Estudi dinàmic d'un sistema d'N cossos extensos, carregats i gravitants

Josep Llosa i Carrasco

UNIVERSITAT DE BARCELONA

FACULTAT DE FISICA

ESTUDI DINAMIC D'UN SISTEMA D'N COSSOS

EXTENSOS, CARREGATS I GRAVITANTS

Memòria presentada pel Prof.
Josep Llosa i Carrasco per tal
d'optar al grau de Doctor en
Física.

Barcelona, 1978

Vull expressar el meu agraïment al Dr. R. Lapiedra per la direcció d'aquest treball. La seva ajuda constant, el seu estímul i sugeriments valuosos han estat decisius per la realització del mateix.

També vull agrair als Drs. E. Verdaguer i X. Fustero els seus comentaris i discussions. A aquest segon, també, la molèstia d'una lectura detallada de la segona part d'aquest treball.

També a tots els companys del Departament de Física Teòrica de la Universitat de Barcelona.

RAMON LAPIEDRA I CIVERA, Professor Agregat de Mecànica Teòrica a la Facultat de Ciències de la UNIVERSIDAD DE SANTANDER

CERTIFICA: Que la present memòria, "Estudi dinàmic d'un sistema d'N cossos extensos, carregats i gravitants", ha estat realitzada sota la meva direcció pel Prof. Josep Llosa i Carrasco i constitueix la seva Tesi per a optar al grau de Doctor en Física.

I a fi de que consti, en compliment de la legislació vigent, presento davant la Facultat de Física d'aquesta Universitat, l'esmentada Tesi Doctoral, signant el present certificat a Barcelona a onze de setembre de mil noucents setanta vuit.

INDEX

P R I M E R A P A R T

P R O B L E M A D ' N C O S S O S

E X T E N S O S , G R A V I T A N T S I

A M B C A R R E G A E L E C T R I C A

1.- INTRODUCCIO

La solució del problema d'N cossos a la Teoria General de la Relativitat requereix la determinació, al mateix temps, del camp gravitatori dels cossos considerats.

La solució a aquest problema fou donada per primera vegada per Einstein, Infeld i Hoffmann [1] (EIH). Estudiaren el problema d'N cossos esfèrics, amb masses arbitràries, que tenien un moviment de translació pura — és a dir: aproximació monopolar. Suposaren que els cossos eren descrits per singularitats puntuals del camp gravitatori, la qual cosa els permetia d'evitar la tria d'un tensor d'impuls-energia particular. Suposaren, a més, que les velocitats eren petites comparades amb la de la llum.

Posteriorment, V. Fock [2] encetà una nova direcció en la manera d'abordar el problema. El punt de partida de Fock eren les equacions del camp gravitatori amb el tensor d'impuls-energia dels cossos extensos. Utilitzant aquest mètode, Petrova [3] derivà unes equacions del moviment en aproximació 1-postnewtoniana (1-PN) idèntiques a les d'EIH.

Una mena de síntesi dels dos mètodes fou introduïda per Infeld [4]. En aquest treball els cossos eren descrits també per singularitats del camp gravitatori, introduïdes en el tensor d'impuls-energia mitjançant la funció δ de Dirac:

$$\hat{T}^{\alpha\beta} \equiv \sqrt{-g}\; T^{\alpha\beta} = \sum_{A=1}^{N} m_A(t) \cdot \delta^3(\vec{x} - \vec{\chi}_A(t)) \cdot \frac{d\chi_A^\alpha}{dt} \cdot \frac{d\chi_A^\beta}{dt}$$

Una descripció detallada d'aquest mètode pot ésser trobada en el llibre

"Motion and Relativity"[5].

En els treballs enumerats fins ací únicament es considera el cas de moviment de translació pura — és a dir: aproximació monopolar.

Tenint en compte ja el moviment de rotació pròpia dels cossos i considerant cada un d'ells com una distribució contínua de matèria, V. Fock[6] derivà un lagrangià a l'aproximació 1-PN i quadrupolar.

En un article molt important, A. Papapetrou[7] desenvolupà un mètode per a obtenir les equacions del moviment per a una partícula de prova a l'aproximació dipolar. En principi, aquest mètode podria servir per a tractar qualsevol ordre d'aproximació multipolar. Això no és així, no obstant, perquè Papapetrou no dóna un camí sistemàtic per a obtenir les equacions covariants del moviment. Llavors el procediment es complica en augmentar l'ordre d'aproximació multipolar, de tal manera que ja l'ordre quadrupolar resulta intractable.

Posteriorment, Tulczyjew[8] aplicà conjuntament els mètodes d'Infeld[5] i Papapetrou[7] i derivà les equacions del moviment per a un sistema gravitatori de dos cossos amb rotació pròpia. El punt de partida de Tulczyjew era un tensor d'impuls-energia de la forma:

$$\hat{T}^{\alpha\beta} = \sum_{A=1}^{N} \left[t_A^{\alpha\beta} \cdot \hat{\delta}^3(\vec{x}-\vec{x}_A) - t_A^{j\alpha\beta} \cdot \partial_j \hat{\delta}^3(\vec{x}-\vec{x}_A) \right]$$

on les quantitats $t_A^{\alpha\beta}$ i $t_A^{j\alpha\beta}$ són simètriques respecte α i β, i $\hat{\delta}$ és la funció δ de Dirac "renormalitzada" en el sentit d'Infeld i Plebansky (veure ref. [5], apèndix).

Tulczyjew donà també un lagrangià, el qual no és correcte per la senzilla raó que els termes de spin(*) de les equacions del moviment (eq.(2.27), ref. [8]) no es deriven dels termes de spin del lagrangià (eq.(2.44), ref.[8]). Per tant, tampoc dóna una bona aproximació dipolar del lagrangià de Fock.

Recentment l'interès per aquest problema ha estat renovat a causa de la descoberta d'un pulsar a un sistema binari[9] (PSR – 1913+16) que obra noves possibilitats d'observació d'efectes relativistes. Una mostra d'aquest interès és el gran nombre d'articles publicats sobre el tema en els últims anys.

