



UNIVERSITAT_{DE}
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

Treball Final de Grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

El problema del passi dels museus

David Serrano Hernández

Director: **Dr. Javier Martínez de Albéniz Salas**

Dept. Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial

Facultat d'Economia i Empresa

Barcelona, Gener 2022

Resum

El problema del passi dels museus és un problema de repartiment que va ser introduït l'any 2003 per Ginsburgh i Zang. Consisteix en determinar com repartir entre un conjunt de museus els ingressos derivats de la venda d'un passi, que permet als seus compradors accedir de forma il·limitada a les seves instal·lacions durant un cert període de temps. Per tractar-se d'un problema de repartiment, la quantitat a repartir és inferior a la suma de les demandes dels museus.

Es presentarà aquest problema de dues formes diferents: com a joc cooperatiu i com a problema de repartiment. Segons si es modelitza aquesta situació d'una forma o altre, es presentaran les diferents solucions que s'obtenen.

S'estudiarà l'axiomàtica de les regles de repartiment per tal de trobar una solució que tingui en compte els elements característics d'aquest problema.

Abstract

The museum pass problem is an allocation problem that was introduced in 2003 by Ginsburgh and Zang. It consists of determining how to distribute among a group of museums, the income derived from the sale of a pass that allows its buyers unlimited access to their facilities for a certain period of time. As it is an allocation problem, the estate to be distributed is less than the sum of the demands of the museums.

This problem will be presented in two different ways: as a cooperative game and as an allocation problem. Depending on how this situation is modeled, the different solutions from each case will be presented.

The axiomatics of allocation rules will be studied in order to find a solution that takes into account the characteristic elements of this problem.

Agraïments

Primer de tot, vull agrair al Dr. Javier Martínez de Albéniz per la seva dedicació en aquest treball. Sense la seva ajuda i els seus consells no hagués estat possible obtenir aquests resultats.

Després voldria agrair a la meva família per tot el suport incondicional que m'ha donat sempre. Gràcies per estar sempre al meu costat.

I per últim vull donar les gràcies als meus amics per acompanyar-me durant aquests anys.

*“Coged las rosas mientras podáis,
veloz el tiempo vuela.
La misma flor que hoy admiráis
mañana estará muerta.”*

Robert Herrick (1591-1674)

Índex

Introducció	1
1 Preliminars: la teoria de jocs	5
1.1 Teoria de jocs	5
1.2 Jocs cooperatius	6
1.3 Solucions de jocs cooperatius	7
2 Problemes de repartiment i regles	15
2.1 Model	15
2.2 Regles de repartiment	17
3 Propietats de les regles de repartiment	25
3.1 Definició de les propietats	25
3.2 Caracteritzacions de les regles de repartiment	31
4 Passi dels museus	35
4.1 El passi dels museus com a joc cooperatiu	36
4.2 El passi dels museus com a problema de repartiment	40
Conclusions	47
Bibliografia	49

Introducció

Els museus acostumen a oferir diferents tipus d'entrades. A part de les entrades estàndard que donen accés a les seves instal·lacions durant un dia, podem trobar els abonaments de temporada, que permeten als visitants regulars beneficiar-se d'un descompte important.

Però hi ha un altre tipus d'entrada, que es coneix com el passi dels museus. A diferència de les anteriors, aquest no depèn exclusivament d'un museu. Permet que el seu comprador pugui accedir a tots els museus que formin part del conjunt que ofereix el passi. Així l'usuari d'aquest, podrà visitar tant cops com vulgui tots els museus d'aquest conjunt durant un cert període de temps. Normalment, aquest període de temps es limita a uns pocs dies.

Això està pensat sobretot de cara als turistes. Comprant aquest passi, poden visitar tots els museus d'una determinada ciutat durant el període de la seva visita. Així s'aconsegueix potenciar la visita de museus que normalment no es visitarien tant i també s'atrau més el turisme, ja que es facilita molt l'entrada als museus.

Llavors sorgeix un problema, que és com repartir els ingressos de la venda del passi entre el conjunt de museus que l'ofereixen. Cada museu demanarà la quantitat de diners que cregui que li correspon del total dels ingressos. Òbviament, no tots els museus demanaran el mateix.

Pensem per exemple en que tots els museus de la ciutat de París decideixen oferir un passi conjunt. El museu del *Louvre*, que és el museu més visitat del món, demanarà una gran part dels ingressos derivats del passi. I és lògic, doncs segurament serà el reclam principal pel qual un turista decideixi comprar el passi. En canvi el museu *Rodin*, que recull les obres de l'artista que li dona el nom, és molt més desconegut a nivell internacional i rep moltes menys visites. Aquest últim reclamarà doncs una quantitat molt inferior a la del *Louvre*.

Suposarem que la suma de les demandes de tots museus és superior als ingressos que s'han obtingut mitjançant la venda del passi. Si no fos així, seria tan fàcil com donar a cada museu la quantitat que demana i repartir l'excedent (si hi hagués) entre tots. Aquesta condició és bàsica perquè és la que defineix els problemes de repartiment. En aquest context que hem presentat, haurem de determinar com fer el repartiment del capital disponible entre els museus. Sempre es farà de forma que es reparteixi la totalitat del bé disponible.

Aquests tipus de problemes es remunten molt enrere en el temps. Al Talmud, que és un llibre jueu escrit entre els segles III i V, ja es poden trobar exemples de problemes de repartiment i de les solucions que es donen. Són en la seva majoria problemes d'herències i de compres i vendes que els rabins resolien de la forma que consideraven oportuna. En aquesta obra es poden trobar discussions sobre lleis jueves, tradicions i narracions.

Al segle XV a Itàlia, el comerç es realitzava a les places dels principals pobles i ciutats. Cada comerciant deixava els seus productes al seu aparador i s'asseia a un banc mentre esperava que els clients vinguessin a comprar. Aleshores, quan un comerciant devia molts diners i no podia afrontar els pagaments que havia de fer, la lleia decretava que es trencaria el banc del mercader en qüestió. Així, s'alertaria als compradors que aquell comerciant no era honrat.

D'aquí sorgeix el terme *banca rotta*, que evolucionaria fins a esdevenir bancarrota, que és la paraula que utilitzem actualment per designar aquestes situacions. Aquests, no deixen de ser problemes de repartiment.

Avui en dia podem trobar molts exemples d'aquests tipus en problemes de repartiment d'herències, o en problemes de fallida. Aquests últims són potser els més coneguts per les conseqüències econòmiques que comporten i per la seva magnitud. Però tant els problemes d'herències o de fallides empresarials com el problema del passi dels museus, compleixen que el total del bé a repartir no és suficient per afrontar les demandes d'un conjunt de persones o col·lectius.

A partir de la necessitat que existeix de trobar una solució per aquests problemes (sense haver de trencar res a ningú com en el cas dels comerciants del segle XV), es comença a plantejar quina és la millor forma de resoldre'ls. No és fins la dècada dels anys 80 que es realitza el primer estudi d'aquest tipus de situacions des d'un punt de vista matemàtic i rigorós.

L'any 1982 O'Neill [23] presenta per primer cop un estudi en el que tracta una sèrie de problemes de repartiment que apareixen al Talmud. Es basa en l'axiomàtica que ell defineix per poder identificar les solucions segons les propietats que compleixen i així aconsegueix classificar les diferents solucions.

Tres anys més tard, Aumann i Maschler [3] presenten una sèrie de caracteritzacions de les regles de repartiment a partir de diversos exemples del Talmud. L'any 1988 Young [34] també fa un estudi axiomàtic de les propietats de les regles de repartiment.

Durant els anys següents s'estudien diferents maneres de fer la distribució del bé del que es disposa en aquest tipus de problemes. El que fan els diferents autors es presentar una sèrie de propietats que consideren que han de complir les solucions i proposen una sèrie de regles de repartiment que estan caracteritzades per les propietats que s'han establert.

Moulin (2000) [22] fa un estudi axiomàtic d'algunes regles i les seves propietats. Herrero i Villar (2001) [16] caracteritzen les quatre regles de repartiment més estudiades fins al moment, que són la regla proporcional, la de guanys igualitaris, la de pèrdues igualitàries i la del Talmud. Thomson (2003 [29], 2019 [30]) fa un estudi exhaustiu de les regles de repartiment i les seves caracteritzacions i recull els resultats més rellevants sobre aquestes.

Una de les formes d'abordar el problema del passi dels museus és precisament aquesta. Es modelitza aquesta situació com un problema de repartiment i s'apliquen una sèrie de regles per tal de resoldre'l. Aquest és l'enfoc que prenen Estévez-Fernández et al. (2004) [10], que són els primers en tractar el problema del passi dels museus com un problema de repartiment.

Seguint en aquesta línia, Bergantiños (2015) [4] fa un estudi axiomàtic del problema i determina una sèrie de propietats que han de complir les regles de repartiment en aquest context dels museus. Gràcies a aquestes propietats, pot caracteritzar unes noves versions de les regles de repartiment que s'han estudiat anteriorment. Així, la solució del problema dels museus tindrà sentit en aquesta situació.

Però aquesta no és la única forma d'abordar aquest problema. Rescatant l'exemple del passi dels museus a la ciutat de París, hem vist que hi han museus amb demandes molt diferents segons si contribueixen més o menys a atraure els visitants perquè comprin el passi. Si es pogués quantificar quina és aquesta contribució de cada museu, cadascú rebria aquesta quantitat. Seguint amb l'exemple, el museu del *Louvre* rebria una compensació major que el museu *Rodin*.

Una opció possible seria repartir en parts iguals els ingressos obtinguts per la venda d'un passi determinat, entre els museus que ha visitat l'usuari del passi en qüestió. Així cada museu rebria la quantitat corresponent a la contribució que fa a la venda d'aquest passi. Per això, s'hauria de comptar quins són els museus que visita cada usuari del passi. Es seguiria aquest raonament per repartir tots els ingressos obtinguts, de forma que els museus més visitats, rebrien una quantitat superior.

Ginsburgh i Zang (2003) [14] van presentar per primer cop el problema del passi dels museus. Ells modelitzen aquesta situació com un joc cooperatiu i utilitzen el *valor de Shapley* com a solució. En l'estudi que fan, demostren que el mètode que proposen com a solució del problema és precisament el que s'acaba d'explicar. És a dir, que el *valor de Shapley* és la forma de determinar la contribució de cada museu a la venda del passi.

En aquest treball s'estudien aquests dos models del problema del passi dels museus. Es mostren amb detall les solucions que es poden obtenir i les seves propietats. També es compararen els dos models per veure les limitacions de cadascun.

Al capítol 1 s'introdueixen els conceptes relatius a jocs cooperatius i les seves solucions. També es presenta la demostració dels resultats que poden ser interessants.

Després, al capítol 2, es presenten els conceptes de problemes de repartiment i les seves regles. Aquesta serà la base pel següent capítol.

Al capítol 3 es defineixen una sèrie de propietats de les regles de repartiment. Llavors es caracteritzen les regles de repartiment vistes al capítol anterior mitjançant les propietats que s'han introduït.

Per últim, al capítol 4 s'entra en la part més important del treball, que és aplicar tot el que s'ha vist anteriorment al problema de passi dels museus. Es comença presentant primer el model de Ginsburgh i Zang (2003) [14] i la seva solució, i després es treballa el model de Estévez-Fernández et al.(2004) [10] amb les seves regles corresponents.

Mitjançant el que s'ha vist als tres primers capítols, es defineix l'axiomàtica necessària a cada cas per treballar el problema del passi dels museus i donar les seves respectives solucions. També s'argumenta quin model presenta més limitacions en quant a la forma de modelitzar-ho o a les dificultats que pot tenir.

Capítol 1

Preliminars: la teoria de jocs

En aquest capítol s'introdueixen alguns dels conceptes més essencials en els que es basa aquest treball. Es comença definint què és la teoria de jocs (que principalment és de jocs no cooperatius) i després es mostren exemples de jocs. Tot seguit, s'entren a estudiar els jocs cooperatius, que seran l'objecte central del nostre estudi. Per últim, es tracten les possibles solucions d'aquests.

1.1 Teoria de jocs

La *Teoria de jocs* és una branca de les matemàtiques que modelitza situacions en les que es produeixen una sèrie de decisions de forma interactiva entre un conjunt d'agents. Aquests agents han de prendre individualment una sèrie de decisions (de forma simultània o seqüencial) que produeixen un resultat final. Cada agent té les seves preferències sobre quin resultat final vol que es doni.

Per tant, es pot descriure un *joc* mitjançant un conjunt que indica els jugadors, un conjunt que representi les possibles estratègies de cada jugador en cada moment del joc, i per últim un conjunt que descriu els pagaments que rebrà cada jugador en cada escenari possible.

A continuació es mostra un exemple d'un joc no cooperatiu molt conegut, que va ser introduït per Luce i Raiffa (1957) al seu llibre *Games and Decisions* [18].

Exemple 1.1. *Una parella ha de decidir entre anar al cinema o al teatre. L'home prefereix anar al teatre i la dona prefereix anar al cinema. Els dos volen coincidir al mateix esdeveniment, ja que si no coincideixen es considera que cap dels dos estaria satisfet. Si no es poden comunicar a l'hora de decidir on anar, què hauria de triar cadascú?*

S'acostumen a representar els pagaments que rep cadascú en cada cas mitjançant la següent matriu:

	<i>Teatre</i>	<i>Cinema</i>
<i>Teatre</i>	$(3, 2)$	$(0, 0)$
<i>Cinema</i>	$(0, 0)$	$(2, 3)$

A la matriu podem veure els pagaments que s'obtenen quan l'home tria una fila i la dona una columna. Els parells $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ denoten que l'home rep com a pagament $a \in \mathbb{R}$ i la dona $b \in \mathbb{R}$.

John von Neumann va demostrar el primer resultat important de la teoria de jocs l'any 1928, amb el teorema de minimax. Anys més tard, al 1944, John von Neumann i Oskar Morgenstern publiquen la que es considera la obra clau que dona inici a aquesta disciplina: *The Theory of Games and Economic Behavior* [31].

Durant les següents dècades aquesta branca de les matemàtiques comença a créixer exponencialment. L'any 1950 es presenta el famós dilema del presoner i John Nash introdueix el seu concepte d'equilibri. Aquesta idea serà essencial dins dels models de la branca de jocs no cooperatius.

I a partir d'aquí, la teoria de jocs es segueix desenvolupant fins arribar als nostres dies.

1.2 Jocs cooperatius

En aquesta secció es tractaran els jocs en els que un conjunt d'agents estan interessats en cooperar per tal d'obtenir un benefici major. Aleshores s'haurà de determinar com repartir aquest benefici que obtenen gràcies al treball conjunt. Aquests tipus de jocs s'anomenen *jocs cooperatius*. S'esclarirà amb un exemple molt il·lustratiu.

Exemple 1.2. *Un home vol vendre el seu cotxe. Té dos possibles compradors, el seu veí i el seu nebot, que ofereixen 5.000 i 2.000 euros respectivament. Ambdós creuen que poden revendre el cotxe per més diners.*

Si els agents cooperen i formen entre ells una coalició es generarà un benefici. Si no cooperen, cap d'ells guanyarà res. El que farem serà assignar a cada coalició (subconjunt d'agents que formen part d'aquest joc) un valor numèric, que s'anomena utilitat. Si denotem amb $\{1, 2, 3\}$ al venedor, veí i nebot respectivament i per u la utilitat de les coalicions possibles, tenim que:

$$\begin{aligned} u(\{1\}) &= u(\{2\}) = u(\{3\}) = 0, \\ u(\{1, 2\}) &= 2.000, u(\{1, 3\}) = 5.000, u(\{2, 3\}) = 0, \\ u(\{1, 2, 3\}) &= 5.000. \end{aligned}$$

Definició 1.1. *Un joc cooperatiu és un parell (N, v) format per un conjunt finit $N = \{1, \dots, n\}$ que denota el conjunt de jugadors i una funció $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$, on 2^N és el conjunt de les parts de N . Aquesta funció s'anomena funció característica i verifica que $v(\emptyset) = 0$.*

Direm que cada subconjunt $S \subset N$ és una *coalició* que es pot formar. Denotarem per G^N el conjunt de jocs definits sobre el mateix conjunt d'agents N .

