



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Transformades de Fourier aplicades a marcatge invisible d'imatges digitals

Autora: Tània Díaz Cancer

**Directors: Dr. Martí Prats
Prof. Raúl Roca Cánovas**
**Realitzat a: Departament de
Matemàtiques i Informàtica**

Barcelona, 24 de gener de 2022

Abstract

In this work it has been designed a steganographic method for embedding watermarks in invisible digital images based on the *Fourier transform* and resistant to the printing and scanning process. The objective of this method is to facilitate the tracking of possible leakage points or filtration of private documents. The watermark is embedded over the magnitude coefficients of the Fourier transform. The measure *Peak signal-to-noise ratio* is used to evaluate the degradation of the image quality after marking. A detection rate is defined to check the resistance of the watermark to different geometric attacks and, finally, to the printing and scanning process.

Key words: Steganography, Watermarking, Fourier Transforms, Harmonic Analysis, Printing and scanning process.

Resum

En aquest treball s'ha dissenyat un mètode esteganogràfic d'incrustació de filigranes en imatges digitals invisible, basat en la *transformada de Fourier* i resistent al procés d'impressió i escàner. L'objectiu d'aquest mètode és facilitar el rastreig dels possibles punts de fuga o filtració de documents de caràcter privat. La filigrana està incrustada sobre *els coeficients de magnitud de la transformada de Fourier*. S'utilitza la mesura *Peak signal-to-noise ratio* per avaluar la degradació de la qualitat de la imatge després del marcatge. Es defineix una taxa de detecció per tal de comprovar la resistència de la filigrana davant de diferents atacs geomètrics i, posteriorment, del procés d'impressió i escaneig.

Paraules clau: Esteganografia, Marca d'aigua, Transformades de Fourier, Anàlisi Armònic, Procés d'impressió i escàner

Agraïments

Als meus tutors Martí Prats i Raül Roca, per haver acceptat acompanyar-me en l'elaboració d'aquest treball i per compartir els seus coneixements amb mi. Gràcies per la disponibilitat i la paciència.

A Grail Cyber Tech, on va nèixer la idea d'aquest treball. Gràcies a tot l'equip per estar al meu costat i convertir-se en família.

A la meva mare, per fer-me costat durant tot el grau.

A l'Andreu, a l'Arnau i al Martí, per ser-hi.

Índex

1	Introducció	1
1.1	Objectius	3
1.2	Estructura del treball	3
2	Estat de l'art	5
2.1	Tècniques actuals i les seves propietats	5
2.2	Propietats del procés d'impressió i escaneig	8
2.3	Tècniques d'incrustació sobre el domini de freqüència	9
3	Marc teòric	11
3.1	Sèries de Fourier	11
3.2	Convergència puntual de les sèries de Fourier	15
3.3	Convergència uniforme de la sèrie de Fourier	21
3.4	Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$	22
3.5	Transformada de Fourier discreta i ràpida	23
4	Disseny del mètode	31
4.1	Esquema del mètode d'incrustació i test	31
4.2	Algoritme d'incrustació	32
4.3	Algoritme del test	34
5	Implementació i resultats	37
6	Conclusions	45
A	El codi	49
A.1	Codi d'incrustació	49
A.2	Codi de testatge	50
A.3	Codi per generar filigranes	51

1 Introducció

Al llarg de la història, l'ésser humà ha necessitat protegir informació de tota mena. És per això que ha buscat mecanismes per mantenir els seus secrets lluny de mirades xafarderes. Aquesta necessitat té, avui dia, una rellevància cabdal en la protecció de les comunicacions digitals, on la investigació i el desenvolupament de noves tècniques ha avançat notòriament en les últimes dècades per tal d'evitar, o almenys minimitzar, atacs per revelació, supressió o alteració de la informació intercanviada entre diferents subjectes.

Un eix fonamental en aquest procés ha estat el desenvolupament de la criptografia. Aquesta ciència facilita l'autenticació, la confidencialitat i la integritat de la informació, però, com tots els mètodes de seguretat, té fortaleses i debilitats. El problema fonamental de la criptografia recau en la visibilitat del seu ús, ja que les comunicacions encriptades poden ser detectades fàcilment encara que no puguin ser descriptades. Si es detecta l'encriptació, existeix el perill que s'impedeixi la comunicació entre subjectes que es comuniquen mitjançant aquests procediments o que s'intentin localitzar les fonts que transmeten informació per accions posteriors. De la necessitat de desenvolupar nous mecanismes per a complementar les tècniques criptogràfiques sorgeix l'interès per l'ús de l'esteganografia.

L'esteganografia -del grec "*stego*" (amagar o secret) i "*grapho*" (escriure)- és la ciència que busca amagar la mateixa existència d'una comunicació. Les tècniques esteganogràfiques es fonamenten en la inserció d'un secret ocult dins d'una informació aparentment innocent. L'avantatge de l'esteganografia sobre la criptografia sola és que els missatges no atreuen l'atenció en si mateixos. Un missatge encriptat no ocult generarà sospites per molt robust que sigui el mètode criptogràfic i pot resultar incriminatori per si mateix, ja que en alguns països l'encriptació és il·legal. En canvi, el defecte més important és que, si es descobreix el missatge, el significat resulta transparent. Per aquest motiu, habitualment s'encripta el missatge, aconseguint així un doble nivell de seguretat.

Les primeres evidències del seu ús es registren l'any 440 aC. L'historiador Heròdot va mencionar dos exemples d'esteganografia a les seves *Històries*[13]. Demeratus va escriure un missatge per alertar d'un possible atac a Grècia, escrivint-lo sobre una tauleta de fusta, i la va cobrir de cera. Les tauletes de cera s'utilitzaven com a superfície d'escriptura reutilitzable. Un altre exemple històric de l'ús de l'esteganografia és el del general atenès Histiaeus, el qual rapava el cap dels seus esclaus més fidels i els tatuava un missatge. Quan el cabell els creixia, el missatge quedava ocult. El propòsit d'aquests missatges fou instigar una revolta contra els perses [18].

Si bé les tècniques esteganogràfiques s'han utilitzat al llarg de tota la història, aquestes sempre han estat subjectes a les necessitats socials del moment. Actualment, davant la digitalització de la societat, l'esteganografia recull l'ocultació de missatges a contingut digital (*data hiding*) i la protecció del contingut (*watermarking*). El *watermarking*, o marca d'aigua, es caracteritza per amagar certa informació dintre d'un contingut, assegurant que amb la distribució o modifica-

ció d'aquest contingut es puguin atribuir els drets sobre el producte en concret a posteriori. D'aquesta manera, és possible comprovar l'autoria o la propietat del contingut.

1.1 Objectius

El present treball sorgeix de la necessitat empresarial de protegir la documentació que es comparteix fora del radi de l'empresa. És habitual compartir documents de caràcter confidencial que recullen informació sensible (com per exemple factures, nòmines, documentació mèdica ...). El mal ús o la filtració d'aquests arxius compromet la privacitat, exposant informació que pot ser utilitzada per dur a terme accions malintencionades.

És per aquest motiu que resulta de vital importància implementar tecnologies per protegir aquest tipus d'arxius i, en cas de filtració, poder detectar quins són els punts de fuga d'informació. Per aquest últim propòsit, en els últims temps han guanyat rellevància les tècniques de marcatge o *watermarking*. Concretament, ens resulten d'especial interès aquelles tècniques de marcatge que ens permeten marcar imatges, donat que aquestes apareixen sovint en format logo o inserides en la mateixa plantilla o *template* del document. Al ser habitual el seu ús, la seva inclusió en documents empresarials no resultarà sospitosa, garantint així la condició indispensable de qualsevol comunicació esteganogràfica: que el missatge passi inadvertit. A més a més, com que les imatges es representen digitalment mitjançant grans matrius de píxels, resulten objectes amb complexitat suficient per inserir filigranes invisibles a la percepció humana.

Així, l'objectiu d'aquest treball és **implementar un algoritme de marcatge que permeti inserir una filigrana invisible en una imatge digital mitjançant l'ús de tècniques de *watermarking***. En el cas ideal, aquesta filigrana hauria de poder ser identificada després que els arxius siguin compartits.

Per tal d'acotar aquest treball de recerca, focalitzarem l'estudi en aquelles accions més quotidianes que podrien exposar documents dins de l'àmbit empresarial: els processos d'impressió i escaneig. Així doncs, tractarem de buscar mètodes de marcatge que siguin resistents a aquests processos.

1.2 Estructura del treball

L'estudi s'ha estructurat en diversos apartats per tal d'exposar les idees de forma ordenada.

En primer lloc, realitzarem l'estat de l'art de les tècniques actuals de *watermarking*. Per una banda, farem un estudi general de les diferents tècniques i els seus usos. Això ens permetrà conèixer quins han estat els últims avenços en el camp de l'esteganografia i quines solucions s'implementen avui dia per tal de resoldre les diferents problemàtiques que poden requerir l'ús de tècniques de marcatge. Per altra banda, recollirem alguns resultats actuals sobre la modelització del procés d'impressió i escàner. Conèixer les propietats d'aquest procés ens permetrà triar quines són les tècniques de marcatge més adequades a les nostres necessitats i aprofundir, posteriorment, en el seu estudi. En aquesta línia, finalitzarem estudiant les diferents tècniques d'incrustació sobre el domini de freqüència i les seves propietats. Aquesta secció del treball es fonamenta sobretot en els estudis de Mahbuba

Begum i Mohammad Uddin [1], d'Elena Martínez Villacampa i Elisa Sayro [19], i de K.Solanki [17].

En segon lloc, s'ha elaborat un marc teòric on es posen de relleu les eines matemàtiques necessàries per a la implementació del mètode de marcatge. En concret, aprofundirem en la comprensió de les *sèries de Fourier* i de la *transformades de Fourier*, que es troben dins el marc d'estudi de l'anàlisi harmònic. Aquesta secció del treball es basa sobretot en els apunts de Javier Duoandikoetxea [6], amb algunes seccions on s'incorporen resultats recollits a les obres de Michael W. Frazier [7], María Cristina Pereyra i Lesley A.Ward [12], i Yitzhak Katznelson [9]. Amb l'excepció, però, d'un lema d'elaboració pròpia (3.22) que serà útil per a la part pràctica del treball.

Seguidament, es desenvolupa el mètode d'incrustació de filigranes sobre una imatge digital. Inclourem l'algoritme d'incrustació de la marca d'aigua i l'algoritme de testatge. Aquest últim té la funció d'avaluar si una imatge ha estat marcada amb una certa filigrana o no. Les referències principals per aquesta secció han estat els articles d'Ante Poljicak, Lidija Mandic i Darko Agic [14] i de Dajun He i Qibin Sun [8].

Finalment, fent ús del programari *MATLAB*, implementarem els algorismes definits i avaluarem els resultats.

2 Estat de l'art

El marcatge d'aigua digital pertany a la branca de l'esteganografia, és a dir, als mètodes d'amagatall d'informació. Mitjançant la implementació d'un algoritme conegut, es persegueix l'objectiu d'ocultar informació inserint-la dins d'un fitxer digital de tal forma que la incrustació resulti imperceptible a la sensibilitat humana. Al llarg del treball farem referència a l'arxiu original, referint-nos al fitxer digital que pretenem marcar, i a la filigrana o marca d'aigua, que serà la informació que pretenem ocultar. L'arxiu original prendrà format d'imatge *.png*, mentre que la filigrana serà un vector binari, que representa la clau d'identificació necessària per garantir l'autenticació.

La recerca sobre tècniques de marcatge d'imatge es torna primordial a l'actual context de digitalització i tràfic de dades, ja que la filigrana d'aigua digital o *watermarking* és una de les formes més segures per protegir els drets de propietat intel·lectual, identificar la propietat, fer un seguiment del contingut dels mitjans digitals i garantir l'autenticació i la seguretat [1].

2.1 Tècniques actuals i les seves propietats

Les diferents tècniques de marcatge persegueixen un mateix objectiu: trobar un punt d'equilibri entre la invisibilitat de la filigrana i la seva resistència [11]. Ambdues propietats són mútuament restringides i per aquest motiu cal definir bé quines són les pretensions que ha de complir un cert esquema de marca. A més a més, s'ha de tenir en compte la complexitat i el cost computacional del mètode, ja que disposem de recursos limitats. Tots aquests conceptes es defineixen de la següent forma:

Definició 2.1. Entenem un **atac** a una filigrana com qualsevol deformació, voluntària o involuntària, malintencionada o no, que pugui transformar la imatge i , per tant, la filigrana.

Definició 2.2. Un mètode de marcatge ofereix **resistència** o és resistent a un cert tipus d'atac si és possible detectar que les imatges han estat marcades fins i tot després de patir l'atac. És a dir, si després de l'atac la taxa de detecció apareix per sobre d'un cert llindar establert. Per cada tipus de marcatge caldrà definir tècniques per calcular la taxa de detecció.

Definició 2.3. Una filigrana és **invisible** quan la diferència entre la imatge original i la imatge marcada és imperceptible per a la sensibilitat humana.

Per tal de quantificar la invisibilitat d'una filigrana utilitzarem la mesura *Peak signal-to-noise ratio (PSNR)* que es basa en calcular la similitud píxel a píxel entre la imatge original i la imatge marcada. Aquesta mesura ve definida per la fórmula següent[11]:

$$PSNR = 10 \cdot \log \frac{255^2}{MSE} \quad \text{amb} \quad MSE = \frac{1}{x \times y} \sum_{i=1}^x \sum_{j=1}^y (I_{ij} - W_{ij})^2$$

On I i W són les matrius formades per les x files i y columnes de píxels de la imatge original i la marcada respectivament. Direm que una filigrana és invisible si la PSNR pren un valor $\geq 30dB$.

Actualment, podem categoritzar les tècniques de marcatge segons diferents criteris tal com es mostra a la figura 1.

