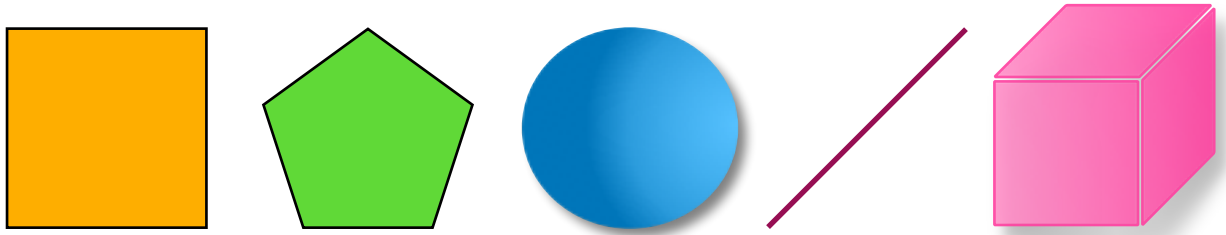


CLASSE TEÒRICA de BATXILLERAT

Tots sabem que les figures clàssiques, són figures perfectes:



Aquest tipus de geometria rep el nom d'euclidiana, donat que es considera que va ser Euclides qui la va «iniciar».

També tenim clar que vivim en un espai tridimensional, és a dir, de dimensió 3, per tant, podem dir clarament quina dimensió tenen les figures que acabem de veure. La recta té dimensió 1, el quadrat i el pentàgon tenen dimensió 2 i l'esfera té dimensió 3.

Amb aquesta definició, considerarem que un punt té dimensió 0.

En aquests casos estem parlant de la dimensió topològica que denotarem com D_T .

Avui ens centrarem en el càlcul de la dimensió de Hausdorff que és la més utilitzada pel càlcul de les dimensions dels fractals lineals o geomètrics.

Per calcular aquesta dimensió es té en compte l'escala o factor d'ampliació (r) que es farà servir per a realitzar la mesura i la quantitat (N) d'elements o peces autosimilars necessàries per cobrir aquesta figura, en funció d'aquesta escala, ara explicarem que vol dir tot això, aquests dos valors compleixen la fórmula:

$$N = r^D$$

Si aïllem de la fórmula la D , tenim que

$$D = \frac{\log_a N}{\log_a r} = \frac{\log_a (\text{nombre de peces autosimilars})}{\log_a (\text{factor d'ampliació})}$$

Aquesta expressió funciona per a qualsevol base, però nosaltres treballarem amb el logaritme neperià.

Anem a veure com s'ajusta aquesta fórmula al nostre concepte intuïtiu de dimensió.

Començarem amb un segment de longitud 1.

$$r = 1 \quad \text{—————} \quad \text{segment unitat}$$

Considerem ara el segment de longitud 2

$$r = 2 \quad \text{———|———|———}$$

Per obtenir aquesta figura des del segment original, l'hem ampliat 2 vegades ($r = 2$) i coincideix amb dues còpies al segment ($N = 2$), per tant:

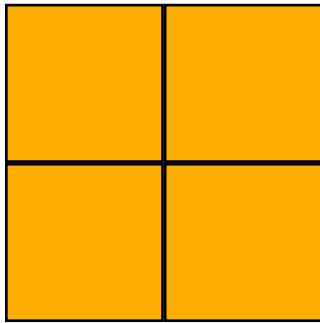
$$D_H = \frac{\ln N}{\ln r} = \frac{\ln 2}{\ln 2} = 1 \text{ i es compleix que } D_H = D_T = 1$$

Si en lloc de fer el doble, haguéssim fet el triple, arribaríem a la mateixa conclusió.