En una notable col.lecció d'articles[10], [11], [12], [13] W.G. Dixon ha desenvolupat un mètode excepcionalment potent, rigurós i elegant per a obtenir una descripció dinàmica exacta del moviment dels cossos extensos a la Relativitat General. El mètode de Dixon dóna definicions exactes per al moment linial, el moment angular i la força i el moment resultants sobre cada cos. També estableix una definició unívoca per a la línia d'univers del "centre-de-massa" del cos (centre de moviment en el sentit de Beiglbock[14]).

Després, utilitzant les definicions de Dixon, J. Ehlers i E. Rudolph[15] han derivat una fórmula per a la velocitat del "centre-de-massa" en funció del moment linial, el moment angular, la força i el moment resultants i el tensor de Riemann-Christoffel. També han donat una definició de "quasi-rigidesa" adaptada a aquest problema i han provat que, per a cossos "quasi-rígids", les equacions de Dixon més l'equació del "centre-de-massa" tenen una solució

(*)_ A partir d'ara utilitzarem el mot: spin, en el sentit de moment angular intrínsec.

única a partir d'unes condicions inicials donades. Tot això, és clar, en el supòsit que la mètrica de l'espai-temps és coneguda.

A més d'aquests autors que han tractat el problema en el marc de la Teoria General de la Relativitat, hem d'esmentar: Barker i O'Conell, i Cho i Hari Dass.

En un article recent [16] Barker i O'Conell obtenen un lagrangià per al problema gravitatori de dos cossos amb masses spins i moments quadrupolars arbitraris, a l'aproximació 1-PN. El seu procediment es situa en el marc de la Teoria Quàntica de Camps i consisteix en la interacció d'intercanvi d'un gravitó entre dues partícules de spin 1/2. Obtenen també l'avançament del periastri i la precessió del spin per a cada cos. Cal remarcar que el lagrangià de Barker i O'Conell està d'acord, si més no, fins l'ordre dipolar, amb el de Fock, si prenem en aquest últim $N=2$ i $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_1} + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_2} = \vec{0}$.

Cho i Hari Dass [17] donen una derivació clàssica, però no geomètrica, de l'energia d'interacció per al sistema semirelativista de dos cossos en aproximació quadrupolar. Utilitzen la teoria de les fonts de Schwinger. Obtenen un lagrangià en el sistema del centre de masses i la velocitat de precessió del spin, concordant els seus resultats amb els ja esmentats de Barker i O'Conell.

Nosaltres ens proposem d'estudiar el problema d'N cossos extensos amb càrrega elèctrica a l'aproximació dipolar i 1-PN. Ho farem considerant cada cos com una "partícula de prova" movent-se en els camps gravitatori i electromagnètic deguts als restants N-1. Després obtindrem els potencials aproximats, suposant conegudes les línies d'univers dels cossos.

Degut a la dificultat introduïda en considerar cossos carregats, el mètode de Papapetrou no és suficient per a tractar el problema. Tampoc utilitzem els resultats de Dixon perquè: 1) ens caldria derivar els termes de força i moment electromagnètics, 2) les equacions del moviment de Dixon no són equacions diferencials sobre la línia d'univers del cos i, 3) els moments multipolars que defineix Dixon no són els adients per a integrar les equacions del camp mitjançant el mètode d'aproximacions post-newtonianes.

Desenvolupem ací un mètode intermig respecte dels de Papapetrou i Dixon. Al començament el nostre procediment és similar al de Papapetrou però, mitjançant la utilització d'un sistema de coordenades de Fermi lligat a la línia d'univers del cos en consideració, podem donar una manera sistemàtica de derivar les equacions covariants del moviment.

Al capítol 3 obtenim les equacions del moviment per a una partícula de prova extensa — és a dir: menyspreem la pertorbació introduïda sobre les equacions del moviment pels camps gravitatori i electromagnètic deguts a la pròpia partícula — movent-se en uns camps gravitatori i electromagnètic donats, a l'aproximació dipolar.

Al capítol 4 integrem les equacions d'Einstein-Maxwell a fi d'obtenir els potencials gravitatori i electromagnètic deguts a un sistema d'N cossos a l'aproximació dipolar i 1-PN. Al capítol 5 donem les equacions del moviment aproximades per a cada cos i obtenim l'equació d'evolució del spin. Cal afeigir que obtenim també un lagrangià per al moviment de translació i que sempre que ha estat possible referir-se a càlculs coneguts l'acord és total.

2.- MARC GENERAL

2.1) Equacions d'Einstein-Maxwell.-

Prenem les equacions d'Einstein-Maxwell — veure ref. [6], sec. (46) i (52) — com a punt de partença:

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R^{\sigma}{}_{\sigma}\, g^{\mu\nu} = -8\pi k \cdot T^{\mu\nu} \tag{1}$$

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = -4\pi J^\mu \tag{2.a}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2.b}$$

on: els índexs grecs prenen els valors $\{0,1,2,3\}$ i els llatins, $\{1,2,3\}$; ∂_μ i ∇_μ són, respectivament, les derivades parcial i covariant respecte x^μ ; $R^{\mu\nu}$ és el tensor de Ricci derivat del tensor mètric $g^{\mu\nu}(x)$; $A_\mu(x)$ és el potencial electromagnètic, $T^{\mu\nu}_{(x)}$ és el tensor d'impuls-energia i $J^\mu(x)$ és el quadrivector corrent electromagnètic.

El tensor d'impuls-energia a la dreta de (1) el considerem descomposat en dues parts:

$$T^{\mu\nu}(x) = T^{\mu\nu}_{m}(x) + T^{\mu\nu}_{em}(x) \tag{3}$$

la primera de les quals representa la "part material" i la segona, la contribució del camp electromagnètic.

Aquesta segona part és —veure ref. [18], sec. (7.23) :

$$T^{\mu\nu}_{em}(x) = \frac{\alpha}{4\pi}\left\{ \frac{1}{4} F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\, g^{\mu\nu} - F^{\mu\sigma}F^{\nu}{}_{\sigma} \right\} \tag{4}$$

on el paràmetre α és una constant que depèn del sistema d'unitats en el qual expressem la càrrega elèctrica.

