



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

ELS FRACTALS A L'ESO I AL BATXILLERAT

Autor: Emma PORTELLA i MELIS

Director: Dr. Sergi MURIA MALDONADO

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 24 de gener de 2022

No miris enrere i et preguntis per què?
Mira endavant i pregunta't. Perquè no?

Paulo Coelho

Abstract

In this project, we talk about fractals, place them in the world of Mathematics, explain their origins and characteristics, and delve into those that can be built with a pencil and paper.

To begin with, we develop theoretical concepts that we will use to do the activities in the classroom.

Once inside the classroom, the students learn the existence of these new geometric figures, called fractals, which they can draw themselves. ESO students are surprised by the calculation of measures they have worked with which results are zero or infinite, while high school students, this discovery goes a bit further by showing them the fascinating world of fractional dimensions.

Resum

En aquest treball parlem dels fractals, els situem dins del món de les matemàtiques, n'expliquem els orígens i les característiques, i ens endinsem en els que es poden construir amb un llapis i paper.

Per començar, desenvolupem conceptes teòrics que seran el fonament per a fer les activitats a l'aula.

I un cop dins de l'aula, els mostrem l'existència d'aquestes noves figures geomètriques, anomenades fractals, que ells mateixos poden dibuixar. Als alumnes de l'ESO se'ls sorprèn amb el càlcul de mesures que ells han treballat, i que donen per resultat zero o infinit, mentre que als alumnes de batxillerat, aquest descobriment va més enllà, en mostrar l'existència de les dimensions fraccionàries.

Agraïments

Primer de tot, vull donar les gràcies al Cap d'Estudis, per la rapidesa de resposta, quan vaig voler saber la possibilitat d'efectuar l'adaptació dels meus estudis.

En segons lloc, vull donar les gràcies al tutor del treball, en Sergi Muria, per possibilitar-me les consultes tot i la distància i els horaris.

També vull agrair a l'IES Intermunicipal del Penedés de Sant Sadurní d'Anoia i el seu professorat per permetre'm realitzar la implementació de les aplicacions didàctiques d'aquest treball al seu centre, especialment a la seva directora Rosa Peñafiel, al coordinador del Departament de matemàtiques, Jordi Barroso, i als professors de matemàtiques de 4t d'ESO i 1r de Batxillerat, Maite Rosell i Jordi Castellà.

I com no, als meus fills: la Maria per fer-me veure que finalitzar el grau era un no res, a l'Anna pel seu optimisme i dir-me que res és impossible, i mai no és massa tard, i a l'Òscar, per les seves mostres de suport sense massa paraules, les seves abraçades i mirades i aquell - Vinga mama!.

I per acabar, al Jordi, el meu marit, per ajudar-me a trobar hores en el meu dia a dia, que m'han permès finalitzar el que feia anys donava per inacabat.

Índex

1	Introducció	1
2	La Geometria	2
2.1	Definició i classificació de la geometria	2
2.2	Aplicacions de la Geometria	3
2.3	Geometria Fractal	3
3	Els fractals	4
3.1	Els orígens	4
3.2	Concepte de fractal i definició formal	4
3.3	Característiques dels fractals	4
3.3.1	Autosimilitud o Autosemblança	4
3.3.2	Dimensió fractal	5
3.3.3	Recursivitat	6
3.4	Classificació	6
3.5	Aplicacions dels fractals	8
4	Espais mètrics	10
4.1	Definició i exemples	10
4.2	Subespai mètric	11
4.3	Convergència	11
4.4	Successions de Cauchy, espais mètrics complets, punt adherent, boles i conjunts tancats	13
4.5	Conjunts oberts	16
4.6	Conjunts compactes, conjunts acotats i totalment acotats, punts d'acumulació i punts frontera.	17
4.7	Continuïtat en espais mètrics	18
5	L'espai $(\mathcal{H}(X), h)$	19
5.1	L'espai $(\mathcal{H}(X), h)$ i la mètrica de Hausdorff	19
5.2	Completesa de l'espai $(\mathcal{H})$	21
5.3	Dimensió de Hausdorff	22
6	Els fractals lineals	24
6.1	El Conjunt de Cantor	24
6.2	El Floc de Koch	26
6.3	Figures de Sierpiński	28

6.4	Esponja de Menger	34
6.5	Esquema resum	37
7	Aplicació didàctica a l'aula	38
7.1	Aplicació didàctica pels alumnes de 4 d'ESO	38
7.1.1	Anàlisi de l'activitat de 4t d'ESO	39
7.1.2	Conclusions de l'activitat de 4t d'ESO	41
7.2	Aplicació didàctica pels alumnes de 1r de Batxillerat	41
7.2.1	Anàlisi de l'activitat de 1r de Batxillerat	42
7.2.2	Conclusions de l'activitat de 1r de Batxillerat	43
8	Conclusions	44

1 Introducció

El projecte

En aquest treball penetrarem en el món dels fractals i la geometria fractal. Veurem que tot i que la comunitat científica reconeix a Benoît Mandelbrot com el pare d'aquesta geometria, aquestes figures es van començar a estudiar per part d'alguns matemàtics ja en el segle XIX, però les deixaven de banda en considerar que eren simples curiositats i no tenien cap tipus d'interès.

Concretament, ens centrarem en les figures que van construir aquests estudiosos i que porten el seu nom. N'explicarem com es creen, calcularem les seves mesures i dimensions, i treballarem amb els alumnes d'un institut de secundària aquests càlculs.

Estructura de la Memòria

Desenvoluparem aquest tema en un triple vessant: l'històric, el matemàtic i el didàctic, centrant-nos en les figures fractals lineals més conegudes.

Pel que fa a la primera part del treball, parlarem de la geometria, els seus orígens i com s'ha utilitzat al llarg de la història. Donarem una petita pinzellada de les disciplines vinculades a aquesta branca de les matemàtiques, i mirarem d'explicar el perquè va aparèixer la geometria fractal. Del fractals, en donarem la definició, o més ben dit, una possible definició, que se centrarà en les seves característiques. Recordem que estem parlant d'una geometria molt nova, de la que encara queda molt per desenvolupar. També esmentarem algunes de les aplicacions més significatives de la geometria fractal, en altres àmbits de la ciència.

Pel que fa al vessant purament matemàtic, parlarem dels espais mètrics, amb conceptes lligats a ells, com són la mesura i la dimensió. Aquests dos conceptes, tenen un paper molt important dins del món dels fractals, i més concretament, els caracteritza, facilitant la definició matemàtica formal actualment més acceptada.

En l'àmbit didàctic, ens centrarem en els fractals lineals o geomètrics més coneguts, com hem dit al començament, els que es van construir molt abans de la definició de fractal donada per Mandelbrot. Concretament, amb els alumnes de 4t de l'ESO calcularem les mesures tradicionals de la geometria euclidiana, com són el perímetre i l'àrea, mentre que amb els de 1r de batxillerat calcularem dos tipus de dimensions, la topològica i la fractal.

Cal dir que ha estat complicat realitzar la implementació, a causa de la situació sanitària en la qual ens trobem ara, provocada per la COVID-19, i els protocols existents i canviant a les aules. També ha estat un problema el que alguns grups de classe estaven totalment o parcialment confinats, així com la necessitat de no trencar el grup bombolla. Tot i les dificultats, les fitxes que s'han fet amb els alumnes, ens han permès extreure unes conclusions que es presenten a la darrera part d'aquesta memòria.

2 La Geometria

2.1 Definició i classificació de la geometria

La geometria prové del grec $\gamma\epsilon\omega\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha$: $\gamma\eta$ = 'terra', $\mu\epsilon\tau\rho\omega$ = 'mesurar').

És la branca del coneixement que estudia les figures i les seves relacions a l'espai, com ara superfície, volum, distància, posició, etc.

A l'època antiga, les branques de les matemàtiques que més es van desenvolupar foren l'aritmètica i la geometria.

En l'època moderna, fou el filòsof René Descartes qui va introduir el concepte de les coordenades cartesianes, les quals, van donar pas a la geometria analítica i amb ella, mètodes algebraics de càlcul.

És important destacar, que quan parlem de geometria clàssica, ens referim a figures i objectes que existeixen o podem imaginar, ja sigui en el pla, com en l'espai, i s'estudien les seves principals relacions, aplicacions, etc.

Generalment, aquesta geometria clàssica es coneix també amb el nom de geometria euclidiana, en referència al matemàtic grec Euclides, que formulà els postulats sobre els quals es basa.

Les disciplines matemàtiques que treballen la geometria es poden classificar segons diversos criteris:

En *funció del tipus d'espai*:

- La **geometria euclidiàna**: estudia l'espai utilitzant els conceptes d'angle i distància.
- La **geometria afí**: estudia les rectes i els punts sense les nocions de distàncies i angles.
- La **geometria projectiva**: afegeix punts a l'infinit, en els espais de la geometria afí.
- La **geometria no-euclidiana**: conté la geometria hiperbòlica, el·líptica i esfèrica.

En *funció de l'axiomàtica*:

- La **geometria sintètica**: partint d'axiomes, dedueix teoremes usant les regles de la lògica.
- La **geometria analítica**: fa servir sistemes de coordenades per a establir una correlació entre ternes de nombres reals i els punts de l'espai.

Hi ha altres branques de les matemàtiques que també estudien la geometria des d'altres vessants, com serien la **geometria topologia**, la **geometria diferencial**, la **geometria algebraica** i la **geometria no commutativa**.

2.2 Aplicacions de la Geometria

Històricament, l'astronomia i la *geometria* han anat de la mà, s'ha utilitzat per a calcular les mides de la Lluna, la distància de la terra al sol, les trajectòries dels astres, etc.

Per fer tots aquests estudis de mecànica clàssica, s'ha emprat el teorema de Tales, que més endavant, fou complementat amb teories més complexes a partir de les observacions de Kepler i posteriorment, confirmades per Newton.

També s'ha usat en enginyeria per l'estudi de l'estabilitat dels sistemes mecànics, entre d'altres.

En el dibuix tècnic, forma part de la primera etapa de qualsevol projecte de disseny industrial. I actualment, l'aplicació de la informàtica a la geometria ha permès realitzar dissenys amb l'ajuda assistida per l'ordinadors.

La *trigonometria euclidiana* intervé en òptica, i és a l'origen del desenvolupament de la navegació, basant-se en les estrelles, els sextants, i la cartografia. Els nous avenços en geometria, del segle XIX, troben la seva aplicació en la física, sovint es diu que la *geometria de Riemann* ha estat motivada inicialment per les interrogacions de Gauss sobre la cartografia de la Terra.

La geometria de les superfícies en l'espai, i concretament, una de les seves extensions, la *geometria Lorenz*, ha permès formular les lleis de la relativitat general.

La *geometria diferencial* té aplicacions noves en la física postnewtoniana, com serien la teoria de cordes o la de les membranes.

La *geometria no commutativa*, inventada per Alain Connes, ofereix la possibilitat d'establir noves teories físiques.

2.3 Geometria Fractal

La *geometria fractal* apareix als anys 60, en observar que alguns objectes de la natura, eren difícils de treballar fent servir les figures regulars de la geometria clàssica com cercles, rectes, esferes, polígons regulars, etc. i s'utilitzarà per modelar i descriure fenòmens naturals i experiments científics.

Aquesta nova branca de la geometria, ràpidament és utilitzada per científics, metges, artistes, sociòlegs, economistes, meteoròlegs, músics, informàtics,.....

3 Els fractals

3.1 Els orígens

La *geometria fractal*, va apareixer a finals del segle XIX, amb la creació de figures geomètriques com el conjunt de Cantor (1883), per continuar a principis del segle XX amb l'aparició d'altres figures com el flocc de neu de Koch (1904), la corba de Peano (1891), la corba de Hilbert (1892), el triangle de Sierpiński (1915), entre d'altres.

Mandelbrot, fou qui es va adonar que totes elles, tenien aspectes en comú, i va desenvolupar la teoria d'aquesta nova geometria, amb la publicació, l'any 1977, del llibre "*Fractals: Form, chance and dimension*".

Aquesta nova geometria, ràpidament, s'aplicà a l'estudi de nombrosos camps de la ciència, on les formes naturals, no es podien descriure mitjançant la geometria clàssica.

És per aquest fet, que la comunitat científica, reconeix a Benoît Mandelbrot com el pare de la geometria fractal.

3.2 Concepte de fractal i definició formal

Benoît Mandelbrot, va utilitzar per primer cop, l'any 1975, el terme **fractal** a partir del llatí *fractus* (nominatiu singular masculí) i més concretament *fracta* (nominatiu singular femení) que, si deriva del verb *frangere*, significa "trençar", o "fragmentat", i si es té en compte, que fragmentat, també significa "irregular", la nova paraula FRACTAL, va perfecte per a anomenar els nous elements geomètrics que va definir.

Mandelbrot, va definir el terme en femení, però en català se sol usar en masculí, tot i que podem trobar publicacions amb el terme escrit en femení.

La definició de *fractal* ha anat evolucionant a mesura que s'anaven descobrint les seves característiques i propietats. Actualment, la definició més estesa i acceptada seria la d'*objecte geomètric amb una estructura bàsica la qual es repeteix sense canvis en diferents escales*.

La geometria fractal permet classificar les irregularitats mitjançant estructures matemàtiques que les determinen.

3.3 Característiques dels fractals

Davant de la dificultat de trobar una definició concreta, també es sol definir un fractal com un objecte que compleix les següents propietats:

3.3.1 Autosimilitud o Autosemblança

És quan qualsevol regió d'un fractal, si l'ampliem o la reduïm a qualsevol escala, tan gran o petita com es vulgui, la nova regió serà igual que la regió inicial, de manera que la seva aparença romandrà inalterada. És a dir, els subconjunts de la figura, són còpies exactes d'aquesta a escala més petita.

