



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

LA DINÀMICA DELS
POLINOMIS COMPLEXOS:
THE ESCAPING SET

Autor: Rubén Blanco Borrás

Directora: Dra. Núria Fagella Rabionet

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 24 de gener de 2022

Abstract

In this project we study the dynamics of complex polynomials, leading towards an efficient algorithm to draw the relevant fractal objects that appear. First, we begin with a series of preliminary concepts necessary to be able to understand the properties of local and global theory, and then analyze the particular properties of polynomials. From here, we will delve into the quadratic family, specifically the Mandelbrot set. We develop Python code to visualize different sets of complex dynamics and see how the escaping and density algorithms work.

Resum

En aquest treball estudiarem la dinàmica dels polinomis complexos, que ens porta cap a un algorisme eficient per a visualitzar els fractals que en resulten. Començarem primer per una sèrie de conceptes preliminars necessaris per tal de poder entendre les propietats de la teoria local i global, per posteriorment analitzar les propietats concretes dels polinomis. A partir d'aquí, aprofundirem en la família quadràtica, concretament en el conjunt de Mandelbrot. Adjuntem codi en Python per visualitzar diferents conjunts fractals de dinàmica complexa i veure com funcionen els algorismes d'escapament i de densitat.

Agraïments

Primer de tot, vull agrair a la meva tutora Núria Fagella per acceptar dirigir el meu treball i ensenyar-me el meravellós món de la dinàmica complexa; a les seves sessions a on m'ha aconsellat molt sobre com realitzar aquest treball i ajudar-me a polir-lo, per tal de millorar al màxim tant la qualitat de la feina realitzada, com dels coneixements apresos.

A més a més, vull agrair a la meva mare per el seu suport tant important al llarg d'aquests anys, ja que quan he dubtat, ella sempre m'ha empès a seguir endavant. I al meu pare, qui espero que estigui molt orgullós d'on he arribat.

Índex

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introducció | 1 |
| 2 | Preliminars | 3 |
| 2.1 | Esfera de Riemann | 3 |
| 2.2 | Famílies Normals | 4 |
| 2.3 | Teorema de Riemann | 5 |
| 2.4 | Funció de Green | 6 |
| 2.5 | Connexió local | 7 |
| 3 | Teoria Local: punts periòdics i fixos | 8 |
| 3.1 | Atractors i Repulsors: Teorema de Linearització de Koenigs | 10 |
| 3.2 | Super-attractors: Teorema de Böttcher | 11 |
| 3.3 | Racionalment neutrals (parabòlics) | 12 |
| 3.4 | Irracionalment neutrals: Teorema de Siegel | 13 |
| 4 | Teoria Global | 14 |
| 4.1 | Conjunts de Fatou i Julia: $F(f)$, $J(f)$ | 14 |
| 4.2 | Propietats dels conjunts de Julia i Fatou | 14 |
| 4.3 | Components connexes de $F(f)$: Teorema de Classificació | 18 |
| 4.4 | Relació amb els punts crítics | 20 |
| 5 | Polinomis | 22 |
| 5.1 | Conjunt ple de Julia | 22 |
| 5.2 | Raigs externs | 24 |
| 5.3 | Teorema Principal: Connexitat del conjunt de Julia | 26 |
| 6 | El Conjunt de Mandelbrot | 28 |
| 6.1 | La Família Quadràtica $z^2 + c$ | 28 |
| 6.2 | Algorismes d'escapament i de densitat | 35 |
| 7 | Conclusions | 41 |

1 Introducció

El projecte

L'objectiu d'aquest treball és entendre el comportament asimptòtic dels iterats $f^n = f^{n-1} \circ f$, sent $f^1 = f$, a les diverses regions del pla, per tal de poder programar algorismes de visualització de fractals, sent el principal objectiu els algorismes de densitat, en comparació amb els d'escapament. Per tal d'arribar fins aquí, caldrà introduir els sistemes dinàmics complexos.

Primer de tot cal parlar d'una sèrie de resultats importants com ara el Teorema de Montel o les formes normals, que permeten simplificar l'estudi de la dinàmica aplicant un canvi de variable ϕ per traslladar la mateixa dinàmica d'un punt fix $z_0 = f(z_0)$ i el seu entorn, cap a un punt i entorn més senzill ($z_0 \mapsto 0$, de manera que un entorn de z_0 es conjuga a un entorn de 0). També jugaran un paper molt important en la dinàmica d'una funció f els seus punts crítics, aquells en que $f'(c) = 0$.

Seguidament, veurem la definició i propietats dels conjunts de Fatou (conjunt estable) i de Julia (conjunt caòtic) d'una funció f , per posteriorment centrar-nos en el cas en que f és un polinomi de grau $d \geq 2$. Aquests tenen una propietat molt important, i és que l'infinit és un punt super atractor (és a dir, en aplicar f^n hi ha certs punts del pla que tendiran cap a infinit amb molta rapidesa), i al conjunt format per tots els punts que divergeixen se l'anomena conca d'atracció d'infinit. Finalment, a partir d'aquests conceptes previs definirem el Conjunt de Mandelbrot, el més famós dels fractals, així com diversos teoremes de densitat, els quals s'adaptaran per tal de desenvolupar els algorismes de densitat per visualitzar tant el conjunt de Mandelbrot com el de Julia. Aquests algorismes veurem que són millors que els d'escapament, ja que permeten distingir l'interior, la frontera i l'exterior del conjunt representat, mentre que els d'escapament només diferencien entre punts del conjunt i punts exteriors, donant un resultat menys precís.

Històricament, l'estudi de les iteracions de funcions holomorfes va començar al segle XIX, però el seu desenvolupament més gran es va produir al segle XX. El primer focus d'investigació del segle XIX va ser l'estudi d'equacions funcionals que relacionen diferents funcions conegudes o desconegudes. Charles Babage, a l'any 1815, va publicar el llibre 'An essay on the calculus of functions', on va establir les bases intentant comprendre moltes d'aquestes equacions funcionals. Un dels conceptes introduïts més importants és el de la semiconjugació φ , dels quals un cas concret és el de $g(y) = \lambda y$, que es redueix a la equació funcional de Schröder

$$\varphi(f(x)) = \lambda\varphi(x),$$

introduïda en l'escrit 'Ueber iterirte Functionen' d'Ernst Schröder l'any 1871.

Tot i així, Schröder no ho va pensar en termes de dinàmica, només contenia una sèrie d'idees molt anticipades en el temps. Una altra contribució a l'any 1879 va ser l'anàlisi del mètode de Newton de Cayley per a equacions polinomials de grau 2. L'any 1884, Gabriel Koenigs va demostrar que al voltant d'un punt fix $f(z_0) = z_0$ l'equació de Schröder és única si el multiplicador $|\lambda| \neq 0, 1$, i que pot ser entesa en termes de dinàmica complexa com la funció lineal $w \mapsto \lambda w$. Leau a l'any 1897

va estudiar el cas més complicat, en que λ és una arrel de la unitat, i finalment Böttcher el 1904 va estudiar el cas $\lambda = 0$. Va ser el primer en estudiar la diferència entre un comportament previsible respecte un de caòtic.

El cas en que $|\lambda| = 1$ però λ no és una arrel de la unitat és encara molt més complicat i no va ser entès fins al treball de Hubert Cremer el 1927 i Carl Ludwig Siegel el 1942.

Mentrestant, l'estudi global de la iteració de funcions holomorfes va desenvolupar-se molt ràpidament a partir de l'any 1906, quan Pierre Fatou va descriure un exemple sorprenent: per a la funció $z \mapsto z^2/(z^2 + 2)$, va mostrar que gairebé totes les òrbites en iteració convergeixen a zero, tot i que hi ha un conjunt de Cantor de punts excepcionals pels quals l'òrbita queda acotada lluny de zero. A partir d'aquest problema, es va generar molt interès i, després de la Primera Guerra Mundial, va ser tractat en profunditat per Fatou i Gaston Julia. Les aportacions més importants van ser desenvolupades pel propi Fatou, però Julia va ser un competidor amb més fama com a conseqüència de ser un heroi de guerra.

Posteriorment, la dinàmica va ser deixada de banda fins la dècada de 1980, on va tornar a generar molt d'interès a partir del treball de Douady, Hubbard, Sullivan i Thurston, degut a la possibilitat d'experimentar amb ordinador il·lustracions d'aquesta complicada geometria; això va tenir una influència dramàtica.

Estructura de la Memòria

1. La primera secció consistirà en introduir un seguit de resultats i conceptes preliminars, necessaris per desenvolupar els temes centrals del projecte.
2. A la segona secció estudiarem els punts periòdics i les seves propietats i comportaments locals, així com la seva classificació.
3. En la tercera secció veurem la definició i un seguit de propietats dels conjunts de Fatou i Julia.
4. A la quarta secció, analitzarem el cas concret en que f sigui un polinomi de grau $d \geq 2$ i les seves propietats al voltant de l'infinit, entre d'altres, per veure finalment la connexitat del conjunt de Julia.
5. Per acabar, la última secció està dedicada a estudiar el conjunt de Mandelbrot i les seves propietats com ara la seva connexitat, l'interior i la frontera, així com la visualització d'aquest conjunt mitjançant els algorismes de densitat i d'escapament juntament amb el conjunt de Julia.

2 Preliminars

La majoria de continguts d'aquest capítol poden trobar-se al capítol I de [2] i en [3], on el lector pot adreçar-se per més detalls.

Aquesta secció conté un seguit de resultats i conceptes preliminars, necessaris per desenvolupar els temes centrals d'aquest projecte. En general no s'inclouen demostracions perquè són part del pla docent d'alguna assignatura o bé s'escapen de l'objectiu del treball. Comencem parlant de l'Esfera de Riemann, que és la esfera obtinguda de l'extensió dels nombres complexos afegint-hi un punt a l'infinit, seguit de la mètrica esfèrica. Després, introduïm les Famílies Normals, noció formulada per P. Montel al 1911 sobre casos concrets de funcions meromorfe, derivant en el Teorema (Criteri de Normalitat) de Montel, utilitzat posteriorment en els treballs de Fatou i Julia en la teoria de la iteració complexa en la mateixa dècada. I finalment, el Teorema de Riemann, el qual ens dóna la existència (tot i que no sempre es pot trobar de forma explícita) d'una funció bijectiva entre un subconjunt determinat del pla complex y la bola oberta de radi 1.

2.1 Esfera de Riemann

L'esfera de Riemann és una compactificació del pla complex, és a dir, es tracta del pla complex afegint-hi un punt en l'infinit. Amb aquest model de Riemann, el punt infinit està a prop de nombres amb mòdul molt gran, mentre que el punt 0 està proper a nombres de mòdul molt petit. D'aquesta manera, l'infinit el podem tractar com un nombre complex més i operar amb ell, com per exemple dividir per infinit, o que expressions com $\frac{1}{0} = \infty$ estiguin ben definides dins l'esfera, de tal forma que podem estendre qualsevol funció racional del pla complex a una funció holomorfa a l'esfera de Riemann. En altres paraules, una funció racional meromorfa es pot considerar com una funció holomorfa a $\mathbb{C} \setminus \{\infty\}$, ja que els pols tenen imatge infinit, el qual és també un punt de l'esfera.

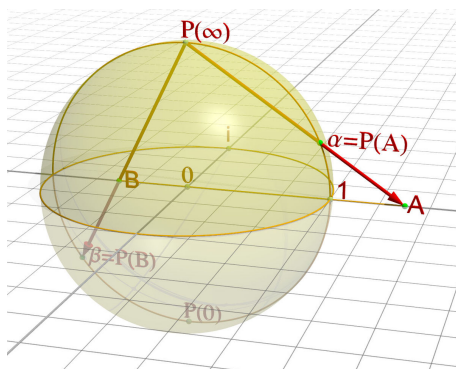


Figura 1: Esfera de Riemann

Projecció estereogràfica

Per tal d'obtenir una correspondència entre qualsevol punt del pla complex i un punt de l'esfera de Riemann de forma bijectiva, s'utilitza la projecció estereogràfica, definida a tota l'esfera menys un punt, en aquest cas, el punt de l'infinit (pol nord de l'esfera). A on està definida, a més de bijectiva, és conforme. Per tant, tot punt de l'hemisferi nord (sense incloure el cercle de l'equador) de l'esfera tindrà correspondència amb un punt del pla complex de fora de la bola de radi 1, tot punt de l'equador serà fix per la projecció estereogràfica, i l'hemisferi sud es correspondrà amb punts de dins de la bola de radi 1 del pla complex.

Proposició 2.1.1. *Si $Z = X + Yi$ un nombre del pla complex, aleshores la seva projecció estereogràfica a l'esfera és:*

$$\phi(Z) = \left(\frac{2X}{|Z|^2 + 1}, \frac{2Y}{|Z|^2 + 1}, \frac{|Z|^2 - 1}{|Z|^2 + 1} \right)$$

Recíprocament, si $X = (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 1)$ és un punt de l'esfera de Riemann, aleshores, la inversa per la projecció estereogràfica a l'esfera és:

$$\phi^{-1}(X) = \frac{x_1 + x_2i}{x_3 - 1}$$

Mètrica esfèrica

Siuguin Z i W dos punts del pla complex. Per tal de mesurar la distància entre Z i W projectats a l'esfera de Riemann, utilitzarem la distància cordal, que és la distància euclídea entre aquestes dues projeccions:

$$d_2(Z, W) = \frac{2|Z - W|}{\sqrt{1 + |Z|^2}\sqrt{1 + |W|^2}}$$

Tenim també que

$$d_2(Z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |Z|^2}}$$

De la mateixa manera, si $Z = (z_1, z_2, z_3)$ i $W = (w_1, w_2, w_3)$ són dos punts de l'esfera de Riemann, aleshores:

$$d_2(Z, W) = \sqrt{(z_1 - w_1)^2 + (z_2 - w_2)^2 + (z_3 - w_3)^2}$$

Com $d(Z, W) \leq 2$, obtenim que l'esfera de Riemann (S^2) és un compacte.

2.2 Famílies Normals

Un altre concepte previ és el de famílies de funcions normals, el qual veurem amb més detall en capítols posteriors quan iterem funcions de variable complexa, però de moment només parlarem del concepte de normalitat.

Definició 2.2.1 (Família normal). Sigui X un subconjunt obert del pla complex. Una col·lecció \mathcal{F} de funcions holomorfes $\{f_\alpha : X \rightarrow \mathbb{C}\}, \alpha \in I$, on I és un conjunt d'índexos, és normal si per tota successió infinita de funcions de \mathcal{F} , existeix una parcia que convergeix uniformement en compactes a una funció holomorfa o a l'infinit.

Les famílies normals de funcions holomorfes proporcionen la forma més ràpida de demostrar el teorema de Riemann, del qual parlarem més endavant en aquest mateix capítol. Una altra forma de definir les famílies normals és considerar-les com a conjunts relativament compactes. Al llarg del treball ens centrarem principalment en el concepte de normalitat dins l'esfera de Riemann. Per tal de saber si una família \mathcal{F} és normal, s'utilitza el Criteri de Normalitat de Montel.

