Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

TEORIA MODERNA DE CARTERES

Autor: Pol Bonastre Sanz

Director: Dr. José Manuel Corcuera Valverde
Director: Dr. Francisco José Orti Celma
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica
Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial

Barcelona, 24 de gener de 2022

Abstract

Investments and mathematics are closely related. In this project will be shown some usefull methods for investors. First of all we expose the Markowitz mean-variance portfolio theory. This let us get eficient portfolios through an optimation problem that is solved by Karush-Kuhn-Tucker conditions (known as KKT conditions), that are an extension of Lagrange multipliers.

Mean-variance analysis is the basis of the capital asset pricing model (CAPM), one of the most used methods by investors. CAPM model is based on risk-return trade-off of assets. Alternative asset princing models based on factors are presented, particularly the arbitrage pricing model (APT).

Finally a practical example of some concepts of Markowitz model is shown through python language.

Resum

El món de les inversions i de les matemàtiques estan estretament relacionats. En aquest treball donarem un seguit de mètodes que resulten essencials pels inversors. Per posar els ciments d'unes bases sòlides mostrem la teoria de la mitjana-variància de Markowitz. Aquesta ens permet obtenir carteres eficients mitjançant un problema d'optimització que afrontem usant les condicions de Karush-Kuhn-Tucker (conegudes com les codicions KKT), que son una extensió dels multiplicadors de Lagrange.

L'anàlisi de la mitjana-variància és la base del model de valoració d'actius financers (CAPM), que és un dels models més emprats pels inversors. El model CAPM es basa en la relació entre el risc i la rendibilitat. Alternativament presentem un model de determinació dels preus dels actius basat en factors, en particular la teoria de l'arbitratge (APT).

Finalment mostrem un exemple pràctic mitjançant el llenguatge python d'alguns conceptes del model de Markowitz.

2020 Mathematics Subject Classification. 91G10, 91G30

Agraïments

Vull agrair a els meus tutors José Manuel Corcuera Valverde i Francisco José Orti Celma per la seva col·laboració i dedicació. Les seves correccions i ajudes han sigut indispensables per seguir endavant, juntament amb els documents aportats. També agrair a la família i companys pel suport moral en aquesta època de pandèmia.

Índex

1 Introducció

Avui en dia existeixen una gran varietat d'actius financers en els mercats financers, i la informació sobre aquests actius es troba a l'abast de tothom. Aquest fet ha desencadenat en que els inversors usin nombroses estratègies i models d'inversió per tal de maximitzar-ne la rendibilitat.

L'anàlisi de la mitjana-variància de Markowitz (1952, 1959) és una base essencial de la teoria moderna de carteres. És un marc matemàtic per formar una cartera d'actius tal que per un nivell de risc determinat es maximitzi la rendibilitat. Per tant els inversors racionals mantindran només aquelles carteres eficients. S'enten per carteres eficients aquelles amb la rendibilitat més alta esperada per unitat de risc (ja sigui per variància o desviació estàndard), aconseguint-ho gràcies a la diversificació de manera racional i a la volatilitat dels actius (variància o desviació estàndard), tot i que en general no és un bon indicador de la seva contribució al risc d'una cartera amb molts actius.

El model de la mitjana-variància de Markowitz ens permet assentar els fonaments del model CAPM, desenvolupat principalment per Sharpe, Lintner i Mossin. Ens centrarem sobretot en la valoració d'actius.

Tot seguit detallarem un model alternatiu a la teoria de Markowitz i al CAPM, els quals son força genèrics. Mostrarem com formar un model de factors del procés de retorn. Amb aquest nou model aconseguim reduir el nombre de paràmetres necessàris, juntament amb un model per determinar el preu dels actius, l'APT.

En l'últim capítol mostrarem un exemple pràctic usant python sobre l'IBEX 35, seleccionant un conjunt d'empreses d'aquest índex. En trobarem una ponderació satisfactòria segons les nostres necessitats i representarem la frontera eficient.

2 Anàlisi de la mitjana-variància

Normalment quan fem una inversió coneixem el valor del capital, però desconeixem el rendiment que tindrà. Destaquem que considerem només dues dates: l'inicial, quan invertim, i el final, quan rebem els rendiments.

La hipòtesi de mantenir un únic període temporal ens permet simplificar l'anàlisi. Una obligació de cupó-zero que mantenim o un projecte que no té rendiments fins un cop finalitzat en podrien ser exemples. En canvi, les inversions més comuns ens permeten vendre o augmentar el capital de la inversió, o part d'ella, en qualsevol moment.

2.1 Retorn d'un actiu

Sigui X_0 la quantitat monetària invertida, X_1 la quantitat rebuda al final de la inversió i R el retorn total, llavors

$$R = \frac{X_1}{X_0}.$$

Acostumem a usar la paraula retorn per referir-nos al retorn total.

Definim també la taxa de retorn r:

$$r = \frac{X_1 - X_0}{X_0}.$$

També ens podem trobar el cas en que parlem de retorn fent referència a la taxa de retorn. Clarament podem definir la relació entre r i R per

$$R = r + 1.$$

Podem observar que la taxa de retorn actua com una taxa d'interès, ho veiem reescrivint le fòrmula de la taxa de retorn:

$$X_1 = (1 + r)X_0.$$

2.1.1 Vendes en descobert

Les vendes en descobert o posicions curtes ens permeten vendre un actiu que no posseim. La idea consisteix en rebre uns bens d'un tercer, generalment un agent, i vendre'ls a un preu X_0. L'objectiu és que el valor dels bens disminueixi i tornar-los a comprar a un preu X_1 en una data posterior, essent els guanys $X_0 - X_1$.

Les vendes en descobert es consideren arriscades ja que la pèrdua potencial és infinita. La pèrdua ve representada per $X_1 - X_0$, i com que X_1 pot augmentar indefinidament, també ho farà la possible pèrdua. A la realitat es posen condicions de dipòsits de seguretat conforme es pot fer front a les possibles pèrdues. A nivell teòric assumim que es realitzen vendes en descobert pures, sense dipòsits de seguretat.

Veiem com es representa el retorn d'una posició curta. Rebem X_0 al moment inicial i paguem X_1 al final del període d'inversió. És a dir, el pagament inicial és $-X_0$ i la recepció final és $-X_1$, per tant el retorn total serà

$$R = \frac{-X_1}{-X_0} = \frac{X_1}{X_0}.$$

Podem reescriure la fòrmula anterior en funció de la taxa de retorn com

$$X_1 = (1 + r)X_0,$$

com havíem vist anteriorment.

2.2 Retorn d'una cartera

Considerem que existeixen n actius, i formem una cartera amb tots aquests. Sigui la inversió inicial pels n actius X_0 i sigui X_{0i}, per $i = 1, 2, \ldots, n$, tal que $\sum_{i=1}^{n} X_{0i} = X_0$, on X_{0i} representa la inversió de l'actiu i. Notem que si es permeten les vendes en descobert hi haurà alguns X_{0i} negatius. Podem reescriure les quantitats invertides en funció de fraccions de la inversió total. Essent

$$X_{0i} = w_i X_0,$$

per $i = 1, 2, \ldots, n$ on w_i son les ponderacions dels n actius.

Notem que s'ha de complir que

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1,$$

on si es permeten les vendes en descobert algunes w_i poden ser negatives.

Sigui R_i el retorn total de l'actiu i. Llavors podem expressar el retorn total d'un actiu com $R_i X_{0i} = R_i w_i X_0$. Llavors és evident que la quantitat percebuda al final del període serà

$$\sum_{i=1}^{n} R_i w_i X_0.$$

Ara podem expressar el retorn total de la cartera com

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i w_i X_0}{X_0} = \sum_{i=1}^{n} R_i w_i.$$

Usem $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, per reescriure la fòrmula anterior:

$$r = \sum_{i=1}^{n} r_i w_i.$$

Aquest resultat és crucial pel que fa al retorn i ho veurem més endavant, ja que prèviament necessitem definir uns quants termes probabilístics.

2.3 Variables aleatòries

En general no sabem quin serà la quantitat percebuda al final del període d'inversió. En aquests casos podem considerar el retorn en termes probabilístics. Siguin $x_1, \ldots, x_m$, per $m \in \mathbb{R}^+$ finit, els possibles valors d'una variable aleatòria x. Associem una probabilitat p_i a cada x_i per representar la probabilitat que succeeixi aquest cas, on $i = 1, \ldots, m$. Sabem que $p_i \geq 0$ per tota i, i que $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ per ser una probabilitat.

2.3.1 Valor esperat

El valor esperat d'una variable aleatòria x és simplement el valor obtingut considerant les probabilitats com a freqüències. Per un nombre finit de nombres possibles tenim

$$E(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i.$$

Anem a definir les propietats bàsiques l'esperança:

- Sigui y un valor conegut, llavors $E(y) = y$, és a dir, el valor esperat d'un valor no aleatori és ell mateix.
- Siguin y i z aleatoris, llavors $E(\alpha y + \beta z) = \alpha E(y) + \beta E(z)$ per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- Si y és aleatori però sempre positiu, llavors $E(y) \geq 0$.

A partir d'ara usarem que $E(x) = \mu_x$.

2.3.2 Variància i covariància

A més del valor esperat també ens interessa una mesura per la desviació de l'esperança, aquesta és la variància. Sigui x una variable aleatòria amb un valor esperat de μ_x. Podem observar que l'esperancą de $x - \mu_x$ és zero, ja que $E(x - \mu_x) = E(x) - E(\mu_x) = \mu_x - \mu_x = 0$. Ara bé, ens interessa observar el terme $(x - \mu_x)^2$, que serà no negatiu, i elevat quan la diferència entre x i μ_x és gran, i petit quan els valors dels dos termes son pròxims. El valor esperat d'aquesta variable al quadrat, $(x - \mu_x)^2$, ens permet mesurar quant varia x respecte la seva esperança.

Podem definir la variància de x com

$$Var(x) = E[(x - \mu_x)^2].$$

Notem que la variància de x es representa amb el símbol σ_x^2, o directament com σ^2 sobreentenent de quina variable parlem.

A vegades usarem l'arrel quadrada de la variància, la desviació estàndard, la qual mesura el mateix que la variància. Expressem aquesta com

$$\sigma_a = \sqrt{E[(x - \mu_x)^2]}.$$

Observació 2.1. Notem que

$$\begin{aligned} Var(x) &= E[(x-\mu_x)^2] \\ &= E(x^2) - 2E(x)\mu_x + \mu_x^2 \\ &= E(x^2) - \mu_x^2. \end{aligned}$$

Si considerem dues o més variables, la dependència entre unes i altres vé representada per la covariància.

Sigui x i y dues variables aleatòries amb esperances μ_x i μ_y respectivament. Podem definir la covariància de les dues variables com

$$Cov(x,y) = E[(x-\mu_x)(y-\mu_y)].$$

Notem que representem la covariància de x i y per $\sigma_{x,y}$. Observem que per simetria $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$.

Observació 2.2. Notem que

$$\begin{aligned} Cov(x,y) &= E[(x-\mu_x)(y-\mu_y)] \\ &= E(xy) - E(x\mu_y) - E(y\mu_x) + \mu_x\mu_y \\ &= E(xy) - \mu_x\mu_y. \end{aligned}$$

Siguin dues variables aleatòries x i y i sigui $\sigma_{xy} = 0$, direm que no estan correlacionades. És la situació on conèixer una de les dues variables no ens aporta cap informació de l'altra. Si $\sigma_{xy} < 0$ direm que estan negativament correlacionades, i si $\sigma_{xy} > 0$ direm que estan positivament correlacionades.

2.3.3 Variància de la suma

Un cop definida la covariància entre dues variables aleatòries podem expressar la variància de la suma de les variables.

Siguin x i y dues variables aleatòries, tenim per linealitat que

$$E(x+y) = \mu_x + \mu_y.$$

Calculem la variància de la suma de les variables:

$$\begin{aligned} Var(x+y) &= E[(x-\mu_x+y-\mu_y)^2] \\ &= E[(x-\mu_x)^2] + 2E[(x-\mu_x)(y-\mu_y)] + E[(y-\mu_y)^2] \\ &= \sigma_x^2 + 2\sigma_{xy} + \sigma_y^2. \end{aligned}$$

Observació 2.3. Si les dues variables no estan correlacionades llavors

$$\sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2.$$

2.4 Esperança i variància d'una cartera

El risc és la possibilitat que els rendiments esperats no s'arribin a complir. Usarem la desviació estàndard de la taxa de rendibilitat per tal de mesurar el risc, aconseguint unes propietats estadístiques adients en l'anàlisi de carteres. Durant aquest projecte es suposarà que els inversors prefereixen uns rendiments esperats més elevats i variacions més baixes.

Considerem que existeixen n actius amb rendibilitats r_i per $i = 1, 2, \ldots, n$. Aquests tindran uns rendiments esperats de $\mu_i \equiv E[r_i]$. Creem una cartera on siguin w_i per $i = 1, 2, \ldots, n$ les ponderacions dels n actius. Ara podem definir la taxa de retorn de la cartera:

$$r = w_1 r_1 + w_2 r_2 + \ldots + w_n r_n$$

amb mitjana:

$$\mu = \sum_{n=i}^{n} w_i \mu_i$$

i amb variància:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} = \sum_{i \neq j} w_i w_j \sigma_{ij} + \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2$$

on σ_i^2 és la variància de r_i i la covariància entre r_i i r_j és σ_{ij}. Destaquem que si $i = j$ tenim $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$.

Per tal de simplificar l'anàlisi de Markowitz considerarem el cas en que els inversors no tenen limitacions en les vendes en descobert. D'aquesta forma podem definir les ponderacions $w_i > 0$ com aquelles que representen actius mantinguts a llarg termini i $w_i < 0$ aquelles que mantenen una posició curta. Cal destacar que cada cartera d'inversió, amb les seves possibles ponderacions dels actius, satisfarà:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

El risc total d'una cartera vindrà definit pel risc associat a la relació entre els actius ($\sum_{i \neq j} w_i w_j \sigma_{ij}$), i pel risc associat a les variàncies de cada actiu ($\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2$). Per tant, una possible cartera satisfarà totes aquestes condicions i la nombrarem:

$$w \equiv [w_1, w_2, \ldots, w_n]^T,$$

on T simbolitza la transposada.

Ara podem mostrar un cas on una cartera ben diversificada fa tendir la variància a 0:

Exemple 2.4. Sigui una cartera formada per n actius amb covariància $\sigma_{ij} = 0$ per $i \neq j$ i amb $w_i = \frac{1}{n}$ tindrem:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}{n^2} \leq \frac{\sigma_{max}^2}{n}$$

on σ_{max} =màxσ_i per $i = 1, \ldots, n$.

Ara bé, els actius que formen una cartera solen estar mínimament relacionats entre ells, i veurem que la diversificació d'actius té un límit a la hora de reduir-ne el risc.