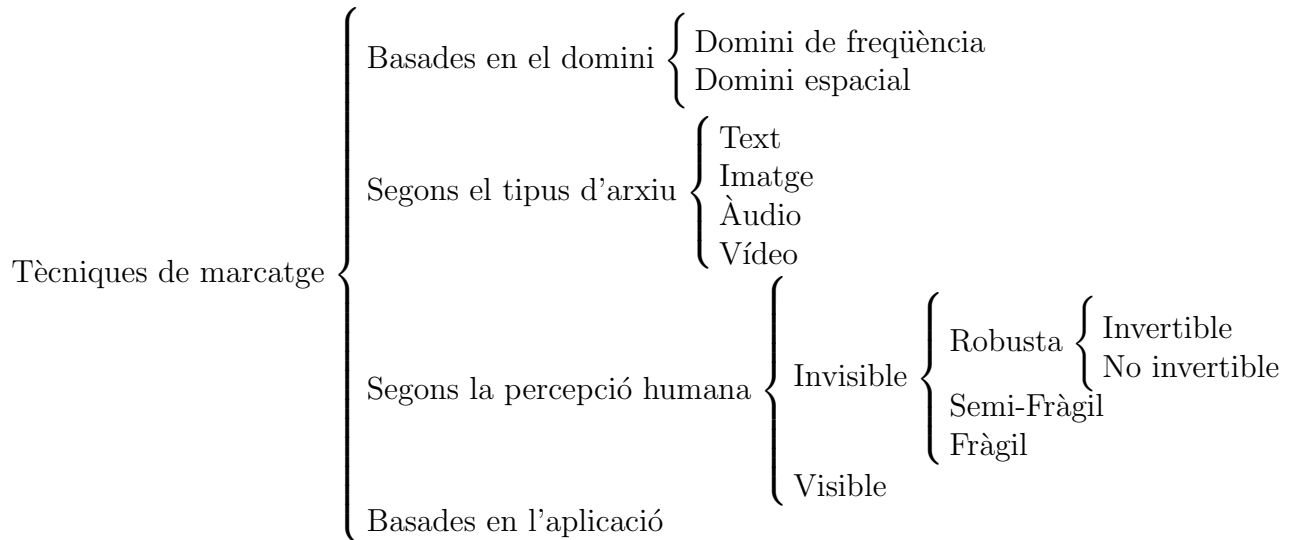


Figura 1: Esquema de la categorització de les tècniques de marcatge

En primer lloc, les tècniques de marcatge es classifiquen segons el domini sobre el qual es marca l'arxiu original, diferenciant les tècniques basades en el domini de freqüència d'aquelles fonamentades en el domini espacial. El domini de freqüència fa referència a l'espai en què representem una funció, un senyal o un moviment periòdic respecte a la seva freqüència. Existeixen multitud de fenòmens que poden modelitzar-se matemàticament mitjançant un senyal sinusoidal o exponencial com a pas previ al seu estudi en el domini de freqüència. Aquesta modelització sovint facilita la seva anàlisi. El domini de freqüència està relacionat amb les *sèries de Fourier*, les quals permeten descompondre un senyal periòdic en un nombre finit o infinit de freqüències. En el cas dels senyals no periòdics, fem ús de la *Transformada de Fourier*². Les tècniques basades en el domini de freqüència són computacionalment més complexes, però alhora resisteixen millor a distorsions. En canvi, les tècniques basades en el domini espacial modifiquen el valor del píxel, el bit o el codi, manipulant directament l'arxiu original. Tanmateix, aquest tipus de tècniques són computacionalment més senzilles [16].

Per altra banda, les tècniques de marcatge també es poden classificar segons el tipus d'arxiu sobre el qual s'incrusta la filigrana, generalment text, imatge, àudio o vídeo, o en funció de si es pretén que el marcatge sigui o no detectat per la percepció humana. Quan la filigrana sigui invisible per als sentits humà, diferenciarem entre marques robustes i fràgils. Les marques robustes seran impossibles d'eliminar

²Aquests conceptes s'estudien en el marc teòric d'aquest treball (3).

sense distorsionar l'arxiu més enllà de nivells tolerables. Se'n fa ús, per exemple, per protegir drets d'autor o *copyright*. Contràriament, les marques fràgils seran aquelles que desapareguin tan bon punt es modifiqui l'arxiu inicial, essent útils per l'autenticació de dades. A més a més, existeixen les marques que anomenarem "semifràgils", definides com aquelles que resisteixen a certs tipus de distorsions i a d'altres no. Per exemple, pot ser interessant que siguin detectables després de comprimir i descomprimir l'arxiu però que desapareguin en cas de manipulacions malintencionades.

Finalment, també podem classificar els mètodes de marcatge en funció de l'objectiu que es persegueix amb aquest procés. Les utilitats més comunes de les tècniques de *watermarking* són:

- Protecció de drets d'autor o *Copyright*. Per a la protecció de la propietat intel·lectual, el propietari de les dades pot introduir una marca d'aigua representant la informació de *copyright* d'aquestes dades. Aquesta filigrana serveix com a prova de propietat quan s'infringeixen els drets d'autor. Actualment, la indústria discogràfica inverteix grans esforços a marcar gravacions en format digital amb aquest objectiu [3].
- Identificació del comprador o *fingerprinting*. El propietari d'un producte digital pot utilitzar filigranes per rastrejar la procedència de còpies il·legals. En aquest cas, el propietari de les dades digitals pot introduir diferents filigranes en les diferents còpies que són subministrades a diferents clients. Aquesta tècnica és comparable a introduir un número de sèrie que està relacionat amb la identitat del client. Això permet el propietari intel·lectual identificar al client en cas que aquest proporcioni les dades a terceres persones.
- Protecció de còpia. La informació emmagatzemada en una marca d'aigua pot controlar directament dispositius de gravació digitals amb l'objectiu d'evitar còpies il·legals.
- Control de la transmissió. Les filigranes poden utilitzar-se, per exemple, per verificar si els anuncis comercials es transmeten tal com han estat contractats.
- Autenticació de les dades. Les filigranes fràgils es poden utilitzar per comprovar l'autenticitat de les dades. Aquest tipus de marques indica si les dades han estat modificades.
- Seguretat mèdica. Les filigranes poden ser una bona mesura de seguretat per incrustar la data i les dades dels pacients a les imatges mèdiques.
- Esteganografia. Les tècniques de marcatge poden servir per comunicacions privades i secretes.

Com ja hem comentat anteriorment, ens hem centrat en els arxius en format imatge i per tal d'implementar una filigrana invisible robusta que serveixi per identificar el destinatari dels documents (*fingerprinting*). Per això, veiem necessari l'estudi de les tècniques de marcatge que treballen sobre el domini de freqüència, ja que són les òptimes per l'objectiu que perseguim.

2.2 Propietats del procés d'impressió i escaneig

Per tal d'elaborar un esquema de marca resistent al procés d'impressió i escàner, d'ara endavant PS (Print-Scan), profundirem en l'estudi d'aquest.

El procés PS engendra una sèrie d'atacs lineals (translació, rotació i escala) i no lineals (distorsions de píxels i addició de soroll) que fa que sigui molt difícil modelar-lo analíticament [14]. La distorsió durant el procés PS depèn de la impressora o l'escàner i fins i tot pot variar en cada moment amb la mateixa impressora o escàner [8]. Tot i això, estudiar les propietats del procés PS es converteix en una necessitat per a dissenyar un esquema de filigrana resistent. Solanki [17] va estudiar les propietats del procés PS en els coeficients de magnitud de la transformada de Fourier Discreta (DFT)³.

Propietats.

- (a) Es conserven els coeficients de freqüència baixa i mitjana molt millor que els d'alta freqüència.
- (b) Modificar lleugerament els coeficients de baixa freqüència augmentant la seva magnitud no és significativament perceptible.
- (c) La majoria de formes es conserven, o, cosa que és el mateix, la majoria de les relacions entre els coeficients de la DFT es conserven, però la magnitud de la DFT individual pot variar.
- (d) Es redueix el rang dels valors d'intensitat dels píxels. Un rang que originalment estava entre 0-255 passa a estar entre 70-220 després del procés PS. A la pràctica, les zones fosques es converteixen en més brillants mentre que les zones brillants es fan més fosques (Fig. 2(a)).
- (e) La distribució de valors dels píxels s'amplia després del procés PS. És a dir, les taques amb lluminositat uniforme (on tots els píxels tenen el mateix valor) perden aquesta uniformitat (Fig. 2(b)).

³Aquest concepte es desenvolupa al marc teòric d'aquest treball (3.4).

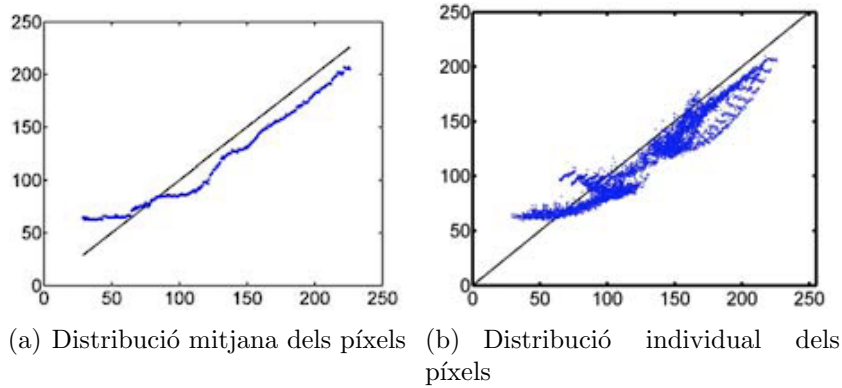


Figura 2: Distribució de la lluminositat després del procés PS en una imatge qualsevol. L'eix X representa la distribució original mentre que l'eix Y representa la distribució després d'imprimir i escanejar [8].

Per les propietats (a) i (b), un mètode d'incrustació de filigranes pot aprofitar els coeficients de freqüència mitjana i baixa per tal d'assegurar certa resistència al procés PS. Per reduir la distorsió que es causa en la imatge, triem marcar els coeficients de mitjana freqüència de la DFT. Així i tot, la incrustació de la filigrana continuarà produint una certa distorsió.

2.3 Tècniques d'incrustació sobre el domini de freqüència

Una tècnica molt comuna és la implementació de la filigrana en el domini de la freqüència mitjançant alguna transformada discreta [14]. Així, l'energia de la filigrana es distribueix per tota la imatge després de la transformació de nou al domini espacial, la qual cosa permet la implementació de filigranes més fortes amb menys impacte perceptiu. Les transformacions més populars són la transformada discreta del cosinus (DCT) [4], la transformada *wavelet* discreta (DWT) [2] i la transformada discreta de Fourier (DFT).

Cada enfocament té els seus avantatges i desavantatges[14]. Els mètodes basats en DWT tenen característiques de multiresolució, que són similars al sistema visual humà i permeten una alta invisibilitat. Tanmateix, no són mètodes resistents a transformacions geomètriques. L'enfocament DCT és molt robust per a la compressió JPEG, ja que la compressió JPEG en si utilitza DCT. Així i tot, els mètodes DCT tampoc resisteixen a fortes distorsions geomètriques. En aquest sentit, l'enfocament DFT té un avantatge en comparació amb els altres mètodes del domini espacial. En primer lloc, és invariant a la translació i resistent a la rotació, la qual cosa es tradueix en una forta robustesa als atacs geomètrics. Per contra, segons Raja [15], els mètodes de transformada ràpida de Fourier (FFT) introdueixen errors d'arrodoniment que poden provocar pèrdues de qualitat i errors en l'extracció de la filigrana. Tanmateix, Cheddad [5] afirma que aquest desavantatge és molt més important per a la comunicació oculta que per a la marca d'aigua.

A causa de la seva resistència als atacs geomètrics i a la distribució d'energia, els mètodes de marca d'aigua FFT són els idonis per crear esquemes de marca d'aigua robustos resistents als atacs de degradació de la imatge amb filigrana en el canal de transmissió, com el procés PS. La resistència del mètode de marca d'aigua al procés PS permet l'ús del mètode en la protecció de les imatges impreses, possibilitant així l'ús de filigranes digitals en la protecció de suports analògics. Tanmateix, com ja hem dit, el procés PS és molt difícil de modelar. Per aquest motiu, no és senzill implementar mètodes de marca d'aigua resistents per al procés PS encara que utilitzin el domini de la transformada de Fourier.

A continuació, aprofundirem en l'estudi de la transformada de Fourier com a eina matemàtica per comprendre les seves propietats i aprofitar els avantatges que pot oferir en el procés d'incrustació de filigranes.

3 Marc teòric

3.1 Sèries de Fourier

Per tal de definir les sèries de Fourier i les seves propietats primer definirem les sèries i els polígons trigonomètrics.

Definició 3.1. Anomenarem *sèrie trigonomètrica* de període 2π a tota sèrie de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (3.1)$$

tal que $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ per a tot $k = 0, 1, 2, \dots$.

Definició 3.2. Anomenarem *polinomi trigonomètric* de grau N i període 2π a tota suma parcial d'una sèrie trigonomètrica. L'expressió serà de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (3.2)$$

tal que $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ per a tot $n = 0, 1, 2, \dots$ i on com a mínim un dels dos coeficients és diferent de zero.

Estudiarem les sèries de Fourier amb la intenció de representar qualsevol funció en un interval (o qualsevol funció periòdica) mitjançant una sèrie trigonomètrica. És a dir, la idea és trobar aquella sèrie trigonomètrica que més s'aproximi a la funció.

3.1.1 Ortogonalitat del sistema trigonomètric

Al llarg de l'estudi farem servir amb freqüència el resultat següent. La família de funcions $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \sin x, \sin 2x, \dots\}$ mitjançant la qual construïm la sèrie 3.1 satisfà la propietat de l'ortogonalitat

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = 0, \quad (3.3)$$

per qualsevol parell φ_1 i φ_2 de funcions diferents de la família. Si $\varphi_1 = \varphi_2 \neq 1$ la integral és igual a π , i en el cas $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$ la integral és igual a 2π .

3.1.2 Coeficients de Fourier

Suposem que la sèrie 3.1 convergeix uniformement a $[-\pi, \pi]$ a la funció f , això és

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Integrem a $[-\pi, \pi]$ la igualtat, tenint en compte que la convergència uniforme permet integrar terme a terme la sèrie, obtenim

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi a_0$$

i aquest resultat ens permet aïllar a_0 .

De la mateixa manera, aplicant la propietat d'ortogonalitat, si multipliquem la igualtat (3.4) per $\cos kx$ i integrem a $[-\pi, \pi]$ llavors

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \pi a_k.$$

Anàlogament, si multipliquem per $\sin kx$ llavors

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \pi b_k.$$

D'aquesta manera, els valors de a_k, b_k queden definits per:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx. \quad (3.4)$$

Definició 3.3. Donada una funció integrable f , els conjunts $\{a_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ i $\{b_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ donats per les fórmules (3.4) s'anomenen **coeficients de Fourier de f** . La sèrie trigonomètrica construïda amb aquests coeficients pren el nom de **sèrie de Fourier**.

Els coeficients de Fourier es defineixen a partir d'una funció, per aquest motiu quan intervinguin simultàniament coeficients de diferents funcions explicitarem aquesta dependència escrivint $a_k(f)$ i $b_k(f)$.

Fins al moment, suposàvem la convergència uniforme de la sèrie a $[-\pi, \pi]$. D'ara endavant, pretendrem trobar condicions suficients sobre la funció que assegurin la convergència de la sèrie de Fourier.

Propietats elementals dels coeficients de Fourier

1. Les successions $\{a_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ i $\{b_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ estan acotades. Vegem-ho:

$$|a_k|, |b_k| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx \quad (3.5)$$

2. Linealitat.

$$a_k(f + g) = a_k(f) + a_k(g), \quad b_k(f + g) = b_k(f) + b_k(g). \quad (3.6)$$

3. Si f' existeix i és contínua,

$$a_k(f) = -\frac{b_k(f')}{k}, \quad b_k(f) = \frac{a_k(f')}{k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

Entenem la continuïtat i l'existència de la derivada referides a la funció estesa periòdicament. Aquesta propietat es demostra integrant per parts; en realitat, si f és contínua, és suficient que sigui derivable a trossos i f' contínua a trossos.

4. Si f és parella, és a dir, si $f(-x) = f(x)$, tenim $b_k(f) = 0$ per a tot k i la fórmula per a_k es pot escriure

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos kx dx. \quad (3.8)$$

Si f és imparella, és a dir, si $f(-x) = -f(x)$, tenim $a_k(f) = 0$ per tot k i

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin kx dx. \quad (3.9)$$

3.1.3 Desigualtat de Bessel

Sigui p_N el polinomi trigonomètric de grau N

$$p_N(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^N (c_k \cos kx + d_k \sin kx). \quad (3.10)$$

De la propietat d'ortogonalitat deduem

$$\int_{-\pi}^{\pi} |p_n(x)|^2 dx = \pi \left[\frac{c_0^2}{2} + \sum_{k=1}^N (c_k^2 + d_k^2) \right]. \quad (3.11)$$

Anomenarem a aquesta fórmula **igualtat de Plancherel** per polinomis trigonomètrics.

