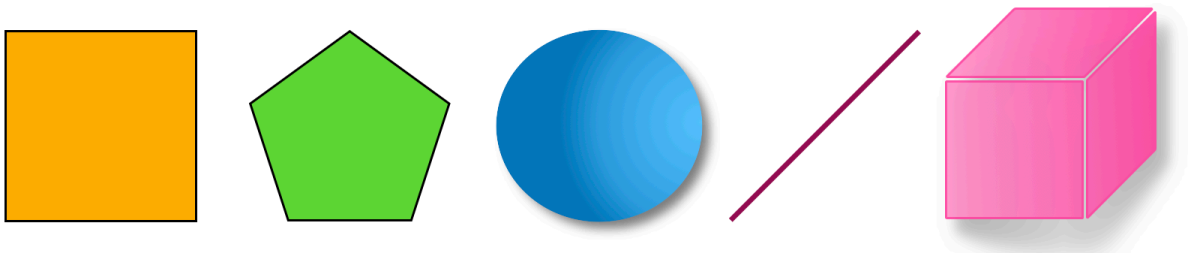


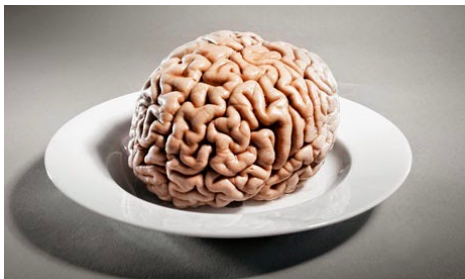
CLASSE TEÒRICA de 4t d'ESO

Hem estudiat figures regulars que tots nosaltres coneixem, per posar algun exemple tenim:



Aquest tipus de figures s'estudien a la branca de les matemàtiques que s'anomena geometria i més concretament, aquest tipus de geometria rep el nom de geometria euclidiana, donat que es considera que va ser Euclides qui la va «iniciar».

Però molts dels objectes que tenim a la natura, no es poden dibuixar utilitzant la geometria euclidiana, per exemple:



Com podem veure aquests objectes són molt complicats de dibuixar, si només utilitzem rectes, cercles o altres figures geomètriques conegudes.

És en aquest moment quan apareix el que es coneix com a fractals. La comunitat científica reconeix a Benoît Mandelbrot com el pare d'aquest tipus de geometria, el qual, en el seu llibre «Fractal Geometry of Nature», 1982 va dir: «Els núvols no són esferes, les muntanyes no són cons, les costes no són cercles i l'escorça dels arbres no són llises, ni els llampecs viatgen en línia recta».

Per tant, us faré una explicació senzilla sobre el com són alguns fractals, podreu veure que tenen propietats molt sorprenents

Aquests fractals es construeixen a partir d'un iniciador, un generador i una regla generadora. Ara en veurem un exemple i després vosaltres en construïreu algun altre.

Corba de Koch

- L'Iniciador és un segment de longitud, per exemple $[0,1]$.



(Iteració 0)

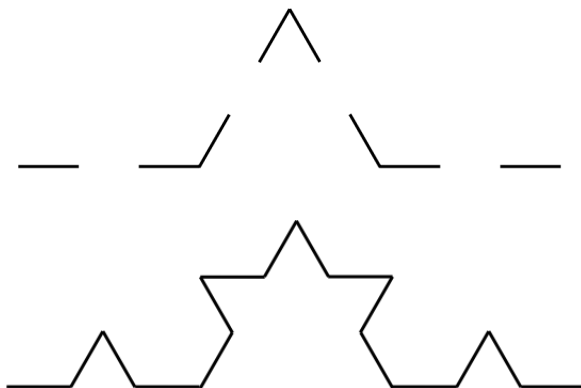
- El seu Generador serà el que es considerarà com la **primera iteració** del procés (còpies escalades de l'iniciador), i construïrem a partir de la regla generadora que explicarem a continuació.



(Iteració 1)

- La Regla generadora consisteix a dividir el segment inicial en tres trossos d' $1/3$ cadascun, eliminar la part central i substituir-la per dos segments d' $1/3$ cadascun formant una «punxa», de manera que s'ha reemplaçat el segment original per quatre nous segments, cadascun de longitud $1/3$ de la longitud original.