2.2) <u>Hipòtesis fonamentals.-</u>

A) Si definim: $\mathcal{Z} \equiv \left(\text{suport } T^{\mu\nu}_{m}(x)\right) \cup \left(\text{suport } J^{\mu}(x)\right)$, es verifica:

i) $\mathcal{Z}$ està format per N components conexes: $\{\Omega_A\}_{A=1,\dots,N}$

$$\mathcal{Z} = \bigcup_{A=1}^{N} \Omega_A \quad \text{i} \quad \Omega_A \cap \Omega_B = \phi \quad , \text{ si } \quad A \neq B$$

ii) Els Ω_A són temporals: per a cada Ω_A hi ha una congruència de corbes temporals de longitud infinita amb suport a Ω_A, $A=1,\dots,N$.

iii) Els Ω_A sónespacialment compactes: la intersecció de cada Ω_A amb qualsevol hipersuperfície espacial és compacta.

iv) $\exists\, D \in \mathbb{R}^{+}$ tal que la distància geodèsica entre dos punts del mateix Ω_A , que estiguin units per una geodèsica espacial, és més petita o igual que D.

B) A distància infinita dels cossos l'espai-temps esdevé Minkowskià i el potencial electromagnètic es fa nul. Per tant, podem triar una família de sistemes de coordenades $\{\chi^\nu\}$ satisfent les condicions següents:

i) χ^0 és temporal (és a dir: $g^{00}(x) > 0$)

ii) $\lim_{|\bar{x}|\to\infty} g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$; $|\bar{x}| \equiv \sqrt{x^i x^j \delta_{ij}}$ (5.a)

iii) $\lim_{|\bar{x}|\to\infty} A_\mu(x) = 0$ (5.b)

Més encara, suposarem que, pel cap baix, un d'aquests sistemes satisfà la condició de De Donder:

$$\partial_\alpha \hat{g}^{\alpha\beta} = 0 \qquad (6)$$

on: $\hat{g}^{\alpha\beta} \equiv \sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta}$, $g = \det(g_{\mu\nu})$.

De fet, la condició (6) és compatible amb (5.a) únicament fins a l'aproximació 1-PN i, per tant, seran compatibles en el nostre cas. Si anéssim fins a l'aproximació 2-PN, la condició de De Donder ens conduiria a una mètrica divergent a l'infinit espacial. Per tant, a l'aproximació 2-PN (6) i (5.a) seran incompatibles. A la ref. [19], a la qual hom pot trobar una discussió més completa, està demostrat que existeix una classe de sistemes de coordenades que satisfan la condició límit (5.a).

C) Els potencials gravitatori i electromagnètic, així com el tensor d'impuls-energia i el quadrivector corrent elèctric, poden ésser desenrotllats en sèrie de potències d'1/c.

D) A l'ordre inferior d'aproximació hem d'obtenir les equacions newtonianes del moviment per a un sistema d'N cossos en interacció gravitatòria i coulombiana.

E) Treballem en l'aproximació de "petites velocitats". Això vol dir que, si $f(x)$ és una funció i $\mathrm{Ord}[f]=r$, aleshores: $\mathrm{Ord}[\partial_0 f]=r+1$, en un sistema de coordenades de la classe definida a (B).

La notació emprada en les línies precedents és la següent:

Si $f(x)$ és una funció que depèn del paràmetre c, aleshores:

$$f(x) = O(s) \iff \lim_{c\to\infty} c^{s-1} f(x) = 0 \tag{7.a}$$

$$\mathrm{Ord}\,[f] = r \iff r = \text{màx}\,\{ s\in\mathbb{N} / \; f = O(s)\} \tag{7.b}$$

F) Per a cada Ω_A triem una línia temporal L_A que cau dins, o bé molt a prop, de Ω_A. Aquesta línia d'univers "representarà" el moviment del cos A.

Suposem que les dimensions dels cossos amb els quals estem tractant són molt petites comparades amb les distàncies entre ells. Això vol dir que si $L_A \equiv z^{\rho}_A(s) \equiv (\vec{z}_A(x^0), x^0)$ són les equacions de la línia d'univers del cos A en un sistema de referència dels definits a (B), aleshores:

$$\frac{D}{|\vec{z}_A(x^0) - \vec{z}_B(x^0)|} \ll 1 \ , \ \forall A \neq B \ , \text{ on: } |\vec{z}_A - \vec{z}_B| \equiv \sqrt{\delta_{ij}(z_A^i - z_B^i)(z_A^j - z_B^j)}$$

En conseqüència, podrem menysprear tots els termes, a partir d'un ordre determinat en el desenrotllament multipolar — en el nostre cas, menysprearem els ordres quadrupolar i següents.

G) Els potencials gravitatori i electromagnètic deguts a cada cos no influeixen sobre la seva pròpia dinàmica. Per tant, sempre podrem deixar de banda els termes corresponents a l'auto-potencial.

Això correspon al que s'anomena "renormalització" de la massa i ho tractarem amb més detall a l'apartat (3.9)

Aquesta hipòtesi es concretarà en el següent mètode de treball: primer considerarem que cada cos és una "partícula de prova" que es mou en el camp creat pels N − 1 restants i en deduirem unes equacions del moviment, després calcularem els potencials deguts als N − 1 cossos restants en funció de les seves trajectòries, les quals suposarem conegudes, i els introduirem en les esmentades equacions. Això és el que fem als capítols 4 i 5.

2.3) Coordenades de Fermi.-

Bona part del contingut d'aquest apartat es pot trobar en diferents llocs de la literatura sobre Relativitat General. Malgrat això dediquem tot un apartat al tema degut a la importància que tindran els sistemes de coordenades de Fermi en el desenvolupament del capítol 3 .

En primer lloc definirem el transport Fermi-Walker d'un vector al llarg d'una corba temporal Γ.

Sigui Γ una corba temporal d'equació paramètrica $x^\nu = x^\nu(s)$, on s és el paràmetre longitud d'arc i siguin $u^\nu = \frac{dx^\nu}{ds}$ el vector unitari tangent i $\xi^\nu = \frac{\delta u^\nu}{\delta s}$ el vector acceleració. Si v_0^ν és un vector en el punt $x_0^\rho = x^\rho(s_0)$ el transportat Fermi-Walker de v_0^ν al llarg de Γ és un vector $v^\nu(s)$ sobre Γ que satisfà l'equació diferencial:

$$\frac{\delta v^\nu}{\delta s} = \left(\xi^\nu u_\rho - u^\nu \xi_\rho\right) v^\rho \tag{8}$$

amb les condicions inicials: $v^\nu(s_0) = v_0^\nu$

En particular, el vector velocitat u^ν és transportat Fermi-Walker al llarg de Γ. En efecte:

$$\left(\xi^\nu u_\rho - \xi_\rho u^\nu\right) u^\rho = \xi^\nu = \frac{\delta u^\nu}{\delta s} \tag{9}$$

En el cas que Γ sigui una geodèsica $\xi^\nu = 0$, i llavors l'equació (8) esdevé: $\frac{\delta v^\nu}{\delta s} = 0$. Per tant, el transport Fermi-Walker al llarg d'una geodèsica coincideix amb el transport paral.lel.

