Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Teoria del grau, teorema de Schauder i aplicacions

Autor: Marc Peradalta Negre

Director: Dr. Ernest Fontich Julià
Realitzat a: Departament de Matemàtiques
i Informàtica

Barcelona, 24 de gener de 2022

Abstract

The aim of this project is to introduce degree theory and its applications. We analyse the degree for functions defined over finite-dimensional and infinite-dimensional normed spaces, together with its main properties. One of these properties allows us to connect degree theory with fixed-point theory. As a result, we demonstrate some fundamental fixed-point theorems, like Brouwer's theorem or its generalisation to infinite-dimensional spaces, Schauder's theorem. The latter is applied in two instances. Firstly, we prove the existence of one-dimensional invariant manifolds for a certain class of planar maps. Secondly, we demonstrate the existence of periodic solutions for the forced pendulum equation.

Resum

L'objectiu d'aquest treball és introduir la teoria del grau i les seves aplicacions. Analitzem el grau per a funcions definides a espais normats de dimensió finita i de dimensió infinita. En veiem les propietats principals, entre elles una que ens permet connectar la teoria del grau amb la teoria del punt fix. Amb aquesta eina demostrem alguns teoremes fonamentals de punt fix, com el teorema de Brouwer o la seva generalització a espais de dimensió infinita, el teorema de Schauder. Utilitzem el darrer en dos exemples; per un costat demostrem l'existència de varietats invariants unidimensionals d'una certa classe d'aplicacions del pla, i per l'altre demostrem l'existència de solucions periòdiques de l'equació del pèndol forçat.

2010 Mathematics Subject Classification. 37C25, 37D10, 47-02, 47H10, 47H11

Agraïments

Agrair al meu tutor, el Dr. Ernest Fontich, la paciència i dedicació durant tot aquest projecte.

Gràcies també a la meva família, en especial als meus pares i al meu germà. Pel seu amor i recolzament incondicional sempre, sobretot durant aquesta etapa que ara tanco.

Per últim, agrair a totes les amistats que m'han acompanyat o em segueixen acompanyant. Especialment a l'Iker, la Júlia, en Marc, la Maria, l'Olaia i l'Òscar.

Introducció

Un dels principals objectius i dificultats en el camp de les equacions diferencials és demostrar-ne l'existència de solucions. Una eina molt potent per resoldre aquest problema és la teoria del punt fix que, malgrat tenir un origen purament topològic, té una forta incidència en anàlisi. Un estudi extens dels principals teoremes de punt fix i algunes de les seves aplicacions el podem trobar a [14].

Paral·lelament, la teoria del grau és una branca de la topologia algebraica també amb molts usos en anàlisi. El grau apareix amb la idea d'obtenir informació sobre el conjunt de solucions d'equacions del tipus $\phi(x) = p$, on p és un paràmetre i ϕ és una funció definida en un espai concret. El concepte de grau va ser introduït per Brouwer el 1912 [2], on el defineix per a aplicacions entre espais euclidians. Leray i Schauder en van fer una posterior generalització a operadors entre espais de Banach el 1934 [9].

Es pot veure (i veurem) que el grau és un invariant homotòpic. Aquesta i altres propietats fonamentals ens creen un pont entre la teoria del grau i la teoria del punt fix que permet demostrar molts teoremes de punt fix utilitzant el grau. Combinant les dues teories podem resoldre problemes d'equacions diferencials, de sistemes dinàmics o d'anàlisi funcional no lineal, entre d'altres.

Amb el projecte que ara introduïm abordem aquestes idees, i per fer-ho estructurem el treball en dues parts. A la primera introduïm el concepte de grau i l'utilitzem per demostrar teoremes de punt fix, entre ells el teorema de Brouwer i el de Schauder. A la segona part apliquem aquest darrer resultat a una aplicació del pla i a una equació diferencial ordinària, per demostrar-ne l'existència d'una varietat invariant i d'una solució periòdica, respectivament.

Per al desenvolupament de la primera part, que es correspon amb els dos primers capítols, ens basarem en el llibre [10]. Aquest, al seu torn, té com a llibres de referència el [13] i el [5], entre d'altres. És per això que bona part dels resultats i les demostracions que veurem es poden trobar a aquests tres llibres, sobretot al primer.

En el primer capítol introduïm el concepte de grau per a funcions definides a espais de dimensió finita; comencem definint el grau per a funcions contínues a $\mathbb{R}^n$ i després en generalitzem la definició a qualsevol espai normat de dimensió finita. Seguim amb un estudi de les seves principals propietats on, entre d'altres, provem la invariància homotòpica del grau i demostrem que si el grau és no nul aleshores existeix almenys una solució de l'equació $\phi(x) = p$. Prosseguim amb alguns exemples concrets de càlcul del grau, entre ells veiem que el grau es pot entendre com una generalització de l'índex usat en anàlisi complexa. Acabem el capítol utilitzant el grau i les dues propietats esmentades per demostrar el teorema de Brouwer i algun corol·lari que se'n deriva.

En el segon capítol repetim la mateixa estructura, però ara definim el grau per a operadors definits a espais normats de dimensió infinita. Per fer-ho correctament i no perdre'n les propietats fonamentals, hem de restringir la classe d'operadors on podem definir el grau. Concretament, el definim per a pertorbacions compactes de la identitat. A continuació veiem que efectivament mantenim les mateixes propietats que teníem per a funcions contínues definides a espais normats de dimensió finita, i les utilitzem per demostrar el teorema de Schauder i algun altre teorema de punt fix.

La segona part del projecte inclou els dos darrers capítols. Per al tercer capítol utilitzem com a articles de referència el [8] i el [16], mentre que per al quart capítol ens basem en el llibre [3]. En els dos capítols agafem l'equació que defineix el nostre problema i la reescrivim de forma adequada per poder comprovar que es satisfan les hipòtesis del teorema de Schauder, i així utilitzar-lo per demostrar l'existència d'almenys una solució de l'equació.

En el tercer capítol estudiem una classe d'aplicacions del pla amb un punt fix a l'origen i on la part lineal és la identitat més un terme nilpotent. Concretament, demostrem l'existència d'una varietat unidimensional invariant, és a dir, d'una corba invariant, sota l'acció d'aquesta aplicació.

Per acabar, en el quart i darrer capítol s'analitza l'existència de solucions periòdiques de l'equació del pèndol forçat. Aquesta equació pertany a una classe d'equacions més general, les equacions diferencials no lineals de 2n ordre amb condicions de Dirichlet. Per tant, primer fem un anàlisi de l'existència de solucions d'aquesta classe d'equacions més generals, i n'acabem aplicant l'estudi a l'equació del pèndol forçat.

Índex

1 Teoria del grau en espais de dimensió finita

Com ja hem comentat a la introducció, en aquest primer capítol començarem introduint el concepte de *grau*, també conegut com a *"grau topològic"*, en espais normats de dimensió finita. El nostre objectiu és definir-lo per a funcions contínues. Tanmateix, hem de començar limitant les nostres hipòtesis. Estudiarem primer el grau de funcions C^1 i en punts amb *"bon comportament"*, i acabarem alleugerint les nostres restriccions.

Després d'arribar a una definició satisfactòria del grau, en presentarem les propietats principals. A més, i per tal de fer menys abstractes tots aquests conceptes, calcularem el grau per a tres exemples concrets. Per acabar, l'utilitzarem per demostrar el teorema de Brouwer i un corol·lari d'aquest.

Durant tota la secció i si no s'especifica el contrari, D indica un subconjunt obert i acotat de $\mathbb{R}^n$, $\overline{D}$ l'adherència de D, ∂D la seva frontera, $\operatorname{int} D$ el seu interior, i $\mathbb{R}^n \backslash D$ el seu complementari respecte $\mathbb{R}^n$.

De la mateixa manera, p indica un punt qualsevol de $\mathbb{R}^n$. La norma que utilitzarem a $\mathbb{R}^n$ és la norma del suprem, és a dir, donat $x \in \mathbb{R}^n$, $|x| := \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \{|x_i|\}$.

Considerarem funcions $\phi \in C^r(\overline{D})$, $r \geqslant 0$, on $C^r(\overline{D})$ denota l'espai de funcions r-vegades diferenciable i amb la r-èsima derivada contínua, definides al domini $\overline{D}$. La norma que utilitzem a aquest espai és; donat $\phi \in C^r(\overline{D})$,

$$\|\phi\|_r := \sum_{k=0}^{r} \|\phi^{(k)}\|_0, \tag{1.0.1}$$

on $\phi^{(r)}$ denota la $r-$èsima derivada de ϕ i

$$\|\phi^{(r)}\|_0 := \sup_{x \in D} |\phi^{(r)}(x)|. \tag{1.0.2}$$

Per altra banda, $J_\phi(x) := \det \phi'(x)$ és el determinant del jacobià de ϕ en un punt $x \in \overline{D}$, $\phi \in C^r(\overline{D})$, $r \geqslant 1$.

Finalment, puntualitzem que durant tot el projecte considerarem $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, ...\}$.

1.1 Definició del grau per a espais de dimensió finita

El nostre objectiu en aquesta secció és arribar a una definició del grau per a espais normats de dimensió finita. Per simplificar, treballarem sempre a $\mathbb{R}^n$, i al final veurem que els resultats són fàcilment extensibles a qualsevol espai normat de dimensió finita.

1.1.1 Definició del grau per a funcions C^1

Comencem amb els conceptes més bàsics que constitueixen el grau.

Definició 1.1. *Sigui $\phi \in C^1(\overline{D})$. Diguem que x és un punt crític de ϕ si $J_\phi(x) = 0$; aleshores $\phi(x)$ és un valor crític de ϕ. El conjunt de punts crítics de ϕ a $\overline{D}$ el denotem per $Z_\phi(\overline{D})$, o simplement Z_ϕ; el conjunt de valors crítics, $\phi(Z_\phi)$ l'anomenem* crease ϕ. *Anomenem p-punt a qualsevol punt $x \in \overline{D}$ tal que $\phi(x) = p$.*

La paraula *crease* (“plec” o “arruga”) suggereix que a l'entorn d'un punt crític y, ϕ no es pot aproximar correctament per una funció injectiva. Això implica que la imatge inversa d'un valor crític pot ser un conjunt amb un nombre infinit d'elements. Ara bé, per a valors no crítics tenim el resultat següent:

Proposició 1.2. *Si* $\phi \in C^1(\overline{D})$ *i* $p \notin \operatorname{crease}\phi$, *aleshores* $\phi^{-1}(p)$ *és finit.*

Demostració. Com que $\overline{D}$ és compacte, només pot tenir un nombre finit de punts aïllats. Per tant, si demostrem que tots els $p-$*punts* de ϕ són aïllats, clarament en tindrem un nombre finit, que és el que volem.

Suposem que no ho són, és a dir que existeix una successió $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $\overline{D}$ tendint a $x^* \in \overline{D}$ i tal que $\phi(x_n) = p$, $\forall n \in \mathbb{N}$, d'on $\phi(x^*) = p$. A més, desenvolupant per Taylor a primer ordre, obtenim que

$$0 = \phi(x_n) - \phi(x^*) = \phi'(x^*)(x_n - x^*) + o(|x_n - x^*|) \tag{1.1.1}$$

quan $n \to \infty$. Per altra banda, com que $\det \phi'(x^*) \neq 0$, $\exists K > 0$ tal que

$$|\phi'(x^*)v| \geqslant K|v|, \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1.2}$$

Ara bé, per a n prou gran i utilitzant la definició de o-petita, (1.1.1) implica

$$|\phi'(x^*)(x_n - x^*)| < \frac{1}{2}K|x_n - x^*|, \tag{1.1.3}$$

que contradiu (1.1.2). □

Ja estem en condicions de definir el grau per a funcions C^1 i per a valors no crítics.

Definició 1.3. *Sigui* $\phi \in C^1(\overline{D})$, $p \notin \phi(\partial D)$ *i* $p \notin \operatorname{crease}\phi$. *Definim el grau de* ϕ *a* p *relatiu a* D, $d(\phi, D, p)$, *com*

$$d(\phi, D, p) := \sum_{x\in\phi^{-1}(p)} \operatorname{sgn} J_\phi(x), \tag{1.1.4}$$

on $\operatorname{sgn} J_\phi(x)$ *indica el signe del determinant del jacobià.*

Observacions 1.4.

1. Per la proposició 1.2, la suma és finita.
2. La condició $p \notin \phi(\partial D)$ és essencial, no la podrem treure en cap moment del treball. Si l'eliminéssim podríem tenir problemes definint el grau per a pertorbacions de ϕ.

Abans de continuar en el nostre camí cap a una definició més general de grau, enunciem una proposició, que podem interpretar com una “continuïtat” del grau respecte la norma $\|\cdot\|_1$:

Proposició 1.5. *Siguin* $\phi, \psi \in C^1(\overline{D})$ *i* $p \notin \operatorname{crease}\phi \cup \phi(\partial D)$. *Existeix* $\delta(p, \phi) > 0$ *tal que, si* $\|\psi - \phi\|_1 < \delta$, *aleshores* $p \notin \operatorname{crease}\psi \cup \psi(\partial D)$ *i* $d(\psi, D, p) = d(\phi, D, p)$.

Observacions 1.6.

1. No demostrem la proposició anterior ja que més endavant ens trobarem amb una propietat molt similar però per a la norma en $C^0(\overline{D})$, que és un cas més general.

2. Així com ara hem enunciat una "continuïtat" respecte la norma $\|\cdot\|_1$ que després generalitzarem a $\|\cdot\|_0$, podem enunciar, heurísticament, altres propietats per a funcions de $C^1(\overline{D})$ que després passarem a $C^0(\overline{D})$. N'enunciem aquí tres que, juntament amb la continuïtat respecte ϕ, són fonamentals i les voldrem mantenir en totes les generalitzacions que fem del grau.

   (a) Si $d(\phi, D, p) \neq 0$, aleshores $\exists x \in D$ tal que $\phi(x) = p$. La demostració és directa de la definició 1.3.

   (b) Sigui $h : [0,1] \times \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una homotopia entre dues funcions $\phi, \psi \in C^1(\overline{D})$, és a dir, una funció $h_t(x)$ contínua tal que $h_0(x) = \phi(x)$ i $h_1(x) = \psi(x)$, $\forall x \in \overline{D}$. Aleshores si $p \notin h_t(\partial D)$, $\forall t \in [0,1]$, tenim que $d(h_t, D, p)$ és constant en t. La demostració és immediata per la proposició anterior, ja que ens diu que $d(h_t, D, p) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{Z}$ és una funció contínua $\forall t \in [0,1]$, i per tant és constant.

   (c) $d(I, d, p) = 1$ si $p \in \phi(D)$, i $d(I, D, p) = 0$ si $p \notin \phi(\overline{D})$. Aquesta propietat també és trivial de veure per a funcions de C^1.

El nostre objectiu ara és definir el grau en condicions més febles, és a dir per a funcions contínues i en qualsevol punt que no sigui de la frontera.

Per arribar a aquesta definició més general, ens calen un seguit d'eines que ens ajudaran en les demostracions successives. Comencem amb el teorema de Sard, que té importància sobretot en la seva generalització a l'estudi de C^k-varietats, però aquí en tenim prou amb la versió a $\mathbb{R}^n$. per a la demostració del teorema de Sard és important la següent definició i lema:

Definició 1.7. *Un espai topològic X és Lindelöf si tot recobriment obert de X admet un subrecobriment numerable. $\mathbb{R}^n$ és un exemple d'espai Lindelöf.*

Lema 1.8. *(Lema de Lindelöf) Sigui S un subconjunt de $\mathbb{R}^n$ i sigui $\mathcal{F}$ un recobriment obert de S, aleshores existeix un subrecobriment numerable de $\mathcal{F}$ de S. És a dir, tot subespai de $\mathbb{R}^n$ és Lindelöf.*

Passem ara sí al teorema de Sard:

Teorema 1.9. *(Teorema de Sard) Sigui $\phi \in C^1(\overline{D})$. Aleshores* crease ϕ *té mesura nul·la a $\mathbb{R}^n$.*

Demostració.
Idea de la demostració. En primer lloc, pel lema de Lindelöf (lema 1.8) veiem que en tenim prou provant la propietat per un cub I, ja que ens permet expressar D com una unió numerable de cubs.

Dividim aquest cub en un nombre finit de subcubs S més petits i en prenem un qualsevol que contingui almenys un punt crític x, S_x. Clarament, crease $\phi = \cup_x \phi(S_x)$, que és una unió finita.

El que fem a continuació, és veure que la imatge d'aquest subcub S_x està continguda en un rectangle de mesura arbitràriament petita. Com que la unió és finita, el volum de crease ϕ està acotat per un conjunt de mesura nul·la, que és el que volem demostrar.

Demostració formal. Pel lema de Lindelöf (lema 1.8) agafant un recobriment obert de D fet per cubs centrats en tot punt $x \in D$ i de costat $\eta_x := \rho(x, \mathbb{R}^n \backslash D)$, amb la distància induïda per la norma del suprem a $\mathbb{R}^n$, podem escriure D com una unió numerable de cubs. Aleshores només ens cal demostrar que el resultat és cert per un cub I, ja que la unió numerable de conjunts de mesura nul·la a $\mathbb{R}^n$, té mesura nul·la.

Sigui $\varepsilon > 0$. Sigui $N > 0$ suficientment gran, i dividim I en N^n subcubs S, de costat $l(S) := \frac{\eta_x}{N}$. Definim també una funció $G : S \times S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{\phi(y)-\phi(x)-\phi'(x)(y-x))}{|y-x|} & \text{si} \quad x \neq y, \\ 0 & \text{si} \quad x = y. \end{cases} \tag{1.1.5}$$

Clarament G és contínua, i com que està definida en un compacte, és uniformement contínua. Per tant, per N prou gran i si $x, y \in S$,

$$|\phi(y) - \phi(x) - \phi'(x)(y-x))| < \varepsilon |y-x| \leqslant \varepsilon \frac{\eta_x}{N}. \tag{1.1.6}$$

Prenem ara qualsevol subcub S que contingui almenys un punt crític x de ϕ, S_x, tal que $J_\phi(x) = 0$. Aleshores el conjunt $\{\phi'(x)(y-x) : y \in S_x\}$ pertany a un subespai $W \subset \mathbb{R}^n$ de dimensió com a màxim $n-1$.[2] Així doncs, si considerem l'hiperplà afí $P_x := W + \phi(x)$ i el conjunt $\phi(S_x) := \{\phi(y) : y \in S_x\}$, tenim que $\rho(\phi(S_x), P_x) < \varepsilon \frac{\eta_x}{N}$.

Per altra banda, com que ϕ és $C^1(\overline{D})$, també és Lipschitz i per tant, per alguna constant $K > 0$ i si $y \in S_x$, tenim que

$$|\phi(y) - \phi(x)| \leqslant K|y-x| \leqslant K \frac{\eta_x}{N}.$$

Per tant, el conjunt $\phi(S_x) \subset R$, on R és un rectangle d'altura $h(R) < 2\varepsilon \frac{\eta_x}{N}$, i amb una base $(n-1)$-dimensional de costats $l(R) < 2K \frac{\eta_x}{N}$, i per tant el volum de R és $V(R) < K^{n-1} \left(2 \frac{\eta_x}{N}\right)^n \varepsilon$.

Finalment, com que hi ha com a màxim N^n subcubs S_x, tenim que $\operatorname{crease} \phi \cap I \subset \bigcup_{i=1}^{N^n} S_x$. Com que $V\left(\bigcup_{i=1}^{N^n} S_x\right) < K^{n-1}(2\eta_x)^n \varepsilon$, i això és cert $\forall \varepsilon > 0$, tenim que $\operatorname{crease} \phi \cap I$ té mesura nul·la, com volíem demostrar. $\square$

Donem ara una definició i enunciem un seguit de resultats de caràcter purament vectorial. Com que només ens n'interessen els resultats, n'ometem les demostracions, que no tenen especial interès en aquest context. El lector interessat les pot trobar al [10], capítol 1.2. Aquests lemes, de forma naïf, ens diuen que certes funcions són divergències d'altres funcions.

Definició 1.10. *Sigui $\phi \in C^r(\overline{D})$. Diguem que $\phi \in C_0^r(\overline{D})$ si el seu suport,* $\operatorname{supp} \phi := \{x \in \overline{D} : \phi(x) \neq 0\}$ *és un conjunt compacte. L'espai $C_0^r(\overline{D})$ l'anomenem l'espai de funcions $C^r(\overline{D})$ amb suport compacte.*

Lema 1.11. *Sigui $\phi \in C^2(\overline{D})$ i $v \in C_0^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ amb $\operatorname{supp} v \cap \phi(\partial D) = \emptyset$, és a dir, disjunts. Aleshores $\exists u \in C_0^1(\overline{D})$ tal que*

$$(\operatorname{div} u)(x) = J_\phi(x) \cdot (\operatorname{div} v)(\phi(x)). \tag{1.1.7}$$

[2]Recordem que la dimensió del subespai ens ve donada pel rang de la matriu associada a l'aplicació lineal $\phi'(x)$. Per tant si el determinant val 0, la dimensió màxima del subespai és $n-1$.

Lema 1.12. *Sigui* $f \in C_0^1(\overline{D}, \mathbb{R}^n)$ *i* $K = \operatorname{supp} f$. *Suposem que per alguna* $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$A \equiv \{k + \theta\overline{x}; k \in K, 0 \leqslant \theta \leqslant 1\} \subset D. \tag{1.1.8}$$

Aleshores existeix $v \in C_0^1(\overline{D})$ *tal que*

$$(\operatorname{div} v)(x) = f(x) - f(x - \overline{x}). \tag{1.1.9}$$

Lema 1.13. *Sigui* $f \in C_0^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *i* $K = \operatorname{supp} f$. *Sigui* $\gamma(s)$ *un camí a* $\mathbb{R}^n$ *tal que el tub* $A \equiv \{k + \gamma(s); k \in K, 0 \leqslant s \leqslant 1\}$ *està contingut en* D. *Aleshores existeix* $v \in C_0^1(\overline{D})$ *tal que*

$$(\operatorname{div} v)(x) = f(x - \gamma(0)) - f(x - \gamma(1)) \tag{1.1.10}$$

Per acabar demostrarem un teorema que ens proporciona una versió integral de la definició del grau. Per fer-ho utilitzem una família de funcions derivables, amb suport compacte i amb l'integral a $\mathbb{R}^n$ igual a 1, que ens recorden molt a les "funcions suavitzants" ("*mollifiers*", en anglès).

Teorema 1.14. *Sigui* $\phi \in C^1(\overline{D})$, $p \notin \phi(\partial D)$ *i* $p \notin \operatorname{crease} \phi$. *Sigui* $f_\varepsilon : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funció contínua tal que*

$$K_\varepsilon \equiv \operatorname{supp} f_\varepsilon \subset B(0, \varepsilon) \quad i \quad \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) dx = 1. \tag{1.1.11}$$

Aleshores $\exists \varepsilon_0$ *depenent de* p *i* ϕ *tal que, si* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, *aleshores*

$$d(\phi, D, p) = \int_D f_\varepsilon(\phi(x) - p) J_\phi(x) dx. \tag{1.1.12}$$

Demostració. En primer lloc notem que aquest tipus de funcions existeixen (com ja hem dit, els *"mollifiers"* en són un exemple). Ara, com que $p \notin \operatorname{crease} \phi$, per la proposició 1.2, $\phi^{-1}(p)$ és finit i per tant podem expressar-lo com $\phi^{-1}(p) = \{a_1, ..., a_k\}$.

Volem aplicar ara el teorema de la funció inversa. Sigui U_i un obert de D que contingui un punt a_i. Com que $\phi \in C^1(U_i)$, i a més $J_\phi(a_i) \neq 0$, podem aplicar el teorema de la funció inversa. És a dir, existeix $V_i = \phi(U_i)$ amb $\phi : U_i \longrightarrow V_i$ bijectiva i amb inversa $\phi^{-1} \in C^1(V_i)$. Podem aplicar el mateix procés per a tots els a_i. Prenem ara $\varepsilon > 0$ i sigui $B(p, \varepsilon) \subset \bigcap_i V_i$. Com que el teorema és també vàlid en aquesta bola, veiem que per cada a_i, existeix un entorn $A_i(\varepsilon)$ de a_i tal que $\phi(A_i(\varepsilon)) = B(p, \varepsilon)$. Prenem ε per tal que els A_i siguin disjunts dos a dos i per tant només hi hagi un p-punt a_i a cada A_i. A més, si restringim ϕ a cada $A_i(\varepsilon)$, $\phi|_{A_i(\varepsilon)}$ és injectiva.