Existeixen tres tipus d'autosimilitud en els fractals:

1. *Exacta*: és el tipus més restrictiu i cal exactitud a diferents escales. Generalment, són fractals definits per sistemes de funcions iterades (IFS).
2. *Quasiautosimilitud*: és quan el fractal sembla aproximadament idèntic a diferents escales. En aquest cas hi ha còpies distorsionades d'ells mateixos. Sovint, són fractals construïts mitjançant relacions de recurrència.
3. *Estadística*: és el tipus més dèbil d'autosimilitud. Exigeix que el fractal tingui mesures numèriques o estadístiques que es preservin amb el canvi d'escala. Els fractals aleatoris són exemples d'aquest tipus.

3.3.2 Dimensió fractal

Consisteix a quantificar el grau de fragmentacions i irregularitats d'una figura geomètrica, en el cas de les figures fractals, aquest valor, sol ser un número no enter.

Els matemàtics han ideat diferents maneres d'assignar una dimensió a un objecte, per tant, no hi ha una única fórmula per calcular la dimensió fractal. Segons el tipus de fractal sobre el que s'hagi d'efectuar el càlcul, s'utilitzarà una dimensió o una altra.

Dins de les possibles dimensions que podem definir sobre un fractal, potser la més rigorosa, seria la de Hausdorff, però la més intuïtiva i fàcil de calcular, és la de semblança. Per aquest fet, ens trobem que sovint, s'utilitza la dimensió de semblança, per estimar la dimensió de Hausdorff, donat que en un gran nombre de fractals, els valors coincideixen o en donen una estimació molt bona, és per aquest fet, que sovint s'anomena dimensió fractal a aquest valor obtingut, de la mateixa manera que, s'utilitza el valor intuïtiu de dimensió per estimar el valor de la dimensió topològica.

Ara bé, com ja hem dit, són moltes les dimensions que es poden calcular sobre un objecte i, totes elles serveixen per al càlcul de les dimensions dels objectes fractals.

Les més usuals, són les següents:

1. Dimensió de semblança:

$$D_S = \frac{\log N}{\log r}$$

r =factor d'ampliació.

N =nombre de peces autosimilars.

2. Dimensió box-counting o de Minkowski:

$$D_M = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log (N(r))}{\log (1/r)}$$

r = factor d'escala.

$N(r)$ = nombre de parts iguals de costat r en què dividim l'objecte inicial.

3. Dimensió de Hausdorff:

$$D_H = \sup \{s : \mathcal{H}^s(F) = \infty\} := \inf \{s : \mathcal{H}^s(F) = 0\}$$

$\mathcal{H}^s(F)$ = mesura exterior δ -dimensional de Hausdorff del conjunt F .

Es compleix la següent sèrie de desigualtats:

$$D_T \leq D_S \leq D_H \leq D_M ,$$

on D_T és la dimensió topològica.

Gràcies a la propietat de la dimensió, es pot donar una definició formal del terme fractal com *un conjunt en el qual, la seva dimensió de Hausdorff és estrictament superior a la seva dimensió topològica*, tot i que hi ha fractals que no la compleixen.

La dimensió ens proporciona una bona eina per a comparar els fractals entre si.

3.3.3 Recursivitat

Consisteix a repetir n vegades el mateix patró o figura.

En els fractals, el que s'itera són les equacions, fórmules o els patrons que el generen.

Per poder fer n iteracions a una fórmula o equació, hi van jugar un paper molt important les computadores, per aquest fet, podem dir que aquest tipus de geometria no s'havia pogut desenvolupar en profunditat, fins al moment en què van aparèixer i van permetre efectuar els estudis al voltant d'aquestes figures geomètriques tan complexes.

3.4 Classificació

Els fractals es poden classificar en quatre categories:

1. Sistema iterat de funcions: es formen a partir de còpies més petites d'ell mateix, les quals també estan formades per còpies d'ell mateix, i així successivament.

Exemples: conjunt de Cantor, Triangle de Sierpiński, corba de Peano, floc de neu de Koch, corba del drac, Fractal H-I de Rivera.

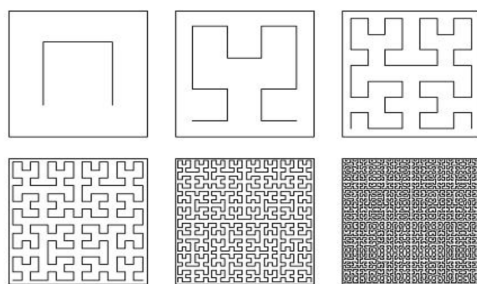


Figura 3.1. *Corba de Peano*

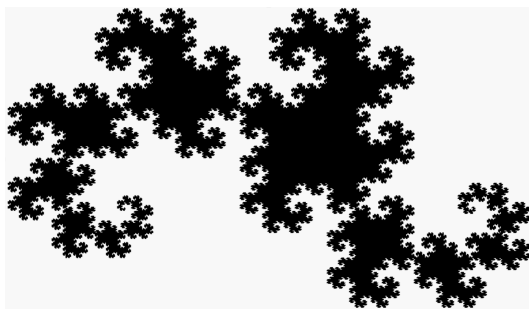


Figura 3.2. *Corba del drac*

2. Fractals recurrents: es defineixen mitjançant una recurrència en cada punt del pla complex.

Exemples: el conjunt de Mandelbrot, el conjunt de Julia.

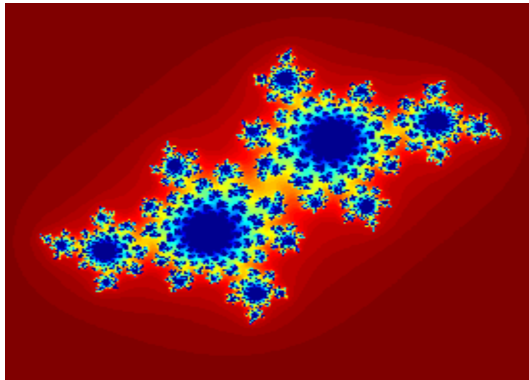


Figura 3.3. *Conjunt de Julia*

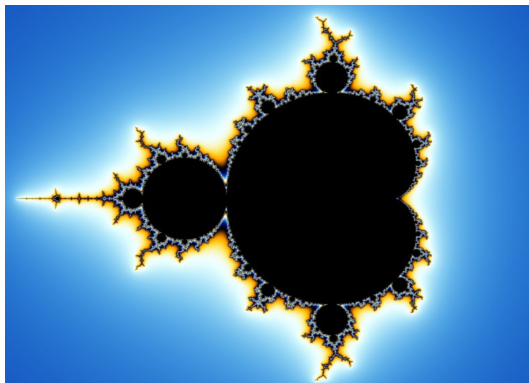


Figura 3.4. *Conjunt de Mandelbrot*

3. Fractals aleatoris: es generen per processos estocàstics. Estan relacionats amb la teoria del caos i tenen una gran aplicació pràctica, serveixen per descriure multitud d'objectes del món real.

Exemples: els núvols, muntanyes, turbulències, costes i arbres.



Figura 3.5. *Núvols*



Figura 3.6. *Llampecs*

4. Fractals oscil·lants: són els que es creen iterant 2 o més funcions diferents de forma alternativa.

Exemples: l'atractor de Lorenz, l'espiral de Fibonacci.

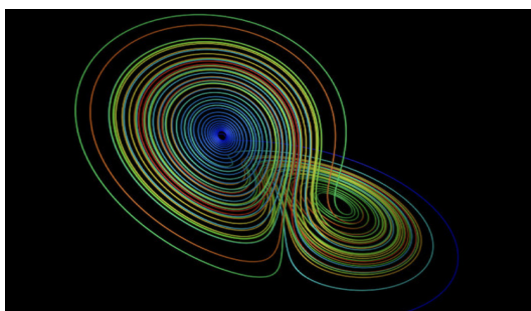


Figura 3.7. *L'atractor de Lorenz*

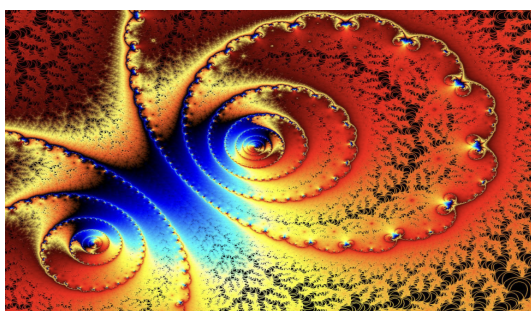


Figura 3.8. *L'espiral de Fibonacci*

3.5 Aplicacions dels fractals

Els fractals es poden aplicar en diversos àmbits., en podem destacar:

En l'àmbit de les matemàtiques, la física i la química:

- Desenvolupament de la Teoria del caos.
- Aproximació d'arrels mitjançant el mètode de Newton.
- Meteorologia.
- Electròlisi.

En l'àmbit *sanitari* destaquem:

- Classificació dels teixits en histopatologia.
- Enzimologia.

En l'àmbit *de la geologia*:

- Estudi en l'erosió de les muntanyes.
- Sismologia.
- Mecànica dels sòls.
- Complexitat de la línia de la costa.

En l'àmbit *tecnològic*:

- Disseny de videojocs.
- Senyal i compressió d'imatges.
- Fractografia i mecànica de la fractura.
- Antenes fractals.
- Ampliacions fotogràfiques digitals.

En l'àmbit *artístic*:

- Creació música.
- Moda i disseny amb la creació de samarretes i patrons de camuflatge.
- Cinematografia.

A les *ciències socials*:

- Anàlisi tècnica de l'evolució dels preus de mercat.
- Anàlisi de la borsa.

4 Espais mètrics

4.1 Definició i exemples

Definició 4.1. Un **espai mètric** és un conjunt no buit X , d'objectes que anomenarem punts, dotat d'una funció

$$\begin{aligned} d : X \times X &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) \end{aligned}$$

que anomenarem **mètrica** o **distància** en l'espai, la qual satisfà les següents propietats $\forall x, y, z \in X$:

$$(a) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$(b) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(d) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$$

Utilitzarem la notació (X, d) per a referir-nos a un espai mètric.

Exemple 4.2. Sigui $\mathbb{R}$, definim $d_u(x, y) := |x - y|$ com distància usual o distància euclidiana sobre $\mathbb{R}$.

Aleshores $(\mathbb{R}, d_u)$ és un espai mètric i s'anomena **espai euclidià d'una dimensió**.

Exemple 4.3. Sigui un conjunt X arbitrari, definim per a $x, y \in X$ la següent distància:

$$d_{disc}(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{si } x = y \\ 1, & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Aleshores (X, d_{disc}) és un espai mètric que s'anomena **espai mètric discret**.

Exemple 4.4. Sigui N un nombre enter positiu fixat i sigui $\Sigma = \{1, 2, 3, \dots, N\}$, definim com a Σ^N al conjunt:

$\Sigma^N := \{\mathbf{x} = x_1 x_2 x_3 \dots \mid x_i \in \Sigma, i \in \mathbb{N}\}$, els elements de Σ^N s'anomenen **codis o paraules semi-infinites**.

Si definim distància entre els codis $\mathbf{x} = x_1 x_2 x_3 \dots$ i $\mathbf{y} = y_1 y_2 y_3 \dots$ per a:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{(N+1)^n}$$

Aleshores (Σ^N, d) és un espai mètric i s'anomena **espai de codis**.

Exemple 4.5. Considerem el conjunt de parelles ordenades de números reals $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ en $\mathbb{R}^2$, definim el producte interior entre dos elements $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ i $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ com:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Definim també la norma d'un element $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, com:

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \text{ i}$$

l'angle entre $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ com:

$$\theta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{cases} 0, & \text{si } \mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{0} \\ \pi/2, & \text{si } \mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ o } \mathbf{y} = \mathbf{0} \\ \arccos \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}, & \text{si } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \wedge \mathbf{y} \neq \mathbf{0} \end{cases}$$

i la mètrica la definim com:

$$d_* : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto d_*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| + \theta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

Aleshores $(\mathbb{R}^2, d_*)$ és un espai mètric.

4.2 Subespai mètric

Definició 4.6. Sigui (X, d) un espai mètric, podem definir sobre aquest espai de manera natural, un subespai mètric com:

Sigui (X, d) un espai mètric i $S \subseteq X$.

Definim la funció ***d-restringida*** a $S \times S$ que notarem per $d|_S$ com:

$$d|_S : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto d|_S(x, y) = d(x, y)$$

Aquesta funció serà una mètrica i a l'espai $(S, d|_S)$ se l'anomenarà ***subespai mètric***.

És fàcil demostrar que aquest subespai mètric compleix les propietats 1, 2 i 3 de la definició 4.1.

Exemple 4.7. Sigui $X = \mathbb{R}^2$ amb la mètrica usual ja definida com d_u en l'exemple 4.2., i definim $S = [0, 1] \times [0, 1]$

Aleshores es compleix que $(S, d_u|_S)$ és un subespai mètric de $(\mathbb{R}^2, d_u)$.

4.3 Convergència

Definició 4.8. Una ***successió*** en X , és una funció $s : \mathbb{N} \rightarrow X$.

Es sol expressar com $s = \{s(n) | n \in \mathbb{N}\}$ o també com $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}} = (s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots)$ o senzillament com $(s_n)_n$.

Altrament, podem entendre com a successió a una llista ordenada d'objectes o elements.

Exemple 4.9. observem la seqüència de fractals:



Figura 4.1. Triangle de Sierpiński

Exemple 4.10. $s := \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ i per tant $(s_n)_n := \left(\frac{1}{n}\right)_n$

Exemple 4.11.

$$\begin{cases} s_1 = s_2 = 1 \\ s_n = s_{n-2} + s_{n-1}, \quad \forall n \geq 3 \end{cases}$$

Aquesta successió es $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \hat{a}.\}$ i s'anomena **successió de Fibonacci**.