Ens interessa sobretot estudiar les propietats que té la funció característica del joc. Així es poden agrupar el conjunt de funcions característiques que compleixen les mateixes propietats en famílies de jocs.

La primera propietat que definim és la *monotonia*. Això és que cada vegada que s'afegeixen jugadors a una coalició, el seu valor augmenta.

Podem pensar per exemple en algun procés industrial en el que els treballadors siguin el conjunt d'agents. Té sentit doncs esperar que si augmentem aquest conjunt, augmentarà el valor del producte que generen amb el seu treball.

Definició 1.2. *Un joc cooperatiu (N, v) és monòton si per tot $S, T \in 2^N$ tal que $S \subset T$, es compleix que:*

$$v(S) \leq v(T).$$

Una conseqüència immediata de la monotonia és que tot joc monòton és de valors positius.

Una altra propietat que cal definir és la *superadditivitat*. Això és que si dues coalicions no tenen cap jugador en comú, aleshores s'obtingui més benefici considerant la seva unió que sumant els seus beneficis per separat.

Definició 1.3. Un joc cooperatiu (N, v) és superadditiu si per tot $S, T \in 2^N$ tal que $S \cap T = \emptyset$ es compleix que:

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T).$$

També podem requerir que si prenem dues coalicions, la suma dels seus beneficis sigui menor que la suma dels beneficis de la seva unió i de la seva intersecció. Si un joc compleix aquesta propietat, direm que el joc és *convex*.

Definició 1.4. Un joc cooperatiu (N, v) és convex si per a tot $S, T \in 2^N$ es compleix :

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T).$$

A partir de les últimes definicions és fàcil veure que si un joc és convex, també serà superadditiu.

Tornant a l'Exemple 1.2, és fàcil veure que el joc és monòton i superadditiu. Però en canvi, prenent $S = \{1, 3\}$ i $T = \{1, 2\}$, tenim que:

$$u(S) + u(T) = 5000 + 2000 > 5.000 + 0 = u(S \cup T) + u(S \cap T)$$

. Per tant, el joc (N, u) no és convex.

1.3 Solucions de jocs cooperatius

Un cop queda definit el joc cooperatiu, ens interessa determinar com distribuir els resultats obtinguts de la cooperació entre els diferents jugadors.

Una distribució assigna un valor real x_i a cada jugador $i \in N$. S'utilitza el vector $x = (x_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^N$ per denotar aquest repartiment. Aleshores, donada una coalició $S \subset N$, es representa el seu valor per $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$.

El conjunt dels repartiments possibles d'un joc s'anomena *conjunt de preimputacions del joc* i es denota per $I^*(v)$.

Definició 1.5. Donat un joc cooperatiu (N, v) , definim el conjunt de preimputacions del joc com:

$$I^*(v) = \{x \in \mathbb{R}^N : x(N) = v(N)\}.$$

La condició $x(N) = v(N)$ s'anomena *principi d'eficiència*.

Podem estipular que cap jugador rebi una quantitat inferior si treballa en una coalició que si treballa de forma individual. Si això succeís, no tindria sentit que el jugador decidís cooperar. El conjunt de preimputacions del joc que satisfan aquesta propietat, s'anomenen *imputacions del joc*.

Definició 1.6. Donat un joc cooperatiu (N, v) , definim el conjunt d'imputacions del joc com:

$$I(v) = \{x \in I^*(v) : x_i \geq v(\{i\}) \quad \forall i \in N\}.$$

Aquesta condició que determina que cap jugador pot rebre menys del que guanyaria sense col·laborar amb ningú, s'anomena *principi de racionalitat individual*.

Els jocs (N, v) tals que $I(v) \neq \emptyset$ s'anomenen *jocs essencials*.

Ara veurem que hi han solucions conjuntistes i puntuals. Les primeres, donen com a resultat un conjunt i les segones donen un punt. Mostrarem la solució conjuntista més important: el *core*. I veure també dues solucions puntuals molt rellevants: el *valor de Shapley* i el *nucleolus*.

Core

El concepte del *core* d'un joc cooperatiu va ser introduït per Gillies (1959) [12]. Té una gran importància ja que es defineix com el conjunt de repartiments que presenten una estabilitat contra la qual no és possible que cap coalició pugui queixar-se. És a dir, cada coalició obté més del que podria rebre per si mateixa.

El *core* del joc selecciona del conjunt d'imputacions del jocs cooperatiu, aquelles on cada coalició rep com a mínim el valor que li assigna la funció característica. Direm que aquesta distribució és *racional des de punt de vista de les coalicions*. Per tant, podem definir el *core* com el conjunt de distribucions que considerarem racionals.

Prèviament, definirem la *relació de dominació*, que és la forma de comparar dues preimputacions per decidir quina es tria. La idea és seleccionar aquelles que no estiguin dominades.

Definició 1.7. Donat un joc cooperatiu (N, v) i donades dues preimputacions $x, y \in I^*(v)$, diem que x domina y i escriurem $x \text{ dom } y$, si existeix una coalició $S \neq \emptyset$ tal que:

1. $x_i > y_i$, per a tot $i \in S$,
2. $x(S) \leq v(S)$.

Aleshores, podem definir el *core* del joc cooperatiu i comprovar que coincideix amb el conjunt de preimputacions no dominades.

Definició 1.8. Donat un joc cooperatiu (N, v) , el *core* del joc, al que denotem per $C(v)$ es defineix com:

$$C(v) = \{x \in I(v) : x(S) \geq v(S) \quad \forall S \subset N\}$$

Es demostrara que el *core* d'un joc coincideix amb el conjunt de preimputacions no dominades.

Teorema 1.1. El *core* d'un joc coincideix amb el conjunt de preimputacions no dominades.

Demostració. Comencem prenent una preimputació que estigui al *core* i suposarem que és dominada. Sigui $y \in C(v)$, suposem que existeix $x \in C(v)$ tal que $x \text{ dom } y$. Per definició, existeix una coalició $S \neq \emptyset$ tal que:

1. $x_i > y_i$, per a tot $i \in S$.
2. $x(S) \leq v(S)$.

A partir de la primera condició, obtenim que $x(S) > y(S)$. Com $y \in C(v)$, llavors $y(S) > v(S)$. Per tant hem obtingut que $x(S) > v(S)$, cosa que contradiu la segona condició de la definició.

Ara falta provar que si $y \notin C(v)$, llavors existeix una preimputació que domina y . Com $y \notin C(v)$, existeix una coalició $S \neq \emptyset$ tal que $v(S) > y(S)$. Definim el vector $x = (x_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^N$ com:

$$x_i = \begin{cases} y_i + \frac{v(S) - y(S)}{|S|} & \text{si } i \in S \\ \frac{v(N) - v(S)}{|N \setminus S|} & \text{si } i \notin S. \end{cases}$$

Com el vector que hem definit satisfà que $x(N) = v(N)$, pertany al conjunt de preimputacions del joc.

Per definició, tenim que $x(S) = v(S)$. I clarament $x_i > y_i$, per a tot $i \in S$. Per tant, x dom y . $\square$

El següent exemple, introduït per Rafels i Tijs. (1997) [24], ens mostra que en general, el *core* no coincideix amb el conjunt d'imputacions no dominades.

Exemple 1.3. Considerem el joc (N, v) on $N = \{1, 2, 3\}$ i la funció característica v està definida de la següent manera:

$$\begin{aligned} v(\{1\}) &= v(\{2\}) = 0, \quad v(\{3\}) = 1, \\ v(\{1, 2\}) &= 2, \quad v(\{2, 3\}) = v(\{1, 3\}) = 1, \\ v(\{1, 2, 3\}) &= 2. \end{aligned}$$

Es pot comprovar que el *core* d'aquest joc és buit i que el conjunt d'imputacions no dominades és el segment que uneix els punts $(1, 0, 1)$ i $(0, 1, 1)$.

Ara donarem una sèrie de propietats que compleix el *core*.

Teorema 1.2. Donat un joc cooperatiu (N, v) , el *core* és un conjunt compacte.

Demostració. És fàcil veure a partir de la definició que el *core* és un conjunt tancat de $\mathbb{R}^N$, ja que per definició, és una intersecció de conjunt tancats.

Sigui $x \in C(v)$, clarament $v(\{i\}) \leq x_i \quad \forall i \in N$. Aquesta és una cota inferior dels elements del *core*. Ara veurem que podem trobar una cota superior. Tenim que $x_i = x(N) - x(N \setminus \{i\}) = v(N) - x(N \setminus \{i\}) \leq v(N) - v(N \setminus \{i\}) \quad \forall i \in N$. Per tant el *core* és un conjunt afiatat.

I pel teorema de Heine-Borel, tenim que és compacte. $\square$

Ara centrarem la nostra atenció en determinar quins punts formen el *core*. Sabem que no és difícil buscar exemples de jocs cooperatius que verifiquin que el seu *core* és el conjunt buit o un punt.

Exemple 1.4. Considerem el joc (N, v) on $N = \{1, 2, 3\}$ i la funció característica v està definida de la següent manera:

$$\begin{aligned} v(\{1\}) &= 1, v(\{2\}) = 2, v(\{3\}) = 3, \\ v(\{1, 2\}) &= 2, v(\{2, 3\}) = 5, v(\{1, 3\}) = 4, \\ v(\{1, 2, 3\}) &= 6. \end{aligned}$$

Clarament, la imputació $(1, 2, 3) \in C(v)$. I si una altra imputació verifica que $x = (x_1, x_2, x_3) \in C(v)$, s'haurà de complir que $x_i \geq v(i)$, per $i = 1, 2, 3$. I també $v(N) = \sum_{i=1}^3 x_i \geq \sum_{i=1}^3 v(i)$. Per tant, la única solució és $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3)$.

Però què passa si conté més d'un punt? A continuació provarem que si el *core* conté més d'un punt, aleshores en conté infinits. Per fer-ho, demostrarem que el *core* és convex. Això vol dir que si prenem dos punts del *core*, el segment que els uneix també està contingut al *core* i per tant, aquest està format per infinits punts.

Teorema 1.3. *El core és un conjunt convex.*

Demostració. Prenem dos punts diferents $x, y \in C(v)$ amb $x \neq y$. Llavors qualsevol punt que estigui al segment que uneix els dos punts és de la forma $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, on $\lambda \in [0, 1]$.

Cal provar que z pertany al *core*. Sigui $S \subset N$, aleshores:

$$z(S) = (\lambda x + (1 - \lambda)y)(S) = \lambda x(S) + (1 - \lambda)y(S) \geq \lambda v(S) + (1 - \lambda)v(S) = v(S).$$

I clarament:

$$z(N) = (\lambda x + (1 - \lambda)y)(N) = \lambda x(N) + (1 - \lambda)y(N) = \lambda v(N) + (1 - \lambda)v(N) = v(N).$$

Per tant, el *core* és convex. □

Així doncs, hem vist que el *core* és un conjunt convex i compacte.

Valor de Shapley

El *valor de Shapley* és una solució puntual, ja que en general el *core* ens pot donar més d'un punt. La idea en la que es basa a l'hora de fer la distribució és que cada jugador rebí una mitjana ponderada de les contribucions que fa a les diferents coalicions en les que forma part.

Shapley (1953) [27] pren quatre propietats relatives a les regles de repartiment i crea aquest mètode de distribució de forma que sigui l'únic que verifiqui les propietats requerides. Com dedicarem el següent capítol a estudiar en detall les regles de repartiment, veurem llavors quines són aquestes propietats i provarem aquest resultat.

Definició 1.9. Donat un joc cooperatiu (N, v) , el valor de Shapley, al que denotarem per $\phi(v)$, es defineix per tot $i \in N$ com:

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \cdot [v(S \cup \{i\}) - v(S)] \text{ on } s = |S|, n = |N|.$$

Podem donar una altra definició alternativa del *valor de Shapley*. Sigui $\Pi(N)$ el conjunt de totes les permutacions dels elements del conjunt N . Per tot $\pi \in \Pi(N)$ denotarem per $P^\pi(i)$ el conjunt de predecessors de i donat la ordenació π . És a dir, $j \in P^\pi(i)$ si i només si $\pi(j) < \pi(i)$.

Definició 1.10. Donat un joc cooperatiu (N, v) i donat $\pi \in \Pi(N)$, definim el vector de contribucions marginals associat a π i el denotem per $m^\pi(v) \in \mathbb{R}^N$, com el vector $m_i^\pi(v) = v(P^\pi(i) \cup \{i\}) - v(P^\pi(i)) \quad \forall i \in N$.

El conjunt convex més petit que conté el conjunt de vectors de les contribucions marginals, s'anomena *conjunt de Weber* i el denotarem per $W(v)$.

Utilitzant els vectors de les contribucions marginals, una definició alternativa del *valor de Shapley* és la següent:

Definició 1.11. Donat un joc cooperatiu (N, v) amb $v \in G^N$, el valor de Shapley, al que denotarem per ϕ , es defineix com

$$\phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} m_i^\pi(v) \quad \forall i \in N.$$

En general el *valor de Shapley* pot no pertànyer al *core* del joc cooperatiu associat. Ara veurem que en el cas dels jocs convexes sí que passa que el *valor de Shapley* pertany al *core* del joc cooperatiu associat.

Abans presentarem la noció de *joc convex*, que va ser introduïda per Shapley (1971) [28]. L'interès principal d'aquest concepte és que ens permetrà relacionar els conceptes de *core* i *valor de Shapley*.

Proposició 1.1. Un joc cooperatiu (N, v) , és convex si i només si per a tot $i \in N$ i per a dues coalicions $S, T \subset N \setminus \{i\}$ amb $S \subset T$, es compleix que:

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T).$$

Aquesta propietat es coneix com a bola neu, ja que diu que en un joc convex sempre és millor formar part d'una coalició gran que d'una petita. Ara demostrarem el següent resultat que relaciona els jocs convexos i el *core*.

Teorema 1.4. Donat un joc cooperatiu (N, v) , són equivalents:

1. El joc és convex.
2. Per cada $\pi \in \Pi(N)$, $m^\pi(v) \in C(v)$.
3. El *core* i el *conjunt de Weber* coincideixen.

Demostració. 1) $\Rightarrow$ 2). Comencem prenent una permutació qualsevol $\pi \in \Pi(N)$ i una coalició $S \subset N$. Triem $i \in N \setminus S$ tal que per tot $j \in N \setminus (S \cup \{i\})$ es compleixi que $\pi(i) < \pi(j)$. Aleshores $P^\pi(i) \subset S$.

Per hipòtesi, v és convex. Per tant:

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq v(P^\pi(i) \cup \{i\}) - v(P^\pi(i)) = m_i^\pi(v) = \sum_{j \in S \cup \{i\}} m_j^\pi(v) - \sum_{j \in S} m_j^\pi(v).$$

Hem obtingut doncs que :

$$\sum_{j \in S} m_j^\pi(v) - v(S) \geq \sum_{j \in S \cup \{i\}} m_j^\pi(v) - v(S \cup \{i\}).$$

Ara, repetint el mateix argument per $S \cup \{i\}$ repetidament fins a obtenir la coalició N , i utilitzant que $\sum_{j \in N} m_j^\pi(v) = v(N)$, obtenim:

$$\sum_{j \in S} m_j^\pi(v) - v(S) \geq \sum_{j \in N} m_j^\pi(v) - v(N) = 0.$$

És a dir, per cada coalició $S \subset N$, hem obtingut que $\sum_{j \in S} m_j^\pi(v) \geq v(S)$. Per tant, $m^\pi(v) \in C(v)$.

2) $\Rightarrow$ 3). Hem de provar la inclusió $C(v) \subset W(v)$, ja que la inclusió contrària és directa. Ho fem per inducció sobre el nombre de jugadors n . Per $n = 1$ el resultat és directe.

Suposem que el resultat és cert fins a $n - 1$ i provem que també ho és per n . Com $C(v)$ és un conjunt convex, serà suficient amb provar que tots els punts de la frontera del conjunt (v) pertanyen a $W(v)$.

Prenem doncs un punt $x \in Fr(C(v))$. Aleshores, existeix una coalició no buida $S \subset N$ tal que $v(S) = x(S)$.

Per una banda, el subjoc $v_S \in G^S$ es defineix com $v_S(T) = v(T)$ per tota coalició $T \subset S$.

Per altra banda, definim $w \in G^{N \setminus S}$ com $w(T) = v(T \cup S) - v(S)$ per a tota coalició $T \subset N \setminus S$.

Segui x_S la restricció de x als jugadors de la coalició S . Clarament, tenim que $x_S \in C(v_S)$. Com $x(S) = v(S)$ i com $x \in C(v)$, tenim que per cada coalició $T \subset N \setminus S$:

$$x(T) = x(T \cup S) - x(S) \geq v(T \cup S) - v(S) = w(T).$$

Aleshores, $x_{N \setminus S} \in C(w)$. Per hipòtesi inductiva, tenim que:

$$\begin{aligned} x_S &= \sum_{\pi \in \Pi(S)} \lambda_\pi m^\pi(v_S) \quad \text{on } \lambda_\pi \in \mathbb{R}_+ \text{ amb } \sum_{\pi \in \Pi(S)} \lambda_\pi = 1. \\ x_{N \setminus S} &= \sum_{\pi \in \Pi(N \setminus S)} \mu_\pi m^\pi(w) \quad \text{on } \mu_\pi \in \mathbb{R}_+ \text{ amb } \sum_{\pi \in \Pi(N \setminus S)} \mu_\pi = 1. \end{aligned}$$

Aleshores, definim la permutació $\pi^* = (\pi_S, \pi_{N \setminus S})$. Així, tenim que:

$$m_i^{\pi^*}(v) = \begin{cases} m_i^{\pi_S}(v_S) & \text{si } i \in S, \\ m_i^{\pi_{N \setminus S}}(w) & \text{si } i \in N \setminus S. \end{cases}$$

Per tant:

$$x = \sum_{\pi_S \in \Pi(S)} \sum_{\pi_{N \setminus S} \in \Pi(N \setminus S)} \lambda_{\pi_S} \mu_{\pi_{N \setminus S}} m^{\pi^*}(v)$$

És a dir, $x \in W(v)$.

3) $\Rightarrow$ 1). Sigui $i \in N$ i siguin $S, T \subset N \setminus \{i\}$ tals que $S \subset T$. Considerem $\pi = (\pi_S, \pi_{T \setminus S}, \pi_{N \setminus T})$ tal que per cada $j \in N \setminus T$ amb $j \neq i$, es compleixi que $\pi(i) < \pi(j)$. Aleshores tindrem que $P^\pi(i) = T$, i per tant:

$$m_i^\pi(v) = v(P^\pi(i) \cup \{i\}) - v(P^\pi(i)) = v(T \cup \{i\}) - v(T).$$

Llavors, $\sum_{j \in S} m_j^\pi(v) = v(S)$. I com $m^\pi(v) \in C(v)$, tenim que:

$$v(S \cup \{i\}) \leq \sum_{j \in S \cup \{i\}} m_j^\pi(v) = v(S) + m_i^\pi(v).$$

Aleshores, $v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq m_i^\pi(v) = v(T \cup \{i\}) - v(T)$. És a dir, v és convex. $\square$

Com a conseqüència del teorema anterior, hem obtingut el següent resultat:

Corol·lari 1.1. *Donat un joc cooperatiu convex (N, v) , aleshores el valor de Shapley pertany al core del joc.*

Ara veurem una altra solució puntual. El que farà aquesta és trobar un punt dins del *core* en el cas que aquest sigui no buit.

Nucleolus

Schmeidler (1969) [26] va presentar el *nucleolus*, que és una solució puntual i que selecciona un punt del *core* quan aquest és no buit. Es demana, això sí, que el conjunt de imputacions sigui no buit. Traçant algunes solucions que corresponen a problemes de repartiment variats, es veu que s'ha fet servir com un altre mètode de repartiment. Abans de definir-lo, hem d'introduir uns conceptes previs.

Donada una coalició qualsevol i un repartiment, podem mesurar la satisfacció de la coalició respecte el repartiment realitzat.

Definició 1.12. *Donat un joc cooperatiu (N, v) , un repartiment $x \in \mathbb{R}^N$ i una coalició $S \subset N$, definim l'excés de la coalició S respecte el vector x com:*

$$e(S, x) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i.$$

S'observa que si el *core* és no buit tots els seus punts presenten excessos negatius o zero respecte de qualsevol coalició. Observeu també que tant la coalició total com la buida presenten excessos iguals a zero.

Donat el vector que representa un repartiment, podem considerar les diferents coalicions i ordenar de forma no creixent el vector format pels excessos d'aquestes. És el que es denomina vector de excessos.

Definició 1.13. *Definim el vector d'excessos de la coalició com el vector dels excessos ordenat de forma no creixent:*

$$\theta(x) = (e(S_1, x), \dots, e(S_{2^n}, x)) \in \mathbb{R}^{2^n}.$$

És necessari presentar un concepte que ens permetrà comparar dos vectors d'excessos.

Definició 1.14. Donats dos vectors $x, y \in \mathbb{R}^N$, direm que y precedeix x en l'ordre lexicogràfic i escriurem $\theta(y) \succ_L \theta(x)$ si existeix $l \in N$ amb $1 \leq l \leq 2^n$ tal que per tot $k < l$ es verifica que $\theta_k(y) = \theta_k(x)$ i $\theta_l(y) > \theta_l(x)$.

L'ordre lexicogràfic és l'ordre que serveix per classificar les paraules al diccionari, ja que compara el valor més gran, en cas de igualtat va al segon, etc. Ara ja ens trobem en condicions d'introduir el concepte del *nucleolus*.

Definició 1.15. Donat un joc cooperatiu (N, v) tal que $I(v) \neq \emptyset$, definim el nucleolus de v i el denotem per $\eta(v)$, com el conjunt:

$$\eta(v) = \{x \in I(v) : \forall y \in I(v), \theta(y) \succeq_L \theta(x)\}$$

Ara donarem un resultat important sobre el *nucleolus*. Per fer-ho necessitem primer introduir un lema auxiliar que ens servirà a l'hora de fer la demostració del resultat que volem provar. No farem la demostració del lema perquè no és l'objecte del nostre estudi, però no té cap dificultat especial. Es pot trobar a [15].

Lema 1.1. Donat un joc cooperatiu (N, v) i dos vectors $x, y \in \mathbb{R}^N$ amb $x \neq y$ tals que $\theta(x) = \theta(y)$. Si $\lambda \in (0, 1)$, aleshores $\theta(x) \succeq_L \theta(\lambda x + (1 - \lambda)y)$.

Teorema 1.5. Donat un joc cooperatiu (N, v) tal que $I(v) \neq \emptyset$, aleshores el conjunt $\eta(v)$ conté una única assignació.

Demostració. Comencem definint $I^k = \{x \in I^{k-1} : \forall y \in I^{k-1}, \theta_k(x) \leq \theta_k(y)\}$ per a tot $k \in \{1, \dots, 2^n\}$ i $I^0 = I(v)$.

Aleshores, per a tot $k \in \{1, \dots, 2^n\}$, la funció que envia cada vector $x \in I(v)$ a la component $\theta_k(x)$ és contínua. Per tant, els conjunts I^k són no buits i compactes per ser $I(v)$ no buit i compacte.

Afirmem que $\eta(v) = I^{2^n}$. Prenem el vector $x \in I^{2^n}$ i $y \in I(v)$. Si $y \in I^{2^n}$, tindrem que $\theta(x) = \theta(y)$. Llavors, els dos vectors coincideixen, $\theta(y) \succeq_L \theta(x)$.

Per tant, suposem que $y \notin I^{2^n}$. Sigui k_0 el menor índex tal que $y \notin I^{k_0}$. Per tant, $\theta_{k_0}(y) > \theta_{k_0}(x)$. Aleshores, com $x, y \in I^{k_0-1}$, per tot $l \in \{1, \dots, k_0 - 1\}$ tindrem que $\theta_l(x) = \theta_l(y)$. És a dir, $\theta(y) \succeq_L \theta(x)$. En definitiva, hem provat que $\eta(v) \neq \emptyset$.

Per últim, demostrarem per contradicció que $\eta(v)$ és un únic punt. Prenem $x, y \in \eta(v)$ amb $x \neq y$. Com el conjunt $I(v)$ és convex, prenent qualsevol $\lambda \in (0, 1)$ tenim que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in I(v)$. Usant el lema auxiliar, tenim que $\theta(x) \succeq_L \theta(\lambda x + (1 - \lambda)y)$. Però això contradiu la hipòtesi de que $x \in \eta(v)$.

Per tant, queda demostrat que el conjunt $\eta(v)$ conté una única assignació. $\square$

Capítol 2

Problemes de repartiment i regles

L'any 2008 una de les companyies financeres més grans del món, Lehman Brothers, es declarava en fallida. La institució no podia afrontar els pagaments que havia de fer després d'haver perdut gran part dels seus clients i d'haver vist com es devaluaven dràsticament els seus actius financers. Aquest és potser l'exemple més conegut d'una empresa que fa fallida per les enormes conseqüències que va tenir, però en podem trobar molts més en l'actualitat.

Com en l'exemple anterior, molts cops es dona la situació en la que una institució o una persona, no pot afrontar els pagaments que se li exigeixen. Es poden tractar de diners o d'altres béns. Podem posar-nos al cas de que tenim dos trossos d'un pastís per repartir entre cinc amics. Si cadascú ens demana un o els dos trossos, està clar que no podem satisfer les demandes de tothom. Llavors, com es repartirà el bé del que es disposa entre tots els agents? Aquest tipus de problemes es coneixen com a problemes de repartiment i els estudiarem en profunditat en aquest capítol.

Un cop haguem definit què són els problemes de repartiment, intentarem veure les diferents formes de resoldre'ls. Els mètodes per solucionar aquests problemes es coneixen com a regles de repartiment. Més endavant, veurem en detall les regles de repartiment més utilitzades (proporcional, guanys igualitaris, pèrdues igualitàries, Talmud, Talmud invers i arribada aleatòria) per poder aplicar-les a l'hora de solucionar algun problema de repartiment. Totes aquestes regles són diferents entre elles, però tenen propietats en comú molt interessants. Aquestes caracteritzacions seran estudiades en detall al capítol següent.

2.1 Model

Ara començarem per situar-nos en el context que hem explicat abans i definirem què són els problemes de repartiment. Centrarem també la nostra atenció en la seva representació gràfica, ja que serà molt útil més endavant quan parlem de regles de repartiment.

Suposem que tenim un conjunt d'agents, que denotarem per $N = \{1, \dots, n\}$, i un bé perfectament divisible (pot ser diners, temps, un pastís, etc.), que denotarem per E (*Estate*). Llavors ens trobem amb que cada agent del conjunt N reclama una certa quantitat d'aquest bé. Utilitzarem el vector $c = (c_i)_{i \in N}$ per representar les demandes dels agents.

El problema de repartiment sorgeix quan la suma de les reclamacions d'aquests agents és més gran que la totalitat disponible d'aquest bé. Per tant, no serà trivial determinar com fer el repartiment de forma que tots els agents quedin satisfets.

Definició 2.1. Un problema de repartiment és un parell (E, c) , on $E \in \mathbb{R}_+$ i $c \in \mathbb{R}_+^N$ que satisfà: $\sum_{i=1}^n c_i \geq E$.

Denotem per $E \in \mathbb{R}_+$ (*Estate*) al total del bé disponible a repartir entre el conjunt d'agents i per $c = (c_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}_+^N$ al vector de demandes, que indica la quantitat del bé que requereix cada agent $i \in N$.

Suposarem que el vector de demandes de qualsevol problema de repartiment està ordenat de forma creixent. Això és $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n$.

D'ara en endavant, escriurem C per representar la suma de les demandes dels agents. És a dir, $C = \sum_{i \in N} c_i$.

I utilitzarem la lletra l (*loss*) per designar la diferència entre la suma de les demandes i l'*Estate*. És a dir, $l = C - E$. Aquesta quantitat és la que es coneix com a pèrdua (*loss*), ja que representa la quantitat total que no podrà ser repartida. Això és perquè la suma de totes les demandes serà superior al total del bé disponible.

Escriurem B^N per referir-nos a la família de problemes de repartiment que tenen els mateix conjunt d'agents N .

Ara veurem que és possible representar els problemes de repartiment de forma gràfica. De fet, serà molt útil utilitzar aquesta eina al següent capítol quan estudiem les regles de repartiment.

Per fer-ho, definirem una regió: $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^N \mid \sum_{i=1}^n x_i = E\}$, i prendrem un punt $c = (c_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}_+^N$ que es trobi fora d'aquesta regió. Els valors $x_i \in \mathbb{R}_+$ representen el que es repartirà a cada agent $i \in N$ i el punt $c = (c_i)_{i \in N}$ es correspon amb el vector de demandes que hem definit anteriorment.

Observem que els elements del conjunt A representen un hiperplà de punts dins dels eixos en sentit positiu. Com hem dit que c es troba fora d'aquesta regió, es complirà que $C \geq E$, que era la condició que havia de complir el nostre problema de repartiment.

Indexarem cada eix segons els agents. És a dir, si tenim $N = \{1, 2\}$, triarem els eixos de habituals d'abscisses i d'ordenades i assignarem un eix a cada agent $j \in N$. Aleshores, en cada eix representarem la quantitat que demanda i la que pot rebre l'agent corresponent. Ho veurem més clar amb un exemple.

Exemple 2.1. Tenim un conjunt format per dos agents, $N = \{1, 2\}$ i un vector de demandes $c = (c_1, c_2) = (3, 2)$. El *Estate* és de $E = 4$ dòlars (el bé a repartir només juga un paper il·lustratiu).

Comencem triant un eix per representar cada agent. Després representem el punt c , usant que les seves coordenades són les demandes de cada agent.

Aleshores, $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x_1 + x_2 = 4\}$ queda representat pel segment en negre, a la Figura 2.1.

Ara hem de veure com efectuar aquest repartiment. Bàsicament s'hauran de complir dues condicions. La primera és que cap agent pot rebre una quantitat superior a la seva demanda (ni menys de 0). I la segona, és que tota la quantitat del bé disponible ha de ser repartida.

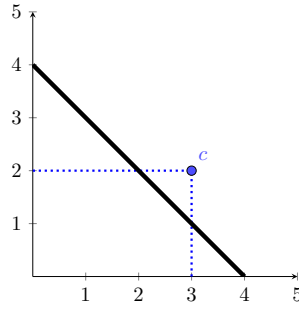


Figura 2.1: Problema de repartiment

Definició 2.2. Una regla de repartiment és una funció $\Psi : B^N \rightarrow \mathbb{R}_+^N$ que associa a cada problema de repartiment $(E, c) \in B^N$ un únic vector $\Psi(E, c) \in \mathbb{R}_+^N$ tal que:

- (i) $c_i \geq \Psi_i(E, c) \geq 0 \quad \forall i \in N$,
- (ii) $\sum_{i=1}^n \Psi_i(E, c) = E$.

Ens centrarem en estudiar 5 regles de repartiment. Les 3 primeres, que són la regla de guanys igualitaris, la regla de pèrdues igualitàries i la regla proporcional, apliquen un criteri igualitari a l'hora de fer el repartiment. Tot i que entre elles es diferencien en quant a la variable a la que apliquen la igualació. Després veurem la regla del Talmud i la del Tamud inversa, que realitzaran l'assignació segons la demanda i l'*Estate*. I per últim, la regla d'arribada aleatòria determinarà el repartiment seguint una seqüència prefixada.

2.2 Regles de repartiment

Regla proporcional

Aquesta regla és potser la que té més tradició en molts països (fins i tot s'acostuma a relacionar amb Aristòtil). Es basa en recompensar a cada agent amb una quantitat proporcional a la seva demanda.

Definició 2.3. La regla proporcional, a la que denotarem per P , és la que assigna a cada parell $(E, c) \in B^N$ un vector proporcional al vector de demandes c . És a dir:

$$P_i(E, c) = \lambda \cdot c_i, \quad \forall i \in N \quad \text{on} \quad \lambda \in [0, 1] \quad \text{és tal que} \quad \sum_{i \in N} \lambda \cdot c_i = E.$$

A partir de la definició: $\sum_{i \in N} \lambda \cdot c_i = E \Rightarrow \lambda = \frac{E}{C}$.

Exemple 2.2. L'exemple que estudiarem a continuació apareix al Talmud. Aumann i Maschler (1985) [3] l'estudien en profunditat i proposen aplicar una altra regla de repartiment que veurem més endavant.

El que farem és presentar aquest exemple i l'utilitzarem per anar veient l'aplicació de les diferents regles de repartiment i després comparar-les.

El problema sorgeix quan dues germanes es disputen la herència del seu pare. La petita reclama la totalitat de l'herència i la germana gran reclama la meitat.

Aplicarem la regla proporcional per veure com s'hauria de fer el repartiment. Sigui E el total de l'herència, tenim que $c = (c_1, c_2) = (E, \frac{E}{2})$.

Aleshores, podem determinar la constant $\lambda \in [0, 1]$ usant que $\lambda = \frac{E}{E + \frac{E}{2}} = \frac{2}{3}$. Per tant, la germana petita rebrà dos terços de la herència i la germana gran rebrà un terç.

Gràficament, podem representar el problema i donar valors al total de la herència E . Els segments en negre representaran els repartiments tals que $x_1 + x_2 = E$. Per exemple, representarem els casos en que E val 3 i 6 (Figura 2.2).

Hem vist que la solució que obtenim aplicant a regla proporcional és que la germana petita rebi $x_1 = \frac{2}{3} \cdot E$ i la germana gran $x_2 = \frac{1}{3} \cdot E$.

Observem que aquest punts formen part de la mateixa recta $x_2 = \frac{x_1}{2}$, que és la relació entre les demandes c_1 i c_2 de cada agent.

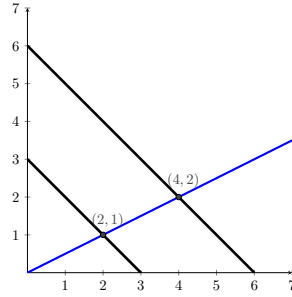


Figura 2.2: Regla proporcional per l'Exemple 2.2

Regla de guanys igualitaris

Amb aquesta regla es pretén ser el més igualitari possible però sense permetre que cap agent obtingui més que el que demana. La idea és fer el repartiment de forma que tots els agents guanyin el mateix, però tenint en compte que ningú pot rebre més que la quantitat que demanda.

Aquesta regla beneficia als agents amb demandes menors perquè quedaran satisfets abans i poden rebre la mateixa quantitat que un altre agent amb una demanda superior.

Per tant, la idea intuïtiva per fer el repartiment seria dividir el total de l'Estate en n parts iguals i que cada agent rebés aquesta quantitat $\frac{E}{n}$. Però si es donés que un agent rep més del que demanda (és a dir, que es complís que $\frac{E}{n} > c_i$), passaria a rebre c_i enlloc de la quantitat inicialment proposada. Aleshores, la diferència $\frac{E}{n} - c_i$ es repartiria en parts iguals entre la resta d'agents.

Definició 2.4. Per cada parell $(E, c) \in B^N$ i cada agent $i \in N$ la regla de guanys igualitaris, a la que denotarem per CEA (Constrained Equal Awards), es defineix com:

$$CEA_i(E, c) = \min\{c_i, \lambda\}, \text{ on } \lambda \in \mathbb{R}_+ \text{ verifica que } \sum_{i \in N} \min\{c_i, \lambda\} = E \quad \forall i \in N.$$

S'observa que la regla que acabem d'introduir està ben definida, ja que existeix un únic $\lambda \in \mathbb{R}_+$ que verifica la propietat anterior. Això és degut a que la suma de mínims és una funció injectiva per ser contínua i creixent.

A continuació aplicarem la regla de guanys igualitaris a l'Exemple 2.2. Com per definició $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ha de verificar que $\min\{c_1, \lambda\} + \min\{c_2, \lambda\} = E$, usant que $c = (E, \frac{E}{2})$, obtenim que $\lambda = \frac{E}{2}$. Aplicant doncs la regla de guanys igualitaris, obtenim que cada germana rebrà la quantitat $\frac{E}{2}$. Representarem el cas en que $E = 20$ (Figura 2.3).

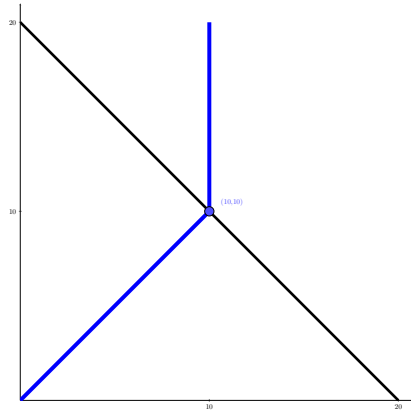


Figura 2.3: Regla de guanys igualitaris per l'Exemple 2.2

Gràficament, el vector de solucions serà (μ, μ) , amb $\mu \in [0, 10]$ fins arribar al punt $(10, 10)$, ja que les demandes del segon agent estaran satisfetes.

Aleshores, el vector de solucions passa a ser de la forma $(0, \mu)$, amb $\mu \in [0, 10]$ fins arribar al punt $(0, 10)$, on ja queda satisfeta la demanda del primer agent.

Per tant, les solucions queden definides per la funció a trossos resultat d'unir les dues parts que hem especificat.

Així, la solució del problema en el cas que $E = 20$, serà la intersecció d'aquesta funció definida per trossos amb el segment que compleix que la suma dels repartiments és igual al total de l'Estate. És a dir, el punt $(10, 10)$.

Representar aquests problemes gràficament serà molt útil, ja que sense necessitat de resoldre algebraicament els sistemes podem trobar les solucions de una forma molt simple.

Regla de pèrdues igualitàries

Aquesta regla manté el mateix esperit igualitari que la regla anterior, però en lloc de fer el repartiment segons els guanys de cada agent, es fa de forma que tots els agents perdin la mateixa quantitat. A més, s'haurà de complir que cap agent pot rebre una quantitat negativa. Ho veurem més clar amb un exemple.

Exemple 2.3. Sigui $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $c \in \mathbb{R}_+^4$ i $E \in \mathbb{R}_+$ tal que $E \leq C$.

La idea és calcular $l = \frac{C-E}{4}$ i llavors cada agent $i \in N$, rebrà $x_i = c_i - l$.

Però si alguna d'aquestes quantitats fos negativa, per exemple suposem que el primer agent rebés $d < 0$, llavors $x_1 = 0$ i es restaria $\frac{d}{3}$ a cada un dels altres agents.

Definició 2.5. Per cada parell $(E, c) \in B^N$ i cada agent $i \in N$ la regla de pèrdues igualitàries, a la que denotarem per CEL (Constrained Equal Losses), es defineix com:

$$CEL_i(E, c) = \max\{c_i - \lambda, 0\}, \text{ on } \lambda \in \mathbb{R}_+ \text{ verifica que } \sum_{i \in N} \max\{c_i - \lambda, 0\} = E \quad \forall i \in N.$$

Ara aplicarem la regla a l'Exemple 2.2. Com λ ha de complir que $\max\{c_1 - \lambda, 0\} + \min\{c_2 - \lambda, 0\} = E$, usant que $c = (E, \frac{E}{2})$, obtenim que $\lambda = \frac{E}{4}$. Aplicant doncs la regla de guanys igualitaris, la germana petita (agent 1) rebrà $\frac{3E}{4}$ i la germana gran obtindrà $\frac{E}{4}$. Representarem gràficament el cas en que $E = 12$ (Figura 2.4).

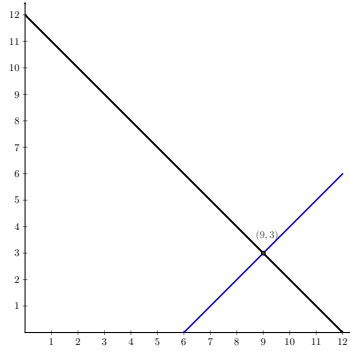


Figura 2.4: Regla de pèrdues igualitàries per l'Exemple 2.2

Regla del Talmud

El Talmud és un llibre que recull les decisions dels rabins sobre lleis jueves i tradicions. Té un gran valor religiós ja que conté la tradició oral, doctrines i preceptes de la religió jueva.

A partir de l'estudi de diversos problemes d'assignació que apareixen al Talmud, Aumann i Maschler (1985) [3] van presentar la regla del Talmud.

Aquesta és una extensió de la regla de *Contested Garment* (peça de roba disputada), que també apareix en aquest llibre. Així que primer de tot, començarem per explicar aquesta última.

El problema de la peça de roba disputada (*Contested Garment*) que apareix al Talmud, consisteix en repartir un teixit entre dos agents. Aquests reclamen el total de la peça i la meitat respectivament. S'observa que aquest és un cas que ja hem estudiat amb altres regles de repartiment, ja que no és altre que l'Exemple 2.2.

Llavors la regla de *Contested Garment* planteja fer el repartiment de forma que cada agent rep la part del total que no ha reclamat l'altre agent. Si després d'això encara queda teixit, es reparteix en parts iguals entre es dos agents.

Definició 2.6. Per cada parell $(E, c) \in B^N$ i cada agent $i \in N = \{1, 2\}$, la regla de Contested Garment, a la que denotarem per CG, es defineix com, per $i = 1, 2$, $j \neq i$:

$$CG_i(E, c) = \max\{E - c_j, 0\} + \frac{E - \max\{E - c_i, 0\} - \max\{E - c_j, 0\}}{2}.$$

Si apliquem aquesta regla a l'Exemple 2.2, obtenim que la germana petita ha d'obtenir $\frac{3E}{4}$ i la germana gran ha d'obtenir $\frac{E}{4}$. És a dir, el vector solució de la regla de repartiment és $(CG_1(E, c), CG_2(E, c)) = (\frac{3E}{4}, \frac{E}{4})$.

A partir de la resolució de més exemples de repartiment que apareixen al Talmud i utilitzant la idea de la regla que acabem de veure, Aumann i Maschler (1985) [3] introdueixen la regla del Talmud.

Definició 2.7. *Per cada parell $(E, c) \in B^N$ i cada agent $i \in N$ la regla del Talmud, a la que denotarem per T , es defineix com:*

$$T_i(E, c) = \begin{cases} \min\{\frac{c_i}{2}, \lambda\} & \text{si } E \leq \frac{C}{2}, \\ \max\{\frac{c_i}{2}, c_i - \mu\} & \text{si } E \geq \frac{C}{2}. \end{cases} \quad (2.1)$$

on $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ són tals que $\sum_{i \in N} T_i(E, c) = E$.

A continuació, veurem el significat d'aquesta definició. Haurem de distingir dos casos, segons si la suma del bé a repartir és major que la meitat de la suma de les demandes o si és menor.

En el cas en que $E \leq \frac{C}{2}$, pensarem en termes de guanys i es farà el repartiment seguint la regla de guanys igualitaris. De forma que cap agent guanyi més de la meitat de la seva demanda.

En el cas en que $E \geq \frac{C}{2}$, pensarem en termes de pèrdues i es farà el repartiment seguint la regla de pèrdues igualitàries. De forma que cap agent perdi més de la meitat de la seva demanda.

Usant la definició de les regles de igualtat en guanys i igualtat en pèrdues, podem reescriure la regla del Talmud com:

$$T_i(E, c) = \begin{cases} CEA_i\left(E, \frac{c_i}{2}\right) & \text{si } E \leq \frac{C}{2}, \\ \frac{c_i}{2} + CEL_i\left(E - \frac{C}{2}, \frac{c_i}{2}\right) & \text{si } E \geq \frac{C}{2}. \end{cases} \quad \forall i \in N.$$

A continuació, aplicarem la regla del Talmud a l'Exemple 2.2. Com que $\frac{c_1+c_2}{2} = \frac{3E}{4}$, llavors ens trobem el cas en que $T_i(E, c) = \frac{c_i}{2} + CEL_i(E - \frac{C}{2}, \frac{c_i}{2})$. Usant que $c = (E, \frac{E}{2})$, arribem a que $(T_1(E, c), T_2(E, c)) = (\frac{3E}{4}, \frac{E}{4})$. És a dir, la germana petita obtindrà $\frac{3E}{4}$ i la germana gran obtindrà $\frac{E}{4}$.

Podem observar que la regla del Talmud i la regla de Contested Garment donen la mateixa solució. Això és perquè efectivament, la regla del Talmud és igual a la regla de Contested Garment quan $n = 2$.

A continuació presentarem un resultat important de la regla del Talmud però no el demostrarem perquè no és d'interès per l'objectiu d'aquest treball. El que ens ve a dir és que la solució que proposa la regla del Talmud coincideix amb el *nucleolus* del joc cooperatiu associat.

Teorema 2.1. *(Aumann i Maschler (1985) [3]) Si s'aplica la regla del Talmud a qualsevol problema de repartiment, s'obté el nucleolus del joc associat a aquest problema.*¹

¹Donat un problema de repartiment (E, c) el joc cooperatiu associat al problema és un joc on els jugadors són els agents i el valor d'una coalició $S \subset N$ és el que queda després de pagar als jugadors de fora de la coalició el que demanen, o zero si aquesta quantitat és negativa. $v(S) = \max\{E - \sum_{i \in N \setminus S} c_i, 0\}$.

Regla del Talmud inversa

Aquesta regla va ser introduïda per Chun et al. (1998) [9], a partir de la regla anterior. Serà interessant estudiar les seves propietats i comparar-la amb la regla del Talmud. La diferència és que ara pensarem en termes de pèrdues en el cas en que $E \leq \frac{C}{2}$, i en termes de guanys al cas contrari.

Definició 2.8. Per cada parell $(E, c) \in B^N$ i cada agent $i \in N$ la regla del Talmud inversa, a la que denotarem per RT (Reverse Talmud), es defineix com:

$$RT_i(E, c) = \begin{cases} CEL_i\left(E, \frac{c_i}{2}\right) & \text{si } E \leq \frac{C}{2}, \\ \frac{c_i}{2} + CEA_i\left(E - \frac{C}{2}, \frac{c_i}{2}\right) & \text{si } E \geq \frac{C}{2}. \end{cases} \quad \forall i \in N.$$

Al Talmud, apareix un altre exemple de repartiment interessant que exposarem a continuació. Aumann i Maschler [3] ja recuperen aquest problema i l'estudien usant la regla del Talmud. Tot seguit el presentarem, aplicarem les regles de repartiment que hem vist i les compararem.

Exemple 2.4. Tenim tres agents $N = \{1, 2, 3\}$ que demanden les quantitats indicades pel vector $c = (100, 200, 300)$. Estudiarem els diferents repartiments que es poden fer en els casos en que l'Estate és igual a 100, 200 i 300.