Tornem a acotar ε, i l'agafem tal que $A_i(\varepsilon)$ sigui disjunt de ∂D, i $J_\phi(A_i(\varepsilon)) \neq 0$ a tot el conjunt. Aleshores, per a tot $x \in A_i(\varepsilon)$ i per a tot $i = 1, ..., k$, la funció $\phi(x) - p$ s'anul·la només en $\{a_1, ..., a_k\}$, que són punts aïllats. A més, si prenem $f_\varepsilon(\phi(x) - p)$, aquesta funció s'anul·la a tot arreu excepte a $B(0, \varepsilon) \backslash \{0\}$, per definició del suport de la funció. Per tant, si tenim en compte que el suport és l'adherència dels punts on no s'anul·la la imatge (és a dir, que els punts aïllats no juguen cap paper rellevant i ens és igual que la funció s'anul·li en $\{a_1, ..., a_k\}$), aleshores:

$$\operatorname{supp} f_\varepsilon(\phi(x) - p) \subset \bigcup_{i=1}^{k} A_i. \tag{1.1.13}$$

Per tant,

$$\int_D f_\varepsilon(\phi(x)-p)J_\phi(x)dx = \sum_{i=1}^{k}\int_{A_i} f_\varepsilon(\phi(x)-p)J_\phi(x)dx. \qquad (1.1.14)$$

Si ara fem un canvi de variable $y=\phi(x)-p$ obtenim que

$$\int_{A_i} f_\varepsilon(\phi(x)-p)J_\phi(x)dx = \operatorname{sgn} J_\phi(a_i)\int_{K_\varepsilon} f_\varepsilon(y)dy, \qquad (1.1.15)$$

on hem agafat $\frac{J_\phi(x)}{|J_\phi(x)|}=\operatorname{sgn} J_\phi(a_i)$, ja que, pel teorema de la funció inversa, el jacobià no s'anul·la i per tant no canvia de signe en l'entorn $A_i(\varepsilon)$, per a tot $i=1,...,k$. Finalment i per definició de f_ε, obtenim

$$\int_D f_\varepsilon(\phi(x)-p)J_\phi(x)dx = \sum_{i=1}^{k}\operatorname{sgn} J_\phi(a_i) = d(\phi,D,p), \qquad (1.1.16)$$

com volíem. □

Acabem aquesta secció amb un teorema que ens permetrà eliminar la restricció de $p\notin$ crease ϕ en la definició del grau. De fet, ens diu que el grau és constant per a components de $\mathbb{R}^n\backslash\phi(\partial D)$. Veiem-ho:

Teorema 1.15. *Sigui $\phi\in C^1(\overline{D})$. Suposem que p_1 i p_2 pertanyen a la mateixa component de $\mathbb{R}^n\backslash\phi(\partial D)$, i que no pertanyen al* crease ϕ. *Aleshores*

$$d(\phi,D,p_1)=d(\phi,D,p_2). \qquad (1.1.17)$$

Demostració.
Idea de la demostració. Primer provarem el resultat per a funcions C^2, després amb una successió de funcions C^2 que tendeixen a una funció C^1, traslladarem el resultat a funcions C^1.

Demostració formal. Sigui $\phi\in C^2(\overline{D})$. $\mathbb{R}^n\backslash\phi(\partial D)$ és un subconjunt obert de $\mathbb{R}^n$ per ser ∂D compacte i per tant $\phi(\partial D)$ també. Notem que les seves components connexes són també arc connexes.[3] Agafem la component Ω que contingui p_1 i p_2, i sigui $\Gamma:=\{\gamma(s),0\leqslant s\leqslant 1\}\subset\Omega$ tal que $\gamma(0)=p_1$ i $\gamma(1)=p_2$. Aleshores, com que Γ és compacte, $\exists\varepsilon_1>0$ tal que si $B(\gamma(s),\varepsilon_1)$ és l'esfera de radi ε_1 centrada en $\gamma(s)$, $\forall s\in[0,1]$, aleshores $K_{\varepsilon_1}:=\{x+\gamma(s):\ x\in B(\gamma(s),\varepsilon_1),\ 0\leqslant s\leqslant 1\}\subset\Omega$.

Sigui ara $\varepsilon<\varepsilon_1$ i sigui f_ε tal que $d(\phi,D,p_1)$ i $d(\phi,D,p_2)$ vinguin donats per la fórmula (1.1.12) del teorema 1.14. Aleshores clarament $K:=\{x+\gamma(s):\ x\in\operatorname{supp} f_\varepsilon,\ s\in[0,1]\}\subset K_{\varepsilon_1}\subset\Omega$ ja que $\varepsilon<\varepsilon_1$. Per tant podem aplicar el lema 1.13 a f_ε i K, d'on $\exists v\in C_0^1(\overline{D})$ tal que $\operatorname{supp} v\subset\Omega$ i

$$(\operatorname{div} u)(x)=f_\varepsilon(x-p_1)-f_\varepsilon(x-p_2). \qquad (1.1.18)$$

Ara, com que $\phi\in C^2$ i $\operatorname{supp} v\cap\phi(\partial D)=\emptyset$, tenim que pel lema 1.11, $\exists u\in C_0^1(\overline{D})$ tal que

$$(\operatorname{div} u)(x)=J_\phi(x)\cdot(\operatorname{div} v)(\phi(x)). \qquad (1.1.19)$$

[3]Recordem que a $\mathbb{R}^n$, qualsevol subconjunt obert i connex és també connex per camins.

Hem dit que el grau de p_1 i p_2 venien definits per l'equació (1.1.12), i per tant utilitzant les dues equacions anteriors, obtenim:

$$\begin{aligned} d\left(\phi, D, p_1\right) &= \int_D f_\varepsilon(\phi(x)-p_2)J_\phi(x)dx + \int_D J_\phi(x)\cdot(\operatorname{div} v)(\phi(x))dx \\ &= d(\phi, D, p_2) + \int_D (\operatorname{div} u)(x)dx. \end{aligned} \tag{1.1.20}$$

Finalment tenim que

$$\int_D (\operatorname{div} u)(x)dx = 0, \tag{1.1.21}$$

on hem utilitzat que $\operatorname{supp} u \subset D$ i per tant $u(x)=0$, $\forall x \in \partial D$, d'on, aplicant el teorema de la divergència, tenim que la integral (1.1.21) és nul·la i per tant $d(\phi, D, p_1) = d(\phi, D, p_2)$.

Ja hem demostrat que el resultat és cert per $\phi \in C^2(\overline{D})$. Suposem ara que $\phi \in C^1(\overline{D})$. Pel teorema d'aproximació de Weierstrass, podem prendre $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de $C^2(\overline{D})$ tal que $\phi_n \xrightarrow{n\to\infty} \phi \in C^1(\overline{D})$.[4]

Definint $\gamma(s)$ com hem fet anteriorment, sigui $\delta = \rho(\Gamma, \phi(\partial D))$. Com que els dos conjunts són compactes i disjunts, tenim que $\delta > 0$. Prenem $n \in \mathbb{N}$ suficientment gran per tal que $\|\phi(x) - \phi_n(x)\|_0 < \frac{1}{2}\delta$, $x \in \overline{D}$. Aleshores, per $x \in \partial D$ i per $0 \leqslant s \leqslant 1$, i utilitzant la desigualtat triangular inversa,

$$|\phi_n(x) - \gamma(s)| \geqslant |\phi(x) - \gamma(s)| - |\phi(x) - \phi_n(x)| > \delta - \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}\delta. \tag{1.1.22}$$

Per tant veiem que p_1 i p_2 estan a la mateixa component de $\mathbb{R}^n \backslash \phi_n(\partial D)$. Així doncs, prenent n suficientment gran,

$$d(\phi, D, p_1) = d(\phi_n, D, p_1) = d(\phi_n, D, p_2) = d(\phi, D, p_2), \tag{1.1.23}$$

on per a la primera i la tercera igualtat utilitzem la proposició 1.5 i per a la segona igualtat utilitzem el que hem provat per funcions $C^2(\overline{D})$. □

Hem demostrat que el grau es conserva en les components de $\mathbb{R}^n \backslash \phi(\partial D)$. Ja estem en condicions d'eliminar la restricció de $p \notin \operatorname{crease} \phi$ en la definició del grau.

Definició 1.16. *Sigui $\phi \in C^1(\overline{D})$ i $p \notin \phi(\partial D)$, però $p \in \operatorname{crease} \phi$. Sigui $q \notin \operatorname{crease} \phi$ tal que $|q - p| < \rho(p, \phi(\partial D))$. Definim el grau a p com:*

$$d(\phi, D, p) := d(\phi, D, q). \tag{1.1.24}$$

Observacions 1.17.

1. La definició anterior està ben justificada ja que pel teorema de Sard, tota bola $B(p,r)$ conté punts $q \notin \operatorname{crease} \phi$, ja que $\operatorname{crease} \phi$ té mesura nul·la i per tant no podem trobar una bola $B(p, \varepsilon)$, que té infinits punts, que només contingui punts crítics. Clarament $B(p, \rho(p, \phi(\partial D))) \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n \backslash \phi(\partial D)$. Per tant, el grau és constant $\forall q \notin \operatorname{crease} \phi$ i tal que $q \in B(p, \rho(p, \phi(\partial D)))$, i per tant ens podem aproximar a p tant com vulguem.

2. Gràcies al resultat que acabem de demostrar, ja podem eliminar la restricció de $p \notin \operatorname{crease} \phi$ a les propietats mencionades a les observacions 1.6. Tanmateix, la restricció de $p \notin \phi(\partial D)$ no la podem eliminar i per tant ens imposa una barrera en la continuïtat del grau respecte p. Ja hem dit que aquesta condició és fonamental i no la podrem eliminar en cap moment.

[4] Recordem el teorema d'aproximació de polinomis de Weierstrass, que ens diu que C^∞ és dens en C^0 en un compacte de $\mathbb{R}^n$, i conseqüentment C^j és dens en C^i $\forall j > i$. En particular, C^2 és dens en C^1, en el compacte $\overline{D}$.

1.1.2 Definició del grau per a funcions C^0

Ja estem en condicions de definir el grau per a funcions contínues i tancar aquesta primera part del capítol. Per fer-ho, utilitzem de nou el teorema d'aproximació de Weierstrass i per tant que $C^1(\overline{D})$ és dens a $C^0(\overline{D})$. És a dir, per a tota funció $f \in C^0(\overline{D})$ sempre podem trobar una successió de funcions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $C^1(\overline{D})$ tal que $g_n \xrightarrow{n\to\infty} f$. Així doncs, definim el grau com:

Definició 1.18. *Sigui $\phi \in C^0(\overline{D})$ i $p \notin \phi(\partial D)$. Sigui $\psi \in C^1(\overline{D})$ tal que $|\phi(x) - \psi(x)| < \rho(p, \phi(\partial D))$, $\forall x \in \overline{D}$. Definim:*

$$d(\phi, D, p) := d(\psi, D, p). \tag{1.1.25}$$

Observacions 1.19.

1. Veiem que efectivament el grau està ben definit, és a dir, que no depèn de l'elecció de $\psi \in C^1(\overline{D})$. Siguin $\psi_1, \psi_2 \in C^1(\overline{D})$, $\beta = \rho(p, \phi(\partial D))$, i tal que $\forall x \in \overline{D}$, $|\psi_i - \phi(x)| < \beta$, $i = 1, 2$. Com ja hem dit ψ_1 i ψ_2 existeixen pel teorema d'aproximació de Weierstrass.

   Si considerem la homotopia $h_t(x) = t\psi_1(x) + (1-t)\psi_2(x)$ on $t \in [0,1]$ i $x \in \overline{D}$, aleshores és clar que $|h_t(x) - \phi(x)| < t\beta + (1-t)\beta = \beta$. Per tant, si $x \in \partial D$, $|p - h_t(x)| \geqslant |p - \phi(x)| - |\phi(x) - h_t(x)| > 0$, $\forall t \in [0,1]$.

   Així doncs podem utilitzar la invariància homotòpica vista a 1.6 (eliminant la restricció de $p \notin \operatorname{crease} \phi$, gràcies al teorema 1.15), i per tant, veiem que el grau està ben definit per a funcions $C^0(\overline{D})$, ja que no depèn de l'elecció de $\psi \in C^1(\overline{D})$.

2. El poder definir el grau per a funcions contínues ens mostra la naturalesa topològica del grau. De fet, és possible una definició més general d'aquest i sense utilitzar cap tipus d'eina analítica, sinó que es pot fer usant la teoria homològica. No és l'objectiu del text estudiar aquest punt de vista del grau, ja que ens n'interessen només les seves aplicacions en anàlisi.

És important notar que fins ara hem treballat sempre a $\mathbb{R}^n$. Tanmateix, tota aquesta dissertació la podem generalitzar a espais normats de dimensió finita qualssevol. Veiem doncs que podem estendre la definició 1.18 a qualsevol espai normat de dimensió finita.

Sigui $(X, \|\cdot\|)$ un espai normat real de dimensió $n < \infty$. Podem identificar X amb $\mathbb{R}^n$ un cop escollida una base de X.[5] Per tant, si demostrem que el grau és independent de la base escollida a $\mathbb{R}^n$, també el tindrem ben definit a X.

Teorema 1.20. *Sigui $D \subset \mathbb{R}^n$, $\phi \in C^0(\overline{D})$ i $p \notin \phi(\partial D)$, aleshores $d(\phi, D, p)$ és invariant sota un canvi de coordenades.*

Demostració.
Idea de la demostració. Considerem un canvi de coordenades $f : f^{-1}(\overline{D}) \to \overline{D}$ que porta $x \longmapsto y$ i $\chi \longmapsto \psi$, on f és un C^1- difeomorfisme. Considerem també que $\chi \in C^1(\overline{D})$, i que $\|\chi - \phi\|_0 < \rho(p, \phi(\partial D))$.

[5] Així com sabem que tot espai vectorial de dimensió n és isomorf a $\mathbb{R}^n$, es pot demostrar que si tenen una norma definida, també són topològicament isomorfs. És a dir, donat $n \in \mathbb{N}$, tots els espais normats de dimensió n són isomorfs. Aquest resultat és conegut com el teorema de Hausdorff.

Com que f és un difeomorfisme, tenim $J_{f^{-1}} = J_f^{-1}$, i $J_f \neq 0 \neq J_{f^{-1}}$ a tot arreu. A més, $\operatorname{sgn} J_f = \operatorname{sgn} J_{f^{-1}}$, ja que una matriu és l'inversa de l'altra, com acabem de dir.[6]

Aleshores, és clar que $\operatorname{sgn} J_\chi(x) = \operatorname{sgn} J_\psi(y)$. Per tant, per punts $q \notin \operatorname{crease} \chi$, el grau és el mateix independentment del sistema de coordenades. Com que ja hem demostrat el resultat per a funcions $C^1(\overline{D})$ i punts $p \notin \operatorname{crease} \chi$, només ens cal buscar aproximacions de ϕ i p per funcions contínues i punts qualssevol. $\square$

1.2 Propietats del grau per a espais de dimensió finita

Hem aconseguit una definició satisfactòria del grau per a funcions contínues i en punts qualssevol de l'espai (tret de $\phi(\partial D)$). Anem a veure'n les propietats principals, entre elles les que ja hem mencionat a 1.6. Comencem per una que és de gran rellevància.

Teorema 1.21. *Sigui $\phi \in C^0(\overline{D})$. Si el grau està ben definit i $d(\phi, D, p) \neq 0$, aleshores $\exists q \in D$ tal que $\phi(q) = p$.*

Demostració. Com ja hem comentat, pel cas $\psi \in C^1(\overline{D})$ és directe ja que si $d(\psi, D, p) \neq 0$ per algun $p \notin \psi(\partial D)$, aleshores és directe que $\exists x \in \psi^{-1}(p)$ tal que $\psi(x) = p$, ja que altrament el sumatori seria nul. A més, $p \in \psi(D)$.

Ara, si $p \notin \phi(\overline{D})$, podem prendre $\psi \in C^1(\overline{D})$ tal que $\|\phi - \psi\|_0 < \rho(p, \phi(\overline{D}))$. Aleshores $p \notin \psi(\overline{D})$ i per tant, pel que acabem de veure, $d(\psi, D, p) = 0$, d'on també $d(\phi, D, p) = 0$, per la definició 1.18. Per tant, si $d(\phi, D, p) \neq 0$, aleshores $p \in \phi(D)$. $\square$

Observació 1.22. És a dir, aquest teorema ens demostra l'existència de solucions per equacions de tipus $\phi(x) = p$, si $p \in \phi(D)$. Aquest resultat és fonamental ja que converteix el grau en una eina per a la cerca de solucions i de punts fixos d'equacions.

Estudiem ara la variació del grau respecte ϕ. Tenim dos propietats importants, una és la continuïtat del grau respecte ϕ, i l'altra la invariància homotòpica del grau. Comencem amb la continuïtat:

Teorema 1.23. *Siguin $\phi, \psi \in C^0(\overline{D})$ i $p \notin \phi(\partial D)$. Si $\|\psi - \phi\|_0 < \rho(p, \phi(\partial D))$, aleshores $d(\psi, D, p)$ està ben definit i és igual a $d(\phi, D, p)$.*

Demostració. Com que $\|\psi - \phi\|_0 < \rho(p, \phi(\partial D))$ i $p \notin \phi(\partial D)$, tenim que $p \notin \psi(\partial D)$, per tant el grau $d(\psi, D, p)$ està ben definit. Prenem ara una funció $\zeta \in C^1(\overline{D})$ tal que

$$\|\zeta - \psi\|_0 + \|\psi - \phi\|_0 < \rho(p, \phi(\partial D)) \tag{1.2.1}$$

Una funció així existeix per la densitat de l'espai de funcions $C^1(\overline{D})$ en $C^0(\overline{D})$. A més, com que $\|\zeta - \phi\|_0 \leqslant \|\zeta - \psi\|_0 + \|\psi - \phi\|_0$, tenim que $\|\zeta - \phi\|_0 < \rho(p, \phi(\partial D))$. Per tant, per la definició 1.18, $d(\phi, D, p) = d(\zeta, D, p)$.

Per altra banda, és clar que

$$\rho(p, \phi(\partial D)) \leqslant \rho(p, \psi(\partial D)) + \|\psi - \phi\|_0. \tag{1.2.2}$$

Així doncs, utilitzant les dues equacions anteriors, obtenim que $\|\zeta - \psi\|_0 < \rho(p, \psi(\partial D))$. Per tant, de nou per la definició 1.18, $d(\psi, D, p) = d(\zeta, D, p)$. D'aquí concloem que $d(\phi, D, p) = d(\psi, D, p)$, com volíem. $\square$

[6] És trivial veure totes aquestes propietats tinguent en compte que f és un difeomorfisme i que com per a tota matriu A invertible, $AA^{-1} = Id$, tenim $\det(A) = \det(A)^{-1}$. En particular, tenen el mateix signe.

Passem ara a la invariància homotòpica del grau. Recordem que la noció d'homotopia, informalment, és la capacitat de deformar dues funcions d'una a l'altra sense "trencar-se" en cap moment. Recordem-ne la definició formal, ja que aquest concepte jugarà un paper clau d'ara endavant.

Definició 1.24. *Siguin X i Y dos espais topològics, i siguin $f, g \in C^0(X)$. Es diu que f i g són homotòpiques, $f \sim g$, si existeix una funció contínua $H : [0,1] \times X \to Y$ tal que*

$$H(0,x) = f(x), \qquad H(1,x) = g(x), \qquad \forall x \in X. \tag{1.2.3}$$

Teorema 1.25. *Sigui $h_t(x) := H(t,x)$ una homotopia i sigui $p \notin h_t(\partial D)$, $\forall t \in [0,1]$. Aleshores $d(h_t, D, p)$ és constant $\forall t \in [0,1]$.*

Demostració. Per hipòtesi tenim que el grau està ben definit $\forall t \in [0,1]$, ja que $p \notin h_t(\partial D)$. L'aplicació $h : [0,1] \longrightarrow C^0(\overline{D})$, que envia $t \mapsto h_t$ és contínua en $[0,1]$. Per altra banda, l'aplicació $\hat{d} : C^0(\overline{D}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ que envia $\phi \mapsto \hat{d}(\phi, D, p)$, també és contínua pel teorema 1.23. Per tant, la composició $d := \hat{d} \circ h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{Z}$ que envia $t \mapsto d(h_t, D, p)$, també és contínua i per tant, com que envia valors a $\mathbb{Z}$, és constant, com volíem veure. □

Observació 1.26. El teorema anterior ens diu que el grau no depèn de t. Una manera d'interpretar el teorema és que els $p-$punts apareixen en parelles de punts de signe diferent al deformar la funció mitjançant una homotopia, i per això no varien el grau.

Acabem de veure en el teorema 1.23 que el grau és continu respecte ϕ. Veiem ara, i recuperant el teorema 1.15 que ens dona la continuïtat del grau respecte p en components de $\mathbb{R}^n \backslash \phi(\partial D)$ per a funcions $C^1(\overline{D})$, que el grau també és continu respecte p per a funcions $C^0(\overline{D})$. Veiem-ho:

Teorema 1.27. *Donada $\phi \in C^0(\overline{D})$ i $p \notin \phi(\partial D)$, $d(\phi, D, p)$ és constant en components de $\mathbb{R}^n \backslash \phi(\partial D)$. És a dir, el grau és constant $\forall p \in \Omega$ on Ω és una component de $\mathbb{R}^n \backslash \phi(\partial D)$.*

Demostració

Siguin $p_1, p_2 \in \Omega$. Sigui $\gamma(s)$ un camí en Ω tal que $\gamma(0) = p_1$ i $\gamma(1) = p_2$ (hem vist abans que un camí així existeix). Sigui $\psi \in C^1(\overline{D})$ tal que $\|\psi - \phi\|_0 < \rho(\gamma([0,1]), \phi(\partial D))$, on $\rho(\gamma([0,1]), \phi(\partial D))$ denota la distància mínima entre els dos conjunts. Aleshores, per la definició de grau per a funcions contínues, $d(\phi, D, p_i) = d(\psi, D, p_i)$, amb $i = 1, 2$, amb p_1 i p_2 en la mateixa component de $\mathbb{R}^n \backslash \psi(\partial D)$. Ara, pel teorema 1.15, $d(\psi, D, p_1) = d(\psi, D, p_2)$, i per tant tenim el resultat desitjat.

□

Fins ara hem estat evitant en tot moment la frontera del domini D, ja que hem dit que ens podria causar problemes en la definició del grau. Tanmateix, juga un paper fonamental en el valor que pren el grau (en valors que no són de la frontera). Ho veiem en els següents resultats.

Teorema 1.28. *Siguin $\phi, \psi \in C^0(\overline{D})$ tal que $\phi(x) = \psi(x)$, $\forall x \in \partial D$. Aleshores $d(\phi, D, p) = d(\psi, D, p)$, $\forall p \notin \phi(\partial D)$.*

Demostració. Considerem la homotopia

$$h_t(x) = t\phi(x) - (1-t)\psi(x), \quad x \in \overline{D}, \;\; t \in [0,1]. \tag{1.2.4}$$

Per $x \in \partial D$, com que $\phi(x) = \psi(x)$, $h_t(x) = \phi(x)$ i per tant $p \notin h_t(\partial D)$, $\forall t \in [0,1]$. Per tant es satisfan les hipòtesis del teorema 1.25, i per tant obtenim que, gràcies a la invariància homotòpica del grau, $d(\phi, D, p) = d(\psi, D, p)$. $\square$

Observació 1.29. Aquesta dependència del grau respecte els valors que pren la funció a la frontera és una propietat que també satisfà l'índex utilitzat en anàlisi complexa. Això ja ens dona una pista del que veurem més endavant i que ja hem comentat a la introducció; el grau es pot entendre com una generalització de l'índex.

Teorema 1.30. *(Teorema de Poincaré-Bohl) Siguin $\phi, \psi \in C^0(\overline{D})$, $p \notin \phi(\partial D)$ i suposem que $\forall x \in \partial D$, el segment $[\phi(x), \psi(x)]$ no conté p. Aleshores $d(\phi, D, p) = d(\psi, D, p)$.*

Demostració. Utilitzem la mateixa homotopia que en el teorema anterior;

$$h_t(x) = t\phi(x) - (1-t)\psi(x), \quad x \in \overline{D}, \ t \in [0,1]. \tag{1.2.5}$$

Que $p \notin [\phi(x), \psi(x)]$ vol dir que la direcció dels vectors $\phi(x) - p$ i $p - \psi(x)$ no és mai la mateixa si $x \in \partial D$ (o similarment, $\phi(x) - p$ no està mai en oposició amb $\psi(x) - p$). Per tant, entenent la homotopia anterior com una combinació lineal de dos vectors, veiem que

$$t(\phi(x) - p) + (1-t)(\psi(x) - p) \neq 0, \tag{1.2.6}$$

per $x \in \partial D$ i $t \in [0,1]$. Per tant $p \notin h_t(\partial D)$ i, de nou, podem utilitzar la invariància homotòpica de 1.25 per obtenir el resultat. $\square$

Veiem ara una altra propietat del grau, que podríem considerar com una "invariància translacional" del grau.