Exemple 4.12. Denotem per $\wp(\mathbb{R})$ la família de tots els subconjunts de $\mathbb{R}$, definim $(C_n)_n$ en $\wp(\mathbb{R})$ de manera que:

$$\begin{cases} c_1 =: [0, 1] \\ c_n =: \text{conjunt que s'obté de } C_{n-1}, \text{ eliminant el terç mig de cadascun dels } 2^{n-2} \text{ intervals } C_{n-1} \end{cases}$$

$$\text{Els tres primers termes són: } \begin{cases} c_1 =: [0, 1] \\ c_2 =: [0, 1/3] \cup [2/3, 1] \\ c_3 =: [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1] \end{cases}$$

$(C_n)_n$ és una successió i s'anomena **Conjunt de Cantor**.

Definició 4.13. Sigui (X, d) un espai mètric qualsevol, i considerem $(x_n)_n$ en X , una successió d'elements de X , direm que és una **successió en un espai mètric** (X, d) .

Definició 4.14. Sigui (X, d) un espai mètric qualsevol, i $(x_n)_n$ una successió en X , direm que la successió és **convergent** a S si i només si:

$$\exists S \in X \text{ tal que } \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid n \geq N \implies d(s_n, S) < \epsilon$$

Aleshores direm que S és el límit de la successió i es pot escriure com:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n)_n = S \text{ o també } (s_n)_n \rightarrow S$$

Si la successió convergeix a un element $S \in X$, direm que la successió és **convergent** en X , en cas contrari, direm que **no convergeix** en X o que és **divergent**.

Exemple 4.15. Si considerem l'espai mètric $(\mathbb{R}, d_u)$, i la successió $(s_n)_n =: \left(\frac{1}{n}\right)_n$, tenim que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n)_n = 0 \text{ i com } 0 \in \mathbb{R}, \text{ la successió és convergent.}$$

Perquè per la propietat arquimediana sabem que donat un $\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N} \mid N_\epsilon > 1$, és a dir, $\frac{1}{N} < \epsilon$, i sempre que $n \geq N$ tindrem que $d_u = \left(\frac{1}{n}, 0\right) = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon$

Exemple 4.16. Si considerem l'espai mètric $(\mathbb{R}, d_u)$, i la successió $(s_n)_n := (2n)_n$, aquesta successió no convergeix en $(\mathbb{R}, d_u)$.

Demostració:

Suposem que tenim, que $\exists L \in \mathbb{R}$ tal que $(2n)_n \rightarrow L$.

Aleshores, per a qualsevol $n, m \in \mathbb{N}$, amb $n \neq m$ tenim que $|m - n| \geq 1$ i prenem per exemple $\epsilon = \frac{1}{2} > 0$

Com hem suposat que $(2n)_n \rightarrow L, \exists N \in \mathbb{N} | n \geq N \Rightarrow |2n - L| < \epsilon = \frac{1}{2}$, prenem aleshores qualsevol $M > N$, per tant,

$$2 \leq |2N - M| = |2N - 2M + L - L| \leq |2N - L| + |2M - L| < 1$$

que és absurd. □

Teorema 4.17. (Unicitat del límit) Si $(s_n)_n$ convergeix, aquest punt és únic.

Demostració: (per contradicció)

Suposem que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n)_n = a \text{ i } \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n)_n = b \text{ i } a \neq b$$

per tant $d(a, b) > 0$.

$$\text{Sigui } \epsilon = \frac{d(a, b)}{2}$$

Per la definició de convergència es compleix:

$$\text{Com } (s_n)_n \rightarrow a \Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N} | n \geq N_1 \rightarrow d(s_n, a) < \epsilon \text{ i a més}$$

$$\text{Com } (s_n)_n \rightarrow b \Rightarrow \exists N_2 \in \mathbb{N} | n \geq N_2 \rightarrow d(s_n, b) < \epsilon$$

Sigui ara $n = \max\{N_1, N_2\}$, aleshores tindrem que

$\forall \geq N$ es compleix que:

$$0 \leq d(a, b) \leq d(a, s_n) + d(b, s_n) < \frac{d(a, b)}{2} + \frac{d(a, b)}{2} = d(a, b)$$

i arribem a una contradicció. □

Definició 4.18. Sigui $(x_n)_n$ una successió de X i sigui $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una funció creixent.

Aleshores, la funció composta $x \circ k : \mathbb{N} \rightarrow X$ s'anomena **subsuccessió** de $(x_n)_n$.

Proposició 4.19. Sigui $(x_n)_n$ una successió en un espai mètric. Aleshores:

$$(x_n)_n \rightarrow L \iff \text{tota subsuccessió de } (x_n)_n \text{ també convergeix a } L.$$

4.4 Successions de Cauchy, espais mètrics complets, punt adherent, boles i conjunts tancats

Definició 4.20. Sigui (X, d) un espai mètric i $(s_n)_n$ una **successió** en X , direm que $(s_n)_n$ és de **Cauchy** si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} | m, n \geq N \implies d(s_m, s_n) < \epsilon.$$

Exemple 4.21. Sigui $X = (0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$, considerem l'espai mètric $((0, \infty), d_u)$, subespai de l'espai euclidià $\mathbb{R}$. La successió $(s_n)_n =: \left(\frac{1}{n}\right)_n$ és de Cauchy, i en canvi no és convergent en X .

Proposició 4.22. Sigui (X, d) un espai mètric i sigui $(s_n)_n$ una successió convergent en X . Aleshores $(s_n)_n$ és de Cauchy.

Demostració:

Sigui $(s_n)_n$ convergent en X i sigui $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n)_n = L$

Considerem $\epsilon > 0$ aleshores $\exists N \in \mathbb{N} | n \geq N \implies d(s_n, L) < \frac{\epsilon}{2}$

Siguin $n, m \geq N$, aleshores tenim que $d(s_n, s_m) \leq d(s_n, L) + d(s_m, L) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ per tant és de Cauchy. $\square$

Definició 4.23. Sigui (X, d) un espai mètric, direm que l'**espai mètric** és **complet**, si tota $(s_n)_n$ successió de Cauchy en X , és convergent en X .

Exemple 4.24. L'espai mètric $(\mathbb{R}, d_u)$, és un espai mètric complet.

Exemple 4.25. L'espai mètric $(\mathbb{Q}, d_u)$, no és un espai mètric complet.

Definició 4.26. Sigui (X, d) un espai mètric, i siguin $S \subseteq X$ i $x \in X$. Direm que es un **punt d'adherència** de S (o **punt adherent** a S), si $\exists (s_n)_n$ tal que $(s_n)_n \rightarrow x$.

Exemple 4.27. Considerem l'espai mètric $(\mathbb{R}, d_u)$, en $S = [0, 1]$, 0 és un punt d'adherència de S , donat que $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ és una successió que tendeix a 0.

Definició 4.28. El conjunt de tots els punts d'adherència d'un conjunt, s'anomena **adherència o clausura** d' S , i es denota per $\text{adh}(S)$.

$$\text{adh}(S) = \{x | x \text{ és punt d'adherència d}'S\}.$$

Definició 4.29. Sigui (X, d) un espai mètric, sigui $a \in X$ i sigui $r \in \mathbb{R}^+$, es defineix la **bola de centre a i radi r** com:

$$B_r^d(a) \equiv B_r^d(a; r) := \{x \in X | d(x, a) < r\}$$

Generalment, la d no es posa i es denota simplement com $B_r(a)$ o $B(a; r)$.

Exemple 4.30. Considerem l'espai mètric $(\mathbb{R}, d_u)$ i definim $B_r(a) = (a - r, a + r)$.

Exemple 4.31. Considerem l'espai mètric $(\mathbb{R}^2, d)$ i definim:

$$B_r((a_1, a_2)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2} < r\} = \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 < r^2\}$$

Exemple 4.32. Considerem l'espai mètric $(\mathbb{R}^2, d_*)$, amb d_* definida a l'exemple 4.5., aleshores podem definir la bola de centre $c = (\pi, 0)$ i radi π com:

$$B_{d_*}(c, \pi) = \{(x \in \mathbb{R}^2 | d_*(c, x) < \pi\}$$

Proposició 4.33. *Sigui (X, d) un espai mètric, sigui $S \subseteq X$ i $x \in X$. Aleshores:*

$$x \in S \iff \forall r > 0, B_r(x) \cap S \neq \emptyset$$

Demostració:

$\implies$)

Per hipotesis $s_n \rightarrow x$.

Considerem $r > 0$ i $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \rightarrow d(s_n, x) < r$, per tant, $n \geq N \rightarrow s_n \in B_r(x)$ i per tant $n \geq N \rightarrow s_n \in B_r(x) \cap S \neq \emptyset$

$\impliedby$)

Per a cada $n \in \mathbb{N}$ definim $r_n = \frac{1}{n}$, aleshores existeix $s_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap S$, i es té que $(s_n)_n$ és una successió en S que compleix $d(x_n, x) < \frac{1}{n} \rightarrow 0$ quan n tendeix a ∞ de manera que $s_n \rightarrow x$ i per tant $x \in S$ $\square$

Definició 4.34. *Sigui (X, d) un espai mètric, i sigui $S \subseteq X$, direm que S és **obert** si:*

$$\forall a \in S, \exists r > 0 \text{ tal que } B_r(a; r) \subseteq S$$

Definició 4.35. *Sigui (X, d) un espai mètric, i sigui $S \subseteq X$, direm que S és **tancat** si: S^c , el seu complementari, és obert.*

Exemple 4.36. Considerem l'espai mètric $(\mathbb{R}^2, d_u)$.

Si definim $S := \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) | n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0, 0)\}$, S , és tancat.

Definició 4.37. *Sigui (X, d) un espai mètric, sigui $a \in X$ i sigui $r \in \mathbb{R}^+$, es defineix la **bola tancada de centre a i radi r** com:*

$$\bar{B}_r^d(a) \equiv \bar{B}_r^d(a; r) =: \{x \in X | d(x, a) \leq r\}$$

Proposició 4.38. *Sigui (X, d) un espai mètric complet, i sigui $S \subseteq X$. Aleshores:*

$$S \text{ és tancat} \iff S \text{ és complet.}$$

Demostració:

$\implies$)

Sigui $s \in S$ una successió de Cauchy, volem veure que és convergent en S .

Com S 'es s complet, tenim que $\exists x$ tal que $s_n \rightarrow x$.

Com $s \in S$ i S es tancat, tenim que $s \in S$ convergeix en S .

$\Longleftarrow$)

Sigui $s \in S$, $\exists (s_n)_n$ successió de S tal que $s_n \rightarrow x$, en ser aquesta successió convergent, és de Cauchy.

En ser S complet, tenim que $\exists x$ tal que $s_n \rightarrow x$.

Per la unicitat del límit es té que $x = s$ i per tant $x \in S$

□

Proposició 4.39. *Sigui (X, d) un espai mètric complet, i sigui $(s_n)_n \rightarrow s$. Aleshores:*
 $\{s_n | n \in \mathbb{N}\} = \{s_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{s\}$.

4.5 Conjunts oberts

Definició 4.40. *Sigui (X, d) un espai mètric i $S \subseteq X$. Direm que:*

S és **obert** $\Longleftrightarrow \forall s \in S \exists B, B$ bola $|s \in B \subseteq S$

*Si donat s , $\exists B, B$ bola $|s \in B \subseteq S$, es diu que s és un **punt interior** de S .*

*Al conjunt de tots els punts interiors de S se l'anomena **interior** de S i es denota per S° .*

Proposició 4.41. *Sigui (X, d) un espai mètric i $S \subseteq X$. Les següents afirmacions són equivalents:*

(i) S és obert.

(ii) $\forall s \in S, \exists \epsilon > 0$ tal que $B(s; \epsilon) \subseteq S$;

(iii) $S = S^\circ$

Corol·lari 4.42. *Tota bola $B(a; r)$ és un conjunt obert.*

Exemple 4.43. A $\mathbb{R}^2$ els conjunts de la forma (a, b) son oberts, així com la unió d'aquests, és a dir, $(a, b) \cup (c, d)$.

Mentre que els de la forma $(a, b], [c, d), [e, f]$, no són oberts

Proposició 4.44. *Sigui (X, d) un espai mètric i sigui $S \subseteq X$. Aleshores:*

S és obert $\Longleftrightarrow S^c$ és tancat (S^c és el conjunt complementari de S)

Demostració

$\implies$)

Suposem que S obert, i sigui $x \in \bar{S}^c$.

Suposem que $x \notin S^c$, aleshores $x \in S$ i com S és obert, $\exists B$ tal que $x \in B \subseteq S$, i per tant es té que $x \in B \cap S^c \neq \emptyset$, que contradiu que $x \in \bar{S}^c$, per tant S^c és tancat.

$\Longleftarrow$)

Suposem ara que S és tancat, procedint de manera anàloga arribem a una contradicció i per tant, S és Obert.

□

4.6 Conjunts compactes, conjunts acotats i totalment acotats, punts d'acumulació i punts frontera.

En la família dels tancats d'un espai mètric, ens interessen els que són compactes.

Definició 4.45. *Sigui (X, d) un espai mètric i $S \subseteq X$. Direm que S és **compacte** si tota successió en S , admet una subsuccessió convergent S .*

Exemple 4.46. A $\mathbb{R}$ els conjunts de la forma $[a, b]$ són compactes, mentre que els de la forma $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, \infty]$ no ho són.

Definició 4.47. *Sigui (X, d) un espai mètric i $S \subseteq X$. Direm que S és **acotat** si $\exists a \in X$ i $\exists r \in \mathbb{R}^+$ tals que $S \subseteq B_d(a; r)$.*

Exemple 4.48. A $\mathbb{R}$ els conjunts de la forma $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ són acotats, mentre que els de la forma $[a, \infty]$ no ho són.

