{f_1^h\}$ i a és igual a 1. Això implica que afegim f ha L.

Calculem H_1:

$$H_1 = tH_0 - nf_1^h,$$

on $n = \frac{\mathrm{LT}(tH_0)}{\mathrm{LT}(f_1^h)} = x$. Per tant, $H_1 = ty^2 + x^2y$. Calculem també U_1 i $A_{1,1}, A_{2,1}$:

$$U_1 = tU_0 = t, A_{1,1} = t0 + x = x, A_{2,1} = t0 = 0.$$

Com en aquest cas, el residu no compleix les propietats per aturar l'algorisme, seguim.

Pel següent pas, $L = \{f_1^h, f_2^h, f\}$. Calculem $\mathrm{LT}(t^a(ty^2 + x^2y)) = t^{a+1}y^2$, $M = \{f_2^h\}$ amb $a = 0$.

Calculem H_2:

$$H_2 = H_1 - nf_2^h,$$

on $n = \frac{\mathrm{LT}(H_1)}{\mathrm{LT}(f_2^h)} = 1$. Per tant, $H_1 = x^2y - x^3$. Calculem també U_2 i $A_{1,2}, A_{2,2}$:

$$U_2 = t, A_{1,1} = x, A_{2,1} = 1.$$

Pel següent pas, L no s'ha modificat ja que l'a anterior és igual a 0. Calculem $\mathrm{LT}(t^a(x^2y - x^3)) = -t^ax^3$, $M = \{f\}$ i $a = 0$.

Calculem H_3:

$$H_3 = H_2 - nf,$$

on $n = \frac{\mathrm{LT}(H_2)}{\mathrm{LT}(f)} = -x$. Per tant, $H_3 = x^2y + y^2x$. Calculem també $U_3 = U_2 + xU_0$ i $A_{1,3} = A_{1,2} + xA_{1,0}, A_{2,3} = A_{2,2} + xA_{2,0}$:

$$U_3 = t + x, A_{1,3} = x, A_{2,3} = 1.$$

Per $i = 4$, calculem $\mathrm{LT}(t^a(x^2y + y^2x)) = t^ax^2y$, $M = \{f_1^h, f_2^h, f\}$, però en el cas de f, $a = 0$. Dividirem entre f.

Calculem H_4:

$$H_4 = H_3 - nf,$$

on $n = \frac{\mathrm{LT}(H_3)}{\mathrm{LT}(f)} = y$. Per tant, $H_4 = y^2x - y^3$. Calculem també $U_4 = U_3 - yU_0$ i $A_{1,4}, A_{2,4}$:

$$U_4 = t + x - y, A_{1,4} = x, A_{2,4} = 1.$$

Com es veu, encara no hem arribat al residu desitjat. Per tant, calculem $\mathrm{LT}(t^a(xy^2 - y^3)) = t^axy^2$, $M = \{f_1^h, f_2^h\}$. En aquest cas, és indiferent escollir f_1^h o f_2^h ja que en ambdós casos $a = 1$. Agafo, doncs, f_2^h.

Com $a = 1$, $L = \{f, f_1^h, f_2^h, H_4 = xy^2 - y^3\}$.

Calculem H_5:

$$H_5 = tH_4 - nf_2^h,$$

on $n = \frac{\mathrm{LT}(tH_4)}{\mathrm{LT}(f_2^h)} = x$. Per tant, $H_5 = -ty^3 - x^4$. Calculem també U_5 i $A_{1,5}, A_{2,5}$:

$$U_5 = t(t + x - y), A_{1,5} = tx, A_{2,5} = t + x.$$

Per $i = 6$, calculem $\mathrm{LT}(t^a(-ty^3 - x^4)) = -t^{a+1}y^3$, $M = \{f_2^h\}$ i $a = 0$.

Calculem H_6:

$$H_6 = H_5 - nf_2^h,$$

on $n = \frac{\mathrm{LT}(H_5)}{\mathrm{LT}(f_2^h)} = -y$. Per tant, $H_6 = x^3y - x^4$. Calculem també U_6 i $A_{1,6}, A_{2,6}$:

$$U_6 = t(t + x - y), A_{1,6} = tx, A_{2,6} = t + x - y.$$

El residu encara no compleix les propietats del teorema, per tant, anem a fer aquest procés un altre cop. Calculem $\mathrm{LT}(t^a(x^3y - x^4)) = -t^ax^4$, $M = \{f_1^h, f\}$. En aquest cas, escollim f ja que $a = 0$.

Calculem H_7:

$$H_7 = H_6 - nf,$$

on $n = \frac{\mathrm{LT}(H_6)}{\mathrm{LT}(f)} = -x^2$. Per tant, $H_7 = x^3y + x^2y^2$. Calculem també U_7 i $A_{1,7}, A_{2,7}$:

$$U_7 = t(t + x - y) + x^2, A_{1,7} = tx, A_{2,7} = t + x - y.$$

Pel següent pas, $\mathrm{LT}(t^a(x^3y+x^2y^2)) = t^ax^3y$, $M = \{f_1^h, f\}$. En aquest cas, treballarem amb f ja que d'aquesta manera $a = 0$.

Calculem H_8:

$$H_8 = H_7 - nf,$$

on $n = \frac{\mathrm{LT}(H_7)}{\mathrm{LT}(f)} = xy$. Per tant, $H_8 = -xy^3 + x^2y^2$. Calculem també U_8 i $A_{1,8}, A_{2,8}$:

$$U_8 = t(t + x - y) + x^2 - xy, A_{1,8} = tx, A_{2,8} = t + x - y.$$

Seguim amb $i = 9$. Calculem $\mathrm{LT}(t^a(x^2y^2 - xy^3)) = t^ax^2y^2$, $M = \{f_1^h, f_2^h, f, xy^2 - y^3\}$. En aquest cas, escollir f i $xy^2 - y^3$ és indiferent ja que $a = 0$. Agafem $xy^2 - y^3$.