Proposició 1.31. *Sigui $\phi \in C^0(\overline{D})$ i $p \notin \phi(\partial D)$. Aleshores, $\forall q \in \mathbb{R}^n$, tenim que*

$$d(\phi, D, p) = d(\phi - q, D, p - q). \tag{1.2.7}$$

Demostració. Sigui $\Phi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{Z}$, on $\Phi(t) = d(\phi - tq, D, p - tq)$. Φ està ben definida $\forall t \in [0,1]$ ja que, si existís $t \in [0,1]$ tal que $p - tq \in (\phi - tq)(\partial D)$, aleshores $p \in \phi(\partial D)$, però hem dit que $p \notin \phi(\partial D)$, per tant $p - tq \notin (\phi - tq)(\partial D)$. Això implica que $p - tq$ pertany a la mateixa component $\forall t \in [0,1]$.

Per tant, per la invariància homotòpica i per la constància del grau en components de $\mathbb{R}^n \backslash \phi(\partial D)$, tenim que Φ és contínua. Finalment, com que porta valors a $\mathbb{Z}$, que sigui contínua implica que és constant, i per tant tenim el resultat que volíem. $\square$

Observacions 1.32. El resultat anterior juntament amb el que hem vist al teorema 1.21 és el que ens permet trobar zeros de funcions, resolent l'equació de punt fix equivalent. Només ens cal definir la funció $\psi \equiv \phi - x$. Per l'anterior proposició veiem que $d(\phi, D, x) = d(\psi, D, 0)$ i per tant, si $d(\psi, D, 0) \neq 0$, aleshores $\exists x_0 \in D$ tal que $\phi(x_0) = x_0$ o, equivalentment, $\psi(x_0) = 0$. Aquest mètode és el que utilitzarem per trobar com a mínim una solució de les equacions que estudiarem als capítols 3 i 4. A més, juntament amb la invariància homotòpica del grau i 1.21, ens servirà per demostrar teoremes de punt fix.

Fins ara hem estudiat els canvis del grau respecte ϕ i p. Estudiem breument com varia aquest amb canvis en D.

Teorema 1.33. *(Descomposició del domini) Sigui $p \notin \phi(\partial D)$ i $\phi \in C^0(\overline{D})$. Si podem expressar D com que una unió disjunta no necessàriament finita d'oberts $\{D_i\}_{i\geqslant 0}$, aleshores*

$$d(\phi, D, p) = \sum_{i\geqslant 0} d(\phi, D_i, p). \tag{1.2.8}$$

Demostració. Comencem demostrant que el grau està ben definit $\forall D_i$, és a dir, volem veure que $\partial D_i \subset \partial D$, $\forall D_i$. Així sabrem que $p \notin \phi(\partial D_i)$ per a tot i. Clarament $\partial D_i \subset \overline{D}_i \subset \overline{D}$. Per altra banda, si existís $y \in \partial D_i$ amb $y \notin \partial D$, aleshores $y \in D$. Però això implica que $y \in D_j$ per algun $j \neq i$. Ara bé, com que D_j és obert, existeix un entorn $y \in U \subset D_j$. Però com que $U \cap D_i = \emptyset$, tenim que $y \notin \partial D_i$, que és una contradicció. Per tant $\partial D_i \subset \partial D$, $\forall D_i$.

Ara, sigui $\psi \in C^1(\overline{D})$, amb $p \notin \operatorname{crease} \psi$ i tal que $\|\phi - \psi\|_0 < \rho(p, \phi(\partial D))$.

Com que $\partial D_i \subset \partial D$, tenim que $p \notin \psi(\partial D_i)$, i $|\phi(x) - \psi(x)| < \rho(p, \phi(\partial D_i))$, per $x \in \overline{D}_i$. Per tant, de la definició de grau, $d(\phi, D_i, p) = d(\psi, D_i, p)$, per a tot $i \geqslant 0$. Finalment,

$$\begin{aligned} d(\phi, D, p) =& d(\psi, D, p_i) = \sum_{x\in\psi^{-1}(p)} \operatorname{sgn} J_\psi(x) \\ =& \sum_j \sum_{x\in\psi^{-1}(p)\cap D_j} \operatorname{sgn} J_\psi(x) = \sum_j d(\psi, D_j, p) \\ =& \sum_j d(\phi, D_j, p), \end{aligned} \tag{1.2.9}$$

com volíem demostrar. Notem que el grau està ben definit ja que els sumatoris amb subíndex j són una suma finita, ja que $x \in \psi^{-1}(p)$ és finit i per tant tenim un nombre finit de $d(\psi, D_j, p) \neq 0$. $\square$

Teorema 1.34. *(Propietat d'"escissió") Sigui $p \notin \phi(\partial D)$ i $\phi \in C^0(\overline{D})$. Si $K \subset \overline{D}$ és un subconjunt tancat i $p \notin \phi(K)$, aleshores*

$$d(\phi, D, p) = d(\phi, D\backslash K, p). \tag{1.2.10}$$

Demostració. Operem de forma similar al teorema anterior. Sigui $\psi \in C^1(\overline{D})$ tal que $p \notin \operatorname{crease} \psi$, $\|\phi - \psi\|_0 < \rho(p, \phi(\partial D))$, i $\|\phi - \psi\|_0 < \rho(p, \phi(K))$. Primer veiem que com que K és compacte, aquesta última distància ha de ser major que 0, $\rho(p, \phi(K)) > 0$. Per tant $p \notin \psi(K)$, i tenim

$$\begin{aligned} d(\phi, D, p) &= d(\psi, D, p) \\ &= \sum_{x\in\psi^{-1}(p)\cap D} \operatorname{sgn} J_\psi(x) \\ &= \sum_{x\in\psi^{-1}(p)\cap(D\backslash K)} \operatorname{sgn} J_\psi(x) \\ &= d(\psi, D\backslash K, p), \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

on la tercera igualtat surt de que $\psi^{-1}(p) \cap K = \emptyset$. Ara, tal com hem definit ψ, tenim que $\|\phi - \psi\|_0 < \rho(p, \phi(\partial(D\backslash K)))$, i per tant

$$d(\psi, D\backslash K, p) = d(\phi, D\backslash K, p) \tag{1.2.12}$$

com volíem. $\square$

Observació 1.35. Aquest últim teorema ens permet definir el concepte d'índex d'una solució aïllada de $\phi(x) = p$, també conegut com a índex de Poincaré. Sigui $\phi \in C^0(\overline{D})$ i x_0 un $p - punt$ aïllat de ϕ en D. Sigui $\mathscr{U}$ la col·lecció de tots els entorns oberts de x_0 que no contenen un altre $p - punt$ de ϕ.[7] Si $U_1, U_2 \in \mathscr{U}$, aleshores $U_1 \cup U_2 \in \mathscr{U}$, i a més $d(\phi, U_1, p) = d(\phi, U_1 \cup U_2, p) = d(\phi, U_2, p)$. Aquesta última igualtat és certa ja que

$$\begin{aligned} d(\phi, U_1, p) &= \sum_{x \in \phi^{-1}(p) \cap U_1} \operatorname{sgn} J_\phi(x) \\ &= \sum_{x \in \phi^{-1}(p) \cap (U_1 \cup U_2)} \operatorname{sgn} J_\phi(x) = d(\phi, U_1 \cup U_2, p), \end{aligned} \tag{1.2.13}$$

ja que els tres subconjunts sobre els quals calculem el grau no contenen més de un $p{-}punt$.

Amb aquest resultat podem definir l'índex com:

Definició 1.36. *Definim l'índex $i(\phi, x_0, p)$ de x_0 com el valor comú de $d(\phi, U, p)$, on $U \in \mathscr{U}$.*

Observació 1.37. Malgrat no ho veiem aquí, el grau també es pot definir per a aplicacions definides a varietats. En aquest nou context, l'índex de Poincaré agafa molta rellevància, i de fet es relaciona amb la característica d'Euler de la varietat. El lector interessat en pot trobar una introducció al [11].

1.3 Exemples i aplicacions topològiques

Comencem aquesta secció donant tres exemples de càlcul explícit del grau. Posem aquests exemples pel seu interès. El primer per la seva utilitat en posteriors demostracions. El segon per entendre què és el grau d'una forma visual i amb funcions senzilles com són els polinomis. A l'últim exemple veurem quina relació hi ha entre l'índex d'anàlisi complexa i el grau (ja hem avançat que aquest darrer és una generalització del primer).

1.3.1 Grau de la identitat

Sigui $I : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la identitat, on $D \subset \mathbb{R}^n$ és un subconjunt obert i acotat. Com que $I(x) = x$, clarament $I'(x) = 1 > 0$ i per tant

$$d(I, D, p) = 1, \qquad \forall p \in I(D), \tag{1.3.1}$$

$$d(I, D, p) = 0, \qquad \forall p \notin I(\overline{D}). \tag{1.3.2}$$

A més, si $p \in I(\partial D)$, el grau no està ben definit.

1.3.2 Grau d'un polinomi

Sigui $J = (-x_0, x_0) \subset \mathbb{R}$, $x_0 > 0$. Sigui també $f(x) = \alpha x^k$ un polinomi real definit en $\overline{J} = [-x_0, x_0]$. Suposem $\alpha > 0$. El cas per $\alpha < 0$ és anàleg. Sigui $p \in f(J)$, $p \neq 0$ (és a dir, comencem amb $p \notin$ crease f).

[7] Aquests oberts estan definits dins de D, per tant clarament $U \cap \partial D = \emptyset$, $\forall U$ tal que $x_0 \in U$, i per tant el grau en aquest obert estarà ben definit.

Primer veiem que, $\forall x \neq 0$:

$$f'(x) = \alpha k x^{k-1} = \operatorname{sgn}(x), \qquad \text{si } k \text{ parell,} \tag{1.3.3}$$

$$f'(x) = \alpha k x^{k-1} > 0, \qquad \text{si } k \text{ senar.} \tag{1.3.4}$$

Per altra banda, recordem que els polinomis parells són simètrics en J, per tant $\forall x \in f^{-1}(p)$, $-x \in f^{-1}(p)$. Així doncs, de (1.3.3), si k és parell, obtenim que $\forall p \in f(J)$, $p \neq 0$,

$$d(f, J, p) = \sum_{x \in f^{-1}(p)} \operatorname{sgn} f'(x) = 0. \tag{1.3.5}$$

A més, com que els polinomis senars són bijectius de J a $f(J)$, tenim que $\forall p \in f(J)$, $\exists! x \in f^{-1}(p) \cap J$. Així doncs, de (1.3.4), si k és senar, veiem que $\forall p \in f(J)$, $p \neq 0$:

$$d(f, J, p) = \sum_{x \in f^{-1}(p)} \operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{sgn} f'(f^{-1}(p)) = +1. \tag{1.3.6}$$

Ara veiem que gràcies a la definició del grau per a funcions contínues, els casos que acabem d'estudiar també serveixen per $p \in \operatorname{crease} f$, és a dir, per $p = 0$. A més, $d(f, J, p) = -1$ si $\alpha < 0$, per k senar.

Utilitzem aquests resultats per estudiar el cas d'un polinomi qualsevol definit en el mateix interval $\overline{J}$. Sigui doncs $g(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ i $f(x) = a_n x^n$ polinomis reals definits en $\overline{J}$, $a_n > 0$. Si $|x_0|$ és suficientment gran, aleshores

$$|a_n x_0^n - (a_n x_0^n + ... + a_1 x_0 + a_0)| < |a_n x_0^n|, \tag{1.3.7}$$

ja que podem treure factor comú de x, i si fem $x \longrightarrow x_0$, tenim la desigualtat desitjada (sempre i quan, com hem dit, x_0 sigui suficientment gran). És a dir, $|(f-g)(x_0)| < |f(x_0)|$, o similarment, $g(x_0) > 0$ ja que $f(x_0) > 0$. Així doncs, el punt $p = 0 \notin [f(x_0), g(x_0)]$ i $0 \notin [f(-x_0), g(-x_0)]$. Finalment, pel teorema de Poincaré-Bohl, 1.30,

$$d(f, J, 0) = d(g, J, 0). \tag{1.3.8}$$

1.3.3 El grau com a generalització de l'índex

Demostrarem ara que el grau és una generalització de l'índex ("*winding number*", en anglès) utilitzat en anàlisi complexa. Aquest fet es fa més evident amb la definició topològica del grau, però com que aquí no la desenvolupem, en donem una demostració analítica. Obviem algunes definicions i lemes d'anàlisi complexa, i donem només una idea de la demostració. El lector interessat pot aprofundir-hi a [7], capítol 2.5.

Definició 1.38. *Sigui $D \subset \mathbb{C}$ obert i acotat, i tal que ∂D és una corba C^1 tancada. Sigui $\phi : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ una funció holomorfa, i sigui $p \notin \phi(\partial D)$. Definim l'índex de ϕ a p respecte D com*

$$w(\phi, D, p) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\phi'(z)}{\phi(z) - p} dz. \tag{1.3.9}$$

Teorema 1.39. *Sigui $D \subset \mathbb{C}$ connex, acotat i obert, i tal que ∂D és una corba C^1 tancada. Sigui $\phi : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ una funció holomorfa i sigui $p \notin \phi(\partial D)$. Suposem també que podem expressar $\phi(x + iy) = \phi_1(x, y) + i\phi_2(x, y)$. Aleshores*

$$d(\phi, D, p) = w(\phi, D, p). \tag{1.3.10}$$

Demostració.
Idea de la demostració. Si ϕ és una funció constant o bé $p \notin \phi(\overline{D})$, és immediat veure que $d(\phi, D, p) = w(\phi, D, p) = 0$. Sigui doncs $p \in \phi(D)$ i ϕ no constant. Per la proposició 1.2, $\phi^{-1}(p)$ finit, per exemple, $\phi^{-1}(p) = \{z_1, ..., z_k\}$. Aleshores es pot veure que per cada $j = 1, ..., k$, existeixen $r_j > 0$ i $\phi_j : B(z_j, r_j) \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfes en $B(z_j, r_j)$. A més, les ϕ_j satisfan

$$\phi(z) - p = (\phi_j)^{m_j} = (z - z_j)^{m_j} g_j(z), \qquad \forall z \in B(z_j, r_j), \tag{1.3.11}$$

on $g_j : B(z_j, r_j) \longrightarrow \mathbb{C}$ són holomorfes en $B(z_j, r_j)$ per a tot j, $g_j(z_j) \neq 0$, i on m_j és la multiplicitat de z_j. Per últim, les $\phi_j : B(z_j, r_j) \longrightarrow \phi_j(B(z_j, r_j))$ són bijectives.

Si prenem $R := \min\{r_1, ..., r_j\}$, aleshores tenim que

$$w(\phi, D, p) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_j, R)} \frac{\phi'(z)}{\phi(z) - p} dz. \tag{1.3.12}$$

Si veiem que cada component de la suma és igual a m_j, tindrem que $w(\phi, D, p) = \sum_{j=1}^{k} m_j$. Si derivem (1.3.11), tenim que

$$\int_{\partial B(z_j, R)} \frac{\phi'(z)}{\phi(z) - p} dz = \int_{\partial B(z_j, R)} \frac{m_j}{z - z_j} dz + \int_{\partial B(z_j, R)} \frac{g_j'(z)}{g_j(z)} dz = 2\pi i m_j, \tag{1.3.13}$$

ja que la primera integral és clarament $2\pi i$ perquè la bola envolta z_j, i la segona s'anul·la ja que $g_j(z) \neq 0$ en la bola $B(z_j, R)$ i hi és holomorfa a tota ella. Per tant, $w(\phi, D, p) = \sum_{j=1}^{k} m_j$, com volíem.

Veiem ara que $d(\phi, D, p)$ també és igual a la suma de les multiplicitats m_j. Sigui Ω_p la component connexa de $\mathbb{C} \backslash \phi(\partial D)$ tal que $p \in \Omega_p$. És clar que Ω_p és obert i per tant $\exists \delta_p > 0$ tal que $p + \delta \in \Omega_p$, $\forall |\delta| < \delta_p$. Per tant, com que el grau és constant per components connexes, $d(\phi, D, p) = d(\phi, D, p + \delta)$, $\forall |\delta| < \delta_p$. A més, si considerem $\delta = |\delta| e^{2\pi i \theta}$, $\theta \in [0, 1)$, i l'equació (1.3.11), aleshores l'equació $\phi(z) = p + \delta$ és equivalent a

$$(\phi_j(z))^{m_j} = |\delta| e^{2\pi i \theta}, \qquad \forall z \in B(z_j, R). \tag{1.3.14}$$

Ara bé, com que ϕ_j és injectiva en $B(z_j, R)$, l'equació anterior té exactament m_j solucions diferents per a tot $|\delta| < \delta_1$, $0 < \delta_1 < \delta_p$. Sigui $Z := \{z_j^{m_1}, ..., z_j^{m_j}\}$ el conjunt d'aquestes solucions, i sigui $z_j^l \in Z$. Aleshores, com que $\phi(x + iy) = \phi_1(x, y) + i\phi_2(x, y)$, tenim que $J_\phi(z_j^l) = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y}\right)^2 (z_j^l) \geqslant 0$, d'on $\operatorname{sgn} J_\phi(z_j^l) = 1$, $\forall z_j^l \in Z$. Per tant, utilitzant la definició de grau 1.3, acabem obtenint que

$$d(\phi, D, p) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{m_j} \operatorname{sgn} J_\phi(z_j^l) = \sum_{j=l}^{k} m_j. \tag{1.3.15}$$

Així doncs, $w(\phi, D, p) = d(\phi, D, p)$, com volíem veure. $\square$

Observació 1.40. Hem vist doncs que el grau és una generalització de l'índex. A més, aquesta equivalència ens diu que $d(\phi, D, p)$ depèn només dels valors de ϕ a la frontera de ∂D, com ja hem vist a la propietat 1.28.

1.3.4 El teorema de Brouwer

Acabem el capítol unint la teoria del grau amb la teoria del punt fix. Com ja hem esmentat, utilitzem la naturalesa topològica del grau i les seves propietats per demostrar el teorema del punt fix de Brouwer i un corol·lari que se'n deriva.

Teorema 1.41. *(Teorema de Brouwer) Sigui D un subconjunt obert de $\mathbb{R}^n$ tal que $\overline{D}$ és homeomorf a la bola unitat tancada, $\overline{B}$. Si $\phi \in C^0(\overline{D})$ i $\phi(\overline{D}) \subset \overline{D}$, aleshores ϕ té un punt fix a $\overline{D}$.*

Demostració.
Idea de la demostració. Mitjançant un homeomorfisme h, enviem la funció ϕ a una funció ψ definida sobre $\overline{B}$. Demostrem que ψ té un punt fix relacionant-la amb la identitat mitjançant una homotopia. Utilitzant h de nou, veiem que ϕ també té un punt fix.

Demostració formal. Sigui $h : \overline{D} \longrightarrow \overline{B}$ un homeomorfisme, i sigui $\psi = h \circ \phi \circ h^{-1}$, amb $\psi \in C^0(\overline{B})$ (composició de funcions contínues és contínua) i $\psi(\overline{B}) \subset \overline{B}$. Si $\exists y \in \overline{B}$ tal que $\psi(y) = y$, aleshores $y = \psi(y) = h(\phi(h^{-1}(y)))$, d'on $h^{-1}(y) = \phi(h^{-1}(y))$. Per tant, com que h és un homeomorfisme, $\exists x \in \overline{D}$ amb $y = h(x)$ tal que $\phi(x) = x$. És a dir, si $\exists y \in \overline{B}$ tal que $\psi(y) = y$, aleshores $\exists x \in \overline{D}$ tal que $\phi(x) = x$.

Per tant, ens limitem a demostrar que ψ té un punt fix. Separem la demostració en dos casos. Si $\exists x_0 \in \partial B$ tal que $\psi(x_0) = x_0$, ja estem. Per tant suposem que $\nexists x \in \partial B$ tal que $\psi(x) = x$.

Considerem la homotopia

$$h_t(x) = x - t\psi(x), \quad x \in \overline{B}, \;\; 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{1.3.16}$$

Volem demostrar que $\forall t \in [0,1]$ i $\forall x \in \partial B$, $h_t(x) \neq 0$, per poder aplicar la invariància homotòpica del grau. Suposem que és cert per $t = 1$ perquè altrament tenim $\psi(x) = x$ i per tant ja estem. Per $0 \leqslant t < 1$, $t\psi(x) \in B$ ja que estem multiplicant per una constant $t < 1$, per tant no ens podem quedar a la frontera. Per tant, $h_t(x) \neq 0$ per $0 \leqslant t < 1$. Així doncs, el teorema 1.25 ens assegura que el grau en el 0 es manté $\forall t$. És a dir,

$$d(I - \psi, B, 0) = d(I, B, 0). \tag{1.3.17}$$

Ara, com que $0 \in B$, $d(I, B, 0) = 1$. A més, pel teorema 1.21, $\exists y \in B$ tal que $\psi(y) = y$. Finalment, com que h és un homeomorfisme, $\exists x \in D$ amb $x = h^{-1}(y)$ tal que $\phi(x) = x$, com volíem. □

Queda així demostrat el teorema de Brouwer pel cas general d'un obert homeomorf a la bola unitat. Ara bé, en anàlisi sovint ens interessarà aplicar el resultat a conjunts convexos. Afortunadament, podem veure que tot conjunt convex, acotat, tancat i amb l'interior no buit és homeomorf a la bola unitat tancada, fet que ens permet utilitzar el teorema de Brouwer per a aquest tipus de conjunts. Veiem-ho.

Definició 1.42. *Un conjunt S és convex si $\forall x, y \in S$, el segment $[x, y] \subset S$, on $[x, y] = \{tx + (1-t)y,\ t \in [0,1]\}$.*

Lema 1.43. *Sigui $S \subset \mathbb{R}^n$ convex i tal que $0 \in \operatorname{int} S$. Sigui $\rho_S(x) := \inf\{t > 0 : \frac{x}{t} \in S\}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Aleshores, ρ_S és una funció contínua a $\mathbb{R}^n$ i satisfà:*

1. *Si $x \in S$, aleshores $\rho_S(x) \leqslant 1$.*

2. Si S és acotat, aleshores $\rho_S(x) > 0$ i $\frac{x}{\rho_S(x)} \in \overline{S}$, $\forall x \neq 0$.

Observació 1.44. La demostració de 1. és trivial. La resta es pot trobar demostrat al [7], capítol 3.

Teorema 1.45. *Sigui K un conjunt convex i compacte de $\mathbb{R}^n$ amb l'interior no buit. Aleshores existeix un homeomorfisme $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(K) = \overline{B}$.*

Demostració. Podem suposar $0 \in \operatorname{int} K$. Definim $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tals que

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\rho_K(x)}{|x|} x & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases} \tag{1.3.18}$$

$$g(y) := \begin{cases} \frac{|y|}{\rho_K(y)} y & \text{si} \quad y \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad y = 0. \end{cases} \tag{1.3.19}$$

En primer lloc, és directe veure que $\forall y \neq 0$, tenim que $f \circ g(y) = y$, i $f \circ g(0) = 0$. Per tant, $f \circ g(y) = y$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$, i $g \circ f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, d'on obtenim que f és una bijecció.

A més, tenim que f és contínua $\forall x \neq 0$ pel lema anterior. Ara bé, com que $|f(x) - f(0)| = \rho_K(x)$, tenim que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, i per tant $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$. De forma similar, veiem que $g \in C^0(\mathbb{R}^n)$.

Per acabar, veiem que $f(K) = \overline{B}$. Utilitzant de nou el lema anterior, tenim que si $x \in K$, aleshores $|f(x)| = \rho_K(x) \leqslant 1$, i per tant $f(K) \subset \overline{B}(0,1)$. Sigui ara $y \in \overline{B}(0,1)$. Aleshores $y = f(g(y))$, i $\rho_K(g(y)) = |y| \leqslant 1$, i per tant de nou pel lema anterior, tenim que $\frac{g(y)}{\rho_K(g(y))} \in K$. Ara bé, com que K és convex amb $0 \in \operatorname{int} K$ i $\rho_K(g(y)) \in [0,1]$, tenim que

$$(1 - \rho_K \circ g(y))0 + \rho_K \circ g(y) \frac{g(y)}{\rho_K \circ g(y)} \in K, \tag{1.3.20}$$

d'on $g(y) \in K$. Per tant, $y \in f(K)$ i $\overline{B}(0,1) \subset f(K)$, com volíem. $\square$

Acabem el capítol provant un resultat molt similar al teorema de Brouwer, però utilitzant condicions geomètriques enlloc de topològiques.