Exemple 2.5. Sigui s^2 la variància de cada un dels rendiments esperats dels actius, que es manté constant, la covariància entre diferents actius $\sigma_{ij} = ts^2$ per $i \neq j$ i $w_i = \frac{1}{n}$, tenim:

$$\sigma^2 = \sum_{i \neq j} \frac{ts^2}{n^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{s^2}{n^2} = n(n-1)\frac{ts^2}{n^2} + \frac{s^2}{n} = ts^2 + (1-t)\frac{s^2}{n}$$

Per tant la variància de r no podrà ser inferior a ts^2.

Acabem de mostrar com una cartera ben diversificada i amb una quantitat d'actius elevada podem fer tendir el risc a 0 sempre que no hi hagi correlació entre els actius (Exemple 2.4). Més endavant veurem que la part del risc que podem fer tendir a 0 s'anomena risc específic, mentre la part que no podem reduir més s'anomena risc sistemàtic.

2.5 Representació d'una cartera

Podem representar mitjançant un diagrama bidimensional cada un dels actius, essent els eixos les esperances i la desviació estàndard dels actius, l'eix d'ordenades i l'eix de les abscisses respectivament. Anomenem aquest diagrama el diagrama $\sigma - \mu$.

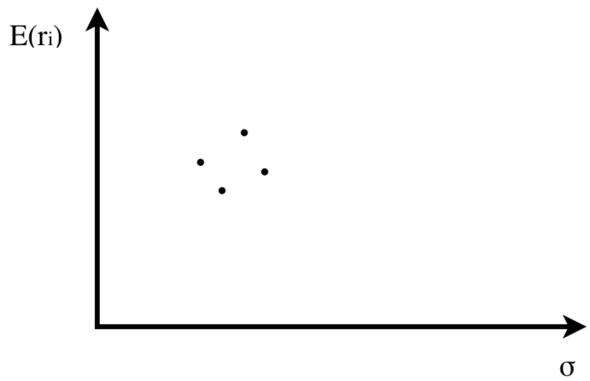


Figura 1: Diagrama $\sigma - \mu$

Suposem que dos actius son representats en el diagrama $\sigma - \mu$. Podem combinar aquests dos actius per formar una cartera, o un nou actiu. Aquest nou actiu es pot representar mitjançant les esperances, variàncies i covariàncies dels actius inicials. És evident que no tenim informació de les covariàncies en el diagrama, per tant no podem localitzar el nou actiu de manera precisa.

Per tal de trobar el nou actiu introduim la variable $\alpha \in [0, 1]$, tal que $w_1 = 1 - \alpha$ i $w_2 = \alpha$. D'aquesta manera aconseguim que quan $\alpha = 0$ només formem la cartera amb el primer actiu, mentre $\alpha \in (0, 1)$ estigui format per una combinació dels dos actius, i per $\alpha = 1$ només estigui formada pel segon actiu.

Observem que per α fora de l'interval definit tindríem ponderacions negatives, és a dir, vendes en descobert en un dels actius.

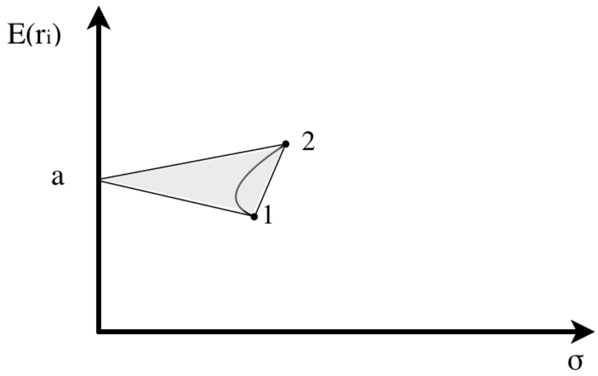


Figura 2: Cartera formada per 2 actius

Observació 2.6. Destaquem que la línia recta que uneix els dos actius s'aconsegueix quan $\rho = 1$, on ρ és el coeficient de correlació de Pearson. Siguin x, y dues variables aleatòries el coeficient de correlació serà:

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x)Var(y)}}.$$

Sigui c la cartera, quan $\rho = 1$ tenim

$$\begin{aligned} \sigma_c(\alpha; \rho = 1) &= \sqrt{(1-\alpha)^2\sigma_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_2 + \alpha^2\sigma_2^2} \\ &= (1-\alpha)\sigma_1 + \alpha\sigma_2. \end{aligned}$$

Aquesta és la línia recta que uneix els actius 1 i 2.

Quan $\rho = -1$ tenim

$$\begin{aligned} \sigma_c(\alpha; \rho = -1) &= \sqrt{[\alpha\sigma_1 + (1-\alpha)\sigma_2]^2} \\ &= |(1-\alpha)\sigma_1 - \alpha\sigma_2|. \end{aligned}$$

Quan el valor d'α és pròxim a 0 el punt corresponent serà pròxim a 1. La línia $\overrightarrow{a1}$ correspon a

$$\sigma_c(\alpha; \rho = -1) = (1-\alpha)\sigma_1 - \alpha\sigma_2.$$

Notem que el punt a es troba en $\sigma = 0$, per tant correspon a $\alpha = \frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}$, que és el punt a partir del qual $(1-\alpha)\sigma_1 - \alpha\sigma_2$ passa de ser positiva a negativa. Per tant, quan $\alpha > \frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}$, que dóna la línia $\overrightarrow{a2}$.

2.5.1 Regió factible

A mesura que incrementem el nombre d'actius també ho fan les possibles combinacions de ponderacions. Per tant, en el càlcul de tots els punts possibles en el diagrama, es formen combinacions d'un sol actiu, de dos,..., fins a n. La combinació de totes aquestes opcions és el que anomenem regió factible. En destaquem les següents propietats:

- Si tenim com a mínim 3 actius que no estiguin perfectament correlacionats i amb diferents esperances, la regió factible formarà un sòlid en el diagrama bidimensional. Considerem el cas de 3 actius, els quals els representarem per $1, 2, 3$. Sabem que la combinació de dos actius per formar la cartera és una corba. Podem veure aquesta combinació en la figura 3. De la combinació dels actius 2 i 3 podem trobar un nou actiu, 4, el qual podem combinar amb l'actiu 1. Podem veure aquesta idea en la figura 3. A mesura que movem l'actiu 4 al llarg de la corba que uneix 2 amb 3 formem un sòlid.

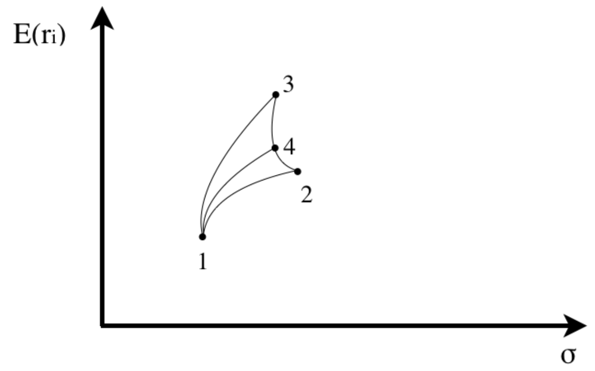


Figura 3: Formació d'una regió sòlida amb 3 actius

- La regió factible és convexa per l'esquerra. Donats dos punts qualssevols de la regió, la línia recta que els connecta no creua el límit esquerra de la regió factible. Això es deu al fet que la corba de la variància mínima en el context de la mitjana-variància és una corba parabòl·lica (ho veurem en el següent subapartat). Mostrem a la figura 4 una regió factible típica.

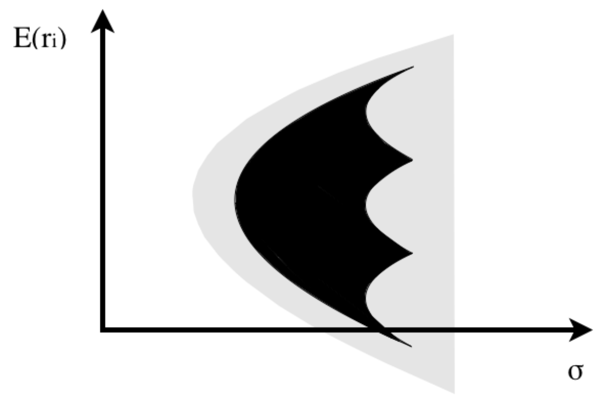


Figura 4: Regió factible

Destaquem que la part negra de la figura 4 correspon a la regió factible si no permetem vendes en descobert, és a dir, totes les ponderacions dels actius son positives. Mentre la part grisa correspon a la regió factible permetent vendes en descobert, que inclou la regió on totes les ponderacions son positives.

2.5.2 Conjunt de mínima-variància i frontera eficient

Donada una taxa de retorn esperada, el punt factible amb la variància més petita és el punt que trobem al límit esquerra de la regió factible. El límit esquerra del conjunt factible és el conjunt de mínima-variància, i el punt d'aquest conjunt amb una variància menor és el punt de mínima-variància, representat per M, com observem en la figura 5.

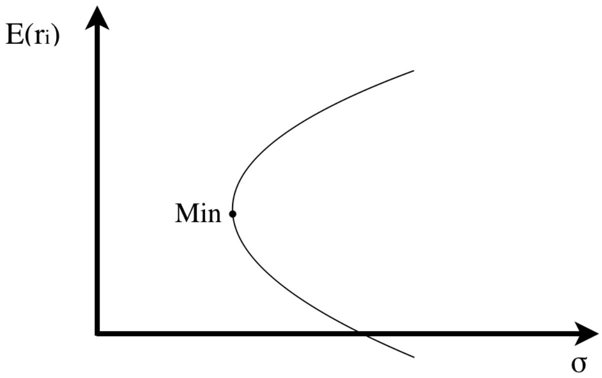


Figura 5: Conjunt de mínima-variància

Molts inversors prioritzaran una cartera amb mínima-variància sobre la resta donada una esperança. Aquests inversors tenen aversió al risc, pel que preferiran minimitzar el risc, mesurat per la desviació estàndard. D'altres inversors escolliran un cert nivell de risc, prioritzant un retorn esperat més elevat. És evident que els inversors, donada una desviació estàndard, preferiran aquella cartera amb un retorn esperat més elevat, de manera que podem agafar línies verticals de la figura 5 quedant-nos només amb el punt més elevat, formant una corba anomenada frontera eficient.

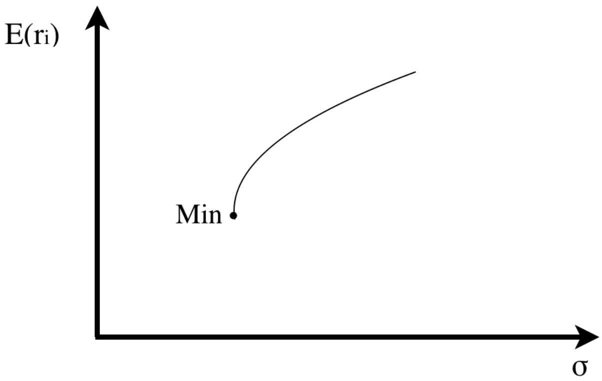


Figura 6: Frontera eficient

Direm que cada cartera que es troba en la frontera eficient serà una cartera eficient, ja que no podem aconseguir una cartera amb menys desviació estàndard sense reduir-ne el rendiment, ni cap cartera amb uns rendiments esperats més elevats sense augmentar la desviació estàndard.

2.6 Model de Markowitz

Anem a crear una cartera eficient segons la teoria de Markowitz, essent

$$z = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

Recordem que $\mu_i = E(r_i)$ i sigui $m = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^T$ i $cov(z) = \Sigma$, on $\Sigma \in M_{n\times n}$ tal que $\Sigma = (\sigma_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Notem que la diagonal de la matriu estarà formada per les variàncies de r_i, mentre la resta de components seran les covariàncies dels actius i i j. Llavors podem trobar la mitjana de la taxa de retorn de la nostra cartera r com $m^T w$ i la variància com $w^T \Sigma w$.

Sigui μ_a la taxa de rendiment mínima acceptable, tindrem una cartera eficient resolent el següent problema quadràtic:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M} & \text{minimitza} & \frac{1}{2} w^T \Sigma w \\ & \text{complint que} & m^T w \geq \mu_a, \text{ i } e^T w = 1, \end{array}$$

on e denota un vector amb totes les components igual a 1. Veiem que el Lagrangià d'aquest problema és:

$$L(w, \lambda, \gamma) = \frac{1}{2} m^T \Sigma w - \lambda(m^T w - \mu_a) - \gamma(e^T w - 1)$$

per λ, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Les condicions de Karush-Kuhn-Tucker (condicions de KKT) per aquest problema quadràtic son:

$$\frac{\partial L}{\partial w} = 0 = \Sigma w - \lambda m - \gamma e \tag{2.1}$$

$$\mu_a \leq m^T w, e^T w = 1, 0 \leq \lambda \tag{2.2}$$

$$\lambda^T (m^T w - \mu_a) = 0 \tag{2.3}$$

Sabem que la matriu de covariàncies és simètrica i definida positiva, llavors si (w, λ, γ) satisfan les condicions KKT tindrem que w és una solució de $\mathcal{M}$. En particular sempre existirà una solució de $\mathcal{M}$.

Observació 2.7. Podem argumentar la teoria darrera de les condicions KKT a [2]. En fem un breu resum:

Un problema d'optimització convexa es pot resoldre numèricament de manera eficient. Una funció $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ serà convexa si

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(y),$$

on $x, y \in \mathbb{R}^n$ i $\theta \in [0, 1]$. Podem escriure el problema com

$$\begin{array}{llr} \text{minimitza} & f_0(x) & \\ \text{complint que} & f_i(x) \leq 0, & i = 1, \ldots, m \\ & h_j(x) = 0, & j = 1, \ldots, n \end{array}$$

on $f_0, \ldots, f_m$ son funcions convexes i $h_0, \ldots, h_p$ son funcions afins. Nombrarem aquest problema com problema general i en podem deduir que la solució serà convexa.

Definim el problema dual:

$$\begin{array}{ll} max_{\rho,v} & g(\rho, v) \\ \text{complint que} & \rho \geq 0; g(\rho, v) = min_x L(x, \rho, v), \end{array}$$

on $g(\rho, v) = min_x L(x, \rho, v)$ i $L(x, \rho, v) = f_0(x) \sum_{i=1}^{m} \rho_i f_i(x) + \sum_{j=1}^{n} v_j h_j(x)$,

Aquest problema ens dóna una cota inferior del valor òptim n^*, $max_{\rho,v} g(\rho, v) \leq n^*$.

Si ens trobem davant d'una dualitat forta llavors $max_{\rho,v} g(\rho, v) = n^*$. En el problema original la dualitat forta es manté si existeix $\tilde{x}$ tal que $f_i(\tilde{x}) < 0$ $\forall i \in 1, \ldots, m$ i $h_j(\tilde{x}) < 0$ $\forall j \in 1, \ldots, n$.