Teorema de Montel

Una primera versió més lleugera del Teorema de Montel diu:

Teorema 2.2.2 (Teorema de Montel: versió feble). *Una família \mathcal{F} de funcions holomorfes sobre un obert Ω del pla complex \mathbb{C} és normal, si està uniformement acotada en cada compacte de Ω . És a dir, si $K \subset \Omega$ és un compacte i si es compleix que*

$$|f(z)| \leq M, \forall f \in \mathcal{F}, \forall z \in K$$

per un cert M prou gran, aleshores \mathcal{F} és normal en Ω .

A continuació, tenim la versió forta del Teorema de Montel, conegut com a Criteri de Normalitat de Montel.

Teorema 2.2.3. (Teorema de Montel) *Sigui Ω un subconjunt obert de \mathbb{C} , i siguin $a, b \in \mathbb{C}, a \neq b$. Si una col·lecció \mathcal{F} de funcions holomorfes $f_\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mai tenen com a imatge cap d'aquests dos valors complexos, aleshores \mathcal{F} és normal. És a dir, qualsevol família de la forma*

$$\{f \in H(\Omega) : f(\Omega) \subset \mathbb{C} \setminus \{a, b\}\}$$

és normal.

En cas que fos l'esfera de Riemann en comptes del pla complex, hauríem de treure tres valors complexos en comptes de dos, ja que considerant el pla complex ja n'hem tret un, el punt de l'infinit. Aquest teorema és cert pel fet que existeix una funció φ holomorfa que ens envia $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ cap al disc unitat \mathbb{D} .

2.3 Teorema de Riemann

El Teorema de Riemann ens diu que, sota certes condicions, existeix una aplicació bijectiva i conforme entre un subconjunt i el disc unitari obert. És un resultat d'existència i, per tant, no vol dir que es pugui trobar una funció explícita per

a cada subconjunt. De fet, són pocs els conjunts on la funció de Riemann pot expressar-se en termes de funcions elementals. Però l'existència està garantida per a tots els conjunts oberts simplement connexos, la qual cosa és ben remarcable, ja que aquests poden ser molt complicats (Veure Figura 2).

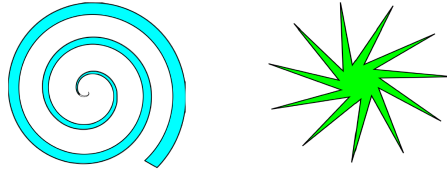


Figura 2: Conjunts simplement connexos sense funció bijectiva explícita conforme

Teorema 2.3.1. (Teorema de representació conforme de Riemann)

Signi $U \subset \mathbb{C}$ un obert simplement connex, $U \neq \mathbb{C}$. Aleshores, existeix una funció f holomorfa, bijectiva i conforme, tal que:

$$f : U \rightarrow \mathbb{D}$$

on \mathbb{D} és el disc unitat obert, és a dir, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. A més, si fixem $z_0 \in U$ i demanem $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) \in (0, 1)$, aleshores f és única.

Com a exemples de transformacions conformes en certes regions de \mathbb{C} tenim z^α o e^z . Les úniques funcions conformes (holomorfes i globalment bijectives) a $\hat{\mathbb{C}}$ (esfera de Riemann) són les transformacions de Möbius o homografies, les quals són de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

on $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ (si $ad = bc$, aleshores $T(z)$ és constant).

És trivial veure que $T(z)$ és globalment bijectiva:

$$z = T^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

que també és una homografia. Donat que les homografies envien cercles i rectes a cercles i rectes, poden ser utilitzades com a transformacions conformes de multitud de subregions de l'esfera de Riemann.

2.4 Funció de Green

Abans de parlar de la Funció de Green, cal introduir el concepte de funció harmònica.

Definició 2.4.1 (Funció harmònica). Signi D un subconjunt obert de \mathbb{R}^n . Una funció harmònica és una funció f de classe C^2 tal que $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ compleix l'equació de Laplace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0$$

En el cas concret de funcions al pla complex holomorfes, la part real i la part imaginària són funcions harmòniques, ja que compleixen les equacions de Cauchy-Riemann, i en aquest cas es diu que són harmòniques conjugades.

Observem que les funcions harmòniques compleixen el principi del màxim (assol·leixen el seu valor màxim a la frontera del domini on estan definides).

Definició 2.4.2. (Funció de Green) Sigui G una regió del pla, i sigui $a \in G$. Una funció de Green de G amb singularitat/pol en a és una funció $g_a : G \rightarrow \mathbb{R}$ que compleix les següents propietats:

- g_a és harmònica en $G \setminus \{a\}$;
- $G(z) = g_a(z) + \log|z - a|$ és harmònica en un disc al voltant de a ;
- $\lim_{z \rightarrow w} g_a(z) = 0 \forall w \in \partial_\infty G$, on $\partial_\infty G$ denota la frontera de G a $\hat{\mathbb{C}}$.

Donada una regió G i un punt $a \in G$, g_a no té per què existir. Tot i així, si existeix, és única i, en aquest cas, es diu que G és regular. La existència o no de la funció de Green en una regió G no depèn del punt $a \in G$, sino només de la regió G .

2.5 Connexió local

Un concepte de topologia que serà necessari posteriorment és el de connexitat local.

Definició 2.5.1 (Conjunt localment connex). Un espai topològic X és localment connex en un punt $x \in X$ si existeix un entorn U arbitràriament petit de x tal que $U \cap X$ és connex.

Lema 2.5.2. *L'espai X és localment connex $\forall x \in X$ sí, i només sí, tot subconjunt obert de X és una unió de subconjunts oberts connexos de X .*

Amb aquests conceptes definits, enunciem el teorema de Carathéodory.

Teorema 2.5.3 (Carathéodory). *La funció inversa de Riemann $\psi : D \xrightarrow{\cong} U$ estén de forma contínua a una aplicació del disc unitat tancat \overline{D} en \overline{U} sí, i només sí, la frontera ∂U és localment connexa, o sí, i només sí, el complementari $\hat{\mathbb{C}} \setminus U$ és localment connex.*

3 Teoria Local: punts periòdics i fixos

Els continguts d'aquest capítol poden trobar-se al capítol II de [2], on el lector pot adreçar-se per més detalls.

Per tal de poder començar a estudiar la dinàmica de les funcions holomorfes, el primer de tot és estudiar els punts periòdics i el comportament que es produeix en el seu entorn.

Definició 3.0.1 (Període i multiplicador). Considerem una òrbita periòdica o cicle

$$f : z_0 \mapsto z_1 \mapsto \dots \mapsto z_m = z_0, z_i \in \widehat{\mathbb{C}}$$

d'una funció holomorfa $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. Si els punts z_1, \dots, z_m són tots diferents, aleshores el nombre natural $m \geq 1$ s'anomena el període. La primera derivada de l'iterat m -èssim en un punt de la òrbita és un nombre complex ben definit anomenat el multiplicador de la òrbita. És a dir:

$$\lambda = (f^m)'(z_i) = f'(z_1) \dots f'(z_m)$$

En particular, $\lambda = 0$ sí, i només sí, existeix un z_j de la òrbita que és un punt crític de f ($f'(z_j) = 0$).

Els punts fixos, es tracten de punts periòdics tals que el seu període es 1, ja que en aplicar una funció f un sol cop, obtenim el mateix punt.

A continuació, ens reduïrem al cas en que el període $p = 1$ per l'estudi local, perquè sino només caldria parlar de f^p .

Sigui z_0 un punt fix d'una funció holomorfa f , és a dir, $f(z_0) = z_0$. Definim el multiplicador de f a z_0 com $\lambda = f'(z_0)$.

Podem classificar els punts fixos de la següent forma:

- Atractor: $|\lambda| < 1$. En cas que $\lambda = 0$ es tracta d'un punt fix super-atractor.
- Repulsor: $|\lambda| > 1$.
- Racionalment neutral: $|\lambda| = 1$ i $\lambda^n = 1$ per un cert nombre enter n .
- Irracionalment neutral: $|\lambda| = 1$ però λ^n mai és 1.

Observació 3.0.2. Si $z_i = \infty$ per algun i , és a dir, si l'infinit és un valor periòdic d'una funció racional ($f^m(\infty) = \infty$), definim $(f^m)'(\infty) = g'(0)$, on $g(z) = \frac{1}{(f^m)(1/z)}$, de manera que si f és un polinomi de grau $n \geq 2$, aleshores $\lambda_\infty = 0$.

Demostració. Sigui $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0, a_n \neq 0$. Aleshores,

$$g(z) = \frac{1}{P(1/z)} = \frac{1}{\frac{a_n}{z^n} + \dots + a_0} = \frac{z^n}{a_n + \dots + a_0 z^n}$$

$$g'(z) = \frac{nz^{n-1}(a_n + \dots + a_0z^n) - z^n(na_0z^{n-1} + \dots + a_{n-1})}{(a_n + \dots + a_0z^n)^2}$$

Per tant, tenim que

$$g'(z) = z^{n-1} \frac{n(a_n + \dots + a_0z^n) - z(a_{n-1} + \dots + na_0z^{n-1})}{(a_n + \dots + a_0z^n)^2}$$

Ara, com $a_n \neq 0$ i $n \geq 2$, obtenim que $g'(0) = 0(\frac{na_n-0}{a_n}) = 0$ □

Una òrbita periòdica pot ser atractora, repulsora, o neutra/indiferent, segons si $|\lambda| < 1, |\lambda| > 1$ o $|\lambda| = 1$ respectivament. En cas que $\lambda = 0$ la òrbita serà super-atractora. Si $|\lambda| = 1$ i $\lambda^n = 1$ per un cert nombre natural n direm que és racionalment neutra i, en cas contrari, irracionalment neutra.

Tal com hem introduït en la classificació de punts fixos, tenim que

Definició 3.0.3. Un punt periòdic $z_0 = f^n(z_0)$ és parabòlic si el seu multiplicador λ és una arrel de la unitat, però cap iterat de f és la funció identitat. Per tal de garantir que $f(z) = P(z)/Q(z)$, P i Q polinomis, no és la identitat, és suficient requerir que $d = \max\{gr(P), gr(Q)\} \geq 2$.

Per exemple, $f(z) = z/(z-1)$ té dos punts fixos amb multiplicador igual a -1 , però no són parabòlics, ja que $f(f(z)) = z$.

A partir d'ara, considerem $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, Ω un obert de \mathbb{C} . La idea de la conjugació conforme va ser introduïda per E. Schröder a l'any 1871 per tal d'estudiar la iteració de funcions racionals, d'aquí que l'equació que porta el seu nom sigui utilitzada per tal de trobar diferents **formes normals**.

Definició 3.0.4 (Conjugació). Diem que una funció $f : U \rightarrow U$ és conformement conjugada a una funció $g : V \rightarrow V$ si existeix una aplicació conforme $\varphi : U \rightarrow V$ tal que $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$, és a dir:

$$\varphi(f(z)) = g(\varphi(z))$$

D'aquesta última igualtat se li diu equació de Schröder.

Quan φ existeix i $g(z) = \lambda z$, diem que f és *linearitzable* al voltant de z_0 . Ara, l'objectiu és trobar conjugacions en un entorn U del punt fix z_0 que conjuguin f a una funció g més simple, com per exemple la part lineal λz o altres. Les aplicacions f i g poden ser considerades com la mateixa funció en un sistema de coordenades diferent. La existència de la funció φ de conjugació de f a g depèn de f i en particular del multiplicador λ . A continuació veurem que existeix en el cas de punt fix atractora i repulsor. En el cas de punts fixos irracionalment neutrals, la funció de conjugació existeix excepte si λ és proper a arrels de la unitat. En el cas de punts fixos racionalment neutrals, la funció de conjugació en general no existeix, però la conjugació d'altres formes canòniques existeix en un domini ampli on el punt fix forma part de la frontera, creant una imatge on el punt fix z_0 està al centre i els

entorns on existeix formen "pètals com una flor.

Per tant, si $\lambda \neq 0$ i no és una arrel de la unitat, veurem que la funció de conjugació φ existeix i és única llevat multiplicitat per constant no nul·la.

3.1 Atractors i Repulsors: Teorema de Linearització de Koenigs

Els punts fixos més fàcils de tractar són els atractors tals que $0 < |\lambda| < 1$, és a dir, els que no són super-tractors. Suposem que z_0 és un punt fix atractor. Si $|\lambda| < \rho < 1$, aleshores $|f(z) - z_0| \leq \rho|z - z_0|$ en un entorn de z_0 . Per tant, $|f^n(z) - z_0| \leq \rho^n|z - z_0|$, i per tant els iterats de f^n convergeixen uniformement a z_0 en el seu entorn.

Definició 3.1.1 (Conca d'atracció). Sigui z_0 un punt fix atractor de f . Aleshores, es defineix la conca d'atracció de z_0 , denotada com $A(z_0)$, com el conjunt de tots els punts z propers a z_0 tal que $f^n(z) \rightarrow z_0$ si $n \rightarrow \infty$.

És trivial que el conjunt $A(z_0)$ és obert.

Teorema 3.1.2. (Teorema de Linearització de Koenigs) *Suposem que f té un punt fix atractor en z_0 , amb multiplicador λ tal que $0 < |\lambda| < 1$. Aleshores, existeix una aplicació conforme $\xi = \varphi(z)$ que va d'un entorn de z_0 a un entorn de 0 que conjuga $f(z)$ a la funció lineal $g(\xi) = \lambda\xi$. La funció de conjugació és única, llevat de multiplicació per un escalar no nul.*

Demostració de la unicitat de la funció de conjugació: és suficient veure que qualsevol conjugació de $g(z) = \lambda z$ en sí mateix és una constant múltiple de z . Suposem $\varphi(z) = a_1z + a_2z^2 + \dots$ és una conjugació, tal que $\varphi(\lambda z) = \lambda\varphi(z)$. Substituint sèries de potències i igualant coeficients, obtenim $a_n\lambda^n = \lambda a_n$, per tant $a_n = 0$ per $n \geq 2$, i $\varphi(z) = a_1z$. En el cas super-tractor tal que $\lambda = 0$, el mateix mètode permet veure que qualsevol conjugació cap a ξ^p és única llevat multiplicitat per una arrel $(p-1)$ -èssima de la unitat. La equació de funcions de conjugació de z^p en sí mateixa és $\varphi(z^p) = \varphi(z)^p$, i comparant sèries de potències veiem que $\varphi(z) = a_1z$, de manera que $a_1^p = a_1$. \square

La conjugació φ definida al teorema és normalitzada de tal forma que $\varphi'(z_0) = 1$. La convergència uniforme ens mostra que, si f depèn analíticament d'un paràmetre, també ho farà la funció normalitzada φ .

La equació de Schröder satisfeta per la funció de conjugació φ ens diu que:

$$\varphi(f(z)) = \lambda\varphi(z)$$

Aquesta equació ens permet estendre φ analíticament a tota la conca d'atracció $A(z_0)$, per la fórmula $\hat{\varphi}(z) = \varphi(f^n(z))/\lambda^n$, per un cert n prou gran tal que $f^n(z)$ pertanyi a un entorn de z_0 . Notem que $\hat{\varphi}(z) = 0$ sí, i només sí, $f^n(z) = z_0$ per un cert $n \geq 1$.