Teorema 1.46. *Sigui $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunt obert i acotat, i sigui $\phi \in C^0(\overline{D})$. Si $\exists \omega \in D$ tal que $\forall x \in \partial D$ i $\forall \mu > 1$*

$$\phi(x) - \omega \neq \mu(x - \omega), \tag{1.3.21}$$

aleshores ϕ té un punt fix a $\overline{D}$.

Demostració. Com abans, suposem que no hi ha cap punt fix a la frontera ∂D. Definim la homotopia

$$h_t(x) = x - \omega - t(\phi(x) - \omega), \quad x \in \overline{D}, \ 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{1.3.22}$$

Volem veure que $h_t(x) \neq 0$ $\forall t$. Com que per hipòtesi $\phi(x) - \omega \neq \mu(x - \omega)$, $\forall \mu$, fent $t^{-1} = \mu$, ja estem per $0 < t < 1$. Per $t = 0$ també estem perquè $x \in \partial D$ i $\omega \in D$. I per $t = 1$ tenim el resultat per hipòtesi. Per tant, aplicant de nou el teorema 1.25, tenim que

$$d(I - \omega, D, 0) = d(I - \phi, D, 0). \tag{1.3.23}$$

Veiem però que per la proposició 1.31, $d(I - \omega, D, 0) = d(I, D, \omega)$, i com que $\omega \in D$, $d(I, D, \omega) = 1$. Per tant, pel teorema 1.21, ϕ té un punt fix a D. $\square$

2 Teoria del grau en espais de dimensió infinita

En aquest segon capítol ens proposem estendre la teoria estudiada fins ara a espais normats reals de dimensió infinita. Al teorema 1.20, hem vist que tot el que hem estudiat al capítol 1 per a funcions definides a $\mathbb{R}^n$, també és vàlid per a espais normats de dimensió finita. Ara generalitzarem els resultats encara més, prenent espais normats de dimensió arbitrària.

Així doncs, sigui $(X, \|\cdot\|)$ un espai normat real qualsevol, $D \subset X$ un subconjunt obert i acotat, sigui $p \in X$ i sigui ρ la distància induïda per la norma $\|\cdot\|$. Una forma lògica i habitual de generalitzar teories a espais menys restringits és imposar que certes propietats, les més útils i fonamentals, es conservin. Recuperant les observacions 1.6, ens interessarà, donada una classe de funcions $\phi : D \longrightarrow X$, definir un enter $d(\phi, D, p)$ tal que

1. $d(I, D, p) = +1$ si $p \in D$, $d(I, D, p) = 0$ si $p \notin \overline{D}$,
2. si $d(\phi, D, p) \neq 0$, aleshores $\phi(x) = p$ per alguna $x \in D$,
3. si $h_t(x)$ és una homotopia amb $p \notin h_t(\partial D)$ per a tot $t \in [0, 1]$, aleshores $d(h_t, D, p)$ és independent de t.

Observacions 2.1.

1. Per què escollim aquestes tres propietats com a "fonamentals" en el sentit que volem mantenir-les també en la generalització a espais de dimensió infinita? És lògic ja que, com hem vist en el capítol anterior, la resta de propietats, així com els teoremes de punt fix, sovint es deriven d'aquestes tres.
2. Per a espais de dimensió finita hem pogut definir el grau per a funcions contínues. Ara bé, generalitzar la teoria a espais normats de dimensió infinita té un preu. Es pot veure (cf. [13]) que la continuïtat no és suficient per definir el grau en aquest nou context, i per tant ens haurem de restringir a una classe de funcions més estricte; pertorbacions compactes de la identitat.
3. A partir d'ara i per adaptar-nos al context d'espais normats, no parlarem de funcions, sinó que ens referirem a ϕ com a operador. Són conceptes totalment anàlegs, però l'ús de la paraula operador és més habitual quan treballem amb espais normats de dimensió infinita.
4. El grau en aquest context sovint s'anomena "*grau de Leray-Schauder*" en honor als matemàtics que primer ho van introduir, com ja hem comentat a la introducció. Nosaltres utilitzarem *grau* o *grau de Leray-Schauder* indistintament.

2.1 Definició del grau de Leray-Schauder

Ens proposem doncs definir el grau a espais normats de dimensió infinita. Comencem definint què és un operador compacte i una pertorbació compacta de la identitat.

Definició 2.2. *Siguin E, F espais normats reals, i sigui $M \subset E$. L'aplicació $T : M \longrightarrow F$ és compacta si*

- *T és contínua*

- *$\forall A \subset M$ subconjunt acotat, $T(A)$ és un conjunt relativament compacte de F, és a dir, $\overline{T(A)}$ és compacte.*

Definició 2.3. *Sigui $(X, \|\cdot\|)$ un espai normat de dimensió arbitrària, $D \subset X$ un subconjunt obert i acotat i $T : \overline{D} \longrightarrow X$ un operador compacte. Diguem que $\phi : \overline{D} \longrightarrow X$ és una pertorbació compacta de la identitat si té la forma $\phi = I - T$.*

Enunciem i demostrem ara un teorema fonamental que ens dona un lligam entre els espais de dimensió finita i aquells de dimensió infinita, i que ens servirà de pont per definir el grau en aquest nou context. De forma informal, ens diu que els operadors amb imatge de dimensió finita són densos respecte els operadors compactes amb imatge de dimensió infinita.

Teorema 2.4. *Siguin E, F espais normats reals, $M \subset E$ un subconjunt acotat, i $T : M \longrightarrow F$ un operador compacte. Donat $\varepsilon > 0$, existeix una aplicació contínua $T_\varepsilon : M \longrightarrow F$ tal que la imatge $T_\varepsilon(M)$ és de dimensió finita i tal que $\|T(u) - T_\varepsilon(u)\| < \varepsilon$, $\forall u \in M$.*

Demostració. En primer lloc veiem que com que $\overline{T(M)}$ és compacte, existeix un recobriment finit de boles obertes de F de radi ε, $B(y_i, \varepsilon)$, $i = 1, ..., N$, amb $y_i \in \overline{T(M)}$ i tal que $\overline{T(M)} \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(y_i, \varepsilon)$. Ara, per $x \in M$ i $i = 1, ..., N$, definim l'aplicació

$$\mu_i(x, \varepsilon) := \max\{0, \varepsilon - \|T(x) - y_i\|\}. \tag{2.1.1}$$

Clarament μ_i és contínua en M i $\mu_i \geqslant 0$, $\forall i \in \{1, ..., N\}$ i $\forall x \in M$. A més, $\forall x \in M$, $T(x)$ pertany a alguna bola $B(y_i, \varepsilon)$, i per tant $\exists i$ tal que $\mu_i(x, \varepsilon) \neq 0$. Si ara definim, de nou per $x \in M$ i $i = 1, ..., N$,

$$\lambda_i(x, \varepsilon) := \frac{\mu_i(x, \varepsilon)}{\sum_{k=1}^{N} \mu_k(x, \varepsilon)}, \tag{2.1.2}$$

tenim que l'aplicació λ_i està ben definida per a tot i ja que el denominador mai s'anul·la, i també és contínua per definició. A més, clarament, $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$.

Definim també l'operador $T_\varepsilon : M \longrightarrow F$ com

$$T_\varepsilon(x) := \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x, \varepsilon) y_i, \quad x \in M. \tag{2.1.3}$$

És clar que T_ε és continu en M i $T_\varepsilon(M) \subset \operatorname{span}\{y_1, ..., y_N\}$ (de la definició es veu clarament que n'és una combinació lineal).[8] Ara veiem que $\forall x \in M$,

$$T(x) - T_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x, \varepsilon)(T(x) - y_i), \tag{2.1.4}$$

però com que $\lambda_i \neq 0$ només si $\|T(x) - y_i\| < \varepsilon$ i $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$, acabem obtenint que

$$\|T(x) - T_\varepsilon(x)\| \leqslant \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x, \varepsilon)\|T(x) - y_i\| < \varepsilon, \quad \forall x \in M, \tag{2.1.5}$$

com volíem veure. □

[8] Recordem que donat un conjunt de vectors $A \subset V$, on V espai vectorial, $\operatorname{span} A$ és el subespai vectorial de V generat per A.

Enunciem també un resultat que, de forma naïf, ens diu que el grau d'una funció a $\mathbb{R}^n$ és el mateix que el grau de la mateixa funció definida a $\mathbb{R}^m$, $m \leqslant n$. No el demostrem aquí, però el podem trobar demostrat a [10], lema 4.2.3.

Proposició 2.5. *Sigui $m \leqslant n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunt obert i acotat, i $\phi \in C^0(\overline{D}, \mathbb{R}^m)$. Sigui $\psi : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definit per $\psi(x) = x + \phi(x)$, $x \in \overline{D}$. Si $p \in \mathbb{R}^m \backslash \psi(\partial D)$, aleshores*

$$d(\psi, D, p) = d(\psi|_{\mathbb{R}^m \cap \overline{D}}, \mathbb{R}^m \cap D, p). \tag{2.1.6}$$

A partir d'ara, considerem ϕ una pertorbació compacta de la identitat definida com a 2.3, i suposem també que $p \notin \phi(\partial D)$.

Per definir el grau, utilitzarem la densitat de l'espai de funcions que ens dona el teorema 2.4, així com l'equivalència del grau entre diferents espais de la proposició 2.5. Ara bé, el teorema ens dona una dependència de l'operador respecte un $\varepsilon > 0$, i a nosaltres òbviament ens interessa que el grau sigui independent d'aquest ε. Així doncs, abans de definir-lo, ens cal fer algunes justificacions.

Lema 2.6. *Sigui $r = \rho(p, \phi(\partial D))$, és a dir, $r = \inf\{\|p - \phi(x)\|, x \in \partial D\}$. Aleshores $r > 0$.*

Demostració. Primer veiem que si $r = 0$, aleshores ens podem aproximar a p des del conjunt $\phi(\partial D)$ tant com vulguem, en concret podem prendre una successió $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ∂D tal que $\phi(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} p$ (sense això implicar, de moment, que $p \in \phi(\partial D)$, ja que $\phi(\partial D)$ no és necessàriament compacte). Per altra banda, com que T és compacte i la successió entesa com a conjunt $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és acotada, tenim que $T(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ és relativament compacte, per tant existeix una subsuccessió convergent de $\overline{T(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})}$. Suposarem, sense perdre generalitat, que $T(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} y$. Aleshores $y \in \overline{T(D)}$ i, per definició de $\phi(x)$, podem fer $x_n = \phi(x_n) + T(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} p + y$. Utilitzant que ∂D és un conjunt tancat i que $x_n \in \partial D$, tenim que $y + p \in \partial D$.

Per altra banda, utilitzant la continuïtat de T podem traslladar el límit dins de l'operador, és a dir, obtenim que $y = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = T(y+p)$. Per tant, $\phi(y+p) = y + p - T(y+p) = p$, és a dir, $p \in \phi(\partial D)$, ja que $y + p \in \partial D$. Arribem a una contradicció, i per tant $r > 0$. $\square$

Prenem ara ε tal que $0 < \varepsilon < r$. Pel teorema 2.4, existeix una aplicació contínua $T_\varepsilon : \overline{D} \longrightarrow X$ amb imatge de dimensió finita i tal que $\|T(x) - T_\varepsilon(x)\| < \varepsilon$, $\forall x \in \overline{D}$. A més, considerem $\mathcal{S}_\varepsilon$ l'espai normat de dimensió finita generat per $T_\varepsilon(\overline{D})$ i p, és a dir, $\mathcal{S}_\varepsilon = \operatorname{span}\{T_\varepsilon(\overline{D}), p\}$. Tenim el lema següent.

Lema 2.7. *Siguin $p \notin \phi(\partial D)$, $\mathcal{S}_\varepsilon$, $D_\varepsilon = D \cap \mathcal{S}_\varepsilon$ i $\phi_\varepsilon(x) = x - T_\varepsilon(x)$, $x \in \overline{D}$.*

Aleshores, D_ε és un subconjunt acotat i obert de $\mathcal{S}_\varepsilon$, $\partial_\varepsilon D_\varepsilon \subset \partial D$, i $\phi_\varepsilon(\overline{D}_\varepsilon) \subset \mathcal{S}_\varepsilon$, on $\partial_\varepsilon D_\varepsilon$ és la frontera de D_ε a $\mathcal{S}_\varepsilon$. A més, donat $x \in \partial D$, $\|\phi_\varepsilon(x) - p\| > 0$.

Demostració. Cal provar les cinc propietats esmentades. Que D_ε és obert és directe per la pròpia definició d'obert respecte la topologia induïda en el subespai $\mathcal{S}_\varepsilon$. Per veure que D_ε és acotat en el subespai $\mathcal{S}_\varepsilon$ utilitzem la definició de conjunt acotat en un espai mètric. És a dir, si D és acotat en X, aleshores $\exists B \subset X$ una bola oberta tal que $D \subset B$. Intersecant amb $\mathcal{S}_\varepsilon$, obtenim que $D_\varepsilon \subset B_\varepsilon$, on $B_\varepsilon = B \cap \mathcal{S}_\varepsilon$, que és una bola oberta de $\mathcal{S}_\varepsilon$ amb la distància del subespai mètric.

Per altra banda, veiem que $\partial_\varepsilon D_\varepsilon \subset \partial D$. Per veure la inclusió veiem que si $x \in \partial_\varepsilon D_\varepsilon = \overline{D_\varepsilon} \cap \overline{\mathcal{S}_\varepsilon \backslash D_\varepsilon}$, aleshores $x \in \overline{D_\varepsilon} = \overline{D \cap \mathcal{S}_\varepsilon} \subset \overline{D}$. Per altra banda, tenim que $x \in \overline{\mathcal{S}_\varepsilon \backslash D_\varepsilon} = \overline{(\mathcal{S}_\varepsilon \backslash \mathcal{S}_\varepsilon) \cup (\mathcal{S}_\varepsilon \backslash D)} = \overline{\mathcal{S}_\varepsilon \backslash D} \subset \overline{X \backslash D}$. Per tant, tenim que $x \in \overline{X \backslash D} \cap \overline{D} = \partial D$, com volíem veure.

Per últim, com que $I(\overline{D}_\varepsilon) = \overline{D}_\varepsilon \subset \overline{\mathcal{S}_\varepsilon} = \mathcal{S}_\varepsilon$ i $T_\varepsilon(\overline{D}_\varepsilon) \subset \mathcal{S}_\varepsilon$ per definició de $\mathcal{S}_\varepsilon$, tenim que $\phi_\varepsilon(\overline{D}_\varepsilon) \subset \mathcal{S}_\varepsilon$. A més, veiem que donat $x \in \partial D$,

$$\|\phi_\varepsilon(x) - p\| = \|x - T_\varepsilon(x) - p\| \geqslant \|x - T(x) - p\| - \|T(x) - T_\varepsilon(x)\| > r - \varepsilon > 0, \quad (2.1.7)$$

on a la igualtat hem utilitzat la definició de ϕ_ε ia la segona desigualtat hem utilitzat el lema 2.6 i el teorema 2.4. Queda així demostrat el lema. □

Observació 2.8. Del lema anterior i utilitzant la definició del grau per espais de dimensió finita, veiem que el grau $d(\phi_\varepsilon, D_\varepsilon, p)$ està ben definit, ja que $\phi_\varepsilon : D_\varepsilon \longrightarrow X$ és contínua i la imatge és un espai de dimensió finita, i $p \notin \phi_\varepsilon(\partial D_\varepsilon)$. Veiem ara que en realitat aquest grau no depèn del ε escollit.

Lema 2.9. *Donat* $0 < \varepsilon < r$*, el grau* $d(\phi_\varepsilon, D_\varepsilon, p)$ *és independent de* ε.

Demostració. Siguin $\varepsilon, \eta \in (0, r)$, i siguin $\mathcal{S}_\varepsilon, \mathcal{S}_\eta$, $\phi_\varepsilon, \phi_\eta$ i D_ε, D_η definits com a 2.7. Siguin també $\mathcal{S}_\mu = \operatorname{span}\{\mathcal{S}_\varepsilon, \mathcal{S}_\eta\}$, i $D_\mu = D \cap \mathcal{S}_\mu$. La proposició 2.5 ens assegura que $d(\phi_\varepsilon, D_\mu, p) = d(\phi_\varepsilon, D_\varepsilon, p)$ i que $d(\phi_\eta, D_\mu, p) = d(\phi_\eta, D_\eta, p)$, amb ϕ_ε i ϕ_η restringides a l'espai corresponent. Si considerem la homotopia

$$h_t(x) = t\phi_\varepsilon(x) + (1-t)\phi_\eta(x), \qquad x \in \overline{D}_\mu, \;\; t \in [0,1], \quad (2.1.8)$$

aleshores obtenim que

$$\|h_t(x) - \phi(x)\| \leqslant t\|\phi_\varepsilon(x) - \phi(x)\| + (1-t)\|\phi_\eta(x) - \phi(x)\| < t\varepsilon + (1-t)\eta < r, \quad (2.1.9)$$

on hem utilitzat desigualtat triangular i el teorema 2.4. Per tant, per $x \in \partial D$, tenim que $\|h_t(x) - p\| \geqslant \|\phi(x) - p\| - \|\phi(x) - h_t(x)\| > 0$. Ara podem utilitzar la invariància homotòpica 1.25 per veure que $d(\phi_\varepsilon, D_\mu, p) = d(\phi_\eta, D_\mu, p)$ i per tant $d(\phi_\varepsilon, D_\varepsilon, p) = d(\phi_\varepsilon, D_\mu, p) = d(\phi_\eta, D_\mu, p) = d(\phi_\mu, D_\mu, p)$, com volíem veure. □

Finalment, i ja abans de definir el grau formalment, considerem qualsevol $V \subset \mathcal{S}_\varepsilon$ subespai de dimensió finita, amb $0 < \varepsilon < r$. La proposició 2.5 ens assegura que $d(\phi_\varepsilon, D_\varepsilon, p) = d(\phi_\varepsilon, D_V, p)$. Amb totes aquestes consideracions ja estem en condicions de definir el grau de Leray-Schauder.

Definició 2.10. *Sigui* $D \subset X$ *obert i acotat,* $\phi = I - T$*, on* $T : \overline{D} \longrightarrow X$ *és un operador compacte, i* $p \notin \phi(\partial D)$*. Sigui també* $\hat{\phi} = I - \hat{T} : \overline{D} \longrightarrow X$*, on* $\hat{T}$ *és un operador continu definit a* $\overline{D}$ *amb imatge de dimensió finita i tal que* $\forall x \in \overline{D}$, $\|T(x) - \hat{T}(x)\| < \rho(p, \phi(\partial D))$*. Sigui* V *un espai vectorial de dimensió finita i tal que* $\hat{T}(\overline{D}) \subset V$, $p \in V$*. Sigui* $D_V = D \cap V$*. Definim*

$$d(\phi, D, p) := d(\hat{\phi}, D_V, p). \quad (2.1.10)$$

Observació 2.11. Gràcies a totes les consideracions fetes anteriorment, és clar que el grau està ben definit.

2.2 Propietats del grau de Leray-Schauder

Passem ara a estudiar les propietats del grau que acabem de definir. Veurem que, malgrat haver limitat bastant la classe de funcions per a les quals definim el grau, hem mantingut la majoria de propietats que teníem per a espais de dimensió finita, entre elles les tres propietats "fonamentals" comentades a l'inici del capítol.

Seguim amb la notació de la secció anterior i hi afegim les següents definicions. Donat $M \subset X$, denotem per $K(M)$ el conjunt d'operadors compactes de M a X, i $K_1(M) = \{\phi : \phi = I - T, T \in K(M)\}$ el conjunt de les pertorbacions compactes de la identitat de M a X.

Teorema 2.12. *Si $p \in D$, aleshores $d(I, D, p) = +1$. Si $p \notin \overline{D}$, aleshores $d(I, D, p) = 0$.*

Demostració. Per aplicar la definició 2.10 a $\phi = I$, només ens cal prendre $\hat{T} = 0$, i V qualsevol subespai contenint p. El resultat ara és immediat utilitzant el resultat obtingut pel cas de dimensió finita desenvolupat a 1.3.1. □

Teorema 2.13. *Sigui $\phi \in K_1(\overline{D})$ i $d(\phi, D, p) \neq 0$. Aleshores $\exists q \in D$ tal que $\phi(q) = p$.*

Demostració. En primer lloc veiem que per tot $n > \frac{1}{\rho(p,\phi(\partial D))} =: \beta$, podem definir $T_n : \overline{D} \longrightarrow X$ tal que $\|T_n(x) - T(x)\| < \frac{1}{n}$, $\forall x \in \overline{D}$, i tal que $T_n(\overline{D})$ té dimensió finita.

Sigui $\mathcal{S}_n := \text{span}\{T_n(\overline{D}), p\}$, $\phi_n = I - T_n$, i $D_n := D \cap \mathcal{S}_n$. Aleshores, de la definició 2.10 i utilitzant la hipòtesi de l'enunciat, tenim que

$$d(\phi_n, D_n, p) = d(\phi, D, p) \neq 0. \tag{2.2.1}$$

Com que el grau és no nul, podem utilitzar el resultat equivalent per a espais de dimensió finita, 1.21, aplicat a ϕ_n, és a dir, $\exists x_n \in D_n$ tal que $x_n - T_n(x_n) = p$.

Ara bé, com que $T : \overline{D} \longrightarrow X$ és una aplicació compacta i la successió $(x_n)_{n \geqslant \beta}$ entesa com a conjunt, $\{x_n\}_{n \geqslant \beta}$, és acotada, aleshores el conjunt $T(\{x_n\}_{n \geqslant \beta})$ és relativament compacte i podem suposar que la successió $T(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} y \in X$. Per tant, $x_n \xrightarrow{n \to \infty} p + y \in \overline{D}$. Finalment, podem utilitzar la continuïtat de ϕ per passar el límit a fora de l'operador, i per tant,

$$\phi(y + p) = \lim_{n \to \infty} \phi(x_n) = \lim_{n \to \infty} x_n - T(x_n) = p. \tag{2.2.2}$$

Ara, com $p \notin \phi(\partial D)$, tenim que $y + p \in D$ i per tant l'equació $\phi(x) = p$ admet la solució $x = p + y \in D$. □

Per a demostrar l'última propietat "fonamental", és a dir, la invariància homotòpica, cal que primer definim correctament el concepte d'homotopia per a transformacions compactes, similar a la definició de continuïtat uniforme.

Definició 2.14. *Sigui $M \subset X$, i sigui $h : [0, 1] \times \overline{D} \longrightarrow X$ una aplicació. Diguem que h és una homotopia de transformacions compactes sobre M si*

1. *$h_t(\cdot) \in K(M)$, $\forall t \in [0, 1]$,*
2. *donat $\varepsilon > 0$ i $L \subset M$ acotat, $\exists \delta(\varepsilon, L) > 0$ tal que si $|t - s| < \delta$ amb $t, s \in [0, 1]$, aleshores*

$$\|h_t(x) - h_s(x)\| < \varepsilon, \quad \forall x \in L. \tag{2.2.3}$$

Teorema 2.15. *Sigui $h : [0,1] \times \overline{D} \longrightarrow X$ una homotopia de transformacions compactes definida a $\overline{D}$. Sigui $\phi_t := I - h_t$, per a tot $t \in [0,1]$. Sigui p tal que $p \notin \phi_t(\partial D)$, $\forall t \in [0,1]$. Aleshores $d(\phi_t, D, p)$ és independent de $t \in [0,1]$.*

Demostració. En primer lloc ens cal veure que $\exists r > 0$ tal que $\|p - \phi_t(x)\| \geqslant r$, $\forall x \in \partial D$, $t \in [0,1]$. Procedim de forma molt similar al lema 2.6. Suposem doncs que $r = 0$, i que per tant existeixen dues successions $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[0,1]$ i ∂D, respectivament, tals que $\|p - \phi_{t_n}(x_n)\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Com que la successió $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ entesa com a conjunt és relativament compacte aleshores té una subsuccessió convergent, que podem suposar $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \tau \in [0,1]$. De la mateixa manera, com que $h_\tau(\cdot)$ és una aplicació compacta, aleshores $\{h_\tau(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ també té una subsuccessió convergent, per exemple, $h_\tau(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} y \in X$. Tenim doncs que

$$\begin{aligned} p &= \lim_{n\to\infty} \phi_{t_n}(x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} [x_n - h_\tau(x_n)] + [h_\tau(x_n) - h_{t_n}(x_n)] \\ &= \lim_{n\to\infty} (x_n - y), \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

on hem utilitzat que $h_t(x)$ és una homotopia de transformacions compactes i per tant $\lim_{n\to\infty}(h_\tau(x_n) - h_{t_n}(x_n)) = 0$. És a dir, obtenim que

$$p + y = \lim_{n\to\infty} x_n \in \partial D. \tag{2.2.5}$$

A més, de nou perquè h és una homotopia de transformacions compactes, tenim que

$$\lim_{n\to\infty} h_{t_n}(x_n) = \lim_{n\to\infty} (h_{t_n}(x_n) - h_\tau(x_n)) + h_\tau(x_n) = y. \tag{2.2.6}$$

Així doncs i amb tot el que hem vist,

$$\phi_\tau(y + p) = y + p - y = p \in \phi(\partial D), \tag{2.2.7}$$

que és una contradicció, i per tant $\exists r > 0$ tal que $\|p - \phi_t(x)\| \geqslant r$, $\forall x \in \partial D$, $t \in [0,1]$. Definim ara una relació en $[0,1]$ definida com

$$t\mathcal{R}s \iff d(h_t, D, p) = d(h_s, D, p). \tag{2.2.8}$$

És immediat veure que $\mathcal{R}$ defineix una relació d'equivalència. Si veiem que les classes d'equivalència de $\mathcal{R}$ són oberts de $[0,1]$, aleshores, com que $[0,1]$ és un conjunt connex, $\mathcal{R}$ admet només una classe d'equivalència, i per tant $0\mathcal{R}1$, com volem veure.