Les condicions KKT s'han de mantenir per problemes d'optimització convexes on es té una dualitat forta. Enunciem les condicions:

$$\begin{array}{ll} f_i(x^*) \leq 0, & h_j(x^*) = 0 \\ \rho_i^* \geq 0, & \\ \rho_i^* f_i(x^*) = 0, \forall i, & \\ \nabla_x L(x^*, \rho^*, v^*) = 0 & \end{array}$$

on x^* és la solució del primer problema i (ρ^*, v^*) la solució del problema dual. Si a més el problema d'optimització és convex es garanteix per les condicions KKT que si existeix (ρ, v), juntament amb x, satisfent les condicions, llavors $x = x^*$ és òptim.

Suposem Σ és una matriu invertible i $\tilde{w}$ és solució de $\mathcal{M}$. Considerem dos casos:

▶ Cas 1: si $\mu_a < m^T \tilde{w}$

llavors tindrem $\lambda = 0$ per la condició (2.1). Agafant les dues condicions KKT restants reduim el problema a resoldre $0 = \Sigma\tilde{w} - \gamma e$ i $e^t \tilde{w} = 1$. La primera equació equival a

$$\Sigma 0 = \Sigma^{-1}\Sigma\tilde{w} - \gamma\Sigma^{-1}e \equiv 0 = \tilde{w} - \gamma\Sigma^{-1}e \equiv \tilde{w} = \gamma\Sigma^{-1}e.$$

Ara multipliquem per e i usem que $e^T \tilde{w} = 1$, de manera que

$$e^T\tilde{w} \times (e^T\Sigma^{-1}e)^{-1} = \gamma \equiv \gamma = (e^T\Sigma^{-1}e)^{-1}.$$

Per tant,

$$\tilde{w} = (e^T\Sigma^{-1}e)^{-1}\Sigma^{-1}e,$$

en particular, aquest valor de w satisfà el problema

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M}_{min.var} & \text{minimitza} & \frac{1}{2}w^T\Sigma w \\ & \text{complint que} & e^T w = 1 \end{array}$$

pel qual obtenim la variància mínima. Els rendiments esperats associats a aquesta variància seran

$$\mu_{min.var} = \frac{m^T\Sigma^{-1}e}{e^T\Sigma^{-1}e}.$$

Destaquem que les ponderacions associades a la variància mínima les nombrarem $w_{min.var}$. D'aquesta forma podem veure com $w_{min.var}$ formen una solució de $\mathcal{M}$ tal que si $m^T w_{min.var} \geq \mu_a$, llavors aquestes ponderacions son solució de $\mathcal{M}$. És més, quan resolem $\mathcal{M}$ ho fem per $w_{min.var}$ i després observem si es manté l'inequació. Si es compleix ja haurem acabat, sinó observem el cas 2.

▶ Cas 2: si $\mu_a = m^T \tilde{w}$

A partir de la condició (2.1) i multiplicant-la per Σ^{-1} tenim:

$$\tilde{w} = \lambda \Sigma^{-1} m + \gamma \Sigma^{-1} e$$

Substituint la fòrmula anterior a la condició (2.2) tenim:

$$\mu_a = \lambda m^T \Sigma^{-1} m + \gamma m^T \Sigma^{-1} e$$

$$1 = \lambda m^T \Sigma^{-1} e + \gamma e^T \Sigma^{-1} e.$$

Podem escriure aquests resultats en forma de matriu:

$$\begin{bmatrix} m^T \Sigma^{-1} m & m^T \Sigma^{-1} e \\ m^T \Sigma^{-1} e & e^T \Sigma^{-1} e \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_a \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notem que podem definir:

$$T = \begin{bmatrix} m^T \Sigma^{-1} m & m^T \Sigma^{-1} e \\ m^T \Sigma^{-1} e & e^T \Sigma^{-1} e \end{bmatrix} = (me)^T \Sigma^{-1} (me)$$

que serà semidefinida positiva. Anem a demostrar-ho provant que si m i e son linealment independents llavors:

$$0 < \alpha = (m^T \Sigma^{-1} m)(e^T \Sigma^{-1} e) - (m^T \Sigma^{-1} e)^2.$$

Si $\alpha = 0$, llavors tenim $m = \delta e$ per alguna $\delta \in \mathbb{R}$. Si $\frac{\mu_a}{\delta} \neq 1$, llavors el problema $\mathcal{M}$ no té solució. Per contra, si $\frac{\mu_a}{\delta} = 1$, $w_{min.var}$ serà solució de $\mathcal{M}$.

Si $\alpha > 0$, podem trobar les següents formes:

$$\lambda = e^T v, \gamma = -m^T v$$

on

$$v = \alpha^{-1} \Sigma^{-1} (\mu_a e - m).$$

Agafem la fòrmula de $\tilde{w}$ i substituim:

$$\begin{aligned} w &= \tfrac{\Sigma^{-1} e}{e^T \Sigma^{-1} e} + \rho \left[\tfrac{\Sigma^{-1} m}{e^T \Sigma^{-1} m} - \tfrac{\Sigma^{-1} e}{e^T \Sigma^{-1} e} \right] \\ &= (1 - \rho) \tfrac{\Sigma^{-1} e}{e^T \Sigma^{-1} e} + \rho \tfrac{\Sigma^{-1} m}{e^T \Sigma^{-1} m} \\ &= (1 - \rho) w_{min.var} + \rho w_{mk}, \text{ on} \end{aligned}$$

$$w_{mk} = \frac{\Sigma^{-1} m}{e^T \Sigma^{-1} m} \qquad \text{i} \qquad \rho = \frac{\mu_a (m^T \Sigma^{-1} e)(e^T \Sigma^{-1} e) - (m^T \Sigma^{-1} e)^2}{\alpha}$$

Observem que w_{mk} son les ponderacions del mercat, i el conjunt òptim de ponderacions serà una combinació lineal de les ponderacions w_{mk} i $w_{min.var}$. Notem que ambdues satisfan $e^T w = 1$.

Procés resolutiu de $\mathcal{M}$

1. Comprovar la viabilitat

   Per fer-ho observem si e i m son paral·lels. Si ho son tindrem que $m = \delta e$ per alguna $\delta \in \mathbb{R}$. En aquest cas si $\mu_a > \delta$ el problema no té solució. Si $m = \delta e$ i $\mu_a \leq \delta$, calculem Σ^{-1} i evaluem per $w_{min.var}$, que resol $\mathcal{M}$.

2. Comprovar que $w_{min.var}$ és solució

   Calculem Σ^{-1} i
   $$w_{min.var} = \frac{\Sigma^{-1}e}{e^T\Sigma^{-1}e}.$$
   Si $m^T w_{min.var} \geq \mu_a$, llavors $w_{min.var}$ és solució de $\mathcal{M}$.

3. Calculem el conjunt òptim de solucions

   Si $w_{min.var}$ no és solució, llavors calculem les ponderacions del mercat
   $$w_{mk} = \frac{\Sigma^{-1}m}{e^T\Sigma^{-1}m}.$$
   i sigui
   $$v = w_{mk} - w_{min.var},$$
   llavors
   $$w = w_{min.var} + \rho(w_{mk} - w_{min.var}) = w_{min.var} + \rho v.$$
   Per trobar ρ usem
   $$\rho = \frac{\mu_a - m^T w_{min.var}}{m^T v},$$
   on $\mu_a = m^T w$.

Notem que podem representar cada solució del problema de Markowitz $\mathcal{M}$ com a combinació de dues carteres. Ja hem vist que aquestes dues carteres son la cartera de variàncies mínimes amb ponderacions $w_{min.var}$ i la cartera del mercat amb ponderacions w_{mk}. Aquest fet és un principi general segons si Σ és invertible o no.

2.7 Teorema de les dues carteres (Two-Fund Theorem)

Recordem que la teoria de Markowitz pretén maximitzar el rendiment mentre minimitza el risc. A la realitat podem trobar un equilibri entre aquestes dues condicions, ho podem fer resolent el següent problema quadràtic:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M}_\lambda & \text{minimitza} & \frac{1}{2}w^T\Sigma w - \lambda m^T w \\ & \text{complint que} & e^T w = 1 \end{array}$$

Notem que per $\lambda > 0$ el terme $-\lambda m^T w$ és negatiu, és a dir, es redueix el valor de la funció a minitzar. Podem expressar el Lagrangià del problema anterior com

$$L(w, \lambda, \gamma) = \frac{1}{2} w^T \Sigma w - \lambda m^T w,$$

amb les condicions KKT:

$$0 = \Sigma w - \lambda m - \gamma e \tag{2.4}$$

$$e^T w = 1 \tag{2.5}$$

Aquestes noves condicions son similars a les de la secció anterior: (2.1), (2.2) i (2.3), tot i no necessitar la condició $\mu_a = m^T w$. Tot i això si $\tilde{w}$ és solució de $\mathcal{M}_\lambda$ i es compleix que $\mu_a = m^T \tilde{w}$, llavors el conjunt de solucions de $\mathcal{M}_\lambda$ i $\mathcal{M}$ coincidiran.

Sigui Σ invertible, trobem que la solució de les condicions KKT (2.4) i (2.5) ve donada per

$$\gamma = \frac{1 - \lambda m^T \Sigma_{-1} e}{e^T \Sigma{-1} e}$$

i per

$$\begin{aligned} w_\lambda &= \tfrac{\Sigma^{-1} e}{e^T \Sigma^{-1} e} + \rho \left[\tfrac{\Sigma^{-1} m}{m^T \Sigma^{-1} e} - \tfrac{\Sigma^{-1} e}{e^T \Sigma^{-1} e} \right] \\ &= (1 - \rho) \tfrac{\Sigma^{-1} e}{e^T \Sigma^{-1} e} + \rho \tfrac{\Sigma^{-1} m}{m^T \Sigma^{-1} e} \\ &= (1 - \rho) w_{min.var} + \rho w_{mk}, \end{aligned}$$

on $w_{min.var}$ i w_{mk} son els definits en l'anterior capítol i

$$\rho = \lambda (m^T) \Sigma^{-1} e.$$

Ara podem trobar el valor

$$\mu_a = m^T w_\lambda = \mu_{min.var} + \lambda \frac{\alpha}{e^T} \Sigma^{-1} e,$$

on

$$\alpha = (e^T \Sigma^{-1} e)(m^T \Sigma^{-1} m) - (m^T \Sigma^{-1} e)^2.$$

Notem que si $\lambda = 0$ tenim $\mu_{min.var}$. Per contra, a mesura que λ tendeix a infinit llavors μ_a tendirà a infinit si $0 < \alpha = (e^T \Sigma^{-1} e)(m^T \Sigma^{-1} m) - (m^T \Sigma^{-1} e)^2$. La solució a $\mathcal{M}_\lambda$ conté totes les possibles solucions de $\mathcal{M}$ per valors de μ_a, variant el valor de λ de 0 a $+\infty$. Per tant, podem comprovar la relació entre rendibilitat i risc dibuixant la corba

$$\left(\sqrt{w_\lambda^T \Sigma w_\lambda}, r_\lambda \right) = \left(\sqrt{var(r_\lambda)}, E(r_\lambda) \right),$$

on

$$r_\lambda = w_\lambda^T r,$$

variant el valor de λ de 0 a $+\infty$. Segons Markowitz és coneguda com la corba eficient o frontera eficient. Per conseqüent, qualsevol cartera que es trobi a la frontera serà una cartera eficient.

Veiem que la corba definida es pot comparar a la de la desviació estàndard. Considerem aquesta segona dibuixant tots els parells (σ_i, μ_i) per cada actiu $i = 1, 2, \ldots, n$ on $\sigma_i^2 = var(r_i)$ i $\mu_i = E(r_i)$. Ara podem definir la regió com el conjunt de parelles de la forma

$$\left(\sqrt{var(w^T z)}, E(w^T z)\right) \tag{2.6}$$

per tots els valors possibles de $w \in \mathbb{R}^n$ complint $e^T w = 1$. Observem en la figura 7 com el límit superior de la regió que forma la corba (2.6) és la frontera eficient, representada de color blau. Mentre el punt M representa la cartera de mínima-variància.

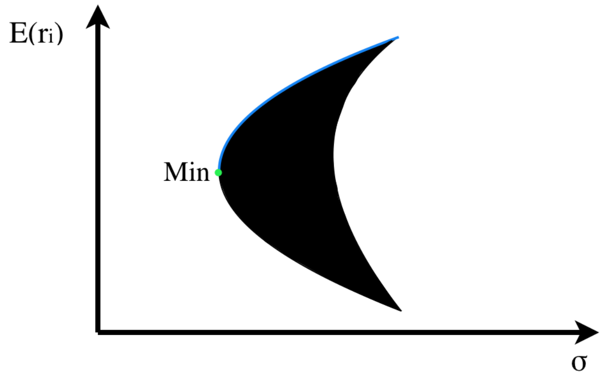


Figura 7: Representació de (2.6)

Notem també que el límit inferior és una hipèrbola com la del diagrama de la desviació estàndard de dues carteres.

Teorema 2.8. *Teorema de les dues carteres (Two-Fund Theorem) La frontera eficient per $\mathcal{M}_\lambda$ per $\lambda \in \{0, \mathbb{R}^+\}$ és la part superior del diagrama de la desviació estàndard de dues carteres eficients.*

Demostració. Sigui μ_a^1 i μ_a^2 satifent que $\mu_{min.var} < \mu_a^1 < \mu_a^2$. Prenem les condicions KKT (2.1), (2.2) i (2.3), com que $\mu_a^i \neq \mu_{min.var}$, tenim la condició $\mu_a^i \leq m^T w$ per $i = 1, 2$. Les condicions de Karush-Kuhn-Tucker passen a ser

$$0 = \Sigma w - \lambda m - \gamma e \tag{2.7}$$

$$\mu_a = m^T w \tag{2.8}$$

$$e^T w = 1. \tag{2.9}$$

Aquest és un sistema d'equacions lineal pel qual podem garantir solució per $\mu_a > \mu_{min.var}$. Si $(w^i, \lambda_i, \gamma_i)$ son solucions per $\mu_a = \mu_a^i$, per $i = 1, 2$, llavors

$$(w^\rho, \lambda_\rho, \gamma_\rho) = (1-\rho)(w^1, \lambda_1, \gamma_1) + \rho(w^2, \lambda_2, \gamma_2)$$

resol (2.7), (2.8) i (2.9) per $\mu_a = (1-\rho)\mu_a^1 + \rho\mu_a^2$ per $\rho \in \mathbb{R}$. Definim les carteres $r_1 = z^T w^1$, $r_2 = z^T w^2$ i $r_\rho = (1-\rho)r_1 + \rho r_2$ per $\rho \in \mathbb{R}$. Per construcció, per $\rho \in \left[\frac{\mu_{min.var} - \mu_a^1}{\mu_a^2 - \mu_a^1}, +\infty\right)$ la parella $\left(\sqrt{var(r_\rho)}, E(r_\rho)\right))$ dibuixa la frontera eficient i la corba de la desviació estàndard per les carteres r_1 i r_2.