Calculem H_9:

$$H_9 = H_8 - n(xy^2 - y^3),$$

on $n = \frac{\mathrm{LT}(H_8)}{\mathrm{LT}(xy^2-y^3)} = x$. Per tant, $H_9 = 0$. Calculem també U_9 i $A_{1,9}, A_{2,9}$:

$$U_9 = (t - x)(t + x - y) + x^2 - xy, A_{1,9} = tx - x^2, A_{2,8} = t - y.$$

Ja hem acabat l'algorisme perquè $H_9 = 0$. A continuació, les dades trobades en una taula.

i	U_i	$A_{1,i}$	$A_{2,i}$	H_i
0	1	0	0	$x^2 + y^2$
1	t	x	0	$ty^2 + x^2y$
2	t	x	1	$x^2y - x^3$
3	$t + x$	x	1	$x^2 + y^2x$
4	$t - y + x$	x	1	$-y^3 + xy^2$
5	$t(t - y + x)$	tx	$t + x$	$-ty^3 - x^4$
6	$t(t - y + x)$	tx	$t + x - y$	$x^3y - x^4$
7	$t(t - y + x) + x^2$	tx	$t + x - y$	$x^3y + x^2y^2$
8	$t(t + x - y) + x^2 - xy$	tx	$t + x - y$	$-xy^3 + x^2y^2$
9	$(t - x)(t - y + x) + x^2 - xy$	$tx - x^2$	$t - y$	0

Corol·lari 5.12. *Sigui $>$ un ordre de semigrup de monomis a l'anell $k[x_1, \ldots, x_n]$ i sigui $R = Loc_>(k[x_1, \ldots, x_n])$. Sigui $f \in R$ i $f_1, \ldots, f_s \in k[x_1, \ldots, x_n]$ diferents de 0. Llavors hi ha un algorisme per trobar $h, a_1, \ldots, a_s \in R$ tal que*

$$f = a_1f_1 + \cdots + a_sf_s + h,$$

on $\mathrm{LT}(a_i)\mathrm{LT}(f_i) \leq \mathrm{LT}(f)$ per tot i amb $a_i \neq 0$ i $h = 0$ o $\mathrm{LT}(h) \leq \mathrm{LT}(f)$ i $\mathrm{LT}(h)$ no és divisible per cap $\mathrm{LT}(f_1), \ldots, \mathrm{LT}(f_s)$.

Demostració. Si escrivim f de la forma f'/u' on $f', u' \in k[x_1, \ldots, x_n]$ i u' és una unitat a R, dividint f' per $f_1, \ldots, f_s$ amb el Corol·lari 5.11 tenim $u \cdot f' = a_1' f_1 + \cdots + a_s' f_s + h'$, on $u, h', a_1', \ldots, a_s'$ són iguals que en el corol·lari. També observem que $\mathrm{LT}(h') \leq \mathrm{LT}(h)$ segueix de $\mathrm{LT}(a_i')\mathrm{LT}(f_i) \leq \mathrm{LT}(f')$. Com el terme líder d'una unitat és una constant diferent de zero, dividint un polinomi per una unitat no varia el terme líder. Per tant, dividint l'equació anterior per la unitat uu' obtenim

$$f = a_1 f_1 + \cdots + a_s f_s + h,$$

on $a_i = a_i'/(uu'), h = h'/(uu')$ clarament compleixen les propietats necessàries. $\square$

6 Bases estàndards

En aquesta secció, volem desenvolupar l'anàleg de les bases de Gröbner en ideals d'algun dels anells locals $R = k[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle}, R = k\{x_1, \ldots, x_n\}$ o $R = k[[x_1, \ldots, x_n]]$. Donat un ideal $I \subset R$, definim el conjunt de termes líders de I, $\mathrm{LT}(I)$ com el conjunt de tots els termes líders de tots els elements de I respecte l'ordre $>$. També definim l'ideal dels termes líders de I, $\langle \mathrm{LT}(I)\rangle$, com l'ideal generat pel conjunt $\mathrm{LT}(I)$ en R.

Definició 6.1. *Sigui $>$ un ordre de semigrup i sigui R l'anell de fraccions $Loc_>(k[x_1, \ldots, x_n])$ com en la Definició 5.6, o sigui $>$ un ordre local i $R = k[x_1, \ldots, x_n]]$ o $k\{x_1, \ldots, x_n\}$. Sigui $I \subset R$ un ideal. Una base estàndard de I és el conjunt $\{g_1, \ldots, g_n\} \subset I$ tal que $\langle \mathrm{LT}(I)\rangle = \langle \mathrm{LT}(g_1), \mathrm{LT}(g_2), \ldots, \mathrm{LT}(g_n)\rangle$.*

El terme de *base estàndard* és més comú que *base de Gröbner* quan treballem amb ordres locals i els anells locals $R = k[[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle}, R = k\{x_1, \ldots, x_n\}$ o $R = k[[x_1, \ldots, x_n]]$.

Cada ideal diferent de zero en aquests anells locals té base estàndard. Conseqüentment, hi ha un resultat anàleg al Teorema de Hilbert, Teorema 2.15, per aquests anells: tot ideal té un conjunt finit de generadors. La demostració és iguals que utilitzant ordres monomials.

A més a més, l'algorisme de la Forma Normal de Mora també l'utilitzem per dividir entre una base estàndard. En particular, obtenim zero com a residu si i solament si f està generat per una base estàndard.

Per construir algorismes per trobar bases estàndards, ens centrarem ens els ideals d'aquests anells que estan generats per una col·lecció de polinomis.

Per treballar de forma anàloga a la construcció de les bases de Gröbner en Anells de Polinomis, ja tenim l'equivalent a l'algorisme de divisió que és l'algorisme de Mora, però falta l'equivalent a l'algorisme de Buchberger.

Els diferents element per formar el nou algorisme de Buchberger són equivalents a la definició que ja teníem. La definició de S- polinomi en aquest nou conjunt coincideix amb la mateixa que en $k[x_1, \ldots, x_n]$, escollint els termes líders tenint en compte el nou ordre de semigrup.

L'algorisme de divisió necessari en el teorema de Buchberger és ara l'algorisme de Mora. L'únic que cal és definir la correcció i està garantida pel criteri de Buchberger, és a dir, donat un conjunt finit G, aquest serà una base de Gröbner si, i solament si, el residu de la divisió de G entre cada element del S-polinomi format per un parell d'elements de G és 0.

Definició 6.2 (S-polinomi en ordres monomials)**.** *Sigui $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ diferent de zero. Fixem un ordre monomial i sigui*

$$\mathrm{LT}(f) = cx^\alpha \ i \ \mathrm{LT}(g) = dx^\beta,$$

on $c, d \in k$. Sigui x^λ el mínim comú múltiple de x^α i x^β. El S- polinomi de f i g, amb notació $S(f, g)$, és el polinomi

$$S(f, g) = \frac{x^\lambda}{\mathrm{LT}(f)} \cdot f - \frac{x^\lambda}{\mathrm{LT}(g)} \cdot g.$$

Teorema 6.3. *Sigui $S \subset k[x_1, \dots, x_n]$ finit, $>$ qualsevol ordre de semigrup, i I l'ideal en $R = Loc_{>}(k[x_1, \dots, x_n])$ generat per S.*

a. *(Anàleg al criteri de Buchberger) $S = \{g_1, \dots, g_n\}$ és una base estàndard de I si, i solament si, aplicant l'algorisme de la forma normal de Mora a tot S- polinomi format per elements del conjunt S obtenim residu igual a zero.*

b. *(Anàleg a l'algorisme de Buchberger) L'algorisme de Buchberger, utilitzant l'algorisme de la forma normal de Mora substituint l'algorisme de divisió en polinomis, construeix una base estàndard de polinomis de l'ideal generat per S, acabant després d'un nombre finit de passos.*

Demostració. Primer, la demostració de l'apartat a. Sigui $\overline{f}^{S,\text{Mora}}$ el residu h trobat aplicant el Corol·lari 5.11 a la divisió de f entre S. Si S és una base estàndard de I, $S(g_i, g_j) \in I$ per tota i, j i, per tant, $\overline{S(g_i, g_j)}^{S,\text{Mora}} = 0$ per tota i, j.