La existència d'una conjugació quan z_0 un **punt fix repulsor** se segueix immediatament del cas atractor. Suposem $f(z) = z_0 + \lambda(z - z_0) + \dots$ tal que $|\lambda| > 1$. Aleshores, pel Teorema de la Funció Inversa, la branca local de f^{-1} , $h(z) = z_0 + (z - z_0)/\lambda + \dots$ té un punt fix atractor en z_0 . Qualsevol aplicació conjugant $h(z)$ a ξ/λ també conjugua $f(z)$ a $\lambda\xi$.

3.2 Super-attractors: Teorema de Böttcher

Els punts fixos super-attractors són també punts crítics de la funció f , ja que $\lambda = f'(z_0) = 0$. La existència de la funció de conjugació va ser demostrada per primer cop per L.E. Boettcher al 1904.

Aquest teorema es relevant per polinomis i la seva dinàmica, ja que tot polinomi de grau ≥ 2 es pot estendre a l'esfera de Riemann com una funció racional tal que té un punt super-attractor a l'infinit.

Teorema 3.2.1. (Teorema de Böttcher) *Suposem que f té un punt fix super-attractor en z_0 , i sigui $a_p \neq 0, p \geq 2$,*

$$f(z) = z_0 + a_p(z - z_0)^p + \dots$$

Aleshores, existeix una conjugació conforme $\xi = \varphi(z)$ en un entorn de z_0 cap a un entorn de 0 que conjugua $f(z)$ a ξ^p . La conjugació és única, llevat de multiplicació per una arrel $(p-1)$ -èssima de la unitat.

Demostració. Suposem $z_0 = 0$. Per $|z|$ petit, existeix $C > 1$ tal que $|f(z)| \leq C|z|^p$. Per inducció, escrivint $f^{n+1} = f^n \circ f$ i usant $p \geq 2$, podem trobar que

$$\begin{aligned} |f^n(z)| &= |f(f^{n-1}(z))| \leq C|f^{n-1}(z)|^p = C|f(f^{n-2}(z))|^p \leq C|C|f^{n-2}(z)|^p|^p = \\ &= C^p C|f^{n-2}(z)|^{p^2} \leq \dots \leq C^{p^{n-1}} C|z|^{p^n} \leq (C|z|)^{p^n}, |z| \leq \delta \end{aligned}$$

tal que $f^n(z) \rightarrow 0$ de forma super-exponencial.

Si fem un canvi de variable i establim $w = cz$ tal que $c^{p-1} = 1/a^p$, aleshores hem conjugat f a la forma $f(w) = w^p + \dots$. Per tant, podem assumir que $a_p = 1$. Volem trobar una aplicació de conjugació $\varphi(z) = z + \dots$ tal que $\varphi(f(z)) = \varphi(z)^p$, que és equivalent a la condició de que $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = \xi^p$. Sigui

$$\varphi_n = f^n(z)^{p^{-n}} = (z^{p^n} + \dots)^{p^{-n}} = z(1 + \dots)^{p^{-n}},$$

la qual està ben definida en un entorn al voltant de l'origen. Les funcions φ_n satisfan

$$\varphi_{n-1} \circ f = (f^{n-1} \circ f)^{p^{-n+1}} = \varphi_n^p,$$

per tant, si $\varphi_n \rightarrow \varphi$, aleshores φ satisfà $\varphi \circ f = \varphi^p$ i això és una solució. Per veure que $\{\varphi_n\}$ convergeix, escrivim $f^{n+1} = f \circ f^n$ i veiem que

$$\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} = \left(\frac{\varphi_1 \circ f^n}{f^n} \right)^{p^{-n}} = (1 + \mathcal{O}(|f^n|))^{p^{-n}} = 1 + \mathcal{O}(p^{-n}) \mathcal{O}(|z|^{p^n} C^{p^n}) = 1 + \mathcal{O}(p^{-n})$$

si $|z| \leq 1/C$. Per tant, el producte

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}$$

convergeix uniformement per $|z| \leq c < 1/C$, i això implica que $\{\varphi_n\}$ convergeix, i per tant φ existeix.

La demostració de la unicitat és anàloga al cas en que f és linearitzable, ja demostrat anteriorment. \square

3.3 Racionalment neutrals (parabòlics)

Suposem que $\lambda^n = 1$ i que $f(z) = \lambda z + az^{p+1} + \dots, a \neq 0$. Donat que en aquest cas de punts fixos racionalment neutrals en general no existeix una conjugació a la part lineal, i l'estudi d'aquest apartat es centra en buscar altres formes canòniques, això escapa al tema central del treball i per tant no comentarem les diferents possibilitats en què pot existir la funció de conjugació.

Un exemple de com són aquests punts és el de la Figura 3, a on podem veure que hi ha np pètals invariants. En el primer cas, $\lambda = 1 (n = 1)$ i $p + 1 = 4$, per tant tenim 3 pètals. En el segon cas, $\lambda = -1$, i per tant $\lambda^2 = 1 (n = 2)$, i $p + 1 = 4$, i per això obtenim 6 pètals.

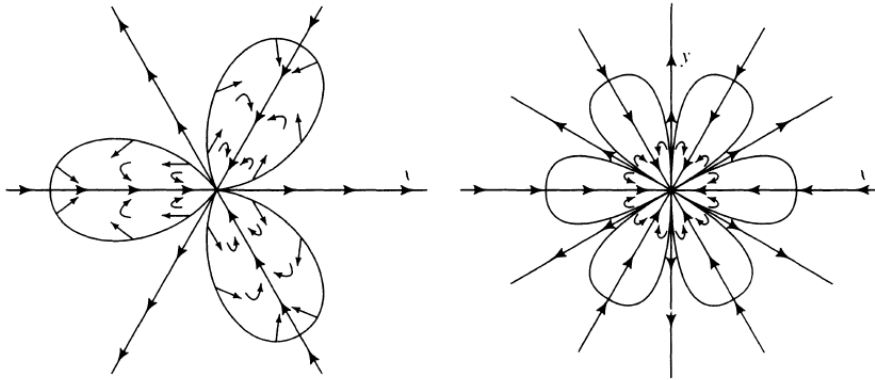


Figura 3: Patró de pètals atractors per $z + z^4$ i $-z + z^4$

Cada un d'aquests pètals P_i dóna lloc al que anomenem conca d'atracció parabòlica de z_0 , de manera que

$$A_{par}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} | f^n(z) \rightarrow z_0 \text{ a través de } P_i\}$$

3.4 Irracionalment neutrals: Teorema de Siegel

Sigui $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ amb θ irracional. Volem trobar una solució φ de la equació de Schröder $\varphi(f(z)) = \lambda\varphi(z)$, normalitzada per $\varphi'(0) = 1$. Per $h = \varphi^{-1}$, això implica

$$f(h(\xi)) = h(\lambda\xi), \quad h'(0) = 1.$$

Abans de començar a analitzar aquest cas concret, comencem per veure algunes observacions.

Teorema 3.4.1. *Una solució h a la equació de Schröder en qualsevol disc $\{|\xi| < r\}$ és injectiva, i existeix, sí, i només sí, la successió de funcions $\{f^n\}$ està uniformement acotada en un entorn de l'origen.*

Va ser C.L. Siegel, a l'any 1942, qui va trobar el primer exemple d'un λ unimodular pel qual l'equació de Schröder té solució. Abans d'entrar en aquest teorema, veiem primer una definició:

Definició 3.4.2 (Nombre diofantí). Un nombre real θ és Diofantí si és malaproximable per nombres racionals, en el sentit que existeix $c > 0$ i $\mu < \infty$ tal que

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^\mu}$$

$\forall p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$.

Això succeeix sí, i només sí, $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ satisfà

$$|\lambda^n - 1| \geq cn^{1-\mu}, \quad n \geq 1$$

En particular, quasi tots els nombres reals són Diofantins (en el sentit de mesura de Lebesgue).

Teorema 3.4.3. (Teorema de Siegel) *Si θ és Diofantí, i si f té un punt fix en z_0 amb multiplicador $e^{2\pi i\theta}$, aleshores existeix una solució a la equació de Schröder, tal que f pot ser conjugada a prop de 0 multiplicant-la per $e^{2\pi i\theta}$.*

Degut a la conjugació, existeixen corbes tancades invariants on les òrbites són denses, ja que per $R_\theta(z) = \lambda z$, $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, θ irracional, tenim una rotació rígida d'angle θ tal que tots els cercles són invariants, i pel Teorema de Jacobi, sabem que l'òrbita de z_0 tal que $|z_0| = r$ és densa al cercle de radi r , ja que al ser l'angle irracional, per molt que iterem per R_θ , mai tornarem al punt d'origen.

4 Teoria Global

Els continguts d'aquest capítol poden trobar-se al capítol 4 de [4] i al capítol 9 de [1], on el lector pot adreçar-se per més detalls.

4.1 Conjunts de Fatou i Julia: $F(f)$, $J(f)$

En iterar funcions holomorfes en el pla complex, tindrem dos conjunts clarament diferenciats segons com es comporta la funció, que són els següents.

Sigui $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ l'esfera de Riemann, sigui $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una funció holomorfa no constant, sigui $f^n : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ l'iterat n -èsim de f , i sigui $p_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ un punt qualsevol. Aleshores, tenim la següent dicotomia.

Definició 4.1.1 (Conjunts de Fatou i Julia). Si existeix un entorn U de p_0 tal que la successió d'iterats $\{f^n\}$ restringida a U forma una família normal de funcions $f^n : U \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, aleshores diem que p_0 pertany al conjunt de Fatou de f ($F = F(f)$). En cas contrari, si no existeix aquest entorn, diem que p_0 pertany al conjunt de Julia $J = J(f)$, de manera que $F = \widehat{\mathbb{C}} \setminus J$. És a dir:

$$F(f) = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} \mid \exists U \text{ entorn de } z, \text{ t.q. } f^n|_U \text{ és família normal}\}$$

El conjunt de Fatou també s'anomena conjunt estable o conjunt normal.

A partir de la definició, veiem que el conjunt de Fatou és un subconjunt obert de $\widehat{\mathbb{C}}$, i per tant el seu complementari $\widehat{\mathbb{C}} \setminus F = J$ és un subconjunt tancat de $\widehat{\mathbb{C}}$. Per tant, veurem que un punt p_0 pertany al conjunt de Julia sí, i només sí, la dinàmica del seu entorn U mostra una dependència sensible de les condicions inicials, de manera que condicions inicials properes condueixen a un comportament molt diferent després d'un gran (o de vegades no tan gran) nombre d'iteracions.

En l'esfera de Riemann, una funció holomorfa pot ser expressada com una funció racional, $f(z) = P(z)/Q(z)$, amb P, Q polinomis (suposarem que no tenen arrels comunes). A partir d'aquí, definim $d = \max\{gr(P), gr(Q)\}$. Si agafem $c \in \widehat{\mathbb{C}}$ constant finita, aquest grau d coincideix amb el grau topològic de f , que és el nombre de solucions de l'equació $f(z) = c$ (comptant multiplicitats). Sempre tindrem que $d \geq 1$ ja que f no és una funció constant, i usualment considerarem $d \geq 2$.

4.2 Propietats dels conjunts de Julia i Fatou

A continuació, tenim una sèrie de propietats bàsiques del conjunt de Julia:

Lema 4.2.1 (Invariància). *El conjunt de Julia $J = J(f)$ d'una funció holomorfa $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ és totalment invariant per f . És a dir, $z \in J$ sí, i només sí, $f(z) \in J$. En conseqüència, es pot dir que el conjunt de Fatou és totalment invariant per f .*

Demostració: Veiem que el conjunt de Fatou és invariant per f , i automàticament queda demostrat el cas del conjunt de Julia.

Per a tot conjunt obert $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$, qualsevol successió d'iterats f^{n_j} convergeix uniformement en subconjunts compactes de U sí, i només sí, la corresponent successió d'iterats f^{n_j+1} convergeix uniformement en subconjunts compactes del conjunt obert $f^{-1}(U)$. \square

Lema 4.2.2 (Iteració). $\forall k > 0$, el conjunt de Fatou $F(f^k)$ de la iteració k -èsima coincideix amb el conjunt de Fatou $F(f)$. Alternativament, $\forall k > 0$, el conjunt de Julia $J(f^k)$ de la iteració k -èsima coincideix amb el conjunt de Julia $J(f)$.

Demostració: Igual que en el cas anterior, podem treballar també el lema amb el conjunt de Fatou. Volem veure que $z \in F(f^k) \Leftrightarrow z \in F(f)$. O, equivalentment: Tota parcial de $\{f^{kn}\}$ té una parcial convergent \Leftrightarrow Tota parcial de $\{f^n\}$ té una parcial convergent.

(\Leftarrow) $\forall n_j \rightarrow \infty$, sabem que $\{f^{n_j}\}$ té una parcial convergent, i volem veure que $\{f^{kn_i}\}$ té una parcial convergent. És obvi, perquè si definim $kn_i = n_j$, aleshores $\{f^{kn_i}\} = \{f^{n_j}\}$ és parcial de $\{f^n\}$, i per hipòtesi tota parcial de $\{f^n\}$ té una parcial convergent.

(\Rightarrow) Sabem que $\{f^{kn_j}\}$ té una parcial convergent, i volem veure que tota $\{f^{n_i}\}$ té una parcial convergent.

Donada $\{f^{n_i}\}$, podem dividir-la en k grups, per $k \in \mathbb{N}$, de manera que $\exists j = 0, 1, \dots, k-1$ t.q. $n_i = km_i + j$ per infinits índexos i . Com hi ha infinits elements, ha d'haver un d'aquests grups que tingui infinits elements.

Si sabem que per a tota $\{f^{kn_j}\}$ infinita, hi ha una parcial convergent, també és veritat que $\forall \{f^{kn_j+l}\}$ hi ha una parcial convergent, ja que:

$$\{f^{kn_j}\} \rightrightarrows g \Leftrightarrow \{f^{kn_j+l}\} \rightrightarrows f^l g$$

Per tant, sigui $\{f^{km_i+j}\}$ el grup amb infinits elements. Per hipòtesi, té una parcial convergent. Però també és una successió parcial de $\{f^{n_i}\}$, per tant $\{f^{n_i}\}$ té una parcial convergent. \square

Definició 4.2.3. Si \mathcal{O} és una òrbita periòdica atractora de període m , definim la conca d'atracció com el conjunt obert $A(\mathcal{O}) \subset \widehat{\mathbb{C}}$ format per tots els punts $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ tals que la successió d'iterats $f^m(z), f^{2m}(z), f^{3m}(z), \dots$ convergeix cap a algun punt de l'òrbita \mathcal{O} .

Proposició 4.2.4. (a) Tota òrbita periòdica atractora pertany a $F(f)$. De fet, tota la seva conca d'atracció A pertany al conjunt de Fatou. En particular, tot punt fix atractor pertany al conjunt de Fatou.

(b) La frontera de les conques d'atracció pertany al conjunt de Julia.