Utilitzant les definicions de la regla del Talmud i regla del Talmud inversa, obtenim els següents resultats pels tres valors de l'Estate:

Talmud			
	T_1	T_2	T_3
E = 100	100/3	100/3	100/3
E = 200	50	75	75
E = 300	50	100	150

Talmud inversa			
	RT_1	RT_2	RT_3
E = 100	0	25	75
E = 200	50/3	200/3	350/3
E = 300	50	100	150

Regla d'arribada aleatòria

Aquesta regla distribueix el bé a repartir segons l'ordre d'arribada dels agents, que se suposa que és aleatori. El primer agent rebrà el mínim entre la seva demanda i el total de l'Estate. Si encara queda per repartir, el següent agent rebrà el mínim entre la seva demanda i la quantitat que resta per distribuir. I es procedeix així successivament fins a repartir el total de l'Estate.

Clarament aquest mecanisme beneficia als agents que arriben primer. Perquè no sigui així, el que es farà és repartir a cada agent la mitjana del que hagués rebut en cada cas possible d'ordre d'arribada.

Definició 2.9. *Per cada parell $(E, c) \in B^N$ i cada agent $i \in N$ la regla d'arribada aleatòria, a la que denotarem per RA (Random Arrival), es defineix com:*

$$RA_i(E, c) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} \min\{c_i, \max\{E - \sum_{j \in N, \pi(i) < \pi(j)} c_j, 0\}\} \quad \forall i \in N.$$

$\Pi(N)$ denota el conjunt de permutacions del conjunt N . Aleshores, $\pi \in \Pi(N)$ és una ordenació possible de l'ordre d'arribada dels agents de forma que $\pi(i) < \pi(j)$ indica que l'agent $i \in N$ ha arribat abans que l'agent $j \in N$.

A continuació presentarem un resultat important que no demostrarem perquè queda fora de l'objectiu d'aquest treball. És molt rellevant perquè ens ve a dir que hi ha una connexió entre la regla de l'arribada aleatòria i el valor de Shapley del seu joc cooperatiu associat.

Teorema 2.2. *(O'Neill (1982) [23]) Si s'aplica la regla d'arribada aleatòria a qualsevol problema de repartiment, s'obté el valor de Shapley del joc associat a aquest problema.*

Capítol 3

Propietats de les regles de repartiment

L'objectiu d'aquest capítol és presentar una sèrie de propietats que poden complir les regles de repartiment que hem definit al capítol anterior. Veurem quines propietats compleix cada regla per tal de veure en què s'assemblen i en què es diferencien entre elles.

Aumann i Maschler (1985) [3] van ser els primers en estudiar diferents propietats per tal de caracteritzar algunes regles de repartiment. Herrero i Villar (2001) [16] caracteritzen les regles proporcional, guanys igualitaris, pèrdues igualitàries i la del Talmud. Thomson (2003 [29], 2019 [30]) fa un estudi exhaustiu de les regles de repartiment i resultats provats fins el moment.

Durant tot el capítol utilitzarem la lletra R per referir-nos a una regla de repartiment qualsevol.

3.1 Definició de les propietats

Tractament igualitari

Aquesta propietat estipula que els agents amb les mateixes demandes, han d'obtenir la mateixa quantitat. Això pot semblar força intuïtiu, ja que no tindria sentit que els agents que tenen les mateixes característiques obtinguin repartiments diferents.

Definició 3.1. *Direm que una regla de repartiment R satisfà la propietat de tractament igualitari si per tot problema de repartiment $(E, c) \in B^N$ i per a tot $i, j \in N$ tal que $c_i = c_j$, es compleix que:*

$$R_i(E, c) = R_j(E, c).$$

Anonimat

Seguirem amb la idea que hem introduït amb la propietat anterior. Volem recompensar de la mateixa forma als agents amb les mateixes característiques. Per aconseguir aquest objectiu, s'exigirà que sigui indiferent la identitat de l'agent.

Definició 3.2. La regla R satisfà la propietat d'anonimat si per tot parell $(E, c) \in B^N$, per tot $i \in N$ i per tot $\pi \in \Pi(N)$ es compleix que:

$$R_{\pi(i)}(E, c_{\pi(i)}) = R_i(E, c).$$

Homogeneïtat

Aquesta propietat apareix molts cops citada com a invariància d'escala. Ens diu que si tenim un problema de repartiment que verifica que el vector de demandes i l'*Estate* estan multiplicats per la mateixa constant, aleshores el repartiment proposat també ho estarà. Entendrem la gran utilitat d'aquesta propietat amb un exemple molt senzill.

Pensem en un problema de repartiment (E, c) on el bé divisible siguin diners i estigui mesurat en euros. Si prenem com a unitat monetària els iens, el nostre problema de repartiment quedarà multiplicat per una constant $(\lambda E, \lambda c)$.

Aleshores, la regla de *homogeneïtat* determina que les solucions dels dos problemes de repartiment es mantindran proporcionals amb la mateixa constant de proporcionalitat que abans. Si no fos així, el fet de canviar d'unitats econòmiques en aquest cas afectaria al repartiment proposat, cosa que no té sentit.

Definició 3.3. La regla R satisfà la propietat de homogeneïtat si per a tot parell $(E, c) \in B^N$ es compleix que:

$$R(\lambda E, \lambda c) = \lambda R(E, c) \quad \text{on } \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

Composició cap avall

Ara estudiarem dues propietats que tracten la situació en que un cop solucionat el problema inicial de repartiment (E, c) , canvia el valor de l'*Estate*. Denotarem per E' el nou valor que aquest prendrà.

Si la quantitat del bé disponible disminueix, és a dir, $E' < E$, aleshores tenim dues opcions per fer el repartiment.

La primera opció és desfer el repartiment inicial i tornar a aplicar la regla que pertorqui amb el nou *Estate* E' .

I la segona opció és plantejar un nou problema de repartiment en el que les solucions del problema inicial es prenen com a vector de demandes. Així passariem a aplicar a regla que pertorqui per solucionar el problema (E', x) , on $x = (x_i)_{i \in N}$ és el vector de solucions del problema inicial (E, c) . Observem que aquest nou problema de repartiment està ben definit perquè el nou vector de demandes satisfà que $\sum_{i \in N} x_i = E > E'$.

Aleshores, la regla de *composició cap avall* ens diu que el resultat que obtenim si seguim qualsevol dels dos procediments serà el mateix.

Definició 3.4. La regla R satisfà la propietat de composició cap avall si per a tot parell $(E, c) \in B^N$ i per $E' \in \mathbb{R}_+$ amb $E' < E$ es compleix que:

$$R(E', c) = R(E', R(E, c)).$$

Composició cap amunt

Ara aplicarem la mateixa idea al cas en que la quantitat del bé disponible augmenta, és a dir, $E' > E$. De nou, tenim dues opcions.

La primera opció és desfer el repartiment inicial i tornar a aplicar la regla que pertorqui amb el nou *Estate* E' .

I la segona opció és que s'apliqui la mateixa regla per distribuir entre els agents l'excedent $E' - E$, i que s'afegeixi al repartiment inicialment proposat.

Aleshores, la regla de *composició cap amunt* ens diu que el resultat que obtenim si seguim qualsevol dels dos procediments serà el mateix.

Definició 3.5. *La regla R satisfà la propietat de composició cap amunt si per a tot parell $(E, c) \in B^N$ i per $E' \in \mathbb{R}_+$ amb $E' > E$ es compleix que:*

$$R(E', c) = R(E, c) + R(E' - E, c - R(E, c)).$$

Independència de camins

Ens trobem en la situació en que s'estima que el bé disponible és de E' , però en realitat té un valor inferior $E < E'$. Aleshores, la propietat d'*independència de camins* ens diu que el resultat d'aplicar una regla qualsevol al problema (E, c) és el mateix que el que s'obté al prendre com a vector de demandes el resultat d'aplicar la regla de repartiment al problema (E', c) .

Definició 3.6. *La regla R satisfà la propietat d'independència de camins si per a tot $(E, c) \in B^N$ i per a tot $E' \in \mathbb{R}_+$ tal que $E \leq E' \leq c_1$ es compleix que:*

$$R(E, c) = R(E, R(E', c)).$$

Consistència

Ens situarem ara en el context de que el conjunt d'agents canvia. Introduïrem la notació (N, E, c) per indicar també el conjunt d'agents del problema de repartiment.

La propietat de *consistència* ens ve a dir que si apliquem una regla determinada al conjunt d'agents N , obtindrem el mateix repartiment que si la apliquem al problema reduït pel subconjunt $S \subset N$. En aquest problema reduït es suposa que els agents del conjunt $N \setminus S$ han obtingut la part de l'*Estate* que es determinava al problema original i han marxat.

Definició 3.7. *La regla R satisfà la propietat de consistència si per tot $(N, E, c) \in B^N$, $S \subset N$ i per a tot $i \in N \setminus S$ es compleix que:*

$$R_i(N, E, c) = R_i(N \setminus S, E - \sum_{j \in S} R_j(N, E, c), (c_j)_{j \in N \setminus S}).$$

Pel cas en que $|N| = 2$, anomenarem a aquesta propietat *consistència bilateral*.

Ara introduïrem una versió de consistència que s'anomena *consistència a la inversa* (*reverse consistency*). La idea intuïtiva ara és contrària a la de la consistència que hem vist.

Abans hem estipulat que la consistència consistia en que resoldre un problema pel conjunt d'agents N era equivalent a resoldre'l per un subconjunt d'aquest. Per contra, la consistència a la inversa determina que la forma de resoldre un problema per dos agents, es pot estendre a qualsevol conjunt d'agents.

Definició 3.8. *La regla R satisfà la propietat de consistència a la inversa si per tot $(N, E, c) \in B^N$ amb $|N| \geq 3$, per cada repartiment $x \in R^N$ amb $x(N) = E$ i per tota coalició $S \subset N$ amb $|S| = 2$, es compleix que:*

$$x_S = R(S, E - x(N \setminus S), c_S) \Rightarrow x = R(N, E, c).$$

Sostenibilitat

Imaginem que ens trobem en una situació com la que utilitzàvem per introduir el segon capítol. Tenim una institució molt gran que fa fallida. Entre els afectats que reclamen els seus diners es troben grans bancs però també particulars.

En aquest problema de repartiment tenim agents molt desiguals pel que fa al seu capital. La reclamació dels bancs i grans empreses serà molt elevada i la dels particulars serà molt petita en comparació.

Aleshores, un principi que es segueix en aquests casos és donar prioritat als agents amb reclamacions molt petites. Aquests seran satisfets primer i després ja s'establirà com repartir el bé restant entre els agents amb grans demandes. Aquesta idea es coneix com a *sostenibilitat*.

Definició 3.9. *Donat un parell $(E, c) \in B^N$, direm que la demanda c_i , amb $i \in N$, és sostenible si $\sum_{j \in N} \min\{c_j, c_i\} \leq E$*

Per tant, direm que una regla de repartiment satisfà la propietat de *sostenibilitat*, si satisfà totalment als agents amb demandes sostenibles.

Definició 3.10. *La regla R satisfà la propietat de sostenibilitat si per a tot $(E, c) \in B^N$ i per a tot $i \in N$ es compleix que:*

$$c_i \text{ sostenible} \Rightarrow R_i(E, c) = c_i.$$

Exempció

Ens situem en un context com el que hem vist abans, on tenim un problema de repartiment en el que intervenen agents amb demandes molt desiguals. Anem a veure una altra forma de compensar primer als agents amb demandes petites.

La diferència amb la propietat anterior és com determinarem que una demanda és suficientment baixa. Ara exigirem únicament que la demanda sigui menor a una constant determinada.

Depenent de l'autor, aquesta constant varia. En aquest treball he seguit l'article de Yeh (2004) [33]. Així doncs, tal i com determina aquest, la constant triada serà $\frac{E}{n}$.

Definició 3.11. La regla R satisfà la propietat d'exempció si per a tot $(E, c) \in B^N$ i per a tot $i \in N$ es compleix que:

$$c_i \leq \frac{E}{n} \Rightarrow R_i(E, c) = c_i.$$

Independència de demandes residuals

Seguim en un context en el que els agents tenen demandes molt desiguals. Però ara pensem en que ens pot interessar prioritzar als agents amb demandes grans.

Per entendre-ho millor podem pensar en el cas d'un sistema de salut pública en la que tenim només dues persones. Una d'elles pateix una malaltia greu i necessita un tractament molt costós i l'altre té la grip (el seu tractament costa molt poc). Llavors si el capital que es disposa és insuficient per fer front als tractaments de les dues persones, prioritzarem a la persona que pateix la malaltia greu.

Primer de tot, definirem el concepte de demanda residual. Ens servirà per determinar, en aquest nou context, què és el que entenem per una demanda prou petita.

Definició 3.12. Donat un parell $(E, c) \in B^N$ i per a tot $i \in N$, direm que la demanda de l'agent i és residual si:

$$E \leq \sum_{j \in N} \max\{c_j - c_i, 0\}.$$

Llavors, per tal de compensar als agents amb demandes més grans, el que es fa és no considerar als agents amb demandes residuals.

Definició 3.13. La regla R satisfà la propietat de independència de demandes residuals si per a tot $(E, c) \in B^N$ i per a tot $i \in N$ es compleix que:

$$c_i \text{ residual} \Rightarrow R_i(E, c) = 0.$$

Exclusió

Ens situem en el mateix context que abans, on volem prioritzar als agents amb demandes grans. Per fer-ho, determinarem que els agents amb demandes prou petites no rebran res de l'Estate. I llavors la totalitat del bé disponible es dividirà (seguint la regla de repartiment que pertogui), entre els agents amb demandes més grans.

La diferència amb la propietat anterior és com determinarem que una demanda és suficientment baixa. Ara exigirem que la demanda sigui menor que la constant $\frac{l}{n}$. Així doncs, direm que una regla de repartiment verifica la propietat d'exclusió si no considera a l'hora de fer el repartiment als agents amb demandes menors que $\frac{l}{n}$.

Definició 3.14. La regla R satisfà la propietat d'exclusió si per a tot $(E, c) \in B^N$ i per a tot $i \in N$ es compleix que:

$$c_i \leq \frac{l}{n} \Rightarrow R_i(E, c) = 0.$$

Assegurament

La propietat que veurem a continuació estipula que els agents que tinguin demandes raonables, obtindran una quantitat mínima a l'hora de fer el repartiment.

Entendrem com a raonable que la seva demanda sigui inferior al total del bé disponible. Així, es garantirà que aquests agents rebin com a mínim la seva demanda dividida entre el total d'agents.

Definició 3.15. *La regla R satisfà la propietat d'assegurament si per a tot $(E, c) \in B^N$, i per a tot $i \in N$ es compleix que:*

$$c_i \leq E \Rightarrow R_i(E, c) \geq \frac{c_i}{n}.$$

Dualitat

Introduïrem la noció de dualitat. Per això, hem de pensar que qualsevol problema de repartiment es pot abordar des de dues perspectives.

La primera és intentar repartir el total de l'*Estate* entre els agents. Això es coneix com a "pensar en termes de guanys".

I la segona és intentar repartir les pèrdues entre els agents, ja que la suma de les demandes és superior al total del bé disponible. Això es coneix com a "pensar en termes de pèrdues".

Doncs bé, la dualitat és la propietat que estableix que tant si optem per una estratègia o altre, obtindrem el mateix resultat. Això és molt útil, ja que ens permet relacionar dues regles de repartiment si acaben donant el mateix repartiment però des de diferents perspectives.

Definició 3.16. *Donat un parell $(E, c) \in B^N$ i una regla de repartiment R , definirem la regla dual de R (a la que denotarem per R^*) com :*

$$R^*(E, c) = c - R(l, c).$$

A partir d'aquesta definició, podem fer un parell d'observacions interessants.

És fàcil comprovar que $R = (R^*)^*$. I també podem demostrar que donat un problema de repartiment (E, c) , tota regla de repartiment R defineix una regla dual R^* aplicada al mateix problema.

Introduïrem també una propietat molt interessant que és que una regla de repartiment sigui dual amb si mateixa.