Teorema 3.4. *El polinomi trigonomètric de grau N que millor aproxima a una funció f de quadrat integrable en el sentit dels mínims quadrats és el que conté com a coeficients els coeficients de Fourier de f .*

Demostració. Donada una funció f de quadrat integrable (és a dir, amb f^2 integrable) busquem el polinomi trigonomètric de grau N que millor aproxima a f en el sentit de mínims quadrats, és a dir, el que fa mínim el valor de la integral de $|f - p_N|$ en un període. Fent servir que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f - p_N|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f^2 - 2fp_N + p_N^2),$$

la definició dels coeficients de Fourier (3.4), expressant p_N com a (3.10) i usant la igualtat de Plancherel

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f - p_N|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2 - 2\pi \sum_{k=1}^N (c_k a_k + d_k b_k) - \pi a_0 c_0 + \pi \frac{c_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^N (c_k^2 + d_k^2) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2 - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k^2 + b_k^2) \right] + \\ &\quad \pi \left[\frac{(a_0 - c_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k - c_k)^2 + (b_k - d_k)^2 \right]. \end{aligned}$$

Llavors clarament el valor mínim s'obté escollint $c_k = a_k$ i $d_k = b_k$. \square

Partint del càlcul de la demostració, triem $c_k = a_k$ i $d_k = b_k$ i observem que el primer terme és sempre positiu, aleshores tenim que

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2$$

per qualsevol N . Aquesta desigualtat ens dona una cota superior per a les sumes parcials d'una sèrie de termes positius.

Teorema 3.5. (Desigualtat de Bessel). *Si f^2 és integrable,*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 \quad (3.12)$$

En particular, per a les funcions de quadrat integrable deduïm que les successions dels seus coeficients de Fourier $\{a_k\}$ i $\{b_k\}$ convergeixen a zero, condició necessària per a la convergència de la sèrie.

3.1.4 Forma complexa de la sèrie de Fourier

La funció de variable real amb valors complexos e^{-it} es defineix com

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

i canviant t per $-t$ tindriem

$$e^{-it} = \cos t - i \sin t.$$

D'aquestes expressions podem deduir que

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Llavors, la sèrie de Fourier d'una funció es pot escriure de forma complexa com

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}. \quad (3.13)$$

3.2 Convergència puntual de les sèries de Fourier

El nostre objectiu serà estudiar la convergència puntual de la següent successió de funcions:

$$S_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

que representa la suma parcial N -èsima de la sèrie de Fourier de f .

3.2.1 Nucli de Dirichlet

Ens convé representar la suma parcial d'una forma més còmoda de manipular. Substituïm a_k i b_k per una de les seves expressions integrals i tenim

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(t) [\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \cos k(x-t) \right] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t) dt. \end{aligned}$$

Hem utilitzat la notació

$$D_N(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos Nt$$

i anomenarem a aquesta funció D_N **nucli de Dirichlet**. Multiplicant per $\sin(t/2)$ i utilitzant la relació trigonomètrica $2 \cos(kt) \sin(t/2) = [\sin((k+1/2)t) - \sin((k-1/2)t)]$ podem obtenir

$$D_N(t) = \frac{\sin((N+1/2)t)}{2 \sin(t/2)}.$$

El nucli de Dirichlet té les següents propietats elementals:

1. D_N és una funció periòdica de període 2π .
2. D_N és una funció parella, és a dir, $D_N(-t) = D_N(t)$.
3. $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1$.

Demostració. La primera i la segona propietat es dedueixen immediatament de la funció D_N . Per provar la tercera cal tenir en compte la definició del nucli de Dirichlet com a suma de cosinus, sabent que el sinus és una funció parella tenim

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos Nt dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{t}{2} + \sin t + \sin 2t + \dots + \sin Nt \right]_{-\pi}^{\pi} = 1 \end{aligned}$$

□

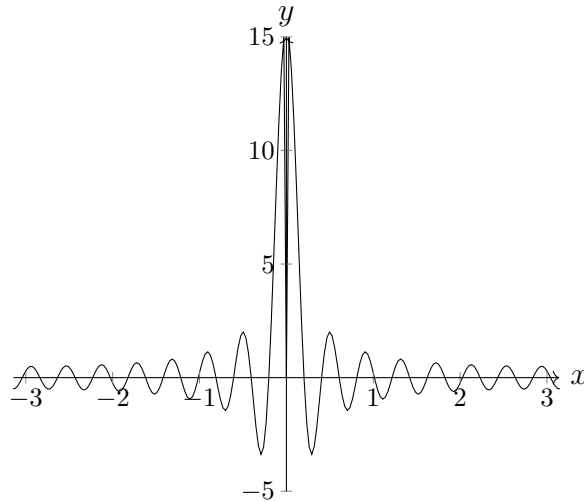


Figura 3: Gràfica de D_{15} en un període

La primera propietat permet canviar l'interval d'integració a qualsevol altre de longitud 2π . Com que f també és de període 2π , es compleix

$$S_N f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt. \quad (3.14)$$

Canviant la variable t per $-t$ en l'interval $(-\pi, 0)$ i fent servir la segona propietat també es compleix

$$S_N f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] D_N(t) dt. \quad (3.15)$$

3.2.2 Lema de Riemann-Lebesgue

Lema 3.6. *Si f és integrable i λ real (no necessàriament $\lambda \in \mathbb{Z}$),*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin \lambda t dt = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos \lambda t dt = 0.$$

En particular, es dedueix que els coeficients de Fourier d'una funció integrable tendeixen a 0, ampliant així el resultat que ja havíem vist per funcions de quadrat integrable a partir del teorema 3.5.

Demostració. Si f és la funció característica d'un interval (a, b) es té

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin \lambda t dt \right| = \left| \int_a^b \sin \lambda t dt \right| = \left| \frac{\cos \lambda b - \cos \lambda a}{\lambda} \right| \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0.$$

Anàlogament amb el cosinus.

Llavors deduïm que el resultat és cert per qualsevol funció esglaonada.

Si f és integrable, donat que existeix $\varepsilon > 0$, existeix g_ε esglaonada tal que

$$\int |f - g_\varepsilon| < \varepsilon/2.$$

Fent

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin \lambda t \, dt \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g_\varepsilon(t)| \, dt + \left| \int_{-\pi}^{\pi} g_\varepsilon(t) \sin \lambda t \, dt \right|$$

llavors si λ és prou gran, el terme de l'esquerra es fa més petit que ε . \square

3.2.3 Propietat de localització

Com s'ha vist fins al moment, els coeficients de Fourier es calculen a partir d'integrals en un període, de manera que si dues funcions es comporten igual en un petit entorn d'un punt, però difereixen en la resta del període tindran coeficients de Fourier diferents. Això ens podria portar a intuir que el comportament d'ambdues sèries en aquest punt també serà diferent, però a continuació veurem que no és així, sinó que la convergència de la sèrie de Fourier és una propietat local.

Teorema 3.7. (Principi de localització de Riemann).

- i. Sigui f integrable i 2π -periòdica tal que $f(x) = 0$ per tot $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ i per algun $\delta > 0$, llavors*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x_0) = 0.$$

- ii. Si f i g són integrables i 2π -periòdiques i $f(x) = g(x)$ per tot $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, llavors o bé existeixen $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x_0)$ i $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N g(x_0)$ i són iguals, o bé no existeix cap dels dos límits.*

Demostració. Provem (i). A partir de (3.14) i la hipòtesi de (i) tenim

$$S_N f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{\delta \leq |t| < \pi} \frac{f(x_0 - t)}{2 \sin t/2} \sin \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) t \right) dt.$$

La funció $\sin t/2$ és contínua i no s'anul·la $\delta \leq |t| \leq \pi$. Com que $f(x_0 - t)$ és integrable,

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(x_0 - t)}{\sin t/2}, & \text{si } \delta \leq |t| \leq \pi, \\ 0, & \text{si } |t| \leq \delta \end{cases}$$

és integrable i el lema de Riemann-Lebesgue implica que el límit de $S_N f(x_0)$ és 0. Provem (ii). N'hi ha prou amb observar que $S_N f(x_0) - S_N g(x_0) = S_N (f - g)(x_0)$ i aplicar (i) a $f - g$. \square

3.2.4 El teorema de Dirichlet

El teorema de Dirichlet fa referència a la convergència de les sèries de Fourier per funcions monòtones a trossos. Cal tenir en compte que una funció monòtona i acotada en un interval $[a, b]$ és integrable i té límits laterals finits a cada punt. Si aquests límits no coincideixen aleshores la funció tindrà una discontinuïtat de salt finit. La suma d'aquests salts no pot ser més gran que la diferència entre els valors de la funció als extrems de l'interval. Llavors, el conjunt de discontinuïtats amb salt més gran que $1/n$ és finit i, per tant, el conjunt de salts és numerable. Les mateixes propietats seran certes per una funció monòtona a trossos.

Teorema 3.8. *Sigui f una funció monòtona a trossos i acotada a $[-\pi, \pi]$. Llavors, $S_N f(x)$ convergeix a $\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$. En particular, convergeix a $f(x)$ si la funció és contínua a x .*

Entendrem que hem estès la funció per periodicitat quan el punt x és un dels extrems de l'interval. És a dir, $f(\pi+) = f((-\pi)+)$ i $f((-\pi)-) = f(\pi-)$. Per demostrar el teorema anterior, farem servir els dos lemes següents.

Lema 3.9. *Sigui g no decreixent i no negativa a l'interval $[a, b]$ i h contínua amb un nombre finit de canvis de signe a $[a, b]$. Existeix $c \in (a, b)$ tal que*

$$\int_a^b g(t)h(t) dt = g(b) \int_c^b h(t) dt.$$

Demostració. Descomponem (a, b) en els intervals $(a_0, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_{k-1}, a_k)$ en els que h té signe constant ($a_0 = a, a_k = b$). Llavors,

$$\int_{a_{j-1}}^{a_j} g(t)h(t) dt = \mu_j \int_{a_{j-1}}^{a_j} h(t) dt$$

on $g(a_{j-1}+) \leq \mu_j \leq g(a_j-)$. Escriurem $H(x) = \int_x^b h(t) dt$, de manera que

$$\begin{aligned} \int_a^b g(t)h(t) dt &= \sum_{j=1}^k \mu_j [H(a_{j-1}) - H(a_j)] \\ &= \mu_1 H(a) + \sum_{j=1}^{k-1} (\mu_{j+1} - \mu_j) H(a_j) + (g(b) - \mu_k) H(b) \end{aligned}$$

(hem afegit $g(b)H(b)$ que és zero). Els coeficients que multipliquen a valors de la funció H en l'anterior expressió són tots no negatius per ser g no decreixent, de manera que es pot escriure com el producte de la suma dels coeficients (que és $g(b)$) per un valor comprès entre el màxim i el mínim de H . Per la continuïtat H , aquest valor serà $H(c)$ per algun $c \in (a, b)$. \square

Lema 3.10. *Existeix una constant M (independent de N) tal que*

$$\left| \int_{\eta}^{\delta} D_N(t) dt \right| \leq M$$

per tot $0 \leq \eta \leq \delta \leq \pi$.

Demostració. Sumant i restant $t^{-1}(\sin(N + 1/2)t)$ a l'integrand tenim

$$\left| \int_{\eta}^{\delta} \frac{\sin(N + 1/2)t}{2 \sin(t/2)} dt \right| \leq \int_{\eta}^{\delta} \left| \frac{1}{2 \sin t/2} - \frac{1}{t} \right| dt + \left| \int_{\eta}^{\delta} \frac{\sin((N + 1/2)t)}{t} dt \right|.$$

La primera integral del segon membre s'acota per la integral en $(0, \pi)$ i com que l'integrand és una funció contínua, la integral és finita. Un canvi de variable en l'última integral mostra que és suficient provar que

$$\left| \int_A^B \frac{\sin t}{t} dt \right|$$

està acotada independentment de A i B amb $0 \leq B < \infty$. Si $B \leq 1$, és suficient observar que $\sin t \leq t$ i la integral s'acota per 1. Si $A \geq 1$, integrant per parts,

$$\left| \int_A^B \frac{\sin t}{t} dt \right| = \left| \frac{\cos A}{A} - \frac{\cos B}{B} - \int_A^B \frac{\cos t}{t^2} dt \right| \leq \frac{3}{A} \leq 3.$$

Finalment, si $A < 1 < B$, s'acoten les integrals a $(A, 1)$ i a $(1, B)$ com les anteriors. \square

Prova del teorema 3.8. Hem de provar que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] D_N(t) dt = \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)],$$

tenint en compte les propietats del nucli Dirichlet es pot escriure

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t) - f(x+) - f(x-)] D_N(t) dt = 0.$$

És suficient provar que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} g(t) D_N(t) dt = 0 \tag{3.16}$$

per g monòtona a trossos a $(0, \pi)$ i tal que $g(0+) = 0$. Aplicant (3.16) a $f(x+t) - f(x+)$ i $f(x-t) - f(x-)$ queda provat el teorema.

Podem suposar que g és creixent en un interval a la dreta de 0 (si és decreixent, canviem el signe de g). Donat que $\varepsilon > 0$, escollim $\delta > 0$ tal que g és creixent a $(0, \delta)$ i $g(\delta) < \varepsilon/2M$ (on M és la constant del lema 3.10), cosa que és possible perquè $g(0+)=0$. Aplicant successivament els lemes 3.9 i 3.10 tenim

$$\left| \int_0^{\delta} g(t) D_N(t) dt \right| = \left| g(\delta) \int_{\mu}^{\delta} D_N(t) dt \right| \leq \varepsilon/2.$$

Pel principi de localització, prenent N prou gran tenim que la integral

$$\left| \int_{\delta}^{\pi} g(t) D_N(t) dt \right| \leq \varepsilon/2.$$

□

3.2.5 Convergència de funcions contínues

Comentarem ara alguns resultats referents a la convergència de les sèries de Fourier de funcions contínues. Podríem esperar que la suma parcial de Fourier per una funció contínua sigui convergent a tot punt. Aquest delit, però, es veu truncat pel resultat següent:

Teorema 3.11. (*Du Bois-Reymond, 1873*). *Existeix una funció contínua a $[-\pi, \pi]$ tal que*

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} |S_N f(0)| = \infty.$$

Llavors, la suma parcial de la sèrie de Fourier d'una funció contínua no convergeix en el punt $x = 0$. La demostració moderna d'aquest resultat utilitza el principi de limitació uniforme i es pot trobar en la secció 3.5 del llibre de *Pereyra i Ward* [12].

Així i tot, l'any 1913, el matemàtic rus Nikolai Nikolaevich Luzin (1883–1950) va conjeturar el següent: *Tota funció de quadrat integrable, i, per tant, en particular, tota funció contínua, és igual a la suma de la seva sèrie de Fourier a gairebé tot arreu*. Enunciat que quasi es veu refutat deu anys després amb la demostració del següent teorema:

Teorema 3.12. (*Kolmogorov, 1926*). *Existeix una funció a $[-\pi, \pi]$ integrable de Lebesgue tal que $\limsup_{N \rightarrow \infty} |S_N f(x)| = \infty$ per tot $x \in [-\pi, \pi]$.*

Això significa que podem trobar una funció integrable de Lebesgue tal que la seva suma parcial $S_N f$ divergeixi a tots els punts. Després d'aquest resultat, sembla lògic pensar que podríem trobar una construcció similar per a funcions contínues. Per contra, el teorema de *Carleson* va demostrar que la suma parcial de Fourier d'una funció contínua convergeix a quasi tot punt.