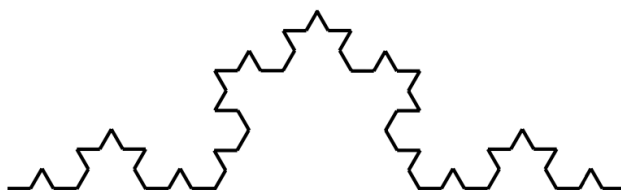
Un cop explicat el procés de la creació d'un fractal mitjançant una iteració, repetim el procés per a construir la **segona iteració**, la qual a poc a poc es faria tal com segueix:



(Iteració 2)

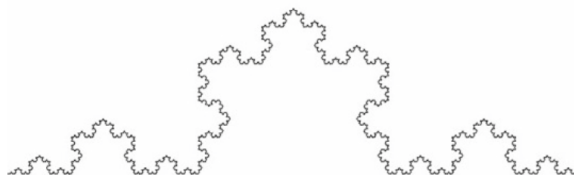
Aquí podem observar que en els 4 segments existents, hem substituït el segment del mig de mida $1/9$ per dos segments amb aquesta mateixa mesura i hem obtingut 16 nous segments de longitud $1/9$ del segment inicial.

Ara repetim el procés amb els $4^2 = 16$ segments



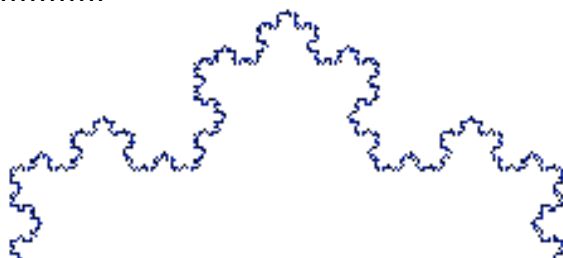
(Iteració 3)

I així successivament

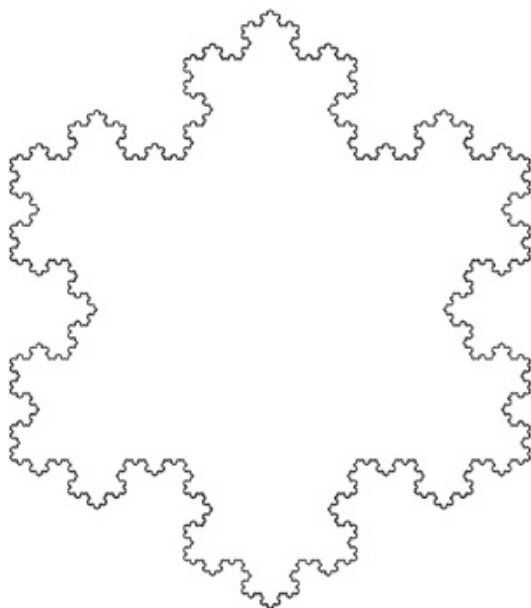


(Iteració 4)

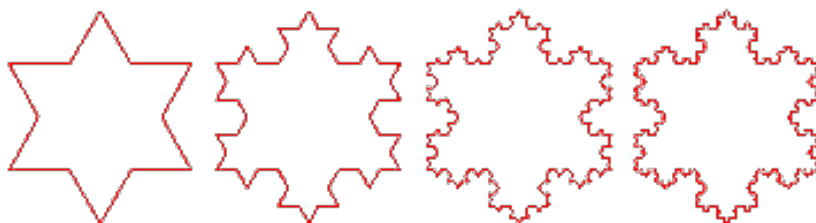
Fins a l'infinit.....



Sovint es considera en forma de corba tancada, creada a partir d'un triangle equilàter, i s'anomena **floquet de neu**.



Floc de Koch



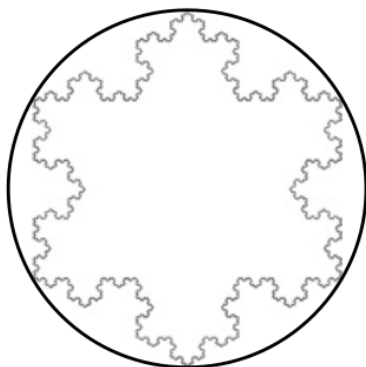
Floc de Koch amb successives iteracions

Anem ara a calcular, tal com ens han ensenyat, algunes mesures d'aquesta figura. Calculem la seva àrea i el seu perímetre.