□

Destaquem que podem expressar qualsevol cartera eficient en funció de dues carteres, la del mercat i la de mínima-variància.

2.8 Inclusió d'un actiu lliure de risc

Fins ara hem assumit que tots els actius eren de risc, i que la matriu de covariàncies era invertible. A partir d'ara incorporarem un actiu lliure de risc, és a dir, que té una rendibilitat segura, no és volàtil. La presència d'un actiu considerat sense risc dins la nostra cartera comporta no tenir risc en una posició curta. Aquest actiu ha de ser un bo cupó-zero que s'adeqüi a l'horitzó temporal desitjat.

A continuació veurem com la inclusió d'un actiu s amb una rendibilitat segura r_s varia l'anàlisi. Sabem que si no té risc associat la seva variància serà 0, igual que la seva covariància. Ara el nostre vector serà $\hat{z} = (r_s, z^T)^T$ on $z = (r_1, r_2, \ldots, r_n)^T$ on r_i és la taxa de retorn de l'actiu i. D'aquesta manera tenim que la matriu de covariàncies és

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Sigma \end{bmatrix},$$

on σ és la matriu de covariàncies de z. Ara podem escriure el problema quadràtic de Markowitz com

$\mathcal{M}_s$ minimitza $\frac{1}{2}w^T\Sigma w$

complint que $\mu_a \leq r_s w_s + m^T w$ i $w_s + e^T w = 1$, on w_s és la ponderació associada a l'actiu lliure de risc, mentre μ_a, e i m son els mateixos que hem definit anteriorment. Podem assumir que $r_s \leq \mu_a$, ja que en la nostra cartera sempre podrem obtenir un rendiment de r_s. Seguirem considerant que Σ és invertible. En aquest cas les condicions KKT son

$$0 = \lambda r_s + \gamma \tag{2.10}$$

$$0 = \Sigma w - \lambda m - \gamma e \tag{2.11}$$

$$0 = \lambda(r_s w_s + m^T w - \mu_a) \tag{2.12}$$

$$1 = w_s + e^T w \tag{2.13}$$

$$\mu_a \leq r_s w_s + m^T w \tag{2.14}$$

$$0 \geq \lambda \tag{2.15}$$

Considerem dos casos:

▶ Cas 1: si $\mu_a < r_s w_s + m^T w$

Observem que per (2.12) tenim $\lambda = 0$ ja que la part de dins el parèntesi no es pot anular. Llavors per (2.10) tenim $\gamma = 0$, i per (2.11) tenim que $w = 0$. Per tant la solució ve donada per $w_s = 1$, com podem veure per (2.13). És a dir, la cartera òptima consistirà en un únic actiu, el que no té risc.

▶ Cas 2: si $\mu_a \leq r_s w_s + m^T w$

Procedim multiplicant Σ^{-1} a (2.11) i substituint a (2.10) per tal d'aconseguir

$$w = \lambda \Sigma^{-1}(m - r_s e)$$

Ara substituim a (2.13) i (2.14)

$$1 - w_s = e^T w = \lambda e^T \Sigma^{-1}(m - r_s e)$$

$$\mu_a - r_s w_s = m^T w = \lambda m^T \Sigma^{-1}(m - r_s e).$$

Escrivim aquest resultat en forma de matriu

$$\begin{bmatrix} 1 & e^T\Sigma^{-1}(m - r_s e) \\ r_s & m^T\Sigma^{-1}(m - r_s e) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_s \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ r_s \end{pmatrix}.$$

Podem resoldre aquest sistema per eliminació Gaussiana

$$\begin{pmatrix} w_s \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (\mu_a - r_s)\frac{e^T\Sigma^{-1}(m-r_s e)}{(m-r_s e)^T\Sigma^{-1}(m-r_s e)} \\ \frac{\mu_a - r_s}{(m-r_s e)^T\Sigma^{-1}(m-r_s e)} \end{pmatrix},$$

per $m \neq r_s e$. Recordem que si $m = r_s e$ ens trobariem en el cas 1, on $w = 0$ i $w_s = 1$. Ara usem la igualtat de w per obtenir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w_s \\ w \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \left[\begin{pmatrix} 1 - e^T\Sigma^{-1}(m - r_s e) \\ \Sigma^{-1}(m - r_s e) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= (1 - \rho)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 1 - e^T\Sigma^{-1}(m - r_s e) \\ \Sigma^{-1}(m - r_s e) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

En la figura 8 podem veure afecta la inclusió d'un actiu lliure de risc, amb raxa de retorn r_s, a la regió factible. Primer de tot construim la regió com ho havíem fet anteriorment, deixant la figura amb vora negra de la figura. Ara per cada actiu (o cartera) de la regió formem combinacions amb l'actiu lliure de risc, formant línies infinites amb orígen a l'actiu lliure de risc i passant per l'actiu (o cartera) amb la qual el combinem. Per tant acabem formant una regió triangular infinita, representada en la figura 8 per la regió gris.

Recordem que els inversors preferiran un retorn esperat més elevat sempre que el risc sigui idèntic, deixant el límit superior de la regió com la preferible, la formada per l'actiu lliure de risc i la cartera C de la figura 8.

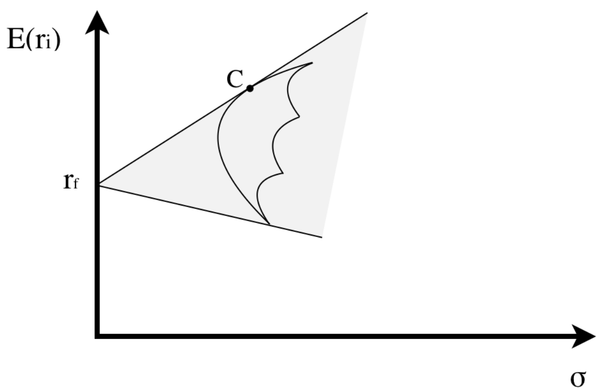


Figura 8: Teorema de la cartera amb un actiu lliure de risc

Ara ens trobem en posició de formular el següent teorema:

Teorema 2.9. *Teorema de la cartera amb actiu lliure de risc (The One Fund Theorem) Si en la selecció de la cartera incloim un actiu lliure de risc, llavors només existeix un únic fons d'actius de risc de manera que cada cartera eficient pugui construir-se com una combinació lineal del fons i de l'actiu lliure de risc.*

3 El model de valoració d'actius financers (CAPM)

Recordem que ens trobem en un entorn idealitzat, sota unes hipòtesi concretes del mercat. Assumim que existeix un actiu lliure de risc r_s, i que les variancies, covariances, taxes de retorn ... son conegudes per tots els inversors. Aquests inversors tenen la mateixa aversió al risc i l'afronten de manera racional, usant el mateix mètode de la mitjana-variància de la teoria de carteres de Markowitz. Per tant tots els inversors comparteixen la mateixa informació del mercat i els mateixos mètodes, de manera que és lògic que tots tinguin una cartera a la mateixa frontera eficient. És a dir, una cartera que resulta de la combinació entre un únic fons eficient d'actius de risc i de l'actiu lliure de risc.

Aquest fons eficient usat per tots els inversors és la cartera del mercat, i el denotem com M. Per tant el mercat ha adquirit un equilibri, on les ponderacions dels actius en M segons el seu valor capital (valor de totes les seves accions) dividit pel valor de tots els actius del mercat. Suposem que l'actiu i fa referència a un actiu de l'empresa X, i la suma de tots els seus actius és V_i. Llavors podem expressar el valor total del fons com $V = V_1 + \cdots + V_n$ amb les ponderacions de mercat $w_i = \frac{V_i}{V}$. La idea és que aquells actius amb una demanda més elevada obtindran preus elevats i s'esperarà una alta taxa de rendiment. El contrari per aquells actius amb una baixa demanda. Per tant és la oferta i la demanda la que regula les ponderacions del mercat.

Com podem veure, l'únic que necessitem per determinar la cartera de mercat son els valors de V_i. Destaquem també que en el mercat no usem ponderacions negatives, ja que les vendes en descobert no son òptimes. Notem que tots els actius de risc es podran trobar tant a la nostra cartera com en el mercat, tot i que potser amb una ponderació molt pròxima a zero.

3.1 Línea del mercat de capitals i el model CAPM

Una conseqüència del teorema de la cartera amb actiu lliure de risc és que la frontera eficient és una línea recta, com hem vist a l'apartat anterior.

Sigui (σ_M, μ_M) el punt corresponent a la cartera del mercat M, on M és la cartera del teorema (2.8), que amb la combinació d'un actiu lliure de risc formen tota possible cartera eficient. Per tant podem representar M en el diagrama $\sigma - \mu$. Totes les carteres d'inversors racionals es trobaran en la *línea del mercat de capitals*

$$\mu_r = r_s + \frac{\mu_M - r_s}{\sigma_M} \tag{3.1}$$

Aquesta equació de μ_M dóna la frontera eficient.

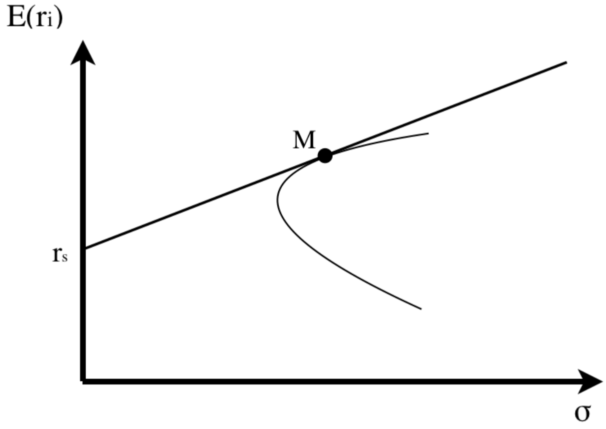


Figura 9: Línia del mercat

Ara considerem el cas on l'elecció dels actius consisteix en la globalitat dels valors negociables del mercat. En aquest cas la frontera eficient s'anomena *línea del mercat de capitals*. El pendent de la línea

$$\frac{\mu_M - r_s}{\sigma_M} \tag{3.2}$$

és el *preu del risc*, que representa els canvis en la rendibilitat de μ_r deguts a la variació de la desviació estàndard σ.

Si un dels nostres actius (entés com una cartera que forma part del nostre fons) no és eficient però es troba en la nostra cartera, no podrem trobar més informació fiable de l'actiu en qüestió per la fòrmula (3.1). Seria més útil saber com es relaciona l'excés de la taxa de retorn esperada ($\mu_i - r_s$) amb M. La següent fòrmula ens relaciona aquest dos conceptes, on $\sigma_{M,i}$ és la covariància de la cartera del mercat per l'actiu i.

Teorema 3.1. *Sigui i un actiu qualsevol es compleix*

$$\mu_i - r_s = \beta_i(\mu_M - r_s),$$

on

$$\beta_i = \frac{\sigma_{M,i}}{\sigma_M^2}$$

és la beta de l'actiu i. Aquesta beta és diferent a σ_i^2, i ajuda a mesurar el risc d'un actiu o cartera, mesura el risc sistemàtic. En general, per qualsevol cartera $c = (\rho_1, \dots, \rho_n)$ d'actius de risc, la seva beta es podrà calcular com un promig ponderat de betes d'actius individuals:

$$\mu_c - r_s = \beta_c(\mu_M - r_s),$$

on

$$\beta_c = \frac{\sigma_M, c}{\sigma_M^2} = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \beta_i.$$

Abans de procedir amb la demostració cal destacar el següent:

► Donat un actiu i, σ_i^2 ens mostra el risc associat a les fluctuacions respecte de la taxa mitja de retorn del mateix actiu, sense considerar el mercat. Podem veure que si un actiu no està relacionat amb M, tindrem $\beta_i = 0$, tot i que σ_i^2 pot ser gran. La idea consisteix en agafar un gran nombre d'actius sense correlació, ni amb correlació amb M, i formar una cartera amb proporcions iguals, disminuint la variància a 0. D'aquesta manera aconseguim tenir el mateix que un actiu lliure de risc amb una taxa de rendiment r_s. Per tant β_i mesura el risc sistemàtic, com hem dit anteriorment. En general no és cert que un valor de β_i implica un valor més elevat de σ_i^2, tot i que resulta evident que a valors més elevats de beta esperem una taxa de retorn més elevada.

Demostració. Sigui M la cartera del mercat formada per l'actiu i (entre altres) i sigui $\rho \in [0,1]$. Sigui r_i la rendibilitat de l'actiu en qüestió, tenim la cartera

$$r_\rho = \rho r_i + (1-\rho) r_M,$$

mirem la rendibilitat esperada d'aquesta:

$$\mu_\rho = \rho\mu_i + (1-\rho)\mu_M.$$

Assumim que l'actiu i no és eficient, es troba en una regió factible però diferent a la frontera eficient. Per tant, a mesura que ρ varia, el punt d'aquesta cartera dibuixa una corba suau en la regió factible (σ,μ) parametritzada per $\rho \to (\sigma(\rho), \mu(\rho))$, on

$$\mu(\rho) = \rho(\mu_i - \mu_M) + \mu_M \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\sigma(\rho) &= \sqrt{\rho^2\sigma_i^2 + (1-\rho)^2\sigma_M^2 + 2\rho(1-\rho)\sigma_{M,i}} \\ &= \sqrt{\rho^2(\sigma_i^2 + \sigma_M^2 - 2\sigma_{M,i}) + 2\rho(\sigma_{M,i} - \sigma_M^2) + \sigma_M^2},\end{aligned} \tag{3.4}$$

Quan $\rho = 0$, $(\sigma(0),\mu(0)) = (\sigma_M,\mu_M)$ i quan $\rho = 1$, $(\sigma(1),\mu(1)) = (\sigma_i,\mu_i)$. De manera que la corba toca la línea del mercat de capitals en el punt de mercat (σ_M,μ_M), mentre en el punt (σ_i,μ_i) es manté en la regió factible, però sense tocar la línea del mercat de capitals. Per tant, la corba és tangent a la línea del capital de l'actiu al punt de mercat, i quan $\rho = 0$ la derivada

$$\left.\frac{d\mu(\rho)}{d\sigma(\rho)}\right._{\rho=0}$$

té el mateix pendent que la línea del capital de l'actiu al punt de mercat M. El pendent ve donat per (3.2), donant l'equació

$$\frac{d\mu(\rho)}{d\sigma(\rho)} = \frac{\mu_M - r_s}{\sigma_M}. \tag{3.5}$$

Sabem que

$$\frac{d\mu(\rho)}{d\sigma(\rho)} = \frac{d\mu(\rho)d_\rho}{d\sigma(\rho)d_\rho}.$$

Calculem les derivades de (3.3) i (3.4) i l'avaluarem en $\rho = 0$

$$\frac{d\mu(\rho)d_\rho}{d\sigma(\rho)d_\rho} = \frac{(\mu_i - \mu_M)\sigma_M}{(\sigma_{M,i} - \sigma_M^2)}.$$

A partir de (3.5) podem deduir que

$$\frac{(\mu_i - \mu_M)\sigma_M}{(\sigma_{M,i} - \sigma_M^2)} = \frac{\mu_M - r_s}{\sigma_M}. \tag{3.6}$$

Ara deixem aquesta expressió (3.6) com la fòrmula desitjada:

$$\begin{aligned}
(\mu_i - \mu_M) = \frac{(\mu_M - r_s)(\sigma_{M,i} - \sigma_M^2)}{\sigma_M^2} &= -\mu_M + r_s + \frac{\mu_M \sigma_{M,i}}{\sigma_M^2} - \frac{r_s \sigma_{M,i}}{\sigma_M^2} \\
\mu_i - r_s = \frac{\mu_M \sigma_{M,i}}{\sigma_M^2} - \frac{r_s \sigma_{M,i}}{\sigma_M^2} &= (\mu_M - r_s)\frac{\sigma_{M,i}}{\sigma_M^2} \\
\mu_i - r_s &= \beta_i(\mu_M - r_s)
\end{aligned}$$

Passem a demostrar el resultat més general, que resulta quasi inmediat en aquest punt:

$$\begin{aligned}
r_c - r_s &= \sum_{i=1}^{n} \beta_c \mu_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \rho_i(\mu_i - r_s) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \rho_i \beta_i (\mu_M - r_s)
\end{aligned}$$

□

Observació 3.2. Si $\beta_c = 1$ implica que $\mu_c = \mu_M$, per tant esperem la mateixa rendibilitat en ambdós casos. Si $\beta_c < 1$ llavors μ_c serà menys sensible a variacions del mercat (si $\beta_c > 1$, μ_c serà més sensible). Notem que podem tenir actius amb correlació negativa amb M, fet provoca una beta per aquest actiu negativa, i per tant una taxa de rendiment inferior a la del actiu lliure de risc. Els inversors podrien mantenir aquest actiu a la cartera com a assegurança davant caigudes del valor del mercat, n'és considerat un exemple, de vegades, l'or.