Teorema 3.13. (*Carleson, 1966*). *Suposem una funció f a $[-\pi, \pi]$ de quadrat integrable. Llavors $S_N f(x)$ convergeix a $f(x)$ quan N convergeix a ∞ , llevat potser d'algun conjunt de mesura zero.*

La següent qüestió és, si, donat un conjunt de mesura zero a $[-\pi, \pi]$, podem construir una funció contínua tal que la seva sèrie de Fourier divergeixi en aquest conjunt. El següent teorema la respon.

Teorema 3.14. (*Kahane, Katznelson, 1966*). *Sigui $E \subset [-\pi, \pi]$ un conjunt de mesura zero, llavors existeix una funció f a $[-\pi, \pi]$ tal que*

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} |S_N f(x)| = \infty$$

per tot $x \in E$.

La prova d'aquest teorema es pot trobar al capítol 2 secció 3 del llibre de *Katznelson* [9].

3.3 Convergència uniforme de la sèrie de Fourier

La convergència les sèries de Fourier és, doncs, més delicada del que podria semblar en un primer moment. Tot i això, veurem dos resultats inicials que ens serviran per provar la convergència uniforme de la sèrie de Fourier en un entorn sota certes condicions. No ens estendrem demostrant aquests dos resultats, la demostració es troba detallada al capítol 3 del llibre “*Lecciones sobre las series y transformadas de Fourier*” de l'autor Javier Duoandikoetxea [6].

En primer lloc, cal recordar el criteri M de Weierstras per la convergència uniforme, el qual estableix que si existeixen cotes M_n tals que $|f_n(x)| \leq M_n$ per tot x i tot n , aleshores la convergència de $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ implica la convergència uniforme de la sèrie de funcions $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$. Si volem aplicar aquest criteri a la sèrie trigonomètrica (3.1) necessitarem que la sèrie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|)$$

sigui convergent.

Teorema 3.15. *Si f és una funció contínua a $[-\pi, \pi]$ la derivada de la qual existeix excepte en un nombre finit de punts, és contínua a trossos i acotada. Llavors, la sèrie de Fourier de f convergeix uniformement a $[-\pi, \pi]$.*

S'entén que en els extrems de l'interval estenem la funció periòdicament mantenint la continuïtat, per tant, $f(\pi) = f(-\pi)$.

Teorema 3.16. *Si f és una funció nul·la en un interval $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$, la sèrie de Fourier convergeix a zero uniformement a $[a + \delta, b - \delta]$ per $\delta > 0$.*

Teorema 3.17. *Si f és contínua, amb derivada contínua a trossos i acotada en un interval $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$. Llavors la sèrie de Fourier de f convergeix a f uniformement a $[a + \delta, b - \delta]$ per $\delta > 0$.*

Demostració. Només cal definir una funció g que coincideixi amb f a $[a, b]$ i que compleixi les condicions del teorema 3.15 a $[-\pi, \pi]$. Això sempre és possible, ja que podem utilitzar funcions afins fora de l'interval $[a, b]$. S'aplica el teorema 3.16 a $f - g$. \square

Veiem, doncs, que si una funció f té algunes propietats més a banda de la continuïtat, llavors la seva sèrie de Fourier convergeix uniformement a f a $[-\pi, \pi]$. Hom podria preguntar-se què passa quan la funció té discontinuïtats. En aquest cas, no és possible una bona convergència en els entorns d'aquestes. De fet, si x_0 és un punt de discontinuïtat, la successió convergeix al valor:

$$S_N f(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

Com es pot apreciar, a mesura que anem adherint més termes a la sèrie, això es va aproximant a l'ona donada de manera que les oscil·lacions es tornen més ràpides i més petites, però els pics a les discontinuïtats no disminueixen. La persistència d'aquests pics en les sèries de Fourier s'anomenen fenòmens de Gibbs (Fig. 4). Ocorren cada vegada que els senyals tenen discontinuïtats de salt com en el cas de la funció ona quadrada.

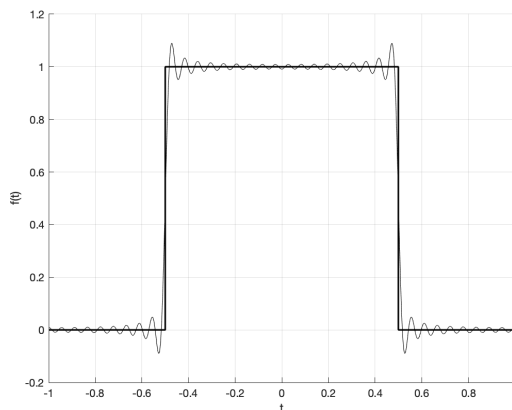


Figura 4: Fenomen de Gibbs.
Aproximació de Fourier per 35 termes.

3.4 Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$

Les sèries de Fourier representen funcions definides en un interval de la recta o, equivalentment, funcions periòdiques definides en la recta. Per representar funcions definides en tota la recta i no periòdiques, fem servir la *transformada de Fourier*. A partir d'ara ens és convenient treballar amb la forma complexa de les sèries de Fourier explicada anteriorment (3.13).

Sigui f una funció integrable definida en \mathbb{R} . La seva transformada de Fourier serà la funció definida també en \mathbb{R} , que representarem per \hat{f} , donada per la fórmula:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx. \quad (3.17)$$

3.4.1 Teorema de la inversa

Teorema 3.18. *Si f i \hat{f} són integrables, aleshores*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i x \xi} d\xi. \quad (3.18)$$

A més, el terme de la dreta és una funció contínua a x , de manera que f coincideix en quasi tot punt amb una funció contínua i es dona la igualtat en els punts de continuïtat de f .

3.4.2 Transformada de Fourier en \mathbb{R}^n

La transformada de Fourier es defineix per funcions integrables a \mathbb{R}^n com la funció a \mathbb{R}^n donada per

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i(x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n)} dx_1 \dots dx_n. \quad (3.19)$$

3.5 Transformada de Fourier discreta i ràpida

Les sèries i transformades de Fourier tenen multitud d'usos pràctics en camps molt variats que van des de l'òptica fins a les comunicacions, passant per l'electromagnetisme o la mecànica aplicada. No obstant això, moltes vegades les dades no són definides per expressions analítiques, sinó per conjunts de punts. Davant de bases de dades discretes, ens cal una eina discreta, en aquestes situacions ens serà útil treballar amb la transformada de Fourier discreta.

A més, sovint ens cal optimitzar la quantitat de càlculs. Per aquest motiu estudiarem la transformada de Fourier ràpida, un algorisme que ens permetrà calcular la transformada discreta de Fourier de forma eficient.

3.5.1 Transformada de Fourier discreta

Per tal de definir els conceptes de la forma més clara possible, en el següent capítol adoptarem la nomenclatura utilitzada en el llibre "*An introduction to Wavelets Through Linear Algebra.*" [7]. Treballarem amb vectors a l'espai \mathbb{C}^N i indexarem els N elements d'un vector amb $j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. A més, ens referirem a l'element j d'un vector $z \in \mathbb{C}^N$ com $z(j)$, en comptes d'utilitzar la notació tradicional z_j . Des d'aquest punt de vista, z queda definida com una funció sobre el grup finit $\mathbb{Z}_N = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$. Notem que anomenem \mathbb{Z}_N a $\mathbb{Z}/(N)$.

Llavors, estendrem z al conjunt d'enters fent que z sigui N -periòdica de manera que:

$$z(j + mN) = z(j), \quad \forall j, m \in \mathbb{Z}.$$

Finalment, seguint aquesta dinàmica, anomenarem $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ a l'espai vectorial \mathbb{C}^N amb la seva suma, multiplicació per escalar habitual i la norma euclidiana. Per tant,

$$\ell^2(\mathbb{Z}_N) = \{z = (z(0), z(1), \dots, z(N-1)) : z(j) \in \mathbb{C}, 0 \leq j \leq N-1\}$$

En aquesta notació, el producte escalar a $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ és

$$\langle z, w \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} z(k) \overline{w(k)}$$

amb la norma associada

$$\|z\| = \left(\sum_{k=0}^{N-1} |z(k)|^2 \right)^{1/2}.$$

Definició 3.19. Definim $E_0, E_1, \dots, E_{N-1} \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ com:

$$E_m(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{2\pi i m n}{N}} \quad 0 \leq m, n \leq N-1.$$

Lema 3.20. El conjunt E_0, E_1, \dots, E_{N-1} és una base ortonormal per $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

Demostració. Suposem $j, k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Llavors

$$\begin{aligned} \langle E_j, E_k \rangle &= \sum_{n=0}^{N-1} E_j(n) \overline{E_k(n)} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i j n / N} \overline{\frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i k n / N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i j n / N} e^{-2\pi i k n / N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (e^{2\pi i (j-k) / N})^n, \end{aligned}$$

on fem servir $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, $e^{i\theta} e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$ per tot $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ i $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

Si $j = k$, tots els termes de dins la suma prenen valor 1, aleshores $\langle E_j, E_j \rangle = N^{-1} \sum_{j=0}^{N-1} 1 = 1$. Per tant, $\|E_j\|^2 = 1$ per tot j .

Si $j \neq k$, aleshores $e^{2\pi i (j-k) / N} \neq 1$ per $0 \leq j, k \leq N-1$ mentre $-N < j-k < N$. Per tant, la suma és la suma parcial d'una sèrie geomètrica, així que

$$\sum_{n=0}^{N-1} (e^{2\pi i (j-k) / N})^n = \frac{1 - (e^{2\pi i (j-k) / N})^N}{1 - e^{2\pi i (j-k) / N}},$$

ja que per tot $z \neq 1$ tenim $\sum_{n=0}^k z^n = \frac{1-z^{k+1}}{1-z}$. A més,

$$(e^{2\pi i (j-k) / N})^N = e^{2\pi i (j-k)} = 1$$

mentre $j-k \in \mathbb{Z}$. Així, per $j \neq k$, $\langle E_j, E_k \rangle = 0$, és a dir, $E_j \perp E_k$.

Tenim llavors que $\{E_0, \dots, E_{N-1}\}$ és un conjunt ortonormal i linealment independent, ja que en un espai vectorial amb producte escalar, si B és un conjunt de vectors ortogonals i $0 \notin B$, aleshores B és linealment independent).

Finalment, $\{E_0, \dots, E_{N-1}\}$ és una base de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$. □

Definició 3.21. (Transformada de Fourier discreta) Suposem $z = (z(0), z(1), \dots, z(N-1)) \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$. Per $k = 0, 1, \dots, N-1$, definim

$$\hat{z}(k) = \sum_{j=0}^{N-1} z(j) e^{\frac{-2\pi i j k}{N}} \quad (3.20)$$

Per tant, si

$$\hat{z} = (\hat{z}(0), \hat{z}(1), \dots, \hat{z}(N-1))$$

llavors $\hat{z} \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$. La funció

$$\begin{aligned} \hat{\cdot}: \ell^2(\mathbb{Z}_N) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_N) \\ z &\longmapsto \hat{z} \end{aligned}$$

pren el nom de **Transformada de Fourier discreta (DFT)**.

Propietats.

1. *Linealitat*: $\widehat{\lambda z + w} = \lambda \widehat{z} + \widehat{w}$
2. *Translació en el temps*: Si $z(k) = w(k - n)$, llavors $\widehat{z}(k) = \widehat{w}(k) e^{-\frac{2\pi i k n}{N}}$
3. *Translació en la freqüència*: Si $z(k) = w(k) e^{\frac{2\pi i k n}{N}}$, llavors $\widehat{z}(k) = \widehat{w}(k - n)$
4. *Modulació*: Si $z(k) = w(k) \cos 2kn/N$, llavors $\widehat{z}(k) = \frac{1}{2} (\widehat{w}(k - n) + \widehat{w}(k + n))$

Com a transformació lineal de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ a $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$, la transformada discreta de Fourier admet una representació matricial. Si z i \widehat{z} són les matrius columna, les entrades del qual són els valors $z(k)$ i $\widehat{z}(k)$, respectivament, (3.20) es pot escriure matricialment com

$$\widehat{z} = A(\omega)z$$

on

$$A(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

i $\omega = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$. Sabent que $\omega^{jN} = 1$ podem simplificar la matriu.

A continuació presentarem un resultat que serà d'utilitat per la part pràctica d'aquest treball, es tracta del cas particular en què $z \in \mathbb{R}^N$.

Lema 3.22. *Sigui $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, llavors la transformada de Fourier discreta de z compleix*

$$z \in \mathbb{R}^N \Leftrightarrow \widehat{z}(N - k) = \overline{\widehat{z}(k)}.$$

A aquesta propietat l'anomenarem *simetria conjugada de la transformada de z* .

Demostració. Sigui $z \in \mathbb{R}^N$. Sabem que $z = \bar{z}$, ja que la part imaginària és nul·la, i que $\overline{e^{ki}} = e^{-ki}$ per tot k . Llavors

$$\begin{aligned} \widehat{z}(N - k) &= \sum_{j=0}^{N-1} z(j) \cdot e^{-\frac{2\pi i j(N-k)}{N}} = \sum_{j=0}^{N-1} z(j) \cdot e^{-2\pi i j} \cdot e^{\frac{2\pi i j k}{N}} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} z(j) \cdot e^{-\frac{2\pi i j k}{N}} = \sum_{j=0}^{N-1} \overline{z(j)} \cdot \overline{e^{-\frac{2\pi i j k}{N}}} \end{aligned}$$

Per les propietats dels complexos,

$$\widehat{z}(N - k) = \overline{\widehat{z}(k)}$$

Veurem ara que el recíproc també és cert. Sigui $\widehat{z}(N-k) = \overline{\widehat{z}(k)}$, llavors $\forall k$

$$\sum_{j=0}^{N-1} z(j) \cdot e^{-\frac{2\pi i j(N-k)}{N}} = \overline{\sum_{j=0}^{N-1} z(j) \cdot e^{-\frac{2\pi i j k}{N}}} = \sum_{j=0}^{N-1} \overline{z(j)} \cdot e^{\frac{2\pi i j k}{N}}.$$

Per tant,

$$\sum_{j=0}^{N-1} z(j) \cdot e^{-\frac{2\pi i j(N-k)}{N}} - \overline{z(j)} \cdot e^{\frac{2\pi i j k}{N}} = 0,$$

és a dir,

$$\sum_{j=0}^{N-1} (z(j) - \overline{z(j)}) \cdot e^{-\frac{2\pi i j k}{N}} = 0$$

En termes de la base ortonormal de la definició 3.19, això és

$$\sum_{j=0}^{N-1} \sqrt{N} \cdot (z(j) - \overline{z(j)}) \cdot E_j = 0$$

Pel lema 3.20, els vectors E_j són linealment independents i tenim

$$z(k) - \overline{z(k)} = 0 \quad \forall k$$

Per la qual cosa $z \in \mathbb{R}^N$. □

3.5.2 Transformada inversa

Sigui $A(\overline{w})$ és la matriu 3.21 amb \overline{w} en comptes de w , aleshores pel lema 3.20

$$A(w)A(\overline{w}) = A(\overline{w})A(w) = NI_N$$

on I_N és la matriu identitat de dimensió N .

$$z = \frac{1}{N} A(\overline{w}) \widehat{z},$$

o sigui,

$$z(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \widehat{z}(j) \omega^{-jk} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \widehat{z}(j) e^{2\pi i j k / N} \quad (3.22)$$

és la transformada inversa.