Un sistema de coordenades de Fermi es defineix en base a una línia temporal Γ — que d'alguna manera ve a representar la història o línia d'univers d'un observador — més una tètrada ortonormal $\{\lambda_\alpha^\mu\}_{\alpha=0,1,2,3}$ transportada Fermi-Walker al llarg de Γ, amb el vector λ_0^μ tangent a Γ —

és a dir: $u^\nu = \lambda^\nu_{\bar 0}$. Així, segons (8) i tenint en compte l'ortonormalitat:

$$\lambda^\nu_{\bar 0} = u^\nu \qquad ; \qquad \frac{\delta \lambda^\nu_{\bar i}}{\delta s} = - \zeta_\rho \lambda^\rho_{\bar i}\, u^\nu \quad , \quad i = 1,2,3 \tag{10}$$

Sigui $\lambda^{\bar\alpha}_\nu$ la tètrada covariant: $\lambda^{\bar\alpha}_\nu = \eta^{\bar\alpha\bar\rho}\, \lambda^\rho_{\bar\rho}\, g_{\rho\nu}$ (11)

Les coordenades de Fermi de qualsevol punt de l'espai-temps respecte de la línia Γ i la tètrada $\{\lambda^\nu_{\bar\alpha}\}_{\alpha=0,1,2,3}$ es determinen de la manera següent:

Sigui P un punt de l'espai-temps tal que per ell es pot traçar una única geodèsica que talli Γ ortogonalment i, sigui Q el punt d'intersecció. Sigui v^α el vector unitari tangent a la geodèsica QP , al punt Q. Prenem un punt Q_0 sobre Γ com origen $s = 0$. Siguin σ i s les distàncies de P a Q i de Q_0 a Q , respectivament. Les coordenades de Fermi de P relatives a Γ i a la tètrada $\{\lambda^\nu_{\bar\alpha}\}_{\alpha=0,1,2,3}$ es defineixen com:

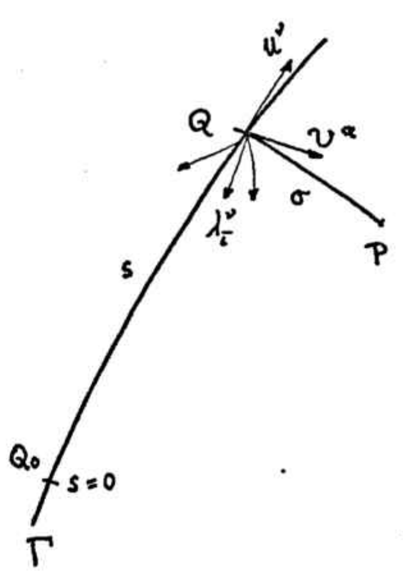


Fig. 1

$$X^{\bar 0}(P) = s \qquad ; \qquad X^{\bar i}(P) = \sigma\, v^\nu \lambda^{\bar i}_\nu = \sigma\, v_\nu \lambda^\nu_{\bar\alpha}\, \eta^{\bar\alpha\bar i} \tag{12}$$

on: $\eta^{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ és la mètrica de Minkowsky, que nosaltres prenem amb la signatura $(+\,-\,-\,-)$.

Com veiem, doncs, un sistema de coordenades de Fermi queda determinat una vegada donada la línia temporal Γ i la tríada de vectors espacials $\{\lambda^{\nu}_{\bar{i}}(0)\}_{i=1,2,3}$ en un punt de Γ, tals que: $\lambda^{\nu}_{\bar{i}}(0)\cdot u_{\nu}(0)=0 \;\wedge\; \lambda^{\nu}_{\bar{i}}(0)\cdot\lambda_{\bar{j}\nu}(0)=\eta_{\bar{i}\bar{j}}$

Si prenguéssim un altre sistema de coordenades de Fermi definit per la mateixa línia Γ i una nova tríada $\{\hat{\lambda}^{\nu}_{\bar{i}}\}_{\bar{i}=1,2,3}$, ortonormal i ortogonal a $u^{\nu}(0)$, necessàriament hauria d'existir una matriu $R^{\bar{i}}{}_{\bar{j}}\in O(3)$ tal que:

$$\hat{\lambda}^{\nu}_{\bar{i}}(0) = R_{\bar{i}}{}^{\bar{j}}\,\lambda^{\nu}_{\bar{j}}(0) \quad , \qquad R_{\bar{i}}{}^{\bar{j}} = \eta^{\bar{j}\bar{\beta}}\eta_{\bar{i}\bar{\alpha}}R^{\bar{\alpha}}{}_{\bar{\beta}} = R^{\bar{i}}{}_{\bar{j}} \tag{13}$$

Aquesta relació entre les condicions inicials, i la linialitat del sistema diferencial (10), implica que la mateixa relació (13) s'ha de satisfer al llarg de tota la línia Γ : $\quad \hat{\lambda}^{\nu}_{\bar{i}} = R_{\bar{i}}{}^{\bar{j}}\,\lambda^{\nu}_{\bar{j}}$

En conseqüència les noves coordenades guardaran amb les antigues la relació següent:

$$\begin{aligned} \hat{X}^{\bar{0}}(P) &= X^{\bar{0}}(P) \\ \hat{X}^{\bar{i}}(P) &= R^{\bar{i}}{}_{\bar{j}}\,X^{\bar{j}}(P) \end{aligned} \tag{14}$$

Ens resultarà útil conèixer la forma de les components del tensor mètric així com dels símbols de Christoffel sobre una línia temporal Γ, referits a un sistema de coordenades de Fermi lligat a aquesta línia.