Si considerem que el floc el podem encabir dins d'un cercle de radi 2, i calculem l'àrea del cercle, tenim:

$$\text{Àrea cercle} = 2\pi r = 2 \times 2\pi = 2^2\pi = 4\pi$$

Per tant, l'àrea del floc serà més petita que 4π .



$$\text{Àrea del floc} < 4\pi$$

Mentre que el seu perímetre serà:

$$\text{---} \quad P_1 = 1 \quad \begin{array}{c} \text{1/3} \quad \text{1/3} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{1/3} \quad \text{1/3} \end{array} \quad P_2 = 4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\text{---} \quad P_3 = 4 \times 4 \times \frac{1}{9} = \frac{4^2}{3^2}$$

$$\text{---} \quad P_4 = 4 \times 4 \times 4 \times \frac{1}{27} = \frac{4^3}{3^3}$$

Si busquem una fórmula recurrent, seria:

$$P_{FK_n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Si fem el límit a l'infinit, tenim. $P_{FK_\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$

I tenim que $P_{FK} = \infty$

Podem veure fàcilment això que acabem de veure si fem els següents càlculs amb la calculadora:

Número d'iteració	Longitud del costat (multiplicar per $1/3$ a cada iteració)	Nombre de costats (multiplicar per 4 a cada iteració)	Perímetre (multiplicar per $4/3$ a cada iteració)
0	1	1	1
1	$\frac{1}{3^1} = \frac{1}{3} = 0,3333333$	$4^1 = 4$	$\frac{4^1}{3^1} = \frac{4}{3} = 1,3333333$
2	$\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} = 0,1111111$	$4^2 = 16$	$\frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9} = 1,7777777$
3	$\frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} = 0,0370370$	$4^3 = 64$	$\frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27} = 2,3703703$
4	$\frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} = 0,0123456$	$4^4 = 256$	$\frac{4^4}{3^4} = \frac{256}{81} = 3,1604938$
5	$\frac{1}{3^5} = \frac{1}{243} = 0,0041152$	$4^5 = 1024$	$\frac{4^5}{3^5} = \frac{1024}{243} = 4,2139917$
6	$\frac{1}{3^6} = \frac{1}{729} = 0,0013717$	$4^6 = 4096$	$\frac{4^6}{3^6} = \frac{4096}{729} = 5,6186556$
...	...	...	...
n	$\frac{1}{3^n}$	4^n	$\frac{4^n}{3^n}$
$n \rightarrow \infty$	0	∞	∞

Per tant, com acabem de veure, el perímetre o longitud tant de la corba de Koch com del floc de Koch és infinit.

A continuació farem uns exercicis amb un tipus de fractal molt conegut gràcies a **Wacław Sierpiński**, recordem que per construir aquest fractal, ens cal un iniciador, un generador i una regla generadora.

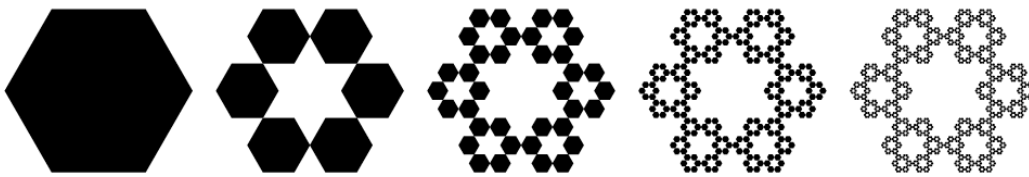
Exercicis A.1.2.a. o Exercicis A.1.2.b.

Un cop fetes les activitats, per finalitzar, i com a curiositat, dir que mitjançant el procediment de Sierpiński, es poden construir molts fractals, on el generador és un polígon regular.

Pentàgon de Sierpiński:

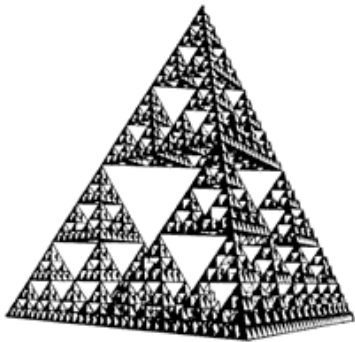


Hexàgon de Sierpiński:



Aquest tipus de fractal també es pot construir en tres dimensions, són els coneguts:

Piràmide o tetraedre de Sierpiński i



Esponja de Menger:

