Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

Treball Final de Grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES I ADMINISTRACIÓ I DIRECCIÓ D'EMPRESES

Racionalitat i monotonia en jocs cooperatius: possibilitats i impossibilitats

Joan Rosselló Matamalas

Directors: **Dr. Josep Vives i Santa-Eulàlia**
Dept. de Matemàtiques i Informàtica
Dr. Pedro Calleja Cortés
Dept. de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial

Barcelona, 24 de gener de 2022

Abstract

A single-valued solution for cooperative games suggest how to allocate what all agents can get if they cooperate. In this work, we analyze which of the most important solutions satisfy certain rationality and/or monotonicity properties. In particular we study the behavior of well-known solutions such as the Shapley value, the prenucleolus, and the per-capita prenucleolus regarding the core selection property and monotonicity properties such as coalitional monotonicity. Core selection imposes that whenever it is possible, the recommendation made by a solution should not give incentives to individual agents or any coalition to break cooperation. It is for this reason that we consider it as a rationality property. On the other hand, coalitional monotonicity requires that as long as one coalition becomes stronger (and the value of the rest of coalitions does not vary), no member of the coalition is strictly worse off. We show how the imposition of these two properties will make it impossible to find a solution that satisfies both. Next, we relax the monotonicity property to aggregate monotonicity. This property demands that if the coalition of all players becomes stronger (while the value of the rest of coalitions remains the same), no agent is strictly worse off. In this case, not only the per-capita prenucleolus satisfies both properties, but also a whole set of solutions does, of which we study its geometry. Finally, we define a new monotonicity property, weak coalitional monotonicity, and we leave the door open to a future study of whether or not it is compatible with core selection.

Resum

Les solucions puntuals dels jocs cooperatius recomanen com repartir allò que els agents poden obtenir si cooperen. En aquest treball, fem una anàlisi sobre quines de les solucions més importants satisfan certes propietats de racionalitat i/o monotonia. En particular, estudiem el comportament de solucions ben conegudes com són el valor de Shapley, el prenucleolus i el prenucleolus per-càpita respecte de la propietat de selecció del core i de propietats de monotonia com la monotonia coalicional. La propietat de selecció del core imposa que sempre que sigui possible, la recomanació feta per una solució no ha de donar incentius als agents individuals ni a cap coalició a anar per lliure, és a dir, a trencar la cooperació. És per aquest motiu que la considerem una propietat de racionalitat. En canvi, la propietat de monotonia coalicional requereix que sempre que una coalició es faci

més forta (mentre que el valor de les altres coalicions no varia), cap membre de la coalició surti perdent. Veiem com la imposició d'aquestes propietats impossibilitaran trobar una solució que compleixi les dues. Llavors, relaxem la propietat de monotonia per introduir la propietat de monotonia agregada. Aquesta propietat demana que si la coalició de tots els jugadors es fa més forta (i el valor de la resta de coalicions es manté igual), cap agent surti perdent. En aquest cas, no només el prenucleolus per-càpita satisfà la combinació de selecció del core i monotonia agregada, sinó que tot un conjunt de solucions ho fa, del qual n'estudiem la geometria. Finalment, definim una nova propietat de monotonia coalicional, la monotonia coalicional dèbil, amb la qual deixem la porta oberta a un estudi futur quant a si és o no compatible amb la selecció del core.

2020 Mathematics Subject Classification. 91A06, 91A12

Agraïments

Primer de tot m'agradaria donar les gràcies als meus tutors Pedro Calleja Cortés i Josep Vives i Santa-Eulàlia per la seva disposició durant tot el treball. La seva ajuda, els seus consells i el temps que hi han dedicat han estat fonamentals per a poder dur a terme aquest projecte. Els hi estic molt agraït per haver tingut l'oportunitat de treballar amb ells.

També vull agrair a tota la gent que he conegut i que ha estat al meu voltant durant aquests cinc anys i mig de carrera: amics, companys de pis i de grau, moltes gràcies pel vostre suport.

Per últim, m'agradaria donar les gràcies a la meva família i a la meva parella. Hi ha hagut moments difícils durant aquests anys, però gràcies a la confiança que m'han mostrat i l'empenta que m'han donat, m'han ajudat a continuar i he aconseguit superar els obstacles. Sou el més important que tinc.

Índex

Introducció

La cooperació està molt present en el dia a dia de les persones. Al llarg de la història els humans ens hem adonat que tenim metes comunes, ideals que compartim i que volem arribar a aconseguir. Llavors, per què no actuar conjuntament per tal d'assolir aquests objectius? La cooperació entre persones, la posada en comú d'idees i l'actuació conjunta, han permès assolir sempre uns nivells de raonament superiors als que es poden obtenir de manera individual i, d'aquesta manera, pensar en solucions als problemes des de diversos punts de vista que només fan que ampliar el ventall de possibles decisions i millorar els resultats finals. Per tant, i ara econòmicament parlant, la cooperació entre agents econòmics que pretenen maximitzar el seu benefici permet generar uns guanys i/o reduir uns costos que poden arribar a ser de gran escala. D'aquesta manera, es creen uns incentius a la cooperació en els agents que fan que estiguin disposats a ajuntar forces.

Tot i així, la cooperació no és perfecta i també crea maldecaps. Aquest augment en els beneficis genera després una qüestió difícil de resoldre: el repartiment dels guanys. Com es distribueixen aquests beneficis entre els agents participants en la cooperació? S'ha de fer un repartiment del guany a parts iguals? O bé el que més ha aportat a la cooperació ha de guanyar més que la resta? Quina és la solució més justa? La resposta a aquestes preguntes les dona la teoria de jocs cooperatius.

La teoria de jocs és una àrea molt recent de la matemàtica que neix fonamentalment amb l'obra *Theory of Games and Economic Behavior* de John von Neumann i Oskar Morgenstern (1944). S'encarrega principalment de l'estudi de models d'interaccions estratègiques entre individus racionals (els "jocs") i ajuda a comprendre més la conducta humana pel que fa a la presa de decisions. Tracta d'analitzar aquestes situacions entre agents i intenta donar solucions als problemes que planteja.

Una de les branques de la teoria de jocs, la teoria de jocs cooperatius, s'encarrega de l'anàlisi de les situacions en què els agents actuen de manera conjunta, és a dir, quan formen coalicions. Suposa que la cooperació entre aquests agents es produeix a causa de la possibilitat d'obtenir uns beneficis superiors si actuen de manera conjunta que si no ho fan, o bé a causa de l'existència d'acords vinculants entre agents que provoquen conseqüències negatives en qui trenca aquests acords. Són, per tant, situacions que propicien el comportament cooperatiu entre els agents. La teoria de jocs cooperatius és llavors un instrument que permet una anàlisi profunda dels fenòmens cooperatius aportant aspectes tant normatius com positius. Com a tal, s'espera que doni resposta a les preguntes que hem plantejat abans; sobretot a la de: com s'ha de repartir el benefici que s'obté mitjançant la cooperació d'una manera "justa"? Vegem amb un exemple perquè aquesta situació genera un problema.

Dos agents, 1 i 2, tenen cada un d'ells un guant de la mà dreta. Uns altres dos agents, 3 i 4, tenen un guant de la mà esquerra. El valor en el mercat d'un guant sol és zero i el valor d'ajuntar dos guants de mans distintes és d'una unitat. Notem que si els quatre agents cooperen, poden generar un benefici de dues unitats. El problema vendrà llavors a l'hora de repartir-se aquest benefici. Com ho farien? Com hem dit, la teoria de jocs pretén donar resposta a aquestes situacions. Unes respostes que, evidentment, poden ser molt diverses. Per exemple, es podria emportar tot el benefici (2 unitats) un dels agents, però llavors, per què haurien de participar els altres en la cooperació si no reben res a canvi? Clarament, tot agent vol obtenir el màxim benefici per a si mateix. Per tant, hi ha una parella de jugadors que reben zero amb incentius a formar una parella de guants i repartir-se'n els guanys (1 unitat), trencant la coalició amb la resta. És a dir, hi ha propostes de repartiment que poden incentivar als agents o grups d'agents a anar per lliure. La teoria de jocs busca propostes al problema de repartiment i aquestes, evidentment, seran més estables si es troben dins el conjunt de solucions en què cap dels individus implicats ni cap coalició tingui incentius a trencar la cooperació. Aquest conjunt es coneix amb el nom de nucli o core.

En l'anàlisi que fem demanem que les solucions proposades satisfacin que cap agent ni cap coalició tingui incentius per a trencar el vincle de cooperació i, per tant, que siguin repartiments que es trobin dins el core. Així, definim la primera propietat que desitgem que satisfacin les solucions dels jocs cooperatius, la selecció del core. La considerem, doncs, una propietat de racionalitat, ja que busca l'estabilitat en les solucions als problemes de repartiment dels guanys.

Estudiem també si les propostes o solucions que ens ofereix la teoria de jocs satisfan certes propietats que anomenem de monotonia. Parlem de propietats de monotonia perquè, en situacions en què es produeix un augment en el valor d'alguna de les possibles coalicions o grups d'agents del joc, demanem que els membres d'aquesta coalició no en surtin perdent d'aquest canvi, és a dir, que en la solució proposada al problema de repartiment, cap dels implicats en la coalició augmentada guanyi menys. La combinació de la selecció del core amb les propietats de monotonia és, per tant, un fet desitjable d'aconseguir. En aquest sentit, introduïm en el treball dues propietats de monotonia. La primera és la monotonia coalicional. En aquesta propietat demanem que si el valor d'una coalició qualsevol del joc augmenta mentre el de la resta de coalicions es manté invariant, llavors la solució ha de repartir de manera que els membres de la coalició que ha augmentat no en surtin perdent. D'altra banda, la monotonia agregada, més dèbil que la primera, demana que si és la coalició de tots els jugadors la que augmenta en aquest cas, la solució ha de repartir de manera que cap agent participant del joc en surti perdent.

Al llarg dels anys, nombrosos estudiosos han aportat el seu coneixement a la teoria de jocs, fent propostes de distribució concretes per als jocs cooperatius. En aquest treball introduïm tres d'aquestes solucions ben conegudes dels jocs cooperatius: el valor de Shapley, introduït per Lloyd Stowell Shapley (1953), Premi Nobel d'Economia de 2012; el prenucleolus, enunciat per David Schmeidler (1969); i el prenucleolus per-càpita, concepte introduït per Jeffrey Harlow Grotte (1970).

Fem una anàlisi del seu comportament respecte de la propietat de racionalitat i les propietats de monotonia que hem comentat. Provem que el valor de Shapley satisfà les propietats de monotonia però no la de racionalitat. Veiem com el prenucleolus satisfà la selecció del core, però en canvi, no satisfà les de monotonia. I demostrem que el prenucleolus per-càpita satisfà tant la selecció del core com la monotonia agregada, tot i que no satisfà la monotonia coalicional. Veiem, de fet, com la monotonia coalicional no és compatible amb la selecció del core en jocs de quatre o més jugadors (Young, 1985; Housman i Clark, 1998). A més del prenucleolus per-càpita, hi ha altres solucions que satisfan ambdues propietats, selecció del core i monotonia agregada, tot un conjunt de solucions. El core monotònic agregat d'un joc és el conjunt de repartiments que aquestes solucions poden seleccionar. Aquest nou conjunt té una geometria particular que estudiem, juntament amb la relació que té amb el core. Arribem a veure també que, en determinats casos, el core i el core monotònic agregat coincideixen, donant una condició necessària i suficient perquè ho facin.

En el Capítol 1 establim les bases per a tractar l'estudi dels jocs cooperatius. Introduïm els principals conceptes de la teoria de jocs cooperatius: el core, així com les solucions puntuals. En presentem tres de les més conegudes: el valor de Shapley, el prenucleoulus i el prenucleolus per-càpita. En el Capítol 2 enunciem la propietat de racionalitat, la selecció del core, i la primera de monotonia, la monotonia coalicional. Veiem que, tot i que algunes de les solucions que coneixem satisfan alguna d'aquestes propietats, la combinació entre elles dona pas a impossibilitats. En el Capítol 3, introduïm la propietat de monotonia agregada. Combinant aquesta propietat amb la de selecció del core, demostrem que el prenucleolus per-càpita satisfà les dues i, de fet, no és l'única solució que ho fa. Ens trobarem amb tot un conjunt de solucions que satisfan ambdues propietats i del qual n'estudiem la geometria. Per últim, en el Capítol 4 definim una tercera propietat de monotonia, la monotonia coalicional dèbil. La definició juntament amb una sèrie de resultats que poden ser útils, estableixen una base de cara a un possible estudi futur d'aquesta nova propietat, tot seguint amb l'afany de voler combinar-la amb la selecció del core, així com hem fet durant tot el treball.

Capítol 1

Jocs cooperatius: el core i les solucions puntuals

En aquest primer capítol tractarem les principals definicions de conceptes i diversos resultats sobre la teoria de jocs que anirem utilitzant al llarg del treball. D'aquesta manera, ens ajudaran a fixar la notació bàsica que farem servir.

1.1 Què és un joc?

La teoria de jocs és una àrea de la matemàtica aplicada que s'encarrega d'estudiar models d'interaccions estratègiques entre agents racionals. Aquests models són el que es coneixen normalment amb el nom de "jocs", i els agents racionals, encarregats de prendre decisions, són els anomenats "jugadors".

La teoria de jocs neix amb el llibre de Von Neumann i Morgenstern (1944), on ja es fa referència al fet que l'estudi es pot enfocar des de dues perspectives que cal diferenciar: la teoria de jocs no cooperatius i la teoria de jocs cooperatius.

1. **Teoria de jocs no cooperatius**. La primera branca considera que tots els jugadors prenen decisions de manera individual i actuen en funció d'un ventall d'opcions anomenades estratègies. Que estiguin actuant de manera individual implica que no es posen d'acord amb altres jugadors i, per tant, que només actuen en funció del seu propi interès. Tot i això, la utilitat o benestar que un agent obté depèn de les decisions que prenen els altres agents. Aquesta és la característica fonamental per anomenar jocs a aquestes situacions. En aquests casos, llavors, la millor decisió possible pot dependre del que els altres agents involucrats en el problema decideixin fer. Una altra conseqüència és que la impossibilitat de posar-se d'acord amb altres jugadors implica que, en segons quines circumstàncies, el jugador no pot saber si la decisió que pren és la decisió òptima, ja que aquesta depèn de la resta de decisions dels altres jugadors.

2. **Teoria de jocs cooperatius**. Aquesta segona branca considera que els jugadors actuen de manera conjunta entre ells, formant grups que s'anomenen *coalicions*. Aquestes coalicions es formen a causa de situacions externes que propicien un comportament cooperatiu entre els jugadors, incentivant-los amb uns guanys majors si prenen decisions de manera conjunta que si no ho fan; o bé de la possibilitat que

estableixin acords vinculants, és a dir, aquells en què les conseqüències de trencar-los provoquin pèrdues més grans en qui ho faci que els guanys de fer-ho, de vegades per l'existència de multes o càstigs en els mateixos. En aquesta segona branca de la teoria de jocs es posa el focus en com s'han de repartir els guanys de la cooperació, i no pas en quines són les "millors"decisions, ja que suposem que les coalicions d'agents simplement escullen aquelles combinacions d'accions millors pel grup.

En aquest treball que ens ocupa, ens centrarem en la branca de la teoria de jocs cooperatius.

1.2 Els jocs cooperatius i el core d'un joc

Un cop hem fet la distinció entre els dos grans àmbits d'estudi de la teoria de jocs i ja centrant-nos només en la branca dels jocs cooperatius, hem de fer una altra classificació d'aquests tipus de jocs.

1. *Jocs cooperatius d'utilitat no transferible.* En els jocs d'utilitat no transferible o jocs-NTU, encara que s'assumeix la possibilitat de crear acords vinculants entre agents, la transferència d'utilitat no és possible entre ells.

2. *Jocs cooperatius d'utilitat transferible.* En els jocs d'utilitat transferible o jocs-TU, en canvi, s'assumeix que la utilitat és transferible. És a dir, un agent pot transferir utilitat a un altre. Una simplificació comuna d'aquests tipus de jocs es dona quan els agents o les coalicions es reparteixen diners, que es poden transferir d'un agent a un altre fàcilment. En un joc-TU, una coalició rep tota la utilitat dels seus membres en una sola transferència, i després queda per decidir com redistribuir aquesta utilitat entre els membres.

En aquest treball, tractarem exclusivament els jocs d'utilitat transferible. Dues referències importants en jocs cooperatius són Rafels et al. (1999) i Peleg i Sudhölter (2007).

A partir d'ara, considerem $N = \{1, 2, \dots, n\}$ el conjunt finit d'agents, que anomenem jugadors i que deixem fixat. Com ja hem comentat, en els jocs cooperatius es formen grups de jugadors amb l'objectiu de cooperar entre ells i treure un benefici comú d'aquesta unió. Aquests subconjunts de jugadors, que representem per lletres majúscules $S, T, R, \dots$, s'anomenen **coalicions**. En cas de voler denotar el nombre de jugadors de la coalició, ho representem mitjançant la lletra minúscula corresponent. Per exemple, per denotar la cardinalitat del conjunt S, ho fem com $|S| = s$. I si el que ens interessa és denotar el conjunt de totes les coalicions d'un joc d'N jugadors, ho fem com 2^N, les parts del conjunt N. Observem que el conjunt 2^N està format per totes les possibles coalicions que poden formar els jugadors de N. Seguint aquestes directrius,

Definició 1.2.1. *Un **joc cooperatiu d'utilitat transferible** és un parell ordenat* (N, v) *on* $N = \{1, 2, ..., n\}$ *és el conjunt de jugadors i* v *és una funció, anomenada funció característica. Aquesta funció associa a tota coalició un valor numèric real, és a dir,* $v(S) \in \mathbb{R}$, *per a qualsevol* $S \subseteq N$. *Aleshores:*

$$\begin{array}{rccc} v: & 2^N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & S & \longmapsto & v(S). \end{array}$$

Per conveni, en tot joc cooperatiu el valor de la coalició buida serà 0, és a dir, $v(\emptyset) = 0$.

A partir d'ara, denotem per G^N al conjunt de tots els jocs amb conjunt de jugadors N. A més, en cas que no hi hagi confusió i com que tenim el conjunt de jugadors fixat, denotem el joc (N, v) simplement per v.

Com ja hem comentat, en els jocs cooperatius d'utilitat transferible, el problema consisteix en proposar repartiments del benefici de la cooperació entre els jugadors, $v(N)$. És a dir, assumirem des del principi que es forma la coalició total i avaluarem si aquesta hipòtesi és sòlida o no. Per fer-ho, imposarem condicions o propietats que desitgem que es compleixin i veurem si és possible.

Una distribució, que representarem com un vector de $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, associarà un nombre real x_i a cada jugador $i \in N$, que representa la quantitat assignada a i segons la proposta x. El conjunt de totes les distribucions **eficients**, és a dir, que distribueixen la totalitat del que s'obté si tota la societat o conjunt d'agents coopera, s'anomena **conjunt de preimputacions** del joc. La condició d'eficiència (o optimalitat de Pareto) que acabem d'esmentar imposa que $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$. És a dir, direm que una distribució $x \in \mathbb{R}^n$ és **eficient** si compleix $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$. Si repartissim més que el que poden obtenir, és a dir, més que $v(N)$, no seria factible. Mentre que si repartim menys que $v(N)$, és fàcil trobar distribucions factibles on tothom està millor. A més a més, per $x \in \mathbb{R}^n$ i $S \subseteq N$, denotem per $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$, la quantitat que x reporta a la coalició S. Definim ara el conjunt de preimputacions.

Definició 1.2.2. *El **conjunt de preimputacions** d'un joc* $v \in G^N$*, que denotarem com* $I^*(v)$*, és*

$$I^*(v) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, x(N) = \sum_{i \in N} x_i = v(N) \right\}.$$

Notem que aquest conjunt és sempre no buit, i és, de fet, un hiperplà de $\mathbb{R}^n$.

També s'ha de pensar que cap jugador està disposat a participar en la gran coalició si en aquesta guanya menys que estant ell sol. Llavors, anomenarem **principi de racionalitat individual** a la condició en què el que es distribueix a cada jugador sigui, com a mínim, igual al seu valor individual, és a dir, $x_i \geq v(i)\ \forall i \in N$ [1]. Incorporant aquesta condició a la d'eficiència, es genera un altre conjunt:

Definició 1.2.3. *El **conjunt d'imputacions** d'un joc* $v \in G^N$*, que denotarem com* $I(v)$*, és*

$$I(v) := \{x \in I^*(v) |\, x_i \geq v(i)\ \forall i \in N\}.$$

El conjunt d'imputacions el formaran, per tant, totes aquelles distribucions que siguin eficients i que compleixin la propietat de racionalitat individual. Notem ara que el conjunt de les imputacions, al contrari que el conjunt de les preimputacions, sí que pot ser buit. Una condició necessària i suficient per a que $I(v) \neq \emptyset$ és que $\sum_{i \in N} v(i) \leq v(N)$.

Encara introduirem una propietat més abans de definir el core del joc, un dels conceptes més importants dels jocs cooperatius. Direm que una distribució satisfà el **principi de racionalitat coalicional** si assigna a cada coalició almenys allò que aquesta es pot assegurar sense la col·laboració de la resta de jugadors, és a dir, una distribució $x \in \mathbb{R}^n$

[1] Si no hi ha confusió, notarem les coalicions com $\{ij\}, \{ijk\}, \ldots$ en lloc de $\{i, j\}, \{i, j, k\}, \ldots$. De la mateixa manera, notarem $v(i), v(ij), \ldots$, en lloc de $v(\{i\}), v(\{i, j\}), \ldots$.

és coalicionalment racional si per a tota coalició $S \subseteq N$ es compleix $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$. Observem que, evidentment, racionalitat coalicional implica racionalitat individual, però no a la inversa. Amb aquesta propietat, podem definir un tercer conjunt amb el qual treballem molt al llarg de tot el treball: el **nucli** o **core** d'un joc, introduït per Gillies (1953).

Definició 1.2.4. *El* **core** *d'un joc $v \in G^N$, que denotarem com $C(v)$, és*

$$C(v) := \{x \in I^*(v) \mid x(S) \geq v(S) \ \forall S \subseteq N\}.$$

El core, llavors, està format per totes aquelles distribucions que satisfan eficiència i racionalitat coalicional. El core d'un joc cooperatiu agrupa totes aquelles distribucions en què cap coalició té incentius a trencar la cooperació, és a dir, descriu els repartiments que preserven la cooperació. Així, les distribucions que es troben dins el core representen l'estabilitat en la cooperació. Llavors, fora d'aquest conjunt queden totes aquelles distribucions que farien que algun agent preferís desvincular-se de la resta de jugadors, ja que s'adonaria que, actuant pel seu compte, obtindria més benefici.

Vegem un exemple d'un joc cooperatiu senzill i trobem-ne el seu core:

Exemple 1.2.5. Considerem el joc amb conjunt de jugadors $N = \{1, 2, 3\}$ i amb la següent funció característica:

$$v(1) = v(2) = v(3) = 0, \ v(12) = v(13) = 1, \ v(23) = 0, \ v(123) = 1.$$

Si imposem les propietats que ha de complir el core, obtenim el conjunt següent:

$$C(v) = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1+x_2+x_3 = 1, x_1, x_2, x_3 \geq 0, x_1+x_2 \geq 1, x_1+x_3 \geq 1, x_2+x_3 \geq 0\}.$$

Observem que, la condició d'eficiència, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ imposada sobre les desigualtats corresponents a coalicions de dos jugadors implica:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \geq 1 &\iff x_3 \leq 0, \\ x_1 + x_3 \geq 1 &\iff x_2 \leq 0, \\ x_2 + x_3 \geq 0 &\iff x_1 \leq 1. \end{aligned}$$

Cap d'aquestes desigualtats pot ser estricte per eficiència i, per tant, la distribució $x = (1, 0, 0)$ és l'única del core.

A continuació, representem en la Figura 1.1 el core del joc v en el triangle de les imputacions [2].

[2] El triangle de les imputacions és el tros de l'hiperplà d'eficiència en què $x_1, x_2, x_3 \geq 0$, representat en dues dimensions.

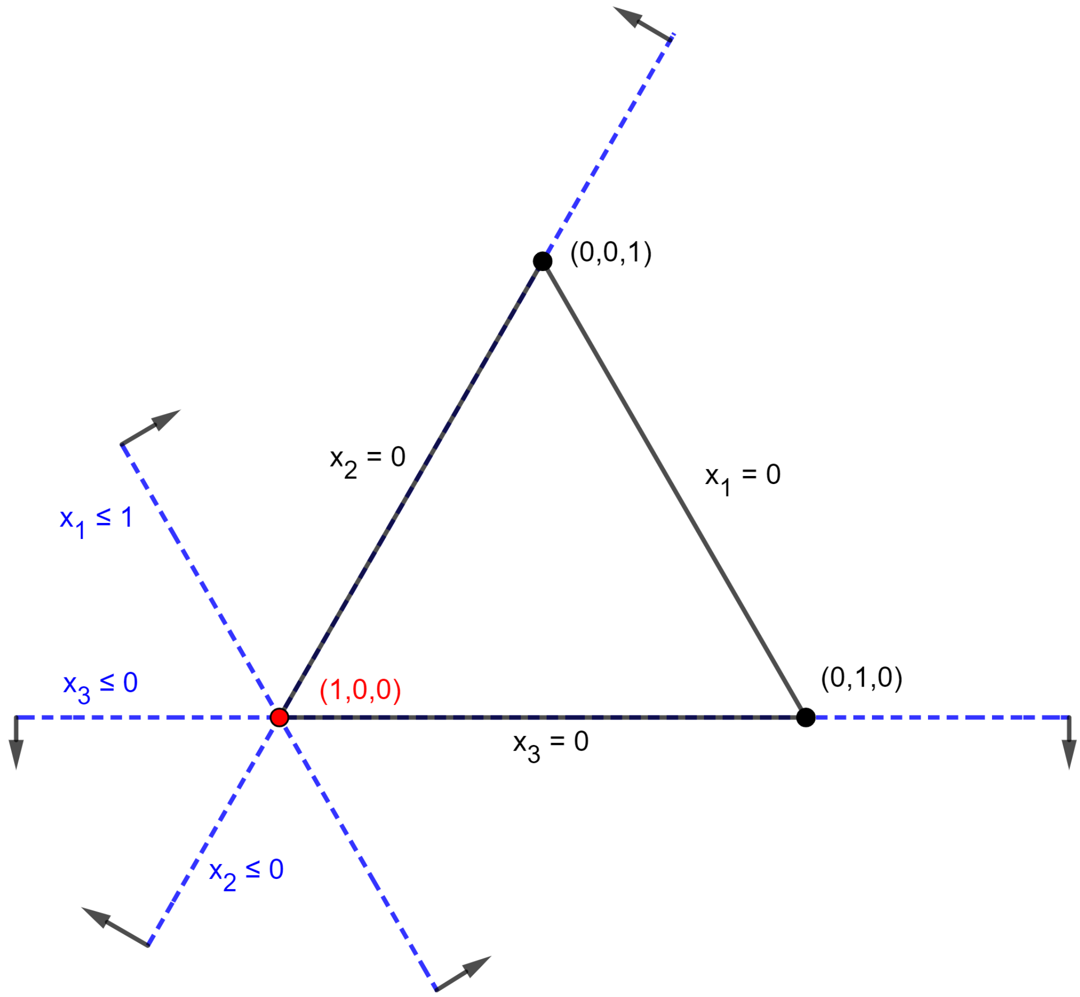

Figura 1.1: Triangle de les imputacions del joc v. El core del joc està representat en vermell.

En aquest exemple, el core del joc consisteix en un únic punt; però també ens podem trobar amb cores més grans o cores buits. Passem ara a definir què entenem com a solució puntual d'un joc cooperatiu.

1.3 Solucions puntuals dels jocs cooperatius

Malauradament, el core d'un joc pot presentar alguns inconvenients: pot ser buit, i a més, no distingeix entre distribucions que hi pertanyen. En canvi, s'espera que la teoria de jocs ens ajudi a trobar una proposta de distribució concreta, que assigni a cada jugador una part del que la societat pot obtenir si coopera. Passem ara a definir què entenem per solució puntual d'un joc cooperatiu.

Definició 1.3.1. *Una **solució puntual** en G^N és una funció $\alpha : G^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$, que assigna a cada joc $v \in G^N$ un vector $\alpha(v)$ tal que $\alpha(v) \in I^*(v)$.*

Llavors, una solució puntual és un procediment que assigna a cada joc cooperatiu un vector de $\mathbb{R}^n$, $\alpha(v) = (\alpha_1(v), \ldots, \alpha_n(v))$, on $\alpha_i(v)$ indica el pagament al jugador i, i tal que el guany total sigui totalment distribuït entre els jugadors, és a dir, que la distribució sigui eficient.

1.3.1 El valor de Shapley

Una de les solucions puntuals més ben conegudes i estudiades és el **valor de Shapley**, introduït per Lloyd Shapley (1953), Premi Nobel d'Economia de 2012. Abans de definir-lo, introduïm un concepte que ens serà útil per a entendre més bé aquesta solució tan important.

Definició 1.3.2. *Sigui $v \in G^N$ un joc cooperatiu. Donada una coalició $S \subsetneq N$ i un jugador $i \notin S$, anomenarem **contribució marginal** del jugador i a la coalició S al valor*

$$v(S \cup \{i\}) - v(S).$$

Fent servir la idea de contribució marginal, definim el valor de Shapley:

Definició 1.3.3. *Sigui $v \in G^N$ un joc cooperatiu d'utilitat transferible. El **valor de Shapley** $\phi(v) = (\phi_1(v), \ldots, \phi_n(v))$ d'aquest joc és:*

$$\phi_i(v) := \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \gamma(S)[v(S \cup \{i\}) - v(S)] \;\; \forall i \in N,$$

on $\gamma(S) = \frac{s!(n-s-1)!}{n!}$ per a tota $S \subsetneq N$.

El valor de Shapley reflecteix la idea de tenir en compte les diverses contribucions marginals dels jugadors. Però, per aquest motiu, no es pot assegurar que el valor de Shapley es trobi sempre dins del core i, de vegades, pot no ser ni tan sols una imputació.

Exemple 1.2.5 (Revisitat). Recuperem el joc de l'Exemple 1.2.5 i calculem-ne el valor de Shapley per il·lustrar-ho. Utilitzant la fórmula del valor de Shapley donada en la Definició 1.3.3,

$$\begin{aligned}
\phi_1(v) &= \frac{2}{6} \cdot v(1) + \frac{1}{6} \cdot (v(12) - v(2)) + \frac{1}{6} \cdot (v(13) - v(3)) + \frac{2}{6} \cdot (v(123) - v(23)) \\
&= \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot (1-0) + \frac{1}{6} \cdot (1-0) + \frac{1}{3} \cdot (1-0) \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{4}{6}, \\
\phi_2(v) &= \frac{1}{6}, \\
\phi_3(v) &= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

És a dir, $\phi(v) = (\frac{4}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$. Observem que aquesta distribució no es troba dins el core, ja que precisament, el core d'aquest exemple consistia en un sol punt, que no coincideix amb el valor de Shapley.

Així, el valor de Shapley, que és la solució puntual més coneguda dels jocs cooperatius, té un petit inconvenient: pot no trobar-se dins del core del joc i, per tant, patir d'algun problema d'estabilitat o racionalitat. Amb el pas del temps, van sorgir altres solucions puntuals. Entre d'elles, ens trobem una solució que, al contrari que el valor de Shapley, selecciona sempre distribucions que es troben a dins el core. Aquesta solució tan important es coneix amb el nom de **prenucleolus** (Schmeidler, 1969).

1.3.2 El prenucleolus

Abans de donar una definició formal del prenucleolus, necessitem introduir una sèrie de conceptes que seran clau per a entendre'n el funcionament. Introduirem a continuació el concepte d'**excés** d'una coalició respecte d'una distribució.

Definició 1.3.4. *Sigui $v \in G^N$ un joc cooperatiu, l'**excés** d'una coalició S respecte d'una distribució $x \in \mathbb{R}^n$ és la diferència entre el valor d'una coalició i el que rep per la distribució, és a dir,*

$$e(S, x) = v(S) - x(S).$$

Si observem aquesta definició d'excés, veurem que la podem entendre com una expressió de la insatisfacció de la coalició, ja que estem fent la diferència entre el valor que pot obtenir gràcies a la cooperació dels membres de la coalició i el que li assigna la distribució x. Notem també que aquests excessos poden ser positius o negatius. Si un excés és positiu, serà una queixa directa de la coalició; però si és negatiu pot ser interpretat com una mesura de com és de satisfactòria x per a la coalició S. Llavors, un excés més gran indica un grau d'insatisfacció major. Per això, passarem a continuació a ordenar aquests excessos de forma decreixent. Un cop ordenats els excessos, haurem construït un vector, que anomenarem **vector d'excessos**.

Definició 1.3.5. *Donat un joc cooperatiu $v \in G^N$ i una distribució $x \in \mathbb{R}^n$, el **vector d'excessos** $\Theta(x) \in \mathbb{R}^{2^n}$ serà*

$$\Theta(x) = (e(S, x))_{S \subseteq N},$$

amb $\Theta_k(x) \geq \Theta_{k+1}(x)$ per a tota $k = \{1, \ldots, 2^n - 1\}$.

Llavors, donada una proposta de distribució x, el vector d'excessos representa les queixes que presenten les coalicions contra x, començant per la queixa més gran, després vindrà la 2a més gran, i així successivament. A continuació, ens interessarà comparar distribucions, i ho farem comparant els corresponents vectors d'excessos fent servir l'ordre lexicogràfic, que passem a definir a continuació.

Definició 1.3.6. *Siguin $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, \ldots, y_n)$ dos vectors de $\mathbb{R}^n$. Direm que x és lexicogràficament menor que y, i ho denotarem com*

$$x \leq_{lex} y,$$

si existeix un $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$x_k \leq y_k$$

i

$$x_i = y_i \;\; \forall i \in \{1, \ldots, k-1\}.$$

També direm que x és estrictament lexicogràficament menor que y, i ho denotarem com

$$x <_{lex} y,$$

si existeix un $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$x_k < y_k$$

i

$$x_i = y_i \;\; \forall i \in \{1, \ldots, k-1\}.$$

El que fem llavors és comparar les primeres components dels dos vectors. Si són iguals, es comparen les segones components, i així es segueix fins que es troben dues components diferents. El vector lexicogràficament menor serà aquell que tingui dita component més petita.

Un cop introduïts aquests conceptes previs, estem en posició de definir una altra de les solucions puntuals més importants i que tractarem més al llarg del treball: el **prenucleolus**. Prenent com a referència el conjunt de les preimputacions, serem capaços de definir-lo. Vegem-ho:

Definició 1.3.7. *Sigui $v \in G^N$ un joc cooperatiu. El* ***prenucleolus*** *és la preimputació $\nu^* \in I^*(v)$ tal que*

$$\Theta(\nu^*) \leq_{lex} \Theta(x) \ \ \forall x \in I^*(v).$$

El prenucleolus serà llavors aquella preimputació que sigui preferida a totes les altres preimputacions mitjançant comparació lexicogràfica d'excessos ordenats de forma decreixent. Observem que mentre que el valor de Shapley distribueix d'acord amb les contribucions dels agents, el prenucleolus obeeix el principi de minimitzar les queixes més grans.

Anem a veure a continuació que el prenucleolus existeix i és únic.

Teorema 1.3.8. *Sigui $v \in G^N$ un joc cooperatiu. Llavors el prenucleolus existeix i és únic.*

Per a poder realitzar la demostració d'aquest teorema, utilitzem el Teorema de Weiestrass i el Teorema local-global de les funcions convexes. Aquests dos resultats, juntament amb les seves demostracions, els podem trobar a l'apèndix del treball. Igualment, en fem referència en el moment d'utilitzar-los en la demostració que estem a punt de començar. Un cop llegides i enteses les eines necessàries, podem passar a demostrar l'existència i la unicitat del prenucleolus.

Demostració. Suposem que $v \in G^N$ és un joc cooperatiu i sigui $I^*(v) \neq \emptyset$. Considerem el conjunt següent:

$$\nu^*(v) := \{x \in I^*(v) \mid \Theta(x) \leq_{lex} \Theta(y) \ \ \forall y \in I^*(v)\}.$$

Per provar-ne l'existència, veurem que aquest conjunt que acabem de definir és no buit. Sigui $x \in I^*(v)$ i considerem ara la funció

$$\theta_1(x) := max\{l_1(x), l_2(x), \ldots, l_{2^n}(x)\},$$

on $l_i(x) = e(S_i, x)$ i on S_i és la coalició i. Aquesta funció $\theta_1(x)$ és un màxim de funcions lineals i, per tant, és contínua i convexa.

Ara, sigui $y \in I^*(v)$ una preimputació arbitrària, i sigui $\mu = max_{S \subseteq N} e(S, y)$. Definim ara un nou conjunt,

$$X = \{x \in I^*(v) \mid e(S, x) \leq \mu \ \ \forall S \subseteq N\}.$$

Evidentment, si $\nu^*(v)$ existeix, pertany a X. Vegem-ho: suposem que no és així, és a dir, que $\nu^* = z$ i $z \notin X$. Aleshores, existeix algun $S \subseteq N$ tal que $e(S, z) > \mu$. Aquest fet implica que la primera component del vector d'excessos $\Theta(z)$ és major que la primera component del vector d'excessos $\Theta(y)$, que és exactament μ. Per tant, $y <_{lex} z$, però aquest fet entra en contradicció amb $\nu^* = z$, és a dir, que z no seria la preimputació preferida a les altres per comparació lexicogràfica d'excessos.

A continuació, ens cal veure que el conjunt X que hem definit és no buit, tancat, convex i afitat. Observem que X és clarament no buit, ja que $y \in X$. Que X sigui tancat també és clar, perquè un conjunt de $\mathbb{R}^n$ no buit i definit per desigualtats lineals no estrictes cada una d'elles, és tancat.

Vegem ara que és convex. És a dir, volem veure que per $x, z \in X$ i $\lambda \in [0,1]$, llavors $\lambda x + (1-\lambda)z$ també pertany a X. Per tant, sabem que $e(S,x) = v(S) - x(S) \leq \mu$ i que $e(S,z) = v(S) - z(S) \leq \mu$, per a tot $S \subseteq N$. Ara,

$$\begin{aligned} e(S, \lambda x + (1-\lambda)z) &= v(S) - (\lambda x + (1-\lambda)z)(S) \\ &= v(S) - \lambda x(S) + (1-\lambda)z(S) \\ &= \lambda v(S) + (1-\lambda)v(S) - \lambda x(S) + (1-\lambda)z(S) \\ &= (\lambda v(S) - \lambda x(S)) + ((1-\lambda)v(S) + (1-\lambda)z(S)) \\ &\leq \lambda\mu + (1-\lambda)\mu = \mu, \end{aligned}$$

amb el que provem que $\lambda x + (1-\lambda)z$ pertany a X. Per tant, X és convex.

Comprovem per últim que el conjunt és afitat. Sigui $x \in X$,
si $S = \{i\}$,

$$v(i) - x_i \leq \mu \iff x_i \geq v(i) - \mu,$$

i si $S = N \setminus \{i\}$,

$$x_i = v(N) - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j \leq v(N) - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} (v(j) - \mu).$$

Per tant,

$$v(i) - \mu \leq x_i \leq v(N) - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} (v(j) - \mu),$$

amb el que provem que X és afitat, ja que al ser no buit, és clar que

$$v(i) - \mu \leq v(N) - \sum_{j \in \setminus \{i\}} (v(j) - \mu).$$

Un cop vist que el conjunt X és no buit, convex i compacte, podem aplicar el Teorema de Weierstrass (Teorema 5.2) a la funció $\theta_1(x)$ definida sobre el conjunt X i obtenim que existeix un mínim de $\theta_1(x)$. Apliquem també el Teorema local-global de funcions convexes (Teorema 5.3) a la funció $\theta_1(x)$ definida sobre X i obtenim que el conjunt on s'assoleix aquest mínim, anomenem-lo X^1, és convex. Aquest conjunt X^1 també és compacte, ja que les funcions contínues envien compactes a compactes (Teorema 5.1).

Observem ara que el valor que pren θ_1 sobre X^1 és constant, i hi ha d'haver almenys una funció l_{i_1} que sigui constant sobre X^1. Per veure aquest fet, suposem que hi ha k funcions, $l_{i_1}, \ldots, l_{i_k}$, que assoleixen el mínim de $\theta_1(x)$ (les k primeres) i suposem que cap és constant sobre X^1. Llavors, cada una té un punt $z_i \in X^1$, per a $i = 1, \ldots, k$, on $l_i(z_i) > min_{x \in I^*(v)}(\theta_1(x)) = C$. A més, $l_i(z_j) \geq C$, si $i \neq j$. Prenent el punt $z = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} z_j$, que és combinació lineal convexa de $z_1, \ldots, z_k$, i per la linealitat de les funcions, $l_i(z) > C$ per a $i = 1, \dots, k$, en contradicció amb el fet que, per convexitat de X^1, $z \in X^1$.

Considerem llavors una funció $\theta_2(x)$ com la d'abans però traient-li l_{i_1}. Aplicant una altra vegada els Teoremes de Weierstrass i local-global de funcions convexes (Teoremes 5.2, 5.3) sobre aquesta nova funció, aconseguim minimitzar $\theta_2(x)$ sobre X^1 i obtenim un conjunt X^2 de mínims amb $X^2 \subseteq X^1$, convex, compacte i no buit amb almenys una funció l_{i_2} constant sobre ell.

Iterant aquest procediment $2^n - 1$ vegades, obtenim un conjunt X^* tal que

$$X^* \subseteq \cdots \subseteq X^1 \subseteq X$$

i que és convex, compacte i no buit.

Vegem ara si efectivament, $X^* = \nu^*(v)$: per construcció de X^*, $\forall x \in X^*$,

$$\begin{aligned}
&\theta_1(x) < \theta_1(y),\ \forall y \in X \backslash X^1, \\
&\theta_2(x) < \theta_2(y),\ \forall y \in X^1 \backslash X^2, \\
&\theta_3(x) < \theta_3(y),\ \forall y \in X^2 \backslash X^3, \\
&\dots,
\end{aligned}$$

on en $\theta_2(x) < \theta_2(y)$, θ_1 és constant; en $\theta_3(x) < \theta_3(y)$, θ_2 és constant; i així successivament. Per tant, $\Theta(x) \leq_{lex} \Theta(y)\ \forall y \in I^*(v)$. I a més, tot element que no pertanyi a X^*, no pertany a $\nu^*(v)$. Llavors, efectivament $X^* = \nu^*(v)$.

Vegem-ne la unicitat: Si hi hagués dos elements X^{*^1} i X^{*^2} en X^*, els excessos de X^{*^1} serien iguals als excessos de X^{*^2}, i, en particular, tots els excessos de les coalicions individuals també serien iguals. És a dir, que serien exactament el mateix punt. □

Si pensem en la definició del core, observem que les distribucions x que hi pertanyen compleixen $x(S) \geq v(S)\ \forall S \subseteq N$. Aquest fet ens dona una caracterització de les distribucions del core, ja que aquestes sempre compliran que $e(S, x) \leq 0\ \forall S \subseteq N$. Per això, quan es comparen vectors d'excessos, qualsevol distribució que es troba a fora del core és pitjor que qualsevol de dins, ja que una distribució que es trobi a fora del core té almenys un excés positiu i, en canvi, un punt del core té tots els excessos negatius.

Llavors, el prenucleolus és una solució puntual que, donat un joc, ens seleccionarà una distribució tal que:

(1) sempre es pot definir, ja que $I^*(v) \neq \emptyset$, i a més, és una preimputació,

(2) si el core és no buit, selecciona una distribució d'aquest (vegeu també el Teorema 2.1.2),

(3) és el punt que minimitza les queixes de les coalicions.

Exemple 1.2.5 (Revisitat). Un cop feta aquesta caracterització del prenucleolus, si pensem en quina és aquesta distribució en el cas del joc de l'Exemple 1.2.5, la resposta és ben senzilla. El prenucleolus del joc v és l'única distribució del core, $\nu^*(v) = (1, 0, 0)$.

Un cop que sabem que el prenucleolus existeix i és únic, ens agradaria poder trobar un mètode de càlcul explícit d'aquesta solució. Al contrari que el valor de Shapley, no tenim una fórmula concreta per calcular el prenucleolus d'un joc. Així i tot, s'han trobat mètodes laboriosos però efectius per al seu càlcul. Un d'ells consisteix en la resolució d'una seqüència finita de programes lineals. Per a més detalls sobre aquest mètode, consulteu Owen (1995). El segon mètode, que passem a veure a continuació, s'anomena criteri de Kohlberg. Ens serveix per verificar si una distribució donada és el prenucleolus d'un joc o no.

Col·leccions equilibrades i criteri de Kohlberg

El **criteri de Kohlberg** (Kohlberg, 1971) és un mètode explícit per decidir si una distribució eficient donada és el prenucleolus d'un joc o no. Aquest criteri fa servir el concepte de col·leccions equilibrades, que passem a definir a continuació.

Definició 1.3.9. *Una col·lecció de coalicions $\mathcal{C} = \{S_1, \ldots, S_k\}$ és una* ***col·lecció equilibrada*** *si existeixen uns valors $\alpha_{S_1}, \ldots, \alpha_{S_k} \in \mathbb{R}_{++}$ estrictament positius tals que per a tot $i \in N$,*

$$\sum_{\{j|i\in S_j\}} \alpha_{S_j} = 1,$$

on els nombres α_{S_j} són els ***pesos*** *associats a cada coalició S_j.*

És a dir, per a cada jugador, la suma dels pesos associats a les coalicions que contenen aquest jugador és 1. Per tant, perquè una col·lecció sigui equilibrada s'ha de complir aquesta condició per a tots els jugadors a la vegada, que puguin repartir una unitat d'esforç entre les coalicions a les quals pertanyen. Fixem-nos per exemple que, qualsevol col·lecció $\mathcal{C}$ que sigui una partició de N, és una col·lecció equilibrada amb pesos tots iguals a 1.

Exemple 1.3.10. Sigui $N = \{1, 2, 3\}$. La col·lecció $\mathcal{C}_1 = \{\{1\}, \{23\}\}$ és una partició de N i una col·lecció equilibrada amb pesos $\alpha_1 = \alpha_{23} = 1$. D'altra banda, la col·lecció $\mathcal{C}_2 = \{\{12\}, \{13\}, \{23\}\}$ no és una partició de N, però és també una col·lecció equilibrada amb pesos $\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = \frac{1}{2}$.

Observem que, en el cas de col·leccions equilibrades que contenen altres col·leccions també equilibrades, els pesos associats no són únics.

Exemple 1.3.11. Sigui $N = \{1, 2, 3\}$. La col·lecció $\mathcal{C} = \{\{1\}, \{2\}, \{13\}, \{23\}\}$ és equilibrada amb pesos $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_{13} = \alpha_{14} = \frac{1}{2}$ o també amb pesos $\alpha_1 = \alpha_{23} = \frac{1}{3}$ i $\alpha_2 = \alpha_{13} = \frac{2}{3}$. Notem que $\mathcal{C} = \{\{1\}, \{23\}\} \cup \{\{2\}, \{13\}\}$, és a dir, $\mathcal{C}$ conté altres col·leccions equilibrades i, per aquest motiu, els pesos no són únics.

Amb el concepte de col·lecció equilibrada, podem definir el de joc equilibrat.

Definició 1.3.12. *Un joc cooperatiu $v \in G^N$ és* ***equilibrat*** *si per a tota col·lecció equilibrada de N, $\mathcal{C} = \{S_1, \ldots, S_k\}$ amb pesos $\alpha_{S_1}, \ldots, \alpha_{S_k}$, es compleix*

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_{S_j} v(S_j) \leq v(N).$$

Enunciem ara l'equivalència entre els jocs equilibrats i els jocs amb core no buit. Aquest teorema tan important va ser demostrat per primera vegada per Bondareva (1963), però el resultat estava en rus. Així, quatre anys més tard, Shapley (1967) també va provar-ho; en aquest cas, en anglès. Una versió de la demostració d'aquest teorema la podem trobar a Rafels et al. (1999).

Teorema 1.3.13. *Un joc $v \in G^N$ és equilibrat si i només si $C(v) \neq \emptyset$.*

Per tant, anomenarem jocs equilibrats al conjunt de tots els jocs amb core no buit, i els denotarem com B^N.

Enunciem a continuació el criteri de Kohlberg. Per a una demostració d'aquest resultat podem consultar Kohlberg (1971) o Owen (1995). Sigui $x \in I^*(v)$. En aquest resultat i sempre que utilitzem el criteri de Kohlberg, denotarem per ε els valors dels excessos associats a x. Així, considerem la sèrie dels valors dels excessos associats a les diverses coalicions diferents de les trivials (és a dir, diferents de N i de $\emptyset$) respecte de x, en ordre decreixent:

$$\varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{k(x)}.$$

Observem que la quantitat $k(x)$ d'excessos diferents entre si dependrà de la preimputació x. A més, denotem per $\mathcal{B}^i$ al conjunt de coalicions tals que el seu excés és ε^i. Per tant, $\mathcal{B}^1$ representa el conjunt de totes aquelles coalicions que tinguin associat l'excés més gran ε^1. Seguidament, $\mathcal{B}^2$ representa el conjunt de totes aquelles coalicions que tinguin associat el segon excés més gran ε^2. I així successivament.

Proposició 1.3.14. *Sigui $v \in G^N$ un joc cooperatiu i $x \in I^*(v)$ una preimputació. Llavors, x és el prenucleolus del joc v si i només si per a tot $1 \leq j \leq k(x)$*

$$\bigcup_{t=1}^{j} \mathcal{B}^t$$

és una col·lecció equilibrada.

És a dir, el criteri de Kohlberg caracteritza el prenucleolus d'un joc en termes de les coalicions d'igual excés. Donada una preimputació, el criteri demana que s'analitzi en quines coalicions s'assoleix l'excés més gran. Si la preimputació donada és el prenucleolus, aquestes coalicions han de formar una col·lecció equilibrada. A continuació, el conjunt de coalicions on s'assoleix el segon excés més gran unit a la col·lecció de coalicions d'excés màxim haurà de formar també una col·lecció equilibrada. Així, es segueixen analitzant successivament les col·leccions de coalicions amb excessos menors unides a les col·leccions amb excessos majors. Si totes les col·leccions resulten ser equilibrades, la preimputació donada és el prenucleolus.

Exemple 1.2.5 (Revisitat). Tractem de contrastar que el prenucleolus del joc v de l'Exemple 1.2.5 és $(1, 0, 0)$ utilitzant el criteri de Kohlberg. Calculem-ne els excessos de cada coalició (excepte de les trivials):

Coalicions S	Excessos $e(S,x) = v(S) - x(S)$
$\{1\}$	-1
$\{2\}$	0
$\{3\}$	0
$\{12\}$	0
$\{13\}$	0
$\{23\}$	0

Ordenem ara els excessos en ordre decreixent:

Excessos	Coalicions
$\varepsilon^1 = 0$	$\mathcal{B}^1 : \begin{cases} \{2\} \\ \{3\} \\ \{12\} \\ \{13\} \\ \{23\} \end{cases}$
$\varepsilon^2 = -1$	$\mathcal{B}^2 : \begin{cases} \{1\} \end{cases}$

Observem que $\mathcal{B}^1$ és una col·lecció equilibrada amb els pesos que s'indiquen:

$\mathcal{B}^1$	Pesos
$\{2\}$	$\frac{1}{4}$
$\{3\}$	$\frac{1}{4}$
$\{12\}$	$\frac{1}{2}$
$\{13\}$	$\frac{1}{2}$
$\{23\}$	$\frac{1}{4}$

Efectivament, el jugador 1 pertany a les coalicions $\{12\}$, $\{13\}$. Sumant els pesos corresponents,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

El jugador 2 pertany a les coalicions $\{2\}$, $\{12\}$, $\{23\}$, amb pesos

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1.$$

El jugador 3 pertany a les coalicions $\{3\}$, $\{13\}$, $\{23\}$, amb pesos

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1.$$

I també $\mathcal{B}^1 \cup \mathcal{B}^2$ és una col·lecció equilibrada si associem el pes $\frac{1}{3}$ a cada coalició. Com que les col·leccions són equilibrades, x és el prenucleolus del joc v, $\nu^*(v) = (1, 0, 0)$, tal com volíem comprovar.

1.3.3 El prenucleolus per-càpita

Per acabar el capítol, presentem una tercera solució puntual dels jocs cooperatius. Amb una sèrie de lleugeres modificacions sobre el prenucleolus, definirem el **prenucleolus per-càpita**, concepte introduït per primera vegada per Grotte (1970, 1976).

Abans de definir el prenucleolus per-càpita, tinguem present el concepte d'excés per-càpita, similar al concepte d'excés però calculant-lo en termes per-càpita o per membre de la coalició. És a dir, l'excés per-càpita d'una coalició S respecte d'una distribució x és

$$\bar{e}(S, x) = \frac{v(S) - x(S)}{|S|}.$$

Per tant, l'excés per-càpita ens informa, ja no de la "queixa"d'una coalició, sinó de la queixa de cada membre de la coalició o queixa per-càpita. Una petita variació en la definició del vector d'excessos farà que puguem considerar el vector d'excessos per-càpita com $\bar{\Theta}(x) \in \mathbb{R}^{2^n}$ tal que

$$\bar{\Theta}(x) = (\bar{e}(S,x))_{S \subseteq N},$$

amb $\bar{\Theta}_k(x) \geq \bar{\Theta}_{k+1}(x)$ amb $k = \{1, 2, \ldots 2^n - 1\}$. Es tracta llavors del vector format pels excessos per-càpita ordenats de forma decreixent. Definim ara el prenucleolus per-càpita:

Definició 1.3.15. *Sigui $v \in G^N$ un joc cooperatiu. El **prenucleolus per-càpita** és la preimputació $\bar{\nu}^* \in I^*(v)$ tal que*

$$\bar{\Theta}(\bar{\nu}^*) \leq_{lex} \bar{\Theta}(x) \;\; \forall x \in I^*(v).$$

El concepte és llavors molt similar al del prenucleolus que hem definit en l'apartat anterior, però en aquest cas, el prenucleolus per-càpita serà la preimputació que sigui preferida a les altres mitjançant comparació lexicogràfica d'excessos per-càpita ordenats de forma decreixent. A més a més, es pot demostrar, seguint quasi línia per línia la demostració del Teorema 1.3.8, que el prenucleolus per-càpita existeix i és únic.

De la mateixa manera que el prenucleolus, el prenucleolus per-càpita és una solució puntual que, donat un joc, ens seleccionarà una distribució tal que:

(1) sempre es pot definir, ja que $I^*(v) \neq \emptyset$, i a més, és una preimputació,

(2) si el core és no buit, selecciona una distribució d'aquest,

(3) és el punt que minimitza les queixes per-càpita de les coalicions.

A més a més, el criteri de Kohlberg es manté i ens serveix, també, per a contrastar si una preimputació donada és el prenucleolus per-càpita d'un joc o no (vegeu, per exemple, Derks i Haller, 1999). En aquest cas, s'haurà de tenir en compte que les col·leccions de coalicions que hem de comprovar que són equilibrades són aquelles on s'assoleixen els distints excessos per-càpita (que denotarem com $\bar{\varepsilon}$) ordenats de forma decreixent. Feta aquesta caracterització, podem trobar el prenucleolus per-càpita del joc v de l'Exemple 1.2.5.

Exemple 1.2.5 (Revisitat). Afirmem que el prenuclelous per-càpita del joc v és la preimputació $x = (1, 0, 0)$, ja que és l'únic punt del core, és a dir, $\bar{\nu}^*(v) = (1, 0, 0)$. Contrastem aquesta afirmació utilitzant el criteri de Kohlberg. Calculem els excessos per-càpita de cada coalició (excepte de les trivials):

Coalicions S	Excessos per-càpita $\bar{e}(S,x) = \frac{v(S)-x(S)}{\lvert S \rvert}$
$\{1\}$	-1
$\{2\}$	0
$\{3\}$	0
$\{12\}$	0
$\{13\}$	0
$\{23\}$	0

Ordenem ara els excessos per-càpita en ordre decreixent:

Excessos per-càpita	Coalicions
$\bar{\varepsilon}^1 = 0$	$\mathcal{B}^1 : \begin{cases} \{2\} \\ \{3\} \\ \{12\} \\ \{13\} \\ \{23\} \end{cases}$
$\bar{\varepsilon}^2 = -1$	$\mathcal{B}^2 : \{ \; \{1\}$

Observem que $\mathcal{B}^1$ és una col·lecció equilibrada amb els pesos que s'indiquen:

$\mathcal{B}^1$	Pesos
$\{2\}$	$\frac{1}{4}$
$\{3\}$	$\frac{1}{4}$
$\{12\}$	$\frac{1}{2}$
$\{13\}$	$\frac{1}{2}$
$\{23\}$	$\frac{1}{4}$

I també $\mathcal{B}^1 \cup \mathcal{B}^2$ és una col·lecció equilibrada si associem el pes $\frac{1}{3}$ a cada coalició. Com que les col·leccions són totes equilibrades, x és el prenucleolus per-càpita del joc v, $\bar{\nu}^*(v) = (1, 0, 0)$, tal com volíem comprovar.

En el capítol següent estudiem el comportament, tant del valor de Shapley com del prenucleolus i del prenucleolus per-càpita, respecte d'una sèrie de propietats de racionalitat i de monotonia.

Capítol 2

Impossibilitat: racionalitat i monotonia coalicional

Com bé indica el títol del treball i així com hem comentat en la introducció, la idea principal és estudiar diverses combinacions de propietats de racionalitat i de monotonia de solucions puntuals en els jocs cooperatius. Llavors, introduirem en aquest capítol la propietat de racionalitat i la primera de les propietats de monotonia que tractarem.

2.1 La propietat de selecció del core

Hem definit els conceptes de solució puntual i de core d'un joc cooperatiu. Introduirem ara una propietat en la qual demanarem que la solució pertanyi al core per a aquells jocs en què el core sigui no buit. Coneixarem aquesta propietat amb el nom de **selecció del core**, que abreujarem amb les segles **SC**. La selecció del core reflecteix la idea que si és possible, les solucions han de fer propostes estables des d'un punt de vista racional. Ni individus ni coalicions han de tenir incentius a trencar la cooperació, pel fet de poder obtenir algun benefici addicional si ho fan. Formalitzem-ho:

Definició 2.1.1. *Donada una solució puntual $\alpha : G^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$, aquesta satisfà la propietat de **selecció del core, SC**, si per a tot joc equilibrat $v \in B^N$, $\alpha(v) \in C(v)$.*

Observem que aquesta propietat ens dona un resultat important en el cas de jocs cooperatius amb un únic punt al core, i és que tota solució que compleixi la propietat de SC queda totalment determinada. Ara bé, quan un joc tingui més d'un punt en el core o quan aquest sigui buit, la propietat de SC no serà suficient per determinar una solució puntual.

Passem primer a veure, però si les tres solucions puntuals importants que hem introduït abans, el valor de Shapley i el prenucleolus i el prenucleolus per-càpita, satisfan la propietat de SC.

Si recuperem l'Exemple 1.2.5 del capítol anterior en què calculàvem el valor de Shapley per a un joc, veiem ràpidament que *el valor de Shapley no satisfà la propietat de selecció del core.* En el càlcul del valor de Shapley d'aquest exemple, que hem fet després de la Definició 1.3.3, hem obtingut que el valor de Shapley és $\phi(v) = (\frac{4}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$. El core, en canvi, consistia en un sol punt, $C(v) = \{(1, 0, 0)\}$. És clar llavors que $\phi(v) \notin C(v)$.

En canvi, el prenucleolus sí que satisfà aquesta propietat. Vegem-ho:

Teorema 2.1.2. *Sigui $v \in G^N$ un joc cooperatiu i sigui ν^* el seu prenucleolus. Llavors, el prenucleolus satisfà la propietat de selecció del core.*

Demostració. Sigui $v \in B^N$ un joc equilibrat. Aleshores existeix almenys una distribució $x \in C(v)$. Llavors, $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$ per a totes les coalicions $S \subseteq N$. Per això, $e(S, x) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i \leq 0$ per a totes les coalicions $S \subseteq N$.

Suposem ara que $\nu^* \notin C(v)$. Aleshores, existeix un $S \subsetneq N$ tal que

$$v(S) > \sum_{i \in S} \nu_i^*(S) \iff e(S, \nu^*) > 0.$$

Per tant, $\Theta(x) \leq_{lex} \Theta(\nu^*)$, ja que l'excés més gran respecte de ν^* és positiu i, en canvi, respecte de x és negatiu o zero, en contradicció amb el fet que ν^* és el prenucleolus. $\square$

Notem que *el prenucleolus per-càpita també satisfà la propietat de selecció del core.* La demostració es segueix pràcticament igual a la del Teorema 2.1.2, treballant en aquest cas amb excessos per-càpita.

2.2 La monotonia coalicional

Ens interessa estudiar si la propietat de SC, que considerem de racionalitat, és compatible amb altres propietats de monotonia. Enunciem llavors la primera de les propietats de monotonia i veiem quina classe de resultats, de compatibilitat o incompatibilitat, obtenim quan la combinem amb la propietat de selecció del core. Passem a introduir la propietat de **monotonia coalicional**, que abreujarem també amb les seves segles, **MC**.

Definició 2.2.1. *Una solució puntual, $\alpha : G^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$, satisfà la propietat de* ***monotonia coalicional, MC****, si per a tot $v, v' \in G^N$, tals que existeix una coalició $T \neq \emptyset$ per la qual $v(T) < v'(T)$ i $v(S) = v'(S)$ per a tota coalició $S \neq T$, llavors es compleix $\alpha_i(v) \leq \alpha_i(v')$ per a tot jugador $i \in T$.*

El que ens diu aquesta propietat és que si el valor d'una coalició concreta augmenta mentre que els valors de totes les altres coalicions es mantenen iguals, llavors el pagament a cada membre d'aquesta coalició que ha augmentat no hauria de disminuir. Veiem a continuació com el valor de Shapley sí que la satisfà.

Proposició 2.2.2. *El valor de Shapley verifica la propietat de monotonia coalicional.*

Demostració. Siguin $v, v' \in G^N$ tals que $v(T) < v'(T)$ per a alguna coalició $T \neq \emptyset$ i $v(S) = v'(S)$ $\forall S \neq T$. Volem veure que $\phi_i(v) \leq \phi_i(v')$ per a tota $i \in T$. Sigui $i \in T$,

$$\begin{aligned}
\phi_i(v) &= \gamma(T \setminus \{i\})[v(T \setminus \{i\} \cup \{i\}) - v(T \setminus \{i\})] + \sum_{\substack{S \subseteq N \setminus \{i\} \\ S \neq T \setminus \{i\}}} \gamma(S)[v(S \cup \{i\}) - v(S)] \\
&= \gamma(T \setminus \{i\})[v(T) - v(T \setminus \{i\})] + \sum_{\substack{S \subseteq N \setminus \{i\} \\ S \neq T \setminus \{i\}}} \gamma(S)[v'(S \cup \{i\}) - v'(S)] \\
&< \gamma(T \setminus \{i\})[v'(T) - v'(T \setminus \{i\})] + \sum_{\substack{S \subseteq N \setminus \{i\} \\ S \neq T \setminus \{i\}}} \gamma(S)[v'(S \cup \{i\}) - v'(S)] = \phi_i(v'),
\end{aligned}$$

on la desigualtat es segueix de $v(T) < v'(T)$. □

Acabem de veure llavors que el valor de Shapley sí que verifica la propietat de monotonia coalicional tot i que no verifica la propietat de selecció del core. Sembla raonable pensar en la possibilitat de trobar alguna solució que satisfaci les dues propietats alhora. Malauradament, per a jocs cooperatius de 4 o més jugadors, aquesta suposició no és certa, és a dir, no hi ha cap solució que satisfaci les dues propietats alhora. Young (1985), va demostrar aquest resultat en primera instància per a jocs cooperatius de 5 jugadors o més i més endavant, Housman i Clark (1998) van arribar a la mateixa conclusió per a jocs de 4 o més jugadors. Formalitzem-ho:

Teorema 2.2.3. *Per $|N| \geq 4$, no hi ha cap solució puntual que satisfaci les propietats de selecció del core i de monotonia coalicional.*

Demostració. Ho demostrem per $|N| = 4$. Sigui v un joc cooperatiu de 4 jugadors amb funció característica:

$$v(1) = v(2) = v(3) = v(4) = v(12) = v(34) = 0,\ v(N) = 2$$

i $v(S) = 1$, per a qualsevol altra coalició restant. Suposem que α és una solució puntual que satisfà tant SC com MC. Considerem ara 4 jocs diferents: v^1, v^2, v^3, v^4 amb la mateixa funció característica que v excepte per les coalicions següents: $v^1(134) = 2$, $v^2(234) = 2$, $v^3(123) = 2$, $v^4(124) = 2$. Anem a trobar el core d'aquests jocs. Fem-ho pel joc v^3, per exemple, i la resta de cores es trobaran de manera molt similar.

Suposem que x és una distribució que es troba en el core del joc v^3, és a dir, $x \in C(v^3)$. Llavors,

$$0 = v^3(4) \leq x_4 = v^3(N) - x_1 - x_2 - x_3 \leq v^3(N) - v^3(123) = 2 - 2 = 0 \iff x_4 = 0,$$

on la primera desigualtat s'obté d'aplicar racionalitat individual; la segona igualtat, d'eficiència i la segona desigualtat, de racionalitat coalicional. Observem, a més a més, que $x_1 = x_1 + x_4 \geq v^3(14) = 1$ i $x_2 = x_2 + x_4 \geq v^3(24) = 1$. D'on

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_4 &= 0 \\ x_1 &\geq 1 \\ x_2 &\geq 1 \\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x_1 = x_2 = 1,\ x_3 = 0,$$

i aleshores, $C(v^3) = \{(1,1,0,0)\}$. Anàlogament,

$$\begin{aligned} C(v^1) &= \{(0,0,1,1)\}, \\ C(v^2) &= \{(0,0,1,1)\}, \\ C(v^4) &= \{(1,1,0,0)\}. \end{aligned}$$

Com veiem, el core d'aquests jocs estan formats per un únic punt. Per tant, com que hem dit que α satisfà SC, tenim $\alpha(v^1) = \alpha(v^2) = (0,0,1,1)$ i $\alpha(v^3) = \alpha(v^4) = (1,1,0,0)$.

Ara observem que $v(123) < v^3(123)$ i que $v(S) = v^3(S)$ per a tota $S \neq \{123\}$. Com que hem dit que α satisfà MC, llavors $\alpha_3(v) \leq \alpha_3(v^3) = 0$. De la mateixa manera, $\alpha_i(v) \leq \alpha_i(v^i) = 0$, per $i = 1,2,4$. Però aquest fet és contradicció amb el fet que $\alpha(v)$ és eficient. Llavors, α no pot satisfer SC i MC alhora. □

Amb aquesta demostració que acabem de veure podem concloure que, en concret, ni el prenucleolus ni el prenucleolus per-càpita satisfan MC en jocs de 4 o més jugadors. Tot i així, en el cas de jocs amb 3 o menys jugadors, el resultat que s'obté quan combinem aquestes dues propietats és ben distint. Veiem com el prenucleolus sí que satisfà SC i MC (Housman i Clark, 1998; però no ho demostren, en concret, pel prenucleolus).

Teorema 2.2.4. *Per $|N| \leq 3$, el prenucleolus satisfà selecció del core i monotonia coalicional.*

Demostració. Ho demostrem per $|N| = 3$, el cas $|N| \leq 2$ és trivial en comprovar que, per $|N| = 2$, $\nu_i^*(v) = v(i) + \frac{v(N)-v(i)-v(j)}{2}$, per $i, j \in N$. Sigui v un joc cooperatiu de 3 jugadors. Suposem que x és el prenucleolus d'aquest joc. Ara, sigui $\mathcal{B}_1$ la col·lecció de coalicions no trivials amb excés màxim. És a dir, si $\Theta(x) = (\Theta_1(x), \ldots, \Theta_8(x))$ és el vector d'excessos ordenat de forma decreixent, llavors $\mathcal{B}_1$ serà la col·lecció de coalicions no trivials tals que els seus excessos estan col·locats en les primeres posicions del vector d'excessos (en cas d'haver-hi dues o més coalicions amb el mateix excés màxim); o bé la coalició que estigui en primera posició (si només n'hi ha una amb excés màxim). Veiem llavors quina forma pot tenir aquest conjunt $\mathcal{B}_1$.

Suposem que $\mathcal{B}_1$ ha de contenir una partició de N, o bé que $\{\{12\}, \{13\}, \{23\}\} \subseteq \mathcal{B}_1$. Si no és així, llavors $\mathcal{B}_1$ ha de ser:

1. una parella $\{\{ij\}\}$;
2. dues parelles $\{\{ij\}, \{jk\}\}$;
3. un singletó o un singletó amb parelles que incloguin el singletó $\{\{j\}\}$, $\{\{j\}, \{ij\}\}$ o $\{\{j\}, \{ij\}, \{jk\}\}$;
4. dos singletons $\{\{i\}, \{j\}\}$ o dos singletons amb la seva unió $\{\{i\}, \{j\}, \{ij\}\}$.

En els casos 1 i 4, definim $y \in I^*(v)$ com segueix: $y_i = x_i + \epsilon$, $y_j = x_j + \epsilon$ i $y_k = x_k - 2\epsilon$, on $\epsilon > 0$. D'aquesta manera, aconseguim que y sigui eficient. Així, per un $\epsilon > 0$ suficientment petit, obtenim que $\Theta(y) <_{lex} \Theta(x)$, fet que és contradicció amb la suposició que x és el prenucleolus del joc. En els casos 2 i 3, definim $y_i = x_i - \epsilon$, $y_j = x_j + 2\epsilon$ i $y_k = x_k - \epsilon$. De la mateixa manera i per $\epsilon > 0$ suficientment petit, tenim com abans que $\Theta(y) <_{lex} \Theta(x)$, i per tant, contradicció.

Per tant, podem assegurar que $\mathcal{B}_1$ serà com un dels casos següents. Estudiem-los:

Cas 1. Suposem que $\{\{12\}, \{13\}, \{23\}\} \subseteq \mathcal{B}_1$. Llavors, $e(12, x) = e(13, x) = e(23, x)$, amb el que obtenim dues equacions que, juntament amb la condició d'eficiència, ens generen un sistema de tres equacions amb tres incògnites:

$$\begin{aligned}
&v(12) - x_1 - x_2 = v(13) - x_1 - x_3\\
&v(12) - x_1 - x_2 = v(23) - x_2 - x_3\\
&x_1 + x_2 + x_3 = v(123),
\end{aligned}$$

que té una única solució:

$$x_1 = \frac{1}{3}\left(v(123) + v(12) + v(13) - 2v(23)\right)$$
$$x_2 = \frac{1}{3}\left(v(123) + v(12) + v(23) - 2v(13)\right)$$
$$x_3 = \frac{1}{3}\left(v(123) + v(13) + v(23) - 2v(12)\right).$$

Cas 2. Suposem que $\{\{1\},\{2\},\{3\}\} \subseteq \mathcal{B}_1$. Llavors, $e(1,x) = e(2,x) = e(3,x)$, amb el que tornem a obtenir dues equacions. Juntament amb la condició d'eficiència obtenim un sistema que, resolent-lo, té solució única:

$$x_1 = \frac{1}{3}\left(v(123) + 2v(1) - v(2) - v(3)\right)$$
$$x_2 = \frac{1}{3}\left(v(123) + 2v(2) - v(3) - v(1)\right)$$
$$x_3 = \frac{1}{3}\left(v(123) + 2v(3) - v(1) - v(2)\right).$$

Cas 3. Suposem que $\mathcal{B}_1$ conté una partició de N diferent de $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$, que denotarem, sense pèrdua de generalitat, com $\{\{1\},\{23\}\}$. Llavors, $e(1,x) = e(23,x)$ amb el que, juntament amb l'eficiència, obtenim dues equacions. Ara, sigui $\mathcal{B}_2$ la col·lecció de coalicions no trivials que no estiguin en $\mathcal{B}_1$ amb excés màxim, és a dir, les coalicions on s'assoleix el segon màxim excés.

Suposem que $\mathcal{B}_2$ ha de contenir una partició de N, o bé $\{\{12\},\{13\}\} \subseteq \mathcal{B}_2$ o bé $\{\{2\},\{3\}\} \subseteq \mathcal{B}_2$. Si no és així, llavors $\mathcal{B}_2$ ha de ser $\{\{j\}\}$ o bé $\{\{1j\}\}$ o bé $\{\{j\},\{1j\}\}$, amb $j = 2,3$. Definim $y_1 = x_1$, $y_j = x_j + \epsilon$ i $y_k = x_k - \epsilon$. Així, y és eficient i satisfà $e(1,y) = e(23,y) = e(1,x) = e(23,x)$. A més a més, per a $\epsilon > 0$ suficientment petit, obtenim que $\Theta(y) <_{lex} \Theta(x)$, en contradicció amb el fet que x és el prenucleolus.