Per la pròpia definició (12), les línies coordenades que passen per qualsevol punt $x^\nu(s)$ de Γ són: la pròpia línia Γ (coordenada temporal) i les geodèsiques tangents als $\lambda^\nu_{\bar{i}}$ en el punt $x^\nu(s)$. Per tant, els vectors tangents a elles seran els $\lambda^\nu_{\bar{\alpha}}(s)$. La matriu $(\lambda^\nu_{\bar{\alpha}})_{\substack{\nu=0,1,2,3\\ \alpha=0,1,2,3}}$ constituirà la jacobiana del canvi de coordenades $x^\nu = x^\nu(x^{\bar{\alpha}})$, per tant:

$$g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \lambda^\nu_{\bar{\alpha}}\, \lambda^\mu_{\bar{\beta}}\, g_{\mu\nu} = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \quad ; \quad g^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \eta^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \tag{14}$$

ja que la tètrada $\{\lambda^\nu_{\bar{\alpha}}\}_{\alpha=0,1,2,3}$ l'hem presa ortonormal.

Pel que fa referència als símbols de Christoffel del tipus $\Gamma^{\bar{\beta}}_{\bar{\alpha}\bar{o}}$ tenim, de (8) i de (12):

$$\nabla_{\bar{o}}\, \lambda^\nu_{\bar{\alpha}} = \frac{\delta \lambda^\nu_{\bar{\alpha}}}{\delta s} = (\xi^\nu u_\rho - \xi_\rho u^\nu)\, \lambda^\rho_{\bar{\alpha}} \tag{15}$$

que, comparant amb $\nabla_{\bar{o}} \lambda^\nu_{\bar{\alpha}} = \Gamma^{\bar{\beta}}_{\bar{o}\bar{\alpha}}\, \lambda^\nu_{\bar{\beta}}$ ens porta a :

$$(\xi^{\bar{\nu}} u_{\bar{\beta}} - \xi_{\bar{\beta}} u^{\bar{\nu}}) = \Gamma^{\bar{\nu}}_{\bar{\beta}\bar{o}} \tag{16}$$

amb: $\quad A_{\bar{\alpha}} \equiv \lambda^\nu_{\bar{\alpha}}\, A_\nu \quad , \quad A^{\bar{\alpha}} = \lambda^{\bar{\alpha}}_\nu\, A^\nu$

Per a calcular els símbols de Christoffel $\Gamma^{\bar{\alpha}}_{\bar{i}\bar{j}}$, considerem un vector μ^ν ortogonal a la corba Γ en un punt:

$$\mu^{\bar{i}} = \mu^\nu \lambda^{\bar{i}}_\nu \quad ; \quad \mu^{\bar{o}} = \mu^\nu u_\nu = 0 \quad ; \quad \mu^\nu = \mu^{\bar{i}} \lambda^\nu_{\bar{i}} \tag{17}$$

Segons la definició (12), els punts que tinguin per coordenades de Fermi:

$$X^{\bar{0}} = s_0 \qquad \text{constant}$$

$$X^{\bar{i}} = \sigma \mu^{\bar{i}} \quad ; \quad \sigma \in (-\varepsilon, \varepsilon) \tag{18}$$

estaran sobre una geodèsica, que tindrà per vector tangent μ^{ν}. En conseqüència:

$$\mu^{\bar{i}} \nabla_{\bar{i}} \left(\mu^{\bar{j}} \lambda_{\bar{j}}^{\nu}\right) = 0$$

qualsevulla que sigui el trivector $\mu^{\bar{i}}$ i, per tant:

$$\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{\alpha}} = 0 \tag{19}$$

Per fi, refonent (16) i (19) podrem escriure:

$$\Gamma_{\alpha\bar{\beta}}^{\bar{\rho}} = u_{\alpha} u_{\bar{\beta}} \xi^{\bar{\rho}} - u_{\alpha} u^{\bar{\rho}} \xi_{\bar{\beta}} - u^{\bar{\rho}} u_{\bar{\beta}} \xi_{\alpha} \tag{20}$$

sobre la línia Γ base del sistema de coordenades de Fermi.

En particular, si Γ fos una geodèsica, llavors $\xi^{\nu} = 0$, i tindriem sobre Γ:

$$\Gamma_{\alpha\bar{\beta}}^{\bar{\rho}} = 0$$

2.4) Tensors antisimètrics d'ordre 2 .-

Sigui $A^{\lambda\nu}$ un tensor antisimètric d'ordre 2 sobre l'espai vectorial M^4 i sigui $\eta^{\lambda\nu\alpha\beta}$ el tensor de Levi-Civitta sobre el mateix espai. Triarem l'orientació: $\eta^{0123} = +1$.

Definim el tensor adjunt del $A^{\lambda\nu}$ segons:

$$\overset{*}{A}{}^{\lambda\nu} = \frac{1}{2}\,\eta^{\lambda\nu\alpha\beta}\,A_{\alpha\beta} \qquad (21)$$

que també serà antisimètric.

A partir de les fórmules de contracció del tensor $\eta^{\lambda\nu\alpha\beta}$ amb ell mateix, es demostra fàcilment que el pas a l'adjunt és una transformació anti-involutiva dels tensors antisimètrics d'ordre 2; és a dir:

$$\left(\overset{*}{A}{}^{\lambda\nu}\right)^* = -\,A^{\lambda\nu} \qquad (22)$$

Sigui ara u^λ un vector temporal. Donat un tensor antisimètric d'ordre 2 qualsevol, existeixen dos vectors A^λ i B^λ tals que:

$$A^\lambda u_\lambda = B^\lambda u_\lambda = 0 \quad , \quad A^{\lambda\nu} = 2\,A^{[\lambda}u^{\nu]} + 2\,(B^{[\lambda}u^{\nu]})^* \qquad (23)$$

En efecte, considerem el conjunt de tensors antisimètrics d'ordre 2 que es poden construir segons (23) a partir de qualsevol parella de vectors (A^λ, B^λ) ortogonals a u^ν . Aquest conjunt serà un subespai vectorial de l'espai de tensors antisimètrics $\Lambda^2(M^4)$. Ara bé, com que A^λ i B^λ són ortogonals a u^ν , aquest subespai tindrà dimensió 6 , i com que dim $\Lambda^2(M^4) = 6$, el subespai coincidirà amb tot l'espai $\Lambda^2(M^4)$.

