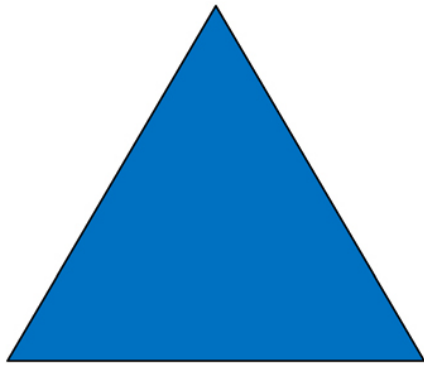


A.1. Aplicació didàctica pels alumnes d'ESO

A.1.1. Fitxa del professor

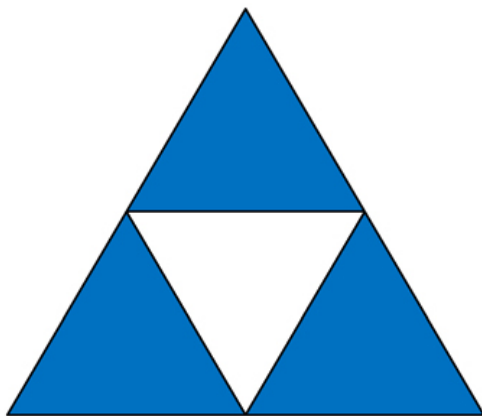
Triangle de Sierpiński

Iniciador: triangle equilàter



(Iteració 0)

Generador: eliminar el triangle equilàter interior

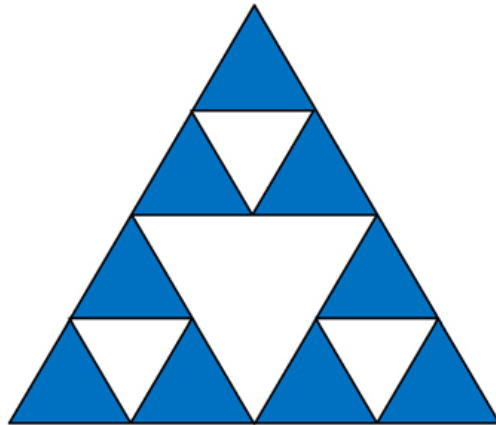


(Iteració 1)

Regla generadora: prenem els punts mitjos de cada costat en el triangle inicial i construïm un altre triangle equilàter.

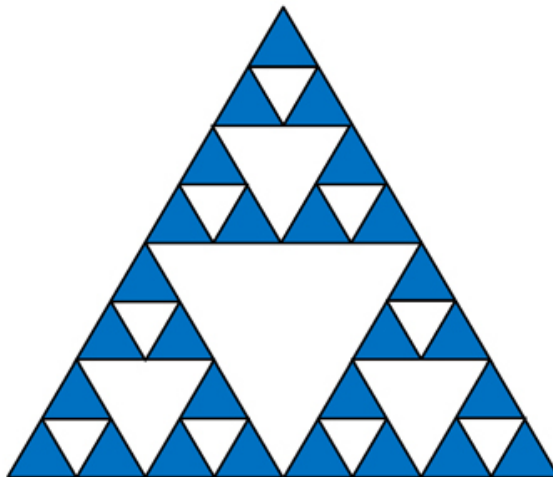
[Exercici 1 i 2: Construiu la iteració 2 i 3.](#)

Solució de l'exercici 1:



(Iteració 2)

Solució de l'exercici 2:



(Iteració 3)

Suposem que el triangle equilàter inicial, té de costat 1.

[Exercici 3:](#) Calculeu l'àrea del triangle de Sierpiński de les 2 primeres iteracions o passos.

[Exercici 4:](#) Quin valor tindrà quan tendirà a infinit?

[Exercici 5:](#) Calcular el perímetre total en les iteracions 1 i 2.

[Exercici 6:](#) Quin valor tindrà quan tendirà a infinit?

Solució de l'exercici 3:

S'ha desenvolupat la solució de les 3 primeres iteracions.

Com sabem de la geometria euclidiana, l'àrea del triangle és:

$$A_T = \frac{b \cdot h}{2}$$

La base del triangle inicial és 1, és a dir, $b_{S_0} = 1$, l'altura del triangle equilàter de costat 1 és:

$$h_{S_0} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Per tant, l'àrea del triangle de Sierpiński en la iteració 0 és:

$$A_{S_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 0,4330127....$$

En la **iteració 1**, l'àrea total del triangle, és la suma de l'àrea dels 3 subtriangles, calculem primer l'àrea d'un dels subtriangles i multiplicarem el resultat per 3 ($3 = 3^1$).

Calculem primer la base i l'altura:

$$b_{S_1} = \frac{1}{2^1} \quad \text{i} \quad h_{S_1} = \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2^2} = \frac{\sqrt{3}}{2^{1+1}}$$

Així, l'àrea del subtriangle és:

$$A_{subT_{S_1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2^{1+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2^4} = 0,1082531...$$

Com tenim tres subtriangles, l'àrea total en la iteració 1 és:

$$A_{S_1} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{16} = 3^1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2^{2 \cdot 1 + 2}} = 3 \cdot 0,1082531... = 0,3247595....$$

En la **iteració 2**, l'àrea totals del triangle, serà la suma de l'àrea dels 9 subtriangles, calculem primer un dels subtriangles i multiplicarem el resultat per 9 ($9 = 3^2$):

Calculem la base i l'altura:

$$b_{S_2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} \quad \text{i} \quad h_{S_2} = \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2^3} = \frac{\sqrt{3}}{2^{2+1}}$$

Així, l'àrea d'un dels subtriangle és:

$$A_{subT_{S_2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2^{2+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2^6} = 0,0270632....$$

Com tenim nou subtriangles, l'àrea total en la iteració 2 és:

$$A_{S_2} = 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{64} = 3^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2^{2 \cdot 2 + 2}} = 9 \cdot 0,0270632... = 0,2435696....$$

En la **iteració 3**, l'àrea totals del triangle, serà la suma de l'àrea dels 27 subtriangles, calcularem primer un dels subtriangles i multiplicarem el resultat per 27 ($27 = 3^3$).

