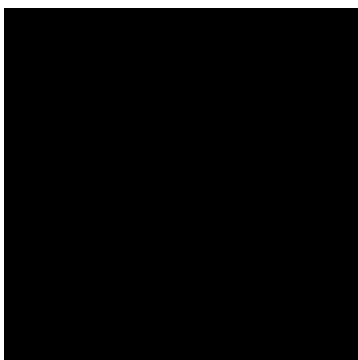


A.1. Aplicació didàctica pels alumnes d'ESO.

A.1.1. Fitxa del professor

Catifa de Sierpiński

Iniciador: quadrat



(Iteració 0)

Generador: eliminar el quadrat interior



(Iteració 1)

Regla generadora: dividim cada costat del quadrat en tres parts de la mateixa longitud i de manera que dividirem el quadrat en 9 quadrats idèntics, tots ells a l'interior del quadrat inicial.

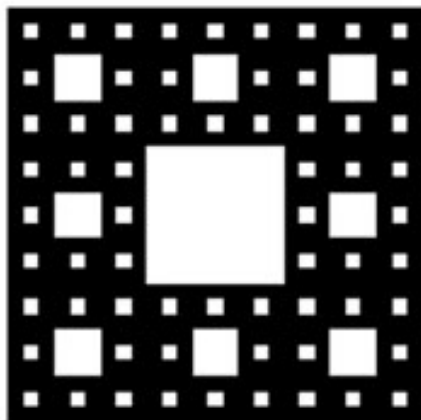
[Exercici 1 i 2: Construïu la iteració 2 i 3.](#)

Solució de l'exercici 1:



(Iteració 2)

Solució de l'exercici 2:



(Iteració 3)

Suposem que el quadrat inicial, té de costat 1.

[Exercici 3:](#) Calculeu l'àrea de la catifa de Sierpiński dels 3 primers passos.

[Exercici 4:](#) Quin valor tindrà quan tendirà a infinit?

[Exercici 5:](#) Calcular la longitud dels costats en el pas 1,2 i 3.

[Exercici 6:](#) Quin valor tindrà quan tendirà a infinit?

Solució de l'exercici 3:

Com sabem de la geometria euclidiana, l'àrea del quadrat és:

$$A_Q = c^2$$

Hem considerat que el costat del quadrat inicial és 1, és a dir, $c_0 = 1$.

Per tant, l'àrea de la catifa de Sierpiński en la iteració 0 és:

$$A_{SC_0} = 1^2 = 1$$

En la **iteració 1**, l'àrea total de la catifa, és la suma de l'àrea dels 8 subquadrats, calculem primer l'àrea d'un dels quadrats i multiplicarem el resultat per 8 ($8 = 8^1$).

Calculem primer el costat:

$$c_{SC_1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3^1} = \left(\frac{1}{3}\right)^1$$

Així, l'àrea del subquadrat és:

$$A_{subQ_{SC_1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} = 0,1111111...$$

Com tenim vuit subquadrats, l'àrea total en la iteració 1 és:

$$A_{SC_1} = 8 \cdot \frac{1}{9} = 8^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 8 \cdot 0,1111111... = 0,8888888.....$$

En la **iteració 2**, l'àrea totals de la catifa, serà la suma de l'àrea dels 64 subquadrats, calculem primer un dels subquadrats i multiplicarem el resultat per 64 ($64 = 8^2$):

Calculem primer el costat:

$$c_{SC_2} = \frac{\frac{1}{3}}{3} = \frac{1}{3^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

Així, l'àrea del subquadrat és:

$$A_{subQ_2} = \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{1}{81} = 0,0123456...$$

Com tenim seixanta-quatre subquadrats, l'àrea total en la iteració 2 és:

$$A_2 = 64 \cdot \frac{1}{81} = 8^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 = 64 \cdot 0,0123456... = 0,7901234.....$$

En la **iteració 3**, l'àrea totals de la catifa, serà la suma de l'àrea dels 512 subquadrats, calculem primer un dels subquadrats i multiplicarem el resultat per 512 ($512 = 8^3$):

Calculem primer el costat:

$$c_{SC_3} = \frac{\frac{1}{9}}{3} = \frac{1}{3^3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

Així, l'àrea del subquadrat és:

$$A_{subQ_3} = \left(\frac{1}{27}\right)^2 = \frac{1}{729} = 0,0013717...$$

Com tenim cinc-cents dotze subquadrats, l'àrea total en la iteració 3 és:

$$A_{SC_3} = 512 \cdot \frac{1}{729} = 8^3 \cdot \left(\frac{1}{29}\right)^2 = 512 \cdot 0,0013717... = 0,7023319.....$$

Exercici 4:

Construïrem les fórmules en funció d' n per poder calcular el seu límit quan tendim a infinit.