Per tant, qualsevol tensor antisimètric d'ordre 2 sobre M^4 es pot escriure en la forma (23).

A més, de (23) obtenim la relació:

$$A^{\lambda\nu} u_\nu = A^\lambda \qquad ; \quad - \overset{*}{A}{}^{\lambda\nu} u_\nu = B^\lambda \tag{24}$$

3.- EQUACIONS DEL MOVIMENT D'UNA PARTICULA DE PROVA

En aquest capítol abordarem la primera part del mètode que hem descrit someramant a (2-2.G). El mètode que desenvoluparem és semblant al de Papapetrou. Introduïm, però, alguns canvis que simplificaran molt l'obtenció de les equacions del moviment en forma covariant.

Partim d'un tensor d'impuls-energia material $T^{\mu\nu}_{m}(x)$ i un quadrivector corrent elèctric $J^{\mu}(x)$. Suposem que el seu suport Ω té les mateixes propietats que cada un dels Ω_A esmentats a la hipòtesi (2-2.A).

3.1) Lleis de conservació del medi continu.-

Prendrem com a punts de partença per a obtenir les equacions del moviment del cos, la llei de conservació local del tensor d'impuls-energia i l'equació de continuïtat del corrent elèctric.

La primera d'elles:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{25}$$

com és característic de la Relativitat General, és conseqüència immediata de les equacions del camp gravitatori (1) juntament amb la identitat de Bianchi, la qual ha d'ésser satisfeta pel tensor de Ricci.

Tenint en compte la descomposició (3) i l'expressió (4), obtenim:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}_{em} = \frac{\alpha}{4\pi}\left\{\frac{1}{2}\left(\nabla_\mu F^{\rho\sigma}\right)\cdot F_{\rho\sigma}\cdot g^{\mu\nu} - \nabla_\mu F^{\nu\sigma}\cdot F^{\mu}{}_{\sigma} - \nabla_\mu F^{\mu\sigma}\cdot F^{\nu}{}_{\sigma}\right\} \tag{26}$$

però, com a conseqüència del primer parell d'equacions de Maxwell (2.b), els dos primers termes del segon membre sumen zero i, a conseqüència del segon parell (2.a), el tercer terme dóna:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}_{em} = - \alpha F^{\nu}{}_{\sigma} \cdot J^{\sigma} \tag{27}$$

i substituint a (25):

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}_{m} = \alpha F^{\nu}{}_{\sigma} J^{\sigma} \tag{28}$$

Per fi, tenint en compte la propietat dels símbols de Christoffel:

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\rho} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\rho \sqrt{-g} \tag{29}$$

i desenrotllant la quadridivergència del primer membre de (28), podem escriure:

$$\partial_\mu \hat{T}^{\mu\nu}_{m} = -\Gamma^{\nu}_{\rho\sigma} \hat{T}^{\rho\sigma}_{m} + \alpha F^{\nu}{}_{\sigma} \hat{J}^{\sigma} \tag{30}$$

On: $\hat{T}^{\mu\nu}_{m} = \sqrt{-g} \cdot T^{\mu\nu}_{m}$, $\hat{J}^{\sigma} = \sqrt{-g} \cdot J^{\sigma}$ (31)

són les densitats tensorials de l'impuls-energia material i del corrent elèctric, respectivament.

L'equació de continuïtat del corrent elèctric:

$$\nabla_\mu J^\mu = 0 \tag{32}$$

donarà lloc a relacions entre les magnituds electromagnètiques que intervindran en el problema.

L'equació de continuïtat l'obtenim com a condició de compatibilitat de (2.a), prenent la quadridivergència d'ambdós membres i tenint en compte que $F^{\mu\nu}$ és antisimètric.

Tenint en compte (29) i desenrotllant la quadridivergència que apareix a (32), podem escriure:

$$\partial_\mu \hat{J}^\mu = 0 \tag{33}$$

Les equacions (30) i (33) són les expressions adients de les lleis de conservació (25) i (32), per a ésser utilitzades en els apartats següents.

3.2) Definició dels moments multipolars (no covariants).-

Prenem un sistema de referència $\{x^\nu\}_{\nu=0,1,2,3}$ tal que x^0 és una coordenada temporal. Triem una línia temporal L dins, o molt a prop, del tub d'univers Ω.

Sigui $z^\rho(s)$ l'equació paramètrica de la línia L, on s és el paràmetre longitud d'arc — és a dir: si $u^\rho = \frac{dz^\rho}{ds}$, aleshores, $u^\rho u_\rho = +1$). Definim els moments 2^n-polars de les distribucions $T_m^{\mu\nu}(x)$ i $J^\mu(x)$, referits a la línia temporal L i el sistema de coordenades $\{x^\mu\}$, per les expressions:

$$m^{\lambda_1 \dots \lambda_n \mu\nu}(s) = (-1)^n \cdot u^0(s) \cdot \int_{\Sigma^0(s)} d^3\chi \cdot \chi^{\lambda_1} \dots \chi^{\lambda_n} \cdot \hat{T}_m^{\mu\nu}[z^\rho(s) + \chi^\rho] \quad (34.a)$$

$$e^{\lambda_1 \dots \lambda_n \nu}(s) = (-1)^n \cdot u^0(s) \cdot \int_{\Sigma^0(s)} d^3\chi \cdot \chi^{\lambda_1} \dots \chi^{\lambda_n} \cdot \hat{J}[z^\rho(s) + \chi^\rho] \quad (34.b)$$

on: $$\Sigma^0(s) \equiv \{ \chi^\rho \in \mathbb{R}^4 / \chi^0 = 0 \wedge z^\rho(s) + \chi^\rho \in \Omega \} \quad (35)$$

A les expressions (34.a,b) és palesa la simetria d'aquestes quantitats:

$$m^{\lambda_1 \dots \lambda_n \mu\nu} = m^{(\lambda_1 \dots \lambda_n)(\mu\nu)} \quad (36.a)$$

$$e^{\lambda_1 \dots \lambda_n \nu} = e^{(\lambda_1 \dots \lambda_n)\nu} \quad (36.b)$$

on el parèntesi significa simetrització.