(c) Tota òrbita periòdica repulsora pertany al conjunt de Julia. En particular, tot punt fix repulsor pertany al conjunt de Julia.

(d) *Tot punt periòdic parabòlic pertany al conjunt de Julia, però les seves conques atractores parabòliques pertanyen al conjunt de Fatou.*

Abans de continuar, recordar un Teorema d'Anàlisi Complexa necessari per la demostració de l'apartat (c):

Teorema 4.2.5 (de Hurwitz). *Sigui f_n una successió de funcions holomorfes, tals que $f_n \rightrightarrows f$ uniformement en compactes. Aleshores, f és holomorfa, i $f'_n \rightarrow f'$.*

Considerem un punt fix $z_0 = f(z_0)$ amb multiplicador λ . Aleshores:

Demostració de (c): Si $|\lambda| > 1$, aleshores no hi haurà cap successió d'iterats de f que pugui convergir uniformement al voltant de z_0 a una funció holomorfa g tal que $g(z_0) = z_0$, ja que $(f^n)'(z_0) = \lambda^n$, que tendeix a infinit si $n \rightarrow \infty$, i per tant $g'(z_0) = \infty$, i això contradueix el Teorema de Hurwitz, ja que la successió de derivades no tendeix a la derivada de g en z_0 , que hauria de ser un valor finit.

Demostració de (a): Si $|\lambda| < 1$, escollint $|\lambda| < c < 1$, tenim pel Teorema de Taylor que $|f(z) - z_0| \leq c|z - z_0|$ per z prou proper a z_0 , per tant els successius iterats de f , restringits a un entorn prou petit, convergeixen uniformement a la funció constant $z \mapsto z_0$. A partir d'aquí, podem generalitzar a qualsevol subconjunt compacte de la conca d'atracció A . Això generalitza de punts fixos ($m = 1$) a punts periòdics ($m \geq 1$) usant el lema d'iteració, ja que un punt periòdic de f és un punt fix d'algun iterat f^m per un cert m . \square

A partir d'aquí, considerarem només $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una funció racional, amb grau $d \geq 2$.

Analitzant les diferents òrbites que pot tenir un punt $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ per una certa funció f , es poden trobar certs punts especials que descriurem a continuació. En són exemples $z = 0, \infty$ per $f(z) = z^2$, punts fixos super-attractors (pertanyent per tant al conjunt de Fatou) i el que els fa especials és que no tenen cap més antiimatge que ells mateixos.

A continuació veurem que d'aquests punts hi pot haver, com a molt, dos.

Definició 4.2.6 (Gran òrbita). Definim la gran òrbita d'un punt z sota la funció $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ com el conjunt $GO(z, f)$ format per tots els punts $z' \in \widehat{\mathbb{C}}$ tals que les òrbites de z' i z eventualment intersequen. Un punt z i un altre punt z' tenen la mateixa gran òrbita sí, i només sí, $f^m(z) = f^n(z')$ per certs $m \geq 0, n \geq 0$. Un punt $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ es diu que és de gran òrbita finita o excepcional sota f si $GO(z, f) \subset \widehat{\mathbb{C}}$ és un conjunt finit.

Usant el Teorema de Montel, es pot veure el següent lema.

Lema 4.2.7 (Punts de gran òrbita finita). *Si $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ és una funció racional de grau $d \geq 2$, aleshores el conjunt $\mathcal{E}(f)$ de punts excepcionals pot tenir com a molt dos elements. Aquests punts de gran òrbita finita, si existeixen, seran sempre super-attractors periòdics de f i per tant pertanyen al conjunt de Fatou.*

Teorema 4.2.8 (Transitivitat/blow-up property). *Sigui z_0 un punt qualsevol del conjunt de Julia $J(f) \subset \widehat{\mathbb{C}}$ i sigui N un entorn arbitrari de z_0 . Aleshores, la unió U formada per tots els iterats $f^n(N), \forall n \geq 0$ conté tot el conjunt de Julia i conté tots menys com a molt dos punts de $\widehat{\mathbb{C}}$. Més concretament, si N és suficientment petit, aleshores $U = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}(f)$.*

Demostració: Sigui $z_0 \in J(f)$. Primer de tot, volem veure que $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$ conté com a molt dos elements, és a dir, per tot N entorn de z_0 :

$$\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b\} \subset \bigcup_{n \geq 0} f^n(N) = U$$

Es veu de forma immediata pel Teorema de Montel, ja que si $U \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b, c\}$, aleshores $f^n|_N$ és normal, i per tant $N \subset F(f)$, contradicció, ja que $z_0 \in J(f)$, i els conjunts de Fatou i Julia són disjunts. Per tant, hi haurà com a molt dos punts especials que no pertanyen a U .

Per altra banda, com $f(U) \subset U$ per com s'ha definit U , qualsevol pre-imatge d'un dels punts del conjunt $\{a, b\}$ ha de pertanyer a $\{a, b\}$. Per tant, fent pre-imatges, es veu que aquests dos punts són periòdics i d'òrbita finita (com a molt tenen període 2). Com el conjunt de punts $\mathcal{E}(f)$ de gran òrbita finita és disjunt de $J(f)$, s'obté que $J \subset U$. Finalment, si N és suficientment petit tal que $N \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}(f)$, es té que $U = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}(f)$. \square

A partir d'aquest teorema, obtenim diversos corol·laris molt importants.

Corol·lari 4.2.9. (a) **Conjunt de Julia amb interior:** *Si el conjunt de Julia té un punt interior, aleshores $J(f) = \widehat{\mathbb{C}}$.*

(b) **Frontera de la conca d'atracció = Conjunt de Julia:** *Si $A \subset \widehat{\mathbb{C}}$ és la conca d'atracció d'una òrbita periòdica atractora, aleshores la frontera topològica $\partial A = \overline{A} \setminus A$ és igual a tot el conjunt de Julia.*

(c) **Les preimatges iterades són denses en $J(f)$:** *Si z_0 és un punt qualsevol de $J(f)$, aleshores el conjunt de totes les preimatges iterades*

$$\{z \in \widehat{\mathbb{C}}; f^n(z) = z_0, n \geq 0\}$$

és dens en $J(f)$.

(d) **No hi ha punts aïllats:** *Si f té grau 2 o més, aleshores $J(f)$ no té punts aïllats.*

(e) **Components de Julia:** *Per qualsevol funció racional f de grau 2 o més, el conjunt de Julia $J(f)$ o bé és connex, o té infinites components connexes.*

(f) *En el cas que f sigui un polinomi, totes menys una quantitat finita de les components connexes de $J(f)$ estan formades per un únic punt. Però això no és cert per funcions racionals arbitràries.*

Demostració de (a): Si $J=J(f)$ té un punt interior z_1 , aleshores escollint un entorn $N \subset J$ de z_1 , la unió $U \subset J$ de les successives imatges de N és densa, $\overline{U} = \widehat{\mathbb{C}}$. Com J és un conjunt tancat, tenim que $J = \widehat{\mathbb{C}}$.

Demostració de (b): Volem veure que $J(f) \subset \partial A$, ja que sabem que $\partial A \subset J(f)$. Sigui $p \in J(f)$, U entorn qualsevol de p . Tenim que $p \in U \cap A^c \neq \emptyset$. Volem obtenir que $U \cap A \neq \emptyset$, ja que com A i J són disjunts, això voldria dir que $J(f) \subset \partial A$. Sabem, per la propietat de transitivitat, que $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b\} \subset \bigcup f^n(U)$. Com A és obert, sabem que $\exists n_0 > 0$ t.q. $f^{n_0}(U) \cap A \neq \emptyset$, i per tant, que $\exists z \in U$ t.q. $f^{n_0}(z) \in A \implies z \in A \implies U \cap A \neq \emptyset$.

Demostració de (c): Com $z_0 \notin \mathcal{E}(f)$, pel Teorema de Transitivitat tenim que tot punt $z_1 \in J(f)$ pot ser aproximat per punts z dels quals les òrbites contenen z_0 .

Demostració de (d): Primer notar que $J(f)$ ha de ser necessàriament un conjunt infinit, ja que si $J(f)$ fos finit seria un conjunt de punts de gran òrbita finita, cosa que contradiu el Lema anterior en que aquests punts són del conjunt de Fatou. Per tant, $J(f)$ conté almenys un punt límit z_0 , i les seves preimatges iterades de z_0 formen un conjunt dens de punts no aïllats de $J(f)$. \square

Observació 4.2.10. ∂A no és el mateix que la unió de les fronteres de les components connexes de A , aquesta unió tendeix a ser més petita quan A no és connex.

Això és degut al fet que $A = \bigcup A_i, i \in I$, i per tant $\bigcup \partial A_i \subset \partial A$, però la inclusió contrària no és certa. Hi ha el que es coneix com a punts enterrats, són punts límit tals que $p \in \partial A, p \notin \partial A_i$.

4.3 Components connexes de $F(f)$: Teorema de Classificació

Prèviament, hem vist que els conjunts de Julia i Fatou són invariants, ja que donat un punt p que pertany a un d'ells, els iterats successius també seran del conjunt en què estigui p . A continuació, veurem que això es pot aplicar a components connexes del conjunt de Fatou.

Proposició 4.3.1. *Si Ω és una component connexa del conjunt de Fatou de f , aleshores $f(\Omega)$ és també una component connexa de $F(f)$.*

Demostració: Pel principi del Mòdul Màxim, tenim que la imatge de l'interior de Ω anirà a parar a l'interior de $f(\Omega)$, i que la imatge de la frontera de Ω pot anar a la frontera o a l'interior de $f(\Omega)$. Però, com els conjunts de Fatou i Julia són invariants i disjunts, no pot ser que la imatge de la frontera de Ω estigui a l'interior de $f(\Omega)$. Per tant, $f(\Omega)$ és també una component connexa del conjunt de Fatou. \square

Degut a això, podem parlar de classificació de les components connexes del conjunt de Fatou.

Sigui $R(z)$ una funció racional tal que $d \geq 2$. Abans de poder entrar a explicar el Teorema de Classificació, cal introduir alguns conceptes i definicions.

Definició 4.3.2. Sigui Ω una component connexa del conjunt de Fatou $F(R)$. Aleshores, direm que és:

- Periòdica, si per un cert nombre natural n , $R^n(\Omega) = \Omega$.
- Pre-periòdica, si eventualment, per un cert nombre natural $m > 1$, $R^m(\Omega)$ és una component periòdica, però $R^n(\Omega)$ no ho és per cap $n < m$.
- Errant, si $f^n(\Omega) \cap f^m(\Omega) = \emptyset, \forall n \neq m$.

Un dels teoremes més importants que més ha fet avançar la dinàmica complexa, en aquests darrers anys, és el Teorema de Sullivan, de l'any 1985.

Teorema 4.3.3 (de Sullivan, 'No wandering domains'). *Si f és una funció racional, tota component de $F(f)$ és periòdica o pre-periòdica. És a dir, $F(f)$ no té dominis errants.*

Fins ara hem vist, de les components de Fatou, el cas en que es tracta d'una conca d'atracció, o bé d'una conca parabòlica. Però n'hi ha d'altres que veurem a continuació, però primer cal introduir el concepte de rotació irracional.

Definició 4.3.4 (Rotació irracional). Sigui θ un nombre irracional. Aleshores, $R_\theta(z) = e^{2\pi i \theta} z$ és una rotació irracional que fa rotar cada punt amb un angle $2\pi\theta$. Com l'angle de rotació és irracional, la rotació té ordre infinit, i R_θ no té òrbites periòdiques (excepte en $z = 0$).

Definició 4.3.5 (Anell de Herman). Una component U del conjunt de Fatou de f es diu anell de Herman si U és conformement isomorf a un anell

$$A_r = \{z; 1 < |z| < r\},$$

i si f , o algun iterat de f , és conformement conjugat a una rotació irracional d'aquest anell.

Els anells de Herman no tindran gaire importància en aquest treball, ja que només apareixen en el cas que f sigui racional, i com el treball se centrarà en polinomis, aquest cas no passarà.

Definició 4.3.6 (Disc de Siegel). Un disc de Siegel és una component connexa U del conjunt de Fatou tal que $f|_U$ és analíticament conjugada a una rotació irracional. El disc de Siegel és el domini maximal on funciona el Teorema de Siegel.

De vegades, els anells de Herman i els discs de Siegel s'anomenen de forma conjunta com dominis de rotació. Tenint aquests conceptes definits, podem enunciar el Teorema de Classificació.

Teorema 4.3.7 (Teorema de Classificació). *Sigui U una component periòdica amb període $p = 1$ del conjunt de Fatou d'una funció f racional de grau $d \geq 2$. Aleshores, es compleix una única condició de les següents:*

- U conté un punt periòdic atractor z_0 , i per tant és una conca d'atracció: $f^n(z) \rightarrow z_0 \in U$.
- U és una conca (d'atracció) parabòlica: $f^n(z) \rightarrow z_0 \in \partial U$.
- U és un disc de Siegel.
- U és un anell de Herman.

Observació 4.3.8. El Teorema està enunciat per $p=1$, però és cert per qualsevol valor de $p \geq 1, p \in \mathbb{N}$. En aquest cas, caldria adaptar l'enunciat del Teorema de Classificació per al qualsevol p .

4.4 Relació amb els punts crítics

A continuació veurem que tota conca d'atracció o component periòdica té una relació estreta amb els punts crítics. Aquests són punts especials, ja que són els únics on f no és un homeomorfisme local, és a dir, no existeix funció inversa de f a cap entorn de $f(c)$, sent c un punt crític de f . Abans, però, veurem el següent resultat.

Observació 4.4.1. Si f és un polinomi de grau d , aleshores tindrà $d-1$ punts crítics (comptant multiplicitats).

La demostració és òbvia, ja que el grau de f' serà $d - 1$.

Observació 4.4.2. Sigui f una funció racional, $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, i suposem que l'infinit no és un punt crític ni fix, és a dir, $f(\infty) = 0$. Això implica que $d = gr(f) = gr(Q)$, i $gr(P) < d$. Suposarem que $d \geq 2$. Aleshores, f té com a màxim $2d - 2$ punts crítics (comptant multiplicitats).

Demostració: Suposarem el cas maximal en que $gr(P) = d - 1$. Tenim que

$$f(z) = \frac{az^{d-1} + \dots}{bz^d + \dots}$$

Aleshores, $f'(z) = \frac{(a(d-1)z^{d-2}bz^d + \dots) - (bdz^{d-1}az^{d-1} + \dots)}{Q(z)^2} = \frac{(a(d-1)b - abd)z^{2d-2} + \dots}{Q(z)^2}$. Com el numerador té grau $2d - 2$ en el cas maximal en que $gr(P) = d - 1$, tenim que f té com a màxim $2d-2$ punts crítics comptant multiplicitats. \square

Definició 4.4.3. Sigui $\{z_1, \dots, z_q\}$ una òrbita (super)atractora. Definim la conca immediata del cicle com la unió de totes les components del conjunt de Fatou que contenen algun z_j .

Amb aquesta definició, podem enunciar diferents teoremes per poder comptar la quantitat de conques que pot tenir una funció.