Ara fem els càlculs amb el quadrat i obtindrem que:



Sigui ara el mateix quadrat, però prenem com a $r = 2$



Observem 4 còpies del quadrat original, per cobrir el quadrat de costat 2. Tenim doncs que $N = 4$ i $r = 2$ i tenim:

$$D = \frac{\ln N}{\ln r} = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2 \text{ i, per tant, es compleix que } D_H = D_T = 2$$

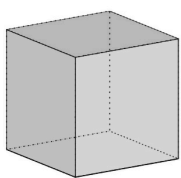
De manera anàloga, podríem multiplicar el quadrat per $r = 3$, i ens caldrien $N = 9$ quadrats per recobrir-lo. , i fins i tot en $r = 5$ i on $N = 25$, la dimensió en ambdós casos vindrà donada per:

$$D = \frac{\ln N}{\ln r} = \frac{\ln 9}{\ln 3} = \frac{\ln 25}{\ln 5} = 2$$

Amb el que tenim que:

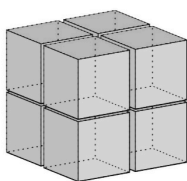
$$D_H = D_T = 2$$

Fem els càlculs ara pel cub i tenim el següent:



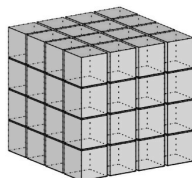
$$N = 1$$

$$r = 1$$



$$N = 8$$

$$r = 2$$



$$N = 64$$

$$r = 4$$

la dimensió en tots els casos vindrà donada per:

$$D_H = \frac{\ln N}{\ln r} = \frac{\ln 8}{\ln 2} = \frac{\ln 64}{\ln 4} = 3$$

i es compleix, per tant, que:

$$D_H = D_T = 3$$

Les figures amb què treballarem, s'anomenen fractals. Els que ara veurem, són figures geomètriques amb unes característiques pròpies, entre d'altres:

- Són autosemblants.
- Tenen dimensió no entera (sí, sí, no entera).
- Es generen de forma iterativa.

Veurem alguns dels fractals geomètrics més coneguts, els quals es construeixen a partir d'un iniciador, un generador i una regla generadora.

Corba de Koch

Deu el seu nom al matemàtic Helge Von Koch que la va construir per primer cop l'any 1904.

- Iniciador: segment inicial [0,1].



(Iteració 0)

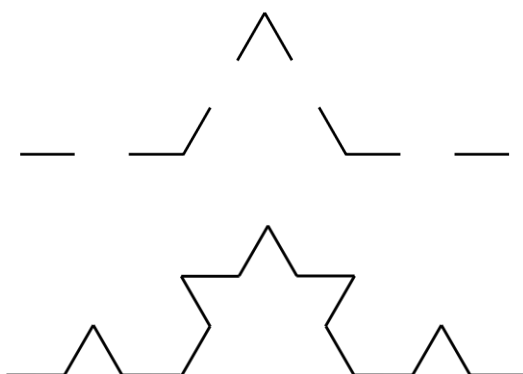
- Generador: Primera iteració del procés (còpies escalades de l'iniciador).



(Iteració 1)

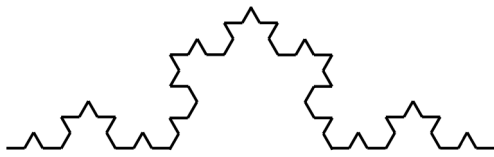
- Regla generadora: reemplaçar el segment original per quatre nous segments, cadascun de longitud 1/3 de la longitud original.

Anem a fer la segona iteració:



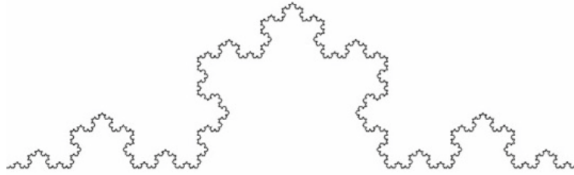
(Iteració 2)

Ara repetim el procés amb els $4^2 = 16$ segments



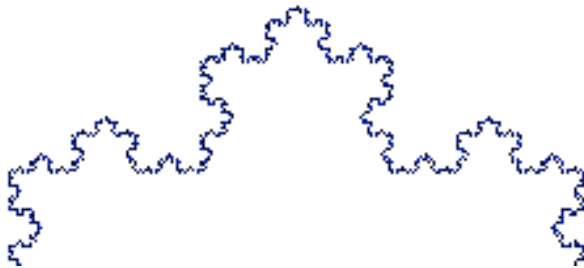
(Iteració 3)

I així successivament



(Iteració 4)

Fins a l'infinit.....