Per tant, podem afirmar que $\mathcal{B}_2$ serà com un dels tres casos esmentats abans. Analitzem-los:

Cas 3a) Suposem que $\{\{12\},\{13\}\} \subseteq \mathcal{B}_2$. Llavors, $e(12,x) = e(13,x)$, amb el que obtenim una altra equació que, ajuntada amb les dues que ja tenim del cas 3, formen un sistema de tres equacions amb tres incògnites amb solució única:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(v(123) - v(23) + v(1)\right)$$
$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}v(123) + \frac{1}{2}v(23) - \frac{1}{2}v(1) - v(13) + v(12)\right)$$
$$x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}v(123) + \frac{1}{2}v(23) - \frac{1}{2}v(1) - v(12) + v(13)\right).$$

Cas 3b) Suposem que $\{\{2\},\{3\}\} \subseteq \mathcal{B}_2$. Llavors, $e(2,x) = e(3,x)$, amb el que obtenim una equació que, combinada amb les dues del cas 3, formen un sistema amb solució única:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2}\left(v(123) - v(23) + v(1)\right) \\
x_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}v(123) + \frac{1}{2}v(23) - \frac{1}{2}v(1) - v(3) + v(2)\right) \\
x_3 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}v(123) + \frac{1}{2}v(23) - \frac{1}{2}v(1) - v(2) + v(3)\right).
\end{aligned}
$$

Cas 3c) Suposem que $\mathcal{B}_2$ conté una partició de N, que denotarem, sense pèrdua de generalitat, com $\{\{2\},\{13\}\}$. Llavors, $e(2,x) = e(13,x)$, amb el que obtenim una tercera equació que, combinada amb les dues del cas 3, formen un sistema amb solució única:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2}\left(v(123) - v(23) + v(1)\right) \\
x_2 &= \frac{1}{2}\left(v(123) + v(2) - v(13)\right) \\
x_3 &= \frac{1}{2}\left(v(13) + v(23) - v(1) - v(2)\right).
\end{aligned}
$$

Llavors, hem obtingut en tots els casos una única solució per al sistema d'equacions. En el cas hipotètic en què dos o més grups d'equacions siguin possibles al mateix temps, formaran un sistema compatible. A més, si ens fixem en cada una d'aquestes solucions, podrem observar que per a cada $i \in N$ i cada resultat de x_i, els coeficients de $v(S)$ per a totes les coalicions S que contenen i són no negatius. És a dir que per a cada joc v, el prenucleolus pel jugador i és una funció no decreixent respecte de $v(S)$ per a cada coalició S que contingui i. Llavors, el prenucleolus és coalicionalment monotònic en els jocs de 3 jugadors. □

La prova que acabem de veure es pot reescriure per demostrar que *el prenucleolus per-càpita satisfà selecció del core i monotonia coalicional en jocs de 3 o menys jugadors.*

Acabem de demostrar que, per $|N| \leq 3$ és possible trobar alguna solució que permeti la combinació de la propietat de racionalitat i la propietat de monotonia. Així i tot, obtenir aquest resultat no resulta del tot satisfactori, ja que es tracta d'una situació molt concreta. Volem tenir resultats similars però en casos amb un nombre arbitrari de jugadors. És impossible aconseguir-ho sense modificar cap propietat i, per tant, haurem de cedir en algun aspecte. En el capítol següent, relaxarem una mica la propietat de monotonia coalicional i veurem com sí que podem obtenir resultats positius.

Capítol 3

Possibilitat: racionalitat i monotonia agregada

3.1 La monotonia agregada

Hem vist com la propietat de monotonia coalicional és massa forta si la volem combinar amb selecció del core i, per això, sembla raonable pensar que si relaxem una mica la propietat, podem obtenir resultats positius pel que fa a la combinació que desitgem. És aquí quan introduïm una altra propietat, la de **monotonia agregada** (Meggido, 1974), que abreujarem amb les segles **MA**.

Definició 3.1.1. *Una solució puntual, $\alpha : G^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$, satisfà la propietat de* ***monotonia agregada, MA****, si per a tot $v, v' \in G^N$ tals que $v(S) = v'(S)$ per a tota coalició $S \subsetneq N$ i $v(N) < v'(N)$, llavors es compleix $\alpha(v) \leq \alpha(v')$, és a dir, $\alpha_i(v) \leq \alpha_i(v')$ $\forall i \in N$.*

Aquesta propietat el que ens diu és que si el valor de la coalició total augmenta mentre el valor de totes les altres coalicions es mantenen iguals, llavors el pagament que rep qualsevol jugador hauria de ser, com a mínim, igual al pagament que rebia abans. És llavors una propietat més feble que la monotonia coalicional, ja que només permetem que augmenti el valor de la coalició total.

Observem que si en la definició de la propietat de monotonia coalicional prenem $T = N$, obtenim exactament la definició de monotonia agregada. Serà immediat llavors veure com el valor de Shapley també satisfà la propietat de monotonia agregada.

Corol·lari 3.1.2. *El valor de Shapley satisfà la propietat de monotonia agregada.*

Demostració. És suficient veure que la propietat de monotonia coalicional implica la propietat de monotonia agregada. □

Per la seva banda, malauradament, el prenucleolus tampoc satisfà aquesta versió més dèbil de monotonia. Es tracta d'un resultat d'Hokari (2000), però nosaltres ho demostrem de manera diferent, utilitzant el criteri de Kohlberg.

Proposició 3.1.3. *El prenucleolus no satisfà la propietat de monotonia agregada.*

Demostració. Considerem el joc $v \in G^N$ amb conjunt de jugadors $N = \{1, 2, 3, 4\}$ i funció característica

$$\begin{aligned} v(i) &= 0 \quad \forall i \in N, \\ v(13) &= 0, \\ v(12) &= v(14) = v(23) = v(24) = v(34) = 2, \\ v(123) &= 4, \\ v(124) &= v(134) = v(234) = 6, \\ v(N) &= 10. \end{aligned}$$

Vegem que $x = (2, 2, 2, 4)$ és el prenucleolus del joc v utilitzant el criteri de Kohlberg. Calculem-ne els excessos de cada coalició (excepte de les trivials):

Coalicions S	Excessos $e(S, x) = v(S) - x(S)$
$\{1\}$	-2
$\{2\}$	-2
$\{3\}$	-2
$\{4\}$	-4
$\{12\}$	-2
$\{13\}$	-4
$\{14\}$	-4
$\{23\}$	-2
$\{24\}$	-4
$\{34\}$	-4
$\{123\}$	-2
$\{124\}$	-2
$\{134\}$	-2
$\{234\}$	-2

Ordenem ara els excessos en ordre decreixent:

Excessos	Coalicions
$\varepsilon^1 = -2$	$\mathcal{B}^1 : \begin{cases} \{1\} \\ \{2\} \\ \{3\} \\ \{12\} \\ \{23\} \\ \{123\} \\ \{124\} \\ \{134\} \\ \{234\} \end{cases}$
$\varepsilon^2 = -4$	$\mathcal{B}^2 : \begin{cases} \{4\} \\ \{13\} \\ \{14\} \\ \{24\} \\ \{34\} \end{cases}$

Observem que $\mathcal{B}^1$ és una col·lecció equilibrada amb els pesos que s'indiquen:

$\mathcal{B}^1$	Pesos
$\{1\}$	$\frac{1}{6}$
$\{2\}$	$\frac{1}{12}$
$\{3\}$	$\frac{1}{6}$
$\{12\}$	$\frac{1}{12}$
$\{23\}$	$\frac{1}{12}$
$\{123\}$	$\frac{1}{12}$
$\{124\}$	$\frac{1}{3}$
$\{134\}$	$\frac{1}{3}$
$\{234\}$	$\frac{1}{3}$

Efectivament, el jugador 1 pertany a les coalicions $\{1\}$, $\{12\}$, $\{123\}$, $\{124\}$ i $\{134\}$. Sumant els pesos corresponents,

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

El jugador 2 pertany a les coalicions $\{2\}$, $\{12\}$, $\{23\}$, $\{123\}$, $\{124\}$ i $\{234\}$, amb pesos

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

El jugador 3 pertany a les coalicions $\{3\}$, $\{23\}$, $\{123\}$, $\{134\}$ i $\{234\}$, amb pesos

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

El jugador 4 pertany a les coalicions $\{124\}$, $\{134\}$ i $\{234\}$, amb pesos

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

I també $\mathcal{B}^1 \cup \mathcal{B}^2$ és una col·lecció equilibrada si associem el pes $\frac{1}{7}$ a cada coalició. Com que les col·leccions són equilibrades, x és el prenucleolus del joc v, $\nu^*(v) = (2, 2, 2, 4)$.

Considerem ara el joc $w \in G^N$ amb funció característica

$$\begin{aligned} w(S) &= v(S) \quad \forall S \subsetneq N, \\ w(N) &= 12. \end{aligned}$$

Vegem que $y = (3, 3, 3, 3)$ n'és el prenucleolus utilitzant també el criteri de Kohlberg. Calculem els excessos:

Coalicions S	Excessos $e(S,y) = v(S) - y(S)$
$\{1\}$	-3
$\{2\}$	-3
$\{3\}$	-3
$\{4\}$	-3
$\{12\}$	-4
$\{13\}$	-6
$\{14\}$	-4
$\{23\}$	-4
$\{24\}$	-4
$\{34\}$	-4
$\{123\}$	-5
$\{124\}$	-3
$\{134\}$	-3
$\{234\}$	-3

Ordenem els excessos en ordre decreixent:

Excessos	Coalicions
$\varepsilon^1 = -3$	$\mathcal{B}^1 : \begin{cases} \{1\} \\ \{2\} \\ \{3\} \\ \{4\} \\ \{124\} \\ \{134\} \\ \{234\} \end{cases}$
$\varepsilon^2 = -4$	$\mathcal{B}^2 : \begin{cases} \{12\} \\ \{14\} \\ \{23\} \\ \{24\} \\ \{34\} \end{cases}$
$\varepsilon^3 = -5$	$\mathcal{B}^3 : \quad \{123\}$
$\varepsilon^4 = -6$	$\mathcal{B}^4 : \quad \{13\}$

Observem que $\mathcal{B}^1$, $\mathcal{B}^1 \cup \mathcal{B}^2$ i $\mathcal{B}^1 \cup \mathcal{B}^2 \cup \mathcal{B}^3$ són col·leccions equilibrades amb els pesos que s'indiquen a continuació:

$\mathcal{B}^1$	Pesos
$\{1\}$	$\frac{1}{2}$
$\{2\}$	$\frac{1}{2}$
$\{3\}$	$\frac{1}{2}$
$\{4\}$	$\frac{1}{4}$
$\{124\}$	$\frac{1}{4}$
$\{134\}$	$\frac{1}{4}$
$\{234\}$	$\frac{1}{4}$

$\mathcal{B}^1 \cup \mathcal{B}^2$	Pesos
$\{1\}$	$\frac{3}{8}$
$\{2\}$	$\frac{1}{4}$
$\{3\}$	$\frac{1}{2}$
$\{4\}$	$\frac{1}{4}$
$\{12\}$	$\frac{1}{4}$
$\{14\}$	$\frac{1}{8}$
$\{23\}$	$\frac{1}{8}$
$\{24\}$	$\frac{1}{8}$
$\{34\}$	$\frac{1}{8}$
$\{124\}$	$\frac{1}{8}$
$\{134\}$	$\frac{1}{8}$
$\{234\}$	$\frac{1}{8}$

$\mathcal{B}^1 \cup \mathcal{B}^2 \cup \mathcal{B}^3$	Pesos
$\{1\}$	$\frac{3}{8}$
$\{2\}$	$\frac{1}{4}$
$\{3\}$	$\frac{3}{8}$
$\{4\}$	$\frac{1}{4}$
$\{12\}$	$\frac{1}{8}$
$\{14\}$	$\frac{1}{8}$
$\{23\}$	$\frac{1}{8}$
$\{24\}$	$\frac{1}{8}$
$\{34\}$	$\frac{1}{8}$
$\{123\}$	$\frac{1}{8}$
$\{124\}$	$\frac{1}{8}$
$\{134\}$	$\frac{1}{8}$
$\{234\}$	$\frac{1}{8}$

A més, $\mathcal{B}^1 \cup \mathcal{B}^2 \cup \mathcal{B}^3 \cup \mathcal{B}^4$ també és una col·lecció equilibrada associant el pes $\frac{1}{7}$ a cada coalició. És a dir, totes les col·leccions són equilibrades i, per tant, y és el prenucleolus del joc w, $\nu^*(w) = (3, 3, 3, 3)$.

Observem finalment que $v(S) = w(S)\ \ \forall S \subsetneq N$ i $v(N) < w(N)$, però $\nu_4^*(v) = 4 > 3 = \nu_4^*(w)$. Per tant, el prenucleolus no satisfà la propietat de monotonia agregada en jocs de 4 o més jugadors. $\square$

Amb tot, acabem de veure que el valor de Shapley no satisfà SC però sí que satisfà MA. En canvi, el prenucleolus sí que satisfà SC, però no satisfà MA. És a dir, en cap de les dues solucions més importants dels jocs cooperatius és possible combinar ni tan sols SC amb la versió dèbil de monotonia. Tot i així, aquesta combinació que desitgem no és un fet impossible d'aconseguir. Hi ha algunes solucions que sí que satisfan les dues propietats alhora. N'és un exemple el prenucleolus per-càpita.

A continuació, veiem com el prenucleolus per-càpita satisfà les dues propietats que estem tractant: SC i MA. Abans, però, tinguem present que definirem per a $S \subseteq N$, el vector $e_S \in \mathbb{R}^n$ com

$$(e_S)_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in S, \\ 0 & \text{si } i \notin S. \end{cases}$$

Ara sí, vegem-ho:

Teorema 3.1.4. *El prenucleolus per-càpita satisfà les propietats de selecció del core i de monotonia agregada.*

Demostració. Sigui $v \in G^N$ un joc. Per provar que satisfà SC, podem seguir passa per passa la demostració del Teorema 2.1.2 només substituint el prenucleolus pel prenucleolus per-càpita, els excessos per excessos per-càpita i els vectors d'excessos per vectors d'excessos per-càpita.

Veiem ara que $\bar{\nu}^*$ satisfà MA. Serà suficient demostrar que per $v, v' \in G^N$ amb $v'(N) > v(N)$ i $v'(S) = v(S)\ \ \forall S \subsetneq N$, aleshores $\bar{\nu}^*(v') = \bar{\nu}^*(v) + \frac{v'(N)-v(N)}{|N|} \cdot e_N$, on e_N és el vector $(1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Així provarem que $\bar{\nu}^*(v) \leq \bar{\nu}^*(v')$, com volem veure.

Siguin $x, y \in I^*(v)$ tals que $y = x + \frac{v'(N)-v(N)}{|N|} \cdot e_N$. Aleshores, per a $S \subseteq N$,

$$\begin{aligned}
\bar{e}(S, y) &= \frac{v(S) - y(S)}{|S|} \\
&= \frac{v(S) - x(S) - |S| \cdot \frac{v'(N)-v(N)}{|N|}}{|S|} \\
&= \frac{v(S) - x(S)}{|S|} - \frac{|S| \cdot \frac{v'(N)-v(N)}{|N|}}{|S|} \\
&= \bar{e}(S, x) - \frac{v'(N) - v(N)}{|N|}.
\end{aligned}$$

Observem que $\frac{v'(N)-v(N)}{|N|}$ és una constant i, per tant, per a tota coalició S, els excessos per-càpita de y es distingeixen dels de x només per una constant.

Ara, sigui $y = \bar{\nu}^*(v')$, el prenucleolus per-càpita de v'; però suposem, en canvi, que $y \neq \bar{\nu}^*(v) + \frac{v'(N)-v(N)}{|N|} \cdot e_N$, on $\bar{\nu}^*(v)$ és el prenucleolus per-càpita de v. Aleshores,

$$\bar{\Theta}(y) <_{lex} \bar{\Theta}\left(\bar{\nu}^*(v) + \frac{v'(N) - v(N)}{|N|} \cdot e_N\right).$$

Definim $x = y - \frac{v'(N)-v(N)}{|N|} \cdot e_N$. Per la relació entre excessos per-càpita obtinguda abans,

$$\bar{\Theta}(y) = \bar{\Theta}(x) - \frac{v'(N) - v(N)}{|N|} \cdot e_{2^n},$$

on $e_{2^n} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{2^n}$. D'altra banda, de manera similar,

$$\bar{\Theta}\left(\bar{\nu}^*(v) + \frac{v'(N) - v(N)}{|N|} \cdot e_N\right) = \bar{\Theta}(\bar{\nu}^*(v)) - \frac{v'(N) - v(N)}{|N|} \cdot e_{2^n}.$$

Per hipòtesi, $\bar{\Theta}(y) <_{lex} \bar{\Theta}\left(\bar{\nu}^*(v) + \frac{v'(N)-v(N)}{|N|} \cdot e_N\right)$, i aleshores, $\bar{\Theta}(x) <_{lex} \bar{\Theta}(\bar{\nu}^*(v))$, en contradicció amb el fet que $\bar{\nu}^*(v)$ és el prenucleolus per-càpita de v. Amb això provem que el prenucleolus per-càpita satisfà MA. $\square$

Així, hem aconseguit trobar una solució puntual que satisfà tant SC com MA. Per tant, la combinació desitjada sí que és possible i veurem a continuació com, de fet, no és l'única solució puntual que satisfà aquestes dues propietats.

3.2 El core monotònic agregat

Ens interessa ara estudiar si a més del prenucleolus per-càpita hi ha altres solucions que compleixen les propietats de selecció del core i de monotonia agregada a la vegada. Per això, introduïm el conjunt de solucions puntuals de G^N que satisfan SC i MA i que denotarem per $\mathbb{S}^N_{AC}$. Observem que $\bar{\nu}^* \in \mathbb{S}^N_{AC}$ i, per tant, és un conjunt no buit. Per saber com n'és de gran aquest conjunt definim primer **el core monotònic agregat**, el conjunt de distribucions que poden ser seleccionades per una solució puntual de $\mathbb{S}^N_{AC}$ en un joc cooperatiu v, concepte introduït per primera vegada per Calleja et al. (2009).

Definició 3.2.1. *Sigui $v \in G^N$ un joc cooperatiu. Anomenarem* ***core monotònic agregat*** *del joc, que denotarem com $AC(v)$, al conjunt de preimputacions del joc v que poden ser seleccionades per solucions puntuals de G^N que satisfan SC i MA, és a dir,*

$$AC(v) = \{\alpha(v) : \alpha \in \mathbb{S}^N_{AC}\}.$$

Observem que $AC(v) \neq \emptyset$ per a tot $v \in G^N$ perquè conté al $\bar{\nu}^*$; i també que $AC(v) \subseteq C(v)$ per a tot $v \in B^N$, ja que si un punt és del $AC(v)$ aleshores és seleccionat per una solució $\alpha \in \mathbb{S}^N_{AC}$ que compleix SC. Notem que, per tant, el core monotònic agregat es pot entendre com un refinament del core.

Per a poder obtenir una descripció senzilla d'aquest conjunt, denotarem com B^N_v al conjunt de jocs equilibrats, amb core no buit, que es puguin obtenir de v augmentant o disminuint només el valor de la coalició total, és a dir,

$$B^N_v = \{v' \in B^N : v'(S) = v(S) \;\; \forall S \subsetneq N\}.$$

Clarament, $\emptyset \neq B^N_v \subset B^N$, per a tot $v \in G^N$. A partir de B^N_v definim el joc arrel d'un joc donat arbitrari.