Sigui doncs $s \in [0,1]$ i sigui $r := \rho(p, \phi_s(\partial D))$. Del lema 2.6 tenim que $r > 0$. Prenem també $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}r$. Del teorema 2.4, existeix una aplicació compacta $\hat{h}_{\varepsilon,s} : \overline{D} \longrightarrow X$ tal que $\hat{h}_{\varepsilon,s}(\overline{D})$ és de dimensió finita i tal que

$$\|\hat{h}_{\varepsilon,s}(x) - h_s(x)\| < \varepsilon, \quad \forall x \in \overline{D}. \tag{2.2.9}$$

Per altra banda, com que $h_t(x)$ és una homotopia de transformacions compactes, $\exists \delta > 0$ tal que si $|t - s| < \delta$, aleshores

$$\|h_t(s) - h_s(x)\| < \varepsilon \quad \forall x \in \overline{D}, t \in [0,1]. \tag{2.2.10}$$

Per tant, de (2.2.9) i (2.2.10), tenim que si $|t - s| < \delta$ i $\forall x \in \overline{D}$,

$$\|h_t(x) - \hat{h}_{\varepsilon,s}(x)\| < 2\varepsilon. \tag{2.2.11}$$

Sigui ara $V_\varepsilon = \operatorname{span}\{p, \hat{h}_{\varepsilon,s}(\overline{D})\}$ el subespai de dimensió finita més petit generat per p i $\hat{h}_{\varepsilon,s}(\overline{D})$. Sigui també $D_\varepsilon := D \cap V_\varepsilon$. Aleshores, de la definició del grau 2.10, tenim que

$$\begin{aligned} d(I - \hat{h}_{\varepsilon,s}, D_\varepsilon, p) &= d(I - h_s, D, p), \quad \text{i} \\ d(I - \hat{h}_{\varepsilon,s}, D_\varepsilon, p) &= d(I - h_t, D, p), \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

on hem usat l'equació (2.2.9) i (2.2.11), respectivament. És a dir,

$$d(\phi_t, D, p) = d(I - h_t, D, p) = d(I - h_s, D, p) = d(\phi_s, D, p), \tag{2.2.13}$$

com volíem veure. Per tant, com que $t\mathcal{S}s$, $\mathcal{S}$ només té una relació d'equivalència, $0\mathcal{S}1$ i, per acabar, $d(\phi_t, D, p)$ és independent de $t \in [0,1]$. □

Amb aquestes tres propietats, anem a veure'n unes quantes més que es dedueixen de forma bastant directa, sobretot fent ús de la invariància homotòpica, com hem fet per a espais de dimensió finita.

Teorema 2.16. *Siguin $\phi, \psi \in K_1(\overline{D})$ tal que $\phi(x) = \psi(x)$, $\forall x \in \partial D$. Aleshores, si $p \notin \phi(\partial D)$,*

$$d(\phi, D, p) = d(\psi, D, p). \tag{2.2.14}$$

Demostració. Com que $\phi, \psi \in K_1(\overline{D})$, els podem expressar com $\phi = I - T_1$ i $\psi = I - T_2$ on $T_1, T_2 \in K(\overline{D})$. Considerem la homotopia $\phi_t(x) = I - h_t(x)$, on $h_t(x) = tT_1(x) + (1-t)T_2(x)$, $\forall x \in \overline{D}$ i $\forall t \in [0,1]$. Com que T_1 i T_2 són operadors compactes i per tant continus, és clar que h és una homotopia de transformacions compactes sobre $\overline{D}$.

Ara, si $x \in \partial D$,

$$\phi_t(x) = x - t(x - \phi(x)) - (1-t)(x - \psi(x)) = t\phi(x) + (1-t)\psi(x) = \phi(x). \tag{2.2.15}$$

Per tant, com que $p \notin \phi(\partial D)$, tenim que $p \notin \phi_t(\partial D)$ i aleshores podem utilitzar la invariància homotòpica 2.15, per obtenir el resultat desitjat. □

Proposició 2.17. *Sigui $\phi(x) \in K_1(\overline{D})$, $p \notin \phi(\partial D)$ i $q \in X$. Aleshores*

$$d(\phi, D, p) = d(\phi - q, D, p - p). \tag{2.2.16}$$

Demostració. Sigui $\phi_1 = \phi(x) - q$, $\forall x \in \overline{D}$, i siguin $\phi = I - T$ i $\phi_1 = I - T_1$, on $T_1(x) = T(x) + q$. Sigui $\hat{T}$ que aproxima T segons la definició 2.10. Si anomenem $\hat{T}_1(x) = \hat{T}(x) + q$, aleshores $\|\hat{T}_1(x) - T_1(x)\| < r = \rho(p - q, \phi_1(\partial D))$, per a $x \in \overline{D}$. Prenem un espai vectorial de dimensió finita V tal que $\hat{T}(D), \hat{T}_1(D) \subset V$, tal que $p, p - q \in V$, i a més definim $D_V = D \cap V$. Aleshores, si $\hat{\phi} = I - \hat{T}$ i $\hat{\phi}_1 = I - \hat{T}_1$, tenim que

$$d(\phi, D, p) = d(\hat{\phi}, D_V, p), \tag{2.2.17}$$

$$d(\phi_1, D, p - q) = d(\hat{\phi}_1, D_V, p - q), \tag{2.2.18}$$

per definició del grau. Però pel resultat anàleg en dimensió finita, 1.31, tenim $d(\hat{\phi}, D_V, p) = d(\hat{\phi}_1, D_V, p - q)$, i per tant tenim el resultat desitjat. □

Teorema 2.18. *Sigui $\phi \in K_1(\overline{D})$ i $p \notin \phi(\partial D)$. Si $\psi \in K_1(\overline{D})$ i $\|\phi(x) - \psi(x)\| < \rho(p, \phi(\partial D)) =: r$, $\forall x \in \overline{D}$, aleshores $p \notin \psi(\partial D)$ i*

$$d(\phi, D, p) = d(\psi, D, p). \tag{2.2.19}$$

Demostració. Sigui $h_t(x) = t\psi(x) + (1-t)\phi(x)$, $\forall x \in \overline{D}$ i $\forall t \in [0,1]$ una homotopia de pertorbacions compactes de la identitat. Aleshores, si $x \in \partial D$,

$$\begin{aligned} \|t\psi(x) + (1-t)\phi(x) - p\| &= \|t(\psi(x) - \phi(x)) + (\phi(x) - p)\| \\ &\geqslant \|p - \phi(x)\| - t\|\psi(x) - \phi(x)\| \\ &> r(1-t). \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

Per tant $p \notin h_t(\partial D)$ $\forall t \in [0,1]$. Per tant, utilitzant la invariància homotòpica 2.15, tenim, de nou, el resultat desitjat. □

Teorema 2.19. *Sigui $\phi \in K_1(\overline{D})$. Aleshores $d(\phi, D, p)$ és constant per a tot p en la mateixa component de $X \backslash \phi(\partial D)$.*

Demostració. Sigui $B(p,\varepsilon) \subset X\backslash\phi(\partial D)$, i prenem $q \in B(p,\varepsilon)$. Aleshores, pel teorema 2.17 tenim que $d(\phi, D, q) = d(\phi - (q-p), D, p)$. Per altra banda, pel teorema 2.18, $d(\phi-(q-p), D, p) = d(\phi, D, p)$, ja que $\|\phi(x)-(q-p)-\phi(x)\| = \|p-q\| < \rho(p, \phi(\partial D))$, per a ε prou petit. Així doncs, $d(\phi, D, q) = d(\phi, D, p)$. És a dir, la funció $p \longmapsto d(\phi, D, p) \in \mathbb{Z}$ és una funció contínua en cada component $X\backslash\phi(\partial D)$. Com que envia p a un enter, que sigui contínua vol dir que és constant en cada component connexa, com volíem veure. □

Observació 2.20. Acabem així la llista de propietats del grau de Leray-Schauder. N'hem obviat unes quantes, com ara la variació del grau respecte el domini D. No les veiem ja que no són rellevants per a la connexió del grau amb la teoria del punt fix. Les demostracions són totalment anàlegues al cas de dimensió finita. De tota manera, el lector interessat les pot trobar, per exemple, al [7].

2.3 Teoremes de punt fix. El teorema de Schauder

Per acabar, i de forma similar al capítol 1, veiem un seguit de teoremes de punt fix, entre ells el teorema de Schauder, que és l'objectiu final d'aquesta primera part del treball. Aquest serà fonamental per a les aplicacions que desenvoluparem posteriorment.

Comencem amb una definició i un lema previs.

Definició 2.21. *Sigui X un espai normat. Diguem que $S \subset X$ té la propietat de punt fix si tot operador continu $\phi : S \longrightarrow S$ té un punt fix.*

Lema 2.22. *Sigui $S \subset X$ convex i tal que $\operatorname{int} S \neq \emptyset$. Aleshores $\overline{\operatorname{int} S} = \overline{S}$. A més, $\partial S = \partial(\operatorname{int} S)$.*

Demostració. Veiem primer que $\overline{\operatorname{int} S} = \overline{S}$. La inclusió d'esquerra a dreta és directa. Siguin ara $x \in \operatorname{int} S$, $y \in S$, que els podem prendre ja que $\operatorname{int} S \neq \emptyset$, i suposem $x \neq y$. Sigui també $x_\lambda := (1-\lambda)x + \lambda y$, $\lambda \in (0,1)$. Com que $x \in \operatorname{int} S$, aleshores $\exists B(x,\varepsilon) \subset S$, per algun $\varepsilon > 0$. A més, com que $y \in S$ i S convex, tenim que $\forall \lambda \in [0,1)$,

$$B_\lambda := (1-\lambda)B(x,\varepsilon) + \lambda y \subset S. \tag{2.3.1}$$

Ara bé, B_λ és una bola oberta centrada a x_λ, i per tant $\forall \lambda \in [0,1)$, $x_\lambda \in \operatorname{int} S$, d'on $[x,y) \subset \operatorname{int} S$. Finalment, com que tot entorn de y conté elements de $[x,y)$, tenim que $y \in \overline{\operatorname{int} S}$, d'on $\overline{S} \subset \overline{\operatorname{int} S}$. Per tant, $\overline{S} = \overline{\operatorname{int} S}$.

Ara és directe veure que $\partial S = \partial(\operatorname{int} S)$, ja que $\partial S = \overline{S}\backslash \operatorname{int} S = \overline{\operatorname{int} S}\backslash(\operatorname{int}(\operatorname{int} S)) = \partial(\operatorname{int} S)$, on hem utilitzat que $\overline{S} = \overline{\operatorname{int} S}$ i que $\operatorname{int}(\operatorname{int} S) = \operatorname{int} S$. □

Teorema 2.23. *Sigui $S \subset X$ acotat, tancat i convex i tal que $0 \in \operatorname{int} S$. Sigui $\phi \in K(S)$ tal que $\phi(S) \subset S$. Aleshores ϕ té un punt fix a S.*

Demostració. En primer lloc anomenem $D = \operatorname{int} S$. Pel lema anterior (lema 2.22), tenim que $\overline{D} = S$ i que $\partial D = \partial S$. Considerem ara la homotopia

$$h_t(x) = x - t\phi(x), \quad x \in \overline{D}, \; t \in [0,1]. \tag{2.3.2}$$

Per aplicar la invariància homotòpica del grau, volem veure que $h_t(x) \neq 0$ $\forall t \in [0,1]$ i $\forall x \in \partial D$. Suposem $\phi(x) \neq x$, $\forall x \in \partial D$, ja que altrament no hi ha res a provar. Per tant, $0 \notin h_1(\partial D)$. Ara bé, com S és convex, tenim que $t\phi(x) \in \operatorname{int} S$, $\forall x \in \partial D$ i $\forall t \in [0,1)$, i per tant, $0 \notin h_t(\partial D)$, $\forall t \in [0,1)$. Per tant, pel teorema de la invariància homotòpica 2.15 i del grau de la identitat 2.12, tenim que $d(I-\phi, D, 0) = d(I, D, 0) = 1$. Per acabar, pel teorema 2.13, tenim que $\exists x \in D = \operatorname{int} S$ tal que $\phi(x) = x$, com volíem veure. $\square$

En el teorema que acabem de veure, hem hagut de posar condicions sobre l'interior del conjunt S. Ens interessa eliminar aquesta restricció. Per fer-ho, enunciem una generalització del teorema de Tietze, anomenat teorema de Dugundji, que ens dona condicions per poder estendre funcions contínues definides a espais normats. Nosaltres en donarem una versió que ens és útil per als teoremes que veurem a continuació. Una demostració del teorema la podem trobar a [6]. Definim primer:

Definició 2.24. *Sigui X un espai normat i sigui $S \subset X$. Anomenem envolupant convexa del conjunt S ("convex hull" en anglès), a la intersecció de tots els conjunts convexos contenint S,* $\operatorname{co} S$.

Definició 2.25. *Siguin X, Y espais mètrics, i sigui $S \subset X$. Sigui $f : S \longrightarrow Y$ una funció contínua. Diem que $F : X \longrightarrow Y$ és una extensió contínua de f a X si F és contínua a X i $f(s) = F(s)$, $\forall s \in S$.*

Teorema 2.26. *(Teorema de Dugundji) Sigui X un espai mètric i sigui $S \subset X$ tancat. Sigui L un espai normat. Aleshores tota funció contínua $f : S \longrightarrow L$ té una extensió contínua $F : X \longrightarrow L$ tal que $F(X) \subset \operatorname{co} f(S)$.*

Amb totes les consideracions anteriors, ja estem en condicions d'enunciar i demostrar el teorema de Schauder.

Teorema 2.27. *(Teorema de Schauder) Sigui X un espai normat i sigui $\emptyset \neq S \subset X$ acotat, tancat i convex. Sigui $\phi : S \longrightarrow S$ un operador compacte. Aleshores ϕ té un punt fix.*

Demostració. Com que S està acotat, aleshores està contingut en una bola B centrada a l'origen. Per tant, pel teorema 2.26, $\exists f : \overline{B} \longrightarrow S$ tal que la restricció de f a S és la identitat, és a dir $f|_S = I$. Sigui $\hat{\phi} := \phi \circ f : \overline{B} \longrightarrow \overline{B}$, ja que $S \subset B$. A més, com que f porta $\overline{B}$ a S, és a dir envia un conjunt acotat a un acotat i com que ϕ és compacte, la composició $\phi \circ f$ envia un conjunt acotat a un conjunt relativament compacte i per tant $\hat{\phi}$ és compacte. Ara veiem que es satisfan les hipòtesis del teorema 2.23, i per tant $\exists x \in \overline{B}$ tal que $\hat{\phi}(x) = x$. Però com que $\hat{\phi}(\overline{B}) \subset S$, tenim que $x \in S$ i per tant $\phi(x) = x$. $\square$

Corol·lari 2.28. *Sigui X un espai normat i $\emptyset \neq S \subset X$ convex i compacte. Aleshores S té la propietat de punt fix.*

Demostració. Si $\phi : S \longrightarrow S$ és contínua, aleshores ϕ és compacta, ja que porta un compacte a un compacte. Com que ara es compleixen les hipòtesis del teorema de Schauder, ϕ té un punt fix i per tant S té la propietat de punt fix. $\square$

Acabem amb això el desenvolupament que presentem en aquest treball de la teoria del grau per a espais normats de dimensió arbitrària, i per tant també la primera part central del treball. Passem ara a estudiar dues aplicacions d'aquesta teoria, on en concret aplicarem el teorema de Schauder i aquest darrer corol·lari.

3 Existència de varietats invariants

Aquest capítol el dediquem a l'estudi d'una família d'aplicacions del pla amb un punt fix a l'origen i on la part lineal és la identitat més un terme nilpotent. El que farem és buscar una varietat (concretament i com que estem a $\mathbb{R}^2$, una corba) invariant d'aquesta aplicació. Com ja havíem avançat, la recerca de punts fixos és una de les àrees d'aplicació més potents i comunes de la teoria del grau, i ara en veurem una aplicació directa utilitzant el teorema de Schauder.

Per altra banda i com ja hem comentat, el desenvolupament que fem a continuació està basat en els articles [8] i [16]. Aquí només demostrarem una versió reduïda del teorema 2.1 del [16], però intentarem detallar més les demostracions. A més, aconseguirem simplificar l'aplicació del pla que estudiem gràcies a un segon canvi de variable que no trobem a l'article original.

3.1 Definició de la classe d'aplicacions

Comencem definint formalment la classe d'aplicacions que estudiarem.

Definició 3.1. *Considerem l'aplicació de dos dimensions* $F : I_0 \times I_0 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $F \in C^2(I_0 \times I_0)$, *on* $I_0 := [-\rho, \rho]$, $\rho > 0$ *definida com*

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y & +f(x,y) \\ y & +g(x,y) \end{pmatrix}, \tag{3.1.1}$$

on la part lineal és la identitat més un terme nilpotent, i on $f, g \in C^2(I_0 \times I_0)$ *tals que l'aplicació* F *satisfà* $F(0,0) = (0,0)$ *i*

$$DF\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.1.2}$$

Comencem fent un desenvolupament de Taylor entorn del 0 de les funcions f i g fins a ordre 2, d'on

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum\limits_{j+l=2} f_{jl} x^j y^l \\ \sum\limits_{j+l=2} g_{jl} x^j y^l \end{pmatrix} + o\left(|(x,y)|^2\right), \tag{3.1.3}$$

on f_{jl} i g_{jl} són els coeficients de Taylor.

Procedim ara a conjugar aquesta aplicació mitjançant un canvi de variables local entorn de l'origen, per trobar-ne la seva forma normal. [9] De [8], sabem que existeix un canvi polinomial que ens permet obtenir-ne la forma normal, i aquesta té una forma concreta que ara trobarem. És a dir, volem construïr un canvi de variables C polinomial (i per tant localment un C^∞-difeomorfisme) tal que

$$C \circ N = F \circ C, \tag{3.1.4}$$

on N és la forma normal de F.

Per a construir C, cal saber com volem N. En primer lloc volem que la part lineal de N sigui igual a la de F, per tant podem prendre la part lineal de C com la identitat.

[9] La forma normal d'una aplicació és, de manera informal, la forma més simplificada en la qual podem expressar l'aplicació.

Això implica també que $DN(0,0) = DF(0,0)$ i per tant $DC(0,0)$ també és la identitat. Imposem també que C sigui un polinomi d'ordre 2. Escrivim aquesta aplicació en funció de dos polinomis Φ, Ψ amb termes només de grau 2, d'on

$$C\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\Phi(\xi,\eta)\\ \Psi(\xi,\eta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\sum\limits_{j+l=2} \Phi_{jl}\xi^j\eta^l\\ \sum\limits_{j+l=2} \Psi_{jl}\xi^j\eta^l\end{pmatrix}, \tag{3.1.5}$$

Per altra banda, si fem el desenvolupament de Taylor de la N tal i com hem fet per a la F, tenim

$$\begin{aligned} N\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix}\xi+\eta\\ \eta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\overline{f}(\xi,\eta)\\ \overline{g}(\xi,\eta)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\xi+\eta\\ \eta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\sum\limits_{j+l=2} \overline{f}_{jl}\xi^j\eta^l\\ \sum\limits_{j+l=2} \overline{g}_{jl}\xi^j\eta^l\end{pmatrix} + o\left(|(\xi,\eta)|^2\right), \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

on $\overline{f}, \overline{g} \in C^2(I_0 \times I_0)$, i $\overline{f}_{jl}, \overline{g}_{jl}$ són els seus corresponents coeficients de Taylor.

Ara composem les matrius $F \circ C$ i $C \circ N$ per després poder igualar-los segons l'equació (3.1.4), d'on obtenim:

$$\begin{aligned} F\circ C\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\xi+\eta\\ \eta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\Phi(\xi,\eta)+\Psi(\xi,\eta)\\ \Psi(\xi,\eta)\end{pmatrix}\\ &+ \begin{pmatrix}f(\xi,\eta)\\ g(\xi,\eta)\end{pmatrix} + o(|(\xi,\eta)|^2), \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

i de forma similar,

$$\begin{aligned} C\circ N\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\xi+\eta\\ \eta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\Phi(\xi+\eta,\eta)\\ \Psi(\xi+\eta,\eta)\end{pmatrix}\\ &+ \begin{pmatrix}\overline{f}(\xi,\eta)\\ \overline{g}(\xi,\eta)\end{pmatrix} + o(|(\xi,\eta)|^2), \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

on totes les composicions de funcions ja no les hem escrit perquè pertanyen a $o(|(\xi,\eta)|^2)$. Ara, si desenvolupem l'equació (3.1.4) per files segons les dues equacions anteriors, obtenim:

$$\Phi(\xi,\eta) + \Psi(\xi,\eta) + f(\xi,\eta) = \Phi(\xi+\eta,\eta) + \overline{f}(\xi,\eta), \tag{3.1.9}$$

$$\Psi(\xi,\eta) + g(\xi,\eta) = \Psi(\xi+\eta,\eta) + \overline{g}(\xi,\eta). \tag{3.1.10}$$

Utilitzant els desenvolupaments de Taylor de N i F, i la definició de C, podem reescriure les dues equacions anteriors com dos sistemes d'equacions de dimensió 3 que escrivim en forma matricial com:

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_{20}\\ \Psi_{11}\\ \Psi_{02}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}g_{20}-\overline{g}_{20}\\ g_{11}-\overline{g}_{11}\\ g_{02}-\overline{g}_{02}\end{pmatrix}, \tag{3.1.11}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_{20}\\ \Phi_{11}\\ \Phi_{02}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f_{20}+\Psi_{20}-\overline{f}_{20}\\ f_{11}+\Psi_{11}-\overline{f}_{11}\\ f_{02}+\Psi_{02}-\overline{f}_{02}\end{pmatrix}. \tag{3.1.12}$$

Veiem que a priori tenim dotze variables i només sis equacions. Ara bé, perquè el sistema sigui compatible hem d'imposar que $g_{20} = \overline{g}_{20}$ i $f_{20} + \Psi_{20} - \overline{f}_{20} = 0$. Per altra banda, nosaltres volem que N tingui la forma més senzilla possible, i per tant podem prendre

$\overline{f} \equiv 0$, així la primera fila de N contindrà només termes lineals. Amb això obtenim cinc equacions més, d'on veiem que el sistema encara està sobredeterminat per una variable. Acabem doncs imposant $\overline{g}_{02} = 0$, d'on, resolent el sistema, obtenim que

$$\begin{aligned} \overline{g}_{20} &= g_{20}, \\ \overline{g}_{11} &= g_{11} + 2f_{20}, \\ \overline{g}_{02} &= 0. \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

Obtenim així que, $\forall (x,y) \in I_0 \times I_0$, F és conjugada a la forma normal

$$N \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ ax^2 + bxy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1(x,y) \\ \gamma_2(x,y) \end{pmatrix} \tag{3.1.14}$$

on $a = g_{20}$ i $b = g_{11} + 2f_{20}$, i on a partir d'ara definim

$$\begin{pmatrix} \gamma_1(x,y) \\ \gamma_2(x,y) \end{pmatrix} := o\left(|(x,y)|^2\right), \tag{3.1.15}$$

és a dir, γ_1 i γ_2 són el residu de Taylor per files de la forma N, i per tant $\gamma_1, \gamma_2 \in C^2(I_0 \times I_0)$.