Teorema 4.4.4. *Sigui R una funció racional de grau $d \geq 2$. Aleshores, la conca immediata de cada cicle (super)atractor o racionalment neutre/parabòlic de R conté un punt crític de R .*

Ara, veurem que també hi ha una relació entre els punts crítics i els discs de Siegel o els anells de Herman.

Definició 4.4.5. Definim $P = P(f)$ com el conjunt postcrític de f com la unió de totes les imatges successives $f^k(c)$, $k > 0$, variant c per tots els punts crítics de f . És a dir:

$$P(f) = \{f^k(c) | k > 0, f'(c) = 0\}$$

La part més interessant és la clausura topològica d'aquest conjunt, $\overline{P}(f)$. Amb aquesta definició, podem enunciar el següent teorema.

Teorema 4.4.6. *La frontera de qualsevol disc de Siegel o cicle de discs de Siegel està continguda en $\overline{P}(f)$. És a dir, l'òrbita de c s'acumula a la frontera del disc de Siegel o cicle de discs de Siegel. Anàlogament, si U és un anell de Herman, aleshores tot punt de la frontera de U pertany a $\overline{P}(f)$. La frontera ∂U té dues components connexes, totes dues formades per infinits punts.*

Una conseqüència immediata d'aquests teoremes és que, si tenim dos cicles diferents, com tenen conques disjunctes, necessitarem al menys dos punts crítics. Com R té com a molt $2d - 2$ punts crítics diferents, tenim el següent resultat, que és encara més impressionant si tenim en compte que R té infinits cicles.

Corol·lari 4.4.7. *Sigui R una funció racional de grau $d \geq 2$. Aleshores, la suma de la quantitat de cicles (super)attractors i racionalment neutres/parabòlics és com a molt $2d - 2$.*

De fet, aquest resultat és molt més general, tal com va demostrar Shishikura l'any 1987.

Teorema 4.4.8 (Desigualtat de Fatou-Shishikura). *Sigui R una funció racional de grau $d \geq 2$, N_0 la quantitat de cicles (super)attractors i parabòlics i N_1 la quantitat de cicles irracionalment neutres. Aleshores, usant la notació anterior, tenim que:*

$$N_0 + N_1 \leq 2d - 2$$

És a dir, el nombre de cicles no-repulsors d'una funció racional és com a molt la quantitat de punts crítics que té ($2d - 2$).

La demostració es basa en pertorbar els coeficients de R d'una forma apropiada usant cirurgia quasi-conforme, de tal manera que els cicles (racional i irracionalment) neutres esdevenen (super)attractors, mentre que els que ja ho eren ho segueixen sent.

Una variant d'aquesta desigualtat per polinomis té per fita $d - 1$, demostrada el 1982 per A. Douady.

Teorema 4.4.9. *Un polinomi P de grau d té com a molt $d - 1$ cicles no repulsors en el pla complex finit (no es té en compte el punt de l'infinít).*

5 Polinomis

Els continguts d'aquest capítol poden trobar-se a [4], on el lector pot adreçar-se per més detalls.

En aquest capítol, comencem a centrar-nos en el cas particular dels polinomis. Sigui $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ un polinomi de grau $d \geq 2$, és a dir:

$$f(z) = a_d z^d + \dots + a_1 z + a_0$$

amb $a_d \neq 0$. Aleshores, f té un punt fix super-atractor en l'infinit ja que, tal com hem vist anteriorment, $\lambda_\infty = 0$ si $d \geq 2$. En particular, existeix una constant $k = k_f$ tal que tot punt z amb $|z| > k_f$ pertany a la conca d'atracció de l'infinit.

5.1 Conjunt ple de Julia

Definició 5.1.1 (Conjunt ple de Julia). Definim el conjunt ple de Julia $K = K(f)$ com el complementari de la conca d'atracció de l'infinit ($A_f(\infty) = \{z \mid f^n(z) \rightarrow \infty\}$). És el conjunt format per tots els punt $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ amb òrbita acotada en iterar f ($f^n(z) \not\rightarrow \infty$ si $n \rightarrow \infty$), és a dir:

$$K(f) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus A_f(\infty)$$

La conca d'atracció de l'infinit és una de les components del conjunt de Fatou. Per tant, tenim que el conjunt ple de Julia està format per tot $\widehat{\mathbb{C}}$ menys la component no acotada de Fatou.

Recordem un concepte de topologia.

Definició 5.1.2 (Conjunt simplement connex). Un conjunt és simplement connex quan qualsevol corba tancada continguda en ell es pot transformar per homotopia en un punt.

Informalment, un conjunt és simplement connex si està format d'una sola peça i no té forats.

Lema 5.1.3. *Les components acotades de $K(f)$ (si n'hi ha) són totes simplement connexes. El conjunt de Julia J és igual a la frontera topològica de K , és a dir, $J = \partial K_f = \partial A_f(\infty)$.*

Demostració. Veiem que $J = \partial K_f$ pel fet que el conjunt $K(f)$ conté tot el conjunt de Julia i de Fatou (menys la conca d'atracció de l'infinit). Per tant, com el conjunt de Julia és la frontera de totes les components finites del conjunt de Fatou, obtenim la primera igualtat, i pel fet que el complementari de $K(f)$ és la conca d'atracció de l'infinit, obtenim la segona igualtat, ja que dos conjunts complementaris tenen la mateixa frontera. \square

Canvi de coordenada de Böttcher

A partir del Teorema de Böttcher enunciat en el capítol introductori, tenim que existeix un canvi de coordenada $w = \phi(z)$ que està definida en l'entorn $|z| > k_f$ de l'infinit, amb $w \rightarrow \infty$ si $z \rightarrow \infty$ i que satisfà:

$$\phi \circ f \circ \phi^{-1}(w) = w^d$$

A més a més, ϕ és única llevat de multiplicació per una arrel $(d-1)$ -èsima de la unitat.

Funció de Green

La funció $G(z) = \log|\phi(z)|$ s'anomena la funció potencial canònica o la funció de Green per $K(f)$. Tenim la següent identitat:

$$G(z) = G(f(z))/d$$

Tot i que només està definida la funció G en un entorn de l'infinit, existeix una única extensió de G a tot \mathbb{C} que sigui contínua i compleixi la condició de $G(z) = G(f(z))/d$. Definim $G(z) = 0, \forall z \in K(f)$, i $G(z) = G(f^n(z))/d^n$ en qualsevol altre cas, on n és suficientment gran tal que $f^n(z) > k_f$. Alternativament, podem simplement definir-la com:

$$G(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log^+ |f^n(z)|/d^n,$$

on $\log^+(x) = \log(x), x \geq 1$ i $\log^+(x) = 0, 0 \leq x \leq 1$.

Notem que G és una funció real analítica amb infinites derivades fora del conjunt de Julia J , però només és contínua en punts de J .

Les línies tals que $|\phi(z)| = \text{constant} > 0$ s'anomenen corbes equipotencials. Les seves trajectòries ortogonals, que són les imatges sota ϕ^{-1} de les línies radials que s'estenen cap a l'infinit des del disc unitari s'anomenen raigs externs per a f .

Abans de continuar parlant d'aquestes corbes, necessitem introduir una altra definició.

Definició 5.1.4 (Corba suau). Una corba C definida en un interval I és suau si les seves derivades parcials no s'anul·len totes alhora en I , excepte potser en els extrems de l'interval I .

Aquestes dues famílies de corbes són suaus excepte en els punts crítics de G . Notem que un punt $z \in \mathbb{C} \setminus K$ és un punt crític de G sí, i només sí, és un punt pre-crític de f , és a dir, és un punt crític de f^k per una certa $k > 0$.

Per tot $r > 1$, sigui $V(r)$ la regió compacta amb frontera formada per tots els punts z tals que $G(z) \leq \log(r)$. Tenim que la frontera $\partial V(r)$ és la corba equipotencial $\{z : G(z) = \log(r)\}$.

Lema 5.1.5. *Suposem que no hi ha punts crítics de G (o punts pre-crítics de f) en la frontera $\partial V(r)$. Si $m \geq 0$ és el nombre algebraic de punts crítics de G en el complementari $\mathbb{C} \setminus V(r)$, aleshores $V(r)$ és unió disjunta de $m+1$ discs topològics tancats (conjunts homeomorfs a discs), on tots i cadascun d'ells intersequen el conjunt de Julia $J(f)$.*

5.2 Raigs externs

Per simplificar aquesta secció, considerem el cas en que el conjunt ple de Julia K és connex. Pel teorema de Connexitat del Conjunt de Julia, tenim que $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ és isomorf a $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$ per una funció de conjugació ϕ tal que:

$$\phi(f(z)) = \phi(z)^d$$

És usual considerar també el canvi lineal de coordenades tal que el polinomi f de grau d és mònic, és a dir, el coeficient $a_d = +1$, de manera que el canvi de coordenada de Böttcher escollit queda determinat pel requisit que $w/z \rightarrow 1$ si $|z| \rightarrow \infty$.

Definició 5.2.1. Sigui $\psi : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D} \xrightarrow{\approx} \widehat{\mathbb{C}} \setminus K = A_f(\infty)$ la funció inversa de ϕ . La imatge sota ψ de la línia radial

$$\{re^{2\pi it} : r > 1\}$$

en $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$ s'anomena el raig extern R_t d'angle t en $A_f(\infty)$.

Notem que aquest angle t no està mesurat en radians, sino que és un nombre fraccionari. També, si f és un polinomi de grau d , tenim que

$$f(R_t) = R_{dt}$$

Això vol dir que f envia el raig extern d'angle t a un raig extern d'angle dt . En particular, si $t = m/(d-1)$, aleshores $f(R_t) = R_t$, ja que

$$\frac{m}{d-1}d = \frac{md}{d-1} = \frac{m(d-1) + m}{d-1} = m + \frac{m}{d-1} = \frac{m}{d-1} \pmod{1}$$

Per definició, el raig extern R_t va a parar a un punt z_t que necessàriament pertany al conjunt de Julia J , si els punts $\psi(re^{2\pi it}) \in \mathbb{C}$ tendeixen a un punt límit z_t ben definit quan $r \rightarrow 1$. Si el conjunt de Julia és localment connex, aleshores tot raig extern va a parar a un punt z_t que depèn de forma contínua de t .

Definició 5.2.2. Un raig extern R_t s'anomena racional si l'angle t és racional, i periòdic si t és periòdic en multiplicar-lo pel grau d de f , de forma que $d^n t \equiv t \pmod{1}, \forall n \geq 1$.

Proposició 5.2.3. R_t és eventualment periòdic sota multiplicació per d sí, i només sí, t és racional, i és periòdic sí, i només sí, $t = n/m$ és racional i el seu denominador és coprimer amb d .

Demostració: Si $t = n/m$ és racional, aleshores les successives imatges de r_t per f tindran angles $dt, d^2t, \dots \pmod{1}$ amb denominadors que divideixen m . Com aquesta successió de fraccions mòdul 1 ha de ser finita, aleshores la successió eventualment es repeteix. \square

En el cas especial en que $\text{mcd}(m, d) = 1$, les fraccions amb denominador m permuten sota multiplicació per d mòdul 1, i per tant el punt d'arribada z_t és de fet periòdic.

El següent resultat és degut a Sullivan, Douady i Hubbard. En aquest cas, no assumim connexivitat local.

Teorema 5.2.4. *Si $K(f)$ és connex, aleshores tot raig extern periòdic va a parar a un punt periòdic, el qual és repulsor o parabòlic.*

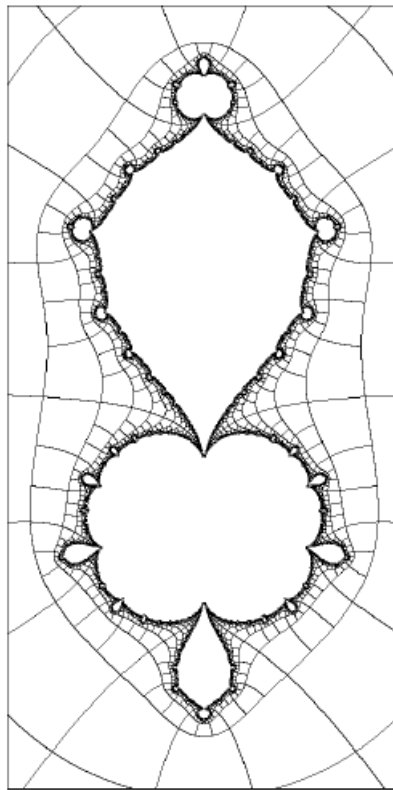


Figura 4: Conjunt de Julia de $z \mapsto z^3 - iz^2 + z$ amb alguns raigs externs i línies equipotencials

Un altre exemple de corbes equipotencials i raigs externs sota la imatge de φ^{-1} el podem veure en la Figura 5.

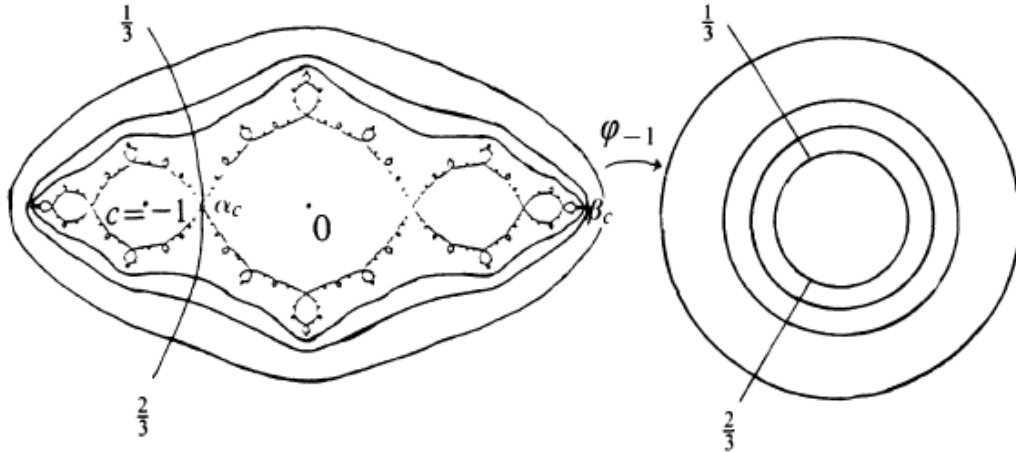


Figura 5: A l'esquerra, conjunt de Julia amb alguns raigs externs i línies equipotencials. A la dreta, la imatge de les corbes en aplicar φ^{-1}

5.3 Teorema Principal: Connexitat del conjunt de Julia

En aquest apartat, veurem els possibles casos de connexió que pot tenir el conjunt de Julia d'un polinomi f de grau més gran o igual que 2, en funció dels punts crítics del polinomi f .

Definició 5.3.1. Un conjunt compacte K en l'espai euclidià es diu que és cel·lular si és igual a la intersecció d'una seqüència encaixada de discs topològics encaixats tancats, cadascun dels quals conté el següent al seu interior. És a dir, $\{D_r\}_{r \in I}$ tal que $D_{i+1} \subset D_i$, i

$$K = \bigcap_{r \in I} D_r$$

El següent resultat es deu essencialment a Fatou i Julia.

