Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Selecció eficient de carteres d'inversió mitjançant el mètode de Markowitz

Autor: Adrià Delgado González

Director: Dr. Josep Vives Santa Eulàlia
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i informàtica

Barcelona, 24 de gener de 2021

Abstract

In the first half of the twentieth century, studies and analysis for decisions in the world of finance were purely descriptive. This descriptive approach was referred to as the "traditional view of finance".

From the second half of the 20th century, it was considered a decisive point for the development and the evolucion of finance. In the 50's. thanks to great personalities of the time, some quantitative bases were built, which would generate a great expansion of the knowledge of financial institutions and transactios between individuals, companies and governments, among others.

The author of the first contribution is Harry Markowitz, with the work entitled *Portfolio Selection*, which deals with the relationship between risk and return as the main point. Risk was first measured in the world of finance thanks to this theory.

In this project we will study the Markowitz's theory by looking for the optimal portfolios for a high expected return. However, there are difficulties in practice, such as the fact that this theory produces poorly diversified portfolios.

Resum

En la primera meitat del segle XX, els estudis i anàlisi per a les decisions en el món de les finances eren purament descriptius. Aquesta enfocament descriptiu s'anomena actualment "visió tradicional de les finances".

A la segona meitat del segle XX es considera una etapa decisiva pel desenvolupament i evolució de les finances. En la dècada dels anys 50, gràcies a grans personalitats de l'època, es van construir unes bases quantitatives, que generarien una gran ampliació dels coneixements de les institucions i transaccions financeres entre individus, empreses i governs, entre d'altres.

L'autor de la primera aportació és Harry Markowitz, amb l'obra titulada *Portfolio Selection*, en la qual tracta com a punt principal la relació entre risc i rendibilitat. A través de la desviació típica es va mesurar per primera vegada el risc en el món de les finances.

En aquest treball profunditzarem en la teoria de Markowitz buscant quines són les carteres òptimes per a una rendibilitat esperada alta. No obstant, en la pràctica es presenten dificultats, com per exemple que aquesta teoria produeix carteres poc diversificades.

2010 Mathematics Subject Classification. 62P25, 91G10, 62P20

Agraïments

Quan era petit, m'encantaven les matemàtiques i era la meva assignatura preferida en el col·legi i en l'institut. Amb aquest treball tanco una de les millors etapes que he viscut a la meva vida, estudiant el que sempre vaig voler.
Vull agrair a la meva família, amics i, en especial, a la meva parella per haver-me donat suport amb la meva decisió d'estudiar el grau de matemàtiques. També agrair al Dr. Josep Vives Santa Eulàlia per la seva gran ajuda per a què aquest treball sigui el més polit possible i per ser una persona pacient encara que tingués molts més treballs que tutoritzar.
També vull donar les gràcies als meus companys de carrera per haver-me acompanyat en aquest camí comú que hem compartit durant molts anys.
Donar gràcies també al professorat de la facultat per la seva professionalitat i la seva adaptació durant la pandèmia que hem patit fins ara.
Moltes gràcies a tothom, per fi puc dir que sóc graduat en Matemàtiques.

Índex

1 Introducció

Avui dia sentim la paraula Inversió molt sovint en la vida quotidiana com per exemple a la televisió o en altres medis. Segons [5], la definició d'inversió és *una activitat que consisteix a dedicar recursos per obtenir un benefici de qualsevol tipus.*

És a dir, quan es realitza una inversió s'assumeix un cost que renuncies en el present per aconseguir un benefici futur, el qual és incert. Hi ha diversos tipus d'inversions depenent de diferents punts de vista. Per exemple, es pot diferenciar una inversió segons el temps: curt termini (menys d'un any), mig termini (entre 1 i 3 anys) i llarg termini (més de 3 anys).

Existeixen quatre factors fonamentals que es regeix en una inversió:

- **Rendibilitat:** La rendibilitat és la quantitat de diners que guanyarem a canvi de realitzar una inversió.
- **Risc:** El risc és la incertesa que té una inversió si no ens surt com esperàvem.
- **Liquiditat:** La liquiditat és la capacitat de convertir una determinada inversió en diners amb pèrdues mínimes segons el seu valor.
- **Termini:** El termini és el període de temps que trigues a aconseguir un cert rendiment, que pot ser decisiu per algunes inversions.

Per entendre com funciona una inversió, hem d'entendre bé aquestes definicions. Molts inversors actualment només es fixen en la rendibilitat, però només fixar-se en això no és una bona idea. Hem de prestar atenció en els altres factors; en especial en el risc.

Per tal de diversificar les inversions d'un inversor, és necessari crear una **cartera d'inversió**. Diversificar correctament una inversió permetrà que la cartera estigui exposada a menys riscos que si s'inverteix en una única classe d'actius.

Una vegada sabem què és una inversió i com funciona, una de les preguntes claus que es fan els inversionistes és: *Com saber si una inversió és millor que una altra?*. **Harry Markowitz**, guanyador nord-americà del premi Nobel en ciències econòmiques en l'any 1990, es va plantejar aquesta pregunta i en l'any 1952 va publicar un article titulat *Portfolio Selection* en el *Journal of Finance* que parlava sobre el procés de selecció d'una cartera d'inversió. Segons Markowitz, el procés de selecció d'una cartera consta de dues etapes: La primera comença amb l'observació i acaba amb les expectatives del comportament futur dels valors d'inversió; la segona parteix de les expectatives del futur i finalitza amb la selecció de la cartera. L'article que va escriure Markowitz s'ocupa d'estudiar la segona part del procés de selecció.

D'aquesta teoria es deriva a **la frontera eficient de Markowitz**, que és el conjunt de carteres d'inversió que obtenen la rendibilitat més alta per a un determinat nivell de risc assignat.

Aquesta teoria de Markowitz permet el desenvolupament del *Capital Asset Pricing Model* o **CAPM**, que és el model que estudiarem en aquest treball.

Per tant, l'estudi que realitzarem a continuació utilitza la teoria que Markowitz va proposar per a fer ús del model CAPM per a obtenir, dins d'un conjunt de carteres d'inversió, la cartera d'inversió òptima en el sentit del màxim retorn amb el mínim risc possible.

Durant tot el treball, suposarem que un inversor és racional, és a dir, que busca un benefici en la seva inversió, i també suposarem que un inversor pot vendre les seves accions quan ho vegi convenient.

En el següent apartat veurem els conceptes teòrics de la teoria de Markowitz que són de tipus probabilístic i estadístic.

2 Conceptes teòrics

2.1 Conceptes bàsics probabilístics basats en el risc financer

Definició 2.1. *Suposem que hi ha dos instants de temps representats per 0 si es tracta del present i 1 si es tracta del futur per tota unitat de temps. Suposem que fem una inversió amb un preu present de $S(0)$. Aleshores, $S(1)$ serà representada per una variable aleatòria del preu futur*

$$S(1) : \Omega \to [0, +\infty)$$

on Ω és un espai de probabilitat.

Observació 2.2. En el cas que Ω sigui finit, és a dir, $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, aleshores utilitzarem la notació

$$S(1, \omega_i) = S(1)(\omega_i) \quad \forall\ i = 1, \ldots, n.$$

Per definir un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, podem assignar la σ-àlgebra $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, que és el conjunt de les parts de Ω, i, per poder definir una mesura de probabilitat $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ podem assignar $\{\omega_i\}_i$ com a singletons, $P(\{\omega_i\}) = p_i$ tal que $p_i \in (0, 1]$ i $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

D'ara en endavant, suposarem que la variable aleatòria $S(1)$ ha de ser no negativa, ja que busquem preus que ens donin uns beneficis; és a dir, $P(S(1) \geq 0) = 1$.

Definició 2.3. *Definim la* ***rendibilitat*** *de la inversió S com una variable aleatòria $K : \Omega \to \mathbb{R}$, definida com una combinació lineal entre la variable aleatòria $S(1)$ i la constant $S(0)$:*

$$K = \frac{S(1) - S(0)}{S(0)}.$$

Observació 2.4. Amb aquesta definició de rendibilitat, podem calcular per tant l'esperança de la variable aleatòria K, i aquesta esperança ve donada per:

$$\mu = \mathbb{E}(K) = \frac{\mathbb{E}(S(1)) - S(0)}{S(0)}.$$

Per tant, les relacions entre preus i rendibilitat es pot expressar com:

$$S(1) = S(0)(1 + K), \quad \mathbb{E}(S(1)) = S(0)(1 + \mu).$$

Aquestes relacions permeten deduir que podem trobar els preus donades les rendibilitats. Observem també que un requisit per a què $S(1)$ sigui no negativa implica que $K \geq -1$.
Els **dividends** són pagaments que fan algunes empreses per compartir beneficis amb els seus inversionistes. Això es realitza en el temps futur o "1". Després d'aquest pagament, el preu de les accions cauen en aquesta quantitat. Per tant, $S(1)$ en aquest cas s'expressa com:

$$K = \frac{S(1) + Div(1) - S(0)}{S(0)}.$$

Definició 2.5. *Un **bo** és una garantia especial que paga una determinada quantitat de diners a venciment. La rendibilitat d'un bo no és aleatori ja que estem treballant amb tan sols un període de temps.*
Considerem un bo que paga una unitat de moneda nacional al temps 1 ($B(1) = 1$), *que és adquirit per* $B(0) < 1$. *Per tant, definim el **retorn sense risc** com:*

$$R = \frac{1 - B(0)}{B(0)}.$$

Definició 2.6. *Per a mesurar el risc, definim la **variància** de la rendibilitat* K *com:*

$$Var(K) = \mathbb{E}[(K - \mu)^2] = \mathbb{E}(K^2) - \mu^2.$$

*I definim també la **desviació típica** com* $\sigma = \sqrt{Var(K)}$.

Proposició 2.7. *Donada la rendibilitat com a variable aleatòria* K, *aleshores:*

$$Var(K) = \frac{1}{S(0)^2} Var(S(1)).$$

Demostració:

$$Var(K) = Var(\frac{S(1) - S(0)}{S(0)}) = \frac{1}{S(0)^2} Var(S(1) - S(0)) = \frac{1}{S(0)^2} Var(S(1)). \quad \square$$

Observació 2.8. Quan estem considerant el risc d'una inversió, hem de considerar tant la desviació típica com el valor esperat. Un inversor intel·ligent escollirà, si és possible, una inversió amb un valor esperat alt i amb baixa desviació típica (és a dir, amb menor risc). Per tant, la definició següent va de la mà amb aquesta situació.

Definició 2.9. *Direm que un **actiu** amb valor esperat* μ_1 *i desviació típica* σ_1 ***domina** un altre actiu amb valor esperat* μ_2 *i desviació típica* σ_2 *quan*

$$\mu_1 \geq \mu_2 \quad i \quad \sigma_1 \leq \sigma_2.$$

Observació 2.10. Amb aquesta definició de dominació volem definir un espai en el qual podem seguir el nostre estudi. Per tant, treballarem en el pla (σ, μ), més específicament, en el primer quadrant del pla ja que la desviació típica és no-negativa. Cada actiu és representat per un punt en el pla.
Diem que una cartera és **eficient** si no existeix cap cartera, excepte ella mateixa, que la domini. Suposem que tenim un conjunt d'actius A en el pla (σ, μ) i considerem el subconjunt de les carteres eficients de totes les carteres possibles. Aquest subconjunt l'anomenarem **subconjunt** o **frontera eficient**.

Definició 2.11. *Suposem que tenim dues variables aleatòries X, Y. Definim la* ***covariància*** *de X, Y com:*

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Amb aquestes primeres definicions, estudiarem la teoria de carteres que la separarem en dues parts: carteres de dos actius i de múltiples actius. Les carteres de dos actius tenen un avantatge i és que els conceptes de variància i d'esperança o mitjana poden ser expressades fàcilment amb termes geomètrics a partir del pla (σ, μ) que hem definit abans.

2.2 Carteres de 2 actius

Comencem amb dos actius. Per a una determinada assignació de recursos entre els dos actius que composen la cartera, la mitjana (o esperança) i la variància de la rendibilitat de tota la cartera s'expressen en termes de les mitjanes i les variàncies de les rendibilitats dels actius individuals. Amb això, volem trobar l'única ponderació amb variància mínima del conjunt de totes les ponderacions factibles possibles donada una rendibilitat.

Finalment, agregant un actiu lliure de risc, trobem la denominada **cartera de mercat**, que proporciona una combinació òptima amb l'actiu lliure de risc.

Denotem els preus dels actius com $S_1(t)$ i $S_2(t)$ per $t = 0, 1$.

Definició 2.12. *Suposem que comprem x_1 accions de S_1 i x_2 accions de S_2. El* ***valor inicial*** *d'aquesta cartera és:*

$$V_{(x_1,x_2)}(0) = x_1 S_1(0) + x_2 S_2(0).$$

Quan dissenyem una cartera, normalment el seu valor inicial és el punt de partida de les nostres consideracions. La decisió sobre el nombre d'accions en cada actiu es derivarà de la decisió sobre la divisió de la nostra riquesa, que és expressada amb les ponderacions que definirem ara.

Definició 2.13. *Definim les* ***ponderacions*** *de cada actiu com:*

$$w_1 = \frac{x_1 S_1(0)}{V_{(x_1,x_2)}(0)}, \qquad w_2 = \frac{x_2 S_2(0)}{V_{(x_1,x_2)}(0)}.$$

Observació 2.14. Notem que si la riquesa inicial és $V(0)$, $w_1 + w_2 = 1$ i que, per tant, les accions que comprem són

$$x_1 = \frac{w_1 V(0)}{S_1(0)}, \qquad x_2 = \frac{w_2 V(0)}{S_2(0)}.$$

En el període final, els preus dels actius canvien donant el valor final de la cartera com una variable aleatòria:

$$V_{(x_1,x_2)}(1) = x_1 S_1(1) + x_2 S_2(1).$$

La rendibilitat de la inversió en dos actius depèn del mètode de l'assignació de fons (les ponderacions) i els rendiments corresponents. El vector de ponderacions serà denotat per $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2)$ o en notació matricial $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ i la rendibilitat de la corresponent cartera amb ponderacions $\mathbf{w}$ per K_w.

Proposició 2.15. *Suposem que tenim una cartera de dos actius amb ponderacions* $\boldsymbol{w}_j$ *i* K_j *per* $j = 1, 2$ *les rendibilitats de les dues components. Aleshores:*

$$K_w = w_1 K_1 + w_2 K_2.$$

Demostració:
Comencem amb la definició del valor final de la cartera:

$$\begin{aligned}
V_{(x_1,x_2)}(1) &= x_1 S_1(1) + x_2 S_2(1) \\
&= \frac{w_1 V_{(x_1,x_2)}(0)}{S_1(0)} S_1(0)(1 + K_1) + \frac{w_2 V_{(x_1,x_2)}(0)}{S_2(0)} S_2(0)(1 + K_2) \\
&= V_{(x_1,x_2)}(0)(w_1(1 + K_1) + w_2(1 + K_2)) \\
&= V_{(x_1,x_2)}(0)(1 + w_1 K_1 + w_2 K_2), \qquad (w_1 + w_2 = 1)
\end{aligned}$$

Per tant,

$$K_w = \frac{V_{(x_1,x_2)}(1) - V_{(x_1,x_2)}(0)}{V_{(x_1,x_2)}(0)} = w_1 K_1 + w_2 K_2.$$

□

Introduirem ara els conceptes de covariància i del coeficient de correlació en termes de les accions S_1, S_2:

$$\sigma_{ij} = Cov(K_i, K_j) \quad \forall i, j = 1, 2.$$

Per definició, $\sigma_{12} = \sigma_{21}$.

El **coeficient de correlació** és definit per:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}.$$

Per les propietats de la covariància de dues variables aleatòries X, Y, en particular que $|Cov(X, Y)| \leq \sigma_X \sigma_Y$, obtenim:

$$-1 \leq \rho_{ij} \leq 1.$$

Teorema 2.16. *Donada una cartera amb rendibilitat* K_w*, la mitjana i la variància d'aquesta ve donada per:*

$$\begin{aligned}
\mu_w &= \mathbb{E}(K_w) = w_1 \mu_1 + w_2 \mu_2, \\
\sigma_w^2 &= Var(K_w) = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2 w_1 w_2 \sigma_{12}.
\end{aligned}$$

Demostració
Per la linealitat de l'esperança matemàtica, tenim:

$$\mu_w = \mathbb{E}(K_w) = \mathbb{E}(w_1 K_1 + w_2 K_2) = w_1 \mathbb{E}(K_1) + w_2 \mathbb{E}(K_2) = w_1 \mu_1 + w_2 \mu_2.$$

Pel que fa a la variància, utilitzant el resultat anterior i que $\sigma_w^2 = \mathbb{E}(K_w^2) - \mu_w^2$, *aleshores:*

$$\begin{aligned}
\sigma_w^2 &= \mathbb{E}(w_1^2 K_1^2 + w_2^2 K_2^2 + 2w_1 w_2 K_1 K_2) - w_1^2 \mu_1^2 - w_2^2 \mu_2^2 - 2w_1 w_2 \mu_1 \mu_2 \\
&= w_1^2[\mathbb{E}(K_1^2) - \mu_1^2] + w_2^2[\mathbb{E}(K_2^2) - \mu_2^2] + 2w_1 w_2[\mathbb{E}(K_1 K_2) - \mu_1 \mu_2] \\
&= w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_{12}.
\end{aligned}$$

□

Corol·lari 2.17. *En notació matricial per a la cartera de 2 actius amb,*

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix},$$

es pot escriure la mitjana i la variància com:

$$\begin{aligned}
\mu_w &= \boldsymbol{w}^T \ \boldsymbol{\mu}, \\
\sigma_w^2 &= \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{w}.
\end{aligned}$$

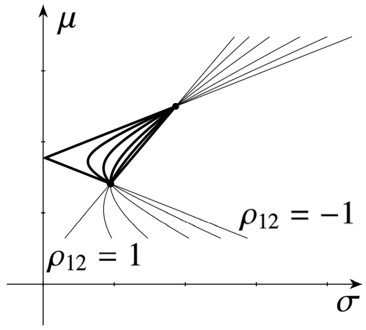
Observació 2.18. La col·lecció de totes les carteres que es poden generar mitjançant dos actius donats (això és denominat com **conjunt assolible**) es pot representar convenientment en el pla (σ, μ). Suposem que $\mu_1 < \mu_2$. Posarem la primera ponderació w_1 com un paràmetre (posarem $w = w_1$). Per tant, $w_2 = 1 - w_1$, $\mathbf{w} = (w, 1 - w)$ i la mitjana i la variància és:

$$\begin{aligned}
\mu_w &= w\mu_1 + (1 - w)\mu_2, \\
\sigma_w^2 &= w^2 \sigma_1^2 + (1 - w)^2 \sigma_2^2 + 2w(1 - w)\sigma_{12}.
\end{aligned}$$

La col·lecció assolible és, per tant, una **corba** parametritzada per w. Restringirem aquesta corba per $w \in [0, 1]$.

També podem observar que la forma de les corbes depenen del coeficient ρ_{12}, ja que $\sigma_{12} = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2$. Segons el gràfic, si el coeficient de correlació ρ_{12} és negatiu, aleshores podem reduir el risc de la cartera i, al mateix temps, aconseguint un valor de rendibilitat entre les rendibilitats dels dos actius de risc.

En el gràfic podem observar que si $\rho_{12} \in (-1, 1)$, el conjunt assolible és una hipèrbola. Si $\rho_{12} = -1$, el conjunt assolible serà la unió de dues semirectes que cadascuna d'elles tallarà un actiu diferent i la interesecció d'aquestes semirectes serà el punt més proper a l'eix μ. En canvi, si $\rho_{12} = 1$, aquest conjunt assolible seran dues semirectes que intersequen en el punt més proper a l'eix μ, però una de les semirectes contindrà els dos actius.



En el teorema següent estudiarem formalment què passa amb el conjunt assolible si tenim dos actius diferents.