3.5.3 Igualtat de Plancherel

Teorema 3.23. *Amb la notació anterior es dona*

$$\sum_{k=0}^{N-1} z(k)\overline{v(k)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{z}(k)\overline{\hat{v}(k)}$$

i

$$\sum_{k=0}^{N-1} |z(k)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{z}(k)|^2$$

Demostració. Farem servir la notació matricial. El primer membre de la primera igualtat és el producte matricial $z^t \bar{v}$ on el superíndex t indica la transposada de la matriu. Llavors

$$z^t \bar{v} = \frac{1}{N^2} \hat{z}^t A(\bar{w}) A(w) \bar{v} = \frac{1}{N} \hat{z}^t \bar{v}$$

ja que la transposada d'un producte és el producte de transposades en ordre invers i que $A(w)$ és simètrica i per tant $A = A^t$. La segona igualtat és directa fent $z = v$. \square

3.5.4 Convulsió

Definició 3.24. *La convulsió de dues funcions f i g definides en $0, 1, \dots, N - 1$ es defineix com*

$$(f * g)(k) = \sum_{l=0}^{N-1} f(l)g(k-l),$$

on tenim en compte l'extensió periòdica de g , ja que $k-l$ pot ser negatiu.

Propietats.

1. *Commutativa:* $f * g = g * f$
2. *Associativa:* $f * (g * h) = (f * g) * h$
3. *Distributiva:* $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$

Lema 3.25. *La transformada discreta de Fourier de la convulsió és la següent:*

$$\widehat{z * v}(k) = \hat{z}(k) \cdot \hat{v}(k)$$

Demostració.

$$\begin{aligned}
\widehat{z * v}(k) &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{l=0}^{N-1} z(l)v(j-l) \right) \omega^{jk} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} z(l)v(j-l) \omega^{lk} \omega^{(j-l)k} \\
&= \left(\sum_{r=0}^{N-1} v(r) \omega^{rk} \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{N-1} z(l) \omega^{lk} \right) = \widehat{v}(k) \cdot \widehat{z}(k).
\end{aligned}$$

□

3.5.5 Transformada de Fourier ràpida

El càlcul de la transformada de Fourier discreta requereix N^2 multiplicacions. Sovint, aquest pes operacional no és viable a l'hora d'aplicar la transformada de Fourier a casos pràctics. És per aquest motiu que cal reduir el cost operacional mitjançant l'algorisme que anomenarem *la transformada ràpida de Fourier*.

La idea fonamental és la següent: si N és parell podem organitzar el càlcul de manera que es realitzin dues transformades de Fourier discretes a l'espai $\ell^2(\mathbb{Z}_{N/2})$ i després una combinació adequada d'ambdues. Així reduiríem a la meitat el nombre d'operacions. Aquest procés es pot aplicar successivament fins a reduir considerablement el nombre d'operacions.

Abans de veure el cas general estudiarem el cas $N = 4$. Sigui ara $\omega = -i$ i la transformada

$$\begin{pmatrix} \widehat{z}(0) \\ \widehat{z}(1) \\ \widehat{z}(2) \\ \widehat{z}(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(0) \\ z(1) \\ z(2) \\ z(3) \end{pmatrix}$$

Escrivim els elements de l'últim vector de manera que apareguin primer les variables parelles i després les imparelles, per mantenir la igualtat caldrà canviar l'ordre de les columnes de la matriu.

$$\begin{pmatrix} \widehat{z}(0) \\ \widehat{z}(1) \\ \widehat{z}(2) \\ \widehat{z}(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -i & i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(0) \\ z(2) \\ z(1) \\ z(3) \end{pmatrix}$$

Si dividim la matriu resultant en quatre matrius 2×2 , observem que les dues de l'esquerra són iguals i corresponen a la matriu transformada discreta de Fourier a $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ (en aquest cas \mathbb{C}^2) i que les de la dreta resulten de multiplicar les files de l'esquerra per $1, -i, -1$ i i respectivament, o cosa equivalent, per $\omega^0, \omega^1, \omega^2$ i ω^3 .

Definim els elements z_p i z_s de \mathbb{C}^2 següents:

$$z_p = \begin{pmatrix} z(0) \\ z(2) \end{pmatrix}, \quad z_s = \begin{pmatrix} z(1) \\ z(3) \end{pmatrix}$$

Fent servir (3.23) tenim

$$\begin{pmatrix} \widehat{z}(0) \\ \widehat{z}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} z_p + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} z_s$$

$$\begin{pmatrix} \widehat{z}(2) \\ \widehat{z}(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} z_p + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} z_s$$

Com veiem, la transformada de f es pot obtenir a partir de les de z_p i z_s .

Vegem-ho ara en el cas general. Sigui $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, la seva transformada de Fourier es calcularia com

$$\begin{pmatrix} \widehat{z}(0) \\ \widehat{z}(1) \\ \dots \\ \widehat{z}(\frac{N}{2}-1) \\ \widehat{z}(\frac{N}{2}) \\ \widehat{z}(\frac{N}{2}+1) \\ \dots \\ \widehat{z}(N-1) \end{pmatrix} = A(\omega) \begin{pmatrix} z(0) \\ z(2) \\ \dots \\ z(\frac{N}{2}-1) \\ z(\frac{N}{2}) \\ z(\frac{N}{2}+1) \\ \dots \\ z(N-1) \end{pmatrix}$$

on

$$A(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \dots & \omega^{\frac{N}{2}-1} & -1 & \omega^{\frac{N}{2}+1} & \dots & \omega^{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega^{\frac{N}{2}-1} & \dots & \omega^{(\frac{N}{2}-1)^2} & -1 & \omega^{(\frac{N}{2}-1)(\frac{N}{2}+1)} & \dots & \omega^{(\frac{N}{2}-1)(N-1)} \\ 1 & -1 & \dots & -1 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & \omega^{\frac{N}{2}+1} & \dots & \omega^{(\frac{N}{2}+1)(\frac{N}{2}-1)} & -1 & \omega^{(\frac{N}{2}+1)^2} & \dots & \omega^{(\frac{N}{2}+1)(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega^{N-1} & \dots & \omega^{(N-1)(\frac{N}{2}-1)} & -1 & \omega^{(N-1)(\frac{N}{2}+1)} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \dots & \omega^{\frac{N}{2}-1} & -1 & -\omega & \dots & \omega^{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega^{\frac{N}{2}-1} & \dots & \omega & -1 & -\omega^{\frac{N}{2}-1} & \dots & \omega^{(\frac{N}{2}-1)\frac{N}{2}} \\ 1 & -1 & \dots & -1 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & -\omega & \dots & -\omega^{\frac{N}{2}-1} & -1 & \omega & \dots & -\omega^{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -\omega^{\frac{N}{2}-1} & \dots & -\omega & -1 & -\omega^{(\frac{N}{2}-1)} & \dots & -\omega^{(\frac{N}{2}-1)\frac{N}{2}} \end{pmatrix}.$$

Reordenem aquest vector vertical col·locant els termes parells al principi del vector i els termes imparells a la cua. Reordenant adequadament les columnes de

la matriu $A(\omega)$ obtindrem:

$$\begin{pmatrix} \hat{z}(0) \\ \hat{z}(1) \\ \dots \\ \hat{z}(\frac{N}{2}-1) \\ \hat{z}(\frac{N}{2}) \\ \hat{z}(\frac{N}{2}+1) \\ \dots \\ \hat{z}(N-1) \end{pmatrix} = R(\omega) \begin{pmatrix} z(0) \\ z(2) \\ \dots \\ z(N-2) \\ z(1) \\ z(3) \\ \dots \\ z(N-1) \end{pmatrix}$$

on

$$R(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega^2 & \dots & \omega^{N-2} & \omega & \omega^3 & \dots & \omega^{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega^{N-2} & \dots & \omega^{(\frac{N}{2}-1)^2} & \omega^{\frac{N}{2}-1} & \omega^{3(\frac{N}{2}-1)} & \dots & \omega^{\frac{N}{2}(\frac{N}{2}-1)} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & \omega^2 & \dots & \omega^{N-2} & -\omega & -\omega^3 & \dots & -\omega^{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega^{N-2} & \dots & \omega^{(\frac{N}{2}-1)^2} & -\omega^{\frac{N}{2}-1} & -\omega^{3(\frac{N}{2}-1)} & \dots & -\omega^{(\frac{N}{2}-1)\frac{N}{2}} \end{pmatrix}$$

Si definim dos elements z_p i z_s a $\mathbb{C}^{N/2}$ com

$$z_p(j) = v(z_j), \quad z_s(j) = z(2j+1) \quad \text{per } j = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1,$$

deduïm que

$$\begin{aligned} \hat{z}(j) &= \hat{z}_p(j) + \omega^j \hat{z}_s(j), \\ \hat{z}\left(\frac{N}{2} + j\right) &= \hat{z}_p(j) - \omega^j \hat{z}_s(j) \end{aligned}$$

per $j = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$,

Si $N/2$ és parell podem aplicar el mateix argument i així successivament. En el cas més favorable, N serà una potència de 2, en el qual l'estalvi d'operacions és considerable, ja que de N^2 operacions reduïrem a $2N \log_2 N$ (contant les multiplicacions per 1, si les eliminem del càlcul quedaria només un quart de les operacions).

4 Disseny del mètode

4.1 Esquema del mètode d'incrustació i test

A l'article "Discrete Fourier Transform Based Watermarking Method with an optimal implementation radius" [14] s'estudia un mètode de filigrana robust, senzill i ràpid basat en la transformada de Fourier discreta (DFT) amb un radi d'implementació òptim, on la filigrana es troba incrustada en l'espectre de magnitud de la transformada de Fourier i es demostra que la degradació de la qualitat de la imatge amb filigrana és mínima, mesurant aquesta degradació amb la mesura *Peak signal-to-noise ratio (PSNR)*. Els seus resultats han demostrat una resistència significativa contra el procés d'escaneig d'impressió (PS) i altres processos com la modulació d'amplitud, la tonificació mitjana, el procés de càmera i d'impressió (PC), la retallada i els atacs del programari de referència StirMark [1].

Aquest mètode es basa en la incrustació d'un vector binari de longitud l . Aquest vector s'insereix a la matriu dels coeficients de magnitud de la transformada de Fourier d'una imatge, com un cercle de radi r al voltant del centre de la matriu. Per controlar la força de la implementació, s'utilitza el factor d'implementació α .

Així doncs, s'ha definit un esquema de marcatge basat en aquest estudi, amb algunes simplificacions en el procés de generació i incrustació del vector binari. El procés de marcatge d'un arxiu digital s'esquemmatitza de la següent manera: abans que es puguin incrustar dades digitals en un arxiu (X_o), cal generar una clau o vector (K); un cop generada la clau, incorporem una filigrana (W_o) creada a partir de la clau K a l'arxiu X_o ; per acabar, el procés de marcatge es completa un cop es produeix l'arxiu marcat (X_w) (Fig. 5).

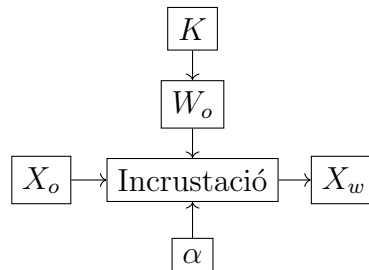
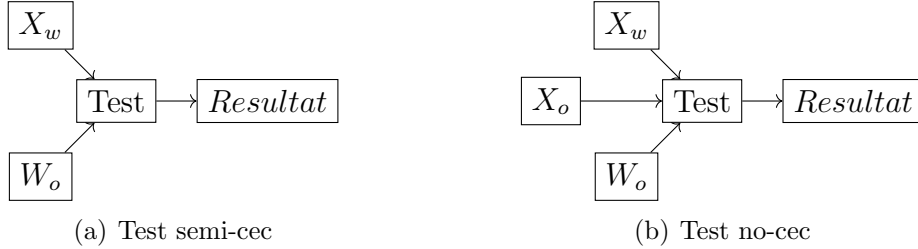


Figura 5: Procés de marcatge de dades digitals

Podríem definir l'invers d'aquest procediment per tal d'extreure la filigrana (W_e) d'una imatge que sabem prèviament que ha estat marcada (X_w). Això resultaria útil si la marca d'aigua ocultés una comunicació en si mateixa. No obstant això, el propòsit del mètode que plantegem és verificar l'autoria. Per aquest motiu, resulta més interessant dissenyar un test capaç de quantificar la probabilitat que una imatge hagi estat marcada amb una filigrana en concret, amb independència de si podem extreure la filigrana directament de la imatge marcada o no. En aquesta situació, diferenciem dos mètodes de testatge que anomenarem test semicec (Fig. 6(a)) i test no-cec (Fig. 6(b)). Els mètodes semicecs realitzaran el test sobre la imatge

que sospitem marcada (X_w) a partir d'una filigrana (W_o). En canvi, en els mètodes no-cecs serà necessari, a més a més, comparar la imatge que sospitem marcada amb la imatge original. Ambdós tests finalitzaran amb un resultat positiu o negatiu.



En el present treball, implementarem un test de tipus semicec. Definirem la taxa de detecció d'una filigrana segons el valor màxim de covariància creuada entre el vector extret de la imatge marcada i el generat per la clau. Si aquest valor supera un llindar t predefinit, llavors considerarem que la imatge ha estat marcada amb la clau. Establirem aquest llindar a $t = 8$. Aquest valor s'ha escollit perquè el valor més alt detectat en conjunts d'imatges sense filigrana és de 7,85 ([14]), per la qual cosa aquesta fita ens assegura certa fiabilitat.