D'altra part, és evident de (35) que si un dels índexs λ_i és zero, tindrem:

$$m^{0 \lambda_2 \dots \lambda_n \mu\nu} = 0 \quad ; \quad e^{0 \lambda_2 \dots \lambda_n \nu} = 0 \quad (36.c)$$

També és evident, en les definicions (34.a,b) , que les quantitats $m^{\cdots}$ i $e^{\cdots}$ no es transformen de manera covariant sota canvis de coordenades. Per aquesta raó els anomenarem moments multipolars (no covariants) (MMNC). Les propietats de transformació dels $m^{\cdots}$ han estat establertes per Papapetrou[7]. Nosaltres tractarem aquest punt més endavant.

La importància dels MM(NC) radica en que, d'una banda són la base per a definir els moments multipolars covariants — com veurem a l'apartat següent — i de l'altra, en que són els coeficients que apareixeran en el desenrotllament multipolar dels potencials — gravitatori i electromagnètic — que obtindrem d'integrar les equacions d'Einstein-Maxwell pel mètode de les aproximacions postnewtonianes.

3.3) Equació de continuïtat.-

En aquest apartat definim els moments multipolars covariants — MM(C) — del corrent elèctric i obtenim les relacions entre ells que es dedueixen de l'equació de continuïtat.

Fem un desenrotllament multipolar de (33) respecte de la línia L , en el sentit de Papapetrou.

Si multipliquem (33) per $(x^{\lambda_1} - z^{\lambda_1}(s)) \cdot \ldots \cdot (x^{\lambda_n} - z^{\lambda_n}(s))$, podem incloure aquests factors sota la quadridivergència i escriure:

$$\partial_\mu \left\{ \hat{J}^\mu \cdot (x^{\lambda_1} - z^{\lambda_1}) \cdot \ldots \cdot (x^{\lambda_n} - z^{\lambda_n}) \right\} -$$
$$- \sum_{i=1}^{n} \hat{J}^\mu \cdot (x^{\lambda_1} - z^{\lambda_1}) \cdot \ldots \cdot (\delta_\mu^{\lambda_i} - \delta_\mu^{0} v^{\lambda_i}) \cdot \ldots \cdot (x^{\lambda_n} - z^{\lambda_n}) = 0 \qquad (37)$$

i, integrant al domini $x^\rho - z^\rho(s) \in \Sigma^\circ(s)$, tenint en compte la definició (34.b) junt amb el fet que $J^\mu(x)$ s'anul.la fora d'Ω i a la seva frontera, obtenim:

$$\frac{d}{dx^\circ}\left\{\frac{e^{\lambda_1\ldots\lambda_n 0}}{u^\circ}\right\} + \frac{n}{u^\circ}\left\{e^{(\lambda_1\ldots\lambda_n)} - v^{(\lambda_1}e^{\lambda_2\ldots\lambda_n)0}\right\} = 0 \qquad (38)$$

on: $v^\lambda \equiv \frac{u^\lambda}{u^\circ} = \frac{dz^\lambda}{dx^\circ}$

Sigui $D>0$ una cota del diàmetre del tub d'univers Ω i sigui R una "longitud típica" dels camps gravitatori i electromagnètic considerats (per exemple: la distància a les fonts). Suposarem que: $\frac{D}{R} \ll 1$ — recordem la hipòtesi (2-2.F).

Treballar a l'aproximació 2^r-polar voldrà dir que menysprearem tots els moments multipolars d'ordres superiors — aquest és també el sentit que Papapetrou dóna a aquesta aproximació a la ref.[7]. El fonament d'aquesta aproximació és que, en definitiva, els moments 2^r-polars apareixeran a les equacions del moviment multiplicant termes del tipus $A\cdot\left(\frac{1}{R}\right)^r$. Com que el moment 2^r-polar té la forma $B\cdot D^r$ i hem suposat $\frac{D}{R} \ll 1$, l'aproximació 2^n-polar consisteix en menysprear totes les potències $\left(\frac{D}{R}\right)^r$, $r>n$.

Així, doncs, en considerar l'aproximació dipolar $(r=1)$, ens quedarà, de (38):

$$n=0: \quad \frac{d}{dx^\circ}\left(\frac{e^\circ}{u^\circ}\right) = 0 \qquad (39.a)$$

$$n=1: \quad e^\lambda = e^\circ v^\lambda - u^\circ \frac{d}{dx^\circ}\left(\frac{e^{\lambda 0}}{u^\circ}\right) \qquad (39.b)$$

$n=2$: $$e^{(\lambda\nu)} = v^{(\lambda} e^{\nu)0} \qquad (39.c)$$

i la resta són idènticament zero.

Considerem el sistema de coordenades de Fermi (S.C.F.) construit en base a una tètrada ortonormal $\{\hat{w}_i^\mu ; \hat{w}_0^\mu = u^\mu\}_{i=1,2,3}$ transportada Fermi-Walker al llarg de la línia d'univers $L \equiv z^\rho(s)$. Designarem per $\{X^\alpha\}_{\alpha=0,1,2,3}$ les coordenades de Fermi. D'acord amb el que hem vist a (2.3), en aquest S.C.F. tenim:

$$u^{\bar{0}} = 1 \quad , \quad v^{\bar{\lambda}} = u^{\bar{\lambda}} \quad , \quad \frac{d}{dX^0} = \frac{d}{ds} \qquad (40)$$

Les equacions (37.a,b,c) s'escriuen de la mateixa amanera en qualsevol sistema de coordenades tal que la coordenada x^0 sigui temporal. En cada cas els moments multipolars es defineixen segons (34.b) en el sistema de coordenades corresponent.

En particular, en el S.C.F. esmentat unes ratlles més amunt, podem escriure, tenint en compte (39) i (40):

$$\frac{de^{\bar{0}}}{ds} = 0 \qquad (41.a)$$

$$e^{\bar{\lambda}} = e^{\bar{0}} u^{\bar{\lambda}} - \frac{d}{ds}\left(e^{\bar{\lambda}\bar{0}}\right) \qquad (41.b)$$

$$e^{(\bar{\lambda}\bar{\mu})} = u^{(\bar{\lambda}} e^{\bar{\mu})\bar{0}} \qquad (41.c)$$

Definim ara les quantitats covariants q^{λ}, $q^{\lambda\nu}$, amb suport a L :

$$q^{\lambda} = \hat{w}^{\lambda}_{\bar{\alpha}} \, e^{\bar{\alpha}} \qquad ; \qquad q^{\lambda\nu} = \hat{w}^{\lambda}_{\bar{\alpha}} \, \hat{w}^{\nu}_{\bar{\beta}} \, e^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \tag{42}$$

que anomenarem moments multipolars covariants — MM(C) — de la distribució de corrent elèctric $J^{\mu}(x)$, respecte de L .