Teorema 2.19. *Suposem que $\mu_1 \neq \mu_2$ i $\rho_{12} \in (-1,1)$, aleshores el conjunt assolible és una hipèrbola on el seu centre és l'eix vertical.*

Demostració:
Per fer més fàcil les notacions, el pla (σ, μ) serà el pla (x, y):

$$y = w\mu_1 + (1-w)\mu_2, \qquad (1)$$
$$x^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{12} \qquad (2)$$

L'objectiu és trobar una expressió com:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1,$$

Aïllant w de l'equació (1) tenim:

$$w = \frac{y-\mu_2}{\mu_1-\mu_2}$$

I, substituint w a (2), obtenim:

$$x^2 = \frac{1}{A}[By^2 - 2Cy + D], \qquad (3)$$

on

$$A = (\mu_1-\mu_2)^2 > 0,$$
$$B = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12},$$
$$C = \sigma_1^2\mu_2 + \sigma_2^2\mu_1 - \sigma_{12}(\mu_1+\mu_2),$$
$$D = \sigma_1^2\mu_2^2 + \sigma_2^2\mu_1^2 - 2\sigma_{12}\mu_1\mu_2.$$

Observem que $B > 0$ si $\rho_{12} < 1$ ja que $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12} > \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 \geq 0$.

Podem ara escriure

$$By^2 - 2Cy + D = B(y-k)^2 + c,$$

amb $k = \frac{C}{B}$ i $c = \frac{1}{B}(BD - C^2)$. Substituint això en (3) ens dona:

$$x^2 = \frac{1}{A}[B(y-k)^2 + c],$$

I, per tant,

$$\frac{x^2}{\frac{c}{A}} - \frac{(y-k)^2}{\frac{c}{B}} = 1,$$

que es tracta de l'expressió d'hipèrbola que hem escrit abans amb $h = 0$ i, com que $\rho_{12} \in (-1, 1)$, tenim que $c > 0$ ja que $B > 0$ i $A > 0$. $\square$

A partir d'aquí, ens queda veure què passa si $\rho_{12} = \pm 1$.

Cas ρ_{12}=-1 :

$$\begin{aligned}\sigma_w^2 &= w_1^2\sigma_1^2 + w_2\sigma_2^2 - 2w_1w_2\sigma_1\sigma_2 \\ &= (w_1\sigma_1 - w_2\sigma_2)^2,\end{aligned}$$

Per tant, $\sigma_w = |w_1\sigma_1 - w_2\sigma_2|$. Com que σ_w és no negatiu, el valor mínim que pot prendre és $\sigma_w = 0$. Posant $w_1 = w$ i $w_2 = 1 - w$ aleshores:

$$\sigma_w = |w\sigma_1 - (1-w)\sigma_2|,$$

Si posem $\sigma_w = 0$, obtenim:

$$w = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \qquad 1 - w = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2},$$

Com que $\sigma_1, \sigma_2 \geq 0$, aleshores $w \in [0, 1]$. Per tant, podem minimitzar el nostre risc a 0.

Cas ρ_{12}=1 :

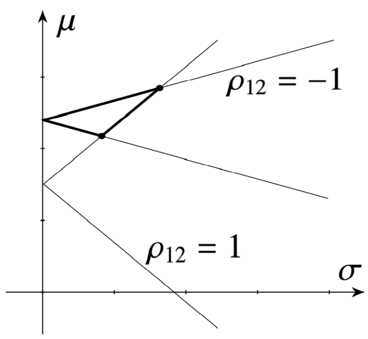
Repetint el cas anterior, en aquest cas obtenim:

$$\sigma_w^2 = (w_1\sigma_1 + w_2\sigma_2)^2.$$

Per tant, $\sigma_w = |w_1\sigma_1 + w_2\sigma_2|$. Resolent l'equació si $\sigma_w = 0$, aleshores:

$$w = \frac{-\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}, \qquad 1 - w = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2}.$$

És necessari que $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Com que $\sigma_1, \sigma_2 \geq 0$, o bé w o bé $1 - w$ ha de ser negatiu. Per tant, el menor risc possible s'obté si $w = 0$ o si $w = 1$.



Observació 2.20. Un cop estudiat el conjunt assolible, que és el conjunt de les possibles carteres al pla (σ, μ), tornem al cas en què tenim dos actius, S_1 i S_2. El nostre objectiu ara és aconseguir minimitzar la variància σ_w^2.

Teorema 2.21. *La cartera amb variància mínima té les ponderacions* $\boldsymbol{w}_{min} = (w_1, w_2)$ *amb*

$$w_1 = \frac{a}{a+b}, \qquad w_2 = \frac{b}{a+b}$$

on

$$a = \sigma_2^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2,$$
$$b = \sigma_1^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2,$$

tret que $\rho_{12} = 1$ *i* $\sigma_1 = \sigma_2$.

Demostració: Si $\rho_{12} = -1$, *amb els càlculs anterior, aleshores:*

$$w_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = \frac{\sigma_2(\sigma_1 + \sigma_2)}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2} = \frac{a}{a+b}.$$

Si $\rho_{12} = 1$, *per tant:*

$$w_1 = \frac{-\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{-\sigma_2(\sigma_1 - \sigma_2)}{(\sigma_1 - \sigma_2)^2} = \frac{a}{a+b}.$$

Si $\rho_{12} \in (-1, 1)$, *derivarem la funció* σ_w^2 *respecte la variable* w *i igualarem a* 0 *per veure si tenim un mínim global:*

$$(\sigma_w^2(w))' = 2w\sigma_1^2 - 2(1-w)\sigma_2^2 + 2(1-w)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2w\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 = 0.$$

Si resolem aquesta equació per w, *ens dona el resultat que intentem demostrar. Demostrem que aquest valor de* w *és un mínim global derivant la funció per segona vegada i substituint el valor:*

$$2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 - 4\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 > 2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_1\sigma_2 = 2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \geq 0,$$

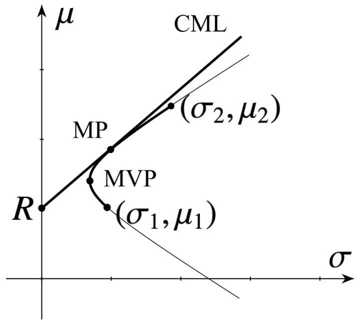
que ens dona el resultat desitjat. □

Una vegada hem estudiat les carteres de 2 actius, ara ens preguntem què passa quan existeix un actiu que no presenta volatilitat. Aquesta pregunta ens porta a la següent definició.

Definició 2.22. *Definim un* ***actiu sense risc*** *amb rendibilitat* R *si*

$$\mathbb{E}(R) = R,$$
$$Var(R) = 0.$$

Observació 2.23. Totes les carteres construïdes amb l'actiu sense risc amb rendibilitat R o qualsevol altre actiu estan representats per una semi-recta que comença pel punt $(0, R)$ que passen pels punts del pla (σ, μ). La nova regió factible l'obtindrem passant la semi-recta tal que sigui tangent a la hipèrbola del conjunt assolible. Aquest punt tangent és anomenat com la **cartera de mercat** i la semi-recta és anomenada la **línia del mercat de capitals**.



La cartera de variància mínima (MVP), la cartera de mercat (MP), i la línia del mercat de capitals (CML).

Teorema 2.24. *Les ponderacions de la cartera de mercat són* $\boldsymbol{m} = (w, 1-w)$, *amb*

$$w = \frac{c}{c+d}, \qquad 1-w = \frac{d}{c+d},$$

on

$$c = \sigma_2^2(\mu_1 - R) - \sigma_{12}(\mu_2 - R),$$
$$d = \sigma_1^2(\mu_2 - R) - \sigma_{12}(\mu_1 - R).$$

Demostració: Denotem en una cartera $(w, 1-w)$ *la mitjana com* $\mu(w)$ *i la desviació típica com* $\sigma(w)$. *Optimitzarem el pendent de la semi-recta tangent:*

$$s(w) = \frac{\mu(w) - R}{\sigma(w)}.$$

Aleshores, farem el càlcul de $s'(w)$ *i resoldrem la equació* $s'(w) = 0$. *Tenim:*

$$s'(w) = \frac{\mu'(w)\sigma(w) - (\mu(w) - R)\sigma'(w)}{\sigma^2(w)}.$$

Per tant, l'equació $s'(w) = 0$ *es redueix a:*

$$\mu'(w)\sigma(w) - (\mu(w) - R)\sigma'(w) = 0,$$

això és

$$(\mu_1 - \mu_2)(w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{12}) - 2(w\mu_1 + (1-w)\mu_2 - R)(w\sigma_1^2 - (1-w)\sigma_2^2 + (1-2w)\sigma_{12}) = 0.$$

Aïllant w, *obtenim el resultat que volíem demostrar.* □

2.3 Carteres de múltiples actius

Per poder estudiar les carteres de múltiples actius, donarem algunes definicions sobre funcions diferenciables a $\mathbb{R}^n$ per $n \geq 1$.

Observació 2.25. Necessitem resoldre el problema de minimització restringit; això és trobar

$$min f(v),$$
$$si \quad g(v) = 0,$$

$$on \qquad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$
$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k.$$

Utilitzarem la següent notació pel vector $g(v)$ que pren valors a $\mathbb{R}^k$ com:

$$g(v) = (g_1(v), \ldots, g_k(v)).$$

Definició 2.26. *Definim la* ***matriu Jacobiana*** *de dimensions $k \times n$, que denotarem com $g'(v)$ com*

$$g'(v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(v) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(v) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(v) & \ldots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n}(v) \end{bmatrix}.$$

També direm que $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ és ***contínuament diferenciable*** *si cada element de la matriu Jacobiana és una funció contínua.*

Definició 2.27. *Direm que el* ***gradient*** *de la funció $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és el vector:*

$$\nabla f(v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(v) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(v) \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.28. ***(Teorema de la funció implícita)***
Considerem $n > k$ i una funció contínuament diferenciable

$$g = (g_1, \ldots, g_k) : \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k.$$

Suposem que en un punt $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ tenim

$$g(x^*, y^*) = \boldsymbol{0},$$

i la matriu $\frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)$ és invertible. Aleshores existeix un entorn $U \times V \subset \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ de (x^*, y^*) i una funció contínuament diferenciable

$$h : U \to V,$$

tal que

$$g(x, h(x)) = \boldsymbol{0} \quad \forall x \in U$$

A més, per tot $v \in U \times V$, si $g(v) = \boldsymbol{0}$, aleshores $v = (x, h(x))$ per algun $x \in U$.

Teorema 2.29. *Si v^* és una solució del problema de minimització i $g'(v^*)$ és una matriu de rang k, aleshores existeixen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tals que*

$$\nabla f(v^*) - (\lambda_1 \nabla g_1(v^*) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(v^*)) = \boldsymbol{0}.$$

Demostració: Com que $g'(v)$ és de rang k, aleshores existeix un vector k-dimensional $\boldsymbol{y}$ tal que $\frac{\partial g}{\partial y}(v^*)$ és invertible. Pel teorema de la funció implícita, sabem que existeix una funció h tal que

$$g(x, h(x)) = \boldsymbol{0}.$$

Per hipòtesi, $v^* = (x^*, y^*)$ és una solució del problema de minimització. Per tant, x^* és el mínim de $f(x, h(x))$ i $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, h(x^*)) = 0$. Novament, pel teorema de la funció implícita tenim:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x}(v^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(v^*)h'(x^*) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(v^*) - \frac{\partial f}{\partial y}(v^*)(\frac{\partial g}{\partial y}(v^*))^{-1} \ \frac{\partial g}{\partial x}(v^*). \end{aligned}$$

Definint la matriu Λ de dimensió $1 \times k$ com

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial y}(v^*)(\frac{\partial g}{\partial y}(v^*))^{-1}.$$

Amb això, obtenim el resultat desitjat. □

Definició 2.30. *La tira de nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ del teorema anterior es defineixen com els* ***multiplicadors de Lagrange*** *i la funció*

$$L(v) = \nabla f(v) - (\lambda_1 \nabla g_1(v) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(v))$$

és el ***Lagrangià*** *del problema de minimització restringit.*

Definició 2.31. *Per a una funció $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definim la* ***matriu Hessiana*** *com*

$$H(f, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(v) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(v) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(v) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(v) \end{bmatrix}.$$

Una funció és ***doblement contínuament diferenciable*** *si tots els elements de la matriu Hessiana són funcions contínues.*

Teorema 2.32. *Suposem que una funció $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és doblement contínuament diferenciable, i per qualsevol $v \in \mathbb{R}^n$ la Hessiana $H(f, v)$ és una matriu semidefinida positiva, és a dir,*

$$w^T H(f, v) w \geq 0,$$

per tot $w \in \mathbb{R}^n$. Suposem també que

$$g(v) = Av - c,$$

on A és una matriu $k \times n$ i $c \in \mathbb{R}^k$. Si podem trobar una seqüència de nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ i un punt $v^* \in \mathbb{R}^n$ que satisfà $\nabla f(v^*) - (\lambda_1 \nabla g_1(v^*) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(v^*)) = \mathbf{0}$, aleshores v^* és la solució del problema de minimització.

Demostració:

Suposem que existeix $v \in \mathbb{R}^n$ que satisfà $g(v) = 0$. Hem de demostrar que

$$f(v) \geq f(v^*).$$

Com que $g(v) = Av - c$, utilitzant la notació $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ podem escriure

$$\lambda_1 \nabla g_1(v^*) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(v^*) = A^T \ \boldsymbol{\lambda}.$$

Sigui $w = v - v^*$. Com que $g(v) = \boldsymbol{0}$ i $g(v^*) = \boldsymbol{0}$, utilitzant la linealitat de A obtenim

$$\boldsymbol{0} = g(v) = g(v^* + w) = Av^* + Aw - c = g(v^*) + Aw = Aw.$$

Per la fórmula de Taylor:

$$f(v^* + w) = f(v^*) + \nabla f(v^*)w + \frac{1}{2}w^T H(f, \epsilon)w,$$

per algun punt ϵ en el segment que uneix v^* i $v^* + w$. Ara podem calcular:

$$\begin{aligned}
f(v) &= f(v^* + w) \\
&= f(v^*) + \nabla f(v^*)w + \frac{1}{2}w^T H(f, \epsilon)w \\
&= f(v^*) + A^T \ \boldsymbol{\lambda} w + \frac{1}{2}w^T H(f, \epsilon)w \\
&= f(v^*) + \ \boldsymbol{\lambda}^T Aw + \frac{1}{2}w^T H(f, \epsilon)w \\
&= f(v^*) + \frac{1}{2}w^T H(f, \epsilon)w \\
&\geq f(v^*).
\end{aligned}$$

Per tant, hem demostrat que v^* és un mínim global. □

Amb aquestes eines, ara començarem a parlar de carteres de múltiples actius. El nostre objectiu és trobar la cartera que té la mínima variància com hem fet a la secció anterior amb dos actius. La manera de trobar-ho amb n actius serà un estudi semblant el que hem fet amb dos actius utilitzant el mètode del multiplicadors de Lagrange.

Definició 2.33. *Definim una **cartera de n actius diferents** com el vector de les ponderacions*

$$w = (w_1, \ldots, w_n),$$

amb $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$. Si posem que $\boldsymbol{1} = (1, \ldots, 1)$, la condició de la suma es pot escriure com

$$w^T \boldsymbol{1} = 1.$$

Observació 2.34. Així com en el cas de carteres de dos actius, el **conjunt assolible** és el conjunt de tots els vector de ponderació w que satisfà $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$. També serà necessari que $w_j \geq 0, \ \ 1 \leq j \leq n$ ja que no volem carteres en negatiu. Per tant, el conjunt assolible serà:

$$\{w : w^T \mathbf{1} = 1, w_j \geq 0, 1 \leq j \leq n\}.$$

Observació 2.35. També podem describir una cartera de n components amb el vector

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

on tenim la següent relació amb les ponderacions:

$$w_j = \frac{x_j S_j(0)}{V(0)}, \qquad j = 1, \dots, n.$$

on x_j és el nombre d'accions de l'actiu j, $S_j(0)$ és el preu inicial de l'actiu j i $V(0)$ és el total de diners invertit.

Definició 2.36. *Anomenem les rendibilitats en els actius com $K_1, \dots, K_n$ i els vectors de les rendibilitats mitjanes com*

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$$

amb $\mu_j = \mathbb{E}(K_j)$, per $j = 1, \dots, n$. Escriurem

$$K_w = \sum_{j=1}^{n} w_j K_j.$$

*Amb tot això, definirem la **matriu de covariances** de dimensions $n \times n$ com*

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix},$$

on $\sigma_{jk} = Cov(K_j, K_k)$; en particular, $\sigma_{jj} = \sigma_j^2 = Var(K_j)$.

Teorema 2.37. *La mitjana d'una cartera de n actius $\mu_w = \mathbb{E}(K_w)$ i la variància $\sigma_w^2 = Var(K_w)$ són donats per les fórmules*

$$\mu_w = \boldsymbol{w}^T \ \boldsymbol{\mu},$$
$$\sigma_w^2 = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{w}.$$

Demostració: Ho demostrarem a partir de les definicions i de propietats de l'esperança matemàtica:

$$\mu_w = \mathbb{E}(K_w) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j K_j\right) = \sum_{j=1}^{n} w_j \mathbb{E}(K_j) = \sum_{j=1}^{n} w_j \mu_j = w^T \boldsymbol{\mu}.$$

Aquí utilitzarem la bilinealitat de la covariància:

$$\begin{aligned} \sigma_w^2 &= Var(K_w) \\ &= Cov(K_w, K_w) \\ &= Cov\left(\sum_{j=1}^{n} w_j K_j, \sum_{j=1}^{n} w_j K_j\right) \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} w_j w_k \sigma_{jk} \\ &= w^T C w. \end{aligned}$$

$\square$

Observació 2.38. Una vegada vist algunes coses bàsiques, ara ens centrarem en donar la fórmula de les ponderacions de la cartera amb la variància més petita, coneguda com la **cartera de mínima variància**.
Abans d'això, necessitarem un lema tècnic.

Lema 2.39. *Tenim les següents igualtats pels gradients calculats respecte de w:*

$$\begin{aligned}\nabla(w^T\boldsymbol{\mu}) &= \boldsymbol{\mu},\\ \nabla(w^T\boldsymbol{1}) &= \boldsymbol{1},\\ \nabla(w^TCw) &= 2Cw\end{aligned}$$

i la Hessiana de w^TCw és igual a $2C$.

Demostració: Com que

$$\frac{\partial}{\partial w_i}(w^T\boldsymbol{\mu}) = \frac{\partial}{\partial w_i}(w_1\mu_1 + \cdots + w_n\mu_n) = \mu_i,$$

aleshores

$$\nabla(w^T\boldsymbol{\mu}) = \begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial w_1}(w^T\boldsymbol{\mu})\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial w_n}(w^T\boldsymbol{\mu})\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{bmatrix} = \boldsymbol{\mu}.$$

*La demostració de la segona fórmula segueix el mateix argument, utilitzant **1** en comptes de $\boldsymbol{\mu}$.*

Observem que

$$\frac{\partial}{\partial w_i}(w^TCw) = \frac{\partial}{\partial w_i}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} w_j w_k \sigma_{jk}$$

la derivada de cada terme pot no ser 0 només si $j = i$ o $k = i$. Això significa

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial w_i}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} w_j w_k \sigma_{jk}\\ &= \frac{\partial}{\partial w_i}\left(w_i w_i \sigma_{ii} + \sum_{j=i}\sum_{k\neq i} w_j w_k \sigma_{jk} + \sum_{j\neq i}\sum_{k=i} w_j w_k \sigma_{jk}\right)\\ &= 2w_i\sigma_{ii} + \sum_{k\neq i} w_k\sigma_{ik} + \sum_{j\neq i} w_j\sigma_{ji}\\ &= 2\sum_{k=1}^{n} w_k\sigma_{ik} \qquad (3)\\ &= 2(Cw)_i,\end{aligned}$$

on $(Cw)_i$ és la i-coordenada del vector Cw.