Definició 3.17. *La regla R satisfà la propietat de autodualitat si per a tot $(E, c) \in B^N$ es compleix que:*

$$R(E, c) = R^*(E, c) = c - R(l, c).$$

Drets mínims

Pot ser interessant demanar que una regla de repartiment atorgui a cada agent una certa quantitat que es considera la mínima que hauria de rebre.

Aquesta quantitat que entenem com a dret mínim d'un agent no és altre que la que no reclamen la resta d'agents. En el cas de que la suma de les demandes de la resta d'agents sigui superior a la quantitat total que el que es pot repartir, el dret mínim de l'agent en qüestió serà zero.

Definició 3.18. Donat un parell $(E, c) \in B^N$ direm que el dret mínim d'un agent $i \in N$, i ho denotarem per $r_i(E, c)$, és la quantitat que queda un cop s'han satisfet completament les demandes de tota la resta d'agents. Aquesta quantitat serà 0 si no s'han pogut satisfer les demandes. És a dir:

$$r_i(E, c) = \max\{E - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} c_j, 0\}.$$

Denotarem per $r(E, c) = (r_i(E, c))_{i \in N}$ el vector que té per components els drets mínims de cada agent $i \in N$.

Per tant, sembla plausible atorgar a cada agent el seu dret mínim primer i després aplicar la regla que sigui al capital restant.

Definició 3.19. La regla R satisfà la propietat de drets mínims si per a tot $(E, c) \in B^N$, i per a tot $i \in N$ es compleix que:

$$R(E, c) = r(E, c) + R(E - \sum_{i \in N} r_i(E, c), c - r(E, c)).$$

3.2 Caracteritzacions de les regles de repartiment

Aquest conjunt de propietats que hem vist a la secció anterior serveixen per caracteritzar les diferents regles de repartiment del Capítol 2. No ens centrarem per tant en demostrar quines regles de repartiment compleixen cada propietat. A continuació s'especificarà quines propietats compleix cada regla.

La regla **proporcional** verifica composició cap avall, composició cap amunt, anonimat, homogeneïtat, tractament igualitari, consistència i autodualitat.

La regla de **guanys igualitaris** verifica tractament igualitari, anonimat, homogeneïtat, composició cap avall, composició cap amunt, independència de camins, consistència, sostenibilitat, exempció i assegurement.

La regla de **pèrdues igualitàries** verifica composició cap avall, composició cap amunt, tractament igualitari, anonimat, homogeneïtat, independència de camins, consistència, independència de demandes residuals i exclusió.

La regla del **Talmud** verifica independència de camins, homogeneïtat, anonimat, tractament igualitari, consistència, assegurement, autodualitat i drets mínims.

La regla de **Talmud inversa** verifica consistència i autodualitat.

La regla d'**arribada aleatòria** verifica tractament igualitari, anonimat, homogeneïtat, assegurement, autodualitat i drets mínims.

El que ens interessa serà caracteritzar les regles a partir de les propietats i veure quines regles de repartiment es poden definir a partir del compliment d'un conjunt de propietats. Com en aquest treball ens centrem en el problema del passi dels museus, que serà el que veurem al següent capítol, no s'entraran a demostrar moltes de les caracteritzacions que es presentaran. Es demostrarà només el que es consideri més interessant.

Serà al següent capítol on ens interessarà entrar en profunditat en demostrar les caracteritzacions d'algunes regles mitjançant noves propietats que s'ajustin al context del problema del passi dels museus.

Moulin (2000) [22] demostra que les úniques regles que satisfan tractament igualitari, composició cap amunt i consistència són les de guanys igualitaris, pèrdues igualitàries i proporcional.

Herrero i Villar (2001) [16] demostren que la regla de guanys igualitaris és la única regla que satisfà tractament igualitari, composició cap amunt, consistència i exempció. També demostren que la regla de pèrdues igualitàries és la única regla que satisfà tractament igualitari, composició cap amunt, consistència i exclusió.

Young (1998) [34] demostra que la regla proporcional és la única que compleix alhora autodualitat i composició cap amunt.

Thomson (2003) [29] demostra que la regla proporcional és la única que compleix alhora autodualitat i composició cap avall.

Moreno-Ternero i Villar (2004) [21] demostren que una regla de repartiment és la del Talmud si i només si verifica consistència, autodualitat, independència de camins i assegurement.

Demostrem aquesta última caracterització perquè per fer-ho presentarem un resultat important, l'*Elevator Lemma*. Aquest estableix una relació entre la consistència i la consistència a la inversa.

Teorema 3.1. (Moreno-Ternero i Villar (2004) [21]) *Una regla de repartiment R satisfà les propietats d'assegurement, autodualitat, consistència bilateral i independència de camins si i només si és la regla del Talmud.*

Demostració. Comencem provant que la regla de Talmud (T) compleix aquestes propietats. No demostrarem que la regla del Talmud compleix autodualitat i consistència bilateral perquè s'obté directament de la definició.

1. *T compleix assegurement:*

Prenem $i \in N$ tal que $c_i \leq E$. Aleshores volem veure que $T_i(E, c) \geq \frac{c_i}{n}$.

- Si $E \geq \frac{C}{2}$, aleshores $T_i(E, c) = \max\{\frac{c_i}{2}, c_i - \mu\}$, on μ està definida a la definició de la regla del Talmud 2.1.

Pel cas $\frac{c_i}{2} < c_i - \mu$, raonarem per reducció al absurd. Si $T_i(E, c) = c_i - \mu < \frac{c_i}{n}$, arribem a una contradicció, ja que llavors tindríem que $\frac{c_i}{n} > c_i - \mu > \frac{c_i}{2}$.

- Si $E \leq \frac{C}{2}$, aleshores $T_i(E, c) = \min\{\frac{c_i}{2}, \lambda\}$.

Pel cas no trivial $\lambda < \frac{c_i}{2}$, raonarem per reducció al absurd, suposant doncs que $\lambda < \frac{c_i}{n}$. Aleshores tindrem que $\lambda < E$.

Per tot $k \geq i$ tenim que $T_k(E, c) = \lambda \leq \frac{E}{n}$.

Com per definició s'ha de complir que la suma dels repartiment ha de ser el total de l'*Estate*, usant el que acabem de veure:

$$E = \sum_{j=1}^{i-1} T_j(E, c) + \sum_{j=i}^n \lambda < \sum_{j=1}^{i-1} T_j(E, c) + (n - i + 1) \cdot \frac{E}{n}.$$

És a dir, obtenim que $\sum_{j=1}^{i-1} T_j(E, c) > \frac{i-1}{n} \cdot E$.

Sigui $j_0 \in \{1, \dots, i-1\}$ l'agent del conjunt que obté el major repartiment segons la regla del Talmud, aleshores:

$$(i-1) \cdot T_{j_0}(E, c) > \frac{i-1}{n} \cdot E \Rightarrow T_{j_0}(E, c) > \frac{E}{n} > \lambda = T_n(E, c).$$

I això es una contradicció, ja que la regla del Talmud preserva l'ordre (Aumann i Maschler (1985)[3]).

2. *T compleix independència de camins:*

Siguin E', E tals que $E \leq E' \leq c_1$, volem veure que $T_i(E, c) = T_i(E, T(E', c)) \forall i \in N$. Com $E \leq E' \leq \frac{C}{2}$, aleshores $T_i(E, c) = \min\{\frac{c_i}{2}, \lambda\}$ i $T_i(E', c) = \min\{\frac{c_i}{2}, \lambda'\}$ per a tot $i \in N$.

A partir de la definició, tenim que:

$$T_1(E, c) = \begin{cases} \frac{E}{n} & \text{si } E \leq \frac{n}{2} \cdot c_1, \\ \frac{c_1}{2} & \text{si } \frac{n}{2} \cdot c_1 \leq E \leq C - \frac{n}{2} \cdot c_1, \\ c_1 - \frac{l}{n} & \text{si } E \geq C - \frac{n}{2} \cdot c_1. \end{cases}$$

Com $c_1 > E$, aleshores $T_1(E, c) = \frac{E}{n}$. Per tant, com $\frac{E}{n} = \lambda < \frac{c_1}{2}$, tenim que $T_i(E, c) = \frac{E}{n} \forall i \in N$. De la mateixa forma, obtenim que $T_i(E', c) = \frac{E'}{n} \forall i \in N$.

Sabem que la regla del Talmud verifica la propietat de tractament igualitari. Com les components del vector $T_i(E', c)$ són totes iguals a $\frac{E'}{n}$, aplicant la propietat de tractament igualitari, obtenim que $T_i(E, T(E', c)) = \frac{E}{n}$ per a tot $i \in N$. Així, obtenim la igualtat desitjada $T_i(E, T(E', c)) = T_i(E, c) \forall i \in N$.

Un cop hem provat que la regla del Talmud verifica totes les propietats enunciades, hem de provar el recíproc.

Per fer-ho, ens valdrem del *Elevator Lemma* que va presentar W. Thomson [30]. L'enunciem a continuació.

Lema 3.1. *Elevator Lemma: Si tenim una regla que compleix la propietat de consistència bilateral i una regla que compleix la propietat de consistència a la inversa, i coincideixen per dos agents, aleshores coincideixen per qualsevol nombre d'agents.*

Ara, prenem una regla R qualsevol que satisfà assegurament, autodualitat, consistència bilateral i independència de camins. Com la regla del Talmud compleix la propietat de consistència a la inversa, per l'*Elevator Lemma*, serà suficient amb veure que les regles R i T coincideixen per dos agents.

Abans de res, enunciem un altre lema auxiliar que es necessitarà.

Lema 3.2. (Moreno-Ternero i Villar (2004) [21]) Per a dos agents, si una regla de repartiment satisfà les propietats d'assegurament, autodualitat i independència de camins, aleshores satisfà la propietat de tractament igualitari.

Usant aquest lema, tenim que R compleix la propietat de tractament igualitari entre iguals.

Per provar que les regles R i R són iguals, utilitzarem la definició de la regla del Talmud. Tenim que:

$$T(E, c) = \begin{cases} \left(\frac{E}{2}, \frac{E}{2} \right) & \text{si } E \leq c_1, \\ \left(\frac{c_1}{2}, E - \frac{c_1}{2} \right) & \text{si } c_1 \leq E \leq c_2, \\ \left(c_1 - \frac{l}{2}, c_2 - \frac{l}{2} \right) & \text{si } E \geq c_2. \end{cases}$$

1. Si $c_1 \leq E \leq c_2$, com $c_1 \leq E$ i donat que R satisfà la propietat d'assegurament tenim que $R_1(E, c) \geq \frac{c_1}{2}$.

Com $c_2 \leq E$ equival a $c_1 \leq l$, de nou usant que R satisfà la propietat d'assegurament, tenim que $R_1(l, c) \geq \frac{c_1}{2}$.

Ara, com R satisfà la propietat d'autodualitat, $R_1(E, c) = c_1 - R_1(l, c) \leq \frac{c_1}{2}$.

Per tant, tenim que $R_1(E, c) = \frac{c_1}{2} = T_1(E, c)$. I llavors, com $c_1 + c_2 = E$, tenim que $R_2(E, c) = E - \frac{c_1}{2} = T_2(E, c)$.

2. Si $E \leq c_1$, hem vist al cas anterior que per $E = c_1$, usant la definició de R tenim que $R_1(c_1, c) = \frac{c_1}{2}$ i $R_2(c_1, c) = \frac{c_1}{2}$.

Com R satisfà la propietat de tractament igualitari, pel vector $c' = (\frac{c_1}{2}, \frac{c_1}{2})$, tenim que $R_1(E, c') = R_2(E, c')$. Aleshores, tindrem que $R_i(E, c') = T_i(E, c) = \frac{E}{2}$ per $i = 1, 2$. És a dir, $R(E, c') = T(E, c)$.

Com R satisfà la propietat d'independència de camins, $R(E, c) = R(E, c') = T(E, c)$.

3. Si $E \geq c_2$, aleshores $l < c_1$. Usant el cas anterior, tenim que $R(l, c) = (\frac{l}{2}, \frac{l}{2})$.

Com R satisfà la propietat d'autodualitat, $R(l, c) = c - R(E, c)$. Per tant, $R(E, c) = (c_1 - \frac{l}{2}, c_2 - \frac{l}{2}) = T(E, c)$.

□

Hem vist doncs les propietats més importants que compleixen les regles de repartiment introduïdes al capítol 2 i les hem caracteritzat usant aquestes propietats.

Al capítol següent tornarem a fer el mateix però en el context del problema del passi dels museus. Per això, modelitzarem el problema de forma que haurem de versionar algunes de les regles de repartiment i propietats que hem vist anteriorment.

Capítol 4

Passi dels museus

En aquest capítol analitzarem en profunditat el que es coneix com a problema del passi dels museus. Aquesta situació sorgeix quan un conjunt de museus decideixen oferir conjuntament un passi que dona accés il·limitat a les seves instal·lacions durant un període limitat de temps.

El problema que abordarem és com repartir els ingressos derivats de la venda d'aquest passi entre els diferents museus. Les diferents formes de repartiment es racionalitzen mitjançant les seves propietats, si aquestes es caracteritzen. Això és el que coneixem com a problema del passi dels museus.

L'objectiu d'aquest capítol és presentar les diferents formes de modelar aquesta situació i les diferents solucions que resulten de cadascuna. Intentarem entendre les diferències que sorgeixen en introduir noves variables al model i compararem els resultats obtinguts.

Ginsburgh i Zang (2001) [13] van ser els primers en plantejar aquest problema. El que fan és abordar aquesta situació com un joc cooperatiu i utilitzen el *valor de Shapley* per repartir els ingressos de la venda del passi. Poc després d'aquesta publicació i en contraposició amb aquest primer model, Estévez-Fernández et al. (2004) [10] publiquen un article en el que descriuen el mateix problema des d'una altra perspectiva. El que fan és modelitzar-ho com un joc cooperatiu de bancarrota i el solucionen aplicant una sèrie de regles de repartiment pròpies de jocs cooperatius.

A partir d'aquí, sorgeixen noves publicacions en les que es modifiquen els dos models que acabem d'esmentar. Essencialment, s'introdueixen noves variables o es modifiquen regles anteriorment vistes per tal de solucionar limitacions que es troben dels dos primers models. Casas-Méndez et al. (2009) [7] introdueixen un seguit de ponderacions a les regles de repartiment utilitzades prèviament.

Bergantiños i Moreno-Ternero (2015) [4] fan una distinció en dos models diferents segons la informació de la que es disposa sobre el passi dels museus. Per últim, Martínez i Sánchez-Soriano (2021) [20] introdueixen el concepte de *Solidarity with dummies*. El que fan és proposar un model similar al de Ginsburgh i Zang, tot i que donen una caracterització més ampla del model que es pot generalitzar a més problemes.

4.1 El passi dels museus com a joc cooperatiu

Situem-nos en el context que acabem de presentar a l'inici del capítol. Ens trobem en la situació en la que un conjunt de museus decideixen oferir conjuntament un passi perquè el comprador pugui visitar tots els museus de forma il·limitada durant un cert període de temps. Suposarem que el preu d'aquest passi, que denotarem $\pi \in \mathbb{R}_+$, és fix.

El conjunt $N = \{1, \dots, n\}$ representa el conjunt de museus que formen part del passi i $M = \{1, \dots, m\}$ representa el conjunt de compradors d'aquest passi.

El que farem a continuació és descriure el problema anterior com un joc cooperatiu, tal i com fan Ginsburgh i Zang (2003) [14]. Per fer-ho, necessitem introduir abans uns conceptes previs.

Començarem suposant que en aquest model podem saber quins són els museus que ha visitat cada persona que ha comprat el passi. Així, denotem per $K_j \subset N$ el conjunt de museus que ha visitat el comprador $j \in M$. També suposarem que cada comprador del passi $j \in M$ prefereix visitar una sèrie de museus que uns altres i que aquestes preferències són personals.