Proposició 4.49. *Sigui $(\mathbb{R}^n, d)$ un espai mètric, sigui $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Aleshores:
Si S és compacte $\iff S$ és tancat i acotat.*

Lema 4.50. *Sigui (X, d) un espai mètric, sigui $S \subseteq X$. Aleshores:
 S està contingut en una bola $\iff$ està contingut en la unió d'un número finit de boles.*

Proposició 4.51. *Sigui (X, d) un espai mètric, sigui $S \subseteq X$. Aleshores:
Si S és compacte $\implies S$ és tancat i acotat.*

Definició 4.52. *Sigui (X, d) un espai mètric i $F = \{S_i\}_{i \in n}$ una família de subconjunts de X .*

*Direm que F és un **recobriment** de X o que F **recobreix** a X , si $X \subseteq \bigcup_{i \in I} S_i$.*

Definició 4.53. *Sigui (X, d) un espai mètric i $F = \{S_i\}_{i \in n}$ una família de subconjunts de X .*

*Direm que F és un **recobriment obert** de X , si és un recobriment de X i cada element S_i és un conjunt obert.*

Definició 4.54. *Sigui (X, d) un espai mètric i $S \subseteq X$.*

*Direm que S és **totalment acotat** si $\forall \epsilon > 0$, existeix un número finit de boles de radi ϵ que recobreix a S .*

Proposició 4.55. *Sigui (X, d) un espai mètric, sigui $S \subseteq X$. Aleshores:
Si S és totalment acotat $\implies S$ és acotat.*

Demostració:

És evident des del moment que S està contingut en un número finit de boles. $\square$

Teorema 4.56. *Sigui (X, d) un espai mètric complet i sigui $S \subseteq X$. Aleshores:
 S és compacte $\iff S$ és tancat i totalment acotat.*

Demostració: es pot trobar a la p g. 21 del llibre [4]

Proposició 4.57. *Sigui (X, d) un espai mètric complet i sigui $S \subseteq X$. Aleshores:
 S és acotat $\iff S$ és totalment acotat.*

Proposició 4.58. *Sigui $(\mathbb{R}^n, d)$ un espai mètric, sigui $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Aleshores:
Si S és acotat $\iff S$ és totalment acotat.*

Proposició 4.59. *Sigui (X, d) un espai mètric complet i sigui $F \subseteq X$, F tancat. Aleshores:
 F és compacte.*

Proposició 4.60. *Sigui (X, d) un espai mètric, aleshores:
(i) La unió finita de compactes és un compacte.
(ii) La intersecció arbitrària de compactes és un compacte.*

4.7 Continuïtat en espais mètrics

Definició 4.61. *Siguin (X, d) i (Y, m) dos espais mètrics i sigui $f : X \rightarrow Y$ i $a \in X$.
Direm que f és **continua** en a , si:*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0, \text{ tal que sempre que } d(x, a) < \delta \implies m(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

*Si f és continua $\forall a \in X$, direm que f és **continua** en X (o simplement **continua**).
Si f no és continua en a , es diu que és **discontinua** en a . També es pot generalitzar el concepte $\forall a \in X$.*

Proposició 4.62. *Sigui $f : (X, d) \rightarrow (Y, m)$, i $a \in X$, aleshores les següents afirmacions són equivalents:*

- (i) f és continua;
- (ii) $\forall B_m(f(a); \epsilon) \exists$ una bola $B_d(a; \delta)$ tal que $f(B_d(a; \delta)) \subseteq B_m(f(a); \epsilon)$;
- (iii) $\forall O$ obert en Y , es té que $f^{-1}(O)$ és obert en X .

5 L'espai $(\mathcal{H}(X), h)$

5.1 L'espai $(\mathcal{H}(X), h)$ i la mètrica de Hausdorff

Definició 5.1. *Sigui (X, d) un espai mètric. Definim el següent conjunt:*

$\mathcal{H}(X) := \{K \subseteq X \mid K \text{ és compacte}, K \neq \emptyset\}$ **conjunt de tots els subconjunts compactes de X**

Exemple 5.2. Considerem l'espai mètric $(\mathbb{R}^2, d_u)$, el conjunt $K_1 \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$, $K_2 \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ i $K_3 \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$, mentre que $K_4 \notin \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$, $K_5 \notin \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ i $K_6 \notin \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$.

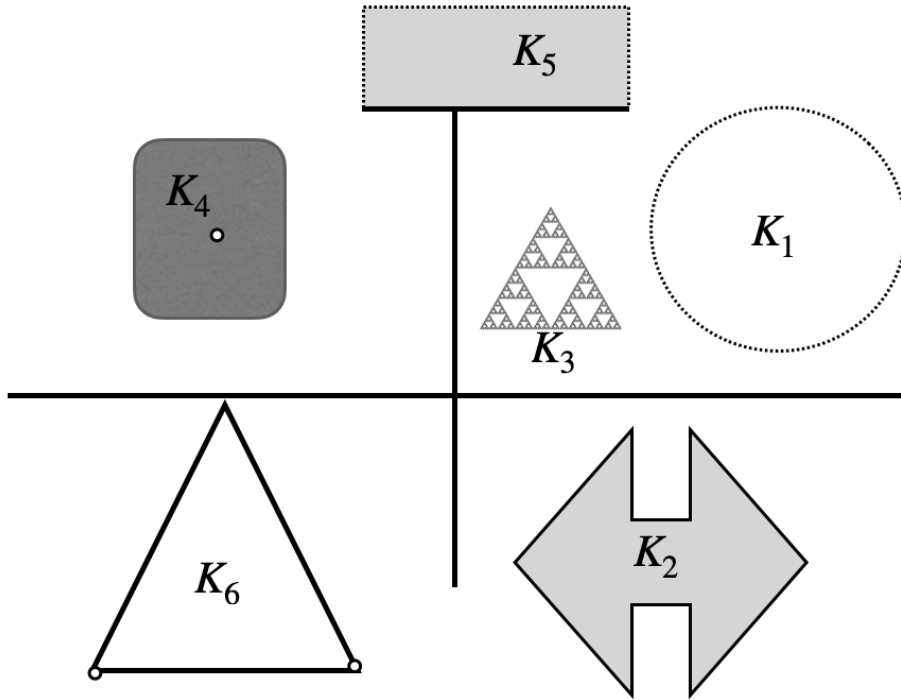


Figura 5.1. Elements en $\mathbb{R}^2$

Proposició 5.3. *Siguin (X, d) un espai mètric, sigui $a \in X$ i $f : X \rightarrow Y$ continua. Aleshores:*

Si $K \in \mathcal{H}(X) \implies f(K) \in \mathcal{H}(Y)$

Demostració:

Sigui $(y_n)_n$ una successió de $f(K)$.

Per cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n = f(k_n)$, per algun $k_n \in K$.

Com $(k_n)_n$ es una successió en K i K és compacte, existeix una subsuccessió de $(k_n)_n$ que tendirà a k per algun $k \in K$.

Considerem ara la imatge d'aquesta subsuccessió en $(y_n)_n$, en ser f continua, podem concloure que la subsuccessió tendirà a $f(k)$ de manera que $f(k) \in f(K)$. $\square$

Definició 5.4. *Sigui (X, d) un espai mètric, siguin $a \in X$ i $K \in \mathcal{H}(X)$, es defineix la **distància d'un punt a un compacte** com:*

$$\hat{d}(a, K) := \min \{d(a, x) | x \in K\}$$

Proposició 5.5. *Sigui (X, d) un espai mètric, siguin $a \in X$ i $K \in \mathcal{H}(X)$. Aleshores:
El mínim de $d(a, x) | x \in K$ sempre existeix.*

Definició 5.6. *Sigui (X, d) un espai mètric, siguin $A, B \in \mathcal{H}(X)$, es defineix la **distància d'un compacte a un compacte** com:*

$$\tilde{d}(A, B) := \max \{\hat{d}(a, B) | a \in A\} := \max \{\min \{d(a, b) | b \in B\} | a \in A\}$$

Observem que en general $\tilde{d}$ no és mètrica, donat que no compleix $\tilde{d}(A, B) = \tilde{d}(B, A)$.

Exemple 5.7. Si considerem l'espai mètric $(\mathbb{R}, d_u)$, i els conjunts $A = [0, 1]$ i $B = [0, 2]$. Tenim que $\tilde{d}$ no és una mètrica en aquest espai, perquè:

$$\tilde{d}([0, 1], [0, 2]) = 0 \neq 1 = \tilde{d}([0, 2], [0, 1]).$$

Proposició 5.8. *Sigui (X, d) un espai mètric, siguin $A, B \in \mathcal{H}(X)$. Aleshores:
El màxim de $\hat{d}(A, B)$ sempre existeix.*

Lema 5.9. *Siguin $A, B \in \mathcal{H}(X)$ i $A \subseteq B$. Aleshores: $\tilde{d}(A, B) = 0$.*

Definició 5.10. *Siguin $A, B \in \mathcal{H}(X)$, es defineix $\mathbf{h}(A, B)$ com:*
 $\mathbf{h}(A, B) := \max \{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\}$

Exemple 5.11. En $\mathcal{H}(\mathbb{R})$, de l'exemple anterior, $\mathbf{h}([0, 1], [0, 2]) = \max\{0, 1\} = 1$.

Lema 5.12. *Siguin $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$ i $a \in X$, $c \in C$ (a i c fixes). Aleshores:
 $\min \{d(a, b) | b \in B\} \leq \min \{d(a, c) + d(c, b) | b \in B\}$*

Lema 5.13. *Siguin $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$. Aleshores:
 $\tilde{d}(A, B) \leq \tilde{d}(A, C) + \tilde{d}(C, B)$, $\forall A, B \in \mathcal{H}(X)$*

Proposició 5.14. $\mathbf{h}$ és una mètrica sobre $\mathcal{H}(X)$.

Demostració: es pot trobar a la pàg. 34 de [4]

Definició 5.15. $(\mathcal{H}(X), h)$ és un espai mètric, $\mathbf{h}$ és una mètrica sobre $\mathcal{H}(X)$. s'anomena **mètrica de Hausdorff**.

Com els elements de $\mathcal{H}(X)$, són subconjunts de X , es sol dir que $\mathcal{H}(X)$ és un **hiperespai** de X .

5.2 Completesa de l'espai $(\mathcal{H})$

Definició 5.16. Sigui (X, d) un espai mètric, sigui $A \in \mathcal{H}(X)$ i $\epsilon > 0$, es defineix el **núvol de centre A i radi ϵ** i es denota per $N(A; \epsilon)$ a:

$$N(A; \epsilon) =: \{x \in X \mid \hat{d}(x, A) < \epsilon\}$$

Lema 5.17. Siguin $A, B \in \mathcal{H}(X)$ i sigui $\epsilon > 0$. Aleshores:

$$h(A, B) < \epsilon \iff A \subseteq N(B; \epsilon) \text{ i } B \subseteq N(A; \epsilon)$$

Definició 5.18. Siguin (X, d) un espai mètric, sigui $A \in \mathcal{H}(X)$ i $\epsilon > 0$, es defineix el **núvol tancat de centre A i radi ϵ** i es denota per $\overline{N}(A; \epsilon)$ a:

$$\overline{N}(A; \epsilon) := \{x \in X \mid \hat{d}(x, A) \leq \epsilon\}$$

Lema 5.19. Siguin (X, d) un espai mètric, sigui $A \in \mathcal{H}(X)$ i $\epsilon > 0$. Aleshores:

El conjunt $\overline{N}(A; \epsilon)$ és tancat.

Lema 5.20. Siguin (X, d) un espai mètric, sigui $A, B \in \mathcal{H}(X)$ i $\epsilon > 0$. Aleshores:

$$h(A, B) \leq \epsilon \iff A \subseteq \overline{N}(B; \epsilon) \text{ i } B \subseteq \overline{N}(A; \epsilon)$$

Lema 5.21. Lema d'extensió

Sigui (X, d) un espai mètric, sigui $(A_n)_n$ una successió de Cauchy en $(\mathcal{H}(X), \mathbf{h})$, i $(n_j)_{j=1}^\infty$ una successió creixent de natural.

Suposem que $\{x_{n_j} \in A_{n_j} \mid j = 1, 2, \dots\}$ és de Cauchy en (X, d) .

Aleshores: $\exists (x_n) \in A_n$ tal que $x_{n_j} = x_{n_j} \forall j = 1, 2, \dots$

Demostració: es pot trobar a la pàg. 36 de [4]

Teorema 5.22. Sigui (X, d) un espai mètric. Aleshores:

$$(\mathcal{H}(X), \mathbf{h}) \text{ és complet} \iff (X, d) \text{ és complet.}$$

A més, si $(A_n)_n$ és una successió de Cauchy en $\mathcal{H}(X)$. tal que $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, podem escriure:

$$A := \{x \in X \mid \exists (x_n)_n \text{ successió en } X, \text{ amb } (x_n)_n \rightarrow x \text{ i } x_n \in A_n, \forall n\},$$

Es diu que l'espai mètric $(\mathcal{H}(X), \mathbf{h})$, és l'**espai on viuen els fractal**.

Demostració: es pot trobar a la pàg. 38 de [4]

5.3 Dimensió de Hausdorff

Definició 5.23. Sigui (X, d) un espai mètric, sigui $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$ i acotat. Es defineix el **diàmetre** d' A , i es denota $\text{diam}(A)$ a:

$$\text{diam}(A) := \sup \{d(a_1, a_2) | a_1, a_2 \in A\}$$

Definició 5.24. $(\mathcal{H}(X), h)$ espai mètric, sigui $A \subseteq \mathcal{H}(X)$, $A \neq \emptyset$ i acotat. Es defineix el **diàmetre** d' A , i es denota $\text{diam}(A)$ a:

$$\text{diam}(A) := \sup \{\tilde{d}(a_1, a_2) | a_1, a_2 \in A\}$$

Definició 5.25. Sigui $(\mathbb{R}^n, d_u)$ un espai mètric, sigui $K \subset \mathbb{R}^n$, es defineix el **diàmetre** de K com:

$$\text{diam}(K) := \sup \{d_u(x, y) | x, y \in K\}$$

Si prenem com a d_u el valor absolut, s'escriurà de la següent forma:

$$\text{diam}(K) := |K| \text{ i per tant:}$$

$$|K| := \sup\{|x - y| : x, y \in K\}$$

Definició 5.26. Sigui $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ un espai mètric, sigui $K \subset \mathbb{R}^n$, prenem I un conjunt arbitrari d'índexs. La col·lecció $\{K_i\}_{i \in I}$ s'anomena **δ - recobriment** de F si:

- (i) $F \subset \bigcup_{i \in I} K_i$
- (ii) $0 < |K_i| \leq \delta, \forall i \in I$.