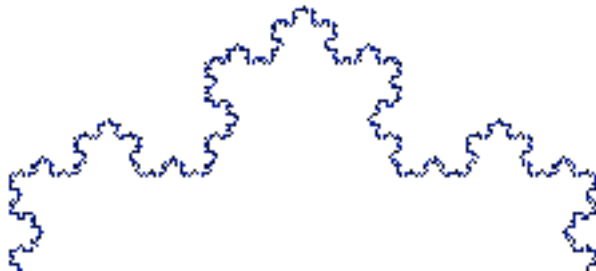


Observem que hi ha autosemblança, una de les característiques que hem indicat, també es genera de manera iterativa o recurrent, i falta veure si compleix l'altra característica dels fractals, que la seva dimensió sigui no entera.

Calcularem la dimensió topològica i la de Haudorff, tenim que:

$D_T = 1$ igual que qualsevol recta del pla.

Mentre que si observem la figura al límit:



s'observen 4 còpies d'ella mateixa amb un factor d'ampliació 3, per tant, tenim que:

$$D_H = \frac{\ln N}{\ln r} = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1,26186....$$

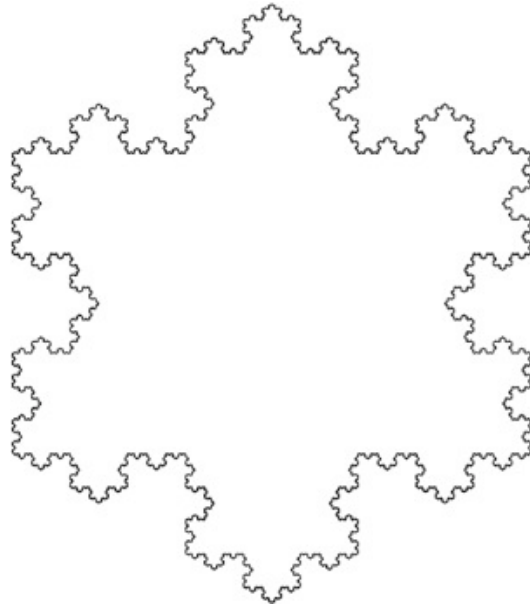
Compleix amb una de les definicions més acceptada dels fractals que diu que un fractal és aquella figura geomètrica autosemblant que té dimensió Hausdorff estrictament superior a la seva dimensió topològica.

$$D_H > D_T$$

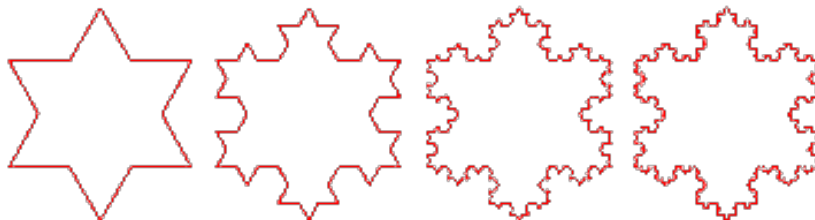
Per tant, es pot concloure que la corba de Koch és un fractal.

Com acabem de veure, la seva dimensió Hausdorff és 1,26186..., el que ens diu que la seva dimensió topològica, en ser una figura de longitud infinita és superior a la d'una recta que sabem que és 1, però en cap moment arriba a 2 que és la dimensió d'un pla, perquè no l'omple.

Sovint es considera en forma de corba tancada i s'anomena **floquet de neu**.



Floc de Koch



Floch de Koch amb les succesives iteracions

Que com podem veure està formada per 3 corbes de Koch

Com exercici calcularem la dimensió de Hausdorff d'alguns dels fractals més coneguts i veurem si compleixen o no amb $D_H > D_T$.