Definició 3.2.2. *El* ***joc arrel*** *$v_r \in G^N$ associat al joc $v \in G^N$ és el joc més petit de B^N_v, és a dir, $v_r \in B^N_v$ i $v_r(N) \leq w(N)$ per a tot $w \in B^N_v$. A més, direm que un joc $v \in G^N$ és* ***arrelat*** *si $v = v_r$.*

Donat un joc v, el joc arrel es pot interpretar com el nivell mínim que ha de produir la coalició de tots els agents perquè la cooperació sigui possible sense friccions o sense problemes d'estabilitat. També és interessant observar que és aquell joc en la classe B^N_v amb el core més "petit", on és més difícil satisfer la condició de racionalitat coalicional.

Per a entendre bé aquest concepte, podem recuperar el contraexemple que hem utilitzat en el Teorema 2.2.3. Recordem que teníem un joc cooperatiu de 4 jugadors v, amb funció característica:

$$v(1) = v(2) = v(3) = v(4) = v(12) = v(34) = 0,\; v(N) = 2,\; v(S) = 1,$$

on S és qualsevol de les altres coalicions restants. Encara que disminuïm molt poc el valor de la coalició total de v, no podrem trobar cap v' tal que $v' \in B^N_v$, és a dir, cap v' amb $C(v') \neq \emptyset$. Fixem-nos que si $x \in C(v)$, aleshores $x_1 + x_3 \geq 1$ i $x_2 + x_4 \geq 1$, i també, per eficiència, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$. Per tant, és impossible disminuir el valor de la coalició total $v(N) = 2$ i satisfer al mateix temps aquestes dues condicions, associades a les coalicions $\{13\}$ i $\{24\}$. És a dir, el joc v ja és un joc arrelat de per sí.

Observem a més a més que per definició, $C(v_r) \neq \emptyset$ per a tot $v \in G^N$ i, aleshores, qualsevol solució puntual en G^N satisfent SC triarà una distribució del core de qualsevol joc arrel. Aquesta conseqüència ens serà útil per fer una descripció geomètrica del nou conjunt que hem introduït.

3.3 Descripció geomètrica del core monotònic agregat

Veiem com, fent ús de la definició de joc arrel, podem fer una descripció geomètrica del core monotònic agregat.

Teorema 3.3.1. *Sigui $v \in G^N$ un joc. Llavors,*

$$AC(v) = C(v_r) + (v(N) - v_r(N))\Delta_N,$$

on

$$\Delta_N = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{c} x(N) = 1 \\ x_i \geq 0 \ \ \forall i \in N \end{array} \right\}.$$

Demostració. Sigui $v \in G^N$. Prenem un $x \in C(v_r) + (v(N) - v_r(N))\Delta_N$, és a dir, $x = y + (v(N) - v_r(N))z$, amb $y \in C(v_r)$ i $z \in \Delta_N$. Hem de provar que existeix un $\alpha \in \mathbb{S}^N_{AC}$ tal que $\alpha(v) = x$.

Per poder definir α a G^N, considerem un joc qualsevol $w \in G^N$. Clarament,

$$\sum_{i \in N} \alpha_i(w) = w(N)$$

per definició. Hem de demostrar que α satisfà SC i MA. Llavors,

1. Si $w_r \neq v_r$, prenem $x^{w_r} \in C(w_r)$ i definim $\alpha(w) = x^{w_r} + \frac{w(N) - w_r(N)}{|N|} e_N$.
2. Si $w_r = v_r$ i en cas que $v \neq v_r$, definim $\alpha(w) = y + \frac{w(N) - y(N)}{x(N) - y(N)}(x - y)$ amb $y \in C(v_r)$ i $x \geq y$.
3. Si $w_r = v_r$ i en cas que $v = v_r$, definim $\alpha(w) = x + \frac{w(N) - v_r(N)}{|N|} e_N$, amb $x \in C(v_r)$.

Per demostrar que α satisfà SC prenem $w \in B^N$. Vegem que, en cada un dels tres casos, α satisfà SC.

1a. Per $S \subsetneq N$,

$$\sum_{i \in S} \alpha_i(w) = \sum_{i \in S} x_i^{w_r} + |S| \frac{w(N) - w_r(N)}{n} \geq \sum_{i \in S} x_i^{w_r} \geq w_r(S) = w(S),$$

on en la primera desigualtat hem utilitzat que $w(N) - w_r(N) \geq 0$ ja que $w \in B^N$, i en la segona que $x^{w_r} \in C(w_r)$.

2a. Per $S \subsetneq N$,

$$\sum_{i \in S} \alpha_i(w) = \sum_{i \in S} y_i + |S| \frac{w(N) - y(N)}{x(N) - y(N)} \sum_{i \in S} x_i - y_i \geq w_r(S) = w(S),$$

on la desigualtat segueix de $y \in C(v_r)$ i $x \geq y$, a més a més de $w(N) - y(N) = w(N) - w_r(N) \geq 0$ ja que $w \in B^N$.

3a. Per $S \subsetneq N$,

$$\sum_{i\in S}\alpha_i(w) = \sum_{i\in S}x_i + |S|\frac{w(N)-v_r(N)}{|N|} \geq \sum_{i\in S}x_i \geq v_r(S) = w_r(S) = w(S),$$

on la primera desigualtat segueix de $w(N) - v_r(N) = w(N) - w_r(N) \geq 0$ ja que $w \in B^N$ i la segona de $x \in C(v_r)$.

Per demostrar que α satisfà MA prenem $w, w' \in G^N$ amb $w'(N) > w(N)$ i $w'(S) = w(S)$ $\forall S \subsetneq N$. Aleshores, evidentment $w_r = w'_r$. Vegem que, en cada cas, α satisfà MA.

1b. En aquest cas,

$$\alpha(w') = x^{wr} + \frac{w'(N)-w_r(N)}{|N|}e_N > x^{wr} + \frac{w(N)-w_r(N)}{|N|}e_N = \alpha(w).$$

2b. Ara,

$$\alpha(w') = y + \frac{w'(N)-y(N)}{x(N)-y(N)}(x-y) > y + \frac{w(N)-y(N)}{x(N)-y(N)}(x-y) = \alpha(w).$$

3b. Observem que

$$\alpha(w') = x + \frac{w'(N)-v_r(N)}{|N|}e_N > x + \frac{w(N)-v_r(N)}{|N|}e_N = \alpha(w).$$

Per acabar, hem de provar que $\alpha(v) = x$. Sigui $w = v$. El cas 1 no pot ser. En el cas 2,

$$\alpha(v) = y + \frac{v(N)-y(N)}{x(N)-y(N)}(x-y) = y + (x-y) = x,$$

ja que $x(N) = v(N)$. En el cas 3,

$$\alpha(v) = x + \frac{v(N)-v_r(N)}{|N|}e_N = x,$$

ja que $v(N) = v_r(N)$. Per tant, en cada cas α és una solució puntual de G^N que satisfà SC, MA i que $\alpha(v) = x$, com volíem.

Fem ara la implicació cap a l'altre costat. Sigui $v \in G^N$. Sigui $x \in AC(v)$, és a dir, existeix un $\alpha \in \mathbb{S}^N_{AC}$ tal que $\alpha(v) = x$. Hem de provar que existeix un $y \in C(v_r)$ i un $z \in (v(N) - v_r(N))\Delta_N$ tal que $x = y + z$.

Prenem llavors $y = \alpha(v_r)$ i $z = x - y$ i, evidentment, $x = y + z$. Per SC de α, $y \in C(v_r)$. Ens queda per veure que $z \in (v(N) - v_r(N))\Delta_N$. Diferenciem dos casos:

- Si $v(N) > v_r(N)$. Per MA de α, $z = x - y = \alpha(v) - \alpha(v_r) \geq 0$ i a més a més,

$$z(N) = \sum_{i\in N} z_i = \sum_{i\in N}\alpha_i(v) - \sum_{i\in N}\alpha_i(v_r) = v(N) - v_r(N).$$

Per tant, $z \in (v(N) - v_r(N))\Delta_N$.

- Si $v(N) < v_r(N)$. Per MA d'α, $z = x - y = \alpha(v) - \alpha(v_r) \leq 0$ i a més a més,

$$z(N) = \sum_{i \in N} z_i = \sum_{i \in N} \alpha_i(v) - \sum_{i \in N} \alpha_i(v_r) = v(N) - v_r(N).$$

  Per tant, $z \in (v(N) - v_r(N))\Delta_N$.

$\square$

A partir d'aquest teorema que acabem de veure, podem observar que el $AC(v)$ és un conjunt no buit, al contrari que el core, que sí que pot ser buit. A més a més, de la demostració s'extreu una manera senzilla de generar solucions puntuals que satisfan SC i MA. En particular, el per-càpita prenucleolus és sempre un element del AC del joc, $\bar{\nu}^* \in AC(v)\ \ \forall v \in G^N$.

A continuació, representem el core monotònic agregat d'un joc de tres jugadors no arrelat, per fer-nos una idea de com es comporta.

Exemple 3.3.2. Considerem el joc de 3 jugadors amb la funció característica

$$w(1) = w(2) = w(3) = 0,\ w(12) = w(13) = 1,\ w(23) = 0,\ w(123) = 2.$$

Aquest joc és igual al joc v de l'Exemple 1.2.5, excepte pel valor de la coalició total, que en aquest cas és 2. Representem el seu core en la Figura 3.1.

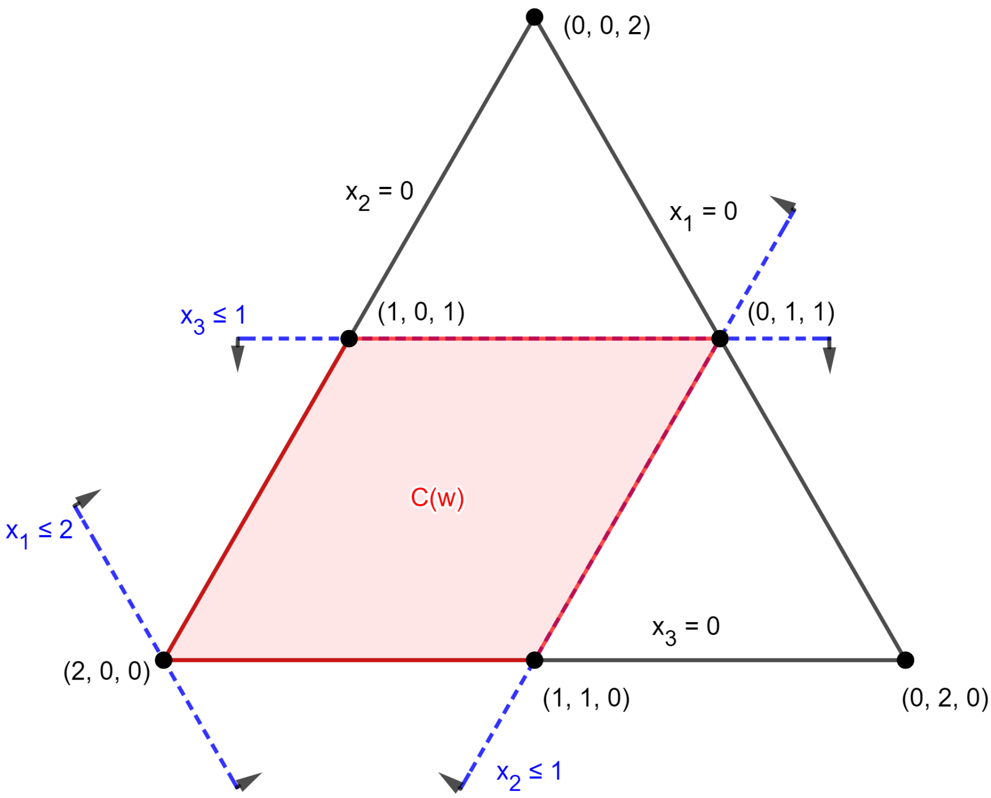

Figura 3.1: El core del joc w és la regió ombrejada en vermell.

Així, el joc v és el joc arrel de w, ja que si reduïm més el valor de la coalició total en v, obtindríem un core buit. Per tant, $v = w_r$. Calculem també el core monotònic agregat del joc w que hem definit.

$$\begin{aligned} AC(w) &= C(v) + (w(N) - v(N))\Delta_N \\ &= \{(1,0,0)\} + (2-1)\Delta_N \\ &= \text{convex}\{(2,0,0),(1,1,0),(1,0,1)\}, \end{aligned}$$

on convex és l'envolupant convexa[1]. En el nostre cas, en què representem els punts en el triangle de les imputacions en dues dimensions, l'envolupant convexa és el polígon amb vèrtexs $(2,0,0)$, $(1,1,0)$ i $(1,0,1)$. Representem en la Figura 3.2 el core monotònic agregat del joc w. Observem que és un subconjunt del core. De fet, si prenem per exemple el punt $(0,1,1) \in C(w)$, podem veure fàcilment que no pertany al $AC(w)$, ja que si una solució α satisfà SC, aleshores $\alpha(v) = (1,0,0)$ al ser l'únic punt del core de v, i aleshores, per MA, $\alpha_1(w) \geq 1$. Efectivament, la primera component de $(0,1,1)$ no és més gran o igual que 1 i, per tant, aquest punt no podrà ser seleccionat per una solució de $AC(w)$.

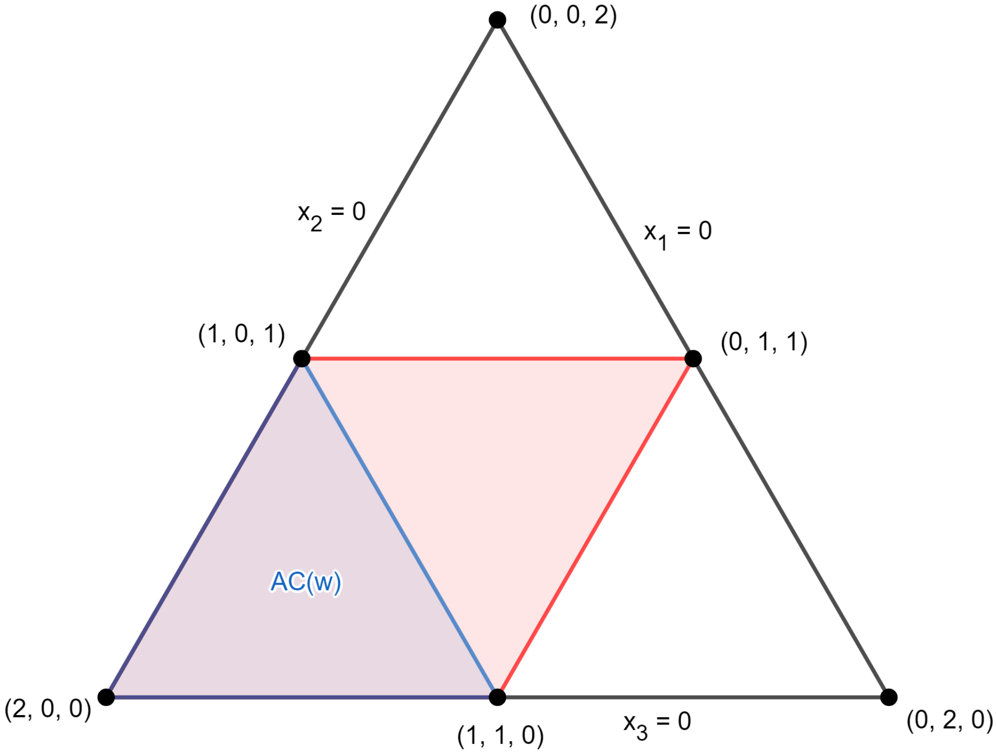

Figura 3.2: La regió ombrejada en blau és el core monotònic agregat del joc w.

3.4 Coincidència entre el core i el core monotònic agregat

Per definició, per a qualsevol joc arrelat, el core monotònic agregat coincideix amb el core. Tot i així, per als jocs no arrelats, el core monotònic agregat pot ser, fins i tot, un

[1] L'envolupant convexa d'un conjunt de punts és la intersecció de tots els conjunts convexos que contenen el conjunt de punts.

subconjunt propi del core com hem vist a l'exemple anterior, és a dir, $AC(v) \subset C(v)$. Anem a introduir una sèrie de conceptes que ens seran útils per a estudiar la relació entre el core i el core monotònic agregat. En particular, ens interessarà saber quan és que coincideixen i, per tant, quan és que imposar SC és equiparable a imposar les dues propietats, SC i MA.

Definició 3.4.1. *Una **aspiració** d'un joc $v \in G^N$ és un vector $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x(S) \geq v(S)$ per a tota $S \subseteq N$. Denotem com $A(v)$ al conjunt de totes les aspiracions del joc v.*

El conjunt de les aspiracions d'un joc es pot entendre, llavors, com totes aquelles distribucions, siguin eficients o no, en què els jugadors estan pagats de tal forma que cap coalició rep menys del que pot obtenir. Són, com el seu nom indica, totes aquelles distribucions a les quals voldrien aspirar els jugadors. A partir del concepte d'aspiració, introduirem el de **core *large*** (Sharkey, 1982).

Definició 3.4.2. *Sigui $v \in G^N$ un joc cooperatiu. Direm que el seu core és **large** si per a tot $y \in A(v)$, existeix $x \in C(v)$ tal que $x \leq y$.*

En el teorema que veurem a continuació podrem observar com la coincidència del core i del core monotònic agregat d'un joc no arrelat qualsevol depèn del core del seu joc arrel, concretament de si és *large* o no.

Teorema 3.4.3. *Sigui $v \in G^N$ un joc cooperatiu equilibrat i no arrelat, i sigui v_r el seu joc arrel. Llavors, $AC(v) = C(v)$ si i només si v_r té un core large.*

Per a la demostració d'aquest teorema hem d'utilitzar el Teorema de l'hiperplà separador. L'enunciat i la demostració d'aquest resultat els podem trobar a l'apèndix. Tenint present les eines necessàries, podem començar la demostració:

Demostració. D'una banda, suposem que v_r té el core *large* i vegem que $AC(v) = C(v)$.

Òbviament, $AC(v) \subseteq C(v)$. Ara demostrem la inclusió contrària. Sigui $x \in C(v)$, aleshores $x(S) \geq v(S)$ $\forall S \subseteq N$, i a més a més, com que $v(S) = v_r(S)$ $\forall S \subsetneq N$ i $v_r(N) < v(N)$, es compleix que $x(S) \geq v_r(S)$ $\forall S \subseteq N$. És a dir, $x \in A(v_r)$. Com que $C(v_r)$ és *large*, existeix $y \in C(v_r)$ tal que $y \leq x$. De fet, $x = y + (x - y)$ on $y \in C(v_r)$ i $(x - y) \in (v(N) - v_r(N))\Delta_N$, ja que $x_i \geq y_i$ $\forall i \in N$ i $(x - y)(N) = x(N) - y(N) = v(N) - v_r(N)$. Per tant, $x \in AC(v)$.