4.2 Algoritme d'incrustació

Per tal incrustar la filigrana a l'espai dels coeficients de magnitud del domini de Fourier implementarem l'algoritme següent:

0. En cas que la imatge sigui en color, caldrà un pas previ de transformació de RGB a YCbCr. En aquest treball, manipularem imatges en escala de grisos per tal de reduir el cost computacional de les operacions.
1. Transformar els valors de lluminositat al domini de Fourier. La transformada pren valors complexos que cal expressar en forma polar.
2. Separar en dues matrius els coeficients de magnitud (W) i els coeficients de fase (ϕ).
3. Traslladar els coeficients de magnitud de baixa freqüència de la transformada al centre. Això permet controlar les freqüències en les quals incrustar la filigrana controlant el radi de la implementació.
4. Generar una clau, que prendrà forma de vector binari de dimensió l .
5. Definir la matriu filigrana com

$$W_{xy} = k_j \cdot \left(\frac{1}{9} \sum_{s=-1}^1 \sum_{t=-1}^1 M_{x+s,y+t} \right)$$

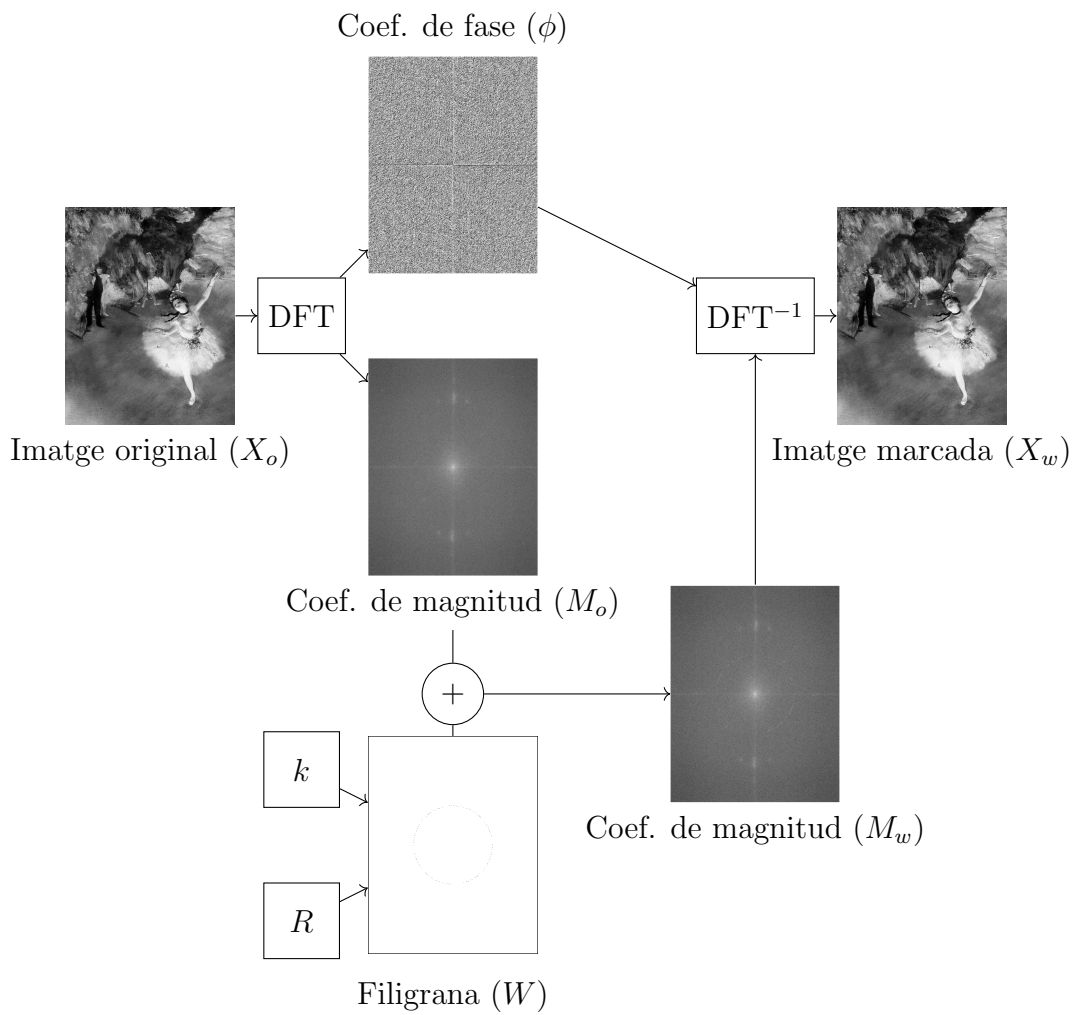


Figura 6: Diagrama del mètode d'incrustació

amb les coordenades $x \times y$ definides com

$$x = \left(\frac{m}{2} + 1\right) + \lceil r \cdot \cos\left(\frac{j \cdot \pi}{l}\right) \rceil$$

$$y = \left(\frac{n}{2} + 1\right) + \lceil r \cdot \sin\left(\frac{j \cdot \pi}{l}\right) \rceil$$

on

W és una matriu de dimensió $m \times n$ (la matriu filigrana)

M és una matriu de dimensió $m \times n$ (coeficients de magnitud de la imatge original)

k és un vector binari de dimensió l

r és el radi d'implementació

$\lceil \cdot \rceil$ és la funció de part entera

Així, els elements de la filigrana queden espaiats al voltant del centre de la banda dreta de la matriu filigrana W .

6. Omplir la banda esquerra de la matriu filigrana mantenint la simetria central respecte la banda dreta. Així, es garanteix la simetria conjugada de la transformada que, com hem vist en el lema 3.22, ens garanteix que un cop incrustada la filigrana els píxels de la matriu en el domini espacial continuaran sent reals.
7. Incrustar la filigrana en els coeficients de magnitud de la imatge original mitjançant l'equació següent

$$M_w = M_o + \alpha \cdot W$$

on

M_w és una matriu de dimensió $m \times n$ (coeficients de magnitud de la imatge original marcats)

M és una matriu de dimensió $m \times n$ (coeficients de magnitud de la imatge original)

$\alpha \in \mathbb{R}$ és el factor d'implementació

W és una matriu de dimensió $m \times n$ (la filigrana d'aigua)

8. Finalment, caldrà combinar els coeficients de magnitud marcats M_w amb els coeficients de fase inalterats (ϕ) i fer de nou la transformació al domini espacial.

El factor d'implementació (α) ens servirà per graduar la intensitat de la marca. A mesura que el factor d'implementació augmenta, es rebaixa la invisibilitat de la filigrana i augmenta la resistència. El resultat és la imatge marcada I_w .

4.3 Algoritme del test

Per tal de valorar si una certa filigrana ha estat incrustada en una imatge que sospitem marcada, implementarem l'algoritme següent:

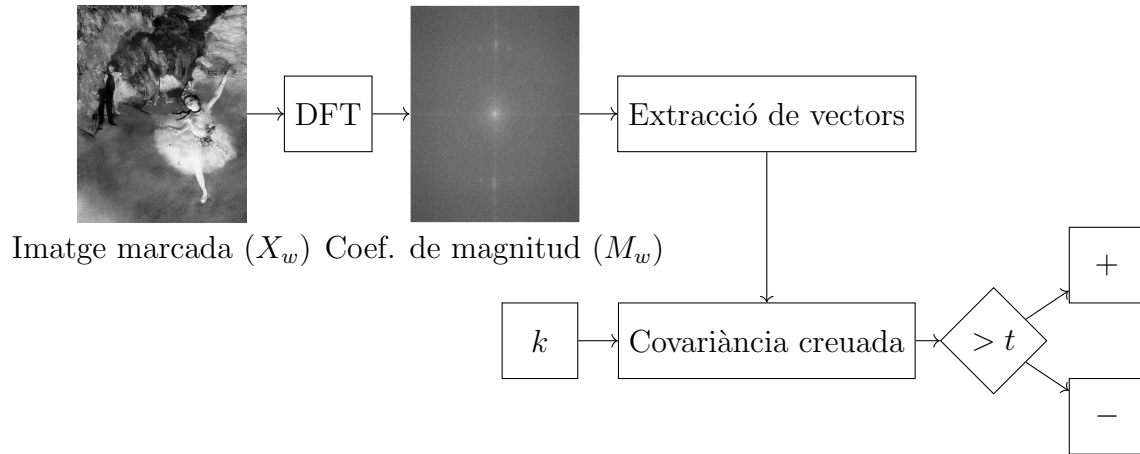


Figura 7: Diagrama del test

0. En cas que la imatge sigui en color, caldrà un pas previ de transformació de RGB a YCbCr. Com ja hem mencionat amb anterioritat, en aquest treball ometrem aquest pas previ.
1. Transformar els valors de lluminositat al domini de Fourier. La transformada pren valors complexos que cal expressar en forma polar.
2. Separar en dues matrius els coeficients de magnitud (W) i els coeficients de fase (ϕ).
3. Traslladar els coeficients de magnitud de baixa freqüència de la transformada al centre.
4. Definir un radi mínim (r) i un radi màxim (R) d'implementació. Testejarem la marca en aquest rang de radis.
5. Extreure vectors columna de dimensió l de la matriu de coeficients de magnitud de la imatge des del radi mínim fins al radi màxim.
6. Normalitzar el valor de cadascun dels vectors extrets a l'interval $[0, 1]$.
7. Calcular la covariància creuada entre cadascun dels vectors extrets i el vector filigrana amb el que sospitem que la imatge pot haver estat marcada. La covariància entre els dos vectors es calcula com

$$C_{vk}(m) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} \left(v(n-m) - \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} v_i \right) \left(k_i^* - \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} k_i^* \right), & \text{si } m \geq 0, \\ C_{vk}^*(-m), & \text{si } m < 0. \end{cases}$$

on

- C_{vk} és la covariància creuada dels vectors v i k
- v és el vector extret de la matriu de coeficients de magnitud de la imatge
- k és un vector binari de dimensió l (la filigrana amb la qual sospitem que ha estat marcada la imatge)
- $*$ denota el conjugat

La detecció de la marca serà positiva si el valor màxim de la covariància creuada supera el llindar t .

5 Implementació i resultats

La implementació ha estat realitzada fent servir la versió R2021a del programari MATLAB. Aquesta eina utilitza un llenguatge d'alt nivell per a càlculs científics i matemàtics que permet manipular amb facilitat matrius i elaborar gràfiques per visualitzar dades. A més, inclou biblioteques molt útils per al treball que proposem com les *toolbox Signal Processing* i *Image Acquisition*. Les funcions clau del nostre codi seran les següents:

- *2-D fast Fourier transform (fft2)*. La funció $Y = \text{fft2}(X)$ retorna la transformada de Fourier discreta bidimensional d'una matriu utilitzant l'algoritme de transformació de Fourier ràpida.
- *Shift zero-frequency component to center of spectrum (fftshift)*. La funció $Y = \text{fftshift}(X)$ reordena una transformada de Fourier X desplaçant la component de freqüència zero al centre de la matriu.
- *2-D inverse fast Fourier transform (ifft2)* La funció $X = \text{ifft2}(Y)$ retorna la transformada de Fourier inversa discreta bidimensional d'una matriu utilitzant l'algoritme de transformació de Fourier ràpida.
- *Inverse zero-frequency shift (ifftshift)*. La funció $Y = \text{ifftshift}(X)$ reordena una transformada de Fourier i desplaça la freqüència zero a la de la transformada original. En altres paraules, `ifftshift` desfà el resultat de `fftshift`.
- *Cross-covariance (xcov)*. La funció $\text{xcov}(x, y)$ retorna la covariància creuada de dos vectors.

El codi complet s'annexa al final d'aquest treball.

Treballarem sobre una imatge digital en format *.png* de dimensions 750×964 píxels. En aquest cas, hem triat una imatge en escala de grisos de l'obra "*L'etoile*" del pintor Edgar Degas. Cal destacar que l'espai de color de la imatge és el gris, per tant, l'arxiu té una única capa de color. Com hem mencionat anteriorment, això reduirà considerablement el cost computacional dels càlculs. Per altra banda, farem ús de la funció *rand* del MATLAB per generar 500 vectors binaris aleatoris de dimensió $l = 200$ que ens serviran de filigranes. Guardarem cadascuna de les filigranes en un document diferent i els assignarem un número identificador entre l'1 i el 500. De forma aleatòria, hem triat la filigrana número 23 per incrustar-la en la imatge (Fig. 8).

A continuació, implementarem l'algoritme definit durant l'anterior secció. La visibilitat i resistència de la filigrana dependran no només del correcte funcionament del mètode, sinó també de les variables escollides. A més, la tria de variables afectarà també a la qualitat de la imatge. Basant-nos en la dimensió de la imatge, escollirem un radi d'implementació $r = 175$ per tal d'incrustar la marca sobre els coeficients de freqüència mitjana⁴. Cal destacar que la tria del radi d'implementació

⁴Veure propietats del procés PS (2.2).

```

Command Window
marca23 =
Columns 1 through 35
1 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 0 1 0 0 0
Columns 36 through 70
0 0 1 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1
Columns 71 through 105
0 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1 0 0 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 1
Columns 106 through 140
0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 0 1 0 1 0 0 0 1 1 0 1 0 0 1
Columns 141 through 175
0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 1 1 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 0 1
Columns 176 through 200
1 1 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0 0 1

```

Figura 8: Filigrana 23

té certa importància més enllà de garantir la invisibilitat i resistència de la filigrana. Un avantatge important del mètode és que el radi d'implementació pot ser diferent per a diferents imatges. D'aquesta manera, la seguretat del mètode millora encara més, ja que un possible atacant seria incapaç d'esbrinar el radi exacte d'implementació. Per tant, fins i tot si l'atacant té accés a la clau i al factor d'implementació, seria extremadament difícil eliminar la marca d'aigua sense afectar seriosament a la qualitat de la imatge. D'acord amb els estudis referenciats a la bibliografia ([14] i [10]), establim el factor d'implementació $\alpha = 5$ i la dimensió del vector filigrana com $l = 200$. Podem observar que amb aquestes variables l'afectació a la imatge és mínima (Fig. 9).

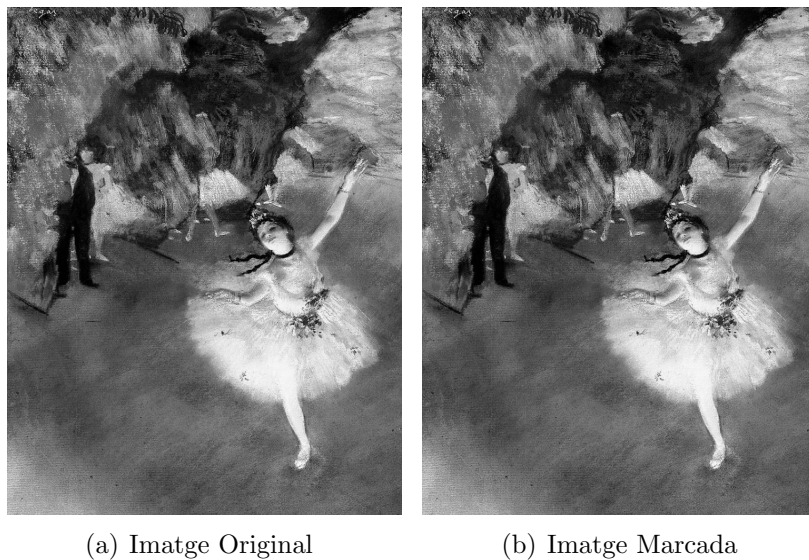


Figura 9: Procés d'incrustació amb factor d'implementació $\alpha = 5$

Quantifiquem aquesta modificació en la imatge utilitzant la mesura *Peak signal-to-noise ratio (PSNR)*. Obtenim una taxa de diferència de 26.1623 dB , que es troba per sota del llindar establert durant l'estat de la qüestió (30 dB). Observem que, augmentant el factor d'implementació la distorsió en la imatge és perceptible per la sensibilitat humana. A l'exemple de la figura 10 hem assignat al factor

d'implementació el valor $\alpha = 50$ i hem obtingut una $PSNR = 52.9148$ dB.