De forma inversa, si $\overline{S(g_i, g_j)}^{S,\text{Mora}} = 0 \ \forall i, j$, volem veure que S és una base estàndard, equivalentment que $\langle \text{LT}(I) \rangle = \langle \text{LT}(g_1), \text{LT}(g_2), \dots, \text{LT}(g_n) \rangle$ amb l'ordre $>$. En aquest cas, utilitzarem un ordre antigraduat per demostrar aquesta implicació.

Donat $f \in I = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$, volem demostrar que $\text{LT}(f) \in \langle \text{LT}(g_1), \text{LT}(g_2), \dots, \text{LT}(g_n) \rangle$. Sigui S_f el conjunt no buit tal que

$$S_f = \{\max\{\text{LT}(a_i g_i)\} \colon a_1, \dots, a_s \in R \text{ que satisfà } f = \sum_{i=1}^{t} a_i g_i\}.$$

En un ordre de semigrup no podem dir que S_f té un element minimal, encara que S_f està fitat inferiorment per $\text{LT}(f)$. En canvi, això sí que passa per ordres antigraduats. Anem a veure-ho.

Que $>$ sigui un ordre antigraduat vol dir que

$$|\alpha| < |\beta| \Rightarrow x^\alpha > x^\beta.$$

Per tant, sigui M un conjunt no buit i $>$ un ordre antigraduat tal que

$$M = \{x^\beta \colon x^\beta > x^\alpha \ \forall x^\beta \in M\} = \{x^\beta \colon |\alpha| > |\beta| \ \forall \beta \in \mathbb{Z}^n_{\beta \geq 0}\}$$

Veure que existeix l'element més petit de M és veure que existeix un θ més gran entre tots els $\beta \in \mathbb{Z}^n_{\beta \geq 0}$ tal que $x^\beta \in M$.

Per facilitar la notació, anomenarem $M' = \{|\alpha| \geq |\beta| \colon x^\beta \in M\}$.

Trobar l'element mínim a M és equivalent a trobar l'element màxim a M' ja que l'ordre és antigraduat. Per tant, suposem que no existeix element màxim a M'. Això vol dir que per tota $\beta \in M'$, existeix una $\delta \in M'$ tal que $\delta > \beta$. Llavors, si $\beta \in M'$, $\beta + 1 \in M'$ on 1 és el vector de dimensió n tot amb 1.

Sabem que α és finit, per tant, com suposem que no hi ha màxim, existeix un μ tal que $|\mu| > |\alpha|$.

Aplicant l'argument anterior, $\beta + (\mu - \beta) = \mu \in M'$. Arribem a una contradicció ja que els elements de M' són aquells que compleixen $|\alpha| \geq |\beta|$. Ja hem vist que existeix element minimal.

Anomenen $\delta = \min S_f$. Aleshores, entre totes les formes possibles d'escriure f, escollim aquella tal que S_f sigui minimal.

El que volem veure és, que un cop trobada δ, es compleix

$$\mathrm{LT}(f) = \delta.$$

Quan tinguem això, es complirà

$$\mathrm{LT}(f) = S_f$$

i, per tant, $\mathrm{LT}(f) \in \langle \mathrm{LT}(g_1), \ldots, \mathrm{LT}(g_t) \rangle$.

Veurem $\mathrm{LT}(f) = \delta$ arribant a contradicció. Suposem que $\mathrm{LT}(f) < \delta$. Escrivim f de la següent manera:

$$\begin{aligned} f &= \textstyle\sum_{\mathrm{LT}(a_i g_i)=\delta} a_i g_i + \sum_{\mathrm{LT}(a_i g_i)<\delta} a_i g_i \\ &= \textstyle\sum_{\mathrm{LT}(a_i g_i)=\delta} \mathrm{LT}(a_i) g_i + \sum_{\mathrm{LT}(a_i g_i)=\delta} (a_i - \mathrm{LT}(a_i)) g_i + \sum_{\mathrm{LT}(a_i g_i)<\delta} a_i g_i \end{aligned}$$

Els monomis del segon i tercer sumand del segon desenvolupament de la suma tenen el terme líder menor que δ. Per tant, com hem suposat que $\mathrm{LT}(f) < \delta$, el primer sumand ha de complir

$$\mathrm{LT}\left(\sum_{\mathrm{LT}(a_i g_i)=\delta} \mathrm{LT}(a_i) g_i \right) < \delta.$$

Sigui $\mathrm{LT}(a_i) = c_i x^{\alpha(i)}$. Podem escriure la primera suma com $\sum_{\mathrm{LT}(a_i g_i)=\delta} \mathrm{LT}(a_i) g_i = \sum_{\mathrm{LT}(a_i g_i)=\delta} c_i x^{\alpha(i)} g_i$.

Utilitzem un lema per ordres monomials, l'adaptem als ordres locals.

Lema 6.4. *Suposem que tenim una suma $\sum_{i=1}^{s} c_i f_i$, on $c_i \in k$ i multideg$(f_i) = \delta \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ per tota i. Si multideg$(\sum_{i=1}^{s} c_i f_i) < \delta$, llavors $\sum_{i=1}^{s} c_i f_i$ és una combinació lineal amb coeficients a k del S- polinomi $S(f_j, f_k)$ per $1 \leq j, k \leq s$. A més a més, cada $S(f_i, f_k)$ té multideg $< \delta$.*

En el nostre cas, podrem aplicar aquest lema si tenim en compte que ara no treballarem amb multideg, sinó que treballarem amb termes líders.

Aplicant aquest lema amb ordres locals, veiem que hem arribat a la mateixa estructura que s'estudia al lema si agafem $f_i = x^{\alpha(i)} g_i$. Aquesta suma és una combinació lineal dels S-polinomis $S\left(x^{\alpha(j)} g_j, x^{\alpha(k)} g_k\right)$. Apliquem la definició de S-polinomi:

$$\begin{aligned} S\left(x^{\alpha(j)} g_j, x^{\alpha(k)} g_k\right) &= \tfrac{\delta}{x^{\alpha(j)} \mathrm{LT}(g_j)} x^{\alpha(j)} g_j - \tfrac{\delta}{x^{\alpha(k)} \mathrm{LT}(g_k)} x^{\alpha(k)} g_k \\ &= (\delta - \gamma_{jk}) S(g_j, g_k) \end{aligned}$$

on $\gamma_{jk} = \mathrm{LCM}\left(\mathrm{LT}(g_j), \mathrm{LT}(g_k)\right)$. Per tant, existeixen constants $c_{jk} \in k$ i podem escriure

$$\sum_{\mathrm{LT}(a_i g_i)=\delta} \mathrm{LT}(a_i) g_i = \sum_{j,k} c_{jk} (\delta - \gamma_{jk}) S(g_j, g_k).$$

Per continuar, utilitzarem la hipòtesis de que el residu de $S(g_j, g_k)$ entre $g_1, \ldots, g_k$ és zero. Utilitzant l'algorisme de Mora, cada S- polinomi es pot escriure de la següent forma:

$$S(g_j, g_k) = \sum_{i=1}^{t} b_{ijk} g_i,$$

on $b_{ijk} \in k[x_1, \dots, x_n]$. L'algorisme de Mora ens diu que

$$\mathrm{LT}(b_{ijk} g_i) \leq \mathrm{LT}(S(g_j, g_k))$$

per tota i, j, k.