Utilitzant (3), es pot calcular:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_l}\frac{\partial}{\partial w_i}(w^TCw) &= \frac{\partial}{\partial w_l}\left(2\sum_{k=1}^{n} w_k\sigma_{ik}\right)\\ &= 2\sigma_{il} = 2\sigma_{li}.\end{aligned}$$

Per tant

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial w_l \partial w_i}(w^T C w)\right)_{i,l\leq n} = (2\sigma_{li})_{i,l\leq n} = 2C.$$

$\square$

Teorema 2.40. *La cartera que té la variància més petita en el conjunt assolible té les ponderacions:*

$$w_{min} = \frac{C^{-1}\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{1}^T C^{-1}\boldsymbol{1}}$$

Demostració: Necessitem trobar el mínim de $w^T C w$ *sabent que*

$$w^T\boldsymbol{1} = 1.$$

Per poder demostrar-ho, utilitzarem el mètode dels multiplicadors de Lagrange agafant la funció Lagrangiana

$$L(w) = \nabla(w^T C w) - \nabla(\lambda(\boldsymbol{1}^T w - 1))$$

Gràcies al Lema 2.39*, obtenim:*

$$L(w) = 2Cw - \lambda\boldsymbol{1} = 0.$$

on, aïllant w*, tenim*

$$w = \frac{\lambda}{2}C^{-1}\boldsymbol{1}.$$

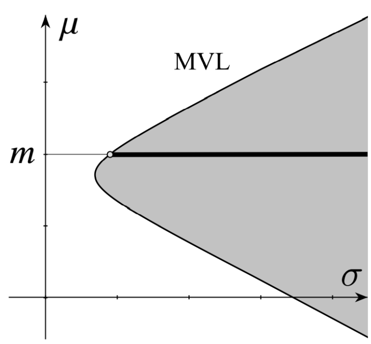
Substituïnt això en la condició que $w^T\boldsymbol{1} = 1$*:*

$$1 = w^T\boldsymbol{1} = \boldsymbol{1}^T w = \frac{\lambda}{2}\boldsymbol{1}^T C^{-1}\boldsymbol{1}.$$

Aïllant λ *i substituïnt-lo a l'equació* $w = \frac{\lambda}{2}C^{-1}\boldsymbol{1}$*, ens dona el resultat desitjat. Pel Lema* 2.39 *també, sabem que la Hessiana de* $w^T C w$ *és* $2C$*, que és semidefinida positiva i, per tant, pel Teorema* 2.32*, obtenim que* w_{min} *és un mínim global.* $\square$

Observació 2.41. Per trobar la frontera eficient, que és el conjunt de carteres eficients entre totes les carteres possibles, hem d'eliminar les carteres dominades. Amb aquesta finalitat fixem un nivell de mitjana esperada, que la denotarem per m, i considerem totes les carteres amb $\mu_w = m$. Tots aquests són redundants excepte el que té la variació més petita. La família d'aquestes carteres, parametritzades per m s'anomena **línia de variància mínima** (MVL).
Més formalment, les carteres sobre la línia de variància mínima són solució del següent problema:

$$min \;\; w^T C w, \qquad si \;\; w^T\boldsymbol{\mu} = m \;\; i \;\; w^T\mathbf{1} = 1.$$



Teorema 2.42. *Sigui M una matriu 2×2 tal que*

$$M = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^T C^{-1} \boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\mu}^T C^{-1} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{\mu}^T C^{-1} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1}^T C^{-1} \boldsymbol{1} \end{bmatrix}.$$

Si C i M són invertibles, aleshores la solució del problema de la línia de variància mínima es donat per

$$w = \frac{1}{det(M)} C^{-1}(det(M_1)\boldsymbol{\mu} + det(M_2)\boldsymbol{1}),$$

on

$$M_1 = \begin{bmatrix} m & \mu^T C^{-1} \boldsymbol{1} \\ 1 & \boldsymbol{1}^T C^{-1} \boldsymbol{1} \end{bmatrix}, \qquad M_2 = \begin{bmatrix} \mu^T C^{-1} \mu & m \\ \mu^T C^{-1} \boldsymbol{1} & 1 \end{bmatrix}.$$

Demostració: Introduïm el multiplicador de Lagrange $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, i el Lagrangià

$$L(w) = \nabla(w^T C w) - \lambda_1 \nabla(w^T \mu - m) + \lambda_2 \nabla(w^T \boldsymbol{1} - 1) = 0.$$

Utilitzant el Lema 2.39, podem calcular-ho:

$$L(w) = 2Cw - \lambda_1 \mu - \lambda_2 \boldsymbol{1} = 0.$$

Resolent aquest sistema per w, obtenim

$$w = \frac{\lambda_1}{2} C^{-1} \mu + \frac{\lambda_2}{2} C^{-1} \boldsymbol{1}.$$

Sabent que $w^T \mu = \mu^T w$ i $w^T \boldsymbol{1} = \boldsymbol{1}^T w$, substituïnt w a les condicions del problema de la línia de variància mínima, obtenim un sistema d'equacions lineal d'incògnites λ_1, λ_2:

$$\frac{1}{2}\lambda_1 \mu^T C^{-1} \mu + \frac{1}{2}\lambda_2 \mu^T C^{-1} \boldsymbol{1} = m,$$
$$\frac{1}{2}\lambda_1 \boldsymbol{1}^T C^{-1} \mu + \frac{1}{2}\lambda_2 \boldsymbol{1}^T C^{-1} \boldsymbol{1} = 1.$$

Resolent el sistema, com que $det(M) \neq 0$, aleshores

$$\frac{1}{2}\lambda_1 = \frac{det(M_1)}{det(M)}, \qquad \frac{1}{2}\lambda_2 = \frac{det(M_2)}{det(M)}.$$

Com que, com abans, la Hessiana de $w^T C w$ és $2C$, que és una matriu semidefinida positiva, aleshores pel Teorema 2.32, aquesta w és un mínim global. □

Corol·lari 2.43. *Existeixen dos vectors $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$, que només depenen de C i de μ, tals que per algun nombre real m, la solució del problema de la línia de variància mínima és*

$$w = m\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}.$$

Demostració: Com que

$$det(M_1) = m \boldsymbol{1}^T C^{-1} \boldsymbol{1} - \mu^T C^{-1} \boldsymbol{1},$$
$$det(M_2) = \mu^T C^{-1} \mu - m \mu^T C^{-1} \boldsymbol{1},$$

pel Teorema 2.42 *obtenim que* $w = m\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ *amb*

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{det(M)} C^{-1}((\boldsymbol{1}^T C^{-1} \boldsymbol{1})\mu - (\mu^T C^{-1} \boldsymbol{1})\boldsymbol{1}),$$
$$\boldsymbol{b} = \frac{1}{det(M)} C^{-1}((\mu^T C^{-1} \mu)\boldsymbol{1} - (\mu^T C^{-1} \boldsymbol{1})\mu).$$

□

Corol·lari 2.44. *Suposem que* w_1 *i* w_2 *són dues carteres sobre la línia de variància mínima amb* $\mu_{w_1} \neq \mu_{w_2}$*. Aleshores, qualsevol cartera* w *sobre la línia de variància mínima es pot obtenir a partir de* w_1, w_2*, és a dir, que existeix un nombre real* α *tal que* $w = \alpha w_1 + (1-\alpha) w_2$*.*

Demostració: Primer trobarem $\alpha \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\mu_w = \alpha \mu_{w_1} + (1-\alpha)\mu_{w_2}.$$

Això és possible ja que $\mu_{w_1} \neq \mu_{w_2}$*:*

$$\alpha = \frac{\mu_w - \mu_{w_2}}{\mu_{w_1} - \mu_{w_2}}.$$

També tenim per hipòtesi que, gràcies al Corol·lari 2.43*:*

$$w_1 = \mu_{w_1} \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b},$$
$$w_2 = \mu_{w_2} \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}.$$

Per tant,

$$\alpha w_1 + (1-\alpha) w_2 = (\alpha \mu_{w_1} + (1-\alpha)\mu_{w_2})\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \mu_w \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b},$$

però com que w *és també sobre la línia de variància mínima aleshores* $w = \mu_w \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. □

Teorema 2.45. *Suposem que existeixen dues carteres* w_1 *i* w_2 *sobre la línia de variància mínima amb diferents mitjanes esperades:* $\mu_{w_1} \neq \mu_{w_2}$*. Aleshores la línia de variància mínima és una hipèrbola centrada en l'eix vertical.*

Demostració:

Siguin K_{w_1} *i* K_{w_2} *les rendibilitats de les carteres* w_1 *i* w_2*, respectivament. Del corol·lari anterior, sabem que qualsevol cartera sobre la línia de variància mínima es pot expressar com*

$$w = \alpha w_1 + (1-\alpha) w_2.$$

Per tant, la rendibilitat de w *és igual a*

$$K_w = \alpha K_{w_1} + (1-\alpha) K_{w_2}.$$

Aplicant els resultats demostrats per carteres de dos actius, sabem que

$$\mu_w = \alpha \mu_{w_1} + (1-\alpha)\mu_{w_2},$$
$$\sigma_w^2 = \alpha^2 \sigma_{w_1}^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_{w_2}^2 + 2\alpha(1-\alpha) Cov(K_{w_1}, K_{w_2}).$$

Com que $\mu_{w_1} \neq \mu_{w_2}$*, pel Teorema* 2.20*, la corba* (σ_w, μ_w) *és una hipèrbola.* □

Observació 2.46. Per últim calcularem la cartera de mercat, que és la cartera òptima en la frontera eficient tenint en compte l'existència d'un actiu sense risc.
En l'apartat de les carteres de dos actius, vam trobar la fórmula de la cartera de mercat en el cas de dos actius que determinen la frontera eficient. Ara derivarem la fórmula de nou; aquesta vegada, com que es tracta de carteres de n actius, utilitzarem els n actius.

Teorema 2.47. *Si la rendibilitat sense risc R és més petita que la mitjana esperada de la cartera de mínima variància, aleshores la cartera de mercat exiteix i ve donada per la fórmula*

$$\boldsymbol{m} = \frac{C^{-1}(\mu - R\boldsymbol{1})}{\boldsymbol{1}^T C^{-1}(\mu - R\boldsymbol{1})}.$$

Demostració: Del teorema anterior, sabem que la línia de mínima variància és una hipèrbola. Com que el seu centre és l'eix vertical, existeix un únic punt de tangència de la semi-recta que comença des de $(0, R)$, la qual maximitza el pendent. El pendent és de la forma

$$\frac{\mu_w - R}{\sigma_w} = \frac{w^T\mu - R}{\sqrt{w^T C w}},$$

on w són les ponderacions d'una cartera i R és la rendibilitat sense risc.
En el pendent màxim, el Lagrangià

$$L(w) = \nabla\left(\frac{w^T\mu - R}{\sqrt{w^T C w}}\right) - \lambda\nabla(w^T\boldsymbol{1} - 1),$$

ha de ser igual a 0. Utilitzant el Lema 2.39:

$$L(w) = \frac{\mu\sqrt{w^T C w} - (w^T\mu - R)\frac{1}{2\sqrt{w^T C w}}2Cw}{w^T C w} - \lambda\boldsymbol{1} = \boldsymbol{0}.$$

Simplificant termes, obtenim

$$\mu\sigma_w - (\mu_w - R)\frac{Cw}{\sigma_w} - \lambda\sigma_w^2\boldsymbol{1} = \boldsymbol{0},$$

per tant,

$$\frac{\mu_w - R}{\sigma_w^2}Cw = \mu - \lambda\sigma_w\boldsymbol{1}.$$

Multiplicant per w^T per la esquerra i utilitzant que $w^T\boldsymbol{1} = 1$ obtenim

$$\frac{\mu_w - R}{\sigma_w^2}w^T C w = \mu_w - \lambda\sigma_w,$$

i aleshores

$$\lambda = \frac{R}{\sigma_w}.$$

Per tant, tenim la següent equació

$$\gamma C w = \mu - R\boldsymbol{1}$$

on $\gamma = \frac{\mu_w - R}{\sigma_w^2}$. Passant C a l'altre costat:

$$\gamma w = C^{-1}(\mu - R\boldsymbol{1}).$$

Per obtenir γ, multipliquem per $\boldsymbol{1}^T$ l'equació de dalt, que ens dona

$$\gamma = \boldsymbol{1}^T C^{-1}(\mu - R\boldsymbol{1}).$$

□

Observació 2.48. La línia que uneix l'actiu sense risc representada per $(0, R)$ i la cartera de mercat amb coordenades (σ_m, μ_m) és donada per l'equació

$$\mu = R + \frac{\mu_m - R}{\sigma_m}\sigma.$$

Aquesta línia és anomenada **línia de mercat de capitals** (CML) i, per a una cartera sobre CML amb risc σ, el terme $\frac{\mu_m - R}{\sigma_m}\sigma$ és anomenat **prima de risc**.

Amb tot això, tenim les eines necessàries per a poder enunciar i demostrar el nostre objectiu, que és el **model CAPM**, que estudiarem en la següent secció.

2.4 El model CAPM

En aquesta secció donarem la fórmula de CAPM per la rendibilitat esperada d'un actiu arriscat. Per fer això, necessitem la següent definició.

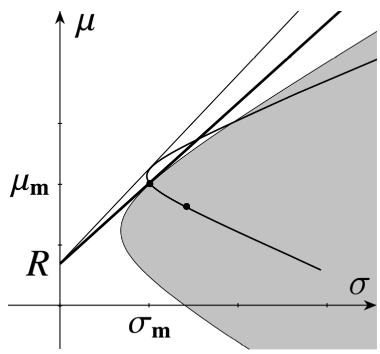
Definició 2.49. *Denotarem*

$$\beta_i = \frac{Cov(K_i, K_m)}{\sigma_m^2}$$

*el **factor beta** de l'actiu i-éssima, que existeix la cartera de mercat* $\boldsymbol{m}$*.*

Teorema 2.50. ***CAPM***
Suposem que la rendibilitat sense risc R és més petita que la rendibilitat esperada de la cartera de variància mínima (tal que existeix la cartera de mercat $\boldsymbol{m}$). Aleshores, per cada $i \leq n$, la rendibilitat esperada μ_i del i-éssim actiu de la cartera ve donada per la fórmula

$$\mu_i = R + \beta_i(\mu_m - R).$$



La manca de tangències per a carteres construïdes a partir d'un actiu i la cartera de mercat condueix a carteres amb un pendent més elevat que el de la cartera de mercat.

Demostració:
Com ja sabem, la línia del mercat de capitals (CML) és tangent a la línia de variància mínima (MVL) en el punt de la cartera de mercat (σ_m, μ_m). Considerem totes les carteres construïdes mitjançant la cartera de mercat i l'actiu i-éssim. Aquestes carteres, com ja sabem, formen una hipèrbola tal que afirmem que és tangent a CML en el punt (σ_m, μ_m). Si suposem el contrari, aquesta hipèrbola tallaria la CML, i per tant arribaríem a contradicció ja que el pendent de CML és maximal.
Per demostrar la fórmula, calcularem la recta tangent a la hipèrbola en el punt (σ_m, μ_m) i utilitzarem el fet que el pendent de CML és el mateix. Denotem la proporció de diners invertits en l'actiu i com x i invertit en la cartera de mercat com $1-x$. Sigui $\boldsymbol{x} = (x, 1-x)$. Amb això, tenim que el risc i la mitjana són de la forma:

$$\begin{aligned}
\mu_x &= x\mu_i + (1-x)\mu_m, \\
\sigma_x &= \sqrt{x^2\sigma_i^2 + (1-x)^2\sigma_m^2 + 2x(1-x)Cov(K_i, K_m)},
\end{aligned}$$

i calculem les seves derivades amb respecte de x en el punt $x = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mu_x}{\partial x}(0) &= \mu_i - \mu_m, \\
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}(0) &= \frac{Cov(K_i, K_m) - \sigma_m^2}{\sigma_m}.
\end{aligned}$$

El pendent de la tangent és el quocient d'aquestes derivades i l'igualarem al pendent de CML:

$$\frac{\mu_i - \mu_m}{\frac{Cov(K_i, K_m) - \sigma_m^2}{\sigma_m}} = \frac{\mu_m - R}{\sigma_m}.$$

Resolent per μ_i, obtenim la fórmula desitjada:

$$\mu_i = R + \frac{Cov(K_i, K_m)}{\sigma_m^2}(\mu_m - R) = R + \beta_i(\mu_m - R).$$

□

Observació 2.51. El terme $\beta_i(\mu_m - R)$ de la fórmula CAPM és anomenat **prima de risc**, que representa la rendibilitat addicional requerida per un inversor que s'enfronta al risc representat per la unió de la cartera amb tot el mercat.
Podem definir, per a una cartera $\boldsymbol{w}$

$$\beta_w = \frac{Cov(K_w, K_m)}{\sigma_m^2}.$$

Amb aquesta definició, podem presentar una alternativa al teorema anterior posant en context d'una cartera en general i no només d'un actiu.

Teorema 2.52. *Suposem que la rendibilitat sense risc R és més petita que la rendibilitat esperada de la cartera de variància mínima (tal que existeix la cartera de mercat $\boldsymbol{m}$). Aleshores per qualsevol cartera $\boldsymbol{w}$*

$$\mu_w = R + \beta_w(\mu_m - R).$$

Demostració:
Del Teorema 2.47, sabem que

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{\gamma}C^{-1}(\mu - R\boldsymbol{1}),$$

amb $\gamma = \mathbf{1}^T C^{-1}(\mu - R\mathbf{1})$*. Ara utilitzarem la definició de* β_w*:*

$$\beta_w = \frac{Cov(K_w, K_m)}{\sigma_m^2} = \frac{w^T C \boldsymbol{m}}{\boldsymbol{m}^T C \boldsymbol{m}} = \frac{\frac{1}{\gamma} w^T(\mu - R\mathbf{1})}{\frac{1}{\gamma}\boldsymbol{m}^T(\mu - R\mathbf{1})}.$$

Com que $w^T\mu = \mu_w$*,* $\boldsymbol{m}^T\mu = \mu_m$ *i* $w^T\mathbf{1} = \boldsymbol{m}^T\mathbf{1} = 1$*, ens dona la fórmula desitjada*

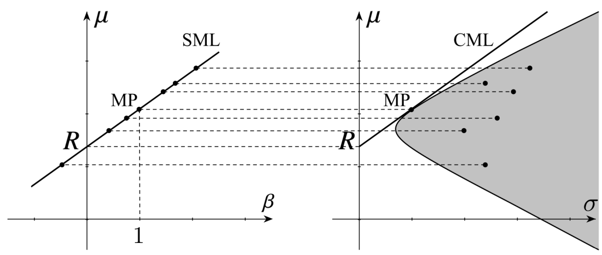
$$\beta_w = \frac{\mu_w - R}{\mu_m - R}.$$

□

Observació 2.53. Del Teorema (2.52), observem que en el pla (β, μ), totes les carteres són a la recta

$$\mu = R + \beta(\mu_m - R).$$

La gràfica d'aquesta funció és anomenada **la línia del mercat de seguretat**.



Línia del mercat de seguretat (SML) i la línia del mercat de capitals (CML).

Observació 2.54. Aquesta fórmula de CAPM pot ser utilitzada per fer decisions d'inversió, que és l'objectiu principal d'aquest estudi. Anomenarem la rendibilitat de la fórmula de CAPM com **rendibilitat requerida**. Cada inversor té la decisió de buscar allò que li convingui. Si per un actiu donat un inversor pensa, degut a que té informació addicional, que el veritable retorn esperat és més gran que la rendibilitat requerida,

$$\mu_i > R + \beta_i(\mu_m - R),$$

això significa que l'actiu és poc valorat. Per tant, sabent això, aquest inversor hauria de invertir en l'actiu. Si més inversors comparteixen la mateixa opinió, faran el mateix i, com a resultat de la demanda creada, el preu pujarà, la qual cosa forçarà que la rendibilitat esperada baixi.

Si passès el contrari, si

$$\mu_i < R + \beta_i(\mu_m - R),$$

aleshores els inversors volen vendre, el preu caurà per excés d'oferta i el retorn esperat pujarà. En ambdós casos, s'haurien d'observar els ajustos de preus que restableixen la fórmula CAPM a un equilibri.

Definició 2.55. *Definim l'error* e_w *com una variable aleatòria definida com*

$$e_w = K_w - [R + \beta_w(K_m - R)].$$

Observació 2.56. De la fórmula CAPM, observem que

$$\mathbb{E}(e_w) = \mu_w - [R + \beta_w(\mu_m - R)] = 0.$$

És interessant observar que la variància d'aquest error es minimitza amb un terme de la forma del coeficient beta.