Definició 5.27. Sigui $F \subset \mathbb{R}^n$, i s un número no negatiu. Per a qualsevol $\delta > 0$, es defineix $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ com:

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) =: \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |K_i|^s \right\}$$

on l'ínfim es pren sobre tots els δ - **recobriment** de F i s'anomena **mesura exterior del conjunt F** .

Definició 5.28. Sigui $F \subset \mathbb{R}^n$, i s un número no negatiu, es defineix $\mathcal{H}^s(X)$. com:

$$\mathcal{H}^s(F) =: \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$$

i s'anomena **mesura exterior s-dimensional de Hausdorff** del conjunt F .

Proposició 5.29. Sigui $F \subset \mathbb{R}^n$, i s un número no negatiu. Aleshores:

El $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$ existeix.

Amb aquesta definició es generalitza la idea de longitud, àrea i volum.

Proposició 5.30. Sigui $F \subset \mathbb{R}^n$, i s un número no negatiu. Aleshores:

$$\forall K \subset \mathbb{R}^n, \exists s_0 \leq n \text{ que compleix que } \mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{per } s \leq s_0 \\ 0 & \text{per } s > s_0 \end{cases}$$

Definició 5.31. *Si $F \subset \mathbb{R}^n$, un fractal, es defineix com*

$$\dim_H(F) =: \sup \{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = \infty\} =: \inf \{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\}$$

*i s'anomena **dimensió de Hausdorff** o també **dimensió de Hausdorff-Besicovitch**.*

Per convenció s'ha adoptat que $\dim \emptyset = 0$,

Si $s = \dim_H(F)$, es té que $\mathcal{H}^s(F)$ pot ser igual a 0, ∞ , o $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.

Proposició 5.32. *La dimensió de Hausdorff compleix les següents propietats:*

(i) *Si $E \subset F$, aleshores $\dim_E(E) \leq \dim_H(F)$ (**Monotonía**)*

(ii) *Si $\{F_i\}_{i \geq 1}$ és una successió de subconjunts de $\mathbb{R}^n$. Aleshores:*

$$\dim_H(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_i) = \sup \{\dim_h(F_i)\} \quad (\mathbf{Estabilitat numèrica})$$

(iii) *Si $F \subset \mathbb{R}^n$ és numerable, aleshores $\dim_H(F) = 0$*

(iv) *Si $F \subset \mathbb{R}^n$ és obert, aleshores $\dim_H(F) = n$.*

6 Els fractals lineals

Els fractals lineals, són aquells fractals que es construeixen a partir de conceptes i algorismes lineals, i són exactament idèntics en qualsevol escala. Es construeixen mitjançant traçats geomètrics simples, com per exemple les rectes. Parlarem d'alguns dels fractals lineals més coneguts, qui els va construir i calcularem les seves mesures i dimensions, amb aquests càlculs, posteriorment es plantejaran les activitats a l'aula. En tots ells estimarem la dimensió de Hausdorff mitjançant la fórmula de la dimensió de semblança, i l'anomenarem dimensió fractal.

6.1 El Conjunt de Cantor

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (3 de març del 1845, Sant Petersburg (Rússia) - 6 de gener del 1918, Halle (Alemanya)). Fou matemàtic i filòsof, fundador de la teoria de conjunts moderna. El seu pare, d'origen danès, de ben jove va marxar a Sant Petersburg. El 1856, la família es traslladà a Wiesbaden (Alemanya), on va estudiar destacant principalment en matemàtiques i ciència. Va iniciar els seus estudis posteriors al Polytechnikum de Zúrich, i es va canviar a la Universitat de Berlín per poder estudiar matemàtiques. Va assistir a classes de Weierstrass, Kummer i Kronecker. A Berlín, va finalitzar la seva dissertació en teoria de conjunts amb l'obra d'*aequationibus secundi gradus indeterminantis* (la indeterminació d'equacions de segon grau). El 1867, va obtenir el doctorat i fou professor a una escola, poc després s'establí com a professor adjunt de la Universitat de Halle. El 1869 aconseguí la plaça de professor titular amb la seva tesi sobre la teoria de conjunts. El 1890, Cantor ajudà a la fundació de Deutsche Mathematiker-Vereinigung (Societat matemàtica alemanya) i en presidí la primera conferència a Halle el 1891, on presentà el seu famós argument de la diagonalització. Continuà amb feines matemàtiques, que a vegades interrompia perquè patia depressions. Cantor passà els últims anys exercint de professor, tot i que estava sovint de baixa. El 1913, es va retirar i va morir el 1918 a l'hospital psiquiàtric de Halle.

El conjunt de Cantor

El conjunt de Cantor, és el més antic i conegut dels fractals, es deu a Georg Cantor, que el va construir per primer cop l'any 1883, tot i que ja l'havia treballat el matemàtic Henry John Stephen Smith, però com no el va donar a conèixer, se'l va atribuir finalment Cantor. Es construeix dividint un segment en tres parts i se suprimeix el segment central, a continuació, en els altres dos segments laterals que resten, es fa el mateix, es divideix cadascun d'ells en tres parts i s'elimina la part central en cadascun dels dos segments laterals i així indefinidament. El resultat és un seguit de punts situats sobre el segment inicial. A continuació veiem el conjunt de Cantor fins a la cinquena iteració.



Figura 6.1. *Conjunt de Cantor*

En termes matemàtics, podem dir que si C és el conjunt de Cantor, aquest es pot expressar amb la següent fórmula matemàtica:

$$C =: \bigcap_{j=1}^{\infty} C_j$$

Si calculem la longitud del conjunt de Cantor, ens trobem que:

Iteració	Nobre de segments	Longitud de cada segment	Longitud total de la iteració
C_0	1	1	1
C_1	2^1	$\left(\frac{1}{3}\right)^1$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 0,666\dots$
C_2	2^2	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 0,444\dots$
C_3	2^3	$\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 0,296\dots$
.....			
C_n	2^n	$\left(\frac{1}{3}\right)^n$	$\left(\frac{2}{3}\right)^n$

Per tant, la longitud total en la iteració n s'expressarà amb la fórmula:

$$l_{C_n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Si fem el càlcul després d'infinites iteracions, tenim que:

$$l_{C_\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

Com a resultat, podem concloure que la longitud del conjunt de Cantor és zero.

$$l_C = 0$$

El conjunt de Cantor és un conjunt infinit de punts, en conseqüència, la seva dimensió topològica és 1.

$$D_T = 1$$

Mentre que si observem com es construeix, podem veure que està format per dues còpies maximals d'ell mateix i cada còpia es multiplica per un factor 3 per tal de formar tot el conjunt.

En conseqüència, la seva dimensió de Hausdorff és expressada per la fórmula:

$$D_F = D_H = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,63093\dots$$

No compleix una de les propietats de la definició de fractal, n'és una excepció, i no és l'únic.

6.2 El Floc de Koch

Helge von Koch (25 de gener de 1870, Estocolm (Suècia) - 11 de març de 1924, Danderyd (Suècia)). El seu avi fou el fiscal general (Justitiekansler) de Suècia, i el seu pare, fou tinent coronel en la Reial Guàrdia Muntada de Suècia. Després de finalitzar l'ensenyança elemental, va estudiar Matemàtiques a la Universitat d'Estocolm amb el famós matemàtic suec Magnus Gösta Mittag-Leffler, qui després seria el seu mentor. Koch va escriure multitud d'articles sobre la teoria de nombres. Va realitzar aportacions a la teoria de nombres, provant el 1901 l'equivalència entre la hipòtesi de Riemann i una forma del teorema dels nombres primers.

El Floc de Koch

Per obtenir el floc de Koch, primer explicarem el procés per a la construcció de la corba de Koch. La corba, fou construïda per primer cop l'any 1904. Es construeix dividint un segment en tres parts i aquest cop, se substitueix el segment central per dos segments de mida idèntica, fent una rotació de 60 graus, en sentits contraris i formant una espècie de dent. Es va repetint aquest procediment de manera que converteix cada segment en quatre formant una "dent" de la següent manera:

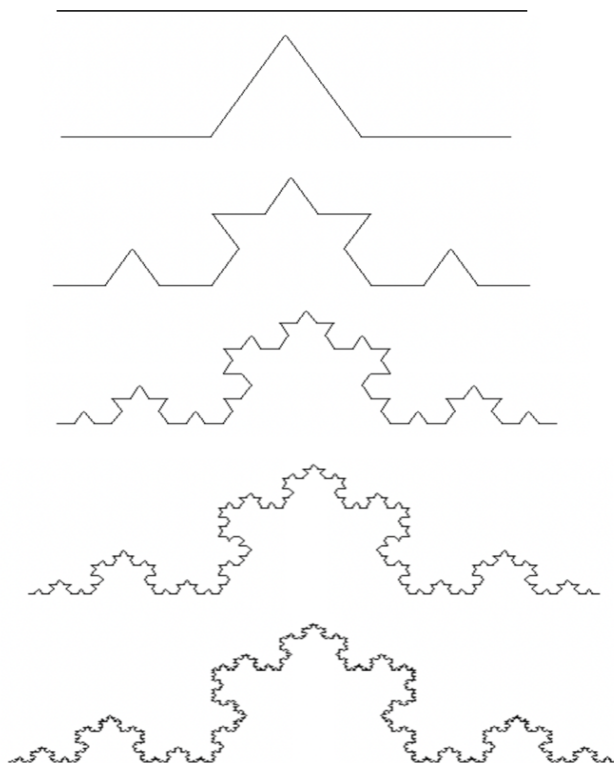


Figura 6.2. *Iteracions de la Corba de Koch*

El resultat obtingut després d'unes quantes iteracions seria el següent:



Figura 6.3. Corba de Koch

Si K és la corba de Koch, direm que:

$$K := \lim_{j \in \mathbb{N}} K_j$$

Si calculem la longitud de la corba, prenent que el segment és d'una unitat, podem construir la següent taula:

Iteració	Nombre de segments	Longitud de cada segment	Longitud total
K_0	1	1	1
K_1	4^1	$\left(\frac{1}{3}\right)^1$	$\left(\frac{4}{3}\right)^1 = 1,333\dots$
K_2	4^2	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\left(\frac{4}{3}\right)^2 = 1,777\dots$
K_3	4^3	$\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$\left(\frac{4}{3}\right)^3 = 2,370\dots$
.....			
K_n	4^n	$\left(\frac{1}{3}\right)^n$	$\left(\frac{4}{3}\right)^n$

Per tant, la longitud total en la iteració n s'expressarà amb la fórmula:

$$l_{K_n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Si fem el càlcul després d'infinites iteracions:

$$l_{K_\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$$

Així doncs, podem concloure que la longitud de la corba de Koch és infinita.

$$l_K = \infty$$

Si calculem ara la seva dimensió topològica i de Haudorff tenim que:

$$D_T = 1$$

Mentre que si observem la figura al límit, s'observen 4 còpies d'ella mateixa amb un factor d'ampliació 3, tenim que:

$$D_F = D_H = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,26186\dots$$

En aquest cas, compleix la propietat que $D_H > D_T$.

6.3 Figures de Sierpiński

Waclaw Sierpiński (14 de març de 1882, Varsòvia (Polònia) - 21 d'octubre de 1969, Varsòvia (Polònia)), va ser un matemàtic polonès, fill d'un prestigiós metge. Va estudiar entre 1900 i 1904 a la universitat de Varsòvia amb el professor rus, Gueorgui Feodóssievitx Voronoi, especialista en teoria de nombres, amb excel·lents qualificacions. Després d'exercir de professor de secundària a Varsòvia, va marxar a la universitat de Cracòvia on va obtenir el doctorat el 1907 amb una tesi de teoria de nombres, que havia escrit anteriorment. El 1908 va passar a ser docent de la universitat de Lwow i dos anys després va ser nomenat professor titular en aquesta universitat, on va iniciar el seu interès per la teoria de conjunts. En començar la Primera Guerra Mundial es trobava a Rússia i va ser detingut, però els seus col·legues matemàtics russos, el van fer traslladar a Moscou, on va col·laborar amb el matemàtic rus Nikolai Luzin en el camp dels conjunts analítics i projectius. El febrer de 1918 va retornar a Lwow (Ucraïna), no obstant això, aviat va anar novament a la universitat de Varsòvia, de la qual va ser professor la resta de la seva vida acadèmica. A Varsòvia, el 1920, conjuntament amb Stefan Mazurkiewicz i Zygmunt Janiszewski, van fundar la prestigiosa revista *Fundamenta Mathematicae* de la qual fou editor durant molts anys.

Tres coneguts fractals duen el seu nom: el triangle, la catifa i la piràmide o tetraedre de Sierpiński.