Per a veure la implicació contrària, suposem que el joc v_r no té un core *large* i vegem que $AC(v) \neq C(v)$.

Si $C(v_r)$ no és *large*, per Van Gellekom (1999), existeix un punt extrem y^* del conjunt $A(v_r)$ tal que $y^*(N) > v_r(N)$[2]. Sigui $\mathcal{S}(y^*) = \{S \subset N : y^*(S) = v_r(S)\}$. Com que y^* és un extrem de $A(v_r)$, y^* és l'única solució del sistema d'equacions $\sum_{i \in S} x_i = v(S)$ $\forall S \in \mathcal{S}(y^*)$. El sistema és compatible determinat i el rang de la matriu de coeficients del sistema que està formada pels vectors $(e_S)_{S \subseteq \mathcal{S}(y^*)}$ col·locats en columnes és igual a n. Per tant, els vectors $(e_S)_{S \subseteq \mathcal{S}(y^*)}$ generen $\mathbb{R}^n$ i existeix un subconjunt de coalicions $\{S_1, \ldots, S_n\}$ de $\mathcal{S}(y^*)$ tal que els vectors $e_{S_1}, \ldots, e_{S_n}$ formen una base de $\mathbb{R}^n$. Llavors, per a tot $i \in N$ hi ha una coalició $S \in \mathcal{S}(y^*)$ amb $i \in S$.

[2]Com que $A(v_r)$ està definit per desigualtats no estrictament lineals, és un conjunt convex. Llavors, x és un extrem de $A(v_r)$ si no existeixen $y, z \in A(v_r)$ tals que $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$.

Ara afirmem que no hi ha cap $x \in C(v_r)$ tal que $x \leq y^*$, és a dir, que $y^* \notin C(v_r) + \mathbb{R}^n_+$. Vegem-ho: suposem el contrari, és a dir, que existeix algun $x \in C(v_r)$ tal que $x \leq y^*$. Per a tot $i \in N$ existeix $S \in \mathcal{S}(y^*)$ tals que $i \in S$. Llavors, $v_r(S) \leq x(S) \leq y^*(S) = v_r(S)$, i com que $x \leq y^*$, aleshores $x_k = y^*_k$ per a tot $k \in S$. En particular, $x_i = y^*_i$. Per tant, $x = y^*$ i $y^*(N) = x(N) = v_r(N)$, en contradicció amb el fet que $y^*(N) > v_r(N)$. Per tant, efectivament, no hi ha cap $x \in C(v_r)$ tal que $x \leq y^*$.

Distingim ara dos casos:

Cas 1. Suposem que $y^*(N) \geq v(N)$. Si apliquem el Teorema de l'hiperplà separador (Teorema 5.5) al fet que $y^* \notin C(v_r) + \mathbb{R}^n_+$, existeix una $q \in \mathbb{R}^n$ tal que $q \cdot y^* < q \cdot x + q \cdot h'$ per a tot $x \in C(v_r)$ i per a tot $h' \in \mathbb{R}^n_+$. Sigui $x^* \in C(v_r)$ tal que $q \cdot x^* \leq q \cdot x$ per a tot $x \in C(v_r)$. Ara definim $z_\lambda = \lambda y^* + (1-\lambda)x^*$, per qualsevol $\lambda \in (0, 1]$. Observem que $z_\lambda \in A(v_r)$. De fet $\forall S \subsetneq N$,

$$\sum_{i \in S} (z_\lambda)_i = \lambda \sum_{i \in S} y^*_i + (1-\lambda) \sum_{i \in S} x^*_i \geq v_r(S).$$

Vegem que

$$\begin{aligned} q \cdot z_\lambda &= \lambda q \cdot y^* + (1-\lambda) q \cdot x^* \\ &< \lambda(q \cdot x + q \cdot h') + (1-\lambda) q \cdot x^* \\ &\leq \lambda(q \cdot x + q \cdot h') + (1-\lambda) q \cdot x \\ &\leq q \cdot x + q \cdot (\lambda h'), \end{aligned}$$

per a tot $x \in C(v_r)$ i per a tot $h' \in \mathbb{R}^n_+$. Per tant, $q \cdot z_\lambda < q \cdot x + q \cdot h$ per a tot $x \in C(v_r)$ i per a tot $h \in \mathbb{R}^n_+$. Aleshores, un altre cop pel Teorema de l'hiperplà separador (Teorema 5.5), $z_\lambda \notin C(v_r) + \mathbb{R}^n_+$. A més a més, existeix $\lambda_* \in (0, 1]$ tal que $z_{\lambda_*}(N) = v(N)$, per tant $z_{\lambda_*} \in C(v)$ i $z_{\lambda_*} \notin AC(v)$. És a dir que $AC(v) \neq C(v)$, com volíem veure.

Cas 2. Suposem que $y^*(N) < v(N)$. Sigui $i_* \in N$ tal que

$$|\{S \in \mathcal{S}(y^*) : i_* \in S\}| \leq |\{S \in \mathcal{S}(y^*) : j \in N\}|, \tag{3.4.1}$$

per a tot $j \in N$; és a dir, i_* és el jugador que pertany al menor nombre de coalicions de $\mathcal{S}(y^*)$. Ara definim $\hat{y}^* = y^* + (v(N) - y^*(N)) \cdot e_{i_*}$. Clarament, $\hat{y}^* \in C(v)$. Efectivament, per $S \subseteq N$,

$$\sum_{i \in S} \hat{y}^*_i = \sum_{i \in S} y^*_i + (v(N) - y^*(N)) \cdot e_{i_*} \geq v_r(S) = v(S).$$

Anem a veure que $\hat{y}^* \notin AC(v)$, que provarà que $AC(v) \neq C(v)$.

Suposem que existeix $x \in C(v_r)$ tal que $x \leq \hat{y}^*$. Sigui $R = \bigcup_{S \in \mathcal{S}(y^*) : i_* \notin S} S$. Clarament, $R \neq \emptyset$ i $N \setminus R \neq \emptyset$. En cas contrari, si $R = \emptyset$ vol dir que $i \in S$ $\forall S \in \mathcal{S}(y^*)$ que juntament amb la condició 3.4.1 implica que per a tot $j \in N$, $|\{S \in \mathcal{S}(y^*) : j \in S\}| = |\mathcal{S}(y^*)|$, en contradicció amb el fet que $\mathcal{S}(y^*)$ és una base de $\mathbb{R}^n$.

Provem primer que $x_i = y^*_i = \hat{y}^*_i$ per a tot $i \in R$. Sigui i un jugador qualsevol de R. De la definició de $\hat{y}^*$ i del fet que $i_* \notin R$ es segueix la igualtat $y^*_i = \hat{y}^*$. Ara, per provar que $x_i = \hat{y}^*$, observem que existeix una coalició $S \in \mathcal{S}(y^*)$ amb $i \in S$ i $i_* \notin S$, ja que $i \in R$. Per tant, cada jugador de S és també a R i, per això, $\hat{y}^*(S) = y^*(S) = v_r(S)$. Per hipòtesi, $x \in C(v_r)$ amb $x \leq \hat{y}^*$, i per això, $x(S) \geq v_r(S)$ i $x(S) \leq \hat{y}^*(S)$. Llavors, $x(S) = \hat{y}^*(S)$, però com $x \leq \hat{y}^*$ es segueix que $x_i = \hat{y}_i^*$.

A més, provem a continuació també que $N \setminus R \subseteq S$ per a tot $S \in \mathcal{S}(y^*)$ tal que $i_* \in S$. Vegem-ho: sigui $j \in N \setminus R$ i $T \in \mathcal{S}(y^*)$ amb $i_* \in T$. Com que $j \in N \setminus R$, per a tot $S \in \mathcal{S}(y^*)$ tal que $i_* \notin S$ tenim que $j \notin S$, que implica que

$$|\{S \in \mathcal{S}(y^*) : i_* \in S\}| \geq |\{S \in \mathcal{S}(y^*) : j \in S\}|.$$

Per tant, considerant 3.4.1,

$$|\{S \in \mathcal{S}(y^*) : i_* \in S\}| = |\{S \in \mathcal{S}(y^*) : j \in S\}|. \tag{3.4.2}$$

Si $j \in T$ ja hem acabat. Si $j \notin T$, tenim que $T \in \mathcal{S}(y^*)$ amb $i_* \in T$ i $j \notin T$, i es segueix de 3.4.2 que ha d'existir un $T' \in \mathcal{S}(y^*)$ amb $i_* \notin T'$ i $j \in T'$, que és contradicció amb el fet que $j \in N \setminus R$.

Ara, sigui $S \in \mathcal{S}(y^*)$ amb $i_* \in S$. Llavors,

$$\begin{aligned}
x(S) &= x(S \cap R) + x(S \cap (N \setminus R)) \\
&= x(S \cap R) + x(N \setminus R) \\
&\geq v_r(S) \\
&= y^*(S) \\
&= y^*(S \cap R) + y^*(S \cap (N \setminus R)) \\
&= y^*(S \cap R) + y^*(N \setminus R),
\end{aligned}$$

on la primera desigualtat és perquè $x \in C(v_r)$ i la tercera igualtat perquè $S \in \mathcal{S}(y^*)$. Com que $x_i = y_i^*$ per a tot $i \in R$, llavors $x(S \cap R) = y^*(S \cap R)$, que implica que $x(N \setminus R) \geq y^*(N \setminus R)$.

Finalment, $x(N) = x(R) + x(N \setminus R) = y^*(R) + x(N \setminus R) \geq y^*(R) + y^*(N \setminus R) = y^*(N) > v_r(N)$, és a dir, $x(N) > v_r(N)$ que és contradicció amb el fet que $x \in C(v_r)$.

□

Aquest teorema, per tant, ens caracteritza els jocs en què el core monotònic agregat i el core coincideixen, és a dir, en quins casos imposar selecció del core és equiparable a imposar tant selecció del core com monotonia agregada. La coincidència, com hem vist, depèn del core del seu joc arrel. Com a resultat, trobem determinats jocs que només demanant que la solució pertanyi al core, aquesta també satisfà la monotonia agregada.

Capítol 4

Conclusions i futures línies de recerca: la monotonia coalicional dèbil

Al llarg del treball hem introduït diverses solucions puntuals, juntament amb algunes propietats de racionalitat i de monotonia que poden satisfer aquestes solucions. Com hem vist, no sempre hem obtingut els resultats que esperàvem. El valor de Shapley, per exemple, satisfà les dues propietats de monotonia, MC i MA, que hem presentat, però té l'inconvenient de no satisfer la propietat de selecció del core. El prenucleolus, per la seva banda, sí que satisfà SC i, de fet, satisfà també la monotonia coalicional, per jocs de 3 o menys jugadors. En canvi, pel cas d'un nombre arbitrari de jugadors més gran que 3, no satisfà ni tan sols MA. Per últim amb el per-càpita prenucleolus hem vist com sí que és possible combinar la selecció del core amb propietats de monotonia en jocs de més de 3 jugadors i, de fet, hem descobert que no és l'única solució que satisfà SC i MA. Hem trobat que n'hi ha tot un conjunt de solucions que satisfan ambdues propietats, el core monotònic agregat. Aquest conjunt ha resultat ser, en general, un subconjunt del core. Tot i així, amb la introducció dels jocs arrels, hem descobert que la coincidència entre els dos conjunts és possible.

Tractem de fer ara un gir més a l'assumpte. Vistes les incompatibilitats amb què ens hem trobat amb la monotonia coalicional, la idea és relaxar aquesta propietat de monotonia per veure si una nova proposta més dèbil sí que és compatible amb SC. D'aquesta manera, encarem una possible línia de recerca a estudiar en un futur i obrim un ventall de possibilitats pel que fa a la possible combinació d'aquesta nova propietat amb la SC.

4.1 La monotonia coalicional dèbil

Fins ara, en la definició de les propietats de monotonia tant coalicional com agregada, demanàvem que pujant el valor d'una coalició, fos la total o una qualsevol, la solució puntual es comportés de la mateixa manera; és a dir, que l'augment en el valor d'una coalició impliqués que el pagament als membres d'aquesta coalició no disminuís, com a mínim.

Tot i així, és estrany pensar que si la coalició S es fa més forta, no augmenti el valor de les coalicions que la contenen. Per aquest motiu, seguirem amb la idea d'augmentar el valor d'una coalició, però farem que, si aquest es produeix, llavors totes les coalicions que continguin la coalició que acabem d'augmentar, també augmentin el seu valor. La propietat consistirà a demanar, en aquest cas, que els pagaments als membres de la coalició augmentada inicialment no disminueixin. Formalitzem-ho:

Definició 4.1.1. *Una solució puntual, $\alpha : G^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$, satisfà la propietat de* ***monotonia coalicional dèbil, MCD****, si per a tot $v, v' \in G^N$ tals que existeix alguna $T \subsetneq N$ amb $v'(S) - v(S) = a > 0$ si $S \supseteq T$, llavors es compleix $\alpha_i(v) \leq \alpha_i(v')$ $\forall i \in T$.*

El que ens diu aquesta propietat és que si el valor d'una coalició en concret, diguem-li T, augmenta a i també augmenta en aquesta quantitat el valor de totes les coalicions que contenen a T, aleshores el pagament a cada membre de la coalició T no hauria de disminuir.

Veiem a continuació una sèrie de resultats que poden ser interessants de cara a un possible estudi en un futur d'aquesta nova propietat. Comencem veient la relació que hi ha entre la monotonia coalicional i la monotonia coalicional dèbil: la primera implica la segona.

Proposició 4.1.2. *La monotonia coalicional implica la monotonia coalicional dèbil.*

Demostració. Sigui $\alpha : G^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una solució puntual que compleix MC. Siguin $v, v' \in G^N$ dos jocs tals que existeix alguna $T \subset N$ amb $v'(S) - v(S) = a > 0$ $\forall S \supseteq T$. Volem provar que $\alpha_i(v) \leq \alpha_i(v')$ $\forall i \in T$.

Considerem $S_1, S_2, \ldots, S_k \supseteq T$ totes les coalicions que contenen a T. Sigui $v_1 \in G^N$ el joc tal que $v_1(S_1) - v(S_1) = a$ i $v_1(R) = v(R)$ $\forall R \neq S_1$. Com que α és una solució que satisfà MC, llavors $\alpha_i(v) \leq \alpha_i(v_1)$ $\forall i \in S_1$. A continuació, sigui $v_2 \in G^N$ el joc que tal que $v_2(S_2) - v_1(S_2) = a$ i $v_2(R) = v_1(R)$ $\forall R \neq S_2$. Com que α satisfà MC, $\alpha_i(v_1) \leq \alpha_i(v_2)$ $\forall i \in S_2$. Iterant aquest procediment, obtenim que $v_k = v' \in G^N$ és el joc tal que $v_k(S_k) - v_{k-1}(S_k) = a$ i $v_k(R) = v_{k-1}(R)$ $\forall R \neq S_k$. Com que α satisfà MC, $\alpha_i(v_{k-1}) \leq \alpha_i(v_k)$ $\forall i \in S_k$. Fixem-nos que, com que $T \subseteq S_1, \ldots, S_k$, tenim

$$\alpha_i(v) \leq \alpha_i(v_1) \leq \cdots \leq \alpha_i(v_k) = \alpha_i(v') \ \ \forall i \in T,$$

és a dir, $\alpha_i(v) \leq \alpha_i(v')$ $\forall i \in T$. Per tant, α és una solució puntual que compleix MCD, com volíem veure. □

Un cop vista la relació entre MC i MCD podem intentar veure què passa amb la compatibilitat de la MCD amb la SC. Per veure que MC i SC no són compatibles hem utilitzat l'exemple introduït a la demostració del Teorema 2.2.3. En el següent exemple mostrem que els arguments per demostrar la impossibilitat de combinar SC i MC ja no ens serveixen si substituïm MC per MCD.

Exemple 4.1.3. Sigui v un joc cooperatiu de 4 jugadors amb funció característica:

$$v(1) = v(2) = v(3) = v(4) = v(12) = v(34) = 0, v(N) = 2$$

i $v(S) = 1$, per a qualsevol altra coalició restant. Veiem si el valor de Shapley satisfà tant SC com MCD. Si calculem el valor de Shapley del joc v utilitzant la fórmula de la Definició 1.3.3, obtenim $\phi(v) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Considerem ara 4 jocs diferents: v^1, v^2, v^3, v^4 amb la mateixa funció característica que v excepte per les coalicions següents: $v^1(134) = 2$, $v^1(N) = 3$; $v^2(234) = 2$, $v^2(N) =$

3, $v^3(123) = 2$, $v^3(N) = 3$; $v^4(124) = 2$, $v^4(N) = 3$. Si calculem el valor de Shapley del joc v^1 obtenim $\phi(v^1) = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right)$. Ara veiem si $\phi(v^1) \in C(v^1)$. Mirem quines condicions ha de satisfer una distribució perquè sigui del core de v^1. Suposem que x és una distribució del core de v^1, $x \in C(v^1)$. Llavors x complirà les condicions següents:

$$\begin{array}{lll}
x_1 \geq 0 & x_1 + x_3 \geq 1 & x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\
x_2 \geq 0 & x_1 + x_4 \geq 1 & x_1 + x_2 + x_4 \geq 1 \\
x_3 \geq 0 & x_2 + x_3 \geq 1 & x_1 + x_3 + x_4 \geq 2 \\
x_4 \geq 0 & x_2 + x_4 \geq 1 & x_2 + x_3 + x_4 \geq 1 \\
x_1 + x_2 \geq 0 & x_3 + x_4 \geq 0 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3.
\end{array}$$

Observem que $\phi(v^1)$ satisfà totes aquestes condicions i, per tant, $\phi(v^1) \in C(v^1)$. De la mateixa manera, si calculem el valor de Shapley del joc v^2 obtenim $\phi(v^2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right)$. Ara veiem si $\phi(v^2) \in C(v^2)$. Suposem que x és una distribució del core de v^2, $x \in C(v^2)$. Llavors x complirà les condicions següents:

$$\begin{array}{lll}
x_1 \geq 0 & x_1 + x_3 \geq 1 & x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\
x_2 \geq 0 & x_1 + x_4 \geq 1 & x_1 + x_2 + x_4 \geq 1 \\
x_3 \geq 0 & x_2 + x_3 \geq 1 & x_1 + x_3 + x_4 \geq 1 \\
x_4 \geq 0 & x_2 + x_4 \geq 1 & x_2 + x_3 + x_4 \geq 2 \\
x_1 + x_2 \geq 0 & x_3 + x_4 \geq 0 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3.
\end{array}$$

Veiem que $\phi(v^2)$ satisfà totes aquestes condicions i, per tant, $\phi(v^2) \in C(v^2)$. El valor de Shapley del joc v^3 és $\phi(v^3) = \left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}\right)$. Si x és una distribució del core de v^3 llavors complirà les condicions:

$$\begin{array}{lll}
x_1 \geq 0 & x_1 + x_3 \geq 1 & x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\
x_2 \geq 0 & x_1 + x_4 \geq 1 & x_1 + x_2 + x_4 \geq 1 \\
x_3 \geq 0 & x_2 + x_3 \geq 1 & x_1 + x_3 + x_4 \geq 1 \\
x_4 \geq 0 & x_2 + x_4 \geq 1 & x_2 + x_3 + x_4 \geq 1 \\
x_1 + x_2 \geq 0 & x_3 + x_4 \geq 0 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3.
\end{array}$$

Observem que $\phi(v^3)$ compleix totes aquestes condicions i, per tant, $\phi(v^3) \in C(v^3)$. I per últim, el valor de Shapley del joc v^4 és $\phi(v^4) = \left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right)$. Si x és una distribució del core de v^4 llavors complirà les condicions:

$$\begin{array}{lll}
x_1 \geq 0 & x_1 + x_3 \geq 1 & x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\
x_2 \geq 0 & x_1 + x_4 \geq 1 & x_1 + x_2 + x_4 \geq 2 \\
x_3 \geq 0 & x_2 + x_3 \geq 1 & x_1 + x_3 + x_4 \geq 1 \\
x_4 \geq 0 & x_2 + x_4 \geq 1 & x_2 + x_3 + x_4 \geq 1 \\
x_1 + x_2 \geq 0 & x_3 + x_4 \geq 0 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3.
\end{array}$$

Notem que $\phi(v^4)$ satisfà totes aquestes condicions i, per tant, $\phi(v^4) \in C(v^4)$.