Teorema 5.3.2 (Connexitat del Conjunt de Julia). *Sigui f un polinomi de grau $d \geq 2$, tenim només dues possibilitats mútuament excloents:*

- *Si el conjunt ple de Julia K conté tots els punts crítics finits de f , aleshores K i $J = \partial K$ són connexos, i de fet K és un conjunt cel·lular. A més a més, el canvi de coordenada de Böttcher al voltant d'infinít s'extén a un isomorfisme conforme:*

$$\phi : \mathbb{C} \setminus K \xrightarrow{\cong} \mathbb{C} \setminus \bar{D}$$

- *Si f té almenys un punt crític en $\mathbb{C} \setminus K$, aleshores tots dos conjunts J i K tenen infinites components connexes.*

Demostració: Si K conté tots els punts crítics finits, aleshores tenim pel Lema (5.1.5) que K és la intersecció d'una família de discs $V(r)$ encaixats. Per tant, K és cel·lular i connex. A més a més, en la demostració del Lema es veu que cada $\mathbb{C} \setminus V(r)$ és una d^n -varietat no ramificada que cobreix alguns $\mathbb{C} \setminus V(s)$, que és isomorf a $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_s$ sota el canvi de coordenada de Böttcher. Podem per tant fer el canvi de coordenada amb un isomorfisme $\mathbb{C} \setminus V(r) \xrightarrow{\cong} \mathbb{C} \setminus \overline{D}_r$, que és compatible al voltant d'infinít i satisfà

$$\phi(f(z)) = \phi(z)^d$$

Fent el pas al límit amb $r \rightarrow 1$, veiem que ϕ pot ser definit al voltant de $\mathbb{C} \setminus K$. Finalment, veiem que el conjunt de Julia J pot ser expressat com una intersecció de clausures dels anells connexos acotats $\phi^{-1}(\{w : 1 < |w| < r\})$, i per tant J és també connex.

Per contra, si f té almenys un punt crític en $\mathbb{C} \setminus K$, aleshores l'argument anterior mostra que algun $V(r)$ té dues o més components connexes, i que cada una d'elles interseca els subconjunts $J \subset K \subset V(r)$. Per tant, J té infinites components connexes, ja que si el conjunt de Julia J no és connex, aleshores té infinites components connexes, com hem vist en les propietats dels conjunts de Fatou i Julia. Una prova anàloga es fa per veure que K també té infinites components connexes. \square

Usant el Teorema de Caratheodory de la funció de Riemann inversa, tenim el següent corol·lari.

Corol·lari 5.3.3. *Si f com l'hem definida abans, aleshores les següents 3 condicions són equivalents:*

- *El conjunt $J(f)$ és localment connex.*
- *El conjunt $K(f)$ és localment connex.*
- *$K(f)$ és connex, i la funció inversa de Riemann $\psi : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D} \xrightarrow{\cong} \widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ es pot estendre de forma contínua sobre la frontera, obtenint una funció contínua des del disc unitat a J satisfent la identitat $f(\psi(w)) = \psi(w^d)$.*

Un teorema que utilitzarem més endavant per programar d'una forma alternativa el conjunt de Julia és el següent.

Teorema 5.3.4. *El conjunt de Julia $J(f)$ és la clausura de tots els punts periòdics repulsors.*

Demostració. Supossem que U és un disc obert que interseca J i que no conté cap punt fix per qualsevol f^m . Podem assumir que U no conté cap pol de f . Si f_1, f_2 són dues branques diferents de f^{-1} en U , aleshores com no hi ha solucions de $f^m(z) = z$ en U ,

$$g_n = \frac{f^n - f_1}{f^n - f_2} \frac{z - f_2}{z - f_1}$$

omet els valors $0, 1, \infty$ en U . Per tant, pel Teorema de Montel, $\{g_n\}$ és normal i per tant també $\{f^n\}$, contradicció. A més a més, els punts periòdics són densos en J . Com només hi ha un nombre finit de cicles atractors i neutres, i no té punts aïllats, els cicles repulsors són densos. \square

6 El Conjunt de Mandelbrot

Els continguts d'aquest capítol poden trobar-se al capítol VIII de [2], on el lector pot adreçar-se per més detalls.

En aquesta secció, ens centrarem en estudiar la dependència d'un sistema dinàmic quadràtic respecte d'un paràmetre c de la forma $f_c : z \mapsto z^2 + c$. Definirem el Conjunt de Mandelbrot \mathcal{M} com el conjunt de valors de c pels quals el conjunt de Julia associat a f_c és connex.

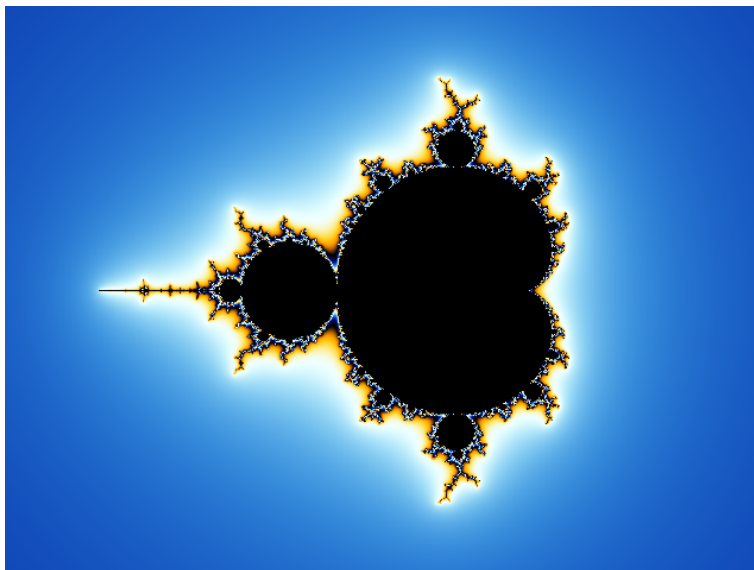


Figura 6: Conjunt de Mandelbrot representant amb colors la velocitat a la qual 0 divergeix en el valor de c associat

6.1 La Família Quadràtica $z^2 + c$

Sigui $P(z) = az^2 + bz + c$, aleshores $P(z)$ pot ser conjugat per $z' = az$ a un polinomi mònic de la forma $z^2 + \alpha z + \beta$. També, podem aplicar-li una translació $z' = z + b$ per moure qualsevol punt donat cap a 0. Per tant, si movem un dels dos punts fixos de $P(z)$ cap a 0, haurem conjugat P cap a la forma $\lambda z + z^2$, on λ és el multiplicador del punt fix, però això no ens determina una única classe de conjugació, ja que podrem desplaçar també el segon punt fix cap a 0. En canvi, si traslladem el punt crític cap a 0, aleshores haurem conjugat P a la forma

$$P_c(z) = z^2 + c$$

ja que, per $P(z)$ com l'hem definit inicialment, fent primer $P(z)/a$ obtenim un polinomi de grau 2 mònic de la forma $Q(z) = z^2 + \alpha z + \beta$ i el seu punt crític és $z_c = -\alpha/2$. Finalment, obtenim $Q(z + z_c) = z^2 + (\frac{\alpha^2}{4} + \beta)$. Com no tenim terme lineal, definint $c = \frac{\alpha^2}{4} + \beta$, hem obtingut el que volíem: variant el paràmetre c obtindrem diferents classes de conjugacions per qualsevol polinomi quadràtic, i per

tant podem considerar el pla de paràmetre c com a representatiu de les diferents classes de conjugacions que hi haurà en els polinomis quadràtics.

La dicotomia fonamental

Sigui $P_c(z) = z^2 + c$. Per tal d'estudiar el comportament de P_c , tal com hem vist en la secció anterior, el conjunt de Julia és connex si la conca d'atracció de l'infinit no té cap punt crític de P_c . Per tant, com el 0 és l'únic punt crític de P_c , tenim la següent dicotomia.

Teorema 6.1.1 (La dicotomia fonamental). *Si $P_c^n(0) \rightarrow \infty$ quan $n \rightarrow \infty$, aleshores el conjunt de Julia J_c és totalment disconnex. En cas contrari, $P_c^n(0)$ està acotat i el conjunt de Julia és connex.*

El Conjunt de Mandelbrot

El conjunt format pels diferents valors de c pels quals $P_c^n(0)$ està acotat té especial interès, i s'anomena Conjunt de Mandelbrot i es denota per \mathcal{M} . Tenim que $c \in \mathcal{M}$ sí, i només sí, $0 \notin A_c(\infty)$, és a dir, l'origen no pertany a la conca d'atracció del punt fix super-atractor de l'infinit.

Definició 6.1.2. El Conjunt de Mandelbrot és:

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} \mid P_c^n(0) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty\}$$

A continuació, veiem un seguit de propietats del Conjunt de Mandelbrot.

Teorema 6.1.3. *El Conjunt de Mandelbrot \mathcal{M} és un conjunt tancat simplement connex contingut en el disc $\{|c| \leq 2\}$, i interseca la recta real en l'interval $[-2, 1/4]$. A més a més, \mathcal{M} consisteix en aquells valors de c tals que $|P_c^n(0)| \leq 2, \forall n \geq 1$.*

Demostració. Si $|c| > 2$, podem veure per inducció que

$$|P_c^n(0)| \geq |c|(|c| - 1)^{2^{n-1}}, n \geq 1$$

i per tant $|P_c^n(0)| \rightarrow \infty$ i $c \notin \mathcal{M}$. Per tant, si $c \in \mathcal{M}$, aleshores $|c| \leq 2$.

Suposem $|P_c^m(0)| = 2 + \delta > 2$, per algun $m \geq 1$. Si $|c| = |P_c(0)| > 2$, aleshores $c \notin \mathcal{M}$. Si $|c| \leq 2$, aleshores $|P_c^{m+1}(0)| = (2 + \delta)^2 - 2 \geq 2 + 4\delta$. Fent inducció, obtenim que $|P_c^{m+k}(0)| = 2 + 4^k\delta \rightarrow \infty$, i per tant obtenim de nou que $c \notin \mathcal{M}$. Això prova la part final del teorema, a partir de la qual obtenim que \mathcal{M} és un tancat. Pel Principi del Mòdul Màxim, $\mathbb{C} \setminus \mathcal{M}$ no té components acotades, i per tant $\mathbb{C} \setminus \mathcal{M}$ és connex, que implica que \mathcal{M} és simplement connex.

Si $c \in \mathbb{R}$, aleshores $P_c(x) - x$ no té arrels reals si $c > 1/4$, una arrel en $1/2$ si $c = 1/4$, i dos arrels real si $c < 1/4$. Si $c > 1/4$, $P_c^n(0)$ creix i tendeix cap a infinit, ja que tot punt límit finit ha de complir $P_c(x) = x$. Si $c \leq 1/4$, sigui $a = (1 + \sqrt{1 - 4c})/2$ l'arrel més gran de $P_c(x) - x$. Si addicionalment $c \geq -2$, podem veure que $a \geq |c| = |P_c(0)|$. Aleshores, $|P_c^n(0)| \leq a$ implica $|P_c^{n+1}(0)| = |P_c^n(0)^2 + c| \leq a^2 + c = a$, i per tant la successió és acotada. Això implica que $\mathcal{M} \cap \mathbb{R} = [-2, 1/4]$. \square

Revisem ara els possibles conjunts de Julia que pot tenir un polinomi P_c per $c \in \mathcal{M}$, com per exemple:

- Hi ha un punt fix atractor, i en aquest cas només hi ha una única component acotada de F_c . O bé, hi ha un cicle atractor en P_c de longitud $l \geq 2$, i per tant hi ha infinites components acotades de F_c . En aquest cas, J_c és localment connex.
- Hi ha un punt fix parabòlic amb multiplicador 1, i en aquest cas només hi ha una única component acotada de F_c . O bé, hi ha un cicle parabòlic en P_c de longitud $l \geq 2$, i per tant hi ha infinites components acotades de F_c . El primer cas només succeeix per $c = 1/4$, que podem veure en la Figura 7. En aquest cas, J_c és localment connex.
- Hi ha un cicle de Discs de Siegel.
- No hi ha components acotades en F_c . Hi ha dos possibles casos:
 - L'òrbita de 0 és pre-periòdica. Aleshores K_c és connex però no té interior, s'anomena dendrita. Podem veure un exemple en la Figura 12.
 - L'òrbita de 0 escapa a ∞ . Aleshores $K_c = J_c$ és un Conjunt de Cantor i no és localment connex. Podem veure un exemple en la Figura 8.

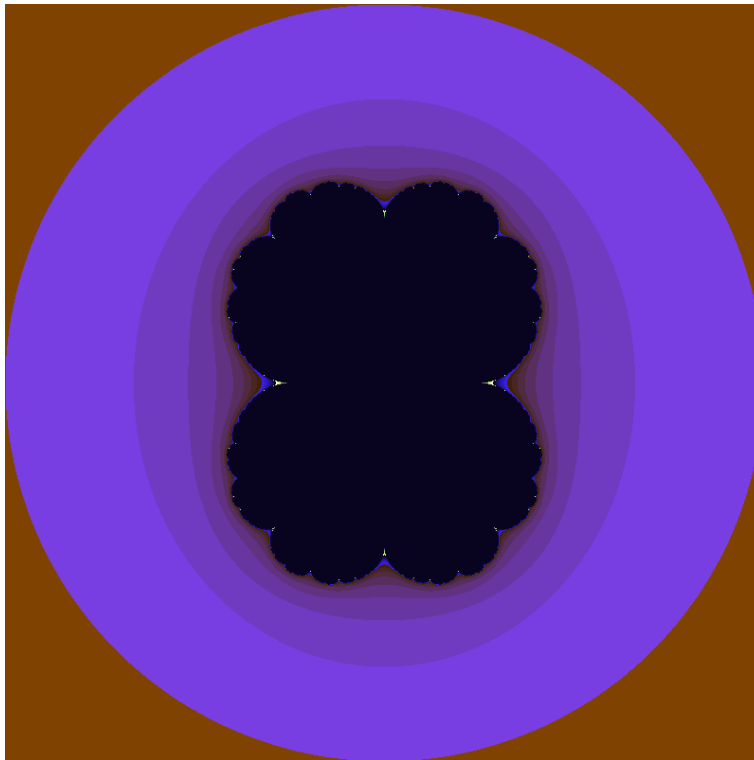


Figura 7: Conjunt de Julia per $c = 1/4$

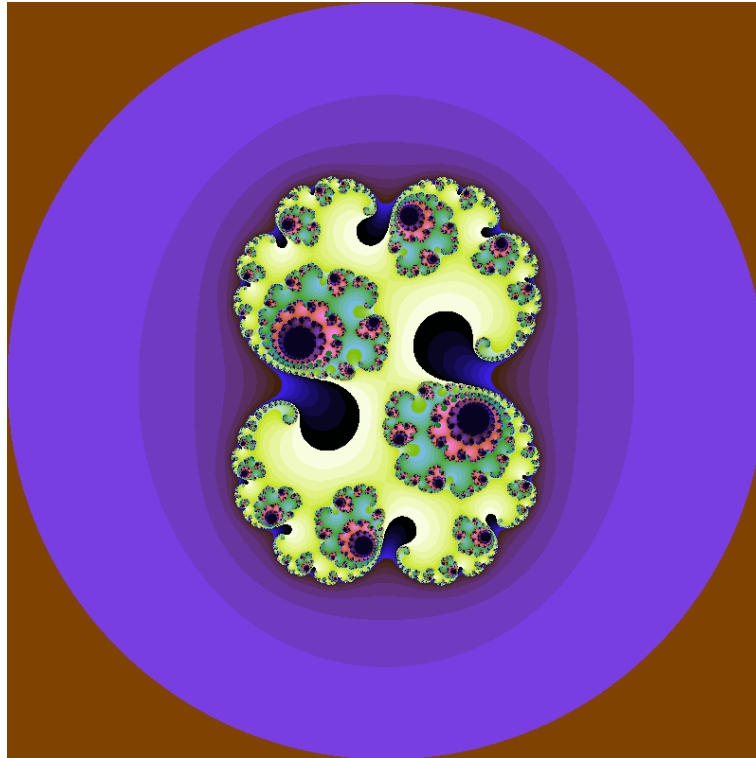


Figura 8: Conjunt de Julia per $c = 0.285 + 0.01i$ (conjunt de Cantor)

L'interior de \mathcal{M}

Anem a veure el component principal de \mathcal{M} , conegut com el cardioide principal del Conjunt de Mandelbrot.