Calculem la base i l'altura:

$$b_{S_3} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} \quad \text{i} \quad h_{S_3} = \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2^4} = \frac{\sqrt{3}}{2^{3+1}}$$

Així, l'àrea d'un dels subtriangle és:

$$A_{subT_{S_3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{1}{16} \cdot \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2^{3+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2^8} = 0,0067658....$$

Com tenim vint-i-set subtriangles, l'àrea total en la iteració 3 és:

$$A_{S_3} = 27 \cdot \frac{\sqrt{3}}{256} = 3^3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2^{2 \cdot 3 + 2}} = 27 \cdot 0,0270632... = 0,1826772.....$$

Exercici 4:

Construïrem les fórmules en funció d' n per poder calcular el seu límit quan tendim a infinit.

En la **iteració n** , l'àrea totals del triangle, serà la suma de l'àrea dels subtriangles, calcularem primer un dels subtriangles i multiplicarem el resultat per 3^n :

Calculem primer la base i l'altura:

$$b_{S_n} = \frac{1}{2^n} \quad \text{i} \quad h_{S_n} = \frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}}$$

Així, l'àrea d'un dels subtriangles és:

$$A_{subT_{S_n}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2^{2n+2}}$$

Com tenim 3^n triangles, l'àrea total en la iteració n , serà:

$$A_{S_n} = 3^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2^{2n+2}} = 3^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{(2^2)^n \cdot 2^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Si fem el límit quan n tendeix cap a l'infinit tenim que:

$$A_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{\sqrt{3}}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

I com $A_S := A_\infty$, tenim que $A_S = 0$.

Podem concloure que l'àrea del triangle de Sierpiński és zero 0.

Exercici 5:

Hi ha la solució de les 3 primeres iteracions.

La longitud o perímetre del triangle seria la suma de la longitud dels seus costats, recordem que hem considerat que la longitud del costat és 1.

$$l_{S_0} = 3 \cdot 1 = 3$$

La **longitud total o perímetre del triangle de Sierpiński en la iteració 0** és 3.

$$L_{S_0} = 1 \cdot 3 = 3$$

En la **iteració 1**, tenim 3 subtriangles, hem de calcular el perímetre d'un d'ells i multiplicar-ho per 3 ($3 = 3^1$).

La longitud de cada costat és.

$$c_{subT_{S_1}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}$$

i la longitud total d'un subtriangle és:

$$l_{subT_{S_1}} = 3 \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2^1}$$

Com tenim 3 subtriangles, **la longitud total o perímetre en la iteració 1 és:**

$$L_{S_1} = 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 9 \cdot \frac{1}{2} = 3^1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2^1} = 4,5$$

En la **iteració 2**, tenim 9 subtriangles, hem de calcular el perímetre d'un d'ells i multiplicar-ho per 9 ($9 = 3^2$).

La longitud de cada costat és.

$$c_{subT_{S_2}} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$$

i la longitud total d'un subtriangle és:

$$l_{subT_{S_2}} = 3 \cdot \frac{1}{4} = 3 \cdot \frac{1}{2^2}$$

Com tenim nou subtriangles, **la longitud total o perímetre en la iteració 2 és:**

$$L_{S_2} = 9 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} = 27 \cdot \frac{1}{4} = 3^2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2^2} = 6,75$$

En la **iteració 3**, tenim 27 subtriangles, hem de calcular el perímetre d'un d'ells i multiplicar-ho per 27 ($27 = 3^3$).

La longitud de cada costat és.

$$c_{subT_{S_3}} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$$

i la longitud total d'un subtriangle és:

$$l_{subT_{S_3}} = 3 \cdot \frac{1}{8} = 3 \cdot \frac{1}{2^3}$$

Com tenim vint-i-set subtriangles, **la longitud total o perímetre en la iteració 3 és:**

$$L_{S_3} = 27 \cdot 3 \cdot \frac{1}{8} = 81 \cdot \frac{1}{8} = 3^3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2^3} = 10,125$$

Exercici 6:

Construïrem les fórmules en funció d' n per poder calcular el seu límit quan tendim a infinit.

En la **iteració n** , la longitud total o perímetre del triangle, serà la suma de l'àrea del tots els subtriangles, calcularem primer un dels subtriangles i multiplicarem el resultat per 3^n :

La longitud de cada costat és.

$$c_{subT_{S_n}} = \frac{1}{2^n}$$

i la longitud total d'un subtriangle és:

$$l_{subT_{S_n}} = 3 \cdot \frac{1}{2^n}$$

Com tenim 3^n subtriangles, **la longitud total o perímetre en la iteració n** és:

$$L_{S_n} = 3^n \cdot 3 \cdot \frac{1}{2^n} = 3 \cdot 3^n \cdot \frac{1}{2^n} = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Si fem el límit quan n tendeix cap a l'infinit tenim que:

$$L_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n = 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty$$

Com $L_S := L_\infty$, tenim que $L_S = \infty$.

Podem dir que la longitud total del triangle de Sierpiński és infinta.