El Triangle de Sierpiński

El Triangle de Sierpiński, data de l'any 1915, es construeix considerant un triangle equilàter i s'elimina el triangle interior que es forma de la unió dels punts mitjans dels costats de cada triangle del pas anterior, i així indefinidament. Després de la cinquena iteració, el triangle resultant és el següent:

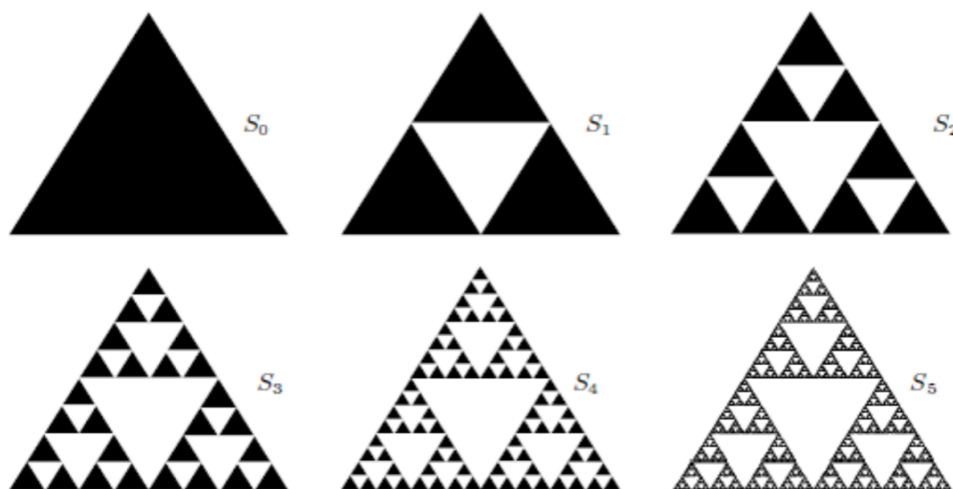


Figura 6.4. Iteracions del Triangle de Sierpiński

Si S és el triangle de Sierpiński, direm que:

$$S := \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$$

Si calculem el perímetre o longitud (d'ara endavant, usarem el terme longitud per referir-nos al perímetre) del triangle, on el triangle inicial té de longitud de costat una unitat, tenim que:

Iteracions	Nombre de triangles restants	Longitud del costat	Longitud total
S_0	$1 \cdot (3 \cdot 1)$	1	$3 \cdot 1$
S_1	$3 \cdot (3 \cdot 3)$	$\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$(3 \cdot 3) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$
S_2	$3^2 \cdot (3 \cdot 3^2)$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$(3 \cdot 3^2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$
S_3	$3^3 \cdot (3 \cdot 3^3)$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$(3 \cdot 3^3) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$
.....			
S_n	$3^n \cdot (3 \cdot 3^n)$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$(3 \cdot 3^n) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$

La longitud en el pas n serà:

$$l_{S_n} = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

si calculem el límit a l'infinit:

$$l_S = l_{S_\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty$$

En conseqüència, la longitud total és infinita, mentre que si calculem l'àrea, ens trobem amb el següent:

Iteració	Nombre de triangles restants	Base del triangle	Alta del triangle	Àrea del triangle	Àrea total
S_0	1	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2^2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$
S_1	3	$\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\frac{\sqrt{3}}{2^2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2^4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{4}$
S_2	3^2	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{\sqrt{3}}{2^3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2^6}$	$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$
S_3	3^3	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\frac{\sqrt{3}}{2^4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2^8}$	$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$
.....					
S_n	3^n	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$\frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2^{2n+2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$

En el pas n l'àrea total serà:

$$A_{S_n} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

On l'àrea va disminuint a cada pas, resultant que quan tendeix a l'infinit, l'àrea és zero.

$$A_S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

Ara calcularem la seva dimensió, tant topològica com fractal:

$$D_T = 2$$

Mentre que si observem la figura al límit, s'observen 3 còpies d'ella mateixa amb un factor d'ampliació 2, tenim que, la seva dimensió fractal és:

$$D_F = D_H = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1,58496250....$$

En aquest cas $1,58496250 < 2$, i no es compleix $D_H > D_T$, és una altra de les excepcions.

La Catifa de Sierpiński

Sierpiński, també va definir, utilitzant el mateix procediment en un quadrat, la figura que es detalla tot seguit i que després de diverses iteracions, seria:

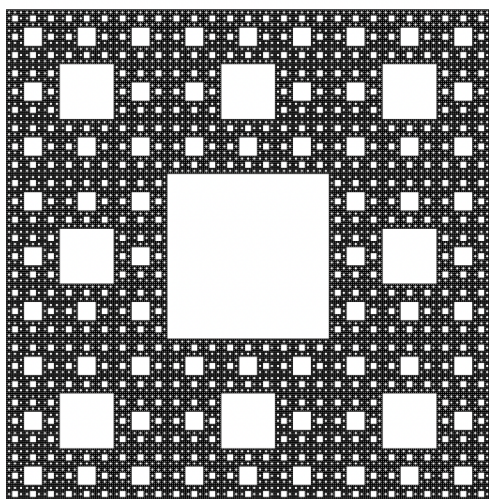


Figura 6.5. *Catifa de de Sierpiński*

Aquest conjunt, també rep el nom de catifa de Sierpiński.

Si SC és la catifa de Sierpiński, direm que:

$$SC := \bigcap_{n=1}^{\infty} SC_n$$

Calculem ara, alguna de les seves mesures. Si comencem amb un quadrat amb costat de longitud una unitat, podem fer la següent taula relacionada amb la longitud o perímetre:

Iteració	Nombre de costats eliminats	Costat del quadrat eliminat	Longitud total
SC_0	0	0	4
SC_1	$4 \cdot 1$	$\left(\frac{1}{3}\right)^1$	$l_{SC_0} + (4 \cdot 1) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 = 5,333...$
SC_2	$4 \cdot 8^1$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$l_{SC_0} + l_{SC_1} + (4 \cdot 8) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 8,888...$
SC_3	$4 \cdot 8^2$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$l_{SC_0} + l_{SC_1} + l_{SC_2} + (4 \cdot 8^2) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 18,370...$
.....			
SC_n	$4 \cdot 8^{n-1}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^n$	$l_{SC_0} + \dots + l_{SC_{n-1}} + (4 \cdot 8^{n-1}) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = 4 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^n$

Ja s'observa que la longitud va augmentant en cada pas, i obtenim la següent sèrie:

$$l_{SC_n} = 4 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^n$$

Que és la suma d'infinites termes decreixents d'una progressió geomètrica, la qual no convergeix cap a un valor finit, sinó que tendeix a l'infinit i, per tant:

$$l_{SC} = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^n = 4 + \infty = \infty$$

Així doncs, la longitud total de la catifa de Sierpiński és infinita.

Mentre que si calculem la seva àrea:

Iteració	Nombre de quadrats restants	Costat del quadrat eliminat	Àrea de cada quadrat	Àrea total
SC_0	1	1	1	1
SC_1	8	$\left(\frac{1}{3}\right)^1$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\left(\frac{8}{9}\right)^1$
SC_2	8^2	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\left(\frac{1}{3^2}\right)^2$	$\left(\frac{8}{9}\right)^2$
SC_3	8^3	$\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$\left(\frac{1}{3^3}\right)^2$	$\left(\frac{8}{9}\right)^3$
.....				
SC_n	8^n	$\left(\frac{1}{3}\right)^n$	$\left(\frac{1}{3^n}\right)^2$	$\left(\frac{8}{9}\right)^n$

Fent els càlculs tendint a infinit, tenim que:

$$A_{SC} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = 0$$

Pel que fa al càlcul de les seves dimensions, tant topològica com fractal, tenim:

$$D_T = 2$$

Mentre que si mirem la figura al límit, s'observen 8 còpies d'ella mateixa amb un factor d'ampliació 3, llavors tenim que:

$$D_F = D_H = \frac{\ln 8}{\ln 3} = 1,89278926....$$

Tampoc compleix la propietat que $D_H > D_T$.

La Piràmide de Sierpiński

També es pot parlar del tetraedre o piràmide de Sierpiński, que és la versió tridimensional del triangle ja exposat, es mostra a continuació el resultat després de diverses iteracions:

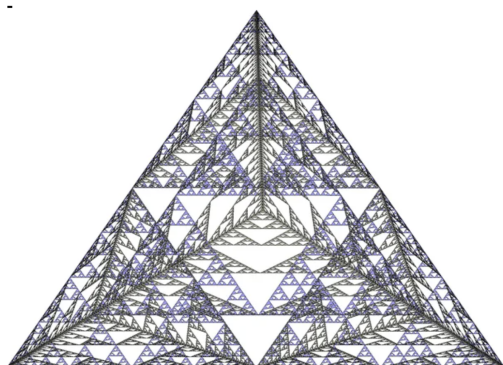


Figura 6.6. Piràmide o tetraedre de Sierpiński

A aquest tetraedre li podem calcular la seva àrea i el seu volum.

Pel que fa a l'àrea tenim la següent taula:

Iteració	Nombre de tetraedres restants	Base	Altura	Àrea de cada cara	Àrea total
SP_0	$1 \cdot (4 \cdot 1)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2^2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2^2} \cdot (4 \cdot 1) = \sqrt{3} = 1,7320508...$
SP_1	$4 \cdot (4 \cdot 4)$	$\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\frac{\sqrt{3}}{2^2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2^4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2^4} \cdot (4 \cdot 4) = \sqrt{3} = 1,7320508...$
SP_2	$4^2 \cdot (4 \cdot 4^2)$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{\sqrt{3}}{2^3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2^6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2^6} \cdot (4 \cdot 4^2) = \sqrt{3} = 1,7320508...$
SP_3	$4^3 \cdot (4 \cdot 4^3)$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\frac{\sqrt{3}}{2^4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2^8}$	$\frac{\sqrt{3}}{2^8} \cdot (4 \cdot 4^3) = \sqrt{3} = 1,7320508...$
.....					
SP_n	$4^n \cdot (4 \cdot 4^n)$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$\frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2^{2n+2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2^{2n+2}} \cdot (4 \cdot 4^n) = \sqrt{3} = 1,7320508...$

Com es veu, l'àrea és finita i invariant:

$$A_{SP} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3} = \sqrt{3} = 1,7320508...$$

Mentre que el seu volum:

Iteració	Nombre de tetraedres restants	Àrea de la base	Altura de cada tetraedre	Volum de cada cara	Volum total
SP_0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2^2}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2^2}$	$\frac{\sqrt{2}}{12} = 0,1178511...$
SP_1	4	$\frac{\sqrt{3}}{2^4}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2^5}$	$\frac{1}{12} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,0589255...$
SP_2	4^2	$\frac{\sqrt{3}}{2^6}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2^2}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2^8}$	$\frac{1}{12} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2^2} = 0,0294627...$
SP_3	4^3	$\frac{\sqrt{3}}{2^8}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2^3}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2^{11}}$	$\frac{1}{12} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2^3} = 0,0147313....$
.....					
SP_n	4^n	$\frac{\sqrt{3}}{2^{2n+2}}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2^n}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2^{3n+2}}$	$\frac{1}{12} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2^n}$

Podem observar que va disminuint pas a pas, si el fem tendir a infinit, tenim:

$$V_{SP} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{12} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2^n} = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

Si SP és el tetraedre de Sierpiński, direm que:

$$SP := \bigcap_{n=1}^{\infty} SP_n$$

Si calculem les seves dimensions:

$$D_T = 3$$

Mentre que si observem la figura al límit, veiem 4 còpies d'ella mateixa amb un factor d'ampliació 2, aleshores, tenim que:

$$D_F = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2$$

I es té que:

$$D_T = 3 > 2 = D_F$$

En aquest cas, la seva dimensió fractal és entera. Aquest resultat té a veure amb el fet que la seva àrea, com hem vist, es manté constant en les successives iteracions. Tampoc compleix que la seva dimensió de Hausdorff sigui estrictament superior a la seva dimensió topològica.

6.4 Esponja de Menger

Karl Menger (13 de gener de 1902, Viena (Àustria) - 5 d'octubre de 1985, Chicago - Estats Units) fou un reconegut matemàtic. El seu pare, era un famós economista. Va estudiar a la Universitat de Viena on es va graduar el 1924. Va ensenyar a les universitats d'Amsterdam, Viena, Notre Dame i a l'Institut de Tecnologia d'Illinois a Chicago. La seva contribució popular més famosa és l'esponja de Menger. Arthur Cayley i Karl Menger se'ls considera com els fundadors de la geometria mètrica. Va participar de manera molt activa en el Cercle de Viena participant en discussions sobre ciència social i filosofia, sobretot entre els anys 1920 i 1930. Fou quan va demostrar un resultat important sobre la paradoxa de Sant Petersburg amb aplicacions interessants en economia. Més tard va contribuir al desenvolupament de teoria de jocs amb Oskar Morgenstern.

L'esponja de Menger

L'esponja de Menger, a vegades se l'anomena cub de Menger o cub o esponja de Menger-Sierpiński o de Sierpiński, es va descriure per primer cop l'any 1926, es construeix un cub i es divideix en 27 cubs petits, 9 per cada cara, dels quals s'elimina el cub central i els cubs centrals de cada cara, en total s'eliminen 7 cubs, es repeteix aquesta operació als 20 cubs restants i així successivament.