Proposició 2.57. *Donada una cartera w, definim $e_w = K_w - R - \beta(K_m - R)$ per algun nombre β. La variància de e_w és mínima per $\beta = \frac{Cov(K_w, K_m)}{Var(K_m)}$.*
Demostració:

$$\begin{aligned} Var(e_w) &= Var(K_w - R - \beta(K_m - R)) \\ &= Var(K_w - \beta K_m) \\ &= Var(K_w) + Var(-\beta K_m) + 2Cov(K_w, -\beta K_m) \\ &= Var(K_w) + \beta^2 Var(K_m) - 2\beta Cov(K_w, K_m). \end{aligned}$$

Això és una funció de β amb un coeficient positiu β^2. El mínim és, per tant:

$$0 = 2\beta Var(K_m) - 2Cov(K_w, K_m),$$

per tant

$$\beta = \frac{Cov(K_w, K_m)}{Var(K_m)}.$$

□

2.5 Funcions d'utilitat per al CAPM

En aquesta secció simplificarem l'anàlisi d'aconseguir més diners invertint restringint-nos en un espai mostral finit, per a què hi hagi N possibilitats que poden succeïr. Presentarem axiomes per a relacionar els vector N-dimensionals per representar les possibilitats de la seva riquesa final. Aquestes relacions són expressades en termes d'una funció en termes reals anomenada **utilitat**.

Observació 2.58. Algunes vegades ens interessarà identificar una variable aleatòria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ amb el vector $X = (X_1, \ldots, X_N) \in \mathbb{R}^N$ tal que $X_i = X(\omega_i)$. Recordem que la riquesa final $V_x(1)$ és una variable aleatòria determinada per la cartera escollida. A l'estat ω_i pren el valor

$$V_x(1, \omega_i) = \sum_{j=1}^{n} x_j S_j(1, \omega_i).$$

Definició 2.59. *Definim el* ***conjunt de consums factibles*** *(o FCS) com*

$$FCS = \{X \in \mathbb{R}^N | X_i \geq 0,\ X = V_x(1) \quad on \quad V_x(0) = V\}.$$

Assumim que l'inversor put decidir entre dues possibilitats final deL FCS, això és: donats $X, Y \in FCS$, escrivim $X \preceq Y$ si l'inversor prefereix Y a X.

Axioma 1 (transitivitat) Si $X \preceq Y$ i $Y \preceq Z$ aleshores $X \preceq Z$.

Axioma 2 (completitud) Per tot X, Y, o $X \preceq Y$ o $Y \preceq X$.

Definició 2.60. *Si els axiomes 1 i 2 es compleixen, aleshores diem que $\preceq$ és una* ***relació de preferència****.*

Definició 2.61. *Una funció $U : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ és una* ***utilitat*** *si és estrictament creixent per a cada variable, diferenciable i escrictament còncava. Utilitzant una utilitat U es pot definir la relació*

$$X \preceq_U Y \Longleftrightarrow U(X) \leq U(Y).$$

Definició 2.62. *Diem que $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és una* ***funció d'utilitat*** *si és estrictament creixent, diferenciable i estrictament còncava.*

Proposició 2.63. *Si $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és una funció d'utilitat, aleshores U definit per*

$$U(X) = \mathbb{E}(u(X))$$

és una utilitat.

Demostració:
Aquesta funció es pot escriure com

$$U(X) = \mathbb{E}(u(X)) = \sum_{i=1}^{N} p_i u(X_i),$$

amb $p_i > 0$ per tot $i = 1, \dots N$. La funció U és diferenciable ja que u és diferenciable; en particular

$$U'(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial X_1}(X) & \dots & \frac{\partial U}{\partial X_N}(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 u'(X_1) & \dots & p_N u'(X_N) \end{bmatrix}.$$

La funció U és estrictament creixent ja que u és estrictament creixent: com que $u'(x) > 0$ per tot $x \in \mathbb{R}$ i $p_i > 0$ per $i = 1, \dots, N$, aleshores

$$\frac{\partial U}{\partial X_i}(X) = p_i u'(X_i) > 0.$$

Com que u és estrictament còncava, és a dir, per qualsevol $x_1 \neq x_2$ i qualsevol $\lambda \in (0, 1)$

$$u(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) > \lambda u(x_1) + (1 - \lambda) u(x_2),$$

aleshores per qualsevol $X, Y \in \mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned} U(\lambda X + (1 - \lambda) Y) &= U(\lambda X_1 + (1 - \lambda) Y_1, \dots, \lambda X_N + (1 - \lambda) Y_N) \\ &= \sum_{i=1}^{N} p_i u(\lambda X_i + (1 - \lambda) Y_i) \\ &> \sum_{i=1}^{N} p_i [\lambda u(X_i) + (1 - \lambda) u(Y_i)] \\ &= \lambda U(X) + (1 - \lambda) U(Y). \end{aligned}$$

Per tant, U és estrictament còncava. $\square$

Definició 2.64. *Diem que una utilitat U és un* ***utilitat von Neumann-Morgenstern*** *si existeix una funció d'utilitat u tal que*

$$U(X) = \mathbb{E}(u(X)).$$

Un inversor vol maximitzar la seva utilitat, és a dir, cerca una solució al problema

$$max\{U(X) : X \in FCS\}$$

Necessitarem la noció d'arbitratge.

Definició 2.65. *Diem que una cartera $x = (x_1, \ldots, x_n)$ és una* ***oportunitat d'arbitratge*** *si $V_x(0) = 0$ i $V_x(1) \geq 0$ amb $V_x(1, \omega_i) > 0$ per almenys un $\omega_i \in \Omega$.*

Teorema 2.66. *Si existeix una solució al problema de maximització, aleshores no hi ha arbitratge. A la inversa, si U és contínua i no hi ha arbitratge, aleshores el problema de maximització té una solució.*

Demostració:
Suposem que hi ha un $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $V_{x^*}(1) \in FCS$ és una solució del problema de maximització, és a dir,

$$U(X) \leq U(V_{x^*}(1)), \qquad (1)$$

per tot $X \in FCS$. Suposem que existeix una oportunitat d'arbitratge y. Agafem $z = x^*+y$. Com que $V_y(0) = 0$ i $V_y(1, \omega_i) \geq 0$ per algun $\omega_i \in \Omega$,

$$V_z(0) = V_y(0) + V_{x^*}(0) = V_{x^*}(0) = V,$$

$$V_z(1, \omega_i) = V_y(1, \omega_i) + V_{x^*}(1, \omega_i) \geq V_{x^*}(1, \omega_i) \geq 0,$$

per tant z és factible. Sabem que $V_y(1, \omega_k) > 0$ per algun $\omega_k \in \Omega$, que implica

$$V_z(1, \omega_k) > V_{x^*}(1, \omega_k).$$

Això vol dir que com U és estrictament creixent en cada variable,

$$U(V_z(1)) > U(V_x(1)),$$

que contradiu (1). Per tant, no hi ha arbitratge.
Ara demostrarem el "recíproc".
El conjunt FCS, que és un subconjunt de $\mathbb{R}^N$, és tancat ja que U és contínua. Per tant, és suficient demostrar que FCS està acotat per trobar el màxim. Suposem lo contrari, és a dir, que existeix una successió x_k tal que $||V_{x_k}(1)|| \to \infty$ si $k \to \infty$. (On $||Z|| = max_{i \leq N}|z_i|$ per tot $Z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{R}^N$.) Sigui

$$C = \max_{j=1,\ldots,n \quad i=1,\ldots,N} |S_j(1, \omega_i)|.$$

Observem que per qualsevol $y = (y_1, \ldots, y_n)$ i qualsevol $i \leq N$,

$$|V_y(1, \omega_i)| = |\sum_{j=1}^{n} y_j S_j(1, \omega_i)| \leq C \max_{j=1,\ldots,n} |y_j|.$$

Això demostra que només podem tenir $||V_{x_k}(1)|| \to \infty$ quan $||x_k|| \to \infty$. La successió $z_k = \frac{x_k}{||x_k||}$ està acotada, per tant té una subsuccessió convergent a un límit z. Provarem que z és una oportunitat d'arbitratge, que ens proporciona la contradicció que estem buscant. Primer,

$$V_{z_k}(0) = \sum_{j=1}^{n} (z_k)_j S_j(0) = \frac{1}{||x_k||} \sum_{j=1}^{n} (x_k)_j S_j(0) = \frac{V}{||x_k||} \to 0,$$

aleshores $V_z(0) = 0$. Segon, per algun $\omega_i \in \Omega$

$$V_{z_k}(1, \omega_i) = \frac{1}{||x_k||} \sum_{j=1}^{n} (x_k)_j S_j(1, \omega_i) = \frac{1}{||x_k||} V_{x_k}(1, \omega_i) \geq 0$$

per la definició de FCS, ens dona

$$V_z(1, \omega_i) \geq 0.$$

Si tinguéssim $S(1)z = 0$, aleshores z hauria de ser igual a 0. Això no és possible ja que $||z|| = 1$. Per tant, significa que $V_z(1, \omega_i) > 0$ per algun $\omega_i \in \Omega$, provant que z és una oportunitat d'arbitratge. □

Definició 2.67. *Diem que $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_N)$ és el vector dels* ***preus fonamentals*** *si $\pi_i > 0$ per $i = 1, \ldots, N$, i*

$$S_j(0) = \sum_{i=1}^{N} \pi_i S_j(1, \omega_i).$$

Lema 2.68. *Per tot $x \in \mathbb{R}^n$*

$$V_x(0) = \sum_{i=1}^{N} \pi_i V_x(1, \omega_i).$$

Demostració:

$$\begin{aligned} V_x(0) &= \sum_{j=1}^{n} x_j S_j(0) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{N} \pi_i S_j(1, \omega_i) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \pi_i \sum_{j=1}^{n} x_j S_j(1, \omega_i) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \pi_i V_x(1, \omega_i). \end{aligned}$$

□

Observació 2.69. Suposem que un dels actius no té risc, això és, $S_1(1, \omega_i) = 1$ per tot i. Aleshores

$$S_1(0) = \frac{1}{1+R},$$

que és el preu d'una unitat de moneda segura (per exemple, l'euro) a rebre a temps 1, és a dir, és el factor de descompte. Per tant, s'ha de complir

$$\sum_{i=1}^{N} \pi_i = \frac{1}{1+R}.$$

Definició 2.70. *Diem que una probabilitat* Q

$$Q(\{\omega_i\}) = q_i \qquad \text{per } i = 1, \dots, N,$$

és una ***probabilitat neutral al risc*** *si per tot* $j \in \{1, \dots, n\}$

$$S_j(0) = \frac{1}{1+R}\mathbb{E}_Q(S_j(1)) = \frac{1}{1+R}\sum_{i=1}^{N} q_i S_j(1, \omega_i).$$

Definició 2.71. *Un model de mercat és* ***complet*** *si per qualsevol* $H : \Omega \to \mathbb{R}$*, existeix un* $x \in \mathbb{R}^n$ *tal que*

$$V_x(1) = H.$$

Teorema 2.72. *Suposem que* X^* *és una solució estrictament positiva del problema de maximització. Aleshores existeix un nombre* λ *tal que*

$$\pi_i = \lambda \frac{\partial U}{\partial X_i}(X^*)$$

són preus fonamentals.

Demostració:
Considerarem dos funcions $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, definits per:*

$$f(x) = U(V_x(1)),$$
$$g(x) = V_x(0) - V.$$

El problema de maximització és equivalent a resoldre

$$max\ f(x),$$
$$si\ \ g(x) = 0.$$

Sigui x^* *la solució del problema, que implica que* $X^* = V_x(1)$*. Pel mètode dels multiplicadors de Lagrange, existeix un* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\triangledown f(x^*) - \alpha \triangledown g(x^*) = 0.$$

La coordenada j*-éssima de* $\triangledown g$ *és*

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{k=1}^{n} x_k S_k(0) = S_j(0).$$

Sigui $(V_x(1))_i$ *la* i*-éssima coordenada del vector* N*-dimensional* $V_x(1)$*. Utilitzant la regla de la cadena obtenim*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_j} U(V_x(1)) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial X_i}(V_x(1)) \frac{\partial}{\partial x_j}(V_x(1))_i \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial X_i}(V_x(1)) \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k S_k(1, \omega_i)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial X_i}(V_x(1)) S_j(1, \omega_i),
\end{aligned}$$

per tant, com que $V_{x^*}(1) = X^*$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial X_i}(X^*) S_j(1, \omega_i).$$

Agafant $\lambda = \frac{1}{\alpha}$, *ens dona*

$$S_j(0) = \sum_{i=1}^{N} \lambda \frac{\partial U}{\partial X_i}(X^*) S_j(1, \omega_i).$$

Comparant amb la definició de preus fonamentals, veiem que per cada $i \leq N$,

$$\pi_i = \lambda \frac{\partial U}{\partial X_i}(X^*).$$

$\square$

Corol·lari 2.73. *En el cas particular que* $U(X) = \mathbb{E}(u(X))$, *els preus fonamentals són de la forma*

$$\pi_i = \lambda u'(X^*(\omega_i)) p_i.$$

Demostració:
Sabem que

$$U(X_1, \ldots, X_N) = \sum_{k=1}^{N} p_k u(X_k),$$

aleshores

$$\frac{\partial U}{\partial X_i}(X_1, \ldots, X_N) = u'(X_i) p_i,$$

i, per tant,

$$\frac{\partial U}{\partial X_i}(X^*) = u'(X^*(\omega_i) p_i,$$

que combinat amb la definició de preus fonamentals, ens proporciona el resultat. $\square$

Teorema 2.74. *Suposem que* $U(X) = \mathbb{E}(u(X))$. *Si* $X^* = (X_1^*, \ldots, X_N^*)$ *és una solució del problema de maximització, aleshores, amb* $(u')^{-1}$, *que és la funció inversa de la funció* u', *obtenim*

$$X_i^* = (u')^{-1} \frac{\pi_i}{\lambda p_i},$$

on λ *ve determinada per la condició*

$$V = \sum_{i=1}^{N} \pi_i (u')^{-1} \frac{\pi_i}{\lambda p_i}.$$

Demostració:
Com que $X^* = V_{X^*}(1)$, *pel Lema* 2.68

$$V = V_{X^*}(0) = \sum_{i=1}^{N} \pi_i V_{X^*}(1, \omega_i) = \sum_{i=1}^{N} \pi_i X^*(\omega_i).$$

Substituïnt això en l'equació de X_i^* *ens dona el resultat desitjat.* $\square$

Observació 2.75. El teorema anterior ens proporciona $N+1$ equacions amb $N+1$ incògnites. Per tant, aquest teorema ens dona l'eina necessària per trobar candidats per a la solució del problema de maximització. Cada solució depèn de com s'escullen els preus fonamentals. El cas que els preus fonamentals no estan únicament determinats, podem tenir solucions del teorema anterior que no són solucions del problema de maximització.

Exemple 2.76. Considerarem la funció d'utilitat $u(x) = ln(x)$. Aleshores, $u'(x) = \frac{1}{x}$ i $(u')^{-1}(y) = \frac{1}{y}$. Pel teorema anterior tenim

$$X^*(\omega_i) = \frac{\lambda p_i}{\pi_i},$$

i aquesta λ ve determinada per

$$V = \sum_{i=1}^{N} \pi_i \frac{\lambda p_i}{\pi_i} = \lambda.$$

Considerem un model trinomial amb un únic actiu de risc amb $S(0) = 100$ i preus futurs

$$S(1) = \begin{cases} S^u = S(0)(1+u) & \textit{amb probabilitat } \frac{1}{4}, \\ S^m = S(0)(1+m) & \textit{amb probabilitat } \frac{1}{2}, \\ S^d = S(0)(1+d) & \textit{amb probabilitat } \frac{1}{4}, \end{cases}$$

amb $u = 0.1$, $m = 0$ i $d = -0.1$. Considerem $V = 100$ i $R = 0$.
Per definició de preus fonamentals, tenim que

$$\begin{aligned} &S(0) = \pi_i S(0)(1+u) + \pi_2 S(0)(1+m) + \pi_3 S(0)(1+d), \\ &1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3. \end{aligned}$$

El sistema d'equacions admet infinites solucions:

$$\begin{aligned} \pi_1(x) &= x, \\ \pi_2(x) &= \frac{x(d-u)-d}{m-d}, \\ \pi_3(x) &= \frac{x(u-m)+m}{m-d}. \end{aligned}$$

Per a cada solució, podem calcular X^*. Per exemple, si $x = 0.1$, aleshores $\mathbb{E}(u(X^*)) = 4.83$ i per $x = 0.25$, tenim que $\mathbb{E}(u(X^*)) = 4.6$. Evidentment, per $x = 0.1$ em obtingut una utilitat esperada més alta, però X^* associat a $x = 0.1$ no és assolible mitjançant una cartera. En canvi, X^* per $x = 0.25$ és assolible, podent invertir V sense risc.
Veiem aleshores que no totes les solucions que ens proporciona el Teorema 2.74 són solució del problema de maximització.

El següent teorema ens permetrà relacionar la utilitat i el mètode de Markowitz. Suposem que tenim L inversors i cadascun d'ells està buscant una forma de maximitzar la seva pròpia utilitat esperada amb funcions d'utilitat de la forma

$$u_l(x) = a_l x - \frac{1}{2} b_l x^2,$$

on $a_l > 0$, $b_l > 0$ per $l = 1, \ldots, L$. Denotem per x_l^* la cartera òptima que serà escollida per l'inversor l.
Els valors de mercat presents i futurs són

$$M(0) = \sum_{l=1}^{L} V_{x_l^*}(0), \qquad \sum_{l=1}^{L} V_{x_l^*}(1).$$

Això és la riquesa total dels inversors en el mercat en els temps 0 i 1. Denotem el retorn de mercat com

$$K_m = \frac{M(1) - M(0)}{M(0)},$$

i el retorn sense risc com R.

Teorema 2.77. *Suposem que $M(0) \neq 0$ i $Var(K_m) \neq 0$. Aleshores la rendibilitat esperada en cada actiu satisfà*

$$\mathbb{E}(K_j) = R + \beta_j(\mathbb{E}(K_m) - R),$$

per $j = 1, \ldots, n$, on

$$\beta_j = \frac{Cov(K_j, K_m)}{Var(K_m)}.$$

Demostració:
Designarem l'actiu sense risc per l'índex $j = 1$ tal que $K_1 = R$. Per un inversor amb riquesa inicial V i la cartera x tenim

$$\begin{aligned} V_x(1) &= V(1 + K_w) \\ &= V\left(1 + \sum_{j=1}^{n} w_j K_j\right) \\ &= V\left(1 + \left(1 - \sum_{j=2}^{n} w_j\right) R + \sum_{j=2}^{n} w_j K_j\right). \end{aligned}$$

Si x_l^* és la cartera òptima de l'inversor l, i la riquesa inicial d'aquest inversor és $V_l = V_{x_l^*}(0)$, aleshores pel resultat d'abans, per $j = 2, \ldots, n$, les condicions de primer ordre per a un màxim ens dona

$$0 = \frac{\partial}{\partial w_j}\mathbb{E}[u_l(V_{x_l^*}(1))] = V_l \mathbb{E}[u_l'(V_{x_l^*}(1))(K_j - R)]. \tag{1}$$

Utilitzem la relació $Cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Com que Ω és finit:

$$Cov(u_l'(V_{x_l^*}(1)), K_j - R) = \mathbb{E}[u_l'(V_{x_l^*}(1))(K_j - R) - \mathbb{E}(u_l'(V_{x_l^*}(1)))\mathbb{E}(K_j - R).$$

Comparant amb (1), tenim

$$\mathbb{E}(u_l'(V_{x_l^*}(1)))\mathbb{E}(K_j - R) = -Cov(u_l'(V_{x_l^*}(1)), K_j - R).$$

Com $u_l'(x) = a_l - b_l x$, l'equació de dalt es pot escriure com

$$(a_l - b_l\mathbb{E}[V_{x_l^*}(1)])(\mathbb{E}[K_j] - R) = b_l Cov(V_{x_l^*}(1), K_j),$$

per tant

$$\left(\frac{a_l}{b_l} - \mathbb{E}[V_{x_l^*}(1)]\right)(\mathbb{E}[K_j] - R) = Cov(V_{x_l^*}(1), K_j).$$

Agafant

$$c = \sum_{l=1}^{L}\left(\frac{a_l}{b_l} - \mathbb{E}[V_{x_l^*}(1)]\right),$$

obtenim, sumant sobre l

$$\begin{aligned} c(\mathbb{E}[K_j] - R) &= \sum_{l=1}^{L} Cov(V_{x_l^*}(1), K_j) \\ &= Cov(M(1), K_j) \\ &= M(0)Cov(K_m, K_j). \end{aligned}$$

Sigui $m = (m_1, \ldots, m_n)$ *les ponderacions de la cartera de mercat, aleshores*

$$\begin{aligned} c(\mathbb{E}[K_m] - R) &= c(\mathbb{E}[m_1 K_1 + \cdots + m_n K_n] - R) \\ &= \sum_{j=1}^{n} c m_j (\mathbb{E}[K_j] - R) \\ &= \sum_{j=1}^{n} m_j M(0) Cov(K_m, K_j) \\ &= M(0)Cov(K_m, K_m) \\ &= M(0)Var(K_m). \end{aligned}$$

Com que $M(0) \neq 0$ *i* $Var(K_m) \neq 0$*, la igualtat de dalt implica que* $c \neq 0$*. Aleshores,*

$$\frac{\mathbb{E}[K_j] - R}{\mathbb{E}[K_m] - R} = \frac{Cov(K_m, K_j)}{Var(K_m)} = \beta_j.$$

□

Acabem de demostrar que podem connectar el criteri de variància mitjana per a l'optimitat de les carteres amb la utilitat esperada òptima si suposem que els inversors utilitzen funcions d'utilitat quadràtiques. Així, el teorema CAPM es pot considerar com una aproximació per a l'opció de cartera òptima.