Traslladar aquests resultats a la realitat suposa agafar tots els actius del mercat per tal de construir el fons del mercat M. Per tal de simplificar la tasca analítica podem agafar els índexs borsaris com podrien ser l'Ibex 35 o el S&P 500, els quals mostren en el seu nom el nombre d'actius que incorporen. D'aquesta manera podem triar aquests índexs enlloc de M. Anem a veure com en calcularíem la seva beta amb el següent exemple.

Exemple 3.3. Càlcul de la beta en el Ibex 35, β_{I35}.

Podem usar mostres dels últims n anys, essent N el nombre de períodes que agafem, si triem a final d'any tindrem $n = N$. Sigui i un actiu de la cartera, r_{I35k} i r_{ik} els valors en el període k on $k = 1, 2, \ldots, N$. Llavors

$$\mu_i = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} r_{ik},$$

$$\mu_{I35} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} r_{I35k}.$$

La variància σ^2_{I35} s'estima per

$$X = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}(r_{I35k} - \mu_{I35})^2$$

i la covariància σ_{I35} per

$$Y = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}(r_{I35k} - \mu_{I35})(r_{ik} - \mu_i).$$

Ara podem trobar el valor de beta mitjançant la ratio $\frac{Y}{X}$.

3.2 El risc sistemàtic

Ja hem vist anteriorment que l'error sistemàtic és aquell que no podem reduir mitjançant la diversificació. Anem a interpretar-lo des de la fòrmula CAPM. Expressem r per un actiu i com

$$r_i = r_s + \beta_i(r_M - r_s) + \epsilon_i, \tag{3.7}$$

on

$$\epsilon_i = r_i - r_s - \beta_i(r_M - r_s)$$

representa l'error. Notem que hem canviat μ_M per r_M introduir aquesta ϵ. Anem a veure'n alguna de les seves propietats:

- És inmediat per la fòrmula CAPM que $E(\epsilon_i) = 0$
- Per definició de β_i trobem que

$$\begin{aligned} cov(\epsilon_i, r_M) &= cov(r_i - r_s - \beta_i(r_M - r_s), R_M) \\ &= cov(r_i - \beta_i(r_M - r_s), r_M) \\ &= cov(r_i, R_M) - \beta_i cov(r_M - r_s, r_M) \\ &= cov(r_i, R_M) - \beta_i cov(r_M, r_M) \\ &= \sigma_{M,i} - \tfrac{\sigma_{M,i}}{\sigma_M^2}\sigma_M^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Per tant, l'error té esperança 0 i no està correlacionat amb M. Prenent la variància a ambdós costats de (3.7) tenim

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2\sigma_M^2 + Var(\epsilon_i). \tag{3.8}$$

Podem veure que la variància d'un actiu i està formada per dues parts: el risc sistemàtic $\beta_i^2\sigma_M^2$, que representa el risc d'inversió de l'actiu associat al mercat, i el risc no sistemàtic $var(\epsilon_i)$, que podem reduir gràcies a la diversificació. Notem que quan $\beta_i^2 > 0$ no podrem reduir el risc de la cartera.

Interpretem la covariància en termes de μ en la línea del mercat de capitals

$$\sigma = \frac{\mu - r_s}{\mu_M - r_s}\sigma_M,$$

que és la línea inversa de la cartera eficient. Usant la definició de CAPM podem concloure que per qualsevol cartera eficient c, $\sigma_c = \beta_c(\mu_M - r_s)$. Podem veure clarament que només té associat risc sistemàtic. Aquest fet es deu a la composició de la cartera eficient, formada per M i per un actiu lliure de risc. Sabem que $\beta_M = 1$, i que l'actiu lliure de risc no afecta ni a la β ni a la variància de la cartera, per tant només hi contribueix M. En definitiva, tot el risc de c prové de M.

3.3 Preus dels actius

El model CAPM també és un model de preus. Sigui P el preu de compra d'un actiu, conegut, i sigui Q el preu de venda del mateix, tindrem que el retorn serà $r = \frac{Q-P}{P}$, el pagament esperat serà $\mu_Q = E(Q)$ i la rendibilitat serà $\mu_r = (\frac{(\mu_Q - P)}{P})$, que equival a

$$P = \frac{\mu_Q}{1 + \mu_r}.$$

Recordem que la fòrmula CAPM ens diu que $\mu_r = r_s + \beta(\mu_M - r_s)$, per tant la versió del preu serà

$$P = \frac{\mu_Q}{1 + r_s + \beta(\mu_M - r_s)}, \tag{3.9}$$

on β és la beta de l'actiu.

Ara usem que $r = \frac{Q}{P} - 1$ per tal de reescriure la beta

$$\beta = \frac{Cov(r, r_M)}{\sigma_M^2} = \frac{Cov(\frac{Q}{p} - 1, r_M)}{\sigma_M^2} = \frac{Cov(\frac{Q}{P}, r_M)}{\sigma_M^2} = \frac{Cov(Q, r_M)}{P\sigma_M^2}$$

Substituint aquest valor a la fòrmula del preu (3.8) i dividint per P obtenim

$$1 = \frac{\mu_Q}{P(1 + r_s) + Cov(Q, r_M)(\mu_M - r_s)/\sigma_M^2}.$$

Resolem per P

$$P = \frac{\mu_Q - \frac{Cov(Q, r_M)(\mu_M - r_s)}{\sigma_M^2}}{1 + r_s} \tag{3.10}$$

Resulta interessant veure el preu de compra d'un actiu expressat segons el rendiment que n'esperem aconseguir. Si l'actiu no està correlacionat amb el mercat llavors es satisfà $P = \frac{\mu_Q}{1+r_S}$. Notem que si la correlació amb el mercat és positiva el preu disminuirà, mentre que si és negativa el preu augmentarà.

Observació 3.4. La fòrmula (3.10) no requereix conèixer el valor de la beta de l'actiu, per contra requereix saber el valor de la ratio

$$\frac{Cov(Q, r_M)}{\sigma_M^2}.$$

I mostrem el preu P com una funció lineal del preu de venda Q. Essent

$$\mu_Q - \frac{Cov(Q, r_M)(\mu_M - r_s)}{\sigma_M^2}$$

el terme de rendibilitat segura que un inversor acceptaria en aquest moment de valoració, enlloc de poder aconseguir una major rendibilitat en un futur incert.

3.4 Assegurances de carteres

Quan ens referim a l'assegurança de carteres fem menció a l'estratègia de protegir una cartera de baixades de valors del mercat sense perdre l'oportunitat d'aprofitar repunts del mercat, és a dir, una opció. Usar opcions amb la finalitat de protegir la cartera de caigudes per sota de cert umbral és un exemple d'assegurança de carteres estàtica. L'alternativa consisteix en usar estratègies dinàmiques, creant opcions d'accions i bons, el problema resulta en que els preus de transacció son elevats. La solució a aquests elevats preus pot ser la incorporació d'índexs de futurs, els quals poden ser negociats a preus més reduits, aconseguint un mix d'actius de risc i lliures de risc.

Sigui I el valor de l'índex, 100€ pel valor de l'índex el valor de cada opció i β la beta de la cartera diversificada. Si per cada $100 \times I$ euros en la cartera una opció és comprada a un preu d'exercici X, el valor de la cartera estarà protegit davant la caiguda de l'índex per sota de X. L'objectiu és no perdre cap euro per sota de Z en el temps T. Per tant el preu d'exercici Z és el que s'exercirà quan el valor de la cartera sigui Z. Comprarem β opcions per cada $100 \times I$ euros en la cartera, és a dir, un total de $\frac{\beta V}{100I}$, on V és el valor actual de la cartera.

Sigui r la taxa d'interès i q la rendibilitat per dividend. Suposem que assolim I_T a temps T. L'excés de devolució de l'índex sobre la taxa d'interès lliure de risc és $\frac{I_T-I}{I}+q-r$, mentre el de la cartera és $\beta\left(\frac{I_T-I}{I}+q-r\right)$. Per tant la rendibilitat de la cartera la podem expressar com $\beta\left(\frac{I_T-I}{I}+q-r\right)+r$ i l'increment del valor de la cartera causat pels dividends $\beta\left(\frac{I_T-I}{I}+q-r\right)+r-q$. En conclusió, el valor de la cartera per euro del valor inicial és

$$1+\beta\left(\frac{I_T-I}{I}+q-r\right)+r-q=\beta\frac{I_T}{I}+(1-\beta)(q-r-1).$$

Triem X tal que I_T faci que l'anterior fòrmula s'iguali a Z, quedant

$$X=\frac{I}{\beta}[Z+(\beta-1)(q-r-1)].$$

Podem concloure que el valor de la cartera és inferior a Z per $\beta(\Delta I/I)$, si i només si, el valor de l'índex és inferior a X per $\beta(\Delta I/I)(I/\beta)=\Delta I/I$. Exercint les opcions ens queda una entrada de caixa de

$$\beta\frac{\Delta I}{100\times I}\times 100=\beta\frac{\Delta I}{I}.$$

Sigui P la prima d'opció a preu d'exercici X, el cost es veurà reflectit per $\frac{P\beta V}{100\times I}$. Si incrementem el preu d'exercici tindrem un límit inferior a ZV euros a un cost més elevat. És recurrent trobar-se amb aquest dilema, considerant la compensació adient entre cost d'assegurança i nivell de protecció, essent la protecció total de la cartera

$$ZV-\frac{P\beta V}{100\times I}.$$

3.5 Principals crítiques

Tot i que la fòrmula CAPM s'usi avui en dia no implica que no sigui criticada i tingui punts a millorar.

- El model CAPM en els seus origens usava únicament dades del passat per calcular la futura rendibilitat de l'actiu i. Però el passat no sembla ser suficient per predir el futur, i el model ha evolucionat en l'ús de betes que tenen en consideració tant les dades històriques com l'estimació de riscs futurs.
- Molts inversors coincidiran en el fet que el risc no es manté constant al llarg del temps, i el model CAPM tradicional considera el risc com una cosntant. S'ha comprovat empíricament que usar betes que variin amb el temps milloren la precissió del model.
- Ja sabem que les hipòtesi del sistema no son del tot realistes, i assumim rendibilitats que segueixen una distribució normal o una funció quadràtica, però per distribucions del risc més generals altres mesures del risc son més adequades.
- Un altre punt fortament debatut és el fet que els inversors només es preocupen per la mitjana i la variància de la rendibilitat. Aquest fet provoca un punt de vista del risc de les pujades i baixades del mercat de la mateixa manera. A la realitat els inversors sembla que distingeixen entre riscs de pujades i de baixades, i les rendibilitats de la cartera no segueixen estrictament una distribució normal.
- Una altra caràcteristica criticable és l'assumpció que tots els inversors disposen de la mateixa informació sobre les rendibilitats dels actius i les seves covariàncies. Tot i que sigui cert, la realitat és que resultaria complicat obtenir informació fiable. De vegades podem estimar les variàncies i covariàncies de manera acurada, però no les rendibilitats. Desafortunadament els errors que tenen una major repercussió son els relatius a la mitjana, seguits dels de les variàncies i els menys significatius son els de les covariàncies. És més, no tots els inversors comparteixen el mateix horitzó temporal a la realitat.
- En el model no considerem costos de transacció, que si ens trobem en la realitat.
- La cartera del mercat està formada per tots els actius del mercat amb les ponderacions respecte la capitalització de la totalitat del mercat. Per tant considerem a tots els mercats i tots els actius per igual, és a dir els inversors triaran els actius únicament segons en funció del seu risc i rendibilitat. També es considera que els actius son infinitament divisibles, podent tenir una quantitat adient a la cartera desitjada.
- El CAPM suposa que tots els actius es poden comprar i vendre en el mercat, siguin valors, béns inmobles o capital humà. En el món on vivim s'usen proxys per simular el comportament del mercat. El problema recau en el fet que depenen de les proxys que s'usin podem tenir diferents valors de beta per un mateix valor. De manera que un sol factor no sembla, a priori, el millor mètode per calcular la taxa de rendibilitat esperada.
- Tot inversor pot augmentar o disminuir la capitalització de la cartera davant de fortes pujades o baixades del mercat, fet que no contempla el CAPM, el qual considera només dues dates, la de compra i la de venda.

- Per últim, el model CAPM només considera una sola cartera amb tots els actius desitjables per un inversor, però el més habitual, per inversors individuals, és tenir diferents carteres per diferents objectius, fet que es pot contemplar a la teoria del comportament dels inversors davant les carteres d'inversió (Behavioral Portfolio Theory).

Com a conseqüència de les limitacions conceptuals del CAPM i a les crítiques rebudes s'han desenvolupat models alternatius sobre l'equilibri en el mercat i la valoració d'actius financers. Una de les més reconegudes és el model APT (Arbitrage Pricing Theory) que veurem a la següent secció.