Observem que ara tenim l'aplicació escrita igual que en el [16]. Tanmateix, encara podem simplificar la forma normal una mica més. Ens proposem fer un darrer canvi per a eliminar γ_1 de l'equació (3.1.14). Definim doncs el nou canvi de variables:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y + u(x,y) \end{pmatrix}, \tag{3.1.16}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta + v(\xi,\eta) \end{pmatrix}, \tag{3.1.17}$$

on $u \in C^2(I_0 \times I_0)$. Que el canvi existeix i està ben definit localment, i que per tant C^{-1} existeix, ho sabem pel teorema de la funció inversa. A més, també ens diu que $v \in C^2(I_0 \times I_0)$. Ara utilitzem que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C^{-1} C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y + v(x,y) + u(x, y + v(x,y)) \end{pmatrix}, \tag{3.1.18}$$

d'on obtenim que $v(x,y) + u(x, y + v(x,y)) = 0$. Que aquesta funció té solució ho sabem pel teorema de la funció implícita. Només ens cal definir l'aplicació $H(v(x,y), x, y) := v(x,y) + u(x, y + v(x,y))$. Com que es compleixen les hipòtesis del teorema de la funció implícita entorn del 0, l'equació $H(v(x,y), x, y) = 0$ té solució i aquesta és única.

Un cop hem vist que l'equació anterior té solució, podem fer $u(x,y) = \gamma_1(x,y)$ i aplicar el canvi de variable C per trobar la nova forma de l'aplicació N, que anomenem G i que serà:

$$G = C^{-1} \circ N \circ C. \tag{3.1.19}$$

Si apliquem la identitat anterior a $(x,y) \in I_0 \times I_0$ i fem el desenvolupament, es comprova que a les dues files de la matriu G els termes d'ordre 0, 1 i 2 es mantenen intactes, mentre que els d'ordre superior són nuls a la primera fila i no nuls a la segona fila. Ara bé, aquests termes d'ordre superior pertanyen a $\gamma_2(x,y)$, que a partir d'ara anomenem $\gamma(x,y)$.

Obtenim així una nova (i última) expressió per a la nostra aplicació original definida a 3.1:

$$G \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ ax^2 + bxy + \gamma(x,y) \end{pmatrix} \tag{3.1.20}$$

on recordem que γ és el residu de Taylor d'ordre $o(|(x,y)|^2)$, $\gamma \in C^2(I_0 \times I_0)$ i $a, b \in \mathbb{R}$ constants que ens venen donades per les funcions f, g originals al fer el primer canvi de variables de F.

3.2 Existència de la varietat invariant

Un cop introduïda la classe d'aplicacions del pla amb la que volem treballar, procedim ara al seu estudi, i a veure que aquesta té una corba invariant. Concretament, volem veure que existeix φ tal que $\operatorname{graf}\varphi$ és invariant sota l'aplicació de G.

Teorema 3.2. *Sigui $G : I_0 \times I_0 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'aplicació definida a 3.1 amb la forma* (3.1.20), *i tal que $a > 0$. Sigui $I_+ = [0, \rho]$. Aleshores $\exists \varphi \in C^1(I_+)$ que satisfà*

- $\varphi(0) = 0$,
- $\varphi'(0) = 0$,
- $\varphi(x) < 0$, $\forall x \in I_+ \backslash \{0\}$,

i tal que el conjunt $\operatorname{graf}\varphi := \{(x, \varphi(x)) \in I_+ \times \mathbb{R}\}$ *és una corba invariant sota l'aplicació de G.*

Observació 3.3. Malgrat no ho demostrem aquí, es pot veure que $\operatorname{graf}\varphi$ no és només una varietat invariant, sinó que a més és estable sota l'aplicació de G, és a dir, $\lim_{n\to\infty} G^n(v) = 0$, $\forall v \in \operatorname{graf}\varphi$. A l'article [16] podem trobar aquesta demostració, així com també variacions en el valor de la constant a, i en les condicions que ha de satisfer la φ. Per exemple, es pot veure que si $\varphi(x) > 0$, $\forall x \in I_+ \backslash \{0\}$, aleshores la varietat és inestable, és a dir $\lim_{n\to\infty} G^{-n}(v) = 0$, $\forall v \in \operatorname{graf}\varphi$.

Per a la demostració del teorema, observem primer que $G(\operatorname{graf}\varphi) \subset \operatorname{graf}\varphi$, és a dir, que $\operatorname{graf}\varphi$ és invariant sota l'aplicació G, si i només si es satisfà l'equació funcional

$$\varphi(x + \varphi(x)) = \varphi(x) + ax^2 + bx\varphi(x) + \gamma(x, \varphi(x)). \tag{3.2.1}$$

Ens interessa simplificar aquesta darrera equació introduïnt les següents funcions auxiliars:

$$\begin{aligned} f(x) &:= \varphi(x) + x, \\ h(x) &:= \gamma(x, f(x) - x). \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Reescrivint l'equació (3.2.1), obtenim

$$f[f(x)] - (2 + bx) f(x) = -x + (a - b) x^2 + h(x). \tag{3.2.3}$$

És immediat veure que efectivament les dues equacions són equivalents.

Per tant, veurem que $\operatorname{graf}\varphi$ és invariant sota l'acció de G demostrant que l'equació funcional (3.2.3) té solució a l'espai de funcions adequat. Per fer-ho, considerem l'espai de Banach $C^1(I_+)$ amb la norma ja definida a (1.0.1), és a dir,

$$\|f\|_1 = \sup_{x \in I_+} |f(x)| + \sup_{x \in I_+} |f'(x)|, \qquad f \in C^1(I_+). \tag{3.2.4}$$

Definim ara un conjunt i un operador que ens seran molt útils per a la demostració.

Definició 3.4. *Definim l'espai de funcions* $\Gamma^1(I_+)$ *com el conjunt*

$$\begin{aligned}\Gamma^1(I_+) := \{f \in C^1(I_+) : \ & f(0) = 0, \ f'(0) = 1, \quad i \quad \forall x, x_1, x_2 \in I_+, \\ & x - \sqrt{a + |b|}x^{\frac{3}{2}} \leqslant f(x) \leqslant x - \frac{a}{4}x^2, \\ & 0 \leqslant f'(x) \leqslant 1 - x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, \qquad |f'(x_2) - f'(x_1)| \leqslant |x_2 - x_1|^{\alpha}\},\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

on $\alpha = 2^{-5}$.

Definició 3.5. *Definim l'operador* $\mathcal{T} : \Gamma^1(I_+) \longrightarrow C^1(I_+)$ *com*

$$\mathcal{T}f(x) = \frac{x + f(f(x)) - (a - b)x^2 - h(x)}{2 + bx}, \quad f \in \Gamma^1(I_+). \tag{3.2.6}$$

A partir de la definició anterior, podem escriure l'equació funcional de punt fix

$$\mathcal{T}f(x) = f(x), \tag{3.2.7}$$

que és equivalent a (3.2.3). Per tant, si aconseguim aplicar el teorema de Schauder a l'operador 3.5 haurem demostrat que l'equació (3.2.3) té solució i que per tant graf φ és una varietat invariant de G.

Ara bé, per aplicar el teorema de Schauder hem de demostrar que $\mathcal{T}$ i $\Gamma^1(I_+)$ satisfan totes les condicions necessàries. Recordem les hipòtesis del teorema (en realitat utilitzem el corol·lari 2.28 enlloc del teorema de Schauder pròpiament).

- Ens cal veure que $\Gamma^1(I_+)$ és un conjunt convex, compacte, i que $\Gamma^1(I_+) \neq \emptyset$.
- Ens cal demostrar que $\mathcal{T}$ està ben definit a $\Gamma^1(I_+)$, que és un operador continu a $\Gamma^1(I_+)$, i que $\mathcal{T}\left(\Gamma^1(I_+)\right) \subset \Gamma^1(I_+)$.

3.3 Hipòtesis del teorema de Schauder

3.3.1 Propietats de $\Gamma^1(I_+)$

Comencem demostrant les propietats de $\Gamma^1(I_+)$.

Lema 3.6. *El conjunt* $\Gamma^1(I_+)$ *definit a 3.4 és convex.*

Demostració. Hem de provar que, donades $f, g \in \Gamma^1(I_+)$, tenim $\psi := tf + (1-t)g \in \Gamma^1(I_+)$, $\forall t \in [0,1]$, és a dir, cal provar les sis propietats que ens defineixen les funcions de $\Gamma^1(I_+)$.

Que $\psi = tf + (1-t)g \in C^1$ és directe ja que $f, g \in C^1$.

També és directe veure que

$$\begin{aligned}\psi(0) &= tf(0) + (1-t)g(0) = 0 \quad \text{i} \\ \psi'(0) &= tf'(0) + (1-t)g'(0) = 1,\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

ja que $f(0) = g(0) =$ i $f'(0) = g'(0) = 1$.

Veiem ara que $x - \sqrt{a - |b|}x^{\frac{3}{2}} \leqslant \psi(x) \leqslant x - \frac{a}{4}x^2$. Per simplificar, anomenem $A(x) := x - \sqrt{a - |b|}x^{\frac{3}{2}}$ i $B(x) := x - \frac{a}{4}x^2$. Per tant, hem de veure que $A(x) \leqslant \psi(x) \leqslant B(x)$. Ara, sabem que

$$\begin{aligned} &A(x) \leqslant f(x) \leqslant B(x) \quad \text{i} \\ &A(x) \leqslant g(x) \leqslant B(x), \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

d'on obtenim que, $\forall x \in I_+$ i $\forall t \in [0,1]$,

$$tA(x) + (1-t)A(x) \leqslant tf(x) + (1-t)g(x) \leqslant tB(x) + (1-t)B(x), \tag{3.3.3}$$

és a dir, que $A(x) \leqslant \psi(x) \leqslant B(x)$, com volíem.

Utilitzant un argument gairebé idèntic, demostrem que $0 \leqslant \psi'(x) \leqslant 1 - x^{\frac{1}{2}+\alpha}$.

Per veure que $|\psi'(x_2) - \psi'(x_1)| \leqslant |x_2 - x_1|^\alpha$, veiem que

$$\begin{aligned} |\psi'(x_2) - \psi'(x_1)| &= |tf'(x_2) + (1-t)g'(x_2) - tf'(x_1) - (1-t)g'(x_1)| \\ &\leqslant t|f'(x_2) - f'(x_1)| + (1-t)|g'(x_2) - g'(x_1)| \\ &\leqslant t|x_2 - x_1|^\alpha + (1-t)|x_2 - x_1|^\alpha \\ &= |x_2 - x_1|^\alpha. \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Queda així demostrat que $\Gamma^1(I_+)$ és convex. □

Abans de demostrar que $\Gamma^1(I_+)$ és compacte, recordem un parell de teoremes de successions que ens seran útils per a la demostració, entre ells el conegut teorema d'Ascoli-Arzelà. No el demostrem aquí, però en podem trobar una demostració a [12], teorema 11.28.[10]

Teorema 3.7. *(Teorema d'Ascoli-Arzelà) Sigui $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : I_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, i tal que*

1. *$\exists K > 0$ tal que $\forall x \in I_+$ i $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leqslant K$,*
2. *$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $|x_2 - x_1| < \delta$, aleshores $|f_n(x_2) - f_n(x_1)| < \varepsilon$, $\forall x_1, x_2 \in I_+$ i $\forall n \in \mathbb{N}$,*

aleshores $\exists (f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subsuccessió de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$f_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} f \quad \text{uniformement en} \;\; I_+, \;\; f : I_+ \longrightarrow \mathbb{R}. \tag{3.3.5}$$

Observacions 3.8.

1. La primera propietat ens diu que tota funció de la successió està acotada per una mateixa constant. Direm que la successió està "*equiacotada*". De forma similar, la segona propietat ens diu que tota funció de la successió és contínua pels mateixos ε i δ. Direm que la successió és "*equicontínua uniformement*".
2. Com que la convergència a la funció f és uniforme, tenim que aquesta funció, a més, és contínua a I_+.[11]

[10] Nosaltres en donem un enunciat concret per a funcions definides a $\mathbb{R}$. La demostració a [12] és per a funcions complexes definides en un espai mètric qualsevol, però evidentment aquest enunciat més general inclou també la nostra versió.

[11] Això es desprèn d'un conegut resultat de successions, que ens diu que si una successió $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, amb $f_n \in C^0$ $\forall n$, convergeix uniformement a una funció f, aleshores f també és contínua en el mateix domini de definició.

Teorema 3.9. *Siguin $f_n : I_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, amb $n \in \mathbb{N}$ funcions derivables a I_+ i tals que*

1. *$(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix uniformement,*
2. *$\exists x_0 \in [0, \rho]$ tal que $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ és convergent.*

Aleshores $\exists f : I_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(I_+)$, tal que $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ i $f'_n \xrightarrow{n\to\infty} f'$, ambdues uniformement.

Observació 3.10. El que ens ve a dir el teorema és que si la successió sense derivar convergeix puntualment a una funció f, i la successió derivada convergeix uniformement a una funció f^*, aleshores $f' \equiv f^*$, i la convergència de la successió sense derivar també és uniforme.

Ara ja estem en condicions de demostrar el lema següent.

Lema 3.11. *El conjunt $\Gamma^1(I_+)$ definit a 3.4 és compacte.*

Demostració.
Idea de la demostració. Per demostrar que és compacte, utilitzarem la caracterització dels compactes per successions, que ens diu que $\Gamma^1(I_+)$ és compacte si i només si per a tota $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successió de $\Gamma^1(I_+)$, existeix una subsuccessió $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $f_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} f \in \Gamma^1(I_+)$.

De forma informal, cal veure que tota successió de $\Gamma^1(I_+)$ té una subsuccessió convergent al conjunt. Com que hem de veure que tota successió té una subsuccessió convergent, i que aquesta pertany al mateix conjunt:

- En primer lloc veurem que tota successió té una subsuccessió convergent, amb la funció límit derivable. És a dir, veurem que $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tendeix a $f \in C^1(I_+)$. Aquest primer pas és el més complicat, i consta de tres "subpassos":
  - Pel teorema d'Ascoli-Arzelà, veurem que $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tendeix a $f \in C^0(I_+)$.
  - De nou pel teorema d'Ascoli-Arzelà, veurem que $(f'_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tendeix a $f^* \in C^0(I_+)$.
  - Pel teorema 3.9, veurem que, de fet, $f \in C^1(I_+)$ i $f' = f^*$ si la convergència a f és puntual i la convergència a f^* és uniforme.
- Un cop demostrat que tota funció té una subsuccessió convergent a $f \in C^1(I_+)$, veurem que aquesta funció f de fet satisfà la resta de condicions del conjunt $\Gamma^1(I_+)$ i, per tant, $f \in \Gamma^1(I_+)$.
- Utilitzant la caracterització dels compactes per successions, quedarà així demostrat que $\Gamma^1(I_+)$ és un conjunt compacte, com volem veure.

Demostració formal. Comencem demostrant que donada una successió $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\Gamma^1(I_+)$, aquesta és equiacotada i equicontínua.

Per veure que tota funció de la successió $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ està acotada per una mateixa constant veiem que, de forma més general, $\forall f \in \Gamma^1(I_+)$ i $\forall x \in I_+$,

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leqslant x - \frac{a}{4}x^2 \leqslant \rho, \\ |f'(x)| &\leqslant 1 - x^{\frac{1}{2}+\alpha} \leqslant 1. \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Això, no només ens dona una cota de tota funció i de la seva derivada, sinó que ens dona també una cota de la funció per la norma $\|\cdot\|_1$:

$$\|f\|_1 = \sup_{x\in[0,\rho]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,\rho]} \left|f'(x)\right| \leqslant \rho + 1. \tag{3.3.7}$$

Pel nostre cas particular, per a tot f_n de la successió $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $|f_n| \leqslant \rho$, és a dir, la successió està equiacotada.

Veiem ara que es satisfà la hipòtesi d'equicontinuïtat uniforme. Sigui $\varepsilon > 0$, f_n un element de la successió $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i siguin $x_1, x_2 \in I_+$ tal que $|x_2 - x_1| \leqslant \rho < \delta$, aleshores

$$|f_n(x_2) - f_n(x_1) = |f_n'(\xi)| \cdot |x_2 - x_1| < 1 \cdot \delta, \quad \xi \in (0, \rho), \tag{3.3.8}$$

on hem utilitzat l'equació (3.3.6) i que $|x_2 - x_1| < \delta$. Per tant, prenent $\delta = \varepsilon$, en tenim prou. Hem provat així les hipòtesis del teorema 3.7, i per tant hem demostrat que $\exists(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subsuccessió de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que convergeix uniformement a una funció $f \in C^0(I_+)$.

Demostrem ara el mateix resultat, però per a la successió derivada $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$. L'equiacotació la tenim de nou per (3.3.6). Per l'equicontinuïtat veiem que donat un element f_n' de $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ i $x_1, x_2 \in I_+$ tal que $|x_2 - x_1| \leqslant \rho < \delta$, aleshores

$$|f_n'(x_2) - f_n'(x_1)| \leqslant |x_2 - x_1|^\alpha < \delta^\alpha, \tag{3.3.9}$$

on hem utilitzat l'última propietat de les funcions del conjunt $\Gamma^1(I_+)$. Prenent $\delta = (\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}$ tenim l'equicontinuïtat uniforme.

Tenim de nou les hipòtesis del teorema d'Ascoli-Arzelà, i per tant, hem demostrat que $\exists(f_{n_k}')_{k\in\mathbb{N}}$ una subsuccessió de $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ que convergeix uniformement a una funció $f^* \in C^0(I_+)$.

Pel tercer "subpas" de la nostra demostració, apliquem el teorema 3.9 als resultats que acabem d'obtenir. Com que per a la subsuccessió $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $\Gamma^1(I_+)$ es compleixen totes les hipòtesis del teorema, i de fet tenim convergència uniforme en les dues subsuccessions, podem aplicar el teorema 3.9, d'on obtenim que $f \in C^1(I_+)$, i $f' = f^*$.

Ja hem demostrat la primera propietat per a les successions del conjunt $\Gamma^1(I_+)$. Concretament, hem vist que el límit de la successió existeix, i que aquest pertany a $C^1(I_+)$. Tanmateix, encara no hem demostrat que la funció límit $f \in \Gamma^1(I_+)$. Per això ens cal demostrar la resta de propietats que satisfan les funcions de $\Gamma^1(I_+)$. En tot moment utilitzem que, evidentment, $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ és una subsuccessió de $\Gamma^1(I_+)$, i per tant les funcions f_{n_k} en satisfan totes les propietats. També utilitzem que la convergència és uniforme en I_+. Comencem:

Com que el límit d'una constant és la pròpia constant, tenim les propietats següents de forma immediata:

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(0) = 0, \\ f'(0) &= \lim_{k\to\infty} f_{n_k}'(0) = 1. \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

Per les propietats que acoten f i la seva derivada, veiem en primer lloc que:

$$\begin{aligned} x - \sqrt{a + |b|} x^{\frac{3}{2}} \leqslant f_{n_k}(x) &\xrightarrow{k\to\infty} x - \sqrt{a + |b|} x^{\frac{3}{2}} \leqslant f(x), \\ f_{n_k}(x) \leqslant x - \frac{a}{4} x^2 &\xrightarrow{k\to\infty} f(x) \leqslant x - \frac{a}{4} x^2, \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

$\forall x \in I_+$. De forma similar,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant f'_{n_k}(x) &\xrightarrow{k\to\infty} 0 \leqslant f'(x), \\ f'_{n_k}(x) \leqslant 1 - x^{\frac{1}{2}+\alpha} &\xrightarrow{k\to\infty} f'(x) \leqslant 1 - x^{\frac{1}{2}+\alpha}, \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

de nou $\forall x \in I_+$.

Provem l'última propietat utilitzant el mateix argument:

$$|f'_{n_k}(x_2) - f'_{n_k}(x_1)| \leqslant |x_2 - x_1|^\alpha \xrightarrow{k\to\infty} |f'(x_2) - f'(x_1)| \leqslant |x_2 - x_1|^\alpha, \tag{3.3.13}$$

$\forall x \in I_+$.

Queda així demostrat que f satisfà totes les propietats de les funcions de $\Gamma^1(I)_+$, és a dir, que $f \in \Gamma^1(I_+)$. Per tant, pel tot el que hem argumentat anteriorment, queda demostrat que $\Gamma^1(I_+)$ és compacte. □

Per veure l'última propietat de $\Gamma^1(I_+)$, necessitarem el següent lema:

Lema 3.12. *Sigui $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, g contínua en $[0,1]$ creixent amb $g(0) = 0$, i g' contínua en $(0,1]$ amb derivada decreixent. Aleshores, $\forall x, y \in [0,1]$*

$$|g(x) - g(y)| \leqslant g(|x - y|). \tag{3.3.14}$$

Demostració. El cas $0 = x \leqslant y$ és trivial ja que clarament $|g(0) - g(y)| = |g(y)| \leqslant g(|-y|) = g(y)$, i de fet tenim una igualtat.

Suposem ara que $0 < x \leqslant y$. Aleshores, com que g' és contínua en $[x, y]$ ja que $g \in C^1((0,1])$, pel teorema fonamental del càlcul tenim:

$$|g(y) - g(x)| = g(y) - g(x) = \int_x^y g'(t)dt. \tag{3.3.15}$$

Ara, com que la derivada és decreixent, tenim que $\forall x \leqslant y \in (0,1], g'(y) \leqslant g'(x)$. En particular, $\forall x \in (0,1]$, $g'(t) \leqslant g'(t - x)$, $\forall t \in [x, 1]$. Ara, com que podem agafar x tant petita com vulguem, i com que el fet d'integrar manté la desigualtat,[12] obtenim:

$$\begin{aligned} |g(y) - g(x)| &= \int_x^y g'(t)dt \\ &\leqslant \int_x^y g'(t - x)dt = g(y - x) - g(0) = g(|y - x|). \end{aligned} \tag{3.3.16}$$

Finalment, com que g és contínua tenim continuïtat en el resultat entre el cas $x = 0$ i $x > 0$ fent $\lim_{x\to 0} g(x)$. Queda així demostrat el lema. □

Observació 3.13. El fet de requerir g' contínua a $(0,1]$ enlloc de a $[0,1]$ s'entendrà més endavant quan fem ús del lema per a una funció particular.

Demostrem l'últim lema de les propietats de $\Gamma^1(I)_+$.

Lema 3.14. *El conjunt $\Gamma^1(I_+)$ definit a 3.4 satisfà $\Gamma^1(I_+) \neq \emptyset$.*

[12] És a dir, donades $f, g \in C^0(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ amb $f \leqslant g$ en I, aleshores $\int_I f \leqslant \int_I g$.

Demostració. Per veure que $\Gamma^1 \neq \emptyset$ en tenim prou trobant una funció que efectivament compleixi les sis propietats del conjunt. Per trobar la funció adequada, primer de tot mirem a les desigualtats que han de complir les funcions que pertanyin a Γ^1. Sembla lògic agafar una funció de la forma $f(x) = x - cx^{\beta}$ per a una certa constant $c > 0$ i un cert exponent β. Podem intuir que la constant c ens donarà cotes per la ρ, és a dir, ens limitarà el conjunt I_+. Per això, una bona cota ens permetrà tenir un interval de definició major.

En canvi, la β jugarà un paper encara més fonamental, ja que és la que ens determinarà si la funció satisfà les desigualtats o no. Estudiant doncs les dues funcions que involucren desigualtats, veiem que una bona elecció de β ha de satisfer:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3}{2} \leqslant \beta \leqslant 2 \\ \beta - 1 \leqslant \dfrac{1}{2} + \alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta \in \left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2} + \alpha\right]. \tag{3.3.17}$$

D'aquí veiem que el valor $\beta = \frac{3}{2} + \alpha$ podria ser, per exemple, una bona elecció, ja que $\alpha = 2^{-5} \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$, i per tant compleix ambdues desigualtats. Prenem també $c = \frac{1}{\frac{3}{2}+\alpha}$. Amb aquestes hipòtesis doncs, arribem a que ens cal demostrar que

$$f(x) = x - \frac{1}{\frac{3}{2} + \alpha} x^{\frac{3}{2}+\alpha} \in \Gamma^1(I_+). \tag{3.3.18}$$

Aquesta funció està ben definida ja que el denominador és sempre no nul. Provem doncs les sis condicions que ha de satisfer.