3 Cas pràctic

En aquesta secció treballarem amb un cas pràctic real per a poder utilitzar el mètode de Markowitz i el model CAPM en el que hem estat treballant. He escollit treballar amb el mercat **IBEX35**, que és el principal índex borsari de referència de la borsa espanyola elaborat per borses i mercats espanyols.

Començarem presentant les dades que utilitzarem.

3.1 Context de les dades

Com he dit abans, treballarem amb el mercat de referència ÍBEX35 i amb les 35 empreses que cotitzen aquest mercat, que són les següents:

Acciona, Acerinox, ACS, Aena, Almirall, Amadeus It Group(Amadeus), Arcelormittal(Arcelor), Banco Sabadell (B Sabadell), Bankinter, BBVA, Caixabank, Cellnex Telecom, Cie.Automotive(Automotiv), Colonial, Enagas, Endesa, Ferrovial, Fluidrà, Grifols, IAG, Iberdrola, Inditex, Indra, Mapfre, Meliá Hotels(Melia HTLS), Merlin Prop.(Merlin), Naturgy, Red Eléctrica, Repsol, Rovi, Santander, Siemens Gamesa(Siemens), Solaria, Telefónica.

Com que hem vist que en el mètode de Markowitz s'utilitza el concepte de rendibilitat, gràcies a les dades que proporciona [3], he recopilat els diferents preus de tancament ajustats mensual i anualment de cada empresa des de gener de 2015 fins a desembre de 2017 per a fer l'estudi. Primer treballarem amb les rendibilitats mensuals ja que volem escollir unes 8 empreses d'aquestes 35 òptimament per a estalviar-nos feina.

Per a calcular, per exemple, la rendibilitat mensual de gener-2016 serà:

$$K_{gen16} = \frac{P_{gen16} - P_{des15}}{P_{des15}},$$

on P_{gen16} i P_{des15} són els preus de tancament ajustats de gener 2016 i de desembre 2015, respectivament.

A continuació, una vegada hem obtingut les diferents rendibilitats mensuals, calcularem la seva mitjana i la seva variància (i amb la variància, calcularem també la desviació típica). Un exemple d'aquest càlculs seria la següent taula:

DADES	IBEX35	ACCIONA	ACERINOX	ACS	AENA	ALMIRALL	AMADEUS
MITJANA	0,0156%	0,7149%	0,5203%	0,7408%	2,4186%	-1,0595%	1,7759%
VÀRIANCIA	0,2376%	0,4534%	0,9883%	0,5597%	0,3595%	1,0822%	0,2625%
D.TÍPICA	4,8739%	6,7333%	9,9412%	7,4814%	5,9962%	10,4030%	5,1235%

Mitjana, variància i desviació típica de les 6 primeres variables i del mercat de referència (ÍBEX35)

En el mètode de Markowitz i el model CAPM es vol treballar amb variables incorrelacionades. És per tant que s'ha de calcular la matriu de coeficient de correlació d'aquestes 35 empreses a partir de les dades que ja tenim.
Amb la funció Excel "Anàlisi de dades", calculem la matriu desitjada (matriu sencera en

l'Annex). Com que la matriu de coeficient de correlació és simètrica, és suficient donar els elements de la matriu sota la diagonal.

COEF COREL	ACCIONA	ACERINOX	ACS	AENA
ACCIONA	1			
ACERINOX	0,42186042	1		
ACS	0,67575096	0,50976357	1	
AENA	0,54378576	0,28168787	0,4072726	1
ALMIRALL	0,26677299	0,27649031	0,14887075	0,37261679
AMADEUS	0,41441909	0,13299335	0,38959369	0,36880862
ARCELOR	0,08592308	0,48344524	0,48788855	0,16599549
B SABADELL	0,35792027	0,10827144	0,57237506	0,33022319
BANKINTER	0,38298781	0,13468532	0,60267184	0,35280081
BBVA	0,49299704	0,24268345	0,62126844	0,33822044
CAIXABNK	0,32380079	0,19409416	0,49106831	0,30890505
AUTOMOTIV	0,5115274	0,54605147	0,68515038	0,44040923
COLONIAL	0,41648177	0,37169224	0,55758479	0,16929464
ENAGAS	0,51364057	-0,07293071	0,33543051	0,2646729
ENDESA	0,58974974	0,09285504	0,60790575	0,32024186
FERROVIAL	0,55609753	0,13699929	0,62210541	0,39111406
FLUIDRA	0,21279625	0,22939769	0,40635788	0,33610271
GRIFOLS	0,58477027	0,35473041	0,53068216	0,24000564
IAG	0,32110332	0,26059352	0,47402753	0,25012314
IBERDROLA	0,70821669	0,15240281	0,49794159	0,45804564
INDITEX	0,60265006	0,30244574	0,58382058	0,40859265
INDRA	0,11750754	0,20744478	0,45632152	0,21993715
MAPFRE	0,41209894	0,35574988	0,69704095	0,33624387
MELIA HTLS	0,48803994	0,27187849	0,55539077	0,5029979
MERLIN	0,44888676	0,18353654	0,45474542	0,22689271
NATURGY	0,59144883	0,20947034	0,50197758	0,44947447
RED ELEC	0,62545493	0,13317916	0,44038351	0,51810683
REPSOL	0,43752907	0,40916738	0,60767426	0,13759457
ROVI	0,32558793	0,12055121	0,24358052	0,28768973
SANTANDER	0,4479464	0,38551376	0,72649444	0,33436687
SIEMENS	0,51177748	0,37241912	0,37137551	0,39790379
SOLARIA	0,53020531	0,28336198	0,42143435	0,52348047
TELEFONICA	0,51547268	0,27393045	0,68356082	0,20692195

Coeficient de correlació.

Observem que els elements de la matriu són nombres entre -1 i 1, ja que $-1 \leq \rho \leq 1$, on ρ és el coeficient de correlació. Això vol dir que dues variables estan més relacionades si $|\rho|$ és a prop de 1 i, altrament, seran més incorrelacionades si $|\rho|$ és a prop de 0. Per saber quines variables són menys incorrelacionades amb totes les altres, farem el càlcul següent:

$$S_i = \sum_{j=1}^{35} |\rho_{ij}|$$

per a tot $i = 1, \ldots, 35$, on ρ_{ij} és l'element de la fila i i columna j de la matriu de coeficient de correlació.

Per tant, com que volem les 8 variables més incorrelacionades entre elles mateixes, els 8 valors S_i per $i = 1, \ldots, 8$ que tenen el valor més petit seran les variables que utilitzarem. En aquest cas, les 8 empreses més incorrelacionades entre elles mateixes són:

· Acerinox
· Amadeus
· Arcelor
· Automotiv
· Fluidra
· Grifols
· Rovi
· Siemens

Una vegada tenim les 8 empreses seleccionades, haurem de calcular les rendibilitats anuals. Per tant, ara agruparem les dades de les 8 empreses i del mercat de referència per a calcular també les mitjanes i variàncies anuals.

DADES	IBEX35	ACERINOX	AMADEUS	ARCELOR	AUTOMOTIV	FLUIDRA	GRIFOLS	ROVI	SIEMENS
MITJ MENSUAL	0,0156%	0,5203%	1,7759%	2,0541%	2,2325%	4,6566%	1,0913%	1,4103%	1,7850%
MITJ ANUAL	2,0031%	12,6961%	1,7824%	10,9173%	3,3070%	9,9387%	2,3135%	8,2924%	9,8994%
VARIÀNCIA	0,2376%	0,9883%	0,2625%	2,3817%	0,5004%	1,0396%	0,3793%	0,6091%	0,9302%
DESV MENSUAL	4,8739%	9,9412%	5,1235%	15,4329%	7,0740%	10,1963%	6,1590%	7,8047%	9,6448%
DESV ANUAL	5,7565%	8,5092%	2,4164%	8,1811%	2,1676%	10,5319%	4,3666%	19,7547%	9,2983%

3.2 Utilització del mètode de Markowitz

Per a poder utilitzar el mètode de Markowitz i el model CAPM, necessitarem calcular la covariància anual d'aquestes variables que hem mencionat abans ja que per calcular les diferents carteres d'inversió és necessari el càlcul de la covariància.

En total en calcularem 10 carteres d'inversió de 8 actius, incloent la cartera de màxima rendibilitat i la cartera de mínima variància per a obtenir la cartera òptima de la frontera eficient de Markowitz.

El resultat de la covariància anual C és el següent:

MATRIU DE COVARIÀNCIA ANUAL								
	ACERINOX	AMADEUS	ARCELOR	AUTOMOTIV	FLUIDRA	GRIFOLS	ROVI	SIEMENS
ACERINOX	0,00482716	-0,00125348	-0,00449397	-0,00029171	-0,00558148	0,000960886	-0,005369435	-0,0027776
AMADEUS	-0,00125348	0,00038927	0,00130019	-6,155E-05	0,00120437	-0,000511942	0,002524912	0,00123669
ARCELOR	-0,00449397	0,00130019	0,00446208	-1,5244E-05	0,00468444	-0,001442769	0,007360666	0,00366259
AUTOMOTIV	-0,00029171	-6,155E-05	-1,5244E-05	0,00031322	0,00086473	0,000506909	-0,00210962	-0,0009418
FLUIDRA	-0,00558148	0,00120437	0,00468444	0,00086473	0,00739478	-0,000102938	0,001865271	0,00123166
GRIFOLS	0,00096089	-0,00051194	-0,00144277	0,00050691	-0,00010294	0,001271136	-0,005721228	-0,00267382
ROVI	-0,00536943	0,00252491	0,00736067	-0,00210962	0,00186527	-0,005721228	0,026016638	0,01222723
SIEMENS	-0,0027776	0,00123669	0,00366259	-0,0009418	0,00123166	-0,002673825	0,01222723	0,00576388

La matriu C s'ha calculat amb la funció Excel "Anàlisi de dades" de les dades anuals de les variables.

Totes les carteres obtingudes a continuació s'han calculat a partir de la funció Excel "Solver", la qual calcula el màxim o el mínim d'un valor amb les restriccions que tu vulguis posar. La funció "Solver"donarà valors a les ponderacions w_j per a $j = 1, \ldots, 10$ de cada cartera segons l'objectiu que volem aconseguir.
Per a poder continuar, hem de fixar el Terme de Lliure Risc (o TLR) per a poder realitzar el model CAPM. En aquest cas, he fixat un TLR del 5%.

Una vegada dit això, calcularem primer la cartera de màxima rendibilitat i la cartera de mínima variància.

Per a calcular la **cartera de màxima rendibilitat**, on la rendibilitat és representada per $f(w)$, haurem de trobar la solució al problema:

$$\begin{aligned} max: \quad & f(w) = r^T w \\ si \quad & \mathbf{1}^T w = 1, \end{aligned}$$

on r és el vector de rendabilitats anual, w el vector de ponderacions i $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$.

Utilitzant la funció "Solver", el resultat de la cartera de màxima rendibilitat és:

CARTERA DE MÀXIMA RENDIBILITAT

ACTIU	PES	RENT ANUAL
ACERINOX	100,00%	12,6961%
AMADEUS	0,00%	1,7824%
ARCELOR	0,00%	10,9173%
AUTOMOTIV	0,00%	3,3070%
FLUIDRA	0,00%	9,9387%
GRIFOLS	0,00%	2,3135%
ROVI	0,00%	8,2924%
SIEMENS	0,00%	9,8994%

RETORN CARTERA	12,6961%
VARIÀNCIA CARTERA	0,004827156
DESV TIPICA CARTERA	6,9478%
PRIMA DE RISC	1,107707387

TLR	5%

Recordem que la Prima de Risc és el terme $\frac{\mu - TLR}{\sigma}$ de cada cartera.
Observem que el resultat és bastant esperat si busquem la màxima rendibilitat, que és invertir tots els diners que tens en l'actiu amb més rendibilitat. No obstant, no és massa eficient ja que té un risc molt alt i no està gaire diversificada.

Altrament, per a calcular la **cartera de mínima variància**, on aquesta vegada representarem la variància com $Var(w)$, trobarem la solució al problema següent:

$$\begin{aligned} min: \quad & Var(w) = w^T C w \\ si \quad & \mathbf{1}^T w = 1, \end{aligned}$$

on C és la matriu de covariàncies anuals calculada anteriorment.

Utilitzant novament la funció "Solver" de Excel, obtenim:

CARTERA DE MÍNIMA VARIÀNCIA

ACTIU	PES	RENT ANUAL
ACERINOX	37,30%	12,6961%
AMADEUS	20,05%	1,7824%
ARCELOR	6,21%	10,9173%
AUTOMOTIV	7,20%	3,3070%
FLUIDRA	13,25%	9,9387%
GRIFOLS	9,98%	2,3135%
ROVI	4,44%	8,2924%
SIEMENS	1,58%	9,8994%

RETORN CARTERA	8,0813%
VARIÀNCIA CARTERA	2,35312E-05
DESV TIPICA CARTERA	0,4850896227102%
PRIMA DE RISC	6,352022092
TLR	5%

Per últim, per obtenir les 8 carteres que falten per calcular, com que hem obtingut la desviació típica de la cartera de màxima rendibilitat (σ_R) i la de la cartera de mínima variància (σ_v), utilitzarem la funció "Solver"de la següent manera:

$$\begin{aligned} max: \quad & f(w) = r^T w \\ & si \quad Var(w) = w^T C w = \sigma_j^2, \\ & \mathbf{1}^T w = 1, \end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_R - \sigma_v}{9} \\ \sigma_j &= \sigma_v + j\,\frac{\sigma_R - \sigma_v}{9} \qquad j = 2, \ldots, 8. \end{aligned}$$

Aquest càlcul és equivalent al càlcul d'intervals subdividits en n trossos. Ho he calculat d'aquesta manera ja que era més fàcil de realitzar per a la funció "Solver" d'Excel i el resultat final no varia.

Els resultats d'aquestes carteres es trobaran en l'Annex al final del treball, però un exemple d'aquestes carteres seria aquest:

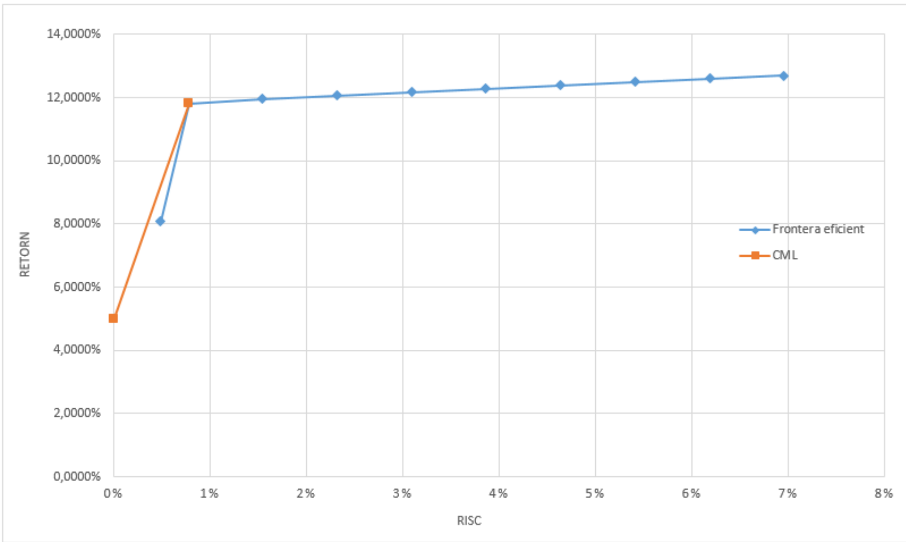
CARTERA 5

ACTIU	PES	RENT ANUAL
ACERINOX	76,84%	12,6961%
AMADEUS	0,00%	1,7824%
ARCELOR	23,16%	10,9173%
AUTOMOTIV	0,00%	3,3070%
FLUIDRA	0,00%	9,9387%
GRIFOLS	0,00%	2,3135%
ROVI	0,00%	8,2924%
SIEMENS	0,00%	9,8994%

RETORN CARTERA	12,2841%
VARIÀNCIA CARTERA	0,001489743
DESV TIPICA CARTERA	3,8597%
PRIMA DE RISC	1,88720711
TLR	5%

Per últim, una vegada hem calculat les 10 carteres que composen la frontera eficient de Markowitz, utilitzarem el model CAPM per a trobar quina és la cartera òptima per a un retorn màxim i un risc mínim.
Representarem en un gràfic la frontera eficient, en el que treballarem en el pla (σ, μ) com hem treballat fins ara, que és el conjunt de les carteres calculades anteriorment, i la línia de mercat de capitals (CML), que és tangent a la frontera eficient i comença en el punt $(0, TLR)$ (que en aquest cas començarà a $(0, 5\%)$).

El gràfic és el següent:



4 Conclusions

Abans d'arribar a les conclusions d'aquest treball, cal comentar que en el món de les finances res és exacte. El mercat és inestable i els valors dels actius poden variar per circumstàncies externes a aquests. Per exemple, en una roda de premsa després d'un partit de futbol, Cristiano Ronaldo va fer desaparèixer unes ampolles de Coca-Cola de les càmeres i amb aquesta acció els valors dels actius de Coca-Cola es van desplomar.

Segons els resultats que s'han donat en l'estudi, la cartera òptima segons Markowitz és la Cartera 1, que ha obtingut una rendibilitat d'un 11.81% en una cartera que s'inverteix en 3 actius, amb un risc relativament baix.
No obstant, veiem que aquesta cartera està poc diversificada (només invertim diners en 3/8 actius). Per tal de disminuir el risc, s'hauria d'invertir en altres tipus d'actius, encara que obtiguéssim una rendibilitat més baixa.

Veiem que el mètode de Markowitz és bastant senzill, on només ens fixem en la rendibilitat i el risc d'una cartera d'inversió. En els càlculs també he afegit el càlcul de la prima de risc, que és la diferència de rendibilitats entre un actiu arriscat respecte de l'actiu sense risc.
Aquest mètode no necessita uns grans coneixements matemàtics o financers per implementar-lo. També és un mètode que es basa en rendibilitats pasades, per tant, no ens assegura

rendibilitats futures.

Per a complementar aquest mètode, necessitem més dades per tal de diversificar la cartera resultant. Algunes d'aquestes dades, anomenades **mesures de Performance**, són les següents: *Beta del fondo, Ratio de Treynor, Alfa de Jensen, Índex de Modigliani*, etc. Per exemple, la finalitat de l'Alfa de Jensen és mesurar la qualitat de la gestió del fons, que indica l'excés de rendibilitat obtinguda pel fons per a un nivell de risc determinat.

Per a obtenir una cartera més diversificada, el model de **Black-Litterman** és més consistent en el procés d'assignació d'actius que en la teoria de Markowitz. El model de Black-Litterman soluciona el problema del càlcul de les rendibilitats esperades per mitjà de la cartera que proporciona l'equilibri del mercat.