Definició 6.1.4 (Corba de Jordan). Una corba de Jordan és una corba continua que no interseca amb ella mateixa en el pla, i divideix el pla en una regió interior delimitada per la corba i una d'exterior que conté tots els punts exterior a la corba.

Podem veure un exemple de corba de Jordan en la Figura 9.

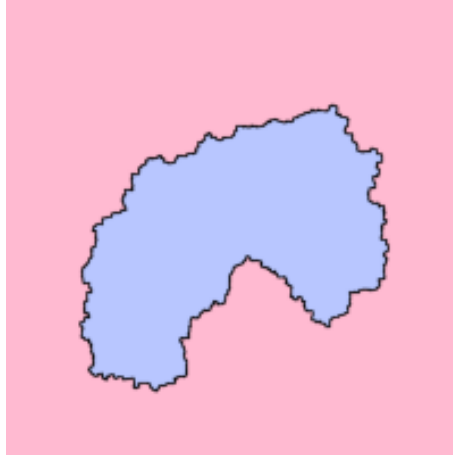


Figura 9: Corba de Jordan

Teorema 6.1.5. *Per tot λ , $|\lambda| \leq 1$, existeix una única $c = c(\lambda)$ tal que P_c té un únic punt fix amb multiplicador λ . Els valors de c pels quals P_c té un punt fix atractor formen un cardioide $C \subset \mathcal{M}$, i $\partial C \subset \partial \mathcal{M}$. Si $c \in C$, aleshores J_c és una corba de Jordan.*

Demostració de la bijecció $c(\lambda)$: Els punts fixos de P_c són $z_c = (1 \pm \sqrt{1 - 4c})/2$, i el seu multiplicador en z_c és $\lambda(c) = 2z_c$. Com $c = \lambda/2 - \lambda^2/4$, la condició $|\lambda(c)| < 1$ correspon en el c-pla al cardioide

$$C = \{\lambda/2 - \lambda^2/4 : |\lambda| < 1\}$$

Aquest és un subconjunt de \mathcal{M} i s'anomena cardioide principal de \mathcal{M} . Com la funció $\lambda/2 - \lambda^2/4$ és bijectiva en el disc unitat tancat, tenim demostrada la unicitat de $c = c(\lambda)$. \square

Anem a considerar el cas més general de cicles atractors.

Teorema 6.1.6. *Suposem que hi ha un cicle atractor de longitud m en P_a . Aleshores, a pertany a l'interior de \mathcal{M} . Si W és el component de l'interior de \mathcal{M} que conté a , aleshores $\forall c \in W$, P_c té un cicle atractor $\{z_1(c), \dots, z_m(c)\}$ de longitud m , a on cada $z_j(c)$ depèn analíticament de c .*

Com a molt hi ha un cicle atractor per cada valor de c , ja que per un valor concret de c , tindrem un únic punt crític, i cada cicle atractor té un punt crític. Les components de l'interior de \mathcal{M} associades a un cicle atractor s'anomenen components hiperbòliques de l'interior de \mathcal{M} .

Un altre conjunt de valor de c d'especial interès són pels quals P_c té un cicle super-atractor. El punt crític 0 ha de pertanyer al cicle, i per tant les solucions seran aquells valors de c pels quals 0 és periòdic, és a dir, les solucions de $P_c^n(0) = 0$, sent n la longitud del cicle. Els 3 primers polinomis són:

$$P_c^1(0) = c, P_c^2(0) = c + c^2, P_c^3(0) = c + c^2 + 2c^3 + c^4.$$

Per $n = 1$, la equació es redueix a $c = 0$, i obtenim el punt fix super-atractor en 0 per $P_0(z) = z^2$. Per $n = 2$, la equació és $c^2 + c = 0$, que ens dóna una solució adicional $c = -1$, per la qual $P_{-1}(z) = z^2 - 1$ té un cicle super atractor $0 \rightarrow -1 \rightarrow 0$ de període 2.

El cicle super-atractor per $n = 3$ correspon a les solucions de $c^3 + 2c^2 + c + 1 = 0$, excloent-hi el cas $c = 0$, que són aproximadament -1.755 i $-0.123 \pm 0.749i$. La solució real pertany a la antena principal que hi ha a l'esquerra de \mathcal{M} , i el seu conjunt ple de Julia és el que s'anomena "airplane set", que podem veure en la Figura 10.

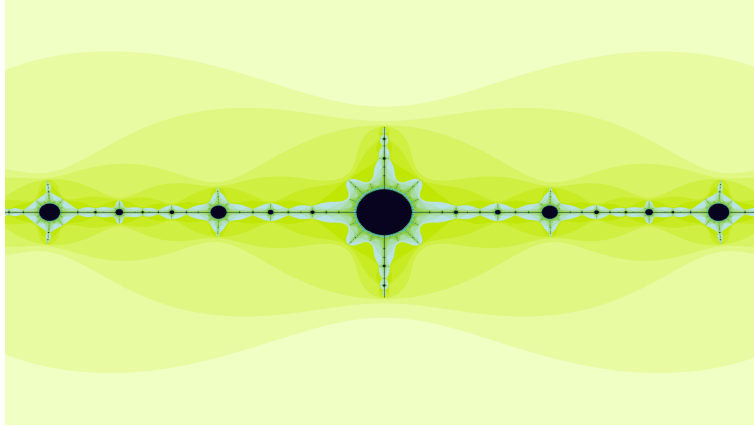


Figura 10: Airplane set, $c=-1.754878$

La frontera de \mathcal{M}

Teorema 6.1.7. *Els valors de $c \in \mathcal{M}$ que tenen un cicle super-atractor s'acumulen a tota la frontera $\partial\mathcal{M}$. En particular, l'interior de \mathcal{M} és dens en \mathcal{M} .*

Demostració. Sigui U un disc que interseca $\partial\mathcal{M}$, tal que $0 \notin U$. Suposem que U no conté cap valor de c pel qual 0 sigui periòdic. Considerem una branca de $\sqrt{-c}$ definida en U . Tenim que $P_c^n(0) \neq \sqrt{-c}$, o bé $P_c^{n+1}(0) = 0$ i per tant 0 és periòdic. Per tant, $f_n(c) = P_c^n(0)/\sqrt{-c}$ omet els valors $0, 1, \infty$ en U , i per tant és una successió normal en U . Però com U interseca $\partial\mathcal{M}$, conté tots dos punts c amb $f_n(c)$ acotat amb $f_n(c) \rightarrow \infty$, per tant no pot ser normal. \square

Un altre conjunt de valors de c important són els de Misiurewicz. Un punt $c \in \mathcal{M}$ es diu punt de Misiurewicz si 0 és estrictament pre-periòdic, és a dir, $P_c^n(0) = P_c^k(0)$, per certs $n > k > 0$, però $P_c^n(0) \neq 0, \forall n \geq 1$, i el cicle de $P_c^k(0)$ és repulsor.

Els punts de Misiurewicz estan localitzats en un patró complicat de l'àrea de l'antena de \mathcal{M} . Dos exemples senzills de punts de Misiurewicz els tenim per $c = -2$ i $c = i$:

$$P_i : 0 \mapsto i \mapsto -1 + i \mapsto -i \mapsto -1 + i;$$

$$P_{-2} : 0 \mapsto -2 \mapsto 2 \mapsto 2.$$

Per $c = -2$, el conjunt ple de Julia és l'interval real $[-2, 2]$, com podem veure en la

Figura 11. El conjunt de Julia per $c = i$ el podem veure en la Figura 12.

Es pot demostrar que, per tot punt de Misiurewicz, $J_c = K_c$, i per tant c pertany a J_c . Com hem comentat abans, en el cas que el conjunt de Julia sigui connex i es compleix aquesta propietat, diem que J_c és una dendrita.

Una demostració anàloga a la del Teorema anterior ens permet veure que els punts de Misiurewicz també s'acumulen a la frontera de \mathcal{M} .

Comentar també que $\partial\mathcal{M}$ conté tots els valors de c pels quals hi ha un cicle parabòlic, o un disc de Siegel.

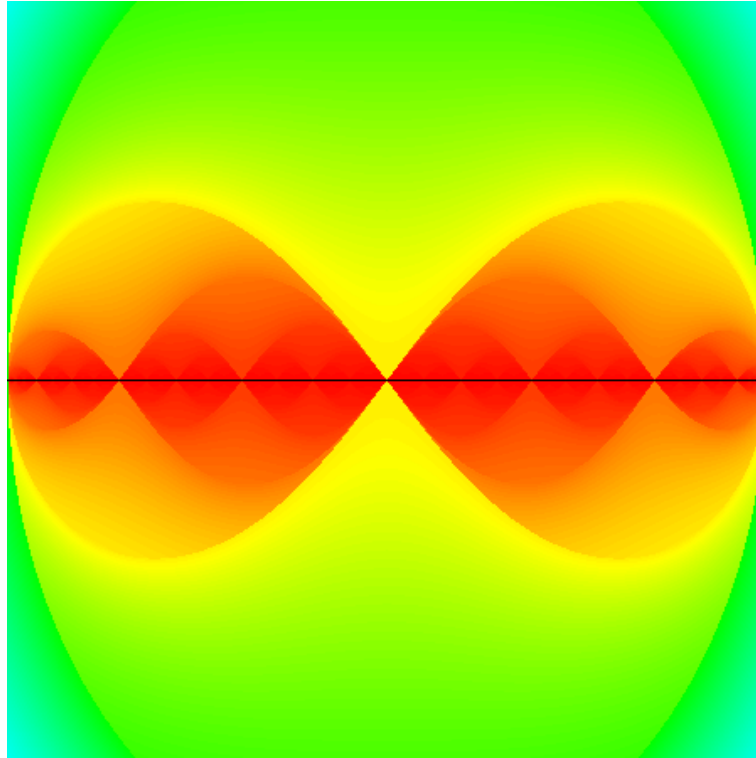


Figura 11: Conjunt de Julia per $c = -2$

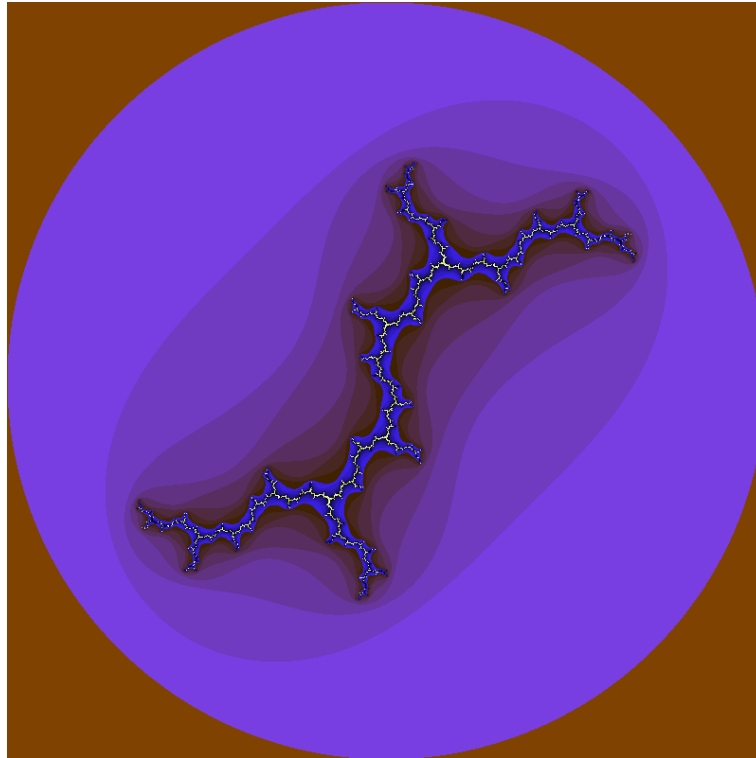


Figura 12: Conjunt de Julia per $c = i$

6.2 Algorismes d'escapament i de densitat

Algorismes d'escapament

A partir del teorema 6.1.3, obtenim un algoritme per implementar la imatge de \mathcal{M} , fixant un límit de n iteracions:

- 1: **if** $|P_c^n(0)| \leq 4, \forall n \in [1, 1000] \cap \mathbb{N}$ **then**
- 2: $color_pixel_c = black$
- 3: **else**
- 4: $color_pixel_c = white$
- 5: **end if**

Amb aquest algoritme obtenim la següent imatge.

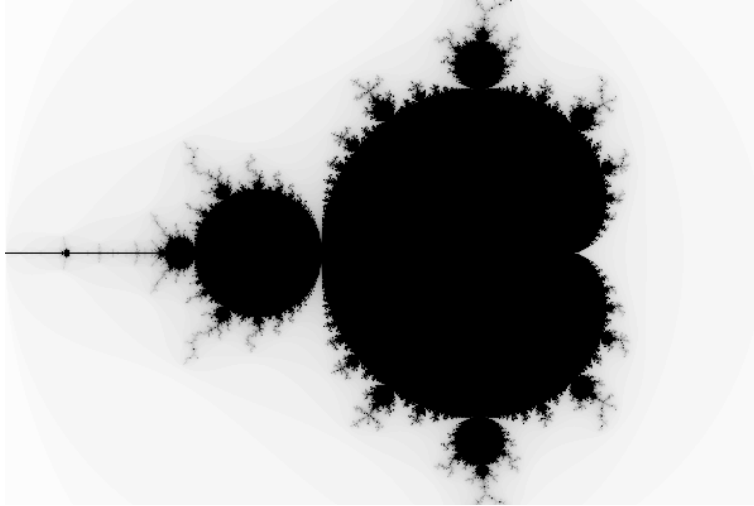


Figura 13: Conjunt de Mandelbrot en blanc i negre segons l'algorisme anterior

De forma similar, podem obtenir un algorisme d'escapament per tal de dibuixar el conjunt de Julia, tal com s'adjunta al Notebook de Python.