La funció és clarament contínua i $C^1(I_+)$. A més, $f(0) = 0$ i $f'(0) = 1$ trivialment.

Provem la següent propietat. Veiem la primera desigualtat. Ens cal veure que:

$$x - \sqrt{a + |b|}x^{\frac{3}{2}} \leqslant x - \frac{1}{\frac{3}{2} + \alpha} x^{\frac{3}{2}+\alpha} \iff x \leqslant \left(\sqrt{a + |b|}\left(\frac{3}{2} + \alpha\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{3.3.19}$$

Per tant el resultat serà cert $\forall x \in [0, \rho]$ per a una ρ prou petita, és a dir, si

$$\rho \leqslant \left(\sqrt{a + |b|}\left(\frac{3}{2} + \alpha\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{3.3.20}$$

Per la segona desigualtat necessitem:

$$x - \frac{1}{\frac{3}{2} + \alpha} x^{\frac{3}{2}+\alpha} \leqslant x - \frac{a}{4}x^2, \tag{3.3.21}$$

Que es complirà si:

$$x \leqslant \left(\frac{a}{4\left(\frac{3}{2} + \alpha\right)}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{2}-\alpha}}. \tag{3.3.22}$$

Aquest resultat està ben definit $\forall x \in [0, \rho]$, i per tant, de nou, el resultat serà cert si ρ és prou petita.

La següent propietat és immediata perquè de fet és una igualtat.

Per l'última propietat veiem primer que per a $x = 0$ tenim clarament una igualtat. Per altra banda, veiem que $\forall x \in (0, \rho]$,

$$|f'(x_2) - f'(x_1)| = \left|x_1^{\frac{1}{2}+\alpha} - x_2^{\frac{1}{2}+\alpha}\right|. \tag{3.3.23}$$

Si aconseguim "treure" els exponents de les x fora del valor absolut, és a dir, si veiem que

$$\left| x_1^{\frac{1}{2}+\alpha} - x_2^{\frac{1}{2}+\alpha} \right| \leqslant |x_1 - x_2|^{\frac{1}{2}+\alpha}, \tag{3.3.24}$$

ja estarem, ja que aleshores el resultat és cert per a $\rho < 1$ perquè $|x_1 - x_2| \leqslant \rho < 1$, i per tant

$$|x_1 - x_2|^{\frac{1}{2}+\alpha} \leqslant |x_1 - x_2|^{\alpha}. \tag{3.3.25}$$

Ara bé, la inequació (3.3.24) és certa ja que $g(x) := x^{\frac{1}{2}+\alpha}$ satisfà les hipòtesis del lema 3.12 i per tant es satisfà la última propietat que calia provar. □

3.3.2 Propietats de $\mathcal{T}$

Passem ara a demostrar les propietats de l'operador $\mathcal{T}$.

Lema 3.15. *L'operador $\mathcal{T}$ definit a 3.5 està ben definit a $\Gamma^1(I_+)$.*

Demostració. Per veure que l'operador $\mathcal{T}$ està ben definit, veiem primer que el denominador satisfà $2 + bx \approx 2 > 0$ $\forall x \in I_+$ per a una ρ prou petita, $\rho < \left|\frac{2}{b}\right|$ i la part del numerador $(a-b)\,x^2 - h\,(x)$ tampoc ens "molesta", ja que $h\,(x)$ està ben definida. L'únic lloc on podem tenir problemes" és en la composició $f(f(x))$, $f \in \Gamma^1(I)_+$.

És a dir, per veure que $\mathcal{T}$ està ben definit, ens cal veure que $f\,(I_+) \subset I_+$, és a dir, $0 \leqslant f\,(x) \leqslant \rho$, $\forall x \in I_+$. Que $f(x) \leqslant \rho$ ho hem vist a l'equació (3.3.6). Si veiem que $0 \leqslant x - \sqrt{a+|b|}x^{\frac{3}{2}}$ ja estarem. Si $x = 0$ tenim una igualtat, i si $x > 0$,

$$\begin{aligned} &0 \leqslant x - \sqrt{a+|b|}x^{\frac{3}{2}} = x(1 - \sqrt{a+|b|}x^{\frac{1}{2}}) \\ &\iff 0 \leqslant 1 - \sqrt{a+|b|}x^{\frac{1}{2}} \iff x \leqslant (a+|b|)^{-1}, \end{aligned} \tag{3.3.26}$$

que està ben definit perquè $a + |b| > 0$. Per tant prenent $\rho \leqslant (a+|b|)^{-1}$ tenim el resultat desitjat. Amb això provem que $\mathcal{T}$ està ben definida i, a més, que $f(I_+) \subset I_+$. □

Lema 3.16. *L'operador $\mathcal{T}$ definit a 3.5 és continu a $\Gamma^1(I_+)$.*

Demostració. Per provar la continuïtat hem de veure que donat $f_1 \in \Gamma^1(I_+)$ i $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\forall f_2 \in \Gamma^1(I_+)$, si $\|f_2 - f_1\|_1 < \delta$, aleshores $\|\mathcal{T}(f_2) - \mathcal{T}(f_1)\|_1 < \varepsilon$. Per fer més explícita la dependència de h amb la f, ja que $h(x) = \gamma(x, f(x) - x)$, a partir d'ara escriurem $h_i(x) = \gamma(x, f_i(x) - x)$. Veiem primer que

$$\|\mathcal{T}(f_2) - \mathcal{T}(f_1)\|_1 = \left\| \frac{f_2(f_2(x)) - h_2(x) - f_1(f_1(x)) + h_1(x)}{2+bx} \right\|_1. \tag{3.3.27}$$

En primer lloc eliminem el denominador de la igualtat anterior. Sigui $g \in C^1(I_+)$ qualsevol, aleshores

$$\left\| \frac{g(x)}{2+bx} \right\|_1 = \sup_{x\in[0,\rho]} \left| \frac{g(x)}{2+bx} \right| + \sup_{x\in[0,\rho]} \left| \frac{g'(x)(2+bx) - bg(x)}{(2+bx)^2} \right|. \tag{3.3.28}$$

Recordem que al lema 3.15 ja hem acotat $\rho < \left|\frac{2}{b}\right|$, per tant no tenim problemes en el denominador per cap dels dos termes. Utilitzant ara la norma del suprem veiem que

$$\sup_{x\in[0,\rho]}\left|\frac{g(x)}{2+bx}\right| \leqslant \sup_{x\in[0,\rho]}|g(x)| \leqslant \|g\|_1. \tag{3.3.29}$$

Remarquem que la x dels suprems no necessàriament és la mateixa, però la desigualtat es satisfà igualment. Com que aquest resultat és independent del numerador, argumentem de forma similar amb el segon terme de l'equació (3.3.28), obtenint

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[0,\rho]}\left|\frac{g'(x)(2+bx)-bg(x)}{(2+bx)^2}\right| &\leqslant \sup_{x\in[0,\rho]}\left|\frac{g'(x)}{2+bx}\right| + \sup_{x\in[0,\rho]}\left|\frac{bg(x)}{(2+bx)^2}\right| \\ &\leqslant \sup_{x\in[0,\rho]}\left|g'(x)\right| + \sup_{x\in[0,\rho]}|bg(x)| \\ &\leqslant (1+|b|)\|g\|_1.\end{aligned} \tag{3.3.30}$$

Per tant, i fent $g(x) := f_2(f_2(x)) - h_2(x) - f_1(f_1(x)) + h_1(x)$, obtenim

$$\|\mathcal{T}(f_2) - \mathcal{T}(f_1)\|_1 \leqslant (2+|b|)\|f_2(f_2(x)) - h_2(x) - f_1(f_1(x)) + h_1(x)\|_1. \tag{3.3.31}$$

A més, aplicant desigualtat triangular, tenim que

$$\|\mathcal{T}(f_2) - \mathcal{T}(f_1)\|_1 \leqslant (2+|b|)\left(\|f_2(f_2(x)) - f_1(f_1(x))\|_1 + \|h_1(x) - h_2(x)\|_1\right). \tag{3.3.32}$$

Estudiem els dos termes de la dreta de la desigualtat, oblidant-nos de moment de la constant $(2+|b|)$. Comencem pel terme que conté les f_i. Veiem que

$$\begin{aligned}&\|f_2(f_2) - f_1(f_1)\|_1 = \|f_2(f_2) - f_2(f_1) + f_2(f_1) - f_1(f_1)\|_1 \\ &\leqslant \|f_2(f_2) - f_2(f_1)\|_1 + \|f_2(f_1) - f_1(f_1)\|_1 =: A(x) + B(x),\end{aligned} \tag{3.3.33}$$

on hem renombrat els dos termes per simplicitat.

Comencem estudiant $A(x)$.

$$\begin{aligned}A(x) &= \|f_2(f_2) - f_2(f_1)\|_1 = \sup_{x\in[0,\rho]}|f_2(f_2(x)) - f_2(f_1(x))| \\ &+ \sup_{x\in[0,\rho]}\left|f_2'(f_2(x))f_2'(x) - f_2'(f_1(x))f_1'(x)\right| =: AA(x) + AB(x).\end{aligned} \tag{3.3.34}$$

De nou, estudiem $AA(x)$ i $AB(x)$ per separat:

$$\begin{aligned}AA(x) &= \sup_{x\in[0,\rho]}|f_2(f_2(x)) - f_2(f_1(x))| \leqslant \sup_{x\in[0,\rho]}\left|f_2'(\xi_x)(f_2(x) - f_1(x))\right| \\ &\leqslant \sup_{x\in[0,\rho]}\left|f_2'(\xi_x)\right| \cdot \sup_{x\in[0,\rho]}|f_2(x) - f_1(x)| \\ &\leqslant \|f_2'\|_0 \cdot \|f_2 - f_1\|_0 \leqslant \|f_2\|_1 \cdot \|f_2 - f_1\|_1 \\ &< (1+\rho)\delta,\end{aligned} \tag{3.3.35}$$

on a la primera inequació hem aplicat el teorema del valor mitjà, on ξ_x és un valor que depèn de la x. A la segona hem utilitzat les propietats de la norma del suprem, similar a (3.3.29). A la tercera i quarta desigualtats hem usat la definició de norma a C^0 i C^1, sabent que $\|f\|_0 \leqslant \|f\|_1$, $\forall f \in \Gamma^1(I_+)$. A l'última desigualtat hem utilitzat la hipòtesi de $\|f_2 - f_1\|_1 < \delta$, i l'equació (3.3.7).

Passem ara al segon terme de l'equació (3.3.34):

$$\begin{aligned} AB(x) &= \sup_{x\in[0,\rho]} \left|f_2'(f_2(x))f_2'(x) - f_2'(f_1(x))f_1'(x)\right| \\ &\leqslant \sup_{x\in[0,\rho]} \left|f_2'(f_2(x))f_2'(x) - f_2'(f_2(x))f_1'(x)\right| \\ &+ \sup_{x\in[0,\rho]} \left|f_2'(f_2(x))f_1'(x) - f_2'(f_1(x))f_1'(x)\right| =: ABA(x) + ABB(x). \end{aligned} \tag{3.3.36}$$

Estudiem-ne el primer terme:

$$\begin{aligned} ABA(x) &= \sup_{x\in[0,\rho]} \left|f_2'(f_2(x))f_2'(x) - f_2'(f_2(x))f_1'(x)\right| \\ &\leqslant \sup_{x\in[0,\rho]} \left|f_2'(f_2(x))\right| \cdot \sup_{x\in[0,\rho]} \left|f_2'(x) - f_1'(x)\right| \\ &\leqslant \|f_2'\|_0 \cdot \|f_2' - f_1'\|_0 \leqslant \|f_2\|_1 \cdot \|f_2 - f_1\|_1 \\ &< (1+\rho)\delta. \end{aligned} \tag{3.3.37}$$

On hem argumentat de forma gairebé idèntica a $AA(x)$. Per altra banda,

$$\begin{aligned} ABB(x) &= \sup_{x\in[0,\rho]} \left|f_2'(f_2(x))f_1'(x) - f_2'(f_1(x))f_1'(x)\right| \\ &\leqslant \sup_{x\in[0,\rho]} \left|f_1'(x)\right| \cdot \sup_{x\in[0,\rho]} \left|f_2'(f_2(x)) - f_2'(f_1(x))\right| \\ &\leqslant \|f_1'\|_0 \cdot \sup_{x\in[0,\rho]} |f_2(x) - f_1(x)|^\alpha \\ &< (1+\rho)\delta^\alpha, \end{aligned} \tag{3.3.38}$$

on a la segona desigualtat hem aplicat l'última propietat de les funcions del conjunt $\Gamma^1(I_+)$, és a dir que $\forall f \in \Gamma^1(I_+)$, $|f'(x_2) - f'(x_1)| \leqslant |x_2 - x_1|^\alpha$.

Amb tot el que hem vist fins ara, veiem que podem acotar $B(x)$ com

$$\begin{aligned} B(x) =& \|f_2(f_1) - f_1(f_1)\|_1 = \sup_{x\in[0,\rho]} |f_2(f_1(x)) - f_1(f_1(x))| \\ &+ \sup_{x\in[0,\rho]} \left|f_2'(f_1(x))f_1'(x) - f_1'(f_1(x))f_1'(x)\right| \\ &\leqslant \|f_2 - f_1\|_1 + \sup_{x\in[0,\rho]} |f_1'(x)| \cdot \sup_{x\in[0,\rho]} |f_2'(f_1(x)) - f_1'(f_1(x))| \\ &< \delta + (1+\rho)\delta. \end{aligned} \tag{3.3.39}$$

Recopilant tota aquesta informació, arribem a

$$\begin{aligned} &\|f_2(f_2) - f_1(f_1)\|_1 \\ &< AA(x) + ABA(x) + ABB(x) + B(x) = \\ &< (1+\rho)\delta + (1+\rho)\delta + (1+\rho)\delta^\alpha + \delta + (1+\rho)\delta \\ &= (4+3\rho)\delta + (1+\rho)\delta^\alpha \end{aligned} \tag{3.3.40}$$

Retrocedim ara al segon terme de l'equació (3.3.32), és a dir, el terme que conté les h_i. Veiem que

$$\|h_2 - h_1\|_1 = \sup_{x\in[0,\rho]} |h_2(x) - h_1(x)| + \sup_{x\in[0,\rho]} \left|h_2'(x) - h_1'(x)\right|. \tag{3.3.41}$$

Analitzem cada terme per separat, com hem fet fins ara:

$$\begin{aligned}
&\|h_2(x) - h_1(x)\|_0 = \|\gamma(x, f_2(x) - x) - \gamma(x, f_1(x) - x)\|_0 \\
=&\left\| \int_0^1 \partial_y \gamma\left(x, f_1(x) - x + s[f_2(x) - f_1(x)]\right)[f_2(x) - f_1(x)]ds \right\|_0 \\
\leqslant& M_1\|f_2 - f_1\|_0 < M_1\delta,
\end{aligned} \tag{3.3.42}$$

per alguna constant $M_1 > 0$, i on ∂_y indica la derivada de les γ respecte la segona variable. A la segona igualtat hem reescrit la diferència de les γ en forma d'integral (es comprova fàcilment que les expressions són equivalents) i a la primera desigualtat hem utilitzat el teorema del valor mitjà per a integrals per acotar el valor de la integral.

Pel segon terme de la igualtat de la dreta de (3.3.41) veiem que

$$\begin{aligned}
&\|h_2'(x) - h_1'(x)\|_0 \leqslant \|\partial_x\gamma(x, f_2(x) - x) - \partial_x\gamma(x, f_1(x) - x)\|_0 \\
&+ \|\partial_y\gamma(x, f_2(x) - x)[f_2'(x) - 1] - \partial_y\gamma(x, f_1(x) - x)[f_1'(x) - 1]\|_0 \\
&=: E(x) + F(x),
\end{aligned} \tag{3.3.43}$$

on el que hem fet és desenvolupar el diferencial de les h. Estudiem $E(x)$ i $F(x)$.

Per $E(x)$ procedim igual que a l'equació (3.3.42), amb la diferència que ara tindrem $\partial_y\partial_x\gamma(x, y)$ dins de la integral, però això no és un problema ja que $\gamma \in C^2(I_+)$. La resta es fa igual, obtenint $E(x) < M_2\delta$, per una constant $M_2 > 0$.

Pel segon terme, fem una suma telescòpica i desigualtat triangular, obtenint que

$$\begin{aligned}
F(x) \leqslant& \|\partial_y\gamma(x, f_2(x) - x)[f_2'(x) - 1] - \partial_y\gamma(x, f_2(x) - x)[f_1'(x) - 1]\|_0 \\
&+\|\partial_y\gamma(x, f_2(x) - x)[f_1'(x) - 1] - \partial_y\gamma(x, f_1(x) - x)[f_1'(x) - 1]\|_0 \\
=:& FA(x) + FB(x).
\end{aligned} \tag{3.3.44}$$

Estuidem primer $FA(x)$:

$$\begin{aligned}
FA(x) &\leqslant \|\partial_y\gamma(x, f_2(x) - x)\|_0 \cdot \|f_2' - f_1'\|_0 \\
&\leqslant \|\partial_y\gamma(x, f_2(x) - x)\|_0 \cdot \|f_2 - f_1\|_1 \\
&< M_3\delta
\end{aligned} \tag{3.3.45}$$

on a la última desigualtat hem utilitzat que $\gamma(x, y)$ està acotada per definició, és a dir $|\gamma(x, y)| \leqslant M_3$, on $M_3 > 0$ és una constant.

Per últim estudiem $FB(x)$.

$$\begin{aligned}
FB(x) &\leqslant \|f_1'(x) - 1\|_0 \cdot \|\partial_y\gamma(x, f_2(x) - x) - \partial_y\gamma(x, f_1(x) - x)\|_0 \\
&\leqslant (1 + \rho)\|\partial_y\gamma(x, f_2(x) - x) - \partial_y\gamma(x, f_1(x) - x)\|_0 \\
&< (1 + \rho)M_4\delta
\end{aligned} \tag{3.3.46}$$

on a la última desigualtat hem utilitzat el mateix argument que per calcular la $E(x)$.

Recuperant l'equació (3.3.41), obtenim que

$$\|h_2 - h_1\|_1 < M_1\delta + M_2\delta + M_3\delta + (1 + \rho)M_4\delta \leqslant (4 + \rho)M\delta, \tag{3.3.47}$$

on $M = \max\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$.

Finalment, ajuntant les dues cotes obtingudes a (3.3.40) i (3.3.47), així com la constant inicial $(2+|b|)$ que hem obtingut a l'eliminar el denominador, obtenim que

$$\|\mathcal{T}(f_2)-\mathcal{T}(f_1)\|_1 < (2+|b|)\left[(4+3\rho)\delta+(1+\rho)\delta^{\alpha}+(4+\rho)M\delta\right]. \tag{3.3.48}$$

Finalment, si igualem aquesta darrera cota a ε, n'aïllem la δ i n'agafem el valor absolut, veiem que ja queda demostrada l'existència d'un $\delta>0$ tal que es satisfan les hipòtesis de continuïtat. Per agafar una cota concreta, suposem $\delta<1$, d'on

$$\|\mathcal{T}(f_2)-\mathcal{T}(f_1)\|_1 < (2+|b|)[(5+4\rho)+(4+\rho)M]\delta^{\alpha}, \tag{3.3.49}$$

que igualat a ε ens queda

$$\delta=\left|\frac{\varepsilon}{(2+|b|)[(5+4\rho)+(4+\rho)M]}\right|^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{3.3.50}$$

Així doncs, veiem que donat $f_1\in\Gamma^1(I_+)$ i donat $\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ tal que $\forall f_2\in\Gamma^1(I_+)$, si $\|f_2-f_1\|_1<\delta$, aleshores $\|\mathcal{T}f_2-\mathcal{T}f_1\|_1<\varepsilon$. Per tant, queda així demostrada la continuïtat de l'operador $\mathcal{T}$. □

Lema 3.17. *L'operador $\mathcal{T}$ definit a 3.5 satisfà $\mathcal{T}\left(\Gamma^1(I_+)\right)\subset\Gamma^1(I_+)$.*

Demostració. Aquesta última propietat es correspon al lema 2.1 del [16]. Com ja hem comentat, les hipòtesis anteriors no estan explícitament demostrades a l'article, o no estan desenvolupades amb detall. Tanmateix, aquesta última hipòtesi sí que està ben demostrada a l'article i, de fet, n'és una demostració força feixuga i llarga. Hem considerat que la demostració no aporta cap resultat conceptualment interessant, i que les eines utilitzades per a la demostració són molt similars a les utilitzades per a les propietats anteriors. Per tant, no la demostrem aquí, i invitem al lector interessat a visitar-la a l'article [16]. □

3.4 Aplicació del teorema de Schauder

Ja hem demostrat que el conjunt $\Gamma^1(I_+)$ i l'operador $\mathcal{T}$ satisfan totes les hipòtesis del teorema de Schauder. Per tant, queda demostrat que $\exists f\in\Gamma^1(I_+)$ tal que f és un punt fix de l'operador $\mathcal{T}$. Ara és directe veure que

$$\begin{aligned}&\varphi(0)=f(0)-0=0,\\&\varphi'(x)=f'(x)-1 \implies \varphi'(0)=f'(0)-1=0.\end{aligned} \tag{3.4.1}$$

A més, si $x\in I_+\backslash\{0\}$,

$$\varphi(x)<0 \iff f(x)-x<0 \iff f(x)<x, \tag{3.4.2}$$

però

$$f(x)\leqslant x-\frac{a}{4}x^2<x, \tag{3.4.3}$$

i per tant, $\varphi(x)<0\ \forall x\in I_+\backslash\{0\}$.

Queda així doncs demostrat el teorema 3.2, i per tant l'existència d'una corba graf φ que és invariant sota l'acció de l'aplicació definida a 3.1.

4 Equació del pèndol forçat

4.1 Definició de l'equació diferencial

En aquest darrer capítol, com ja hem dit, utilitzarem el teorema de Schauder per a estudiar l'equació del pèndol forçat, estudiant abans una família més general d'equacions diferencials no lineals de 2n ordre amb condicions de Dirichlet.

Comencem amb una breu introducció física. Considerem un fil rígid de llargada l i de massa nul·la. Un extrem del fil està enganxat a l'eix y en un punt $A = (0, l)$ del pla $\mathbb{R}^2$, i a l'altre extrem hi penja una massa m de volum nul, construint així un pèndol. Aquest està sotmès a la gravetat en la direcció de l'eix y, i suposem també que hi actua una força externa sinusoidal que el fa vibrar forçadament. Obviem el fregament amb l'aire i qualsevol altra interacció que hi pugui haver. No desenvoluparem el raonament físic que hi ha al darrere, però es pot veure (cf. [3], capítol 5) que l'equació que defineix aquest sistema és

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = c\sin\omega t, \tag{4.1.1}$$

on $t \in \mathbb{R}$ és el temps, $\theta \in [0, 2\pi]$ és l'angle que fa el pèndol amb l'eix y, g és la gravetat, c és una constant que defineix la magnitud de la força externa, i ω una altra constant que defineix la freqüència de vibració d'aquesta força externa. Si $c = 0$ ens trobem amb la coneguda equació del pèndol simple. Un cop entesa la naturalesa física de l'equació del pèndol forçat, (4.1.1), la reescrivim de forma més general i simple com

$$y'' + a\sin y = e, \tag{4.1.2}$$

on $e : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció contínua, senar i T-periòdica. Enlloc de resoldre l'equació $\forall t \in \mathbb{R}$, utilitzarem la periodicitat de l'equació i en buscarem una solució únicament per $t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$, ja que un cop trobada una solució y en aquest interval, la podrem estendre a tot $\mathbb{R}$. Considerem doncs una de les infinites extensions de y que sigui periòdica i senar, i demostrem que també és solució de l'equació (4.1.2).

Teorema 4.1. *Sigui $y : \left[0, \frac{T}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfent $y''(t) + a\sin y(t) = e(t)$ i tal que $y(0) = y\left(\frac{T}{2}\right) = 0$. Aleshores l'extensió $\hat{y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ senar i periòdica a $\mathbb{R}$ també és solució de la mateixa equació.*

Demostració.
Idea de la demostració. Comencem considerant únicament l'extensió $\overline{y}$ senar a l'interval $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, que és clarament contínua ja que $\lim_{x\to 0^+} y(x) = 0 = \lim_{x\to 0^-} \overline{y}(x)$, i argumentem de forma similar per veure que $\overline{y} \in C^2([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$. A més,

$$\overline{y}''(t) = -y''(-t) = a\sin y(-t) - e(-t) = -a\sin\overline{y}(t) + e(t) \tag{4.1.3}$$

ja que e i el sinus són funcions senars. Així, obtenim que $\overline{y}(t)$ satisfà l'equació en tot l'interval $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, amb $\overline{y}(0) = \overline{y}\left(\frac{T}{2}\right) = \overline{y}\left(-\frac{T}{2}\right) = 0$.