En general, per qualsevol subconjunt $K \subset N$, indicarem per $v(K)$ el nombre de compradors que només utilitzen el passi per visitar els museus que estiguin al conjunt K . Així, podem posar:

$$v(K) = |\{j \in M : K_j \subset K\}|.$$

Ara hem de veure com poder fer el repartiment dels ingressos obtinguts amb la venda del passi dels museus. La idea per distribuir aquests diners entre els museus participants serà recompensar a cada museu segons la seva contribució relativa. Això vol dir que els ingressos de cada passi es repartiran de la mateixa forma entre els museus visitats pel comprador del passi.

Per tant, si denotem per $\phi(i)$ el nombre de consumidors del passi dels museus que es poden atribuir al museu $i \in N$, cada museu rebrà com a compensació $\phi(i) \cdot \pi$. El problema de repartiment queda reduït doncs, a determinar el valor $\phi(i)$ per a tot $i \in N$.

Seguint la notació que hem usat a l'inici del capítol, considerem un conjunt de museus $N = \{1, \dots, n\}$ i una coalició $K = \{1, \dots, k\} \subset N$. Denotem per $v(K)$ el nombre de compradors del passi que han visitat només els museus que formen part de la coalició K .

Definició 4.1. *Definim el problema del passi dels museus com el joc cooperatiu (N, v) on $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ és la funció característica definida per:*

$$v(K) = |\{j \in M : K_j \subset K\}| \quad (4.1)$$

Denotarem per $\mathcal{P}$ el conjunt de problemes del passi dels museus descrits i modelitzats en aquest context.

Aleshores, si $\phi(i)$ és el nombre de consumidors del passi dels museus que es poden atribuir al museu $i \in N$, podem expressar aquest nombre mitjançant el *valor de Shapley*:

$$\phi(i) = \phi_i(v) = \sum_{K \subset N} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} \cdot [v(K) - v(K \setminus \{i\})], \quad \forall i \in N.$$

Aquesta fórmula ens diu quants passis venuts es poden atribuir al museu $i \in N$ i per tant els ingressos que rebrà aquest, que seran $\phi(i) \cdot \pi$. Aquesta serà la *solució al problema del passi dels museus*.

Ara introduïrem dues propietats de les regles de repartiment aplicades al context dels museus, que ens serviran per presentar una sèrie de resultats sobre el *valor de Shapley*.

En el context d'aquest capítol, utilitzarem el concepte de *dummy* per referir-nos als museus que no reben cap visita. La propietat que definirem estipula que aquests museus no rebin res a l'hora de fer el repartiment.

Definició 4.2. *Una regla de repartiment R satisfà la propietat de dummy si per cada museu $i \in N$ tal que $U_i(K) = \{j \in M : i \in K_j\} = \emptyset$, es compleix que:*

$$R_i(E, c) = 0.$$

Fins ara hem utilitzat la notació $R(E, c)$ per denotar la regla de repartiment del problema (E, c) . Amb la propietat de Consistència, com ens interessava especificar el conjunt d'agents, utilitzàvem a notació $R(N, E, c)$.

Ara introduïrem una propietat que hauran de complir les regles de repartiment, en la que ens interessa especificar el conjunt de compradors del passi dels museus. Per tant, utilitzarem la notació $R(N, M, E, c)$ per designar la regla de repartiment relativa al conjunt M de compradors del passi.

Definició 4.3. *Una regla de repartiment R satisfà la propietat de additivitat pels visitants si per tot subconjunt de compradors del passi $M_1, M_2 \subset M$ es compleix que:*

$$R(N, M_1 \cup M_2, E, c) = R(N, M_1, E, c) + R(N, M_2, E, c).$$

Ara podem donar una caracterització important utilitzant les propietats que s'acaben d'introduir.

Teorema 4.1. *(Bergantiños i Moreno-Ternero (2015) [4]) Una regla de repartiment R definida en $\mathcal{P}$ compleix les propietats de tractament igualitari, dummy i additivitat pels visitants si i només si es tracta del valor de Shapley.*

Demostració. Està clar que el *valor de Shapley* compleix totes les propietats. Demostrarem doncs el recíproc.

Prenem una regla R que satisfaci les propietats de tractament igualitari, *dummy* i additivitat pels visitants.

Utilitzarem la notació $R(N, M, E, c)$ que hem vist a la definició d'additivitat pels visitants perquè ens interessa especificar el conjunt de compradors del passi dels museus.

Prenem un comprador qualsevol del passi $l \in M$. Com R satisfà *dummy*, aleshores $R_i(N, \{l\}, E, c) = 0 \quad \forall i \notin K_l$. I com R satisfà tractament igualitari, aleshores:

$$R_i(N, \{l\}, E, c) = R_j(N, \{l\}, E, c) \quad \forall i, j \in K_l.$$

A partir de la igualtat :

$$\sum_{i \in N} R_i(N, \{l\}, E, c) = \pi.$$

Obtenim que:

$$R_i(N, \{l\}, E, c) = \frac{\pi}{|K_l|} \quad \forall i \in K_l.$$

I per últim com R satisfà additivitat pels visitants, aleshores:

$$R_i(N, M, E, c) = \sum_{l \in N, i \in K_l} \frac{\pi}{|K_l|} \quad \forall i \in N.$$

□

Ens podem qüestionar si les tres propietats que hem descrit són necessàries totes o si per contra hi ha alguna d'elles que es pugui obtenir a partir de les altres.

Observació. *Les propietats del Teorema 4.1 són independents entre si.*

Definim una regla de repartiment R^1 de forma que per cada comprador del passi, la totalitat del que paga va destinat al museu amb el nombre de visites més baix dels que ha visitat. Això és:

$$R_i^1(N, M, E, c) = \sum_{j \in M: i = \min_{k \in K_j} \{k\}} \pi \quad \forall i \in N.$$

La regla R^1 que hem definit satisfà *dummy* i additivitat pels visitants però no satisfà tractament igualitari.

Definim una regla de repartiment R^2 de forma que assigni la mateixa quantitat a tots els museus. És a dir:

$$R_i^2(N, M, E, c) = \frac{E}{n} \quad \forall i \in N.$$

La regla R^2 que hem definit satisfà tractament igualitari i additivitat pels visitants però no satisfà *dummy*.

Definim una regla de repartiment R^3 de forma que cada museu rebi la part proporcional al nombre de visites que ha rebut amb el passi. Això és:

$$R_i^3(N, M, E, c) = \frac{E \cdot |U_i(K)|}{\sum_{k \in N} \nu_k} \quad \forall i \in N.$$

La regla R^3 que hem definit satisfà tractament igualitari i *dummy* però no satisfà additivitat pels visitants.

Ara veurem un altre resultat important que ens faltava per provar.

Hem vist que la solució al problema de repartiment del passi dels museus consisteix en calcular el *valor de Shapley*. Però recordem que la solució que buscàvem havia de complir que els beneficis obtinguts per cada passi serien repartits entre els museus visitats pel comprador d'aquest. Anem a veure doncs, que la solució proposada compleix aquesta propietat.

Abans, introduïrem un concepte que utilitzarem a la demostració del resultat esmentat.

Definició 4.4. Donat un joc cooperatiu (N, v) amb $v \in G^N$ i donada una coalició $S \subset N$, definim el joc d'unanimitat associat a la coalició S com el joc:

$$v(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } S \subset T, \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases} \quad \forall T \subset N.$$

Proposició 4.1. Pel problema del passí dels museus, el valor de Shapley implica que els ingressos que procedeixen del passí de cada visitant es reparteix en parts iguals entre els museus que ha visitat cada comprador. És a dir:

$$\phi(i) = \sum_{j=1, i \in K_j}^m \frac{1}{|K_j|}. \quad (4.2)$$

Demostració. Observem que el joc que estem considerant és el mateix que la suma dels jocs d'unanimitat considerats en la demostració de Shapley(1953) [27].

Donada una coalició $S \subset N$ considerem el seu joc d'unanimitat associat:

$$v_S(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } S \subset T, \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases} \quad \forall T \subset N.$$

Pel principi d'eficiència tenim que $\sum_{i \in N} \phi(i) = v(N)$. I com el valor de Shapley compleix la propietat de tractament igualitari, obtenim que:

$$\phi_i(v_S) = \begin{cases} \frac{1}{|S|} & \text{si } i \in S, \\ 0 & \text{si } i \notin S. \end{cases}$$

Usant la definició de la funció característica (4.1), obtenim que:

$$v(K) = \sum_{j \in M} v_{K_j}.$$

I aplicant la propietat d'additivitat, obtenim el resultat. □

Un cop hem donat els resultats més importants, només ens queda pensar en els defectes o limitacions que podem trobar en aquest model.

Tal i com es menciona a Estévez-Fernández (2004)[10], aquest model planteja alguns inconvenients. El primer és que parteix de la base de que es pot conèixer la llista dels museus que visita cada comprador i això pot suposar un problema, ja que sovint no es disposa d'aquesta informació.

D'altra banda, tampoc es té en compte les diferències de preus amb les entrades normals. És a dir, aquest model no compara la solució obtinguda modelitzant el problema del passí dels museus com un joc cooperatiu, amb el que obtindria cada museu si els seus visitants utilitzessin només entrades normals i no el passí. Podria ser doncs que els museus obtinguessin un major benefici si no oferissin aquest passí.

A continuació, exposarem un exemple que il·lustra aquest problema.

Exemple 4.1. *Suposem que tenim dos museus $N = \{1, 2\}$, cent compradors del passi $M = \{1, \dots, 100\}$, un preu del passi de $\pi = 20$ euros i que l'entrada normal per cada museu és de 15 euros. Suposem que cada comprador $j \in M$ visita un cop el museu 1 i dos cops el museu 2.*

Aplicant la regla proposada, calculem $\phi(i)$ per $i=1, 2$. Usant l'expressió (4.2) i tenint en compte que $|K_j| = 2 \quad \forall j \in M$, obtenim que:

$$\phi(1) = \phi(2) = \sum_{j=1}^{100} \frac{1}{2} = 50$$

Aleshores, cada museu $i = 1, 2$ obtindrà $\phi(i) \cdot \pi = 1000$ euros.

En canvi, si cada museu hagués venut aquestes entrades a preu normal (i suposant que rebés les mateixes visites en aquesta nova situació), el museu 1 obtendria 1500 euros i el museu 2 obtindria 3000 euros.

4.2 El passi dels museus com a problema de repartiment

En aquesta secció, presentarem el problema del passi dels museus com un problema de repartiment. Això ens permetrà solucionar alguna de les limitacions del model anterior que hem esmentat.

Cal aclarir prèviament que en aquest model utilitzarem el terme "entrada normal" per referir-nos a l'entrada que pagaria un usuari per entrar a un museu determinat un dia qualsevol. Serà important tenir en compte el preu de l'entrada normal per veure quin és el benefici que suposarà usar el passi dels museus.

El fet de tenir en compte els preus de les entrades normals dels museus solucionarà un inconvenient, que era no poder establir una comparació entre els repartiments que s'obtenen amb el passi dels museus exclusivament o considerant també les entrades normals.

Per això, necessitarem conèixer el vector $p = (p_i)_{i \in N}$, que indica el preu de les entrades normals dels museus, i necessitarem conèixer també el vector $\nu = (\nu_i)_{i \in N} \in \mathbb{Z}_+^N$, que indica el nombre de visites que rep cada museu sense utilitzar el passi.

Però ens falta solucionar l'altre gran inconvenient que teníem, que era la dificultat de obtenir la informació sobre quin conjunt de museus visita cada usuari del passi. Així doncs, ara suposarem que no podem conèixer aquesta informació. Només podrem conèixer el vector $\mu = (\mu_i)_{i \in N} \in \mathbb{Z}_+^N$ que indica el nombre de visites que rep cada museu utilitzant el passi. Aleshores, es verifica que:

$$\mu_i(K) = |\{j \in M : i \in K_j\}| = |U_i(K)| \quad \forall i \in N.$$

Definició 4.5. *Denotarem el problema del passi dels museus amb la 6-pla (N, M, π, p, ν, μ) . On tenim:*

- N és el conjunt de museus,
- M és el conjunt de compradors del passi,
- π és el preu del passi,

- $p = (p_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}_+^N$ és el vector dels preus de les entrades normals dels museus,
- $\nu = (\nu_i)_{i \in N} \in \mathbb{Z}_+^N$ és el vector que indica el nombre de visites que rep cada museu sense utilitzar el passi i ,
- $\mu = (\mu_i)_{i \in N} \in \mathbb{Z}_+^N$ és el vector que indica el nombre de visites que rep cada museu utilitzant el passi.

Denotarem per $\mathcal{P}^*$ el conjunt de problemes del passi dels museus descrits i modelitzats en aquest context.

Definició 4.6. Direm que la dupla (m, μ) és la realització del sistema del passi dels museus. Així, $m \in \mathbb{R}_+$ indica el nombre de passis venuts i $\mu = (\mu_i)_{i \in N} \in \mathbb{Z}_+^N$ és el vector que mesura el nombre de visites que s'han fet a cada museu usant el passi.

Per solucionar l'inconvenient del que parlàvem al inici del capítol, assumirem que els consumidors aprofiten el passi, és a dir que $m \cdot \pi \leq \sum_{i \in N} \mu_i \cdot p_i$.

Aquesta condició serà essencial a l'hora de definir el següent problema de repartiment ja que ens ve a dir que la suma dels beneficis que haguessin obtingut tots els museus si els visitants utilitzessin entrades normals enlloc del passi, seria major que utilitzant el sistema del passi dels museus.

Definició 4.7. Definirem el problema de repartiment associat al problema del passi dels museus com la dupla (E, c) . On tenim:

- $E \in \mathbb{R}_+$ és el total de beneficis obtinguts per la venda dels passis dels museus. Per tant, $E = m \cdot \pi$.
- $c = (c_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}_+^N$ és el vector que representa el que hagués obtingut cada museu si les visites haguessin estat realitzades usant entrades normals. Aleshores cada component del vector és $c_i = \mu_i \cdot p_i \quad \forall i \in N$.

Un cop hem definit el problema del passi dels museus, hem de parlar de les possibles solucions. Al Capítol 2 hem vist diferents regles de repartiment. Aleshores, el que farem serà aplicar-les a aquest problema i veure els resultats que obtenim.

Introduïrem una versió de la regla proporcional que anomenarem regla proporcional amb drets mínims (*minimal rights*).

Ja hem vist al Capítol 3 el concepte de dret mínim. Com la regla proporcional no compleix la propietat de drets mínims, el que farem serà introduir una nova versió que si que ho compleixi. L'anomenarem *regla proporcional amb drets mínims*.

Definició 4.8. La regla proporcional amb drets mínims, a la que denotarem per PD , és la que assigna a cada parell $(E, c) \in B^N$ el seu dret mínim, més el resultat d'aplicar la regla proporcional al capital restant (que serà el inicial menys la suma de tots els drets mínims). És a dir:

$$PD(E, c) = r(E, c) + P(E - \sum_{i \in N} r_i(E, c), c - r(E, c))$$

Ara tornarem a analitzar l'Exemple 4.1 però modelitzant la situació com un problema de repartiment. El que farem és aplicar una sèrie de regles de repartiment vistes al Capítol 2 i compararem els resultats.

En aquest context, tenim que el valor de l'*Estate* és de $E = m \cdot \pi = 2000$ i que el vector de demandes és $c = (1500, 3000)$.

Aleshores, aplicant les regles de repartiment que coneixem al problema (E, c) obtenim els següents resultats:

Regla	Museu 1	Museu 2
P	2000/3	4000/3
PD	500	1500
CEA	1000	1000
CEL	250	1750
T	750	1250
RT	625	1375
RA	750	1250

Hem vist al Teorema 4.1 que el mètode de repartiment que es proposava en la secció anterior, que era el *valor de Shapley*, es podia caracteritzar a partir de les propietats de tractament igualitari, *dummy* i additivitat pels visitants.