Tot i l'existència de nous models, molts especialistes segueixen usant el CAPM en l'àmbit financer argumentant que per deixar d'usar el CAPM es necessita una teoria millor que la ja existent. Per tant, tot i les limitacions el model CAPM segueix sent una important font d'aportació a la teoria del valor.

4 Model de Factors

En aquesta secció veurem que el model CAPM no és l'únic model financer emprat per fixar el preu dels actius, presentant així la Teoria de l'Arbitratge, o en anglès: "Arbitrage Pricing Theory"(APT).

Fins ara hem vist que requerim de l'estimació de molts paràmetres per tal de dur a terme el model CAPM. Fent un petit recompte; n paràmetres pels rendiments esperats dels actius i $\frac{n(n+1)}{2}$ per les seves covariàncies i variàncies. La incorporació de factors ens permet reduir les estimacions necessàries. El model de factors relaciona els factors i els rendiments individuals, i suposa una base pel model APT, per tant anem a assentar les bases.

4.1 Model d'un sol factor

Suposem que només usem un factor. Considerem n actius amb taxes de retorn $r_1, \ldots, r_n$. Sigui f el factor, el qual és un valor aleatori, com el rendiment d'un índex bursàtil pel període que el mantenim. LLavors les taxes de rendiments i els factor es relacionen per

$$r_i = a_i + b_i f + \epsilon_i$$

per $i = 1, \ldots, n$, on a_i i b_i son constants. Les b_i son els factors beta, els quals mostren la sensibilitat de la rendibilitat amb el factor. Recordem que $E(\epsilon_i) = 0$. Suposem que ϵ_i no estan correlacionats amb f, és a dir, $Cov(f, \epsilon_i) = 0$. És més, considerem que les ϵ_i no estan correlacionades entre elles, de manera que $E(\epsilon_i \epsilon_j) = 0$ per $i \neq j$. Per tant, el factor origina com a resposta la correlació entre els rendiments dels actius. Denotem la variància de ϵ_i per $\sigma^2_{\epsilon_i}$ i la de f per σ^2_f. Tenim un total de $3n + 2$ paràmetres: a_i, b_i, $\hat{f}$ i σ^2_f, on $\hat{f} = E(f)$. Podem trobar els següents resultats:

$$\begin{aligned}
&\mu_i = a_i b_i \hat{f}, \\
&\sigma_i^2 = b_i^2 \sigma_f^2 + \sigma^2_{\epsilon_i}, \\
&\sigma_{ij} = b_i b_j \sigma_f^2, \text{ per } i \neq j \\
&b_i = \frac{Cov(r_i, f)}{\sigma_f^2}.
\end{aligned}$$

En aquest punt podem analitzar la rendibilitat d'una cartera. Siguin w_i les ponderacions dels actius dins la cartera tals que $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, llavors la taxa de retorn és

$$r = a + bf + \epsilon,$$

on

$$a = \sum_{i=1}^n w_i a_i$$

$$b = \sum_{i=1}^n w_i b_i$$

$$\epsilon = \sum_{i=1}^n w_i \epsilon_i.$$

Per tant tenim que a i b son promitjos de les a_i i b_i. El terme de l'error ϵ és aleatori, però també mostra un promig de les ϵ_i. Sota les hipòtesis de $E(\epsilon_i) = 0.Cov(f, \epsilon_i) = 0$ i $E(\epsilon_i \epsilon_j) = 0$ per $i \neq j$, podem trobar fàcilment que el valor de la variància d' ϵ és

$$\sigma_\epsilon^2 = E\left[\left(\sum_{i=1}^n w_i \epsilon_i\right)\left(\sum_{j=1}^n w_j \epsilon_j\right)\right] = E\left(\sum_{i=1}^n w_i^2 \epsilon_i^2\right) = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_{\epsilon_i}^2,$$

on usem que les ϵ_i no estan correlacionades entre elles.

Un model de factors és bo en veure els efectes de la diversificació, mostrant com el risc es pot reduir. Per fer els càlculs més senzills suposarem que totes les variancies de ϵ_i son les mateixes per tots els actius i; $\sigma_{\epsilon_i}^2 = s^2$, i que la cartera està formada amb ponderacions idèntiques per cada actiu i; $w_i = 1/n$. Per tant tenim

$$\sigma_{\epsilon_i}^2 = \frac{1}{n} s^2.$$

Si fem tendir n a infinit podem veure com la variància tendeix a 0. Concloent que en una cartera ben diversificada el terme de l'error pot ser petit. Observant la variància de la cartera tenim

$$\sigma^2 = b^2 \sigma_f^2 + \sigma_\epsilon^2.$$

Destaquem que és similar a fòrmula (3.8) ($\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\epsilon_i}^2$). Podem veure que el risc sistemàtic és representat per $b^2 \sigma_f^2$, influint en ell el factor f i les betes b_i. Notem la importància del factor pels actius i pel risc que no podem eliminar mitjançant la diversificació. Aquest risc no sistemàtic ve representat per $Var(\epsilon)$, el qual hem vist que podem fer tendir a 0.

Observació 4.1. Podem veure que si considerem l'únic factor f com la taxa de retorn del mercat r_M, llavors tenim, com amb el CAPM, que $b_i = \frac{Cov(r_i, r_M)}{Var(r_M)}$.

Amb aquest resultat podem interpretar el CAPM com un cas del model unifactorial. Siguin n els actius de risc, i usem que el factor sigui el retorn esperat del mercat r_M. Podem interpretar per conveniència que:

$$r_i - r_s = \alpha_i + \beta_i (r_M - r_s) + \epsilon_i$$

on α_i i β_i son constants desconegudes. Notem que usem $f = r_M - r_s$. Prenent els valors esperats ens queda:

$$\mu_i - r_s = \alpha_i + \beta_i (\mu_M - r_s).$$

Usant $b_i = \frac{Cov(r_i, r_M)}{Var(r_M)}$ podem considerar que $\beta_i = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2}$, que és la beta del CAPM. Coincideixen si $\alpha_i = 0$, que és una hipòtesi del model CAPM, i si agafem $a = r_s$.

Per tant el model CAPM és un cas particular del model unifactorial.

4.2 Model de Factors Múltiples

Podem estendre el model anterior incloent més factors. Suposarem que hi ha dos factors f_1 i f_2, expressant la taxa de retorn de l'actiu i com

$$r_i = a_i + b_{i1}f_1 + b_{i2}f_2 + \epsilon_i$$

Com hem vist anteriorment les a_i, b_i1 i b_i2 son constants, mentre els factors f_1 i f_2, i ϵ_i son variables aleatòries. Seguim considerant que $E(\epsilon_i) = 0$ i que ϵ_i no estan correlacionats amb els dos factors, ni amb ϵ_j per $i \neq j$. Destaquem que els dos factors si poden estar correlacionats.

En el cas de tenir dos factors podem escriure les fòrmules de les taxes de retorn esperades com

$$\mu_i = a_i + b_{i1}\hat{f}_1 + b_{i2}\hat{f}_2$$

i les covariàncies

$$Cov(r_i, r_j) = b_{i1}b_{j1}\sigma^2_{f_1} + (b_{i1}b_{j2} + b_{i2}b_{j2})Cov(f_1, f_2) + b_{i2}b_{j2}\sigma^2_{f_2}, \quad i \neq j$$
$$\sigma^2_i = b^2_{i1}\sigma^2_{f_1} + 2b_{i1}b_{i2}Cov(f_1, f_2) + b^2_{i2}\sigma^2_{f_2} + \sigma^2_{\epsilon_i}, \quad i = j$$

Les b_{i1} i b_{i2} es poden obtenir mitjançant

$$Cov(r_i, f_1) = b_{i1}\sigma^2_{f_1} + b_{i2}Cov(f_1, f_2)Cov(r_i, f_2) = b_{i1}Cov(f_1, f_2) + b_{i2}\sigma^2_{f_2}$$

Podem resoldre aquestes equacions per trobar b_{i1} i b_{i2}. El model amb dos factors acostuma a ser una millora al d'un sol factor. Podem suposar un model amb un únic factor on les a_i i b_i estan determinades. En aquest cas els terme de l'error pot ser elevat i que tingui correlació amb el factor. En aquest cas un model amb dos factors és més òptim per representar l'estructura del retorn de la cartera. Tenint dos factors podem reduir el terme de l'error.

4.3 Teoria de l'arbitratge

El marc del model de factors ens porta a una alternativa per valorar el preu dels actius, la teoria de l'arbitratge (APT). Aquesta teoria, al contrari que el model CAPM no requereix l'avaluació de les mitjanes i variàncies per part dels inversors. Tan sols considerem que en el cas que el retorn és segur, llavors els inversors preferiran una rendibilitat major. Per tant ja no necessitem un fort equilibri entre mitjana i variància, el qual és substituit per un model de factors per la rendibilitat. Per contra hem de suposar que podem aconseguir un elevat nombre d'actius.

4.3.1 Versió simplificada de l'APT

Per tal d'entendre millor aquest model exposarem primer un cas idealitzat. Considerem que totes les taxes de rendibilitat satisfan el següent model d'un sol factor:

$$r_i = a_i + b_i f.$$

En canvi diferents actius poden tenir a_is i b_is diferents. Notem que no tenim terme d'error, per això considerem que és idílic. Per tant la incertesa associada a la rendibilitat vindrà donada exclusivament per la incertesa del factor f. En el cas que s'excloguin les oportunitats d'arbitratge, els valors de a_i i b_i estaran relacionats entre ells. Per veure aquesta relació requerim d'un segon actiu j, que igual que el i satisfarà

$$r_j = a_j + b_j f.$$

La única condició que han de satisfer aquests dos actius és que $b_i \neq b_j$. Formem una cartera amb les següents ponderacions: $w_i = w$ i $w_j = 1 - w$. Llavors la taxa de rendibilitat de la cartera satisfà

$$r = wa_i + (1 - w)a_j + [wb_i + (1 - w)b_j]f.$$

Triem w tal que el coeficient de f sigui 0. Sigui $w = \frac{b_j}{b_j - b_i}$, la taxa de rendibilitat de r passa a ser

$$r = wa_i + (1 - w)a_j = \frac{a_i b_j}{b_j - b_i} + \frac{a_j b_i}{b_i - b_j}.$$

Observació 4.2. Aquesta cartera és lliure de risc, ja que no conté elements aleatoris. Si hi hagués un actiu lliure de risc amb una taxa de retorn r_s, és evident que la fòrmula serà la mateixa. En cas contrari hi hauria una oportunitat d'arbitratge. En particular, totes les carteres construides d'aquesta manera, sense dependència de f, tindrà la mateixa taxa de rendibilitat tot i no existir actius lliures de risc.

Denotem λ_0 la taxa de retorn anterior, essent $\lambda_0 = r_s$ en el cas que hi hagi actius lliure de risc. Obtenim que

$$\lambda_0(b_j - b_i) = a_i b_j - a_j b_i.$$

Reordenem l'equació:

$$\frac{a_j - \lambda_0}{b_j} = \frac{a_i - \lambda_0}{b_i}.$$

Aquesta relació s'ha de mantenir per tots els actius i i j, per tant hi ha una constant c tal que

$$\frac{a_i - \lambda_0}{b_i} = c$$

es compleix per tota i. Això ens mostra que els valors a_i i b_i no son independents, sinó que estan relacionats per $a_i = \lambda_0 + b_i c$.

Podem així escriure la fòrmula de la taxa de rendibilitat esperada per l'actiu i com

$$\mu_i = a_i + b_i \hat{f} = \lambda_0 + b_i c + b_i \hat{f}$$

on $\hat{f} = E(f)$, o alternativament

$$\mu_i = \lambda_0 + b_i \lambda_1 \tag{4.1}$$

per la constant $\lambda_1 = c + \hat{f}$. Un cop conegudes λ_0 i λ_1, la taxa de rendibilitat esperada per un actiu és purament determinada per les betes del factor b_i, ja que a_i ve determinada per b_i.

Notem que la fòrmula (4.1) és similar a la del CAPM. Si agafem el factor f com la taxa de rendibilitat del mercat r_M, podem igualar $\lambda_0 = r_s$ i $\lambda_1 = \mu_M - r_s$, en aquest cas és idèntic al CAPM amb $b_i = \beta_i$.

En cas d'introduir més factors el resultat és similar. Donem una visió més general amb el següent teorema.

Teorema 4.3. *Suposem que hi ha n actius amb taxes de rendibilitat determinades per $m < n$ factors satisfent l'equació*

$$r_i = a_i + \sum_{j=1}^{m} b_{ij} f_j$$

per $i = 1, \ldots, n$. Llavors existeixen constants $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$ tals que

$$\mu_i = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{m} b_{ij} \lambda_j$$

per $i = 1, \ldots, n$.

Demostració. Farem la demostració per dos factors. Suposem que invertim una quantitat d'euros x_i per l'actiu i, on $i = 1, \ldots, n$, tals que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, $\sum_{i=1}^{n} x_i b_{i1} = 0$ i $\sum_{i=1}^{n} x_i b_{i2} = 0$. Aquesta cartera no requereix d'inversió inicial i és lliure de risc. Per tant no obtindrem cap rendiment, ja que $\sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i = 0$. Definim els vectors $x = (x_1, \ldots, x_n), b_1 = (b_{11}, b_{21} \ldots, b_{n1}), b_2 = (b_{12}, b_{22} \ldots, b_{n2}), e = (1, \ldots, 1)$ i $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, tots amb n valors. Per cada x que satisfaci $x^T e = 0, x^T b_1 = 0$ i $x^T b_2 = 0$ tenim que $x^T \mu = 0$, és a dir, qualsevol x ortogonal a e, b_1 i b_2 és també ortogonal a μ. Per tant μ ha de ser una combinació lineal dels vectors e, b_1 i b_2. Per tant, hi ha constants λ_0, λ_1, λ_2 tals que $\mu = \lambda_0 e + b_1 \lambda_1 + b_2 \lambda_2$. Tal com voliem provar □

Per entendre millor aquest resultat observem casos extrems. Si $b_{ij} = 0 \ \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, llavors no hi ha risc i $a_i = \lambda_0$. Si un $b_{ij} \neq 0$, llavors μ_i s'incrementa proporcionalment al valor de b_{ij}. El paràmetre λ_j és el preu del risc associat al factor f_i, anomenat factor preu. A mesura que augmentem f_i, adquirim rendibilitats esperades majors.