En general, el mètode de Markowitz és un referent teòric en l'optimització de carteres pels analistes i gestors d'inversions, ja que ha proporcionat carteres amb millor exercici que els índexs de referència del mercat.
Però, a la pràctica, el model de Black-Litterman fa possible obtenir resultats diversificats i admet als gestors orientar l'assignació estratègica del capital d'inversió d'acord amb les expectatives que es tinguin sobre els mercats financers globals.

Referències

[1] Bueno Salazar Sergio Reymer [En línia]: *Teoría del portafolio de Markowitz y el CAPM. Modelos Paramétricos Bivariados*, (30 d'abril, 2018). Disponible a: https://www.gestiopolis.com/teoria-del-portafolio-de-markowitz-y-el-capm-modelos-parametricos-bivariados/

[2] Capiński, M. & Kopp, E. (2014). *Portfolio Theory and Risk Management* (Mastering Mathematical Finance). Cambridge: Cambridge University Press, 2014. ISBN 978-1-107-00367-5 (Hardback) – ISBN 978-0-521-17714-6 (Paperback).

[3] Expansión [En línia]: *ÍBEX35-Cotizaciones de Hoy en Tiempo Real*. Disponible a: https://www.expansion.com/mercados/cotizaciones/indices/ibex35_I.IB.html

[4] José Francisco López [En línia]: *Modelo de Markowitz - Qué es, definición y concepto*, (03 d' octubre, 2017). Disponible a: https://economipedia.com/definiciones/modelo-de-markowitz.html

[5] José Francisco López [En línia]: *Inversión: qué es, tipos y cómo funciona*, (13 de juliol, 2018). Disponible a: https://economipedia.com/definiciones/inversion.html

[6] Luis C. Franco-Arbeláez, Claudia T. Avendaño-Rúa, Haroldo Barbutín-Díaz [En línia]: *Modelo de Markowitz y Modelo de Black-Litterman en la Optimización de Portafolios de Inversión*, (23 de febrer, 2011). Disponible a: http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0123-77992011000100005

[7] Rihab Bedoui, Houda BenMabrouk, David McMillan (Reviewing Editor) [En línia]: *CAPM with various utility functions: Theoretical developments and application to international data, Cogent Economics & Finance*, (2017). Disponible a: https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/23322039.2017.1343230

[8] Tony Yiu [En línia]: *The Capital Asset Pricing Model. A Simple Yet Powerful Model That Has Stood The Test Of Time*, (15 de gener, 2020). Disponible a: https://towardsdatascience.com/the-capital-asset-pricing-model-238a64fefcc2

5 Anexos

	IBEX35	ACCIONA	ACERINOX	ACS	AENA	ALMIRALL	AMADEUS	ARCELOR	B SABADELL	BANKINTER	BBVA	CAIXABNK	AUTOMOTIV	COLONIAL	ENAGAS	ENDESA	FERROVIAL
ene-15	10.403,30	50,178	9,605	21,654	71,567	14,121	32,527	18,99	1,638	3,76	5,522	3,07	9,563	5,247	17,89	11,134	14,023
feb-15	11.178,30	55,374	10,591	23,31	73,094	12,341	33,668	21,927	1,792	4,26	6,524	3,298	9,668	5,728	17,457	11,376	15,104
mar-15	11.521,10	56,766	11,37	23,156	82,29	15,627	36,521	19,714	1,802	4,38	6,933	3,543	10,384	5,492	16,954	11,332	15,79
abr-15	11.385,00	53,539	9,503	22,121	73,842	15,335	37,32	21,369	1,895	4,175	6,633	3,601	10,163	5,352	17,518	11,165	16,188
may-15	11.217,60	55,208	10,115	20,598	83,953	17,16	37,777	22,127	1,823	4,133	6,627	3,502	10,819	5,466	16,671	10,719	15,913
jun-15	10.769,50	53,563	9,342	20,247	82,492	16,184	32,641	19,95	1,749	4,115	6,479	3,366	10,898	5,518	15,531	10,807	15,747
jul-15	11.180,70	59,939	8,356	21,964	88,353	16,33	36,635	18,829	1,675	4,366	6,849	3,287	10,882	5,92	16,822	12,323	17,925
ago-15	10.259	54,076	7,75	20,803	90,201	15,955	34,353	15,793	1,535	4,171	6,142	3,126	10,421	5,483	16,059	11,911	17,261
sep-15	9.559,90	51,544	6,009	18,473	86,901	14,559	35,266	10,615	1,326	4,079	5,635	2,821	9,394	5,439	16,849	12,13	17,278
oct-15	10.360,70	62,301	7,41	22,248	89,321	16,001	35,722	11,588	1,421	4,127	5,891	2,859	11,018	5,894	18,121	13,038	18,589
nov-15	10.386,90	64,157	7,663	22,194	94,469	15,864	35,037	10,553	1,411	4,286	5,904	2,839	11,592	5,789	18,552	12,606	18,473
dic-15	9.544,20	64,394	7,089	19,422	92,753	17,005	37,434	8,88	1,321	4,126	5,064	2,664	11,667	5,614	17,427	11,927	17,184
ene-16	8.815,80	57,415	6,224	17,08	89,981	16,184	34,923	7,945	1,344	4,042	4,488	2,304	10,229	5,387	17,896	11,69	16,591
feb-16	8.461,40	57,301	7,603	17,559	92,137	14,23	34,581	8,062	1,185	3,845	4,457	2,194	10,576	5,247	17,403	10,976	14,691
mar-16	8.723,10	55,355	7,663	19,19	99,837	13,482	35,037	11,704	1,278	3,95	4,447	2,186	12,095	5,693	17,705	11,101	15,561
abr-16	9.025,70	56,951	7,765	21,157	109,605	13,098	36,978	14,548	1,411	4,233	4,659	2,214	12,03	5,859	17,832	12,065	15,482
may-16	9.034,00	55,672	7,829	21,725	106,789	13,138	38,69	12,966	1,298	4,348	4,642	2,102	12,743	6,201	18,057	12,161	15,948
jun-16	8.163,30	55,312	7,827	18,393	106,481	12,407	36,521	11,998	0,997	3,698	3,943	1,683	11,59	5,825	18,838	12,318	14,611
jul-16	8.587,20	56,024	9,422	19,34	116,161	13,295	39,488	16,921	1,034	4,001	4,135	1,922	13,407	6,329	18,814	12,84	15,516
ago-16	8.716,80	54,167	8,764	19,155	114,135	12,648	38,69	15,589	1,027	4,216	4,414	2,064	13,137	5,952	18,162	12,475	14,804
sep-16	8.779,40	57,041	9,28	20,282	118,232	12,666	41,771	15,992	0,964	4,091	4,26	1,951	13,523	5,792	18,472	13,035	15,881
oct-16	9.143,30	58,797	8,843	21,059	120,438	12,13	40,402	18,083	1,03	4,506	5,284	2,391	14,503	5,756	18,041	13,23	15,193
nov-16	8.688,20	54,294	9,339	20,949	112,649	12,87	40,173	20,941	0,995	4,583	4,68	2,413	13,562	5,66	16,041	13,326	14,336
dic-16	9.352,10	59,297	9,934	22,634	116,746	13,656	40,63	20,662	1,135	4,788	5,153	2,762	14,291	5,89	17,025	14,228	14,568
ene-17	9.315,20	60,781	10,006	21,805	120,978	13,786	40,515	21,109	1,196	4,837	5,103	2,974	13,424	6,081	16,02	13,464	14,358
feb-17	9.555,50	59,924	10,573	22,681	121,564	13,934	41,657	24,447	1,191	4,736	5,024	2,901	14,153	6,173	16,369	14,207	15,348
mar-17	10.462,90	63,706	10,344	24,419	133,54	14,082	45,081	23,176	1,474	5,166	5,913	3,545	14,418	6,266	17,184	15,575	16,081
abr-17	10.715,80	64,223	10,104	26,054	145,876	15,34	47,021	21,321	1,543	5,306	6,088	3,724	15,406	6,37	17,043	15,296	16,745
may-17	10.880,00	72,381	9,477	27,229	165,702	14,491	49,189	18,904	1,603	5,38	6,007	3,756	16,541	6,476	18,676	15,706	17,472
jun-17	10.444,50	67,729	9,446	26,54	157,541	13,358	50,187	19,483	1,555	5,333	6,018	3,734	15,679	6,825	17,325	14,689	16,932
jul-17	10.502,20	63,502	8,901	25,355	152,378	7,662	49,909	21,747	1,655	5,448	6,338	3,945	16,503	7,224	17,445	14,572	15,895
ago-17	10.299,50	63,097	9,81	24,835	151,271	8,074	49,918	21,978	1,614	5,297	6,148	3,875	16,597	7,504	18,081	14,758	16,679
sep-17	10.381,50	59,81	9,991	24,518	140,851	8,065	52,718	21,375	1,543	5,335	6,263	3,788	17,812	7,677	17,402	13,891	16,226
oct-17	10.523,50	62,5	10,101	26,473	145,231	7,784	55,843	24,144	1,502	5.401	6,3	3,654	20,122	7,471	18,063	14,31	16,613
nov-17	10.211,00	59,986	9,249	25,414	154,13	7,896	58,067	24,884	1,477	5,403	6,023	3,631	19,444	7,259	18,008	13,644	16,475
dic-17	10.043,90	59,802	9,757	25,508	155,835	7,822	57,626	26,56	1,465	5,309	5,964	3,536	19,089	7,575	17,847	13,501	16,858

Preus de tancament ajustats (1).

FLUIDRA	GRIFOLS	IAG	IBERDROLA	INDITEX	INDRA	MAPFRE	MELIA HTLS	MERLIN	NATURGY	RED ELEC	REPSOL	ROVI	SANTANDER	SIEMENS	SOLARIA	TELEFONICA
2,75	16,909	3,727	4,571	22,323	9,063	1,956	9,672	7,253	13,906	13,22	9,976	10,36	4,384	7,189	0,75	8,149
2,985	16,457	4,112	4,555	23,989	9,52	2,057	10,023	8,196	14,438	13,322	10,987	13,509	4,805	8,637	1,02	8,51
2,953	18,148	4,294	4,477	25,522	10,93	2,228	10,897	8,66	13,983	13,252	11,025	15,525	5,161	9,591	1,175	8,214
2,676	17,27	3,846	4,458	24,493	10,56	2,177	10,583	9,178	14,679	13,124	11,712	14,545	5,077	9,799	1,04	8,449
2,99	16,482	3,956	4,697	25,997	8,82	2,128	11,248	8,933	14,973	13,399	11,028	14,793	4,873	11,421	1,025	8,215
2,727	16,537	3,587	4,507	25,131	9,224	2,077	11,243	8,263	13,599	12,576	10,317	13,328	4,707	11,519	0,935	8,133
3,142	18,395	3,893	4,907	26,872	10,225	1,969	12,449	8,535	13,568	13,129	10,023	13,287	4,722	11,816	0,935	8,892
2,814	16,731	3,825	4,625	25,635	10,58	1,769	12,112	8,836	12,413	12,853	8,355	12,296	4,136	11,008	0,82	8,031
2,704	16,887	4,095	4,542	25,799	9,272	1,571	11,845	9,11	11,953	13,376	6,819	12,777	3,594	10,148	0,73	6,908
3,014	19,306	4,19	4,962	29,397	9,759	1,82	12,526	9,973	13,517	14,469	7,517	13,172	3,901	11,791	0,775	7,673
3,014	20,56	4,148	5,065	29,584	9,726	1,747	11,46	10,085	14,042	14,649	8,087	13,904	3,953	13,582	0,765	7,663
2,948	19,673	4,308	5,003	27,526	8,669	1,596	11,593	9,875	12,903	13,912	6,93	13,904	3,487	12,967	0,705	6,718
2,896	17,68	3,683	5,025	26,218	9,047	1,421	9,537	9,135	12,634	13,579	6,5	13,48	3,01	14,024	0,565	6,353
2,901	18,644	3,669	4,648	24,859	8,443	1,242	9,351	8,255	11,308	13,352	6,522	12,45	2,908	14,303	0,57	6,068
3,466	18,063	3,649	4,567	25,68	10,225	1,311	9,842	8,742	12,462	13,927	6,793	14,222	3,002	14,233	0,645	6,467
3,616	17,532	3,496	4,834	24,604	10,23	1,529	10,46	8,778	12,739	14,232	7,837	14,222	3,463	14,094	0,68	6,25
3,824	18,796	3,657	4,75	26,645	10,25	1,573	10,441	8,557	12,476	14,61	7,926	13,962	3,361	14,676	0,64	6,432
3,202	18,82	2,359	4,743	26,25	9,494	1,398	9,199	8,14	12,862	15,099	8,025	13,506	2,686	14,635	0,56	5,794
3,654	18,216	2,573	4,919	27,153	10,845	1,565	10,148	8,856	13,474	15,436	7,931	12,562	3,016	15,669	0,66	6,005
3,767	17,64	2,405	4,723	27,878	11,59	1,73	10,664	9,011	13,474	14,543	8,469	13,175	3,196	17,017	0,77	6,185
4,181	17,816	2,461	4,845	28,961	11,935	1,778	10,607	9,111	13,571	14,468	8,493	12,601	3,138	17,629	0,755	6,174
4,18	16,73	2,579	4,97	28,21	11,285	1,933	10,764	8,856	13,333	14,317	8,978	11,968	3,6	17,43	0,825	6,342
3,839	17,185	2,728	4,546	28,591	9,75	2,021	10,191	8,224	11,98	12,656	8,863	11,443	3,468	16,206	0,71	5,606
4,151	17,718	2,794	4,99	28,728	10,41	2,114	10,587	8,933	13,285	13,503	9,684	11,997	3,988	15,938	0,765	6,297
4,19	18,6	3,023	4,775	27,049	10,185	2,041	11,352	8,955	13,218	12,618	9,858	12,863	4,183	16,07	1,015	6,372
5,074	19,374	3,422	5,135	26,859	11,905	2,129	11,772	9,267	13,63	13,011	10,103	13,136	4,188	17,286	1,06	6,889
4,786	21,575	3,378	5,488	29,268	11,97	2,344	12,326	9,063	15,236	13,74	10,446	14,255	4,668	18,344	1,08	7,486
5,574	23,137	3,627	5,404	31,497	12,585	2,336	13,024	9,396	15,399	13,664	10,489	14,771	4,909	19,633	1,015	7,25
5,896	23,769	3,78	5,81	32,557	12,35	2,308	12,991	9,764	16,631	15,247	10,763	15,082	4,74	19,984	1,4	7,078
6,15	23,01	3,852	5,675	30,066	12,635	2,292	12,508	9,565	15,679	14,427	9,955	16,61	4,749	18,504	1,365	6,584
7,13	22,415	3,582	5,598	30,048	13,095	2,361	12,66	9,842	15,143	14,289	10,52	15,853	4,813	13,79	1,365	6,964
7,779	22,411	3,685	5,763	28,549	13,22	2,228	11,917	10,01	15,625	14,877	10,72	16,001	4,598	12,491	1,475	6,599
8,567	23,26	3,737	5,521	28,523	13,365	2,064	11,806	10,135	14,585	14,021	11,582	15,922	4,976	10,997	1,25	6,696
8,489	25,359	4,019	5,828	29,018	12,34	2,105	11,342	9,977	14,305	14,991	11,95	15,844	4,94	12,396	1,425	6,561
11,191	23,128	3,921	5,605	26,889	11,45	2,118	10,807	9,73	14,624	14,983	11,456	16,158	4,787	10,475	1,685	6,268
11,523	23,218	4,085	5,426	26,26	11,405	2,053	11,101	9,95	14,99	14,755	11,24	15,391	4,648	11,381	1,63	6,06

Preus de tancament ajustats (2).