Ens podem preguntar ara si en aquest nou context, podem trobar alguna regla de repartiment que es caracteritzi també per aquestes propietats. De fet, veurem que no només no es possible la seva caracterització, sinó que tampoc és possible trobar cap regla que compleixi les propietats estipulades.

Teorema 4.2. *No existeix cap regla de repartiment R definida en $\mathcal{P}^*$ que compleixi les propietats de tractament igualitari, *dummy* i additivitat pels visitants.*

Demostració. Suposem pel contrari que existeix una regla de repartiment R que compleix les propietats de tractament igualitari, *dummy* i additivitat pels visitants.

Considero el conjunt de museus $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i el conjunt de visitants $M = \{1, 2\}$. Suposem que el subconjunts $M_1 = \{1\}$ i $M_2 = \{2\}$ tenen com a vectors de visites sense passi $\nu^1 = (1, 1, 0, 0, 0)$ i $\nu^2 = (0, 0, 1, 1, 1)$ respectivament. És fàcil veure que el vector de visites sense passi del conjunt de visitants M serà $\nu = (1, 1, 1, 1, 1)$.

Com R satisfà tractament igualitari $R(N, M, E, c) = (\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5})$.

Com R satisfà *dummy*, aleshores $R(N, M_1, E, c) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$.

Com R satisfà *dummy*, aleshores $R(N, M_2, E, c) = (0, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$.

Aleshores, és fàcil comprovar que:

$$R(N, M_1, E, c) + R(N, M_2, E, c) \neq R(N, M, E, c)$$

Per tant, R no satisfà la propietat d'additivitat pels visitants. □

Fins ara, hem presentat el problema del passi dels museus com un problema de repartiment i hem vist que és possible aplicar les diferents regles de repartiment que havíem estudiat per tal de donar una solució.

Donarem una volta més a aquest model i introduïrem una ponderació al vector de demandes del problema de repartiment. Aquesta idea la presenten Casas-Méndez et al. (2011) [8] i Estévez-Fernández et al. (2010) [11].

Considerarem que les demandes dels museus estaran ponderades pel vector que indica el nombre de visites als museus utilitzant entrades normals. És a dir, tindrem que la demanda de cada museu és $c_i = \mu_i \cdot p_i \cdot \nu_i \quad \forall i \in N$.

Tot i mantenir-se essencialment com el model de Estévez-Fernández et al (2004) [10], utilitzaré la notació $\mathcal{P}^\nu$ per distingir el conjunt de problemes del passi dels museus descrits i modelitzats en aquest context en el que es tenen en compte aquestes ponderacions.

Ara donarem un resultat important d'aquest model. Per això, necessitem introduir una nova versió de la regla proporcional, que essencialment serà el mateix que la que havíem vist, però tenint en compte que el nou vector de demandes està ponderat pel vector que indica el nombre de visites amb entrades normals.

Definició 4.9. La regla proporcional ponderada en el context del passi dels museus $\mathcal{P}^\nu$, a la que denotarem per P^* , es defineix com:

$$P_i^*(E, c) = \frac{\mu_i \cdot p_i \cdot \nu_i}{\sum_{j \in N} \mu_j \cdot p_j \cdot \nu_j} \cdot E \quad \forall i \in N.$$

Més endavant veurem que la nova versió de la regla proporcional es pot caracteritzar a partir d'unes propietats que demanarem que es compleixin per tal de donar sentit al nou model que hem introduït en aquesta secció. A continuació, presentarem aquestes propietats.

La primera s'anomena *additivitat en els preus dels passis*. Segueix la mateixa idea que la additivitat pels visitants que havíem vist abans, però ara demanarem que es compleixi aquesta propietat per dos preus del passi $\pi_1, \pi_2 \in \mathbb{R}_+$.

Definició 4.10. Una regla de repartiment R satisfà la propietat de additivitat en el preu dels passis si per tot $\pi_1, \pi_2 \in \mathbb{R}_+$ es compleix que:

$$R(N, M, \pi_1 + \pi_2, E, c) = R(N, M, \pi_1, E, c) + R(N, M, \pi_2, E, c).$$

La segona propietat s'anomena *compatibilitat* i busca descriure el comportament de les regles de repartiment en cas que fos possible que els museus es posessin d'acord a l'hora de repartir els diners del passi.

Aleshores, ens trobarem en la situació en la que la suma de les demandes dels museus és igual a la quantitat a repartir. És a dir, $\sum_{i \in N} \mu_i \cdot p_i \cdot \nu_i = E$.

En aquest cas, la propietat de *compatibilitat* estipula que, com és lògic, cada museu rebí la seva demanda.

Definició 4.11. Una regla de repartiment R satisfà la propietat de compatibilitat si per tot problema de repartiment $(E, c) \in B^N$ es compleix que:

$$\sum_{i \in N} \mu_i \cdot p_i \cdot \nu_i = E \Rightarrow R_i(N, M, E, c) = \mu_i \cdot p_i \cdot \nu_i \quad \forall i \in N.$$

Ara ja podem presentar el resultat que volíem. És de gran importància ja que ens permet caracteritzar una versió ajustada al nou model de la regla proporcional, de forma que queden superats els inconvenients que presentava el model de Ginsburgh i Zang.

Teorema 4.3. (*Bergantiños i Moreno-Ternero (2015) [4]*) *En el context del passi dels museus $\mathcal{P}^\nu$, una regla de repartiment R satisfà les propietats de compatibilitat i additivitat en els preus dels passis si i només si és la regla proporcional ponderada.*

Demostració. És fàcil comprovar que la regla proporcional ponderada compleix les propietats que volem. Ens interessa provar el recíproc.

Prenem una regla de repartiment qualsevol R que satisfà les propietats de compatibilitat i additivitat en els preus dels passis i volem provar que aquesta regla ha de ser la proporcional ponderada.

Com R compleix additivitat en els preus dels passis:

$$R_i(N, M, \pi_1 + \pi_2, E, c) = R_i(N, M, \pi_1, E, c) + R_i(N, M, \pi_2, E, c) \quad \forall i \in N.$$

Aquesta és l'equació funcional que ha de complir R . S'anomena equació funcional de Cauchy.

Si prenem un preu del passi en un interval tancat $\pi \in [a, b]$, usant la definició de regla de repartiment tenim que:

$$0 \leq R_i(N, M, \pi, E, c) \leq m\pi \quad \forall i \in N.$$

Per tant $R_i(N, M, \pi, E, c)$ està afitada. Llavors per Aczél (2006) [1], obtenim que les úniques solucions a aquestes equacions són funcions lineals.

Concretament, existeix una funció $g_i \quad \forall i \in N$ tal que per cada problema dels museus en $\mathcal{P}^\nu$, es compleix que:

$$R_i(N, M, \pi, E, c) = g_i(N, M, E, c) \cdot \pi \quad (4.3)$$

Aleshores prenem un problema dels museus en $\mathcal{P}^\nu$ tal que $\sum_{j \in N} \mu_j \cdot p_j \cdot \nu_j = E$.

Com R satisfà la propietat de compatibilitat, tenim que per aquest problema:

$$R_i(N, M, \pi, E, c) = \mu_i \cdot p_i \cdot \nu_i \quad \forall i \in N.$$

Aleshores combinant aquesta igualtat amb $E = m\pi$ i amb la igualtat (4.3):

$$g_i(N, M, E, c) = \frac{R_i(N, M, \pi, E, c)}{\pi} = \frac{\mu_i \cdot p_i \cdot \nu_i}{\pi} = \frac{\mu_i \cdot p_i \cdot \nu_i}{\sum_{j \in N} \mu_j \cdot p_j \cdot \nu_j} \cdot m \quad \forall i \in N.$$

I finalment, a partir d'aquesta expressió obtenim que:

$$R_i(N, M, \pi, E, c) = \frac{\mu_i \cdot p_i \cdot \nu_i}{\sum_{j \in N} \mu_j \cdot p_j \cdot \nu_j} \cdot E = P_i^*(E, c) \quad \forall i \in N.$$

□

Podem qüestionar si les dues propietats que hem descrit són necessàries totes o si per contra hi ha alguna d'elles que es pugui obtenir a partir de l'altre.

Observació. *Les propietats del Teorema 4.3 són independents entre si.*

Definim una regla de repartiment R^4 de forma que assigni la mateixa quantitat a tots els museus. És a dir:

$$R_i^4(N, M, \pi, E, c) = \frac{E}{n} \quad \forall i \in N.$$

La regla R^4 que hem definit satisfà additivitat en els preus dels passis però no satisfà compatibilitat.

Definim una regla de repartiment R^5 de forma que :

$$R_i^5(N, M, \pi, E, c) = \begin{cases} \mu_i \cdot p_i \cdot \nu_i & \text{si } \sum_{j \in N} \mu_j \cdot p_j \cdot \nu_j = E, \\ \frac{m\pi}{n} & \text{altrament.} \end{cases}$$

La regla R^5 que hem definit satisfà compatibilitat però no satisfà additivitat en els preus dels passis.

Conclusions

En aquest treball he estudiat en profunditat el problema del passi dels museus. Per fer-ho, he tractat primer els jocs cooperatius, els problemes de repartiment i les seves solucions. Després he caracteritzat les regles de repartiment que havia presentat, utilitzant una sèrie de propietats.

Un cop fet això, ja ha estat possible abordar el problema des d'una perspectiva axiomàtica. He pogut doncs adaptar els conceptes que havia presentat prèviament a la situació del passi dels museus. Així, les solucions obtingudes tenien sentit en el context d'aquest problema.

Cal dir que aquestes són potser un tipus de matemàtiques amb les que no estava tan acostumat a treballar, ja que disten molt de l'estadística, el càlcul, la geometria o la topologia. Però he après molt i m'ha semblat realment útil perquè m'ha permès modelitzar i estudiar un problema que no té cap relació aparent amb aquesta disciplina, d'una forma rigorosa.

Aquest apropament permet treballar amb problemes relacionats amb l'economia, i aquest és un aspecte que em sembla molt interessant i de gran utilitat.

M'hauria agradat continuar el treball veient més caracteritzacions i propietats que es poden obtenir del problema del passi dels museus, però que no he pogut desenvolupar perquè excedia el propòsit d'aquest treball.

En un altre context i com a continuació natural del treball, es podrien posar a prova els resultats que s'han presentat, treballant amb dades reals de museus. Això no s'ha pogut fer en tots els casos perquè no es disposaven de dades suficients, però crec que seria de gran interès.

Bibliografia

- [1] Aczél, J. (2006) *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, Dover. Publicat originalment en 1961.
- [2] Arin, J., Iñarra, E. i Benito, J. (2017) *The reverse Talmud family of rules for bankruptcy Problems: A characterization*, Mathematical Social Sciences 89, 43–49.
- [3] Aumann, R. i Maschler, M. (1985) *Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud*, Journal of Economic Theory 36, 195–213.
- [4] Bergantiños, G. i Moreno-Ternero, J. (2015) *The axiomatic approach to the problem of sharing the revenue from museum passes*, Games and Economic Behavior 89, 78–92.
- [5] Bergantiños, G. i Moreno-Ternero, J. (2016) *A new rule for the problem of sharing the revenue from museum passes*, Operations Research Letters 44, 208–211.
- [6] van den Brink, R., Funaki, Y. i van der Laan, G. (2008) *The reverse Talmud rule for bankruptcy problems*, Tinbergen Institute Discussion Paper.
- [7] Casas-Méndez, B., Fragnelli, V. i García-Jurado, I. (2009) *The museum pass problem: a case study using weighted bankruptcy rules*. Working paper.
- [8] Casas-Méndez, B., Fragnelli, V. i García-Jurado, I. (2011) *Weighted bankruptcy rules and the museum pass problem*, European Journal of Operational Research 215(1), 161–168.
- [9] Chun, Y., Schummer, J. i Thomson, W. (1998) *Constrained Egalitarianism: A New Solution for Claims Problems*, Seoul Journal of Economics 14, 269–298.
- [10] Estévez-Fernández, A., Borm, P. i Hamers, H. (2004) *The Museum Pass Game and its Value*, Revisited. (CentER Discussion Paper; Vol. 2004–7). Operations research.
- [11] Estévez-Fernández, A., Borm, P. i Hamers, H. (2010) *A note on passepartout problems*, Tinbergen Institute Discussion Paper.
- [12] Gillies, D.B. (1959) *Solutions to General Zero-Sum Games*, En: Tucker, A. and Luce, R., Eds., Contributions to the Theory of Games IV, Princeton University Press, Princeton, 47–85.
- [13] Ginsburgh, V. i Zang, I. (2001) *Sharing the income of a museum pass program*, Museum Management and Curatorship, 19(4), 371–383.
- [14] Ginsburgh, V. i Zang, I. (2003) *The Museum Pass Game and its Value*, Games and Economic Behavior 43, 322–325.

- [15] González-Díaz, J., García-Jurado, I. i Fiestras-Janeiro, M.G. (2010) *An Introductory Course on Mathematical Game Theory*, Graduate Studies in Mathematics, 115.
- [16] Herrero, C. i Villar, A. (2001) *The three musketeers, four classical solutions to bankruptcy problems*, Mathematical Social Sciences 42, 307–328.
- [17] Herrero, C. i Villar, A. (2002) *Sustainability in bankruptcy problems*, Top 10, 261–273.
- [18] Luce, R.D. i Raiffa, H. (1957) *Games and decisions: Introduction and critical survey*, Wiley.
- [19] Martínez, M. i Meneses, L. (2011) *Propuesta para seleccionar una solución en un problema de bancarrota*, Anales de ASEPUMA 19.
- [20] Martínez, R. i Sánchez-Soriano, J. (2021) *Social solidarity with dummies in the museum pass problem*, THE papers, Department of Economic Theory and Economic History of Universidad de Granada.
- [21] Moreno-Ternero, J. i Villar, A. (2004) *The Talmud rule and the securement of agents' awards*, Mathematical Social Sciences 47, 245–257.
- [22] Moulin, H. (2000) *Priority rules and other asymmetric rationing methods*, Econometrica 68, 643–684.
- [23] O'Neill, B. (1982) *A problem of rights arbitration from the Talmud*, Mathematical Social Sciences 2, 345–371.
- [24] Rafels, C. i Tijs, S.H. (1997) *On the cores of cooperative games and the stability of the Weber set*, International Journal of Game Theory, 26, 491–499.
- [25] Rafels, C., Izquierdo, J.M., Marín, J., Martínez de Albéniz, F.J., Nuñez, M. i Ybern, N. (1999) *Jocs cooperatius i aplicacions econòmiques*, Edicions de la Universitat de Barcelona.
- [26] Schmeidler, D. (1969) *The Nucleolus of a Characteristic Function Game*, SIAM Journal of Applied Mathematics, 17, 1163–1170.
- [27] Shapley, L.S (1953) *A Value for n-Person Games*, Annals of Mathematics Studies, 28, 307–317.
- [28] Shapley, L.S (1971) *Cores of convex games*, International Journal of Game Theory volume 1, 11–26.
- [29] Thomson, W. (2003) *Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: a survey*, Mathematical Social Sciences 45, 249–297.
- [30] Thomson, W. (2019) *How to Divide When There Isn't Enough: From Aristotle, the Talmud, and Maimonides to the Axiomatics of Resource Allocation* (Econometric Society Monographs). Cambridge: Cambridge University Press.
- [31] Von Neumann, J. i Morgenstern, O. (1944) *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press.
- [32] Weber, R.J. (1988) *The Shapley value: Essays in honor of Lloyd S. Shapley*, Cambridge University Press, 101–119.

- [33] Yeh, C. (2004) *Sustainability, exemption, and the constrained equal awards rule: a note*, Mathematical Social Sciences 48, 103–110.
- [34] Young, P. (1988) *Distributive justice in taxation*, Journal of Economic Theory 44, 321–335.