Podem comprovar que en cada un dels jocs v^1, v^2, v^3 i v^4, el valor de Shapley satisfà la MCD respecte del joc v. Observem que $v^1(S) - v(S) = 1 \ \forall S \supseteq \{134\}$ i $\phi_i(v) \leq \phi_i(v^1) \ \forall i \in \{134\}$. També $v^2(S) - v(S) = 1 \ \forall S \supseteq \{234\}$ i a més $\phi_i(v) \leq \phi_i(v^2) \ \forall i \in \{234\}$. Notem que $v^3(S) - v(S) = 1 \ \forall S \supseteq \{123\}$ amb $\phi_i(v) \leq \phi_i(v^3) \ \forall i \in \{123\}$. Per últim, $v^4(S) - v(S) = 1 \ \forall S \supseteq \{124\}$ i també $\phi_i(v) \leq \phi_i(v^4) \ \forall i \in \{124\}$. Però, de fet, com que hem provat que el valor de Shapley satisfà MC i també que MC implica MCD, és immediat veure que el valor de Shapley també satisfà MCD.

Per tant, en els quatre jocs proposats per Housman i Clark hem trobat una solució, el valor de Shapley, que satisfà SC i MCD. És a dir, l'exemple utilitzat per Housman i Clark per a demostrar la incompatibilitat de la SC i la MC en el cas de jocs amb 4 o més jugadors no ens serveix per demostrar la incompatibilitat de la SC i la MCD.

Per acabar, podem fer un petit estudi sobre què passa amb les solucions puntuals que coneixem (el valor de Shapley, el prenucleolus i el prenucleolus per-càpita) respecte de la monotonia coalicional dèbil. Com hem dit, la prova de què MC implica MCD juntament amb el fet que el valor de Shapley satisfà la MC, ens implica que aquesta solució també satisfà la MCD. Pel que fa al prenucleolus, sabem que no satisfà la MA i, per aquest motiu, al ser una propietat més dèbil que la MCD, tampoc satisfà aquesta. Per últim, la pregunta romandrà en saber què passa amb el prenucleolus per-càpita. Hem provat que aquesta solució satisfà tant SC com MA. Tot i així, la MCD és més forta que la MA i, per això, ens demanem: el per-càpita prenucleolus satisfà la monotonia coalicional dèbil? D'altra banda, Housman i Clark van provar que no hi ha cap solució que satisfaci SC i MC en jocs de 4 o més jugadors. Però, la MCD és més dèbil que la MC. Per tant, és possible la combinació de la monotonia coalicional dèbil amb la selecció del core? Aquestes preguntes són les que deixem obertes i amb les quals establim una possible línia de recerca futura.

Apèndix

En aquest apèndix enunciarem i demostrarem una bona partida de resultats que ens seran útils en la demostració d'altres teoremes. D'aquesta manera podrem fer una mica de separació entre els resultats que principalment ens interessen pel que fa al temari del treball i d'altres resultats, també importants, però que ens podrien fer perdre el fil del que realment perseguim si els incloguéssim en el treball just en el moment en què s'utilitzen.

Comencem enunciant i demostrant el Teorema de Weierstrass, que utilitzarem en la demostració de l'existència i la unicitat del prenucleolus. Abans, enunciem i demostrem alguns resultats previs que també ens seran útils.

Definició 5.1. *Un subconjunt $X \subseteq \mathbb{R}^n$ és compacte si de tot recobriment per oberts de X en podem extreure un subrecobriment finit, és a dir, si per a tot $\{U_i\}_{i\in I}$ amb U_i oberts tals que $X \subset \cup_{i\in I} U_i$ hi ha $F \subset I$ finit tal que $X \subset \cup_{i\in F} U_i$.*

A més direm que X és compacte per successions si tota successió $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ té una parcial convergent en X.

Recordem que demostrar que un conjunt és compacte és equivalent a provar que és compacte per successions.

Teorema 5.1. *Siguin $X \subseteq \mathbb{R}^n$ i $Y \subseteq \mathbb{R}$. Si X és compacte i $f : X \longrightarrow Y$ és contínua, llavors $f(X)$ és un compacte de Y.*

Demostració. Veiem que $f(X)$ és compacte per successions. Sigui $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset f(X)$ una successió. Llavors hi ha una successió $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ definida per $f(x_n) = y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Com X és compacte, també és compacte per successions amb el que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ té una parcial $\{x_{n_k}\}_{n_k\in\mathbb{N}}$ convergent a un cert $x \in X$. Definim la successió $\{y_{n_k}\}_{n_k\in\mathbb{N}} \subset f(X)$ per $y_{n_k} = f(x_{n_k})$ $\forall n_k \in \mathbb{N}$, que és una subsuccessió de $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Com que f és contínua, $\{y_{n_k}\}_{n_k\in\mathbb{N}}$ convergeix a $f(x) \in f(X)$. Per tant, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ té una subsuccessió $\{y_{n_k}\}_{n_k\in\mathbb{N}}$ convergent a un element de $f(X)$ i llavors, $f(X)$ és compacte. □

Teorema 5.2. ***(Teorema de Weierstrass).*** *Sigui $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunt compacte i $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua, llavors existeixen $x_1, x_2 \in X$ tals que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, per a tot $x \in X$.*

Demostració. Com X és un compacte i f està definida en aquest conjunt, llavors pel Teorema 5.1, f està afitada en X i podem assegurar l'existència d'un suprem en X, $M = \sup\{f(x) : x \in X\}$. Vegem ara llavors que existeix un $c \in X$ tal que $f(c) = M$.

Suposem que no existeix tal valor, és a dir, $f(x) \neq M$ $\forall x \in X$. Llavors, la funció $g(x) = \frac{1}{M-f(x)}$ està ben definida i és contínua, ja que $f(x)$ ho és i M n'és el suprem.

Com que g és contínua i X és compacte, pel Teorema 5.1, $g(x)$ està acotada superiorment, diguem-li T a una cota superior de $g(x)$. És a dir,

$$\begin{aligned} 0 < g(x) < T \ \ \forall x \in X &\iff \frac{1}{M - f(x)} < T, \forall x \in X \\ &\iff \frac{1}{T} < M - f(x), \forall x \in X \\ &\iff f(x) < M - \frac{1}{T} < M, \forall x \in X, \end{aligned}$$

i llavors $M - \frac{1}{T}$ seria una cota superior de $f(X)$ menor a M, en contradicció amb el fet que M sigui el suprem de $f(X)$. Per tant, $f(X)$ ha de tenir un màxim absolut en X, és a dir, ha d'existir algun $c \in X$ tal que $f(c) = M$.

Anàlogament, es pot demostrar que $f(X)$ ha de tenir un mínim absolut en X. □

A continuació, enunciarem i demostrarem el Teorema local-global de les funcions convexes, que també ens serà útil en la demostració de l'existència i la unicitat del prenucleolus. Abans, però, veiem què és un conjunt convex i una funció convexa:

Definició 5.2. *Un conjunt $C \subset \mathbb{R}^n$ és convex si per a tot $x, y \in C$ i per a tot $\lambda \in [0,1]$,*

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in C.$$

D'altra banda, si $C \subset \mathbb{R}^n$ és convex, $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció convexa si $\forall x, y \in C$ i $\forall \lambda \in [0,1]$ es compleix

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

Teorema 5.3. ***(Teorema local-global de les funcions convexes).*** *Sigui $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció convexa en un conjunt $C \subseteq \mathbb{R}^n$ també convex i no buit. Llavors,*

1. *Si f té un mínim local en C, llavors és també un mínim global.*
2. *El conjunt de mínims locals de f en C,*

$$A = \{x \in C \mid f(x) = mín\{f(x) \mid x \in C\}\}$$

és convex.

Demostració. Provem primer 1. Sigui $\bar{x}$ un mínim local de f en C. Llavors, existeix un entorn $B_\varepsilon(\bar{x})$ tal que

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \ \ \forall x \in C \cap B_\varepsilon(\bar{x}). \tag{5.1.1}$$

Suposem que $\bar{x}$ no és un mínim global de f en C i arribem a contradicció. En aquest cas, tenim que $f(x^*) < f(\bar{x})$ per algun $x^* \in C$. Com que f és convexa, per $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$f(\lambda x^* + (1 - \lambda)\bar{x}) \leq \lambda f(x^*) + (1 - \lambda) f(\bar{x}) < \lambda f(\bar{x}) + (1 - \lambda) f(\bar{x}) = f(\bar{x}).$$

Per λ prou petita tindrem que $\lambda x^* + (1 - \lambda)\bar{x} \in C \cap B_\varepsilon(\bar{x})$, i llavors la desigualtat es contradiu amb 5.1.1.

Per provar 2, prenem dos mínims locals de f en C, $x, y \in A$ tals que $f(x) = a = f(y)$. Llavors per $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) = a.$$

Si aquesta desigualtat fos estricta, tindríem $f(\lambda x+(1-\lambda)y)<a$, en contradicció amb el fet que x, y són mínims. Per tant, $f(\lambda x+(1-\lambda)y)=a$ i llavors $\lambda x+(1-\lambda)y \in A$, que prova que A és convex. $\square$

Per últim, enunciem i demostrem el teorema de l'hiperplà separador que fem servir en la demostració del Teorema 3.4.3. Per fer-ho, necessitem el següent resultat:

Teorema 5.4. *Sigui $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunt convex, no buit i tancat i y un punt tal que $y \notin C$. Llavors, existeix un únic punt $\bar{x} \in C$ que està a mínima distància de y. A més, $\bar{x}$ és el punt de C més proper a y si i només si $(y-\bar{x})(x-\bar{x}) \leq 0 \ \forall x \in C$.*

Demostració. Vegem primer l'existència. Com que $C \neq \emptyset$, existeix un punt $x^* \in C$. Llavors, podem considerar el conjunt $\bar{C}=C \cap\{x:\|y-x\| \leq\|y-x^*\|\}$ i buscar si existeix el punt més proper en aquest conjunt. És a dir, $\inf\{\|y-x\|: x \in C\}$ és equivalent a $\inf\{\|y-x\|: x \in \bar{C}\}$, que implica trobar el mínim d'una funció contínua en un conjunt compacte i no buit $\bar{C}$. Per tant, pel Teorema de Weierstrass (Teorema 5.3), existeix un mínim $\bar{x}$ en C que és el punt més proper a y.

Per provar la unicitat, suposem que existeix un $\bar{x}' \in C$ tal que $\|y-\bar{x}\|=\|y-\bar{x}'\|=\gamma$. Per ser C convexa, $\frac{\bar{x}+\bar{x}'}{2} \in C$. Per la desigualtat triangular,

$$\left\|y-\frac{\bar{x}+\bar{x}'}{2}\right\| \leq \frac{1}{2}\|y-\bar{x}\|+\frac{1}{2}\|y-\bar{x}'\|=\gamma .$$

Si aquesta desigualtat fos estricta, tindríem una contradicció amb el fet que $\bar{x}$ és el punt més proper a y. Aleshores, és una igualtat i es compleix $y-\bar{x}=\lambda(y-\bar{x}')$ per algun λ. Com que $\|y-\bar{x}\|=\|y-\bar{x}'\|=\gamma$, llavors $|\lambda|=1$. Observem que si $\lambda=-1$, tindríem $y=\frac{\bar{x}+\bar{x}'}{2} \in C$, contradicció amb $y \notin C$. Per tant $\lambda=1$, provant que $\bar{x}=\bar{x}'$, és a dir, la unicitat.

Finalment, provem que $\bar{x}$ és el punt de C més proper a y si i només si $(y-\bar{x})(x-\bar{x}) \leq 0 \ \forall x \in C$. D'una banda, sigui $x \in C$. Llavors,

$$\|y-x\|^2=\|y-\bar{x}+\bar{x}-x\|^2=\|y-\bar{x}\|^2+\|\bar{x}-x\|^2+2(\bar{x}-x)(y-\bar{x}).$$

Com que $\|\bar{x}-x\|^2 \geq 0$ i $(\bar{x}-x)(y-\bar{x}) \geq 0$ per hipòtesi, llavors $\|y-x\|^2 \geq\|y-\bar{x}\|^2$ i $\bar{x}$ és el punt més proper.

D'altra banda, suposem que $\|y-x\|^2 \geq\|y-\bar{x}\|^2 \ \forall x \in C$. Prenem un $x \in C$ i observem que $\bar{x}+\lambda(x-\bar{x}) \in C$ per $0 \leq \lambda \leq 1$, ja que C és convex. Aleshores,

$$\|y-\bar{x}-\lambda(x-\bar{x})\|^2 \geq\|y-\bar{x}\|^2, \tag{5.1.2}$$

i també,

$$\|y-\bar{x}-\lambda(x-\bar{x})\|^2=\|y-\bar{x}\|^2+\lambda^2\|x-\bar{x}\|^2-2 \lambda(y-\bar{x})(x-\bar{x}). \tag{5.1.3}$$

De 5.1.2 i 5.1.3 obtenim

$$2 \lambda(y-\bar{x})(x-\bar{x}) \leq \lambda^2\|x-\bar{x}\|^2 \quad \forall\, 0 \leq \lambda \leq 1 .$$

Dividint entre $\lambda>0$ i fent tendir $\lambda \rightarrow 0^+$, provem el que volíem. $\square$

Teorema 5.5. ***(Teorema de l'hiperplà separador)*** *Sigui $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunt convex, no buit i tancat i y un punt tal que $y \notin C$. Llavors, existeix un vector $p \neq 0$ i un escalar α tal que $p y>\alpha$ i $p x \leq \alpha$ per a cada $x \in C$.*

Demostració. Com que C és convex, no buit i tancat i $y \notin C$, pel Teorema 5.4, existeix el punt més proper $\bar{x} \in C$ tal que $(y - \bar{x})(x - \bar{x}) \leq 0$ per a cada $x \in C$.

Definim $p = y - \bar{x} \neq 0$ i $\alpha = \bar{x}(y - \bar{x}) = p\bar{x}$. Llavors obtenim que $px \leq \alpha$ per a cada $x \in C$ i $py - \alpha = (y - \bar{x})(y - \bar{x}) = \|y - \bar{x}\|^2 > 0$, com volíem veure.

$\square$

Bibliografia

[1] Bondareva, O.N. (1963). Some applications of linear programming methods to the theory of cooperative games (en rus). *Problemy Kibernety 10*, 119-139.

[2] Calleja, P.; Rafels C.; Tijs S.H. (2009). The aggregate-monotonic core. *Games and Economic Behavior 66*, 742-748.

[3] Derks J.; Haller H. (1999). Weighted nucleoli. *International Journal of Game Theory 28*, 173-187.

[4] Gillies, D.B. (1953). *Some theorems on n-person games.* Ph. D. thesis, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[5] Grotte, J.H. (1970). Computation of and observation on the nucleolus and the central games. Master's thesis, Cornell University, Ithaka, New York.

[6] Grotte, J.H. (1976). Dynamics of cooperative games. *International Journal of Game Theory 5*, 27-64.

[7] Hokari, T. (2000). The nucleolus is not aggregate-monotonic on the domain of convex games. *International Journal of Game Theory 29*, 133-137.

[8] Housman, D.; Clark, L. (1998). Core and monotonic allocation methods. *International Journal of Game Theory 27*, 611-616.

[9] Kohlberg, E. (1971). On the nucleolus of a characteristic function game. *SIAM Journal of Applied Mathematics 20*, 62-66.

[10] Megiddo, N. (1974). On the monotonicity of the bargaining set, the kernel, and the nucleolus. *SIAM Journal of Mathematics 27*, 355-358.

[11] Owen, G. (1995). *Game Theory* (3rd ed.). Academic Press, New York.

[12] Peleg, B.; Sudhölter, P. (2007). *Introduction to the theory of cooperative games.* Springer International Publishing AG, München, Alemània.

[13] Rafels, C.; Izquierdo, J.M; Marín, J.; Martínez de Albéniz, F.J.; Núñez M.; Ybern, N. (1999). *Jocs cooperatius i aplicacions econòmiques.* Edicions de la Universitat de Barcelona, Barcelona.

[14] Schmeidler, D. (1969). The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM Journal on Applied Mathematics 17*, 1163-1170.

[15] Shapley, L.S. (1953). A value for n-person games. Dins H. Kuhn i A. Tucker, *Contributions to the theory of games II*, 307-317. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[16] Shapley, L.S. (1967). On balanced sets and cores. *Naval Research Logistic Quarterly 14*, 453-460.

[17] Sharkey, W.W. (1982). Cooperative games with large cores. *International Journal of Game Theory 11*, 175-182.

[18] Van Gellekom, J.R.G.; Potters, J.A.M; Reijnierse, J.H. (1999). Prosperity propiertes of TU-games. *International Journal of Game Theory 28*, 211-227.

[19] Von Neumann, J.; Morgenstern, O. (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[20] Young, H.P. (1985). Monotonic solutions of cooperative games. *International Journal of Game Theory 14*, 65-72.