	IBEX35	ACCIONA	ACERINOX	ACS	AENA	ALMIRALL	AMADEUS	ARCELOR	B SABADELL	BANKINTER	BBVA	CAIXABNK	AUTOMOTIV	COLONIAL	ENAGAS	ENDESA	FERROVIAL
feb-15	7,4496%	10,3551%	10,2655%	7,6475%	2,1337%	-12,6053%	3,5079%	15,4660%	9,4017%	13,2979%	18,1456%	7,4267%	1,0980%	9,1671%	-2,4203%	2,1735%	7,7088%
mar-15	3,0667%	2,5138%	7,3553%	-0,6607%	12,5811%	26,6267%	8,4739%	-10,0926%	0,5580%	2,8169%	6,2692%	7,4287%	7,4059%	-4,1201%	-2,8814%	-0,3868%	4,5418%
abr-15	-1,1813%	-5,6847%	-16,4204%	-4,4697%	-10,2661%	-1,8686%	2,1878%	8,3950%	5,1609%	-4,6804%	-4,3271%	1,6370%	-2,1283%	-2,5492%	3,3266%	-1,4737%	2,5206%
may-15	-1,4704%	3,1174%	6,4401%	-6,8849%	13,6927%	11,9009%	1,2245%	3,5472%	-3,7995%	-1,0060%	-0,0905%	-2,7492%	6,4548%	2,1300%	-4,8350%	-3,9946%	-1,6988%
jun-15	-3,9946%	-2,9796%	-7,6421%	-1,7040%	-1,7403%	-5,6876%	-13,5956%	-9,8387%	-4,0592%	-0,4355%	-2,2333%	-3,8835%	0,7302%	0,9513%	-6,8382%	0,8210%	-1,0432%
jul-15	3,8182%	11,9037%	-10,5545%	8,4803%	7,1049%	0,9021%	12,2361%	-5,6190%	-4,2310%	6,0996%	5,7108%	-2,3470%	-0,1468%	7,2852%	8,3124%	14,0279%	13,8312%
ago-15	-8,2437%	-9,7816%	-7,2523%	-5,2859%	2,0916%	-2,2964%	-6,2290%	-16,1241%	-8,3582%	-4,4663%	-10,3227%	-4,8981%	-4,2364%	-7,3818%	-4,5357%	-3,3433%	-3,7043%
sep-15	-6,8145%	-4,6823%	-22,4645%	-11,2003%	-3,6585%	-8,7496%	2,6577%	-32,7867%	-13,6156%	-2,2057%	-8,2546%	-9,7569%	-9,8551%	-0,8025%	4,9194%	1,8386%	0,0985%
oct-15	8,3767%	20,8695%	23,3150%	20,4352%	2,7848%	9,9045%	1,2930%	9,1663%	7,1644%	1,1768%	4,5430%	1,3470%	17,2876%	8,3655%	7,5494%	7,4856%	7,5877%
nov-15	0,2529%	2,9791%	3,4143%	-0,2427%	5,7635%	-0,8562%	-1,9176%	-8,9317%	-0,7037%	3,8527%	0,2207%	-0,6995%	5,2097%	-1,7815%	2,3785%	-3,3134%	-0,6240%
dic-15	-8,1131%	0,3694%	-7,4905%	-12,4899%	-1,8165%	7,1924%	6,8413%	-15,8533%	-6,3785%	-3,7331%	-14,2276%	-6,1641%	0,6470%	-3,0230%	-6,0640%	-5,3863%	-6,9778%
ene-16	-7,6319%	-10,8380%	-12,2020%	-12,0585%	-2,9886%	-4,8280%	-6,7078%	-10,5293%	1,7411%	-2,0359%	-11,3744%	-13,5135%	-12,3254%	-4,0435%	2,6912%	-1,9871%	-3,4509%
feb-16	-4,0201%	-0,1986%	22,1562%	2,8044%	2,3961%	-12,0737%	-0,9793%	1,4726%	-11,8304%	-4,8738%	-0,6907%	-4,7743%	3,3923%	-2,5988%	-2,7548%	-6,1078%	-11,4520%
mar-16	3,0929%	-3,3961%	0,7892%	9,2887%	8,3571%	-5,2565%	1,3186%	45,1749%	7,8481%	2,7308%	-0,2244%	-0,3646%	14,3627%	8,5001%	1,7353%	1,1388%	5,9220%
abr-16	3,4690%	2,8832%	1,3311%	10,2501%	9,7839%	-2,8482%	5,5399%	24,2994%	10,4069%	7,1646%	4,7673%	1,2809%	-0,5374%	2,9159%	0,7173%	8,6839%	-0,5077%
may-16	0,0920%	-2,2458%	0,8242%	2,6847%	-2,5692%	0,3054%	4,6298%	-10,8743%	-8,0085%	2,7167%	-0,3649%	-5,0587%	5,9268%	5,8372%	1,2618%	0,7957%	3,0099%
jun-16	-9,6380%	-0,6466%	-0,0255%	-15,3372%	-0,2884%	-5,5640%	-5,6061%	-7,4657%	-23,1895%	-14,9494%	-15,0582%	-19,9334%	-9,0481%	-6,0635%	4,3252%	1,2910%	-8,3835%
jul-16	5,1928%	1,2872%	20,3782%	5,1487%	9,0908%	7,1572%	8,1241%	41,0318%	3,7111%	8,1936%	4,8694%	14,2008%	15,6773%	8,6524%	-0,1274%	4,2377%	6,1940%
ago-16	1,5092%	-3,3147%	-6,9837%	-0,9566%	-1,7441%	-4,8665%	-2,0209%	-7,8719%	-0,6770%	5,3737%	6,7473%	7,3881%	-2,0139%	-5,9567%	-3,4655%	-2,8427%	-4,5888%
sep-16	0,7182%	5,3058%	5,8877%	5,8836%	3,5896%	0,1423%	7,9633%	2,5852%	-6,1344%	-2,9649%	-3,4889%	-5,4748%	2,9383%	-2,6882%	1,7069%	4,4890%	7,2751%
oct-16	4,1449%	3,0785%	-4,7091%	3,8310%	1,8658%	-4,2318%	-3,2774%	13,0753%	6,8465%	10,1442%	24,0376%	22,5525%	7,2469%	-0,6215%	-2,3333%	1,4960%	-4,3322%
nov-16	-4,9774%	-7,6586%	5,6090%	-0,5223%	-6,4672%	6,1006%	-0,5668%	15,8049%	-3,3981%	1,7088%	-11,4307%	0,9201%	-6,4883%	-1,6678%	-11,0859%	0,7256%	-5,6408%
dic-16	7,6414%	9,2146%	6,3711%	8,0433%	3,6370%	6,1072%	1,1376%	-1,3323%	14,0704%	4,4731%	10,1068%	14,4633%	5,3753%	4,0636%	6,1343%	6,7687%	1,6183%
ene-17	-0,3946%	2,5027%	0,7248%	-3,6626%	3,6250%	0,9520%	-0,2830%	2,1634%	5,3744%	1,0234%	-0,9703%	7,6756%	-6,0668%	3,2428%	-5,9031%	-5,3697%	-1,4415%
feb-17	2,5797%	-1,4100%	5,6666%	4,0174%	0,4844%	1,0736%	2,8187%	15,8132%	-0,4181%	-2,0881%	-1,5481%	-2,4546%	5,4306%	1,5129%	2,1785%	5,5184%	6,8951%
mar-17	9,4961%	6,3113%	-2,1659%	7,6628%	9,8516%	1,0622%	8,2195%	-5,1990%	23,7615%	9,0794%	17,6951%	22,1992%	1,8724%	1,5066%	4,9789%	9,6291%	4,7759%
abr-17	2,4171%	0,8115%	-2,3202%	6,6956%	9,2377%	8,9334%	4,3034%	-8,0040%	4,6811%	2,7100%	2,9596%	5,0494%	6,8525%	1,6598%	-0,8205%	-1,7913%	4,1291%
may-17	1,5323%	12,7026%	-6,2055%	4,5099%	13,5910%	-5,5346%	4,6107%	-11,3362%	3,8885%	1,3946%	-1,3305%	0,8593%	7,3673%	1,6641%	9,5816%	2,6804%	4,3416%
jun-17	-4,0028%	-6,4271%	-0,3271%	-2,5304%	-4,9251%	-7,8186%	2,0289%	3,0628%	-2,9944%	-0,8736%	0,1831%	-0,5857%	-5,2113%	5,3891%	-7,2339%	-6,4752%	-3,0907%
jul-17	0,5524%	-6,2410%	-5,7696%	-4,4650%	-3,2772%	-42,6411%	-0,5539%	11,6204%	6,4309%	2,1564%	5,3174%	5,6508%	5,2554%	5,8462%	0,6926%	-0,7965%	-6,1245%
ago-17	-1,9301%	-0,6378%	10,2123%	-2,0509%	-0,7265%	5,3772%	0,0180%	1,0622%	-2,4773%	-2,7717%	-2,9978%	-1,7744%	0,5696%	3,8760%	3,6457%	1,2764%	4,9324%
sep-17	0,7962%	-5,2094%	1,8451%	-1,2764%	-6,8883%	-0,1115%	5,6092%	-2,7437%	-4,3990%	0,7174%	1,8705%	-2,2452%	7,3206%	2,3054%	-3,7553%	-5,8748%	-2,7160%
oct-17	1,3678%	4,4976%	1,1010%	7,9737%	3,1097%	-3,4842%	5,9278%	12,9544%	-2,6572%	1,2371%	0,5908%	-3,5375%	12,9688%	-2,6833%	3,7984%	3,0163%	2,3851%
nov-17	-2,9695%	-4,0224%	-8,4348%	-4,0003%	6,1275%	1,4388%	3,9826%	3,0649%	-1,6644%	0,0370%	-4,3968%	-0,6294%	-3,3694%	-2,8376%	-0,3045%	-4,6541%	-0,8307%
dic-17	-1,6365%	-0,3067%	5,4925%	0,3699%	1,1062%	-0,9372%	-0,7595%	6,7353%	-0,8125%	-1,7398%	-0,9796%	-2,6164%	-1,8258%	4,3532%	-0,8940%	-1,0481%	2,3247%

Rendibilitats totals mensuals (1).

FLUIDRA	GRIFOLS	IAG	IBERDROLA	INDITEX	INDRA	MAPFRE	MELIA HTLS	MERLIN	NATURGY	RED ELEC	REPSOL	ROVI	SANTANDER	SIEMENS	SOLARIA	TELEFONICA
8,5455%	-2,6731%	10,3300%	-0,3500%	7,4632%	5,0425%	5,1636%	3,6290%	13,0015%	3,8257%	0,7716%	10,1343%	30,3958%	9,6031%	20,1419%	36,0000%	4,4300%
-1,0720%	10,2753%	4,4261%	-1,7124%	6,3904%	14,8109%	8,3131%	8,7199%	5,6613%	-3,1514%	-0,5254%	0,3459%	14,9234%	7,4089%	11,0455%	15,1961%	-3,4783%
-9,3803%	-4,8380%	-10,4332%	-0,4244%	-4,0318%	-3,3852%	-2,2890%	-2,8815%	5,9815%	4,9775%	-0,9659%	6,2313%	-6,3124%	-1,6276%	2,1687%	-11,4894%	2,8610%
11,7339%	-4,5628%	2,8601%	5,3611%	6,1405%	-16,4773%	-2,2508%	6,2837%	-2,6694%	2,0029%	2,0954%	-5,8402%	1,7051%	-4,0181%	16,5527%	-1,4423%	-2,7696%
-8,7960%	0,3337%	-9,3276%	-4,0451%	-3,3312%	4,5805%	-2,3966%	-0,0445%	-7,5003%	-9,1765%	-6,1422%	-6,4472%	-9,9033%	-3,4065%	0,8581%	-8,7805%	-0,9982%
15,2182%	11,2354%	8,5308%	8,8751%	6,9277%	10,8521%	-5,1998%	10,7267%	3,2918%	-0,2280%	4,3973%	-2,8497%	-0,3076%	0,3187%	2,5783%	0,0000%	9,3323%
-10,4392%	-9,0459%	-1,7467%	-5,7469%	-4,6033%	3,4719%	-10,1574%	-2,7070%	3,5267%	-8,5127%	-2,1022%	-16,6417%	-7,4584%	-12,4100%	-6,8382%	-12,2995%	-9,6829%
-3,9090%	0,9324%	7,0588%	-1,7946%	0,6398%	-12,3629%	-11,1928%	-2,2044%	3,1010%	-3,7058%	4,0691%	-18,3842%	3,9118%	-13,1044%	-7,8125%	-10,9756%	-13,9833%
11,4645%	14,3246%	2,3199%	9,2470%	13,9463%	5,2524%	15,8498%	5,7493%	9,4731%	13,0846%	8,1714%	10,2361%	3,0915%	8,5420%	16,1904%	6,1644%	11,0741%
0,0000%	6,4954%	-1,0024%	2,0758%	0,6361%	-0,3381%	-4,0110%	-8,5103%	1,1230%	3,8840%	1,2440%	7,5828%	5,5572%	1,3330%	15,1896%	-1,2903%	-0,1303%
-2,1898%	-4,3142%	3,8573%	-1,2241%	-6,9565%	-10,8678%	-8,6434%	1,1606%	-2,0823%	-8,1114%	-5,0311%	-14,3069%	0,0000%	-11,7885%	-4,5281%	-7,8431%	-12,3320%
-1,7639%	-10,1306%	-14,5079%	0,4397%	-4,7519%	4,3604%	-10,9649%	-17,7348%	-7,4937%	-2,0848%	-2,3936%	-6,2049%	-3,0495%	-13,6794%	8,1515%	-19,8582%	-5,4332%
0,1727%	5,4525%	-0,3801%	-7,5025%	-5,1835%	-6,6762%	-12,5968%	-1,9503%	-9,6333%	-10,4955%	-1,6717%	0,3385%	-7,6409%	-3,3887%	1,9894%	0,8850%	-4,4861%
19,4760%	-3,1163%	-0,5451%	-1,7427%	3,3026%	21,1062%	5,5556%	5,2508%	5,8995%	10,2052%	4,3065%	4,1552%	14,2329%	3,2325%	-0,4894%	13,1579%	6,5755%
4,3278%	-2,9397%	-4,1929%	5,8463%	-4,1900%	0,0489%	16,6285%	6,2792%	0,4118%	2,2228%	2,1900%	15,3688%	0,0000%	15,3564%	-0,9766%	5,4264%	-3,3555%
5,7522%	7,2097%	4,6053%	-1,7377%	8,2954%	0,1955%	2,8777%	-0,1816%	-2,5177%	-2,0645%	2,6560%	1,1356%	-1,8282%	-2,9454%	4,1294%	-5,8824%	2,9120%
-16,2657%	0,1277%	-35,4936%	-0,1474%	-1,4825%	-7,3756%	-11,1252%	-11,8954%	-4,8732%	3,0939%	3,3470%	1,2491%	-3,2660%	-20,0833%	-0,2794%	-12,5000%	-9,9192%
14,1162%	-3,2094%	9,0716%	3,7107%	3,4400%	14,2300%	11,9456%	10,3163%	8,7961%	4,7582%	2,2319%	-1,1713%	-6,9895%	12,2859%	7,0653%	17,8571%	3,6417%
3,0925%	-3,1621%	-6,5293%	-3,9845%	2,6701%	6,8695%	10,5431%	5,0847%	1,7502%	0,0000%	-5,7852%	6,7835%	4,8798%	5,9682%	8,6030%	16,6667%	2,9975%
10,9902%	0,9977%	2,3285%	2,5831%	3,8848%	2,9767%	2,7746%	-0,5345%	1,1098%	0,7199%	-0,5157%	0,2834%	-4,3567%	-1,8148%	3,5964%	-1,9481%	-0,1778%
-0,0239%	-6,0956%	4,7948%	2,5800%	-2,5931%	-5,4462%	8,7177%	1,4802%	-2,7988%	-1,7537%	-1,0437%	5,7106%	-5,0234%	14,7228%	-1,1288%	9,2715%	2,7211%
-8,1579%	2,7197%	5,7774%	-8,5312%	1,3506%	-13,6021%	4,5525%	-5,3233%	-7,1364%	-10,1478%	-11,6016%	-1,2809%	-4,3867%	-3,6667%	-7,0224%	-13,9394%	-11,6052%
8,1271%	3,1015%	2,4194%	9,7668%	0,4792%	6,7692%	4,6017%	3,8858%	8,6211%	10,8932%	6,6925%	9,2632%	4,8414%	14,9942%	-1,6537%	7,7465%	12,3261%
0,9395%	4,9780%	8,1961%	-4,3086%	-5,8445%	-2,1614%	-3,4532%	7,2258%	0,2463%	-0,5043%	-6,5541%	1,7968%	7,2185%	4,8897%	0,8282%	32,6797%	1,1910%
21,0979%	4,1613%	13,1988%	7,5393%	-0,7024%	16,8876%	4,3116%	3,6998%	3,4841%	3,1170%	3,1146%	2,4853%	2,1224%	0,1195%	7,5669%	4,4335%	8,1136%
-5,6760%	11,3606%	-1,2858%	6,8744%	8,9691%	0,5460%	10,0986%	4,7061%	-2,2014%	11,7828%	5,6030%	3,3950%	8,5186%	11,4613%	6,1206%	1,8868%	8,6660%
16,4647%	7,2399%	7,3712%	-1,5306%	7,6158%	5,1378%	-0,3413%	5,6628%	3,6743%	1,0698%	-0,5531%	0,4116%	3,6198%	5,1628%	7,0268%	-6,0185%	-3,1526%
5,7768%	2,7316%	4,2184%	7,5130%	3,3654%	-1,8673%	-1,1986%	-0,2534%	3,9166%	8,0005%	11,5852%	2,6123%	2,1055%	-3,4427%	1,7878%	37,9310%	-2,3724%
4,3080%	-3,1932%	1,9048%	-2,3236%	-7,6512%	2,3077%	-0,6932%	-3,7180%	-2,0381%	-5,7242%	-5,3781%	-7,5072%	10,1313%	0,1899%	-7,4059%	-2,5000%	-6,9794%
15,9350%	-2,5858%	-7,0093%	-1,3568%	-0,0599%	3,6407%	3,0105%	1,2152%	2,8960%	-3,4186%	-0,9565%	5,6755%	-4,5575%	1,3477%	-25,4756%	0,0000%	5,7716%
9,1024%	-0,0178%	2,8755%	2,9475%	-4,9887%	0,9546%	-5,6332%	-5,8689%	1,7070%	3,1830%	4,1151%	1,9011%	0,9336%	-4,4671%	-9,4199%	8,0586%	-5,2412%
10,1298%	3,7883%	1,4111%	-4,1992%	-0,0911%	1,0968%	-7,3609%	-0,9314%	1,2488%	-6,6560%	-5,7538%	8,0410%	-0,4937%	8,2210%	-11,9606%	-15,2542%	1,4699%
-0,9105%	9,0241%	7,5462%	5,5606%	1,7354%	-7,6693%	1,9864%	-3,9302%	-1,5590%	-1,9198%	6,9182%	3,1773%	-0,4899%	-0,7235%	12,7217%	14,0000%	-2,0161%
31,8294%	-8,7977%	-2,4384%	-3,8264%	-7,3368%	-7,2123%	0,6176%	-4,7170%	-2,4757%	2,2300%	-0,0534%	-4,1339%	1,9818%	-3,0972%	-15,4969%	18,2456%	-4,4658%
2,9667%	0,3891%	4,1826%	-3,1936%	-2,3392%	-0,3930%	-3,0689%	2,7205%	2,2610%	2,5027%	-1,5217%	-1,8855%	-4,7469%	-2,9037%	8,6492%	-3,2641%	-3,3184%

Rendibilitats totals mensuals (2).

DADES	IBEX35	ACCIONA	ACERINOX	ACS	AENA	ALMIRALL	AMADEUS	ARCELOR	B SABADELL	BANKINTER	BBVA	CAIXABNK	AUTOMOTIV	COLONIAL	ENAGAS	ENDESA	FERROVIAL
MITJANA	0,0156%	0,7149%	0,5203%	0,7408%	2,4186%	-1,0595%	1,7759%	2,0541%	0,0354%	1,1223%	0,5635%	0,7605%	2,2325%	1,1544%	0,1052%	0,6642%	0,6710%
VÀRIANCIA	0,2376%	0,4534%	0,9883%	0,5597%	0,3595%	1,0822%	0,2625%	2,3817%	0,7211%	0,2704%	0,7269%	0,7528%	0,5004%	0,2080%	0,2295%	0,2364%	0,2966%
D.TÍPICA	4,8739%	6,7333%	9,9412%	7,4814%	5,9962%	10,4030%	5,1235%	15,4329%	8,4920%	5,2003%	8,5260%	8,6765%	7,0740%	4,5604%	4,7904%	4,8616%	5,4462%

Mitjana, variància i desviació típica mensuals (1).

FLUIDRA	GRIFOLS	IAG	IBERDROLA	INDITEX	INDRA	MAPFRE	MELIA HTLS	MERLIN	NATURGY	RED ELEC	REPSOL	ROVI	SANTANDER	SIEMENS	SOLARIA	TELEFONICA
4,6566%	1,0913%	0,6969%	0,6068%	0,6033%	1,0087%	0,4277%	0,5831%	1,0344%	0,3971%	0,4274%	0,6189%	1,4103%	0,5311%	1,7850%	3,1520%	-0,6233%
1,0396%	0,3793%	0,7709%	0,2413%	0,2893%	0,7282%	0,6012%	0,3765%	0,2636%	0,3775%	0,2322%	0,5506%	0,6091%	0,7384%	0,9302%	2,0301%	0,4465%
10,1963%	6,1590%	8,7798%	4,9123%	5,3788%	8,5334%	7,7535%	6,1360%	5,1346%	6,1440%	4,8185%	7,4200%	7,8047%	8,5933%	9,6448%	14,2480%	6,6818%

Mitjana, variància i desviació típica mensuals (2).