4.3.2 Carteres ben diversificades

En aquesta secció considerarem models de factors més realistes, on tenim terme d'error i factors. Suposem que hi ha n actius amb taxes de rendibilitat per cada actiu i representada per

$$r_i = a_i + \sum_{j=1}^{m} b_{ij} f_j + \epsilon_i$$

on $E(\epsilon_i) = 0$ i $E(\epsilon_i)^2 = \sigma_{\epsilon_i}^2$. Seguim amb les mateixes hipòtesis sobre ϵ_i de seccions anteriors, els termes de l'error no estan correlacionats amb els factors ni amb els altres termes d'error de la resta d'actius. Formem una cartera amb ponderacions $w_1, \dots, w_n$ amb $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. La taxa de rendibilitat de la cartera és

$$r = a + \sum_{j=1}^{m} b_j f_j + \epsilon$$

on

$$a = \sum_{i=1}^{n} w_i a_i$$

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} w_i b_{ij}$$

$$\sigma_\epsilon^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_{\epsilon_i}^2.$$

Suposem que per cada i es satisfà $\sigma_\epsilon^2 \leq S^2$ per alguna constant S. Suposem que la cartera està ben diversificada, és a dir, per cada i tenim $w_i \leq W/n$ per alguna constant $W \approx 1$. D'aquesta manera aconseguim que no hi hagi un actiu predominant en la cartera. Tenim

$$\sigma_\epsilon^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_{\epsilon_i}^2 \leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} W^2 S^2 \leq \frac{1}{n} W^2 S^2.$$

A mesura que $n \to \infty$, tenim $\sigma_\epsilon^2 \to 0$. Podem interpretar-ho des del punt de vista del terme de l'error, el qual si n tendeix a infinit tindrà una variància de 0. A la realitat podem aconseguir un nombre d'actius elevats, fent tendir la variància a 0.

4.3.3 Generalització de l'APT

Suposem que hi ha centenars de carteres diferents ben diversificades, totes sense terme d'error. Tots els actius d'aquestes carteres satisfan un model de factors sense error associat. Per tant podem aplicar la versió simplificada de l'APT per comprovar que hi ha constants $\lambda_0, \dots, \lambda_m$ tals que per qualsevol cartera ben diversificada tenim una taxa de rendibilitat

$$r = a + \sum_{j=1}^{m} b_j f_j$$

amb una esperança

$$\mu = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{m} b_j \lambda_j.$$

Com que podem trobar en diferents carteres els mateixos actius variant només les ponderacions d'un grup reduit d'actius, aquests actius han de satisfer

$$\mu_i = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\lambda_j.$$

Notem que aquest argument no és completament rigurós, per reduir-ne la complexitat. La idea és que una cartera ben diversificada fa tendir el terme d'error a 0 sota models més genèrics, i ja hem vist en la demostració del teorema (6.3) el cas d'una cartera lliure de risc. L'existència d'una cartera ben diversificada lliure de risc és suficient per estendre el teorema (6.3) a models més generals.

5 Python

En aquesta secció mostrarem un exemple usant python sobre com trobar una ponderació adient a les nostres necessitats. Treballarem amb 11 empreses de l'IBEX 35: Aena, Acciona, BBVA, Cellnex Telecom, Endesa, Iberdrola, Mapfre, Repsol, Banc Sabadell, Banc Santander i Telefònica. Iniciem cridant les llibreries necessàries:

```
import yfinance as yf
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import pandas as pd
import seaborn as sns
import math
```

Prenem dades des de l'1 de gener de 2016 fins el 21 de gener de 2022 de la base de dades de yahoo finance, i n'agafem els últims valors de cotització registrats de cada dia:

```
cotitzacio = yf.download("ANA.MC AENA.MC SAB.MC SAN.MC BBVA.MC CLNX.MC ELE.MC IBE.MC MAP.MC REP.MC TEF.MC", start="2016-01-01", end="2022-01-21")
cotitzacio = cotitzacio["Adj Close"]
cotitzacio
```

```
[*********************100%***********************]  11 of 11 completed
```

Date	AENA.MC	ANA.MC	BBVA.MC	CLNX.MC	ELE.MC	IBE.MC	MAP.MC	REP.MC	SAB.MC	SAN.MC	TEF.MC
2016-01-04	81.819489	63.611000	4.961659	14.787105	11.574263	4.841308	1.510348	6.893020	1.303290	3.217057	6.375528
2016-01-05	82.290848	63.903915	4.994737	14.761208	11.863535	4.900938	1.514402	6.832038	1.299302	3.189380	6.408287
2016-01-06	81.858765	63.733051	4.887986	14.588563	11.939139	4.876783	1.502239	6.636760	1.286541	3.086685	6.362038
2016-01-07	80.405418	61.389732	4.825591	14.614459	12.060766	4.873010	1.466423	6.373645	1.256232	3.023319	6.313216
2016-01-08	81.151741	61.349056	4.716584	14.251903	12.031180	4.848856	1.438716	6.118070	1.214756	2.941746	6.161617
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
2022-01-14	149.000000	156.800003	5.766000	42.349998	19.195000	9.932000	1.916500	11.242000	0.661200	3.166500	4.032000
2022-01-17	147.199997	155.500000	5.781000	42.169998	19.424999	10.045000	1.900000	11.144000	0.691000	3.156500	4.005000
2022-01-18	146.899994	153.000000	5.781000	42.189999	19.410000	9.956000	1.944500	11.124000	0.691200	3.140000	4.065000
2022-01-19	147.050003	152.399994	5.692000	42.680000	19.580000	9.996000	1.944000	11.132000	0.656200	3.134500	4.027500
2022-01-20	148.350006	155.300003	5.703000	43.660000	19.930000	10.220000	1.920000	10.810000	0.648800	3.130500	4.013000

1549 rows × 11 columns

Seguim convertint les cotitzacions en retorns logarítmics diaris. Notem que la borsa s'obre 252 dies l'any, per tant tenim que el retorn anual serà $r_{anual}(t, t+t_k) = Ln\left(\frac{p_{t+t_k}}{p_t}\right)\frac{252}{k}$, on p_k denota la cotització en el període k.

```
cotitzacio = np.log(cotitzacio).diff().dropna()
cotitzacio = cotitzacio.dropna()
def retornEsperat(dataframe):
    retornEsperat = []
    for i in cotitzacio.columns:
        retornEsperat.append(cotitzacio[i].mean()*252)
    return np.array(retornEsperat)
    returns = retornEsperat(cotitzacio)
returns
```

Ens imprimeix el retorn esperat de cada actiu:

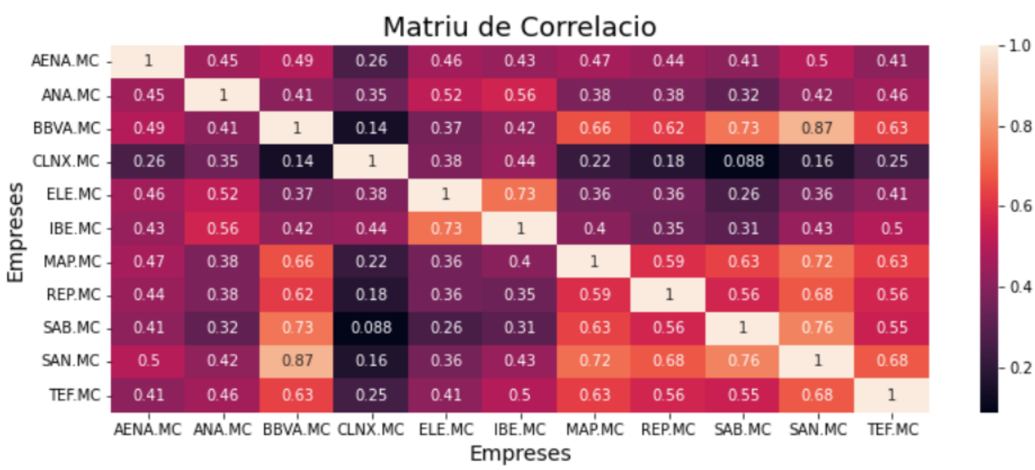
array([0.09687006, 0.14530249, 0.02266896, 0.17624973, 0.0884674 , 0.12163098, 0.03906732, 0.07324969, -0.11355022, -0.00444002, -0.07536031])

Procedim amb els càlculs de les matrius de covariàncies i de correlació:

*covariancia = cotitzacio.cov()*252*
covariancia

	AENA.MC	ANA.MC	BBVA.MC	CLNX.MC	ELE.MC	IBE.MC	MAP.MC	REP.MC	SAB.MC	SAN.MC	TEF.MC
AENA.MC	0.087252	0.038163	0.052962	0.021815	0.029149	0.026947	0.039425	0.043265	0.055897	0.052864	0.035411
ANA.MC	0.038163	0.080787	0.041808	0.027783	0.031759	0.033614	0.030802	0.036019	0.041272	0.042641	0.037577
BBVA.MC	0.052962	0.041808	0.131697	0.014317	0.028466	0.032024	0.068835	0.075231	0.121484	0.113604	0.066766
CLNX.MC	0.021815	0.027783	0.014317	0.078812	0.022910	0.025783	0.017650	0.016606	0.011253	0.016457	0.020354
ELE.MC	0.029149	0.031759	0.028466	0.022910	0.046044	0.033007	0.021955	0.025551	0.025415	0.028125	0.025728
IBE.MC	0.026947	0.033614	0.032024	0.025783	0.033007	0.044532	0.024406	0.024333	0.029499	0.032895	0.030365
MAP.MC	0.039425	0.030802	0.068835	0.017650	0.021955	0.024406	0.081896	0.056287	0.082766	0.074216	0.052076
REP.MC	0.043265	0.036019	0.075231	0.016606	0.025551	0.024333	0.056287	0.111440	0.086133	0.081230	0.054624
SAB.MC	0.055897	0.041272	0.121484	0.011253	0.025415	0.029499	0.082766	0.086133	0.208608	0.125442	0.072501
SAN.MC	0.052864	0.042641	0.113604	0.016457	0.028125	0.032895	0.074216	0.081230	0.125442	0.129339	0.071033
TEF.MC	0.035411	0.037577	0.066766	0.020354	0.025728	0.030365	0.052076	0.054624	0.072501	0.071033	0.084395

covariancia_inv = pd.DataFrame(np.linalg.pinv(covariancia.values), covariancia.columns, covariancia.index) covariancia_inv *correlacio = cotitzacio.corr()*
def plot_correlacio_matrix(correlacio_matrix):
plt.figure(figsize=(12.2,4.5))
sns.heatmap(correlacio, annot = True)
plt.title('Matriu de Correlacio',fontsize=18)
plt.xlabel('Empreses',fontsize=14)
plt.ylabel('Empreses',fontsize=14)
plt.show()
plot_correlacio_matrix(correlacio)



Podem construir la frontera eficient a partir de dues carteres eficients, tal i com ens mostra el teorema de les dues carteres. Resolem el problema

$$\mathcal{M} \qquad \text{minimitza} \qquad \tfrac{1}{2}w^T\Sigma w$$

$$\text{complint que} \qquad m^T w \geq \mu_a, \text{ i } e^T w = 1,$$

on una solució òptima serà de la forma $w^* = g + h \times m$, recordem que $m = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^T$. Sigui $a = e^T \Sigma^{-1} m, b = m^T \Sigma^{-1} m, c = e^T \Sigma^{-1} e$ i $d = bc - a^2$, llavors

$$g = \frac{1}{d}(b\Sigma^{-1}e - a\Sigma^{-1}m)$$

$$h = \frac{1}{d}(c\Sigma^{-1}m - a\Sigma^{-1}e).$$

Mostrem el codi corresponent:

```
a = e@covariancia_inv@returns
b = returns.T@covariancia_inv@returns
c = np.transpose(e)@covariancia_inv@e
d = b*c - a**2
g = 1/d*(b*covariancia_inv@e - a*covariancia_inv@returns)
h = 1/d*(c*covariancia_inv@returns - a*covariancia_inv@e)
```

Suposem que permetem vendes en descobert, i busquem les ponderacions òptimes per aconseguir una cartera amb rendibilitat del 20% i una altra del 25%:

```
weights1 = g + h*0.2
weights1
```

```
AENA.MC     0.086546
ANA.MC      0.134415
BBVA.MC     0.109546
CLNX.MC     0.253561
ELE.MC      0.098956
IBE.MC      0.467520
MAP.MC      0.233835
REP.MC      0.172752
SAB.MC     -0.131496
SAN.MC     -0.134007
TEF.MC     -0.291627
dtype: float64
```

```
weights2 = g + h*0.25
weights2
```

```
AENA.MC     0.093477
ANA.MC      0.195436
BBVA.MC     0.162077
CLNX.MC     0.299597
ELE.MC      0.007630
IBE.MC      0.570013
MAP.MC      0.262911
REP.MC      0.224654
SAB.MC     -0.199195
SAN.MC     -0.137471
TEF.MC     -0.479128
dtype: float64
```

Pel teorema de les dues carteres podem construir una nova cartera mitjançant $w_* = \alpha w_1 + (1-\alpha) w_2$ on w_i per $i = 1, 2$ indica les poderacions trobades. Farem variar l'α de

-4 a 4 i calcularem els retorns esperats i la variància de cada cartera eficient per poder representar la frontera eficient en el diagrama $\sigma - \mu$. Iniciem definint una llista pels valors d'α i definim les noves ponderacions:

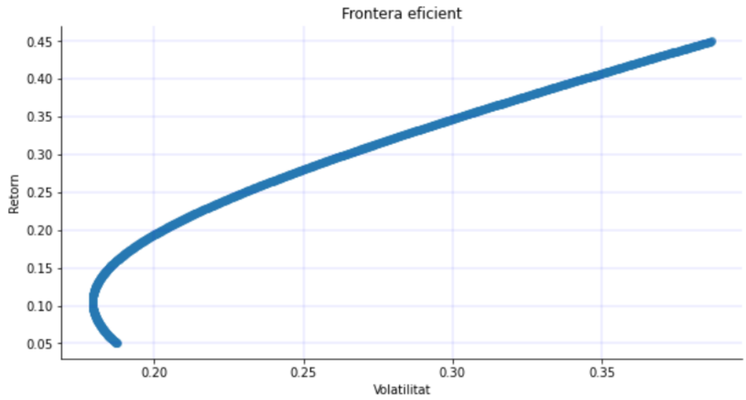
```
def alpha(list):
    for i in range(1000):
        list.append(list[i] + 8/1000)
    return list
alpha = alpha([-4])
def w3(weight1,weight2,alpha):
    weight3 = []
    for i in alpha:
        weight3.append(i*weight1 + (1-i)*weight2)
    return np.array(weight3)
weight3 = w3(weights1,weights2,alpha)
```

Calculem la variància:

```
def var_cartera(weights,covar_matrix):
    empty_list = []
    for i in weights:
        empty_list.append(i.T@covar_matrix@i)
    return np.array(empty_list)
var_cartera = var_cartera(weight3,covariancia)
def exp_return(weights,retornos_esperados):
    empty_list = []
    for i in weights:
        empty_list.append(i.T@retornos_esperados)
    return np.array(empty_list)
r = exp_return(weight3,returns)
```

Passem a representar la frontera eficient:

```
def scatterplot(cotitzacio, x_dim, y_dim):
    x = np.sqrt(var_cartera)
    y = r
    fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 5))
    ax.scatter(x, y, alpha=0.7)
    ax.set_title('Frontera eficient')
    ax.set_xlabel('Volatilitat')
    ax.set_ylabel('Retorn')
    ax.spines['top'].set_visible(False)
    ax.spines['right'].set_visible(False)
    ax.grid(color='blue', linestyle='-', linewidth=0.25, alpha=0.5)
    plt.show()
scatterplot(cotitzacio,"","")
```



Fins ara hem vist com usar els resultats obtinguts en la teoria, però podem trobar les ponderacions de manera més simple amb la llibreria PyPortfolioOpt:

from pypfopt import EfficientFrontier
from pypfopt import risk_models
from pypfopt import expected_returns
from pypfopt import plotting
ef1 = EfficientFrontier(pd.Series(returns), covariancia,weight_bounds=(-1,1))
weights = ef1.efficient_return(0.2, market_neutral=False)
cleaned_weights = ef1.clean_weights()
print(cleaned_weights)
ef1.portfolio_performance(verbose=True)

Imprimint:
OrderedDict([(0, 0.08655), (1, 0.13441), (2, 0.10955), (3, 0.25356), (4, 0.09895), (5, 0.46752), (6, 0.23384), (7, 0.17275), (8, -0.1315), (9, -0.13401), (10, -0.29163)])
Expected annual return: 20.0%
Annual volatility: 20.3%
Sharpe Ratio: 0.89
(0.20000000000000004, 0.20272486994784522, 0.887902900351143)

Comprovem que és el mateix resultat que hem obtingut anteriorment, fariem el mateix per la rendibilitat del 25%, procedint amb la resta de càlculs.