De forma similar veurem que l'extensió periòdica $\hat{y}$ a tot $\mathbb{R}$ també és solució de l'equació. Per fer-ho prenem $\mathbb{R} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{T}{2} + (k-1)T, \frac{T}{2} + kT\right]$, i prenem $\hat{y}(t) = \hat{y}(t - kT)$, T-periòdica. Primer veiem que $\hat{y}(t)$ és contínua a tot $\mathbb{R}$, ja que $\forall k \in \mathbb{Z}$, tenim que $\hat{y}\left(\frac{T}{2} + kT\right) = 0 = \hat{y}\left(-\frac{T}{2} + (k+1)T\right)$ si prenem límits, i per tant $\hat{y}(t)$ contínua $\forall t \in \mathbb{R}$. De forma similar veiem que $\hat{y} \in C^2(\mathbb{R})$. Per altra banda, operant igual que a (4.1.3), veiem que efectivament $\hat{y}(t)$ és solució a tot interval de la forma $\left[\frac{T}{2} + (k-1)T, \frac{T}{2} + kT\right]$.

A més, com que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $\hat{y}(t) = \overline{y}(t')$, amb $t' := t - kT \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, tenim que $\hat{y}(-t) = \overline{y}(-t') = -\overline{y}(t') = -\hat{y}(t)$. Per tant, construïda així, $\hat{y}(t)$ manté la paritat a tot $\mathbb{R}$.

Queda així demostrat que l'extensió senar i periòdica de y a tota la línia real, $\hat{y}$, també és solució de $y''(t) + a \sin y(t) = e(t)$, i en manté les mateixes propietats. $\square$

Per tant, hem aconseguit simplificar l'equació del pèndol a l'equació diferencial

$$\begin{cases} y'' + a \sin y = e, \\ y(0) = y\left(\frac{T}{2}\right) = 0, \end{cases} \tag{4.1.4}$$

on $e : \left[0, \frac{T}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ i a és una constant no nul·la. Reescrivint de nou aquesta última equació, arribem finalment a que l'equació del pèndol forçat forma part de la família d'equacions diferencials de 2n ordre no lineals següent.

Definició 4.2. *Sigui $f = f(t, p, q) : [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Definim la següent equació diferencial amb condicions de contorn com:*

$$\begin{cases} y'' = f(t, y, y'), \\ y(0) = y(1) = 0, \end{cases} \tag{4.1.5}$$

Observacions 4.3.

1. Pel cas concret del pèndol forçat,

$$f(t, p, q) = \frac{T^2}{4} \left[e\left(\frac{T}{2} t\right) - a \sin p \right]. \tag{4.1.6}$$

2. Les condicions de contorn per a la y són anomenades "*condicions de Dirichlet*".

Queda així definit el nostre problema; demostrar l'existència de solucions de l'equació diferencial definida a 4.2. N'estudiarem primer el cas més general on f és qualsevol funció contínua a l'interval de definició, i després concretarem amb la definició de f que hem donat a (4.1.6). De fet, veurem que l'equació no té solució per a qualsevol f, sinó que haurem de requerir que f satisfaci alguna condició extra.

Com que volem utilitzar el teorema de Schauder, treballarem de forma molt similar al capítol anterior. Buscarem un operador que converteixi l'equació diferencial en una equació funcional equivalent, i buscarem un punt fix d'aquest operador, veient així que l'equació té almenys una solució. Per trobar l'equació funcional equivalent, procedim per "*construcció*". És a dir, anem definint els operadors necessaris segons les propietats que hagin de satisfer.

4.2 Construcció de l'equació funcional

Un primer pas força intuïtiu és definir un operador L tal que donada una funció v definida a $[0, 1]$, $Lv := v''$. Això ens permet reformular l'equació diferencial (oblidant-nos de moment de les condicions de contorn) com $Lv = f$, f contínua. Quines condicions han de satisfer L i v per què ens siguin útils en la resolució d'aquesta equació?

És evident que és necessari que v sigui dues vegades derivable. Ara bé, en tenim prou amb això? Hem dit que f és una funció contínua, per tant si escrivim $Lv = v'' = f$, cal que Lv també sigui contínua. Per tant, cal que $v \in C^2([0,1])$, d'on

$$L : C^2([0,1]) \longrightarrow C^0([0,1]). \tag{4.2.1}$$

A més, però, volem que v satisfaci les condicions de Dirichlet mencionades.

Definició 4.4. *Sigui $v \in C^2([0,1])$. Direm que $v \in C^{2,0}([0,1])$ si $v(0) = v(1) = 0$.*

Amb la definició de L donada a (4.2.1), l'operador L és lineal, però no té inversa. Tanmateix, podem redefinir l'espai de sortida de L per solventar aquest problema. Formalment:

Definició 4.5. *Definim el domini i recorregut de l'operador $Lv = v''$ com*

$$L : C^{2,0}([0,1]) \longrightarrow C^0([0,1]). \tag{4.2.2}$$

Amb aquesta definició, L es converteix en un isomorfisme lineal. És a dir, és un operador amb inversa contínua! Aquesta propietat, que ara demostrarem i que hem aconseguit de forma "*gratuïta*" canviant l'espai de sortida perquè satisfaci les condicions de contorn, serà molt important per a la futura definició de l'equació funcional. Veiem ara que efectivament L té inversa, i veiem quina forma té L^{-1}. Com que $Lv = \omega$, per una certa $\omega \in C^0([0,1])$ contínua, la inversa de L ens ve donada per $L^{-1}(\omega) = v$. Per tant, ens cal trobar v resolent $v'' = \omega$.

Resolem aquesta equació de forma directa i obtenim

$$\begin{aligned} v'(t) &= v'(0) + \int_0^t \omega(s)ds, \\ v(t) &= v(0) + v'(0)t + \int_0^t \left(\int_0^s \omega(u)du \right) ds = v(0) + v'(0)t + \int_0^t (t-s)\omega(s)ds, \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

on a la segona igualtat de la segona equació hem utilitzat el teorema de Fubini, ja que ω és contínua i per tant integrable.

Utilitzant les condicions de Dirichlet, obtenim de forma directa que $v(0) = 0$, i

$$0 = v(1) = v'(0) + \int_0^1 (1-s)\omega(s)ds. \tag{4.2.4}$$

Per tant, arribem a que

$$v(t) = t\int_0^1 (s-1)\omega(s)ds + \int_0^t (t-s)\omega(s)ds, \tag{4.2.5}$$

obtenint així una fòrmula per L^{-1}.

Formalment, podem definir L^{-1} en termes d'una "*funció de Green*".

Teorema 4.6. *La inversa $L^{-1} : C^0([0,1]) \longrightarrow C^{2,0}([0,1])$ de $Lv = v'' = w$ tal que $v(0) = v(1) = 0$, es defineix com*

$$L^{-1}w(t) = \int_0^1 G(s,t)w(s)ds \tag{4.2.6}$$

on $w \in C^0([0,1])$ i $G : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, anomenada "funció de Green", es defineix com

$$G(s,t) = \begin{cases} (t-1)s & si \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ t(s-1) & si \quad 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases} \tag{4.2.7}$$

Demostració. Podem reescriure (4.2.5) com

$$v(t) = L^{-1}w(t) = \int_0^t (t-1)sw(s)ds + \int_t^1 t(s-1)w(s)ds. \tag{4.2.8}$$

Amb això ja estem, ja que la primera integral està definida per $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$ i la segona per $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1$ com a la definició de $G(s,t)$, per tant $v(t) = L^{-1}w(t) = \int_0^1 G(s,t)w(s)ds$. $\square$

Observació 4.7. Veiem que amb el teorema anterior hem trobat una forma explícita de la funció inversa de la L definida a 4.5. Aquesta inversa depèn de la funció w, que és l'equivalent a la nostra f.

Del resultat anterior se'n desprèn el següent corol·lari.

Corol·lari 4.8. $\forall w \in C^0([0,1])$,

$$\|L^{-1}(w)\|_2 \leqslant \frac{13}{4}\|w\|_0. \tag{4.2.9}$$

Demostració. Veiem que, per definició, $G(s,t) \leqslant 0$, $\forall (s,t) \in [0,1] \times [0,1]$ i que G té el seu mínim quan $s = t$ i per tant $-\frac{1}{4} \leqslant G(s,t) \leqslant 0$. Sigui $v = L^{-1}(w)$, aleshores

$$|v(t)| = |L^{-1}(w)(t)| \leqslant \int_0^1 |G(s,t)| \cdot \|w(t)\|_0 ds \leqslant \frac{1}{4}\|w\|_0. \tag{4.2.10}$$

Per altra banda, veiem que

$$v'(t) = \int_0^t sw(s)ds + \int_t^1 (s-1)w(s)ds, \tag{4.2.11}$$

d'on, de nou per la desigualtat triangular, veiem que $|v'(t)| \leqslant 2\|w\|_0$.
Finalment, i aplicant la definició de la norma a $C^2([0,1])$ i que $v''(t) = w(t)$, tenim que

$$\|L^{-1}(w)\|_2 = \|v\|_0 + \|v'\|_0 + \|v''\|_0 \leqslant \frac{13}{4}\|w\|_0. \tag{4.2.12}$$

$\square$

El corol·lari anterior ens permet fer una observació interessant. Abans, però, necessitem un conegut resultat d'anàlisi funcional, que podem trobar demostrat a molts llibres (cf. [12], teorema 5.4). Recordem també que un operador és acotat si porta conjunts acotats a conjunts acotats. Enunciem el lema:

Lema 4.9. *Un operador lineal $T : X \longrightarrow Y$, on X, Y espais normats, és acotat si i només si és continu amb les topologies induïdes per les normes d'aquests espais.*

Observacions 4.10.

1. Hi ha llibres on el resultat anterior ni tant sols es considera un lema, sinó que es presenta com una equivalència entre les definicions d'operador lineal continu i operador lineal acotat. Nosaltres n'hem donat definicions diferents, per tant el lema sí que ens és util. Sigui com sigui, ens permet fer una observació interessant, que veiem a continuació.

2. El corol·lari 4.8 ens diu que l'operador lineal L^{-1} porta conjunts acotats de $C^0([0,1])$ a conjunts acotats de $C^2([0,1])$, per tant, L^{-1} és un operador acotat. Per altra banda, el lema 4.9 ens dona una equivalència entre funcions contínues i acotades d'espais normats. Com que clarament $C^0([0,1])$ i $C^{2,0}([0,1])$ són espais normats i L^{-1} és lineal i acotat, tenim que L^{-1} és un operador contínu. Hem vist doncs, com ja havíem anticipat, que L és un isomorfisme lineal.

El proper pas en la construcció de la nostra equació passa per estudiar les dependències de f. Recordem que $f(t,p,q)$ és una funció contínua amb, a priori, cap relació entre p i q. Ara bé, a la nostra equació diferencial, $v'' = f(t,v,v')$, és a dir, si $p = v$, aleshores $q = v'$. Per tant necessitem que, com a mínim, $v \in C^1([0,1])$ (ens oblidem per ara que en la definició de L hem requerit que $v \in C^{2,0}([0,1])$).

Del raonament anterior obtenim que f és una composició de funcions. Com sabem si aquesta operació està ben definida? Per fer-ho, prenem $v \in C^1([0,1])$, i definim l'operador superposició $F(v)(t) = f(t,v,v')$, $\forall t \in [0,1]$. Com que $v \in C^1([0,1])$ i f contínua per hipòtesi, aleshores la composició també és contínua (composició de funcions contínues és contínua). Més formalment,

Proposició 4.11. *Sigui $f = f(t,p,q) : [0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, aleshores l'operador superposició $F : C^1([0,1]) \longrightarrow C^0([0,1])$, definit com $F(u)(t) = f(t,u(t),u'(t))$, també és continu, on $u \in C^1([0,1])$.*

Demostració. Sigui $u \in C^1([0,1])$ i $\varepsilon > 0$, volem veure que $\exists\delta(u,\varepsilon) > 0$ tal que si $\forall w \in C^1([0,1])$, $\|u-w\|_1 < \delta$, aleshores $\|F(u) - F(w)\|_0 < \varepsilon$.

Sigui $r \geqslant 1$ tal que $\|u\|_1 \leqslant r$ (podem fer-ho ja que u és contínua i per tant acotada), i considerem f restringida al conjunt compacte $A_r := [0,1]\times[-2r,2r]\times[-2r,2r]$. Ara, f és contínua i restringida en un compacte, per tant f és uniformement contínua en aquest compacte. És a dir, $\exists\delta' > 0$ tal que si $(t,p,q),(t',p',q') \in A_r$, amb $\sup\{|t-t'|,|p-p'|,|q-q'|\} < \delta'$, aleshores $|f(t,p,q) - f(t',p',q')| < \varepsilon$.

Considerem ara $\delta = \min\{\delta', r\}$. Si $\|w-u\|_1 < \delta$, aleshores $\|w\|_1 \leqslant \|w-u\|_1 + \|u\|_1 < \delta + r \leqslant 2r$. Per tant, per la definició de norma $\|\cdot\|_1$, $|w(t)| < 2r$ i $|w'(t)| < 2r$, d'on $(t,u(t),u'(t)),(t,w(t),w'(t)) \in A_r$. A més, per la definició de δ', tenim $\|u-w\|_1 < \delta \leqslant \delta'$, d'on $|u(t)-w(t)| < \delta'$ i $|u'(t)-w'(t)| < \delta'$, $\forall t \in [0,1]$.

Amb tot el que hem vist, veiem doncs que podem definir un δ' tal que $|f(t,u(t),u'(t)) - f(t,w(t),w'(t))| < \varepsilon$, $\forall t \in [0,1]$, és a dir, $\|F(u)-F(w)\|_0 < \varepsilon$, com volíem veure. $\square$

Un cop definit L i F, ja estem en condicions de fer una primera reformulació de (4.1.5). L'equació diferencial és equivalent a l'equació funcional $L(y) = F(y)$. Ara bé, ens trobem amb la complicació que els espais de sortida de L i F no són el mateix. Per això necessitem fer ús de l'operador inclusió.

Definició 4.12. *Definim l'operador inclusió $j : C^{2,0}([0,1]) \longrightarrow C^1([0,1])$ per $j(x) = x$, és a dir, envia $x \in C^{2,0}([0,1])$ al mateix element $x \in C^1([0,1])$.*

Clarament l'operador anterior està ben definit ja que $C^{2,0}([0,1]) \subset C^1([0,1])$. Així doncs, el problema es converteix ara en trobar $y \in C^{2,0}([0,1])$ tal que $L(y) = Fj(y)$. Hem aconseguit reformular completament l'equació diferencial en una equació funcional equivalent. Transformem aquesta última en una equació funcional de punt fix, utilitzant que L té inversa, obtenint

$$y = L^{-1}Fj(y). \tag{4.2.13}$$

Acabem aquest apartat definint l'operador S com:

Definició 4.13. *Siguin L, j i F els operadors definits anteriorment. Definim l'operador S com la composició $S = L^{-1}Fj$, és a dir,*

$$S : C^{2,0}([0,1]) \xrightarrow{j} C^1([0,1]) \xrightarrow{F} C^0([0,1]) \xrightarrow{L^{-1}} C^{2,0}([0,1]). \tag{4.2.14}$$

Veiem que hem reescrit l'equació diferencial inicial 4.2 com una equació funcional de punt fix, $S(y) = y$. Comprovarem ara que l'operador S satisfà totes les hipòtesis del teorema de Schauder en un subconjunt de $C^{2,0}([0,1])$, i veurem així que efectivament l'equació té solució.

4.3 Aplicació del teorema de Schauder

Recordem les hipòtesis del teorema de Schauder, 2.27. Ens cal veure que $\exists A \subset C^{2,0}([0,1])$ tancat, acotat, convex, $A \neq \emptyset$, tal que l'operador $S : A \longrightarrow A$ és compacte. Comencem demostrant que l'operador S és compacte a tot $C^{2,0}([0,1])$. Abans, però, enunciem dos lemes que necessitarem. No els demostrem aquí però els podem trobar al [3].

Lema 4.14. *L'operador inclusió $j : C^{k+1}([a,b]) \longrightarrow C^k([a,b])$ és compacte.*

Lema 4.15. *Siguin X, Y, Z espais normats. Sigui $f : X \longrightarrow Y$ un operador compacte i $g : Y \longrightarrow Z$ un operador continu. Aleshores l'operador composició $gf : X \longrightarrow Z$ és compacte.*

Teorema 4.16. *Sigui $S : C^{2,0}([0,1]) \longrightarrow C^{2,0}([0,1])$ l'operador definit a 4.13. Aleshores, l'operador S és compacte.*

Demostració. Utilitzant el lema 4.14, tenim que la inclusió $i : C^2([0,1]) \longrightarrow C^1([0,1])$ és compacta. Per tant, com que tot conjunt acotat de $C^{2,0}([0,1])$ també ho és de $C^2([0,1])$, tenim que la inclusió $j : C^{2,0}([0,1]) \longrightarrow C^1([0,1])$ és compacta. Per altra banda, tenim que L^{-1} és contínua pel corol·lari 4.8 i F és contínua per la proposició 4.11. Utilitzant el lema 4.15, tenim que la composició Fj és compacta. Amb el mateix argument, arribem a que l'operador $S = L^{-1}Fj$ és un operador compacte, com volíem veure. $\square$

Ara necessitem trobar $A \subset C^{2,0}([0,1])$ que sigui tancat, acotat i convex, i tal que $S(A) \subset A$. És aquí on haurem d'utilitzar la nostra funció definida a (4.1.6), ja que com veurem aquest conjunt A depèn de f i per tant, l'equació funcional no té solució per qualsevol f, com ja havíem anticipat.[13] Veiem que el que ens cal requerir, és que f tingui imatge acotada. Enunciem el teorema següent:

Proposició 4.17. *Sigui $f : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Si f té imatge acotada, aleshores $\exists A \subset C^{2,0}([0,1])$ no buit, tancat, acotat i convex tal que $S(A) \subset A$.*

[13] Per exemple, podem veure que l'equació $f(t, y, y') = (y')^2$ no té cap solució que satisfaci les condicions de Dirichlet.

Demostració. Sigui $|f(t,p,q)| \leqslant \beta$. Aleshores, i basant-nos en el corol·lari 4.8, prenem $A = B(0, \frac{13}{4}\beta) \subset C^{2,0}([0,1])$, la bola centrada a l'origen i de radi $\frac{13}{4}\beta$:

$$A = \left\{ u \in C^{2,0}([0,1]) : \|u\|_2 \leqslant \frac{13}{4}\beta \right\}. \tag{4.3.1}$$

Clarament, la bola és convexa, acotada, i tancada.

Per altra banda, com que f té imatge acotada, l'operador $F(u)(t) = f(t, u(t), u'(t))$, $F : C^1([0,1]) \longrightarrow C^0([0,1])$ també, ja que $\|F(u)\|_0 = |f(t, u(t), u'(t))|_0 \leqslant \beta$. Així doncs, $\|Fj(u)\|_0 \leqslant \beta$, $\forall u \in C^{2,0}([0,1])$, ja que l'operador inclusió no ens modifica les propietats de l'operador F, senzillament ens agafa un conjunt més restringit de sortida. Finalment obtenim

$$\|S(u)\|_2 = \|L^{-1}Fj(u)\|_2 \leqslant \frac{13}{4}\|Fj(u)\|_0 \leqslant \frac{13}{4}\beta, \tag{4.3.2}$$

on a la primera desigualtat hem utilitzat el corol·lari 4.8, i a la segona desigualtat hem utilitzat que l'operador $Fj(u)$ està acotat per β. Per tant, $\forall u \in A$, $S(u) \in A$, és a dir, $S(A) \subset A$. □

Hem vist que es satisfan totes les hipòtesis del teorema de Schauder. Per tant podem concloure que l'equació $S(y) = y$, S definida a 4.13, té com a mínim una solució si la funció f té imatge acotada. Com que hem vist l'equivalència entre aquesta equació i l'equació diferencial definida a 4.2, podem concloure que l'equació diferencial té almenys una solució.

4.4 Aplicació al pèndol forçat

Per acabar, només ens falta aplicar els resultats obtinguts a l'equació del pèndol forçat, és a dir amb la f definida a (4.1.6). Només ens cal veure que f té imatge acotada, però això és immediat ja que

$$|f(t,p,q)| = \frac{T^2}{4}\left(\left|e\left(\frac{T}{2}t\right)\right| + |a \sin p|\right) \leqslant \frac{T^2}{4}(\|e\|_0 + |a|) = \beta, \tag{4.4.1}$$

on hem utilitzat que e és una funció contínua i periòdica i per tant és acotada. Finalment, utilitzant el teorema 4.1, podem estendre la solució de l'equació a tot $\mathbb{R}$. Queda així demostrat que l'equació del pèndol forçat, definida a (4.1.1) i que forma part de la família d'"*equacions diferencials de 2n ordre no lineals i amb condicions de Dirichlet*" definida a 4.2, té almenys una solució periòdica a $\mathbb{R}$.

5 Conclusions

Tanquem aquest projecte amb una breu recopil·lació del que hem analitzat i possibles direccions vers on prosseguir la recerca.

Hem vist que la teoria del grau ens ofereix una eina molt potent per a l'estudi del conjunt de solucions d'equacions de la forma $\phi(x) = p$. També, i gràcies a la invariància homotòpica del grau, hem construït una connexió entre la teoria del grau i la teoria del punt fix que ens ha permès demostrar teoremes tan fonamentals com el de Brouwer o el de Schauder.

Hem pogut aplicar aquests resultats a exemples concrets de sistemes dinàmics i EDOs. En ambdós casos i per poder utilitzar el teorema de Schauder, hem transformat l'aplicació del pla que ens defineix el sistema i l'equació diferencial en una equació funcional no lineal de punt fix. A continuació hem vist que l'operador que ens defineix aquesta equació i l'espai on es troba satisfan les hipòtesis del teorema de Schauder, fet que ens ha servit per demostrar que l'equació té com a mínim una solució. Aquest procediment és molt habitual i s'utilitza en altres camps com, per exemple, en teoria de la bifurcació o en teoria de la complementarietat.

Entenem doncs que una possible extensió del projecte podria estudiar les diferents branques de l'anàlisi i la matemàtica aplicada on són útils la teoria del grau i la teoria del punt fix. Si es volgués estudiar el grau des d'un punt de vista menys analític, podríem analitzar la definició i les propietats utilitzant la teoria homològica, o bé definir-lo per a varietats. Una altra generalització natural seria definir el grau per a funcions pertanyents a espais vectorials topològics, enlloc de limitar-nos únicament a espais normats.

Aquest treball, malgrat ser només una primera aproximació al grau, deixa palès el potencial d'aquesta teoria i la seva capacitat d'aplicació en branques molt variades de les matemàtiques.

Referències

[1] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Springer, New York, London, 2011.

[2] L. E. J. Brouwer. Über abbildung von mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, 71(1):97–115, 1912.

[3] R. Brown. *A topological introduction to nonlinear analysis.* Birkhauser, Boston, 2004.

[4] J. Cronin. *Fixed points and topological degree in nonlinear analysis.* American Mathematical Society, Providence, 1964.

[5] K. Deimling. *Nonlinear functional analysis.* Springer-Verlag, Berlin New York, 1985.

[6] J. Dugundji. An extension of Tietze's theorem. *Pacific Journal of Mathematics*, 1(3):353–367, 1951.

[7] I. Fonseca and W. Gangbo. *Degree Theory in Analysis and Applications.* Oxford University Press, 1995.

[8] E. Fontich. Stable curves asymptotic to a degenerate fixed point. *Nonlinear Analysis-theory Methods & Applications*, 20:711–733, 1999.

[9] J. Leray and J. Schauder. Topologie et équations fonctionnelles. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 51:45–78, 1934.

[10] N. Lloyd. *Degree theory.* Cambridge University Press, Cambridge New York, 1978.

[11] J. Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint.* Princeton University Press, 1997.

[12] W. Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill, New York, 1974.

[13] J. Schwartz. *Nonlinear functional analysis.* Gordon and Breach, New York, 1969.

[14] D. Smart. *Fixed point theorems.* Cambridge University Press, Cambridge, 1974.

[15] M. Spivak. *Calculus On Manifolds.* Taylor & Francis Inc, 1971.

[16] W. Zhang and W. Zhang. On invariant manifolds and invariant foliations without a spectral gap. *Advances in Mathematics*, 303:549–610, 2016.