COEF COREL	ACCIONA	ACERINOX	ACS	AENA	ALMIRALL	AMADEUS	ARCELOR	B SABADELL	BANKINTER	BBVA	CAIXABNK	AUTOMOTIV	COLONIAL	ENAGAS	ENDESA	FERROVIAL
ACCIONA	1															
ACERINOX	0,42186042	1														
ACS	0,67575096	0,50976357	1													
AENA	0,54378576	0,28168787	0,4072726	1												
ALMIRALL	0,26677299	0,27649031	0,14887075	0,37261679	1											
AMADEUS	0,41441909	0,13299335	0,38959369	0,36880862	0,30837448	1										
ARCELOR	0,08592308	0,48344524	0,48788855	0,16599549	-0,07833602	0,155031079	1									
B SABADELL	0,35792027	0,10827144	0,57237506	0,33022319	0,02516864	0,23116997	0,405227787	1								
BANKINTER	0,38298781	0,13468532	0,60267184	0,35280081	0,01726601	0,350844617	0,345835099	0,72113399	1							
BBVA	0,49299704	0,24268345	0,62126844	0,33822044	-0,0508267	0,261642791	0,30075801	0,68690342	0,82859485	1						
CAIXABNK	0,32380079	0,19409416	0,49106831	0,30890505	0,10216855	0,252255961	0,334971718	0,7922775	0,77811881	0,83408302	1					
AUTOMOTIV	0,5115274	0,54605147	0,68515038	0,44040923	0,19376678	0,356253936	0,483468354	0,35004357	0,38881939	0,46312911	0,399260673	1				
COLONIAL	0,41648177	0,37169224	0,55758479	0,16929464	-0,11223988	0,306424213	0,506311522	0,44225106	0,50056094	0,44798765	0,318898233	0,458714022	1			
ENAGAS	0,51364057	-0,07293071	0,33543051	0,2646729	-0,06255834	0,299482868	-0,06467925	0,18570574	0,01456879	0,13508767	-0,04210864	0,235319954	0,19538045	1		
ENDESA	0,58974974	0,09285504	0,60790575	0,32024186	0,09651687	0,377123467	0,217640489	0,37019786	0,38456812	0,37571791	0,246429078	0,253673754	0,37525266	0,63546854	1	
FERROVIAL	0,55609753	0,13699929	0,62210541	0,39111406	0,32913069	0,5504966	0,229413759	0,38462668	0,41240368	0,34663431	0,225724147	0,415876383	0,54714693	0,528444	0,6659252	1
FLUIDRA	0,21279625	0,22939769	0,40635788	0,33610271	-0,00047268	0,428251612	0,405254059	0,26085704	0,31425674	0,26111314	0,176661813	0,44803804	0,52499347	0,1928769	0,12146852	0,44835773
GRIFOLS	0,58477027	0,35473041	0,53068216	0,24000564	0,29972318	0,399784466	-0,136387503	0,11034556	0,15445887	0,24845697	0,140970792	0,398882208	0,24017074	0,34034384	0,42684255	0,41749275
IAG	0,32110332	0,26059352	0,47402753	0,25012314	0,27866639	0,529301262	0,170727094	0,28045153	0,52765373	0,35683518	0,406530495	0,404951696	0,43830158	-0,08658926	0,15110451	0,48945692
IBERDROLA	0,70821669	0,15240281	0,49794159	0,45804564	0,19429714	0,396909252	0,149910719	0,42146634	0,28548364	0,37660373	0,242463399	0,428767108	0,35034798	0,72532284	0,74130449	0,59178933
INDITEX	0,60265006	0,30244574	0,58382058	0,40859265	0,26058153	0,412170911	0,066686037	0,28140026	0,43136383	0,42896461	0,264473996	0,546851929	0,3904759	0,36847334	0,52265126	0,59803635
INDRA	0,11750754	0,20744478	0,45632152	0,21993715	0,06548788	0,140944787	0,355743264	0,361598	0,32184908	0,31796433	0,25092478	0,387087121	0,39304705	0,21963753	0,34454591	0,55802254
MAPFRE	0,41209894	0,35574988	0,69704095	0,33624387	0,17610528	0,310905871	0,569287687	0,6601678	0,67122192	0,6284336	0,66123746	0,526213686	0,38672562	0,07243778	0,48909122	0,39239031
MELIA HTLS	0,48803994	0,27187849	0,55539077	0,5029979	0,26634849	0,504432641	0,318754055	0,43581381	0,55048672	0,55898779	0,577785697	0,515842215	0,51723095	-0,01419907	0,37332274	0,48455962
MERLIN	0,44888676	0,18353654	0,45474542	0,22689271	0,11385927	0,396551694	0,266327791	0,42323234	0,39322813	0,38425042	0,362080825	0,431498437	0,48957576	0,37380902	0,34053059	0,64697047
NATURGY	0,59144883	0,20947034	0,50197758	0,44947447	0,17061946	0,263279642	0,324616045	0,58620219	0,27589109	0,37819341	0,347021826	0,391954762	0,41725854	0,69026557	0,52224265	0,586457
RED ELEC	0,62545493	0,13317916	0,44038351	0,51810683	0,05348311	0,341416187	0,064427982	0,2256503	0,11037216	0,24179656	0,056736027	0,457925967	0,30328592	0,88091807	0,60297491	0,54416315
REPSOL	0,43752907	0,40916738	0,60767426	0,13759457	-0,07876761	0,151193402	0,493606653	0,54098178	0,44342711	0,57703314	0,42893603	0,437195953	0,33542179	0,27912676	0,32466231	0,22239042
ROVI	0,32558793	0,12055121	0,24358052	0,28768973	0,11988314	0,310838263	0,090690752	0,38293306	0,45018552	0,40739672	0,270202438	0,099554453	0,33476666	0,03438871	0,05211365	0,36195306
SANTANDER	0,4479464	0,38551376	0,72649444	0,33436687	0,14287975	0,356596253	0,494719604	0,76585518	0,81159078	0,85409836	0,843228846	0,554493804	0,49294735	0,02879613	0,3491342	0,35578316
SIEMENS	0,51177748	0,37241912	0,37137551	0,39790379	0,43675463	0,096512276	0,080179395	0,1695065	0,25471118	0,26778037	0,084585479	0,306198999	0,07641894	0,15527166	0,22260191	0,40546661
SOLARIA	0,53020531	0,28336198	0,42143435	0,52348047	0,0216406	0,280426747	0,334449773	0,42255072	0,50266312	0,48969145	0,484007659	0,356328824	0,33465789	0,15311676	0,14253814	0,35075652
TELEFONICA	0,51547268	0,27393045	0,68356082	0,20692195	-0,05347028	0,23662568	0,403375328	0,64055488	0,53644908	0,67908444	0,554354485	0,568467517	0,56796092	0,41951529	0,52028328	0,552307

Matriu de correlació (1).

FLUIDRA	GRIFOLS	IAG	IBERDROLA	INDITEX	INDRA	MAPFRE	MELIA HTLS	MERLIN	NATURGY	RED ELEC	REPSOL	ROVI	SANTANDER	SIEMENS	SOLARIA	TELEFONICA
1																
0,00730559	1															
0,43781331	0,31754812	1														
0,27173769	0,32824345	0,17942437	1													
0,2108399	0,61414957	0,27960626	0,42545225	1												
0,39063763	0,15568586	0,14806289	0,22159677	0,28080109	1											
0,30704011	0,20013049	0,26160063	0,3901105	0,4806299	0,38506821	1										
0,38851756	0,33904646	0,5538877	0,28808072	0,47327075	0,40680516	0,56690354	1									
0,3689261	0,13176914	0,37665236	0,38922204	0,44391803	0,53240154	0,40651831	0,52394576	1								
0,33607009	0,21590019	0,00450342	0,6931136	0,46844686	0,33599958	0,48123194	0,26942213	0,57586049	1							
0,25847592	0,33802147	0,08771076	0,78433801	0,45848914	0,17935871	0,20067176	0,15465728	0,42691721	0,72235808	1						
0,22443883	0,29998689	-0,03438892	0,35600105	0,31132447	0,28452683	0,60301806	0,22581081	0,32591959	0,52108434	0,24756817	1					
0,23659529	0,17174958	0,29562949	0,11889386	0,34764302	0,28702589	0,27591433	0,27263243	0,49572109	0,36811187	0,17961659	0,25621001	1				
0,35132089	0,27688287	0,4202697	0,34553046	0,35223364	0,40964626	0,78103026	0,6508074	0,45631234	0,4001823	0,11950035	0,69898731	0,34164659	1			
-0,08661278	0,34557492	0,18858886	0,35824927	0,54009483	0,16883372	0,26199559	0,22554679	0,22811507	0,36905071	0,27600468	0,24076394	0,33774373	0,20248706	1		
0,37410526	0,10504733	0,39474453	0,25720424	0,18332995	0,24449376	0,44259507	0,45532805	0,45361536	0,42332753	0,34174667	0,38950934	0,54137461	0,47666072	0,24819877	1	
0,44669151	0,36818187	0,213604	0,55232225	0,50336509	0,59414257	0,55565468	0,5219388	0,49391463	0,61656005	0,38712874	0,64488074	0,2231304	0,68104901	0,27055233	0,35344163	1

Matriu de correlació (2).

RENTA	IBEX35	ACERINOX	AMADEUS	ARCELOR	AUTOMOTIV	FLUIDRA	GRIFOLS	ROVI	SIEMENS
feb-15	7,4496%	10,2655%	3,5079%	15,4660%	1,0980%	8,5455%	-2,6731%	30,3958%	20,1419%
mar-15	3,0667%	7,3553%	8,4739%	-10,0926%	7,4059%	-1,0720%	10,2753%	14,9234%	11,0455%
abr-15	-1,1813%	-16,4204%	2,1878%	8,3950%	-2,1283%	-9,3803%	-4,8380%	-6,3124%	2,1687%
may-15	-1,4704%	6,4401%	1,2245%	3,5472%	6,4548%	11,7339%	-4,5628%	1,7051%	16,5527%
jun-15	-3,9946%	-7,6421%	-13,5956%	-9,8387%	0,7302%	-8,7960%	0,3337%	-9,9033%	0,8581%
jul-15	3,8182%	-10,5545%	12,2361%	-5,6190%	-0,1468%	15,2182%	11,2354%	-0,3076%	2,5783%
ago-15	-8,2437%	-7,2523%	-6,2290%	-16,1241%	-4,2364%	-10,4392%	-9,0459%	-7,4584%	-6,8382%
sep-15	-6,8145%	-22,4645%	2,6577%	-32,7867%	-9,8551%	-3,9090%	0,9324%	3,9118%	-7,8125%
oct-15	8,3767%	23,3150%	1,2930%	9,1663%	17,2876%	11,4645%	14,3246%	3,0915%	16,1904%
nov-15	0,2529%	3,4143%	-1,9176%	-8,9317%	5,2097%	0,0000%	6,4954%	5,5572%	15,1896%
dic-15	-8,1131%	-7,4905%	6,8413%	-15,8533%	0,6470%	-2,1898%	-4,3142%	0,0000%	-4,5281%
ene-16	-7,6319%	-12,2020%	-6,7078%	-10,5293%	-12,3254%	-1,7639%	-10,1306%	-3,0495%	8,1515%
feb-16	-4,0201%	22,1562%	-0,9793%	1,4726%	3,3923%	0,1727%	5,4525%	-7,6409%	1,9894%
mar-16	3,0929%	0,7892%	1,3186%	45,1749%	14,3627%	19,4760%	-3,1163%	14,2329%	-0,4894%
abr-16	3,4690%	1,3311%	5,5399%	24,2994%	-0,5374%	4,3278%	-2,9397%	0,0000%	-0,9766%
may-16	0,0920%	0,8242%	4,6298%	-10,8743%	5,9268%	5,7522%	7,2097%	-1,8282%	4,1294%
jun-16	-9,6380%	-0,0255%	-5,6061%	-7,4657%	-9,0481%	-16,2657%	0,1277%	-3,2660%	-0,2794%
jul-16	5,1928%	20,3782%	8,1241%	41,0318%	15,6773%	14,1162%	-3,2094%	-6,9895%	7,0653%
ago-16	1,5092%	-6,9837%	-2,0209%	-7,8719%	-2,0139%	3,0925%	-3,1621%	4,8798%	8,6030%
sep-16	0,7182%	5,8877%	7,9633%	2,5852%	2,9383%	10,9902%	0,9977%	-4,3567%	3,5964%
oct-16	4,1449%	-4,7091%	-3,2774%	13,0753%	7,2469%	-0,0239%	-6,0956%	-5,0234%	-1,1288%
nov-16	-4,9774%	5,6090%	-0,5668%	15,8049%	-6,4883%	-8,1579%	2,7197%	-4,3867%	-7,0224%
dic-16	7,6414%	6,3711%	1,1376%	-1,3323%	5,3753%	8,1271%	3,1015%	4,8414%	-1,6537%
ene-17	-0,3946%	0,7248%	-0,2830%	2,1634%	-6,0668%	0,9395%	4,9780%	7,2185%	0,8282%
feb-17	2,5797%	5,6666%	2,8187%	15,8132%	5,4306%	21,0979%	4,1613%	2,1224%	7,5669%
mar-17	9,4961%	-2,1659%	8,2195%	-5,1990%	1,8724%	-5,6760%	11,3606%	8,5186%	6,1206%
abr-17	2,4171%	-2,3202%	4,3034%	-8,0040%	6,8525%	16,4647%	7,2399%	3,6198%	7,0268%
may-17	1,5323%	-6,2055%	4,6107%	-11,3362%	7,3673%	5,7768%	2,7316%	2,1055%	1,7878%
jun-17	-4,0028%	-0,3271%	2,0289%	3,0628%	-5,2113%	4,3080%	-3,1932%	10,1313%	-7,4059%
jul-17	0,5524%	-5,7696%	-0,5539%	11,6204%	5,2554%	15,9350%	-2,5858%	-4,5575%	-25,4756%
ago-17	-1,9301%	10,2123%	0,0180%	1,0622%	0,5696%	9,1024%	-0,0178%	0,9336%	-9,4199%
sep-17	0,7962%	1,8451%	5,6092%	-2,7437%	7,3206%	10,1298%	3,7883%	-0,4937%	-11,9606%
oct-17	1,3678%	1,1010%	5,9278%	12,9544%	12,9688%	-0,9105%	9,0241%	-0,4899%	12,7217%
nov-17	-2,9695%	-8,4348%	3,9826%	3,0649%	-3,3694%	31,8294%	-8,7977%	1,9818%	-15,4969%
dic-17	-1,6365%	5,4925%	-0,7595%	6,7353%	-1,8258%	2,9667%	0,3891%	-4,7469%	8,6492%

Rendibilitats seleccionades mensual.

DADES	IBEX35	ACERINOX	AMADEUS	ARCELOR	AUTOMOTIV	FLUIDRA	GRIFOLS	ROVI	SIEMENS
MITJ MENSUAL	0,0156%	0,5203%	1,7759%	2,0541%	2,2325%	4,6566%	1,0913%	1,4103%	1,7850%
MITJ ANUAL	2,0031%	12,6961%	1,7824%	10,9173%	3,3070%	9,9387%	2,3135%	8,2924%	9,8994%
VARIÀNCIA	0,2376%	0,9883%	0,2625%	2,3817%	0,5004%	1,0396%	0,3793%	0,6091%	0,9302%
DESV MENSUAL	4,8739%	9,9412%	5,1235%	15,4329%	7,0740%	10,1963%	6,1590%	7,8047%	9,6448%
DESV ANUAL	5,7565%	8,5092%	2,4164%	8,1811%	2,1676%	10,5319%	4,3666%	19,7547%	9,2983%

Dades estadístiques anuals i mensuals.

MATRIU DE COVARIÀNCIA ANUAL								
	ACERINOX	AMADEUS	ARCELOR	AUTOMOTIV	FLUIDRA	GRIFOLS	ROVI	SIEMENS
ACERINOX	0,00482716	-0,00125348	-0,00449397	-0,00029171	-0,00558148	0,000960886	-0,005369435	-0,0027776
AMADEUS	-0,00125348	0,00038927	0,00130019	-6,155E-05	0,00120437	-0,00051194	0,002524912	0,00123669
ARCELOR	-0,00449397	0,00130019	0,00446208	-1,5244E-05	0,00468444	-0,00144277	0,007360666	0,00366259
AUTOMOTIV	-0,00029171	-6,155E-05	-1,5244E-05	0,00031322	0,00086473	0,000506909	-0,00210962	-0,0009418
FLUIDRA	-0,00558148	0,00120437	0,00468444	0,00086473	0,00739478	-0,00010294	0,001865271	0,00123166
GRIFOLS	0,00096089	-0,00051194	-0,00144277	0,00050691	-0,00010294	0,001271136	-0,005721228	-0,00267382
ROVI	-0,00536943	0,00252491	0,00736067	-0,00210962	0,00186527	-0,00572123	0,026016638	0,01222723
SIEMENS	-0,0027776	0,00123669	0,00366259	-0,0009418	0,00123166	-0,00267382	0,01222723	0,00576388

Matriu de corvariància anual.

CARTERA 1

ACTIU	PES	RENT ANUAL
ACERINOX	52,82%	12,6961%
AMADEUS	0,00%	1,7824%
ARCELOR	42,34%	10,9173%
AUTOMOTIV	0,00%	3,3070%
FLUIDRA	4,84%	9,9387%
GRIFOLS	0,00%	2,3135%
ROVI	0,00%	8,2924%
SIEMENS	0,00%	9,8994%

RETORN CARTERA	11,8096%
VARIÀNCIA CARTERA	6,05797E-05
DESV TIPICA CARTERA	0,7783%
PRIMA DE RISC	8,748941951
TLR	5%

CARTERA 2

ACTIU	PES	RENT ANUAL
ACERINOX	58,50%	12,6961%
AMADEUS	0,00%	1,7824%
ARCELOR	41,50%	10,9173%
AUTOMOTIV	0,00%	3,3070%
FLUIDRA	0,00%	9,9387%
GRIFOLS	0,00%	2,3135%
ROVI	0,00%	8,2924%
SIEMENS	0,00%	9,8994%

RETORN CARTERA	11,9578%
VARIÀNCIA CARTERA	0,000238284
DESV TIPICA CARTERA	1,5436%
PRIMA DE RISC	4,50740411
TLR	5%

CARTERA 3

ACTIU	PES	RENT ANUAL
ACERINOX	64,91%	12,6961%
AMADEUS	0,00%	1,7824%
ARCELOR	35,09%	10,9173%
AUTOMOTIV	0,00%	3,3070%
FLUIDRA	0,00%	9,9387%
GRIFOLS	0,00%	2,3135%
ROVI	0,00%	8,2924%
SIEMENS	0,00%	9,8994%

RETORN CARTERA	12,0720%
VARIÀNCIA CARTERA	0,000536278
DESV TIPICA CARTERA	2,3158%
PRIMA DE RISC	3,053839739
TLR	5%

CARTERA 4

ACTIU	PES	RENT ANUAL
ACERINOX	70,94%	12,6961%
AMADEUS	0,00%	1,7824%
ARCELOR	29,06%	10,9173%
AUTOMOTIV	0,00%	3,3070%
FLUIDRA	0,00%	9,9387%
GRIFOLS	0,00%	2,3135%
ROVI	0,00%	8,2924%
SIEMENS	0,00%	9,8994%

RETORN CARTERA	12,1792%
VARIÀNCIA CARTERA	0,000953292
DESV TIPICA CARTERA	3,0875%
PRIMA DE RISC	2,325214948
TLR	5%

CARTERA 5

ACTIU	PES	RENT ANUAL
ACERINOX	76,84%	12,6961%
AMADEUS	0,00%	1,7824%
ARCELOR	23,16%	10,9173%
AUTOMOTIV	0,00%	3,3070%
FLUIDRA	0,00%	9,9387%
GRIFOLS	0,00%	2,3135%
ROVI	0,00%	8,2924%
SIEMENS	0,00%	9,8994%

RETORN CARTERA	12,2841%
VARIÀNCIA CARTERA	0,001489743
DESV TIPICA CARTERA	3,8597%
PRIMA DE RISC	1,88720711
TLR	5%

CARTERA 6		
ACTIU	PES	RENT ANUAL
ACERINOX	82,67%	12,6961%
AMADEUS	0,00%	1,7824%
ARCELOR	17,33%	10,9173%
AUTOMOTIV	0,00%	3,3070%
FLUIDRA	0,00%	9,9387%
GRIFOLS	0,00%	2,3135%
ROVI	0,00%	8,2924%
SIEMENS	0,00%	9,8994%

RETORN CARTERA	12,3879%
VARIÀNCIA CARTERA	0,002145907
DESV TIPICA CARTERA	4,6324%
PRIMA DE RISC	1,59483662
TLR	5%

CARTERA 7		
ACTIU	PES	RENT ANUAL
ACERINOX	88,51%	12,6961%
AMADEUS	0,00%	1,7824%
ARCELOR	11,49%	10,9173%
AUTOMOTIV	0,00%	3,3070%
FLUIDRA	0,00%	9,9387%
GRIFOLS	0,00%	2,3135%
ROVI	0,00%	8,2924%
SIEMENS	0,00%	9,8994%

RETORN CARTERA	12,4917%
VARIÀNCIA CARTERA	0,002926598
DESV TIPICA CARTERA	5,4098%
PRIMA DE RISC	1,38484381
TLR	5%

CARTERA 8		
ACTIU	PES	RENT ANUAL
ACERINOX	94,35%	12,6961%
AMADEUS	0,00%	1,7824%
ARCELOR	5,65%	10,9173%
AUTOMOTIV	0,00%	3,3070%
FLUIDRA	0,00%	9,9387%
GRIFOLS	0,00%	2,3135%
ROVI	0,00%	8,2924%
SIEMENS	0,00%	9,8994%

RETORN CARTERA	12,5956%
VARIÀNCIA CARTERA	0,003831814
DESV TIPICA CARTERA	6,1902%
PRIMA DE RISC	1,227035956
TLR	5%

CARTERA DE MÀXIMA RENDIBILITAT		
ACTIU	PES	RENT ANUAL
ACERINOX	100,00%	12,6961%
AMADEUS	0,00%	1,7824%
ARCELOR	0,00%	10,9173%
AUTOMOTIV	0,00%	3,3070%
FLUIDRA	0,00%	9,9387%
GRIFOLS	0,00%	2,3135%
ROVI	0,00%	8,2924%
SIEMENS	0,00%	9,8994%

RETORN CARTERA	12,6961%
VARIÀNCIA CARTERA	0,004827156
DESV TIPICA CARTERA	6,9478%
PRIMA DE RISC	1,107707387
TLR	5%

CARTERA DE MÍNIMA VARIÀNCIA		
ACTIU	PES	RENT ANUAL
ACERINOX	37,30%	12,6961%
AMADEUS	20,05%	1,7824%
ARCELOR	6,21%	10,9173%
AUTOMOTIV	7,20%	3,3070%
FLUIDRA	13,25%	9,9387%
GRIFOLS	9,98%	2,3135%
ROVI	4,44%	8,2924%
SIEMENS	1,58%	9,8994%

RETORN CARTERA	8,0813%
VARIÀNCIA CARTERA	2,35312E-05
DESV TIPICA CARTERA	0,4850896227102%
PRIMA DE RISC	6,352022092
TLR	5%

Frontera eficient de Markowitz.