Seguint amb les dades obtingudes de la llibreria PyPortfolioOpt, podem calcular ràpidament els retorns, tot i que afegirem les dades del IBEX 35:

cotitzacio = yf.download("ANA.MC AENA.MC SAB.MC SAN.MC BBVA.MC CLNX.MC ELE.MC IBE.MC MAP.MC REP.MC TEF.MC ^IBEX", start="2016-1-1", end="2022-01-22")

	AENA.MC	ANA.MC	BBVA.MC	CLNX.MC	ELE.MC	IBE.MC	MAP.MC	REP.MC	SAB.MC	SAN.MC	TEF.MC	^IBEX
Date												
2016-01-04	81.819481	63.611000	4.961659	14.787103	11.574261	4.841307	1.510348	6.893020	1.303290	3.217057	6.375525	9313.190430
2016-01-05	82.290848	63.903908	4.994737	14.761208	11.863534	4.900938	1.514403	6.832037	1.299302	3.189380	6.408288	9335.190430
2016-01-06	81.858757	63.733044	4.887987	14.588561	11.939140	4.876783	1.502239	6.636759	1.286541	3.086685	6.362038	9197.390625
2016-01-07	80.405418	61.389732	4.825589	14.614458	12.060766	4.873010	1.466423	6.373645	1.256232	3.023320	6.313217	9059.291016
2016-01-08	81.151741	61.349060	4.716583	14.251903	12.031182	4.848856	1.438716	6.118069	1.214756	2.941746	6.161618	8909.191406
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
2022-01-14	149.000000	156.800003	5.766000	42.349998	19.195000	9.932000	1.916500	11.242000	0.661200	3.166500	4.032000	8806.599609
2022-01-17	147.199997	155.500000	5.781000	42.169998	19.424999	10.045000	1.900000	11.144000	0.691000	3.156500	4.005000	8838.700195
2022-01-18	146.899994	153.000000	5.781000	42.189999	19.410000	9.956000	1.944500	11.124000	0.691200	3.140000	4.065000	8781.599609
2022-01-19	147.050003	152.399994	5.692000	42.680000	19.580000	9.996000	1.944000	11.132000	0.656200	3.134500	4.027500	8774.900391
2022-01-20	148.350006	155.300003	5.703000	43.660000	19.930000	10.220000	1.920000	10.810000	0.648800	3.130500	4.013000	8814.599609

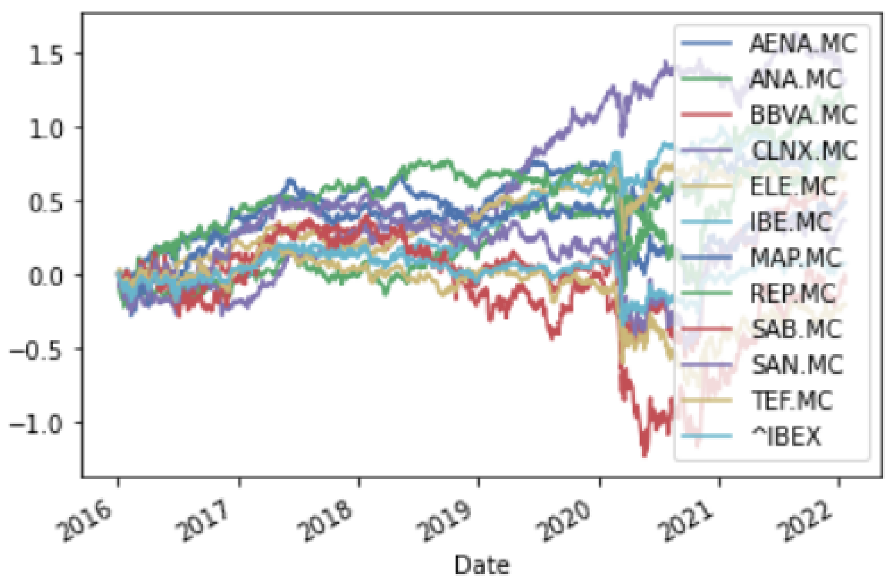
1550 rows × 12 columns

mu2 = expected_returns.mean_historical_return(cotitzacio)
mu2

```
AENA.MC     0.101648
ANA.MC      0.156281
BBVA.MC     0.022913
CLNX.MC     0.192600
ELE.MC      0.092436
IBE.MC      0.129249
MAP.MC      0.039814
REP.MC      0.075948
SAB.MC     -0.107275
SAN.MC     -0.004427
TEF.MC     -0.072546
^IBEX      -0.008911
dtype: float64
pandas.core.series.Series
```

Notem que els valors esperats en aquest cas difereixen en quantitats ínfimes als trobats anteriorment, això es deu al fet que en aquest segon cas usem més dades històriques. Passem a representar gràficament els preus dels actius dividits pel seu valor inicial:

cotitzacio.pct_change()[1:].cumsum().plot()



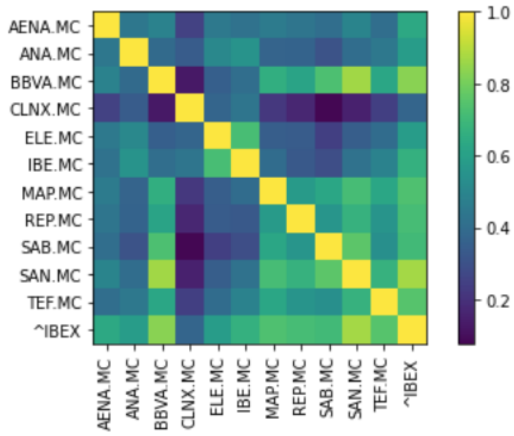
on podem veure l'efecte de la pandèmia amb caigudes generalitzades a inicis de 2020.

Calculem la matriu de covariàncies i la matriu de correlació:

```
cov_matriu = risk_models.sample_cov(cotitzacio)
cov_matriu
```

	AENA.MC	ANA.MC	BBVA.MC	...	SAN.MC	TEF.MC	^IBEX
AENA.MC	0.086275	0.036818	0.051893	...	0.051937	0.034642	0.038544
ANA.MC	0.036818	0.079989	0.040276	...	0.040947	0.036720	0.034055
BBVA.MC	0.051893	0.040276	0.130850	...	0.112431	0.065807	0.061749
CLNX.MC	0.021042	0.027383	0.013282	...	0.015409	0.020028	0.021728
ELE.MC	0.028099	0.030482	0.027052	...	0.026507	0.024710	0.025586
IBE.MC	0.025930	0.032782	0.030909	...	0.031558	0.029663	0.028816
MAP.MC	0.039159	0.030298	0.068635	...	0.073988	0.052397	0.043462
REP.MC	0.042634	0.034860	0.074632	...	0.080592	0.054157	0.049221
SAB.MC	0.054815	0.039498	0.120993	...	0.123853	0.071250	0.066084
SAN.MC	0.051937	0.040947	0.112431	...	0.127970	0.069885	0.063914
TEF.MC	0.034642	0.036720	0.065807	...	0.069885	0.084251	0.044646
^IBEX	0.038544	0.034055	0.061749	...	0.063914	0.044646	0.042119

```
plotting.plot_covariance(cov_matriu, plot_correlation=True);
```



Per procedir a calcular les ponderacions necessitem separar les dades del mercat, per calcular-ne la volatilitat i comprovar que es troba per sota la frontera eficient.

```
actius1 = cotitzacio.loc[:, cotitzacio.columns != '^IBEX']
ibex = cotitzacio.loc[:, cotitzacio.columns == '^IBEX']
```

Calculem el retorn diari de l'IBEX 35:

```
ibex = ibex.pct_change()[1:]
ibex
```

	^IBEX
Date	
2016-01-05	0.002362
2016-01-06	-0.014761
2016-01-07	-0.015015
2016-01-08	-0.016569
2016-01-11	-0.002593
...	...
2022-01-14	-0.001168
2022-01-17	0.003645
2022-01-18	-0.006460
2022-01-19	-0.000763
2022-01-20	0.004524

1549 rows × 1 columns

i en calculem la volatilitat diaria i posteriorment l'anual:

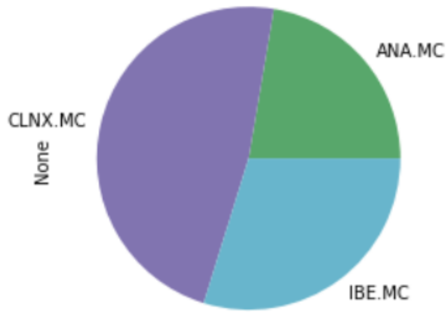
*volatilitat_diaria = ibex.std()*100*
*volatilitat_anual = math.sqrt(252) * volatilitat_diaria*
volatilitat_anual

Trobant així la volatilitat anual de l'IBEX 35, que és 20, 52%. Juntament amb el retorn esperat de l'índex, que és negatiu, comprovem fàcilment que es troba per sota la frontera eficient.

Ara calculem els retorns esperats i la matriu de covariància per veure, finalment, com podem trobar una cartera eficient establint límits sobre les ponderacions, maximitzant la raó de Sharpe:

```
mu = expected_returns.mean_historical_return(actius1)
cov = risk_models.sample_cov(actius1)
ef = EfficientFrontier(mu, cov, weight_bounds=(0, 1))
ef.max_sharpe()
ponderacions = ef.clean_weights()
pd.Series(ponderacions).plot.pie()
ef.portfolio_performance(verbose=True)
print(ponderacions)
```

```
Expected annual return: 16.6%
Annual volatility: 20.9%
Sharpe Ratio: 0.70
(0.16562329543563198, 0.2086399231328014, 0.6979646716172403)
```

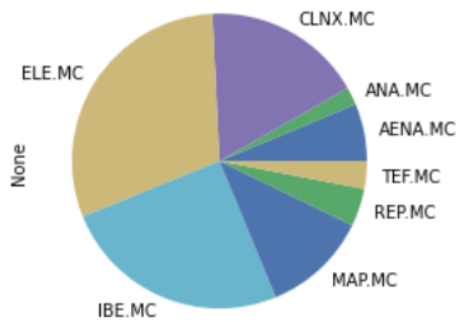


i la impressió de les ponderacions: *OrderedDict([('AENA.MC', 0.0), ('ANA.MC', 0.22331), ('BBVA.MC', 0.0), ('CLNX.MC', 0.47889), ('ELE.MC', 0.0), ('IBE.MC', 0.29781), ('MAP.MC', 0.0), ('REP.MC', 0.0), ('SAB.MC', 0.0), ('SAN.MC', 0.0), ('TEF.MC', 0.0)])*

O també podem minimitzar la volatilitat:

ef = EfficientFrontier(mu, cov, weight_bounds=(0,1))
weights = ef.min_volatility()
ponderacions = ef.clean_weights()
print(ponderacions)
pd.Series(ponderacions).plot.pie()
ef.portfolio_performance(verbose=True)

```
Expected annual return: 10.9%
Annual volatility: 18.0%
Sharpe Ratio: 0.50
(0.10923608840272496, 0.17952180341512322, 0.49707660409569815)
```



i la impressió de les ponderacions: *OrderedDict([('AENA.MC', 0.06289), ('ANA.MC', 0.01949), ('BBVA.MC', 0.0), ('CLNX.MC', 0.17522), ('ELE.MC', 0.30402), ('IBE.MC', 0.25076), ('MAP.MC', 0.1159), ('REP.MC', 0.04126), ('SAB.MC', 0.0), ('SAN.MC', 0.0), ('TEF.MC', 0.03047)]).*

6 Conclusions

Després de l'anàlisi de diferents models financers hem pogut mostrar com la resolució d'un problema d'optimització es pot aplicar a l'obtenció d'una cartera. Aquest problema l'hem afrontat mitjançant les condicions KKT.

A la pràctica podem aplicar eines matemàtiques per aconseguir una cartera adient a les nostres característiques. Arribant a la conclusió que podem expressar qualsevol cartera eficient d'actius de risc com a combinació de dues carteres eficients, la del mercat i la de mínima-variància, amb les ponderacions adequades. És més, si afegim un actiu lliure de risc als possibles actius on invertir la necessitat de tenir dues carteres eficients es redueix a tenir una cartera eficient i l'actiu lliure de risc.

Per altra banda l'ús d'eines computacionals com python per trobar unes ponderacions adients a les nostres necessitats m'ha permès profunditzar el meu coneixement sobre les matemàtiques i les inversions financeres.

Referències

[1] Besser, Nicolás. Universitat de Xile. https://nicobesser.medium.com/

[2] Boyd, Stephen; Vandenberghe, Lieven. *Convex Optimization.* New York: Cambridge University, Press 2004. 215-271

[3] Burke, James. Markowitz Mean-Variance Portfolio Theory, University of Washington.

[4] Luenberger, David G. *Investment Science.* New York: Oxford University. Press, 1998. 137-227

[5] Sigman, Karl (2005). *Capital Asset Pricing Model (CAPM)*, Columbia University. http://www.columbia.edu/ ks20/FE-Notes/4700-07-Notes-CAPM.pdf

[6] Sigman, Karl. *Factor Models*, Columbia University. http://www.columbia.edu/ ks20/FE-Notes/4700-07-Notes-FM.pdf

[7] Sigman, Karl (2005). *Portfolio mean and variance*, Columbia University. http://www.columbia.edu/ ks20/FE-Notes/4700-07-Notes-portfolio-I.pdf

[8] Yuh-Dauh Lyuu (2004): *Financial Engineering and Computation: Principles, Mathematics, Algorithms*, 458-479.