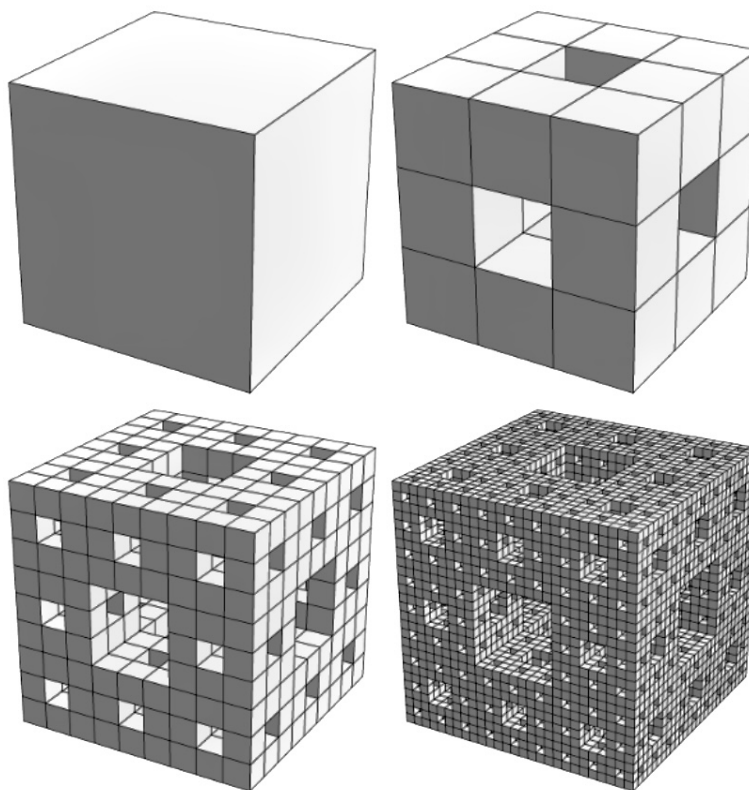


Figura 6.7. Cub o Esponja de Menger

Si M és l'esponja de Menger, tenim que:

$$M = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$$

Si calculem l'àrea de l'esponja, ens trobem amb el següent:

Iteració	Àrea exterior	Àrea interior	Àrea total
M_0	$6 \cdot 1$	0	6
M_1	$6 \cdot \frac{8}{9}$	$\frac{6}{5} \cdot \frac{20}{9}$	$6 \cdot \frac{8}{9} + \frac{6}{5} \cdot \frac{20}{9} = 8$
M_2	$6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2$	$A_{interior M_1} + \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^2$	$6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 + A_{interior M_1} + \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^2 = 13,333....$
M_3	$6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^3$	$A_{interior M_1} + A_{interior M_2} + \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^3$	$6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^3 + A_{interior M_1} + A_{interior M_2} + \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^3 = 25,975....$
.....			
M_n	$6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n$	$A_{interior M_1} + \dots + A_{interior M_{n-1}} + \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^n = \sum_{n=1}^n \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^n$	$6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n + \sum_{n=1}^n \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^n$

L'àrea total en el pas n , es defineix per la fórmula:

$$A_{M_n} = 6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n + \sum_{i=1}^n \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^i$$

Quan el nombre d'iteracions tendeix a infinit, tenim que l'àrea total de l'esponja de Menger és infinita:

$$A_M = \lim_{n \rightarrow \infty} 6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

Si calculem ara el volum, tenim que:

Iteració	Nombre de cubs restants	Longitud de l'aresta del cub	Volum de cada cub	Volum total
M_0	1	1	1	1
M_1	20^1	$\left(\frac{1}{3}\right)^1$	$\left(\frac{1}{3^1}\right)^3$	$20^1 \cdot \left(\frac{1}{3^1}\right)^3$
M_2	20^2	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\left(\frac{1}{3^2}\right)^3$	$20^2 \cdot \left(\frac{1}{3^2}\right)^3$
M_3	20^3	$\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$\left(\frac{1}{3^3}\right)^3$	$20^3 \cdot \left(\frac{1}{3^3}\right)^3$
.....				
M_n	20^n	$\left(\frac{1}{3}\right)^n$	$\left(\frac{1}{3^n}\right)^3$	$20^n \cdot \left(\frac{1}{3^n}\right)^3 = \left(\frac{20}{27}\right)^n$

Com podem veure, el volum de l'esponja de Menger s'expressa per la fórmula:

$$V_{M_n} = \left(\frac{20}{27}\right)^n$$

I quan el nombre d'iteracions tendeix a infinit, tenim que el volum tendeix a zero.

$$V_M = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{20}{27}\right)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Pel que fa al càlcul de les seves dimensions, tenim que:

$$D_T = 3$$

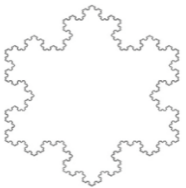
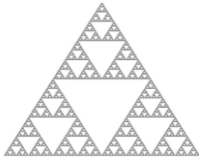
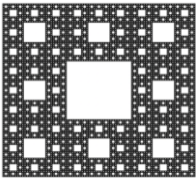
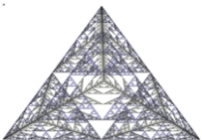
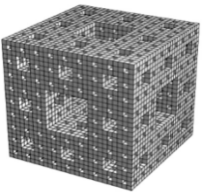
Mentre que si observem la figura al límit, s'observen 20 còpies d'ella mateixa amb un factor d'ampliació 3, per tant:

$$D_F = D_H = \frac{\ln 20}{\ln 3} = 2,72683302....$$

$$D_T > D_H$$

6.5 Esquema resum

Podem resumir-ho amb el següent esquema:

Fractal	Representació	Longitud Total	Àrea Total	Volum Total	Dimensió Topològica	Dimensió Fractal
Conjunt de Cantor		0	—	—	1	0,63093....
Corba de Koch		∞	—	—	1	1,26186....
Floc de Koch		∞	0,6928...	—	2	1,26186....
Triangle de Sierpiński		∞	0	—	2	1,58496250...
Catifa de Sierpiński		∞	0	—	2	1,89278926....
Piràmide de Sierpiński		∞	$\sqrt{3}$	0	3	2
Esponnja de Menger		∞	∞	0	3	2,72683302....

7 Aplicació didàctica a l'aula

Les pràctiques s'han realitzat a l'IES Intermunicipal del Penedès, a Sant Sadurní d'Anoia, es tracta d'un centre públic que acull alumnes de diverses poblacions de la comarca. Ens trobem que a Sant Sadurní hi ha altres centres que ofereixen la mateixa etapa educativa, alguns dels quals, absorbeixen una part important de l'alumnat provinent de famílies amb més recursos, tant econòmics, com de formació, com de temps, el que implica que l'Intermunicipal sigui un centre de complexitat mitjana-alta.

A causa de la situació actual de pandèmia, aquest any, el centre té agrupats els alumnes en funció de les matèries optatives escollides, fet que es veu reflectit en la configuració dels grups.

7.1 Aplicació didàctica pels alumnes de 4 d'ESO

L'activitat s'ha dut a terme en una única sessió classe, en la qual se'ls hi ha explicat el triangle de Sierpiński, com a fractal fàcil de comprendre, i posteriorment se'ls hi entrega una fitxa en la qual se'ls demana que calculin, en les successives iteracions, el nombre de triangles resultants, la seva àrea i el seu perímetre o longitud total.

Inicialment, el material es va preparar més extens (annex A.1, A.2, A.3, A.4 i A.5), però donat que només disposàvem d'una única sessió, s'ha simplificat l'activitat, la qual s'ha acompanyat amb el dibuix del triangle de Sierpiński fins a la iteració 4 (annex A.6), que és la darrera iteració que se'ls hi demana calcular, tot i que el document, permet efectuar fins a la iteració 10. (annex A.7 i annex A.8)

L'activitat es realitza a quatre grups en total, dos dels quals, són de caràcter científic i tecnològic, concretament els grups E i F, i dos humanístics i social, els grups A i D. També s'ha de fer esment, que malgrat que en tots els grups hi ha alumnes amb diferents graus de motivació, en un d'ells, el grup D, hi ha 11 alumnes N.E.S.E. (Necessitats Específiques de Suport Educatiu), d'un total de 21. Mentre que el grup E, està format per alumnes amb bons resultats acadèmics en tots els àmbits.

Esmentar també, que segons marca el DECRET 187/2015, de 25 d'agost, d'ordenació dels ensenyaments de l'Educació Secundària Obligatòria, els alumnes a 2n d'ESO, han de tenir assolits els conceptes de: *les figures i cossos geomètrics; proporcionalitat i semblança en figures de dues dimensions; longituds, perímetres i àrees de figures planes* i a 3r els de: *successions numèriques; progressions aritmètiques, i progressions geomètriques*, que permeten entendre com es construeix un fractal i com es poden dur a terme de manera senzilla els càlculs que se'ls demana.

Ara bé, recordar que tot i que a 2n d'ESO, haurien d'haver assolit aquests continguts, aquell any van finalitzar el curs amb un confinament total provocat per la COVID -19. Posteriorment, pel que fa al curs 2020-2021, hi ha hagut confinament de grups, en cas de positiu a l'aula. I aquest curs, s'han continuat aplicant alguna de les mesures i com es pot observar, en el moment de dur a terme les activitats, no tots els alumnes l'han pogut realitzar.

Els objectius de l'activitat eren que en finalitzar la sessió, l'alumnat havia de ser capaç de:

1. Entendre i reconèixer el concepte de fractal lineal.
2. Representar una seqüència de les diverses iteracions generades per operacions ma-

temàtiques conegudes.

3. Calcular el perímetre i l'àrea de figures geomètriques de manera recurrent, efectuant calculs simples.
4. Descobrir que les figures poden tenir mesura zero i infinit.

7.1.1 Anàlisi de l'activitat de 4t d'ESO

Grups A i D: En el grup A, el dia de l'activitat, hi ha 16 alumnes a l'aula, mentre que en el grup D 17.

La majoria dels alumnes saben identificar iniciador, generador i regla generadora, dibuixant la sèrie dels triangles de Sierpiński fins a la iteració 4 sense cap problema.

Pel que fa a les qüestions que calia respondre a la taula:

Longitud del costat: s'adonen que la longitud del costat en la iteració següent és la meitat de l'anterior, però no arriben a identificar-ho com una progressió geomètrica.

Nombre de triangles: En els grups on hi ha una major proporció d'alumnes amb necessitats educatives, omplen la columna comptant els triangles obtinguts en el dibuix, tot i que alguns s'adonen que es pot multiplicar per 3.

Àrea de cada triangle: Pel que fa als grups A i D, la major part dels alumnes no arriben a desenvolupar aquest apartat, el fet de fer poc autònoms, els fa dedicar molt de temps als passos anteriors i els hi queda poc per a finalitzar l'activitat, únicament un alumne respon expressant la solució en forma de fracció, la resta, si ho fa, és amb decimals.

Àrea total: Els alumnes que no completen la columna de les àrees.

Perímetre de cada triangle i Perímetre total: fan un intent de respondre les caselles relacionades amb els perímetres, sense arribar donar respostes correctes, tres d'ells responen correctament les dues primeres files, però són alumnes que no han respost a les anteriors qüestions.

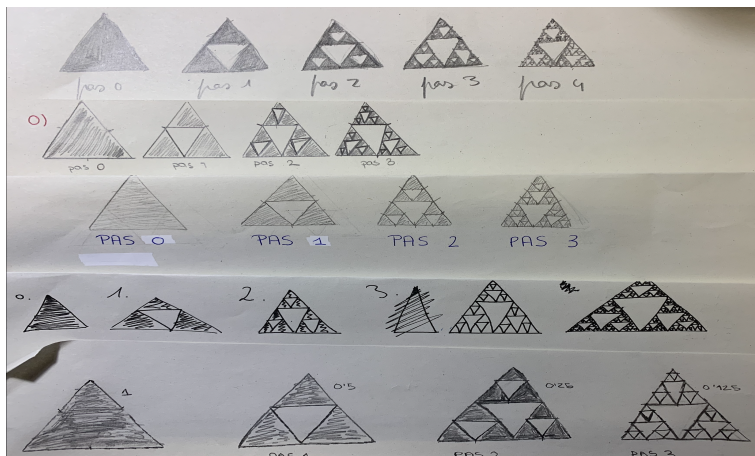


Figura 7.1. Dibuix que utilitzen per comptar i respondre

Iteració n°	longitud del costat	nombre de triangles	àrea de cada triangle	àrea total	perímetre de cada triangle	perímetre total
0	1	1	$\sqrt{3}/4$			
1	0.5	3	$\sqrt{3}/16$			
2	0.25	9	$\sqrt{3}/64$			
3	0.125	27	$\sqrt{3}/1256$			
4	0.0625	81	$\sqrt{3}/1024$			
5	0.03125	243	$\sqrt{3}/4096$			
6	0.015625	729	$\sqrt{3}/16384$			
7	0.0078125	2187	$\sqrt{3}/65536$			
8	0.00390625	6561	$\sqrt{3}/262144$			
9	0.001953125	19683	$\sqrt{3}/1048576$			
10	0.0009765625	59049	$\sqrt{3}/4194304$			
11	0.00048828125	177147	$\sqrt{3}/16777216$			

Per calcular l'àrea d'un triangle equilàter cal multiplicar la longitud del seu costat per $\frac{\sqrt{3}}{2}$ per tal d'obtenir la seva altura i després aplicar la de l'àrea d'un triangle $A = \frac{b \cdot h}{2}$. Que en el cas d'un triangle equilàter queda $A = \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$.

En el nostre cas, donat que el triangle inicial té costat 1, la seva altura és $\frac{\sqrt{3}}{2}$ i l'àrea és $A = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Figura 7.2. Full de respostes d'un alumne

Grup F: El dia de l'activitat, hi ha 15 alumnes a l'aula.

Els alumnes identifiquen sense problema iniciador, generador i regla generadora, dibuixant la sèrie dels triangles de Sierpiński fins a la iteració 4 sense cap problema, i algun d'ells fins a iteracions superiors a les demanades. Alguns alumnes del grup es mostren apàtics, un d'ells només dibuixa els triangles i tres no responen cap concepte.

Longitud del costat i Nombre de triangles: La majoria utilitza el concepte de progressió geomètrica, sense explicitar-ho, tot i que es veu que el tenen interioritzat.

Àrea de cada triangle i Àrea total: Pocs són els que fan el càlcul, tot i que, els qui el fan, donen el resultat en decimals.

Perímetre de cada triangle i Perímetre total: alguns responen aquestes caselles essent en general, les respostes incorrectes i incongruent.

Iteració n°	longitud del costat	nombre de triangles	àrea de cada triangle	àrea total	perímetre de cada triangle	perímetre total
0	1	1	1		2	3
1	0.5	3	0.125		1.5	4.5
2	0.25	9			0.75	6.75
3	0.125	27			0.375	0.046875
	0.0625	81			0.1875	0.1171875

Iteració n°	longitud del costat	nombre de triangles	àrea de cada triangle	àrea total	perímetre de cada triangle	perímetre total
0		1			3	
1		3			1.5	
2		9			0.75	
3		27			0.375	

Iteració n°	longitud del costat	nombre de triangles	àrea de cada triangle	àrea total	perímetre de cada triangle	perímetre total
0	6	1	9√3	9√3	18	18
1	3	3	√3	3√3	9	27
2	1.5	9			4.5	40.5
3	0.75	27			2.25	60.75
4						

Figura 7.3. Respostes d'alguns alumnes

Grups E: El dia de l'activitat, hi ha 20 alumnes a l'aula.

Els alumnes identifiquen sense dificultat iniciador, generador i regla generadora. Cap d'ells els dibuixa.