D'aquí podem intuir que quan el residu és zero, es pot trobar una expressió per $S(g_j, g_k)$ que depèn dels termes de G i on els termes líders no es cancel·len.

Per poder aplicar aquest resultat, multipliquem l'expressió de $S(g_j, g_k)$ per $\delta - \gamma$ per obtenir

$$(\delta - \gamma) S(g_j, g_k) = \sum_{i=1}^{t} d_{ijk} g_i,$$

on $d_{ijk} = (\delta - \gamma) b_{ijk}$. Tenim, doncs,

$$\mathrm{LT}(d_{ijk} g_i) \leq \mathrm{LT}((\delta - \gamma) S(g_j, g_k)) < \delta.$$

Per tant,

$$\sum_{\mathrm{LT}(a_i g_i) = \delta} \mathrm{LT}(a_i) g_i = \sum_{j,k} c_{jk} (\delta - \gamma) S(g_j, g_k) = \sum_{j,k} c_{jk} (\sum_i d_{ijk} g_i) = \sum_i \tilde{h}_i g_i.$$

Com $\mathrm{LT}(d_{ijk} g_i) \leq \mathrm{LT}((\delta - \gamma) S(g_j, g_k)) < \delta$, tenim que

$$\mathrm{LT}(\tilde{h}_i g_i) < \delta.$$

Hem arribat a contradicció perquè hem trobat que tots els elements del sumatori de f tenen el terme líder més petit que δ i δ és un element mínim.

Això demostra el criteri de Buchberger per ordres antigraduats.

Per la part b, sabem que per la demostració de l'algorisme de Buchberger que ja coneixem, vist al Teorema 2.17, l'algorisme acaba i construeix una base de Gröbner depenent únicament de la condició de cadena ascendent d'ideals de polinomis, Teorema 2.16, i no requereix que l'ordre utilitzat en el procés de divisió sigui un bon ordre. D'aquesta forma, utilitzant els residus trobats a partir de l'algorisme de Mora, obtenim un algorisme que acaba després d'un nombre finit de passos. El resultat dóna una base estàndard de I a partir de l'apartat a. □

Un altre ús de les bases estàndards és determinar si la dimensió dim $k[x_1, \dots, x_n]/I$ és finita.

Definició 6.5. *Donat un ordre local $>$ i un ideal I en $R = k[x_1, \dots, x_n]_{\langle x_1, \dots, x_n \rangle}$, $R = k\{x_1, \dots, x_n\}$ o $R = k[[x_1, \dots, x_n]]$, diem que el monomi x^α és estàndard si*

$$x^\alpha \notin \langle \mathrm{LT}(I) \rangle.$$

Amb aquesta notació, el següent teorema.

Teorema 6.6. *Sigui R un dels anells locals $k[x_1, \dots, x_n]_{\langle x_1, \dots, x_n \rangle}$, $k\{x_1, \dots, x_n\}$ o $k[[x_1, \dots, x_n]]$. Si $I \subset R$ és un ideal i $>$ és un ordre local, tenim les següents equivalències.*

a. dim R/I és finita.

b. dim $R/\langle \mathrm{LT}(I)\rangle$ és finita.

c. Solament hi ha finits monomis estàndards.

A més a més, quan qualsevol d'aquestes condicions es satisfà, tenim

$$\text{dim } R/I = \text{dim } R/\langle \mathrm{LT}(I)\rangle = \text{quantitat de monomis estàndards}$$

i tot $f \in R$ es pot escriure de forma única com

$$f = g + r,$$

on $g \in I$ i r és una combinació lineal de monomis estàndards. Aquesta suma es pot trobar mitjançant un algorisme quan $R = k[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle}$.

Demostració. Anem a demostrar primer les equivalències.

$\boxed{\mathrm{a} \Rightarrow \mathrm{c}}$ Suposem que $x^{\alpha(1)}, \ldots, x^{\alpha(m)}$ són monomis estàndards amb $m >$ dim R/I. Podem definir una combinació lineal tal que

$$f = \sum_{i=1}^{l} c_i x^{\alpha(1)} \in I,\ \ c_i \in k.$$

Llavors, $\mathrm{LT}(f) \in \langle \mathrm{LT}(I)\rangle$ implica que algun $x^{\alpha(i)} \in \langle \mathrm{LT}(I)\rangle$, fet impossible ja que $x^{\alpha(i)}$ és estàndard. Això demostra que el nombre de monomis estàndards està fitat superiorment per dim R/I.

$\boxed{\mathrm{c} \Rightarrow \mathrm{a}}$ Suposem que $R = k[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle}$. Com I està generat per polinomis, podem trobar una base estàndard de polinomis de G a I. Sigui $f \in R$ i dividim f entre G utilitzant el Corol·lari 5.12 obtenim

$$f = g_1 + h_1,$$

on $g_1 \in I$ i $h = 0$ o $\mathrm{LT}(h_1) \notin \langle \mathrm{LT}(G)\rangle = \langle \mathrm{LT}(I)\rangle$ (ja que G és una base estàndard) i $\mathrm{LT}(f) \geq \mathrm{LT}(h_1)$.

Si $h_1 \neq 0$, sigui $\mathrm{LT}(h_1) = c_1 x^{\alpha(1)}, c_1 \in k, c_1 \neq 0$. Com $x^{\alpha(1)}$ és estàndard, $h_1 = c_1 x^{\alpha(1)} + r_1$ on $r_1 = 0$ o $x^{\alpha(1)} > \mathrm{LT}(r_1)$. Si $r_1 \neq 0$, tornant a aplicar el procés anterior, tenim

$$r_1 = g_2 + h_2 = g_2 + c_2 x^{\alpha(2)} + r_2$$

amb $g_2 \in I, x^{\alpha(2)}$ estàndard i $r_2 = 0$ o $x^{\alpha(2)} > \mathrm{LT}(r_2)$. Combinant tot això,

$$f = g_1 + h_1 = g_1 + c_1 x^{\alpha(1)} + r_1 = (g_1 + g_2) + c_1 x^{\alpha(1)} + c_2 x^{\alpha(2)} + r_2,$$

on $g_1 + g_2 \in I, x^{\alpha(1)}, x^{\alpha(2)}$ estàndards i $x^{\alpha(1)} > x^{\alpha(2)} > \mathrm{LT}(r_2)$ si $r_2 \neq 0$. Continuarem fent aquest procés sempre que r_i no sigui igual a 0. Com hi ha finits monomis estàndards, aquest procés finalitzarà i demostrarem que f té la forma $g + r$ com s'ha descrit en l'enunciat del teorema.

El polinomi f s'escriu de forma única ja que estem treballant amb bases estàndards, és a dir, donades dues bases estàndards diferents $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ i $G' = \{g'_1, \ldots, g'_n\}$, $\langle \mathrm{LT}(I)\rangle = \langle \mathrm{LT}(g_1), \ldots, \mathrm{LT}(g_n)\rangle = \langle \mathrm{LT}(g'_1), \ldots, \mathrm{LT}(g'_n)\rangle$.

Al dividir amb l'algorisme de Mora, justament ens fixem en els termes líders. Si partim de bases estàndards diferents no afectarà ja que treballarem amb els mateixos termes líders.

Succeeix el mateix amb els monomis estàndards, si $x^{\alpha(i)} \notin \langle \mathrm{LT}(G) \rangle = \langle \mathrm{LT}(G') \rangle = \mathrm{LT}(I) \rangle$ i sabem que existeix un nombre finit de monomis estàndards.

És important que R sigui $k[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle}$ ja que l'algorisme de Mora es pot calcular computacionalment per aquests anells. A continuació, el pseudocodi.

```
    Input: f, I ideal , R anell.
    Output: R.

    //Primer, càlcul d'una base estàndard de l'ideal I.

    Guardem la base estàndard G en un vector.

    H:= 0, M := 0, R := 0;

  While (F != 0){
        //Apliquem algorisme de Mora per f entre G.
        //Obtenim un F = g + h com output de l'algorisme.
        H = h;
        if(H ==0){
            return R;
        }else{
            //He de treure el LT(h)
            M = H - LT(H);
            R = ++ LT(H); //al residu li afegeixo el LT corresponent
            F = M;

        }
    }
    return R;
```

D'aquesta forma, les classes laterals dels monomis estàndards donen una base de R/I, demostrant que

$$\dim R/I = \text{quantitat de monomis estàndards}$$

quan $R = k[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle}$.

$\boxed{\text{b} \Leftrightarrow \text{c}}$ Segueix immediatament del que ja hem vist perquè I i $\langle \mathrm{LT}(I) \rangle$ tenen els mateixos monomis estàndards.

$\square$

Per calcular bases estàndards, podem utilitzar el programa `Singular`. Veurem com fer-ho en el següent capítol.

7 Aplicació de les bases estàndards

Aquesta secció té com a finalitat estudiar algunes de les aplicacions de les bases estàndards. El concepte de multiplicitat i els nombres de Milnor i Tjurina es poden trobar mitjançant les bases estàndards.

Al capítol *Multiplicitats i nombres de Milnor*, vam veure la Proposició 4.14. La demostrarem amb el Teorema 6.6.

La demostració comença utilitzant el Teorema 4.8, així sabem que

$$\dim k[x_1,\ldots,x_n]_{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle}/Ik[x_1,\ldots,x_n]_{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle} < \infty.$$

Pel Teorema 6.6, sabem que la dimensió és el nombre de monomis estàndards d'una base estàndard S de $I \subset k[x_1,\ldots,x_n]_{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle}$. Però S també és una base estàndard per $Ik[[x_1,\ldots,x_n]]$ i $Ik\{x_1,\ldots,x_n\}$ pel criteri de Buchberger. Això és que, per un ordre local fixat, els monomis estàndards són els mateixos independentment de l'anell local R que estiguem considerant. Per tant, ja hem demostrat la Proposició 4.14.

Així obtenim un algorisme per calcular multiplicitats. De la mateixa manera podem trobar els nombres Milnor i Tjurina.

A continuació, calculem la multiplicitat de $x^2 + 2xy^4 - y^2 = xy - y^3 = 0$ utilitzant `Singular`. `Ds` representa l'ordre *alex*.

```
> ring r =0, (x, y), Ds;
> ideal i = x2+2xy4-y2, xy-y3;
> ideal j =std(i);
> j;
j[1]=x2-y2
j[2]=xy
j[3]=y3
> vdim(j);
4
```

Hem calculat la base estàndard amb `std(i)` i amb `vdim(j)` podem saber la multiplicitat. En aquest cas és 4.

També, trobarem el nombre de Milnor i Tjurina de $f(x,y) = (x^2+y^2)^3 - 4x^2y^2$. El nombre de Milnor, definit a la Definició 4.17, és la multiplicitat del zero comú a les parcials de f i el nombre de Tjurina és la multiplicitat del zero comú a f i les seves parcials.

Dit això, podem utilitzar `Singular` per poder trobar aquests nombres.

Calculem les parcials:

$$\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = 6x(x^2+y^2)^2 - 8xy^2$$

i busquem la base estàndard. Després, trobarem la multiplicitat del zero en aquesta base. Tornem a treballar amb l'ordre *alex*.

```
> ring r=0, (x, y), Ds;
> ideal i = 6x*(x2+y2)^2 -8xy2, 6y*(x2+y2)^2-8yx2;
```

```
> ideal j =std(i);
> j;
j[1]=4x2y-3x4y-6x2y3-3y5
j[2]=4xy2-3x5-6x3y2-3xy4
j[3]=x6+x4y2-x2y4-y6
j[4]=y7
> vdim(j);
13
```

Acabem de veure que el nombre de Milnor per $f(x,y)$ és igual a 13. De la mateixa manera però afegint a l'ideal i el polinomi de $f(x,y)$, obtenim que el nombre de Tjurina és 12.

Una altra aplicació de les bases estàndards és el càlcul del con tangent.

Definició 7.1. *Sigui $V \in k^n$ una varietat i $p = (a_1, \ldots, a_n)$ un punt de V. El con tangent de V a p, $C_p(V)$, és la varietat*

$$C_p(V) = \mathrm{V}(f_{p,min} \colon f \in \mathrm{I}(V)),$$

on $f_{p,min}$ és la component homogènia de menor grau del polinomi $f(x_1+a_1, \ldots, x_n+a_n)$ obtingut traslladant p a l'origen.

Encara que els cons tangents es poden trobar mitjançant bases de Gröbner, fer-ho amb bases estàndards és més directe. A continuació, un exemple de càlcul de con tangent.

Sigui $V = \mathrm{V}(f_1, \ldots, f_s) \subset k^n$ una varietat que conté l'origen i sigui $G = \{g_1, \ldots, g_t\}$ una base estàndard de

$$I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle k[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle}$$

respecte un ordre antigraduat $>$.

Anem a veure que $\mathrm{LT}_>(g_i)$ és un dels termes de $g_{i,\mathrm{min}}$ per cada i.

Com $\{g_1, \ldots, g_t\}$ és una base estàndard de I, sabem que

$$\langle \mathrm{LT}(I) \rangle = \langle \mathrm{LT}(g_1), \ldots, \mathrm{LT}(g_t) \rangle.$$

Estem treballant amb un ordre antigraduat, per tant, és evident que el $\mathrm{LT}(g_i)$ serà el component homogeni de menor grau.

Acabem de veure que $\langle \mathrm{LT}(I) \rangle = \langle g_{1,\mathrm{min}}, \ldots, g_{t,\mathrm{min}} \rangle$ i sabem que $C_0(V) = \mathrm{V}(f_{0,\mathrm{min}} \colon f \in I(V))$.

Tenint en compte que estem treballant amb un ordre antigraduat, és clar que $\mathrm{LT}(I(V)) = f_{\mathrm{min}}$. Per tant, $C_0(V) = \mathrm{V}(f_{0,\mathrm{min}} \colon f \in I(V)) = V(g_{1,\mathrm{min}}, \ldots, g_{t,\mathrm{min}})$, com volíem veure.

Podem considerar la varietat $V = \mathrm{V}(x^3 - yz - x, y^2 + 2z^3)$ a k^3. Utilitzant l'ordre $>_{\mathrm{alex}}$ a $k[x,y,z]_{\langle x,y,z \rangle}$, amb $x > y > z$, veurem que els polinomis definits a V generen una base estàndard i trobarem el con tangent de V.

Utilitzem `Singular`:

```
> ring r=0, (x, y, z), Ds;
> ideal i = x3-yz-x, y2+2z3;
> ideal j =std(i);
> j;
j[1]=x+yz-x3
j[2]=y2+2z3
```

Efectivament, els polinomis que defineixen la base estàndard són els inicials. Podem calcular els corresponents $\mathrm{LT}(x + yz - x^3)$ i $\mathrm{LT}(y^2 + 2z^3)$ amb ordre $>_{\min}$ utilitzant l'equivalència que hem vist abans. Obtenim que $\mathrm{LT}(x+yz-x^3) = x$ i $\mathrm{LT}(y^2+2z^3) = y^2$ i per tant,

$$C_0(V) = V(x, y^2).$$

Una altra aplicació és utilitzar la localització per estudiar de forma més detallada una component irreductible de una varietat reductible.

Considerem els vèrtexs A, B, C, D del paral·lelogram com segueix:

$$A = (0,0), B = (u,0), C = (v,w), D = (a,b),$$

i escrivim la intersecció de les diagonals $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ com $N = (c,d)$.

Les coordenades u, v, w són arbitràries i determinaran el valor de a, b, c, d. Amb les següents equacions polinòmiques indiquem que $ABCD$ és el paral·lelogram i N la intersecció de les diagonals:

$$\begin{array}{lcl l l}
h_1 & = & b - w & = & 0 \\
h_2 & = & (a-u)w - bv & = & 0 \\
h_3 & = & ad - cw & = & 0 \\
h_4 & = & d(v-u) - (c-u)w & = & 0
\end{array}$$

i

$$\begin{array}{lcl l l}
g_1 & = & a^2 - 2ac - 2bd + b^2 & = & 0 \\
g_2 & = & 2cu - 2cv - 2dw - u^2 + v^2 + w^2 & = & 0.
\end{array}$$

Com el teorema geomètric és cert, esperem que $g_1 = g_2 = 0$ sempre que la hipòtesis $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 0$. Si estem treballant sobre $\mathbb{C}$, pel Nullstellensatz Fort esperaríem trobar la següent igualtat:

$$g_i \in \mathrm{I}(\mathrm{V}(h_1, h_2, h_3, h_4)) = \sqrt{\langle h_1, h_2, h_3, h_4 \rangle},$$

però això no és cert.

Anem a veure que $g_1, g_2 \notin \sqrt{\langle h_1, h_2, h_3, h_4 \rangle} \subset \mathbb{C}[u, v, w, a, b, c, d]$ utilitzant el següent corol·lari:

Corol·lari 7.2. *Sigui k un cos arbitrari i sigui $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle \subset k[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle}$ un ideal. Llavors $f \in \sqrt{I}$ si i solament si $1 \in \tilde{I} = \langle f_1, \ldots, f_s, 1-yf \rangle \subset k[x_1, \ldots, x_n, y]_{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle}$.*

```
> ring r = 0, (a, b, c, d, u, v, w, t), (Dp(4), Ds(4));
> ideal i = b-w, (a-u)*w-b*v, ad-cw, d*(v-u)-(c-u)*w, 1-t*(a2-2ac-2bd+b2);
```

```
> ideal j=std(i);
> j;
j[1]=aw-bv-uw
j[2]=b-w
j[3]=cw+du-dv-uw
j[4]=a2t-2act+b2t-2bdt-1
j[5]=du
j[6]=ad-cw
j[7]=2dv2t+2dw2t+w+uvwt-v2wt-w3t
j[8]=uw
j[9]=2cdvt+2d2wt+cuwt-cvwt+d-dw2t
```

on es veu clarament que per g_1, $1 \notin \langle h_1, h_2, h_3, h_4, 1 - t \cdot g_1\rangle$. De la mateixa manera, podem fer els càlculs per g_2 i obtenim que $1 \notin \langle h_1, h_2, h_3, h_4, 1 - t \cdot g_2\rangle$.

Proposició 7.3. *Sigui $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ i suposem que l'origen a k^n està contingut en una component irreductible W de $\mathrm{V}(I)$. Sigui $f_1, \ldots, f_n \in k[x_1, \ldots, x_n]$ una base estàndard de I amb un ordre local i $g \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Si el residu de g en la divisió entre $F = (f_1, \ldots, f_s)$ utilitzant l'algorisme de Mora del Corol·lari 5.11 és zero, llavors $g \in \mathrm{I}(W)$ (però no és necessari que $g \in I$).*

Demostració. Si el residu és zero, amb l'algorisme de Mora obtenim la següent equació

$$u \cdot g = a_1 f_1 + \cdots + a_s f_s,$$

on $u \in k[x_1, \ldots, x_n]$ és una unitat a $k[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle}$. Com $W \subset \mathrm{V}(I)$, $u \cdot g$ és un element de $\mathrm{I}(W)$. Però W és irreductible, per tant, $\mathrm{I}(W)$ és un ideal primer. Com a conseqüència, $u \in \mathrm{I}(W)$ o $g \in \mathrm{I}(W)$. No és possible que $u \in \mathrm{I}(W)$ ja que $u(0) \neq 0$. Aleshores, $g \in \mathrm{I}(W)$. □

Abans de continuar, estudiarem el procés d'eliminació en un context d'anells locals ja que s'utilitza en els algorismes de moltes operacions amb ideals. Més concretament, estudiarem aquest procés en l'anell $R = k[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle}$.

El punt clau és estudiar el nou anell $k[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle}[t]$, on els elements es poden estudiar com polinomis en funció de t i coeficients a $k[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle}$.

Sigui un ideal $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle}[t]$, calculem la intersecció

$$I_0 = I \cap k[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle}.$$

Però I_0 és anàleg a l'ideal d'eliminació d'un ideal de polinomis.

Definició 7.4. *Un ordre d'eliminació en S és qualsevol ordre de semigrup $>_{elim}$ en els monomis de S definit de la següent forma. Sigui $>$ un ordre local a $k[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle}$. Definim*

$$t^k x^\alpha >_{elim} t^l x^\beta$$

per $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ si i solament si $k > l$, o $k = l$ i $\alpha > \beta$. És a dir, un ordre d'eliminació és un producte d'ordres que combina l'ordre de graus a les potències de t i l'ordre local donat $>$ a x^α a $k[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle}$.

Aquests ordres que acabem de definir no són ni ordres locals ni bons ordres.

Teorema 7.5 (Eliminació Local)**.** *Fixem un ordre d'eliminació $>_{elim}$ a $S = k[x_1, \dots, x_n]_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle}[t]$. Sigui $I \subset S$ un ideal, i G una base estàndard de polinomis de I respecte l'ordre $>_{elim}$. Llavors*

$$G \cap k[x_1, \dots, x_n] = \{g \in G \colon \mathrm{LT}(g) \text{ no conté a } t\}$$

i $G \cap k[x_1, \dots, x_n]$ és una base estàndard de $I_0 = I \cap k[x_1, \dots, x_n]_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle}$.

Demostració. Sigui $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ una base estàndard de I i $G_0 = \{g \in G \colon \mathrm{LT}(g) \text{ no conté a } t\}$. Per la definició de $>_{\mathrm{elim}}$, la condició que $\mathrm{LT}(g)$ no conté t implica que g no conté t. Com $G_0 \subset I_0$, solament cal veure que si $f \in I_0 \cap k[x_1, \dots, x_n]$, llavors f es pot escriure com una combinació dels elements de G_0 amb coeficients a $k[x_1, \dots, x_n]_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle}$. Com $f \in I$ i $\{g_1, \dots, g_n\}$ és una base estàndard de I, l'algorisme de Mora ens dona l'expressió

$$f = a_1 g_1 + \cdots + a_t g_t,$$

on $\mathrm{LT}(f) \geq \mathrm{LT}(a_i g_i)$ per tota $a_i \neq 0$. Escollim $a_i = 0$ per $g_i \notin G_0$ i $g_i \in k[x_1, \dots, x_n]_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle}$ ja que t no apareix a $\mathrm{LT}(f)$. □

Teorema 7.6. *Sigui $I, J \subset k[x_1, \dots, x_n]_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle}$ i $f \in k[x_1, \dots, x_n]$.*

- $I \cap J = (t \cdot I + (1-t) \cdot J) \cap k[x_1, \dots, x_n]_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle}$.
- $I \colon \langle f \rangle = \frac{1}{f} \cdot (I \cap \langle f \rangle)$.
- $I \colon f^\infty = (I + \langle 1 - f \cdot t \rangle) \cap k[x_1, \dots, x_n]_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle}$.
- $f \in \sqrt{I}$ *si i solament si* $1 \in I + \langle 1 - f \cdot t \rangle$ *a* $k[x_1, \dots, x_n]_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle}[t]$.

Demostració.

- Primer, veiem que $tI + (1-t)J$ és un ideal a $k[x_1, \dots, x_n, t]_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle}$.

  $\boxed{\subset}$ Suposem que $f \in I \cap J$. Com $f \in I$, $t \cdot f \in tI$. De la mateixa forma, $f \in J$ implica que $(1-t)f \in (1-t)J$. Amb aquests resultats, $f = tf + (1-t)f \in tI + (1-t)J$. Com $I, J \in k[x_1, \dots, x_n]_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle}$, $f \in (tI + (1-t)J) \cap k[x_1, \dots, x_n]_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle}$. Amb això, veiem la primera inclusió.

  $\boxed{\supset}$ Suposem $f \in (tI + (1-t)J) \cap k[x_1, \dots, x_n]_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle}$. Llavors $f(x) = g(x,t) + h(x,t)$, on $g(x,t) \in tI$ i $h(x,t) \in (1-t)J$. Agafem $t = 0$. Com cada element de tI és un múltiple de t, $g(x,0) = 0$. Per tant, $f(x) = h(x,0)$ que implica $f(x) \in J$ gràcies al següent lema.

  Lema 7.7. *El lema diu:*

  i. Si I és un ideal a $k[x_1, \dots, x_n]_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle}$ generat per $p_1(x), \dots, p_r(x)$, llavors $f(t)I$ és l'ideal a $k[x_1, \dots, x_n, t]_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle}$ generat per $f(t)p_1(x), \dots, f(t)p_r(x)$.

  ii. Si $g(x,t) \in f(t)I$ i a és qualsevol element de k, llavors $g(x,a) \in I$.

  Ara, agafem $t = 1$ en $f(x) = g(x,t) + h(x,t)$. Com cada element de $(1-t)J$ és múltiple de $(1-t)$, $h(x,1) = 0$. Per tant, $f(x) = g(x,1)$ i $f(x) \in I$ utilitzant el lema anterior.

  Com f pertany a I i J, tenim $f \in I \cap J$.

- $I\colon \langle f\rangle = \frac{1}{f}\cdot (I\cap \langle f\rangle)$.

  Siguin I, J ideals en $k[x_1,\dots,x_n]_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle}$. Definim $I\colon J$, l'ideal quocient de I entre J, com
  $$I\colon J = \{f \in k[x_1,\dots,x_n]_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle}\colon fg \in I \text{ per tot } g \in J\}.$$
  En el nostre cas, tenim
  $$I\colon \langle f\rangle = \{h \in k[x_1,\dots,x_n]_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle}\colon hf \in I \text{ per } f \in \langle f\rangle\}.$$
  Demostrar que $I\colon \langle f\rangle = \frac{1}{f}\cdot(I\cap\langle f\rangle)$ és el mateix que demostrar que si $\{m_1,\dots,m_p\}$ és una base de l'ideal $I\cap\langle f\rangle$, llavors $\{m_1/f,\dots,m_p/f\}$ és una base de $I\colon \{f\}$.

  $\boxed{\supset}$ Sigui $a \in \langle f\rangle$. Llavors $a = bf$ per un $b \in k[x_1,\dots,x_n]_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle}$. Si $g \in \langle m_1/f,\dots,m_p/f\rangle$,
  $$ag = bfg = \langle m_1,\dots,m_p\rangle = I\cap\langle f\rangle \subset I.$$
  Per tant, $g \in I\colon \langle f\rangle$ com volíem veure.