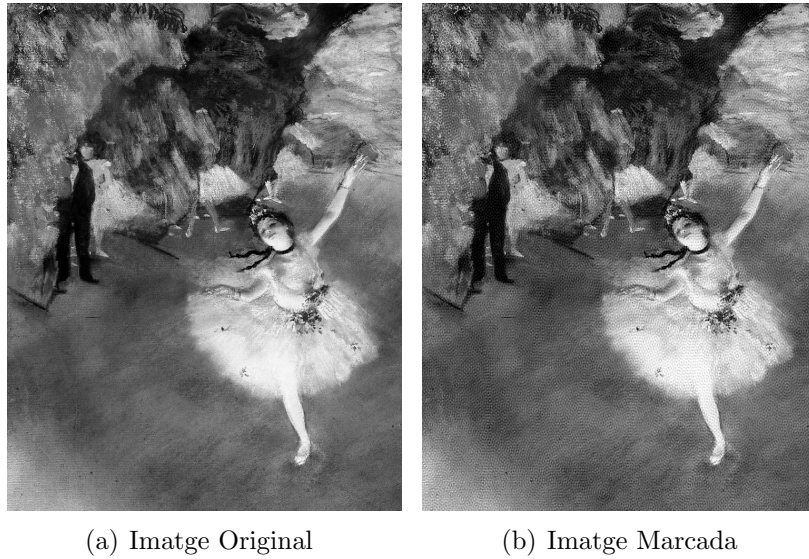


Figura 10: Procés d'incrustació amb factor d'implementació $\alpha = 50$

En el procés de marcatge, incrustem la filigrana sobre els coeficients de magnitud en el domini de Fourier. Podem notar que la marca manté la propietat de simetria conjugada a la qual hem fet referència en el marc teòric, això ens assegura que durant el procés d'inversió de la DFT recuperarem una matriu que pot ser interpretada digitalment com a imatge (Fig. 11).

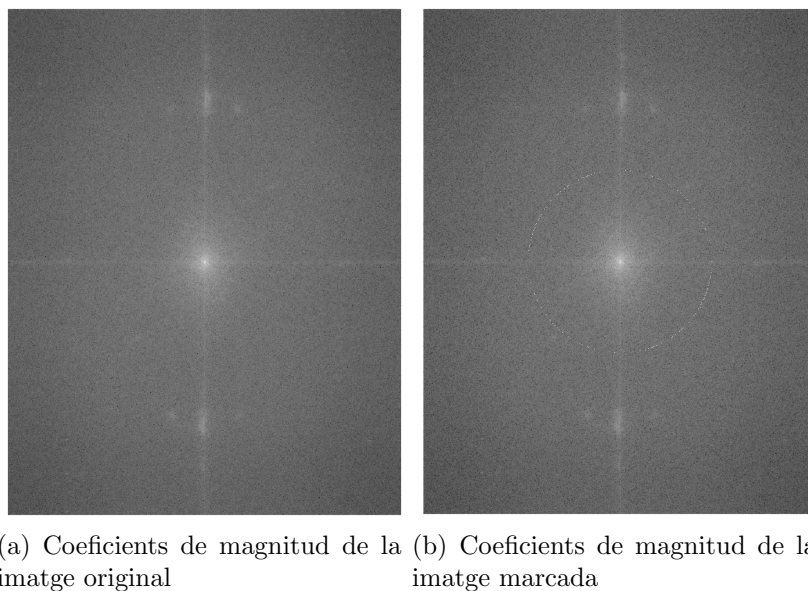


Figura 11: Coeficients de magnitud en el domini de Fourier (la intensitat de la filigrana s'ha exagerat per tal de fer-la visible).

Un cop incrustada la filigrana, procedim a la detecció d'aquesta. Basant-nos en els estudis referenciats ([14] i [10]), establirem un llindar de detecció $t = 8$, de manera que considerarem positiu el resultat del test si la covariància creuada entre el vector extret i la filigrana que estem testejant és superior a aquest llindar. Així mateix, tenint en compte que certs atacs derivats del procés PS, com retallar o escalar la imatge, podrien afectar a la detecció de la marca es fa necessari comprovar un interval de radis d'implementació. Establirem el radi mínim en el valor $r = 195$ i el radi màxim en el valor $r = 205$.

En primer lloc, cal assegurar que la filigrana ha estat incrustada correctament. Per fer-ho, testejarem la imatge digital resultant del procés d'incrustació de la filigrana. Com podíem esperar, obtenim una covariància creuada màxima de 20.0755, molt per sobre de la fita $t = 8$ que havíem marcat, en el radi d'implementació $r = 175$ (Fig 12). Establim, doncs, que la imatge ha estat marcada per la filigrana 23 en el radi d'implementació $r = 175$ i que no s'hi ha incrustat cap altra marca de les 500 que s'han comprovat.

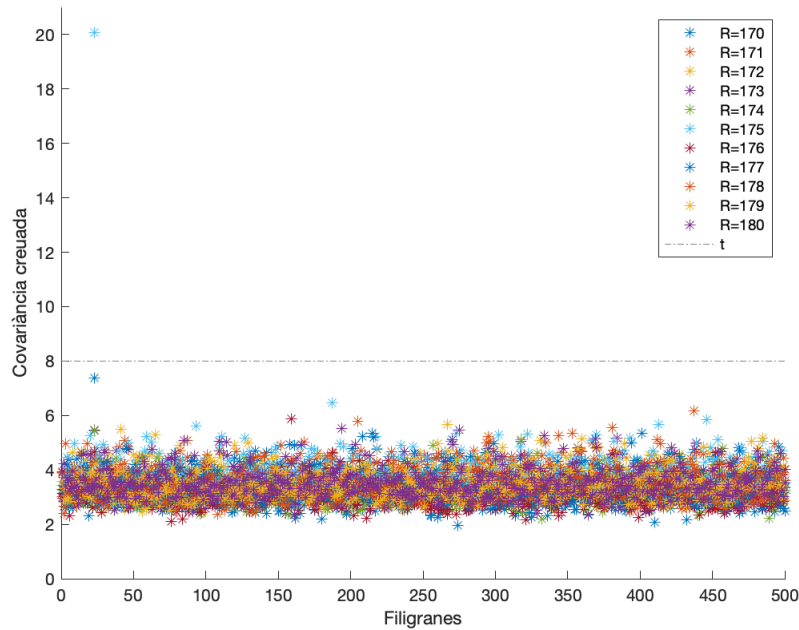


Figura 12: Gràfica de testatge sobre la imatge marcada amb la filigrana 23. A l'eix de les abscisses, les filigranes de la 1 a la 500. L'eix de les ordenades representa la covariància màxima entre la filigrana i el vector extret de la imatge.

És interessant observar que la incrustació de marques en un mateix radi d'implementació és en realitat un sumatori de freqüències. Per aquest motiu, és possible detectar la incrustació de diverses marques en un mateix radi d'implementació (Fig. 13).

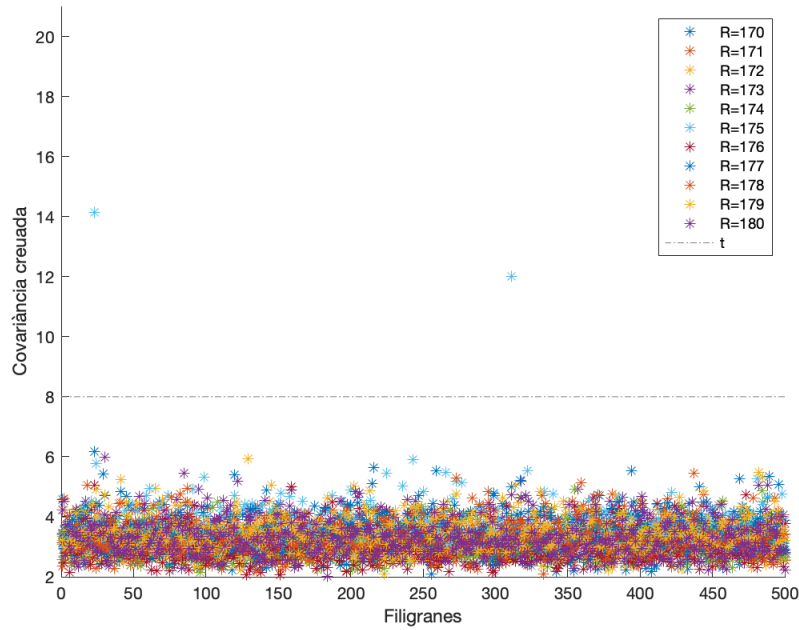


Figura 13: Gràfica de testatge sobre la imatge marcada amb les filigranes 23 i 311.

Abans de procedir al procés d'impressió i escàner, realitzarem algunes proves per assegurar que la filigrana resisteix a distorsions geomètriques simples. En primer lloc, que la imatge sigui redimensionada és un dels atacs més habituals que pot patir la imatge durant el procés PS. Per les propietats dels mètodes d'incrustació sobre el domini de freqüència mitjançant DFT, la filigrana resisteix a aquest tipus d'atac. Aquest fet s'observa fins i tot redimensionant la imatge un 50%. En aquest cas s'obté una covariància creuada màxima de 18,5512 (Fig. 14).

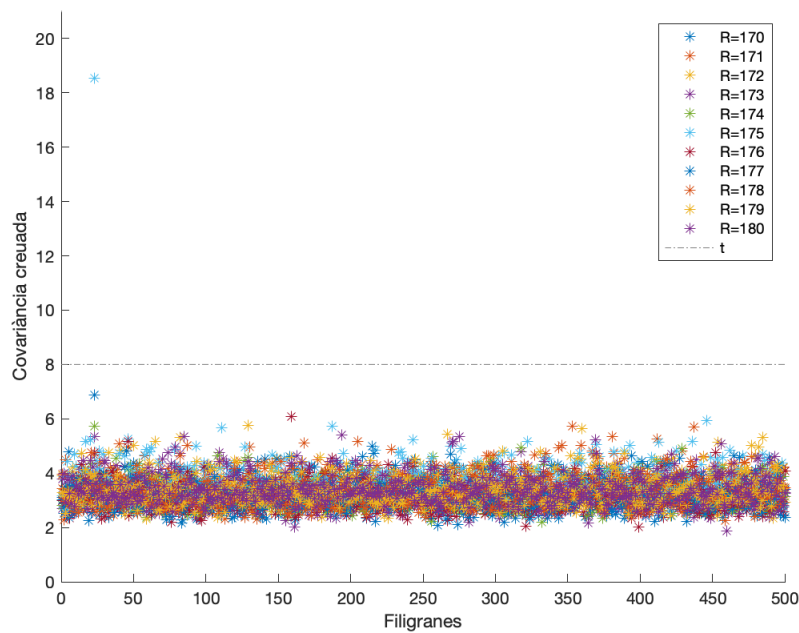


Figura 14: Gràfica de testatge sobre la imatge marcada amb la filigrana 23 redimensionada al 50%.

Un segon atac que habitualment implica el procés PS és la rotació, sigui per error humà o de la impressora o l'escàner a l'hora de manipular el paper. En ser aquest un atac geomètric, podem esperar que la filigrana resisteixi. Es comprova que obtenim un test positiu inclús amb una rotació de 90° , en aquesta situació obtenim una covariància creuada de 10.7222 (Fig. 15). Tot i que és un valor molt proper a la fita $t = 8$, cal tenir en compte que una rotació de 90° en la impressió seria una exageració i que aquest tipus d'error es podria corregir rotant la imatge digital escanejada per tal de reduir l'angle de rotació. Una situació més probable, i encara exagerada, seria trobar una imatge rotada 10° de la posició original. Fent aquesta prova obtenim una covariància creuada de 15,4903. Podem concloure, doncs, que el nostre mètode de marcatge ofereix certa resistència a transformacions per rotació.

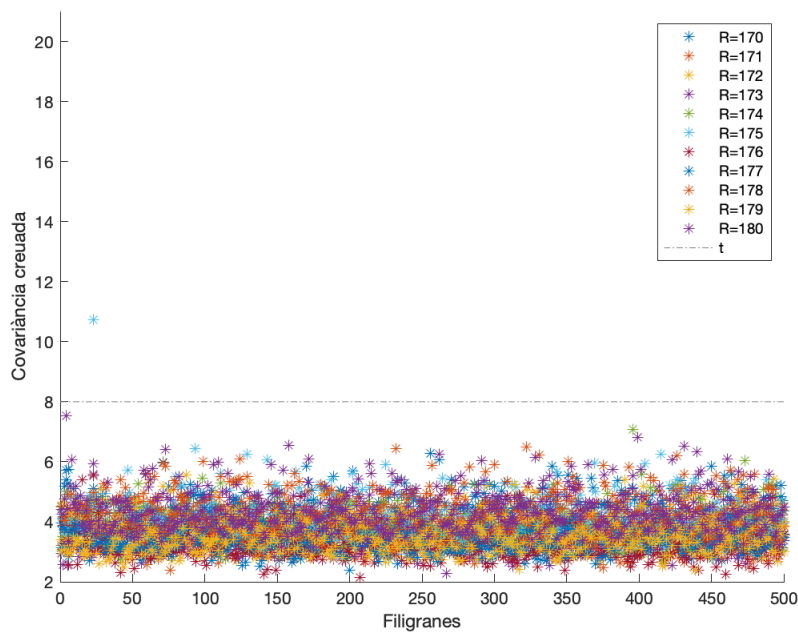


Figura 15: Gràfica de testatge sobre la imatge marcada amb la filigrana 23 rotada 90° .

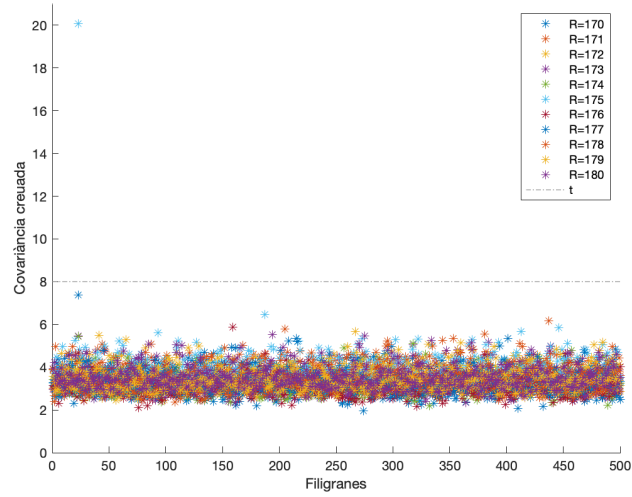
Finalment, comprovarem la resistència de la filigrana al procés PS. El dispositiu d'impressió i escàner utilitzat ha estat una impressora professional Xerox C8030. Les imatges han estat impreses en resolució 600ppp. La resolució d'una imatge ens indica la qualitat i la nitidesa d'aquesta, mesurant la densitat de píxels per polzada. Una resolució més alta indica una major qualitat d'imatge. Donat l'alt grau d'entropia que implica el procés de PS, hem considerat oportú intentar disminuir al màxim l'addició de soroll. Per aquest motiu, s'han utilitzat dos tipus de paper diferent per la impressió: paper retro, que és el tipus utilitzat habitualment per imprimir documents; i cartolina de 300g setinada, que garanteix una impressió de major qualitat. Podem observar que la imatge es veu considerablement distorsionada després del procés PS. Aquesta distorsió augmenta quan empitjora la qualitat del paper (Fig. 16).