En lloc de contemplar la unitat per efectuar els càlculs, es fa servir el valor 5,4 cm per donar més complexitat a l'exercici.

Tots els alumnes donen les seves respostes en decimals. La gran majoria indica fins i tot

les unitats de mesura, és a dir, dona el resultat acompanyat amb cm i cm^2 . De la totalitat d'alumnes, 6 d'ells completen tota la fitxa amb respostes correctes, 9 omplen les respostes de les 10 iteracions relatives a l'àrea total i inicien els càlculs dels perímetres i 5 fan tots els càlculs de les 5 primeres iteracions, en general, totes les respostes són correctes. Han entès perfectament els conceptes.

Iteració n°	longitud del costat	nombre de triangles	àrea de cada (*) triangle	àrea total	perímetre de cada triangle	perímetre total
0	5'4 cm	1	12'63 cm ²	12'63 cm ²	16'2 cm	16'2 cm
1	2'7 cm	3	3'16 cm ²	9'48 cm ²	8'1 cm	24'3 cm
2	1'35 cm	9	0'79 cm ²	7'11 cm ²	4'05 cm	36'45 cm
3	0'68 cm	27	0'2 cm ²	5'4 cm ²	2'04 cm	55'08 cm
	0'34 cm	81	0'05 cm ²	4'05 cm ²	1'02 cm	82'62 cm
4	0'17 cm	243	0'01 cm ²	2'43 cm ²	0'51 cm	123'93 cm
5	0'085 cm	729	0'003 cm ²	2'187 cm ²	0'255 cm	185'895 cm
6	0'0425 cm	2187	0'0008 cm ²	1'7496 cm ²	0'1275 cm	278'8425 cm
7	0'02125 cm	6561	0'0002 cm ²	1'3122 cm ²	0'06375 cm	418'264 cm
8	0'011 cm	19683	0'00005 cm ²	0'98415 cm ²	0'033 cm	649'539 cm
9	0'0055 cm	59049	0'00001 cm ²	0'59049 cm ²	0'0165 cm	974'3035 cm
10						

(*) Per calcular l'àrea d'un triangle equilàter cal multiplicar la longitud del seu costat per $\frac{\sqrt{3}}{2}$ per tal d'obtenir la seva altura i després aplicar la fórmula de l'àrea d'un triangle $A = \frac{b \cdot h}{2}$. Que en el cas d'un triangle equilàter queda $A = \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$.

En el nostre cas, donat que el triangle inicial té costat 1, la seva alçada és $\frac{\sqrt{3}}{2}$ i l'àrea és $A = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Potser és més interessant veure com es redueix l'àrea d'un triangle en cada pas.

Quina part del primer triangle representa cadascun dels triangles del següent pas?

I en els passos successius?

Figura 7.4. Fitxa correctament complimentada que inclou unitats de mesura

7.1.2 Conclusions de l'activitat de 4t d'ESO

En el moment d'elaborar el material, es volia comprovar si era possible contemplar l'ensenyament del fractals a l'ESO, tenint en compte la suposada base de continguts treballats en cursos anteriors.

El professorat destaca que és una activitat molt interessant, però difícil de desenvolupar amb una sola sessió.

Aquesta fitxa es podria introduir de forma competencial en el moment d'explicar les progressions a 3r d'ESO, de manera que permetria tenir també una noció del concepte de fractal a l'etapa de secundària.

Una altra opció seria proposar activitats segons el nivell de cada classe, pels alumnes amb més dificultats es podria fer una activitat més manual, com construir el triangle de Sierpiński amb triangles que ells mateixos retallarien amb cartolines per a després entre tots construir les diferents iteracions.

Per finalitzar, podem dir que a l'hora de dissenyar les activitats caldria tenir present la configuració dels diferents grups i si cal, adaptar-les, donat que el resultat no ha estat el mateix en tots els grups.

7.2 Aplicació didàctica pels alumnes de 1r de Batxillerat

El dia de l'activitat, hi ha 24 alumnes a l'aula.

Vist el funcionament de l'activitat de l'ESO, per fer més entenedora la part teòrica a Batxillerat, a part de l'explicació en format pdf (annex B.1, B.2 i B.3) que finalment no s'utilitza, es va elaborar una presentació en format vídeo de 4 minuts, que es va reproduir a l'aula, amb l'objectiu de fer més entenedor el contingut la matèria amb què es va fer l'activitat pràctica posterior. (annex B.4 i B.5)

Mentre es va fer la presentació, es va complementar amb explicacions orals, aturant la reproducció, per tal d'aclarir dubtes abans que sorgissin.

L'activitat s'ha dut a terme de manera anàloga a la d'ESO, en una única sessió classe, en la qual se'ls hi ha explicat el concepte de dimensió topològica. Alhora, se'ls hi va explicar el concepte de la dimensió Hausdorff, fent servir per al seu càlcul l'aproximació més acceptada, és a dir, la dimensió de semblança. Se'ls mostra que en les figures regulars, la dimensió Hausdorff, coincideix amb la dimensió intuïtiva, que anomenem topològica.

Un cop vistos els dos conceptes, se'ls mostra un fractal, en concret, la corba de Koch, i es fa el càlcul de la seva dimensió fractal, concretament la de Hausdorff, utilitzant la fórmula de la dimensió de semblança explicada i es veu com el resultat obtingut, no és un valor enter.

El grup en el que es realitza l'activitat, és un grup tecnològic, amb bons coneixement en matemàtiques, tot i que mostren sorpresa en veure que existeix una dimensió no entera.

La fitxa que se'ls hi dona, manté el mateix format, una sola cara amb quadrícules, on a la part superior hi ha figures fractals, en concret el triangle de Sierpiński, l'esponja de Menger, la catifa de Sierpiński, el conjunt de Cantor i la pols de Cantor bidimensional, i se'ls hi demana que indiquin quin és el seu iniciador, generador i la regla generadora, aquests conceptes s'han explicat a la pissarra en el moment que apareix la corba de Koch a la presentació.

Posteriorment, se'ls demana que indiquin quina és la dimensió topològica d'aquestes figures i que calculin la seva dimensió fractal mitjançant l'explicació que se'ls hi ha donat.

7.2.1 Anàlisi de l'activitat de 1r de Batxillerat

Tenen clars els conceptes d'iniciador, generador, i regla generadora. Tot i que alguns confonen iniciador per generador.

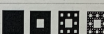
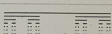
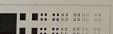
					
	Triangle de Sierpiński	Esponja de Menger	Catifa de Sierpiński	Conjunt de Cantor	Pols de Cantor bidimensional
Dibuixa el seu Generador					
Dibuixa el seu Iniciador					
Explica la seva regla generadora	La seva copia creix x3 i l'escala x2	La seva copia creix 20x i l'escala x3	Seua copia creix x3 i l'escala x3	La seva copia creix x3 i l'escala x3	La seva copia és 2 i l'escala és 4
Quina és la seva dimensió topològica	2	3	2	1	2
Calcula la seva dimensió fractal	$D = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.58$	$D = \frac{\log 20}{\log 3} = 2.73$	$D = \frac{\log 8}{\log 3} = 1.89$	$D = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.63$	$D = \frac{\log 4}{\log 5} = 1.26$

Figura 7.5. Fitxa correcta realitzada per un alumne

	▲▲▲▲▲▲▲▲	■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■	■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■	■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■	■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■
	Triangle de Sierpinski	Espanja de Menger	Catifa de Sierpinski	Conjunt de Cantor	Pols de Cantor bidimensional
Dibuixa el seu Generador					
Dibuixa el seu Iniciador					
Explica la seva regla generadora	En els triangles blancs es forma un triangle amb els A	Formes un quadrat amb el buit inicial, deixant el buit buit, i repetint	Formes un quadrat amb el buit inicial, deixant el buit buit, i repetint	Es del buit s'en va fora	Al quadrat se l'van 6 quadrats es forma de creu
Quina és la seva dimensió topològica	$1 + \frac{\log 3}{\log 2} = 2D$	3D	3D	1D	2D
Calcula la seva dimensió fractal	$D = \frac{\log 3}{\log 2}$ $D = 1,585D$	$D = \frac{\log 20}{\log 3}$ $D = 2,73D$	$D = \frac{\log 8}{\log 3}$ $D = 1,89D$	$D = \frac{\log 2}{\log 3}$ $D = 0,631D$	$D = \frac{\log 4}{\log 4}$ $D = 1D$

* amb els punts mitjos del triangle i s'elimina restats del

• Amb el cub inicial formes un cub de $3 \times 3 \times 3$, deixant el mig i centre buit, utilitzant 20 peces, amb el cub que has aconseguit tornes a fer el mateix, amb el nou d'aquest, el mateix...

Figura 7.6. Fitxa finalitzada amb errors

Presenten dubtes a l'hora d'indicar quina és la dimensió topològica, principalment amb el conjunt de Cantor, mentre que en general cap problema per a la resta de fractals.

Conjunt de Cantor	Conjunt de Cantor	Conjunt de Cantor	Conjunt de Cantor
$D = \frac{\log 2}{\log 3}$	$N = 2$ $r = 3$ $D = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,6309$	$D = \frac{\log(2)}{\log(2)}$	$D = \frac{\log(2)}{\log(2)}$

S'elimina el segment del centre

Neteja dimensió

Figura 7.7. Dificultats amb el Conjunt de Cantor

Apliquen correctament la definició de dimensió fractal expressant el resultat com fracció de logaritmes i posteriorment en nombre decimal.

Cap d'ells s'adona que cap dels fractals proposats, no compleix una de les propietats exposada a la presentació, on es diu que la dimensió fractal és estrictament superior a la dimensió topològica, únicament efectuen els càlculs sense anar més enllà dels que se'ls hi ha explicat.

7.2.2 Conclusions de l'activitat de 1r de Batxillerat

El professorat destaca que és una activitat interessant, per ha estat relativament senzilla pels alumnes de batxillerat.

Per concloure, direm que potser es veuria adient per un nivell de 4t d'ESO perquè ja han treballat els logaritmes, així com temes relacionats amb la geometria analítica del pla, i els permetria alhora tenir una noció del concepte de fractal.

I en el cas que s'hagués de fer a 1r de batxillerat, es podria ampliar treballant altres fractals com ara els de Mandelbrot o de Júlia.

8 Conclusions

Estic orgullosa, així és com em sento ara mateix mentre escrit aquesta part final del meu treball de Final de Grau. Ha estat molt llarg el camí per arribar fins aquí i he de dir que en algun moment vaig creure que mai arribaria el moment de finalitzar el que inicialment era la meva llicenciatura de matemàtiques. Les circumstàncies ens porten per camins que no pensàvem recórrer, però he de dir que mai hagués pensat que aquest trajecte el podria finalitzar.

Estic orgullosa d'haver fet una memòria com aquesta, quan vaig saber que calia fer-ne una, vaig pensar en els TREC o TDR que havia vist fer als meus fills i vaig creure que era la meua oportunitat per demostrar-los que no era tan complicat com ells deien - Quin error! En un primer moment, vaig plantejar fer un estudi sobre el nivell de coneixement en matemàtiques amb el que arriben els alumnes a la Universitat depenent del seu sistema educatiu d'origen, és a dir, si han fet un Batxillerat Espanyol, o d'un Baccalauréat francès, etc., malauradament, em van informar que calia que tingués un contingut matemàtic més potent. Feia anys que tenia els meus apunts a la prestatgeria, quina assignatura triava?

Estic orgullosa del que vaig escollir, els fractals, aquella paraulota que havia sentit algun cop i que no sabia exactament que era. Gràcies a ells m'he tornat a endinsar en el món de les matemàtiques, he tornat a recordar tot el que havia après, he estat capaç de rebuscar en els llibres i apunts de joventut per iniciar la part teòrica i he gaudit amb llibres i publicacions més actuals per aprofundir en el tema. Ara sé que són, en conec les propietats, les tipologies, les aplicacions, i no únicament dels que explico a la memòria, també els més complexos.

Estic orgullosa d'haver trobat un lligam entre la part teòrica i l'activitat que he fet amb els alumnes, no ha estat fàcil, han estat hores i hores donant voltes i llegint aquí i allà per trobar-ho. El resultat he estat sorprenent, els he deixat amb la boca oberta, no s'ho acabaven de creure: - longitud infinita!! - àrea zero!!! - dimensió no entera!!!. Han participat responent a les fitxes que els hi vaig preparar. En tinc una pila, com si fossin exàmens per corregir, per uns dies he assaborit el que de petita creia que seria la meua professió, la docència.

El següent pas serà donar-li continuïtat amb el treball de màster del qual espero també sentir-me orgullosa, i poder en un futur, explicar dins de l'aula a una generació darrera una altra, el fascinant món de les MATEMÀTIQUES.

Referències

- [1] Barrallo Calonge, J. Geometría fractal: Algorítmica y representación. *Anaya*, 84-7614-452-0, 1993.
- [2] Mandelbrot, Benoît. La geometría fractal de la naturaleza. *Tusquets editores*, Barcelona, 1997.
- [3] Mandelbrot, Benoît. Los objetos fractales. Forma, azar y dimensió *Tusquets editores*, Barcelona, 1996.
- [4] Barnsley, M. Fractals Everuwhere. *Academic Press, Inc .*, London, 1988.
- [5] K. J. Falconer. Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications *John Wiley Sons*, 1990.
- [6] Wikipedia. Biografia de Cantor. https://es.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor [Consultada el 24 de gener de 2022]
- [7] Wikipedia. Biografia de Von Koch. https://es.wikipedia.org/wiki/Helge_von_Koch [Consultada el 24 de gener de 2022]
- [8] Wikipedia. Biografia de Sierpiński. https://es.wikipedia.org/wiki/Waclaw_Sierpiński [Consultada el 24 de gener de 2022]
- [9] Wikipedia. Biografia de Menger. https://es.wikipedia.org/wiki/Karl_Menger [Consultada el 24 de gener de 2022]