  $\boxed{\subset}$ Suposem $h \in I\colon \langle f\rangle$. Llavors $hf \in I$. Com $hf \in \langle f\rangle$, $hf \in I\cap\langle f\rangle$. Si $I\cap\langle f\rangle = \langle m_1,\dots,m_p\rangle$, tenim $hf = \sum r_i m_i$ per alguns r_i. Ja que $m_i \in \langle f\rangle$, cada $m_i/f \in k[x_1,\dots,x_n]_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle}$ i podem escriure $h = \sum r_i(m_i/f)$. Per tant, $h \in \langle m_1/f,\dots,m_p/f\rangle$, com volíem.

- $I\colon f^\infty = (I + \langle 1 - f\cdot t\rangle)\cap k[x_1,\dots,x_n]_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle}$.

  El quocient estable de I respecte f, $I\colon f^\infty$, està definit com l'ideal
  $$I\colon f^\infty = \{g \in R\colon \text{ existeix } n \geq 1 \text{ tal que } f^n g \in I\}.$$
  $\boxed{\subset}$ Sigui $a \in I\colon f^\infty$. Llavors, $af^m \in I$ per algun m, $af^m \in I \subset I + (1 - ft)$ i $1 - ft \in I + (1 - ft)$, per tant,
  $$a = af^mt^m + (a - af^mt^m) = af^mt^m + a(1-ft)(1+ft+\cdots+f^{m-1}t^{m-1}) \in I + \langle 1 - ft\rangle.$$
  Però, per definició, $a \in k[x_1,\dots,x_n]_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle}$, $a \in I + \langle 1 - ft\rangle \cap k[x_1,\dots,x_n]_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle}$ com volíem veure.

  $\boxed{\supset}$ Sigui $a \in (I + \langle 1 - ft\rangle)\cap k[x_1,\dots,x_n]_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle}$, llavors podem escriure $a = \sum p_i m_i + q(1 - ft)$, on $p_i, q \in k[x_1,\dots,x_n]_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle}[t]$ i $I = \langle m_1,\dots,m_p\rangle$.

  Definim $t = 1/f$ i $a = \sum p_i m_i$, amb $p_i \in k[x_1,\dots,x_n]_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle}[1/f]$.

  Si multipliquem els dos costats per f^m, obtenim $af^m = \sum A_i m_i$, amb $A_i \in k[x_1,\dots,x_n]_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle}$. Hem arribat, doncs, a veure que $af^m \in I$. Aquest resultat implica que $a \in I\colon f^\infty$, com volíem.

- $f \in \sqrt{I}$ si i solament si $1 \in I + \langle 1 - f\cdot t\rangle$ a $k[x_1,\dots,x_n]_{\langle x_1,\dots,x_n\rangle}[t]$.

  Sigui $J = I + \langle 1 - f\cdot t\rangle$.

  $\boxed{\Leftarrow}$ Sabem que si $1 \in J$, llavors $f^m \in I$ per alguna m per Nullstellensatz. Si $f^m \in I$, $f \in \sqrt{I}$.

  $\boxed{\Rightarrow}$ Suposem que $f \in \sqrt{I}$. Llavors $f^m \in I \subset J$ per alguna m. També tenim $1 - f\cdot t \in J$, per tant,
  $$1 = f^mt^m + (1 - f^mt^m) = f^m\cdot t^m + (1 - tf)\cdot(1 + ft + \cdots + f^{m-1}t^{m-1}) \in J,$$
  com volíem veure.

$\square$

8 Conclusions

En aquest treball, hem estudiat els Anells Locals amb l'objectiu final de definir i aplicar les bases estàndards.

Seguint una estructura similar al contingut estudiat en l'assignatura optativa d'Anells de Polinomis en Diverses Variables, hem definit conceptes i demostrat teoremes per arribar a l'objectiu final.

L'inici de la memòria ha consistit en la definició d'Anell Local i com afecta l'existència d'un únic ideal maximal en un anell R.

Després, hem estudiat el concepte de multiplicitat d'un punt de $\mathbf{V}(I)$ on I és un ideal de dimensió zero. La multiplicitat és un concepte que s'utilitza per definir els nombres de Milnor i de Tjurina, nombres que no es poden definir en Anells de Polinomis en Diverses Variables.

Durant la memòria, hem destacat la importància de l'algorisme de Mora ja que és el que ens ha permès poder fer la divisió entre polinomis, pas imprescindible en el càlcul de les bases estàndards.

Per estudiar l'algorisme de Mora hem necessitat, entre d'altres, el concepte d'ordre local i, en conseqüència, el concepte de terme líder en Anell Local. L'estudi previ dels ordres monomials ha estat de gran ajuda per l'estudi dels ordres locals.

Al arribar a l'objectiu final de la memòria, hem aplicat les bases estàndards mitjançant el programa `Singular`. Amb l'aplicació pràctica, la definició dels conceptes ha estat molt més entenedora. Una de les aplicacions que destaquem és el càlcul dels nombres de Milnor i Tjurina.

Les aplicacions han estat de gran utilitat per veure quina pot ser la finalitat d'estudiar les bases estàndards. Com hem vist, aquestes ens poden donar molta informació sobre l'ideal que estudiem o pot ser clau per definir noves estructures, com el con tangent.

El llibre de David A. Cox, John Little i Donal O'Shea, *Using Algebraic Geometry*, ha estat la pauta perfecta que m'ha ajudat a poder entendre aquest tipus d'anell que no havia estudiat abans.

La motivació de l'estudi d'aquest tipus d'anells va sorgir al fer l'assignatura optativa d'Anells de Polinomis en Diverses Variables. L'estudi d'anells i ideals ha estat del meu interès a partir de l'assignatura obligatòria d'Estructures Algebraiques, és per això que vaig decidir seguir estudiant aquesta branca a l'hora d'escollir les assignatures optatives.

Personalment, la realització d'aquesta memòria ha tingut un impacte molt important. M'ha servit per estudiar un tema del meu interès, aprendre sobre ell i decidir cap a on vull enfocar el meu futur professional.

Referències

[1] Cox, D. A.; Little, J.; O'Shea, D.: *Using Algebraic Geometry*, 2a edició, 2005. New York, NY : Springer New York, 2005.

[2] Cox, D. A.; Little, J.; O'Shea, D.: *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. New York, NY: Springer New York, 2008.

[3] Lang, S.: *Algebra*. Reading, Mass: Addison-Wesley, 1965.

[4] Greuel, G.-M.; Pfister, G.: *A **Singular** Introduction to Commutative Algebra*. Berlín, Springer, 2002.

[5] Sánchez, N.: *Notes del curs d'Estructures Algebraiques*, curs 2019-2020 impartit pel professor Carlos D'Andrea.