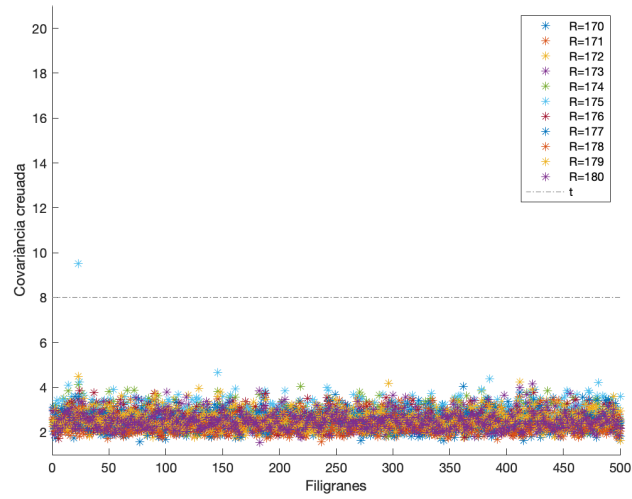
(a) Imatge Marcada Digital (b) Imatge Marcada Impresa en Paper Satinat (c) Imatge Marcada Impresa en Paper Repro

Figura 16: Comparativa abans i després del procés d'impressió

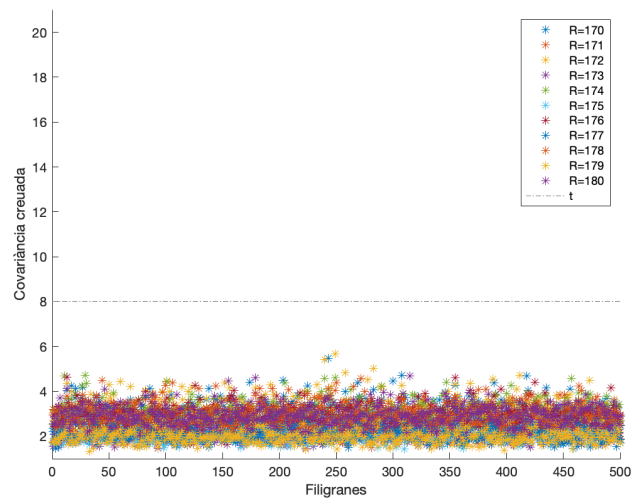
Els resultats són els següents: si bé la covariància creuada màxima detectada en la imatge digital és de 20,0755 en el radi $r = 175$ (Fig. 17(a)), en el cas de la imatge impresa en cartolina aquest valor descendeix fins a un 9.49938 (Fig. 17(b)) en el mateix radi de detecció. Així, el signe del test es manté positiu. Per tant, la filigrana resisteix al procés PS en les condicions esmentades. En canvi, en la imatge impresa en paper retro no es detecta cap filigrana incrustada de les 500 que hem testejat. Això significa que quan rebaixem la qualitat del paper el mètode perd la seva resistència (Fig. 17(c)).



(a) Gràfica de testeig sobre la imatge marcada digital



(b) Gràfica de testeig sobre la imatge marcada impresa en cartolina



(c) Gràfica de testeig sobre la imatge marcada impresa en paper retro

Figura 17: Comparativa dels diferents tests

6 Conclusions

En aquest treball, ens proposàvem implementar un mètode de marca d'aigua resistent al procés d'impressió i escàner que fos útil per rastrejar els possibles punts de fuga o filtració de documents de caràcter privat. Així, abans de compartir un document, caldria seguir els següents passos. En primer lloc, incrustar la filigrana, que representa l'identificador del destinatari, en una imatge com, per exemple, un logo. Seguidament, incorporariem aquesta imatge a tots els documents de caràcter privat enviats a aquell mateix destinatari. És important remarcar que només marcaríem els documents que no poden ser compartits, ja que, si la imatge marcada fos pública, aleshores un subjecte malintencionat podria falsificar filtracions.

Per assolir aquest objectiu, hem dissenyat un mètode esteganogràfic d'incrustació de filigranes invisible i robust en imatges digitals basat en la *transformada de Fourier*. Concloem que el mètode plantejat és invisible, ja que si quantifiquem la deformació produïda durant la incrustació de la filigrana amb la mesura *PSNR* obtenim un valor per sota de la fita establerta. Per altra banda, comprovem que el mètode és resistent a atacs geomètrics com la redimensió o la rotació. Per últim, el mètode garanteix certa resistència al procés d'impressió i escàner, però només sota certes condicions, ja que aquesta propietat depèn del tipus de paper amb el qual es fa la impressió. És possible que la qualitat del paper o de la impressió influeixi en l'addició de soroll, de manera que a pitjor qualitat més entropia en la imatge i més dificultat per identificar la filigrana després del procés d'impressió i escàner. En una hipotètica segona fase de l'estudi, seria interessant realitzar altres proves més rigoroses amb més impressores, escàners i imatges de prova; així com aprofundir una mica més en les propietats del procés d'impressió.

Més enllà dels resultats pràctics, també es poden extreure conclusions de caràcter general. Durant aquest estudi hem aprofundit en la comprensió de la transformada de Fourier. Com hem vist, la transformada de Fourier discreta és una eina molt potent per al processament de senyal, ja que es tracta d'una eina matemàtica extremadament poderosa que ens permet veure i tractar els senyals en un domini diferent. Precisament aquest canvi de base és el que ens permet tractar i aprofitar allò que és humanament imperceptible però matemàticament quantificable: les freqüències. Partint d'aquesta idea, l'anàlisi harmònica obre les portes a un món de possibilitats. De fet, les aplicacions pràctiques van molt més enllà del processament d'arxius digitals d'imatge, so o vídeo; les transformades de Fourier es fan servir en el camp de les comunicacions en general, de l'enginyeria mecànica, l'enginyeria de control, l'electromagnetisme. . . La tecnologia tal com l'entenem avui dia no seria possible sense l'avanç de la matemàtica i la recerca en qüestions tan i més abstractes de les que s'han tractat durant el marc teòric d'aquest treball. Per aquest motiu, una conclusió imprescindible d'aquest estudi és que, per l'avanç de la ciència i la tecnologia, és imprescindible promoure la curiositat, el coneixement i la recerca en les matemàtiques.

Finalment, conclourem aquest treball amb una reflexió que ha acompanyat tot el procés d'elaboració d'aquesta memòria. És possible que en algun moment el lector s'hagi preguntat què passaria si es fa un ús il·legítim mètode de marcatge que es

planteja o, anant més enllà, fins a quin punt són legítimes les comunicacions esteganogràfiques? Quan es plantegen aquestes discussions sovint apareixen argument de l'estil "Qui no té res a amagar, no té res a témer", donant per fet que la mateixa ocultació d'informació es fa només per amagar una acció il·legítima. Tanmateix, aquesta idea és errònia, puix que l'esteganografia té altres moltes funcionalitats, com la protecció de la informació o l'oposició davant la censura. Quan és legítim, doncs, l'ús de tècniques esteganogràfiques? Aquesta és una qüestió molt complexa i sobre la que cal una reflexió de la societat de conjunt. Tanmateix, sembla coherent pensar que tant les persones individuals com les organitzacions socials o empresarials tenen cert dret a mantenir el control sobre la seva privacitat, encara que sigui prenent consciència sobre els tipus d'atacs dels quals poden ser víctimes. En aquest sentit, és possible que una societat digital requereixi certa democratització de la ciberseguretat.

Referències

- [1] Mahbuba Begum i Mohammad Uddin, “Digital Image Watermarking Techniques: A Review,” *Information*, vol. 11, pàg. 110, febr. de 2020.
- [2] Gaurav Bhatnagar i Balasubramanian Raman, “A new robust reference watermarking scheme based on DWT-SVD,” *Computer Standards and Interfaces*, vol. 31, núm. 5, pàg. 1002-1013, 2009, Specification, Standards and Information Management for Distributed Systems. adr.: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920548908001499>.
- [3] L. Boney, A.H. Tewfik i K.N. Hamdy, *Digital watermarks for audio signals*. 1996, pàg. 473-480.
- [4] I.J. Cox, J. Kilian, F.T. Leighton i T. Shamoan, “Secure spread spectrum watermarking for multimedia,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 6, núm. 12, pàg. 1673-1687, 1997.
- [5] Abbas Cheddad, Joan Condell, Kevin Curran i Paul Mc Kevitt, “Digital image steganography: Survey and analysis of current methods,” *Signal Processing*, vol. 90, núm. 3, pàg. 727-752, 2010. adr.: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165168409003648>.
- [6] Javier Duoandikoetxea, *Lecciones sobre las series y transformadas de Fourier*. UNAN-Managua, 2003.
- [7] Michael W. Frazier, *An Introduction to wavelets through linear algebra*, eng, sèr. Undergraduate texts in mathematics. New York [etc.]: Springer, 1988.
- [8] Dajun He i Qibin Sun, “A practical print-scan resilient watermarking scheme,” pàg. I-257, oct. de 2005.
- [9] Yitzhak Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, 3a ed., sèr. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 2004.
- [10] Frédéric Lusson, Karen Bailey, Mark Leeney i Kevin Curran, “A novel approach to digital watermarking, exploiting colour spaces,” *Signal Processing*, vol. 93, pàg. 1268-1294, maig de 2013.
- [11] Dhiran Kumar Mahto i A.K. Singh, “A survey of color image watermarking: State-of-the-art and research directions,” *Computers and Electrical Engineering*, vol. 93, pàg. 107255, 2021. adr.: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045790621002408>.
- [12] María Cristina. Pereyra i Lesley A. Ward, *Harmonic analysis : from Fourier to wavelets*, English. American Mathematical Society ; Institute for Advanced Study Providence, R.I. : Princeton, N.J, 2012.
- [13] F.A.P. Petitcolas, R.J. Anderson i M.G. Kuhn, “Information hiding-a survey,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 87, núm. 7, pàg. 1062-1078, 1999.
- [14] Ante Poljicak, Lidija Mandić i Darko Agic, “Discrete Fourier transform-based watermarking method with an optimal implementation radius,” *Journal of Electronic Imaging-J ELECTRON IMAGING*, vol. 20, jul. de 2011.

- [15] K.B. Raja, C.R. Chowdary, K.R. Venugopal i L.M. Patnaik, “A Secure Image Steganography using LSB, DCT and Compression Techniques on Raw Images,” pàg. 170 - 176, 2005.
- [16] Anirban Sengupta i Saraju Mohanty, “Everything you Wanted to Know About Watermarking: From Paper Marks to Hardware Protection,” *IEEE Consumer Electronics Magazine*, vol. 6, des. de 2016.
- [17] K. Solanki, Upamanyu Madhow, B. Manjunath i Shivkumar Chandrasekaran, “Estimating and undoing rotation for print-scan resilient data hiding,” vol. 1, 39 - 42 Vol. 1, nov. de 2004.
- [18] Joan Gómez Urgellés, *Matemáticos, espías y piratas informáticos: codificación y criptografía*. RBA Coleccionables, 2010.
- [19] Elena Martínez Villacampa i Elisa Sayrol, “Introducción al watermarking,” *Buran*, núm. 19, pàg. 73 - 77, 2003.

A El codi

A.1 Codi d'incrustació

```
clear

% VARIABLES
im = imread('ImatgesTFG/degas/degasOriginal.png'); % Arxiu original
fil = fopen('filigranes/filigrana23.txt','r'); % Vector binari de
    dimensio L (filigrana)
L = 200;
r = 175;
alpha = 5;

% Preparo la imatge per marcar
im = rgb2gray(im); % Passo la imatge per marcar a escala de grisos
imOr = im;

% INCRUSTACIO

% Transformo la imatge al domini de Fourier
imDFT = fft2(im);
imDFTshift = fftshift(imDFT); % Traslladem els coef de baixa freq al
    centre

% Separem els coeficients de magnitud dels coeficients de fase
coefMag = abs(imDFTshift); % Modul o magnitud complexa
coefPhase = angle(imDFTshift); % Angle de fase

% Creem un vector binari de dimensio l a partir de la filigrana
[k,count] = fscanf(fil, ['%5d\n']);
fclose(fil);

% Definim la matriu filigrana
matFil = zeros(size(coefMag));
[M,N] = size(coefMag);
for j = 1:L
    % Marca L punts distribuïts uniformement entre [-pi, pi] en el radi
    r
    x = fix(M/2+1)+fix(r*cos(j*pi/L));
    y = fix(N/2+1)+fix(r*sin(j*pi/L));

    for s = -1:1
        for t = -1:1
            matFil(x,y) = matFil(x,y) + coefMag(x+s,y+t);
        end
    end
    matFil(x,y) = k(j)*matFil(x,y)/9;
end

% Omple la banda esquerra de la matriu amb simetria inversa
for m = 1:M
    for n = 1:fix(N/2)
        matFil(m,n) = matFil(M+1-m,N+1-n);
    end
end
```

```

end

% Incrustem la marca en la matriu
coefMagWm = coefMag + alpha * matFil;

% Combinem els coeficients de magnitud amb els coeficients de fase
imDftWm = zeros(size(coefMagWm));
for m = 1:M
    for n = 1:N
        imDftWm(m,n) = coefMagWm(m,n)*exp(i*coefPhase(m,n));
    end
end

% Transforma de nou al domini espacial (Inverteix la transformada de
    Fourier)
immatFil = ifft2(fftshift(imDftWm));
immatFil = uint8(real(immatFil));

figure(1)
subplot(1,2,1); imshow(imOr); title('Imatge_Original');
subplot(1,2,2); imshow(immatFil); title('Imatge_Marcada');

figure(2)
Fs = log(abs(imDFTshift)+1);
subplot(1,2,1); imshow(Fs, []);
Fw = log(abs(imDftWm)+1);
subplot(1,2,2); imshow(Fw, []);

imwrite(imOr, 'ImatgesTFG/degas/imOriginal.png');
imwrite(immatFil, 'ImatgesTFG/degas/imMarcada.png');

```

A.2 Codi de testatge

```

clear

% VARIABLES
L = 200
alpha = 5;
rMax = 170;
rMin = 180;

% Llegeixo la imatge suposadament marcada
im = imread('ImatgesTFG/degas/imMarcada');

% Transformo la imatge al domini de Fourier
imDFT = fft2(im);
imDFTshift = fftshift(imDFT); % Traslladem els coef de baixa freq al
    centre

% Separem els coeficients de magnitud dels coeficients de fase
coefMagWM = abs(imDFTshift); % Modul o magnitud complexa
coefPhaseWM = angle(imDFTshift); % Angle de fase
[M,N] = size(coefMagWM);

```

```

% TESTING

for r = rMin:rMax

    radii = zeros(1,L);

    for k = 1:L
        x = fix(M/2+1) + fix(r*cos(k*pi/L));
        y = fix(N/2+1) + fix(r*sin(k*pi/L));
        radii(1,k) = coefMagWM(x,y);
    end

    % Normalitzem els vectors
    arrayNr= normalize(radii,'range');

    % Comparem els vectors extrets de la imatge amb 500 filigranes
    diferents
    numberfiles = 500;
    arrayCov = zeros(1,numberfiles);
    for k = 1:numberfiles
        string = "filigranes/filigrana" + k + ".txt";
        fileID = fopen(string,'r');
        [v,count] = fscanf(fileID, ['%5d\n']);
        fclose(fileID);
        arrayCov(1,k) = max(xcov(v,arrayNr));
    end
    hold on
    plot(arrayCov);

end

t = 8;
hline = reline([0 t]);
hline.LineStyle = '-.';
hline.Color = [0.5 0.5 0.5];

legend('R=170','R=171','R=172','R=173','R=174','R=175','R=176','R=177',
    'R=178','R=179','R=180','t');

```

A.3 Codi per generar filigranes

```

N = 200; % Dimensio de la filigrana
numfiles = 500; % Numero de filigranes

for k = 1:numfiles
    string = "marques/marca" + k + ".txt";
    fileID = fopen(string,'w');

    v = round(rand(1,N));
    nbytes = fprintf(fileID, '%5d\n',v);
    fclose(fileID);
end

string = "filigranes/filigrana" + 23 + ".txt";

```

```
fileID = fopen("filigranes/filigrana23.txt", 'r')
[v, count] = fscanf(fileID, ['%5d\n']);
fclose(fileID);
```