En la **iteració n** , l'àrea total de la catifa, serà la suma de les àrees dels subquadrats, calcularem primer un dels subquadrats i multiplicarem el resultat per 8^n :

Calculem primer el costat:

$$c_{SC_n} = \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Així, l'àrea del subquadrat és:

$$A_{subQ_n} = \left(\frac{1}{3^n}\right)^2 = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)^2$$

Com tenim 8^n quadrats, l'àrea total en la iteració n , serà:

$$A_{SC_n} = 8^n \cdot \left(\frac{1}{3^n}\right)^2 = 8^n \cdot \frac{1}{(3^2)^n} = \left(\frac{8}{3^2}\right)^n = \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

Si fem el límit quan n tendeix cap a l'infinit tenim que:

$$A_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = 0$$

I com $A_{SC} := A_\infty$, tenim que $A_{SC} = 0$.

Podem concloure que l'àrea de la catifa de Sierpiński, és zero 0.

Exercici 5:

La longitud o perímetre de la catifa seria la suma de la longitud dels seus costats, recordem que hem considerat que la longitud del costat és 1.

$$c_{SC_0} = 1$$

La **longitud total o perímetre del triangle de Sierpiński en la iteració 0** és 3.

$$l_{SC_0} = 1 \cdot 4 = 4$$

En la **iteració 1**, tenim el mateix perímetre que en la iteració anterior, més el perímetre dels subquadrats que eliminem, que en aquest cas, només és 1 ($1 = 8^0$).

La longitud del costat del subquadrat que eliminem és.

$$c_{subSC_1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3^1}$$

i la longitud total d'un subquadrat és:

$$l_{subSC_1} = 4 \cdot \frac{1}{3} = 4 \cdot \frac{1}{3^1}$$

Com només eliminem 1 subquadrat, **la longitud total o perímetre en la iteració 1** és:

$$l_{SC_1} = l_{SC_0} + 1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} = 4 + 1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3} = 5,3333333....$$

En la **iteració 2**, tenim el mateix perímetre que en la iteració anterior, més el perímetre dels subquadrats que eliminem, que en aquest cas, són 8 ($8 = 8^1$).

La longitud del costat del subquadrat que eliminem és:

$$c_{subSC_2} = \frac{\frac{1}{3}}{3} = \frac{1}{3^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

i la longitud total d'un subquadrat és:

$$l_{subSC_2} = 4 \cdot \frac{1}{9} = 4 \cdot \frac{1}{3^2}$$

Com tenim que són vuit, els subquadrats que eliminem, **la longitud total o perímetre en la iteració 2** és:

$$l_{SC_2} = l_{SC_1} + 8 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3^2} = 4 + 1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} + 8 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3^2} = 4 + \frac{4}{3} + \frac{32}{9} = \frac{80}{9} = 8,8888888.....$$

En la **iteració 3**, tenim el mateix perímetre que en la iteració anterior, més el perímetre dels subquadrats que eliminem, que en aquest cas, són 64 ($64 = 8^2$).

La longitud del cada costat dels subquadrats que eliminem és:

$$c_{subSC_3} = \frac{\frac{1}{9}}{3} = \frac{1}{3^3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

i la longitud total d'un subquadrat és:

$$l_{subSC_3} = 4 \cdot \frac{1}{27} = 4 \cdot \frac{1}{3^3}$$

Com tenim que són seixanta-quatre, els subquadrats que eliminem, **la longitud total o perímetre en la iteració 3** és:

$$l_{SC_3} = l_{SC_2} + 8^2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3^3} = 4 + 1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} + 8 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3^2} + 8^2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3^3} = 4 + \frac{4}{3} + \frac{32}{9} + \frac{256}{27} = \frac{496}{27} = 18,3703703.....$$

Exercici 6:

Construïrem ara, les fórmules en funció d' n per poder calcular el seu límit quan tendim a infinit.

En la **iteració n** , la longitud total o perímetre de la catifa, serà la suma la longitud anterior, mebyes el perímetre dels subquadrats que s'eliminen, que en aquest cas és 8^{n-1} :

La longitud de cada costat d'aquest subquadrat és:

$$c_{subSC_n} = \frac{\frac{1}{3^{n-1}}}{3} = \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

i la longitud total d'un subquadrat és:

$$l_{subSC_n} = 4 \cdot \frac{1}{3^n}$$

Com tenim que són 8^{n-1} , els subquadrats que eliminem, **la longitud total o perímetre en la iteració n** és:

$$l_{SC_n} = l_{SC_{n-1}} + 8^{n-1} \cdot 4 \cdot \frac{1}{3^n} = 4 + 1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} + 8 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3^2} + 8^2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3^3} + \dots + 8^{n-1} \cdot 4 \cdot \frac{1}{3^n}$$

I aquesta suma, a partir del segon terme, és el sumatori d'una progressió geomètrica de raó $\frac{8}{3}$

$$l_{SC_n} = 4 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^n$$

Si fem el límit quan n tendeix cap a l'infinit tenim que:

$$l_{SC} = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^n = 4 + \infty = \infty$$