Algorismes de densitat

Algorismes de densitat per Julia

L'algorisme més interessant, però, és el de densitat. Comencem primer per veure com generar per ordinador el conjunt de Julia a partir del Teorema 5.3.4. Donat $z \in \mathbb{C}$, hem de comprovar si $f^n(z) = z$ per algun n . Computacionalment no funciona, i per tant prenem $z + \epsilon$ i fem Taylor d'ordre 1:

$$f^n(z + \epsilon) = f^n(z) + \epsilon(f^n)'(z) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = z + \epsilon$$

Aïllant ϵ , obtenim que

$$P = \frac{|f^n(z) - z|}{|1 - (f^n)'(z)|} < \epsilon$$

Si juntem aquest resultat amb que $f(z) = z^2 + c$, $f'(z) = 2z$, i que la derivada n -èsima és

$$(f^n)'(z) = f'(f^{n-1})(f^{n-1})'(z)$$

Sigui $z_n = f^n(z)$, z_0 el punt del pla al que volem calcular si pertany al conjunt de Julia o no, $der_0 = 1$, aleshores obtenim la següent recurrència:

$$\begin{aligned} der_n &= 2z_{n-1}der_{n-1} \\ z_n &= z_{n-1}^2 + c \end{aligned}$$

Fixant ϵ més petit que la diagonal d'un pixel tindrem la precisió desitjada. Tindrem els següents possibles casos:

- z_0 divergeix si $z_n > 2$ per algun n .
- $P < \epsilon$: z_0 és un punt periòdic i per tant pertany a la frontera de J .
- z_0 no divergeix però no és periòdic: és de l'interior de J . Això passa quan arribem al màxim nombre d'iterats fixat.

Per tant, podrem dibuixar cadascun dels 3 casos d'un color diferent. Un exemple el tenim en la Figura 14.

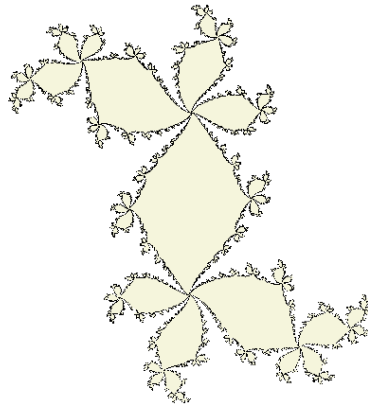


Figura 14: Conjunt de Julia segons l'algorisme de densitat per $c = 0.286 + 0.5225i$ i $n = 150$

Algorismes de densitat per Mandelbrot

De forma anàloga al cas anterior, tenim que, a partir del Teorema 6.1.7, si $c_0 \in \partial\mathcal{M}$, aleshores existeix una successió $c_n \rightarrow c_0$ tal que els c_n són centres de components hiperbòliques, és a dir, hem de comprovar que $Q_c^n(0) = Q_c^n(c) = 0$. Aplicant igual que abans un marge ϵ , obtenim que

$$Q_c^n(c) + \epsilon \frac{\partial}{\partial c} Q_c^n(c) = 0$$

És a dir, $c_n + \epsilon der_n = 0$. Tenim $c_0 = c$, $der_0 = 1$, i la recurrència

$$der_{n+1} = 2der_n c_n + 1$$

$$c_{n+1} = c_n^2 + c$$

Igual que abans, tindrem 3 possibles casos:

- c_0 no és del conjunt si c_n divergeix.
- Si $|c_n/d_n| < \epsilon$ tindrem que c_0 és un punt de la frontera del conjunt de Mandelbrot.
- Si no es compleix cap dels dos anteriors, arribarem al màxim d'iterats, i això vol dir que el punt c_0 és de l'interior.

Per tant, podrem dibuixar cadascun dels 3 casos d'un color diferent. Un exemple el tenim en la Figura 15.

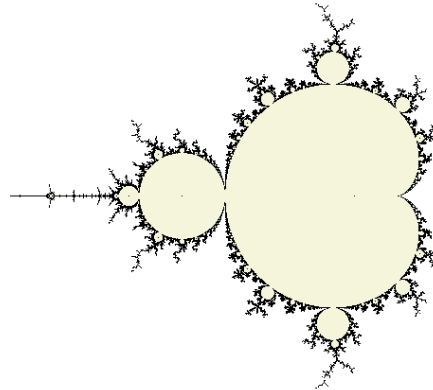


Figura 15: Conjunt de Mandelbrot segons l'algorisme de densitat per $n = 150$

Una altra aplicació programada és el càlcul de l'òrbita d'un punt del conjunt de Julia. Això ens pot resultar útil per veure, a partir d'un parametre de profunditat de l'òrbita fixat, estudiar el comportament que té f per un punt donat, com podem veure en la Figura 16 com salta d'una component connexa de Fatou a una altra.

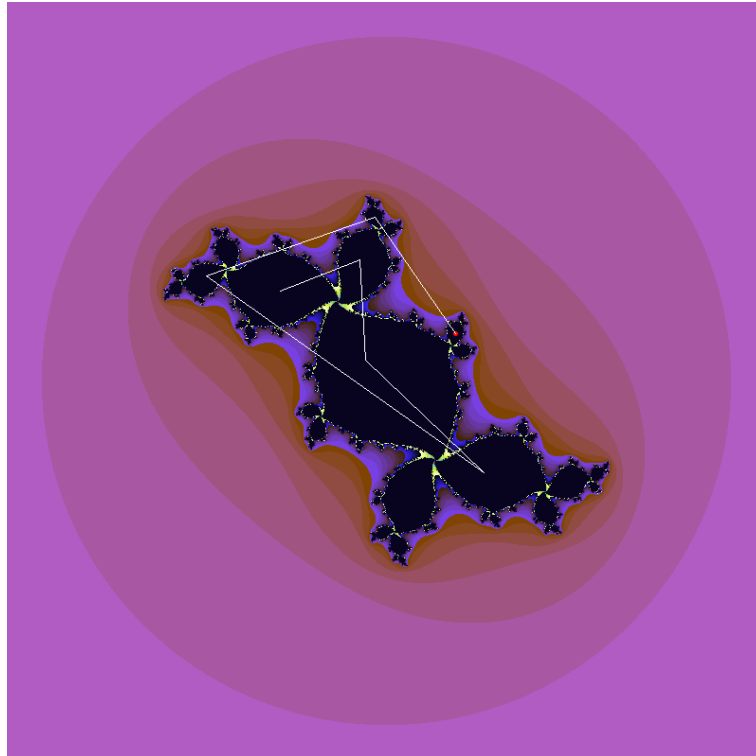


Figura 16: Òrbita amb $depth = 6$ d'un punt del conjunt ple de Julia

Programa interactiu

Per acabar, tenim un programa interactiu per ratolí on s'agrupen totes les funcions i algorismes comentats anteriorment a l'últim bloc del Notebook de Python, de manera que:

- Allà on està situat el ratolí indica quin és el valor del pla complex on està.
- Permet modificar el nombre màxim d'iterats i el de profunditat del càlcul d'una òrbita.
- Té un botó per alternar entre els algorismes d'escapament i de densitat.
- En clicar amb el botó esquerre en un punt del Conjunt de Mandelbrot, calcula el conjunt de Julia d'aquest valor de c i el mostra.
- En el conjunt de Julia, clicant el botó esquerre calcula l'òrbita del punt on està situat amb la profunditat fixada. Fent clic al botó dret, esborra l'òrbita, i si no hi ha cap òrbita dibuixada, torna al conjunt de Mandelbrot.

Una captura del programa interactiu en el conjunt de Julia la podem veure en la Figura 17.

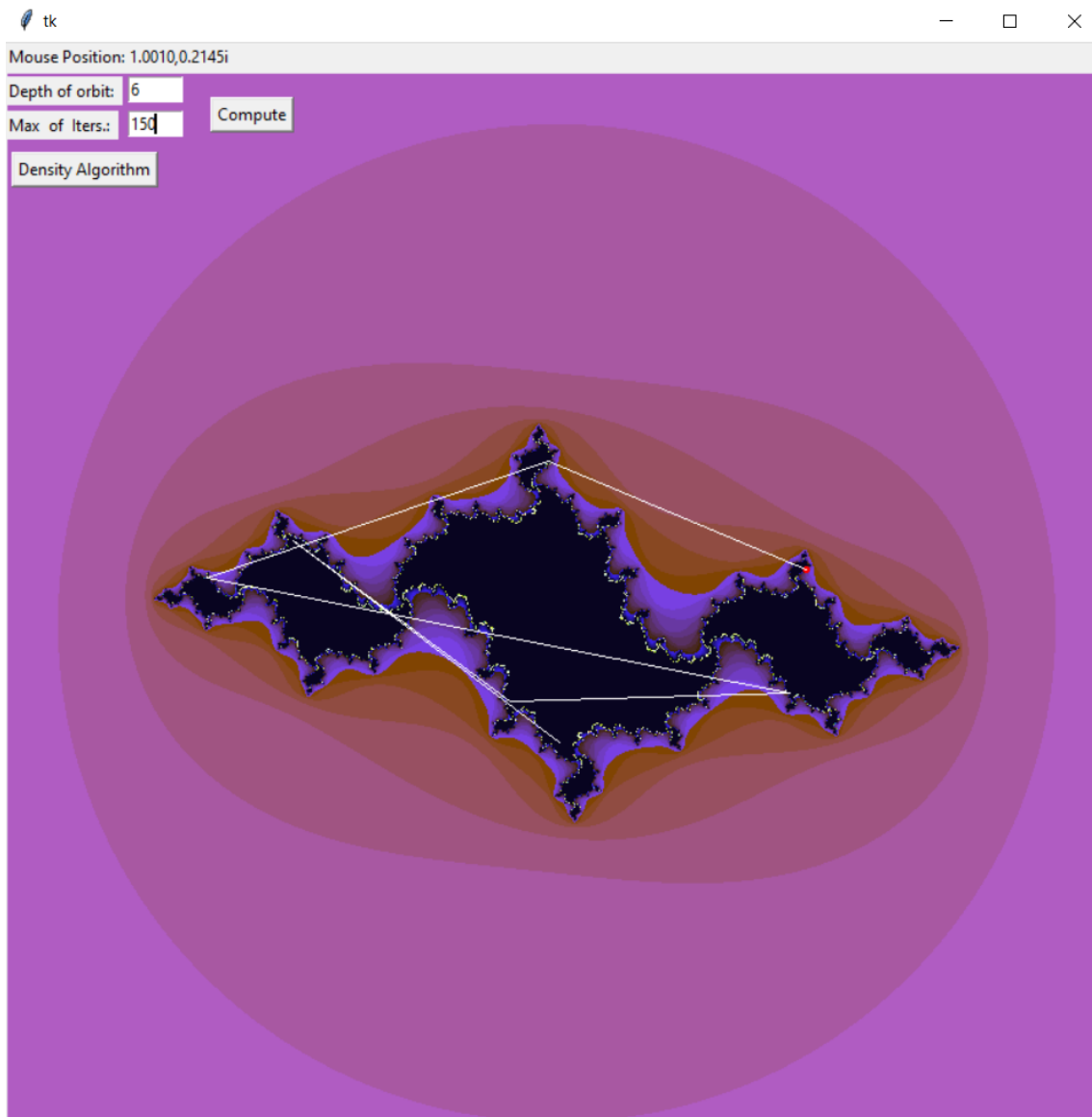


Figura 17: Captura del programa interactiu mostrant el conjunt ple de Julia i l'òrbita d'un punt clicat per ratolí

7 Conclusions

Al llarg d'aquest projecte hem estudiat els diferents conceptes necessaris per tal de poder parlar pròpiament de dinàmica complexa, com ara el Teorema de Montel o les conjugacions conformes per tal de simplificar l'estudi i la classificació dels punts i components periòdics. D'entre ells, destacar el Teorema de Böttcher, molt important per aplicar-lo en la conca d'atracció de l'infinit de polinomis de grau $d \geq 2$.

Posteriorment, hem definit el conjunt de Fatou a partir del Criteri de Normalitat de Montel, i el seu complementari, el conjunt de Julia. Hem vist les diferents propietats que tenen tots dos conjunts. Tot seguit, a partir del Teorema de Sullivan, que ens diu que no hi ha dominis errants per funcions racionals i, a conseqüència de la invariabilitat dels conjunts de Fatou i Julia per una funció f , hem pogut classificar les components periòdiques del conjunt de Fatou, i veure la relació estreta que tenen amb els punts crítics.

A continuació, ens hem centrat en el cas dels polinomis i hem estudiat el conjunt ple de Julia $K(f)$ i la conca d'atracció de l'infinit, per finalment veure el Teorema Principal del treball, la connexitat del conjunt de Julia, que ens diu que, si $K(f)$ conté tots els punts crítics (finites) de f , aleshores $J(f)$ és connex.

Com a conseqüència d'aquest teorema, quan estudiem el conjunt de Mandelbrot, és a dir, la família quadràtica $z^2 + c$, com aquesta només té com a punt crític el 0, obtenim la dicotomia fonamental que només estudiant si 0 pertany a la conca d'atracció de l'infinit o no, sabrem si el valor de c donat pertany al conjunt de Mandelbrot o no. Finalment, hem estudiat les diferents propietats de \mathcal{M} , així com el cardioide principal, i a partir d'aquí hem implementat els algorismes de densitat i d'escapament per tal de poder dibuixar per ordinador el conjunt \mathcal{M} , el conjunt de Julia d'una c concreta i l'òrbita d'un punt z_0 del conjunt de Julia per interacció.

Adjunt a aquesta memòria, tenim un notebook de Python amb el que podem generar diferents imatges de dinàmica complexa, sent l'últim el bloc principal del codi, on tenim totes les funcionalitats juntes per tal d'interactuar amb una imatge.

Referències

- [1] Beardon, Alan F.: *Iteration of Rational Functions: Complex Analytic Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Cambridge, 1990.
- [2] L. Carleson i T.W. Gamelin: *Complex Dynamics*, Springer-Verlag, Los Angeles, 1992.
- [3] Conway, John B.: *Functions of One Complex Variable: Second Edition*, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [4] Milnor, John: *Dynamics in One Complex Variable: Third Edition*, Princeton University Press, Princeton, 2006.
- [5] Steinmetz, Norbert: *Rational Iteration: Complex Analytic, Dynamical Systems*, Walter de Gruyter, Dortmund, 1992.
- [6] Esfera de Riemann:
https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_sphere
- [7] Projecció Estereogràfica i distància cordal:
<https://fernandorevilla.es/2014/04/03/proyeccion-estereografica/>
- [8] Rotació irracional:
https://en.wikipedia.org/wiki/Irrational_rotation
- [9] Codi base per generar Mandelbrot:
<https://www.codingame.com/playgrounds/2358/how-to-plot-the-mandelbrot-set/adding-some-colors>
- [10] Codi base per generar Julia:
<https://www.geeksforgeeks.org/julia-fractal-python/>
- [11] Branner, Bodil: *The Mandelbrot Set*, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Volume 39, Lyngby, 1989.