Aquesta definició no depén del S.C.F. triat sobre L , ja que la relació entre dos S.C.F. definits sobre la mateixa línia temporal ve donada per una transformació linial (14).

Com és evident a la definició (42), els MM(C) coincideixen amb els MM(NC) en un sistema de coordenades de Fermi.

També és evident, de (36.c), que $e^{\bar{0}\bar{\lambda}} = 0$ i, per tant:

$$u_{\sigma} \, q^{\sigma\lambda} = 0 \tag{43}$$

Tenint en compte que $\hat{w}^{\alpha}_{\bar{0}} = u^{\alpha}$, junt amb (20) i (42), podem escriure les equacions (41) en forma covariant:

$$q \equiv q_{\sigma} u^{\sigma} \qquad , \qquad \frac{dq}{ds} = 0 \tag{44.a}$$

$$q^{\lambda} = (q - \zeta_{\beta} \, q^{\beta\sigma} u_{\sigma}) \, u^{\lambda} - \frac{\delta}{\delta s} (q^{\lambda\sigma} u_{\sigma}) \tag{44.b}$$

$$q^{(\lambda\nu)} = u^{(\lambda} q^{\nu)\sigma} u_{\sigma} \tag{44.c}$$

La primera de les quals ens diu que hi ha un escalar q que és conserva al llarg de L , al qual anomenarem "càrrega pròpia" del cos. Les altres dues són relacions entre q^{λ} , $q^{\lambda\nu}$ i la derivada d'aquest.

Sigui $\mu^{\nu\lambda}$ el tensor antisimètric:

$$\mu^{\nu\lambda} \equiv 2\, q^{[\lambda\nu]} = q^{\lambda\nu} - q^{\nu\lambda} \tag{45}$$

Per contracció amb u_{ν} tindrem, utilitzant (43):

$$\mu^{\nu\lambda} u_{\nu} = q^{\lambda\nu} u_{\nu} \tag{46}$$

que sustituïda a (44.c) ens dóna:

$$q^{(\lambda\nu)} = u_{\sigma}\, \mu^{\sigma(\lambda} u^{\nu)} \tag{47}$$

Finalment, descomposant $q^{\lambda\nu}$ en la part simètrica i la part antisimètrica, podem posar:

$$q^{\lambda\nu} = u_{\sigma}\, \mu^{\sigma(\lambda} u^{\nu)} + \frac{1}{2}\, \mu^{\nu\lambda} \tag{48}$$

I també, introduint (46) a (44.b) :

$$q^{\lambda} = \left(q - u_{\sigma} \mu^{\sigma\beta} \xi_{\beta}\right) u^{\lambda} - \frac{\delta}{\delta s}\left(\mu^{\sigma\lambda} u_{\sigma}\right) \tag{49}$$

essent $\mu^{\nu\lambda}$ un tensor antisimètric arbitrari.

D'acord amb (23) el tensor antisimètric d'ordre 2 , $\mu^{\nu\lambda}$ es podrà descomposar en la forma:

$$\mu^{\nu\lambda} = 2\, e^{[\nu} u^{\lambda]} + 2\left(\mu^{[\nu} u^{\lambda]}\right)^{*} \tag{50}$$

on: $$\varepsilon^{\lambda} = \mu^{\lambda\nu} u_{\nu} \quad , \qquad \mu^{\lambda} = - \overset{*}{\mu}{}^{\lambda\nu} u_{\nu} \tag{51}$$

Les equacions (50) i (51) ens permeten d'escriure (48) i (49) en la forma:

$$q^{\lambda\nu} = - \varepsilon^{\lambda} u^{\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\lambda\nu\alpha\beta} \mu_{\alpha} u_{\beta} \tag{52}$$

$$q^{\lambda} = (q + \varepsilon^{\alpha} \xi_{\alpha}) u^{\lambda} + \frac{\delta \varepsilon^{\lambda}}{\delta s} \tag{53}$$

que expressen els MM(C) en funció de: la càrrega pròpia, la línia L triada i els vectors ε^{λ} i μ^{λ} , arbitraris i ortogonals a u^{ν} .

L'arbitràrietat de ε^{λ} i μ^{λ} — apart de la condició dórtogonalitat: $u_{\nu}\varepsilon^{\nu} = u_{\nu}\mu^{\nu} = 0$ — consisteix en que de l'equació de continuitat (32) no es deriva cap restricció sobre ells. Això és conseqüència de treballar a l'aproximació dipolar sens haver fet cap suposició sobre la forma del corrent $J^{\mu}(x)$. Aquesta informació a la que hem renunciat, es supleix fixant els ε^{λ} i μ^{λ} en cada cas d'acord amb criteris físics, com ara les equacions constitutives i el comportament electrodinàmic del medi interior del cos (conductivitat, polaritzabilitat, permeabilitat magnètica, ...).

Els vectors ε^{λ} i μ^{λ} són de tipus espai degut a que: $\varepsilon_{\lambda} u^{\lambda} = \mu_{\lambda} u^{\lambda} = 0$ En un S.C.F. sobre L tindrem per a ells:

$$\varepsilon^{\bar{o}} = \mu^{\bar{o}} = 0 \tag{54.a}$$

$$\varepsilon^{\bar{\iota}} = \mu^{\bar{\iota}\bar{\nu}} u_{\bar{\nu}} = - q^{\bar{\iota}\bar{o}} = - e^{\bar{\iota}\bar{o}} = \int_{X^{\bar{o}} = \theta_0} d^3X \cdot X^{\bar{\iota}} \cdot \hat{J}^{\bar{o}}(X) \tag{54.b}$$

$$\mu^{\bar{\imath}} = -\frac{1}{2}\,\eta^{\bar{\imath}\bar{o}\bar{\alpha}\bar{\beta}}\,\mu_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = -\,\varepsilon^{\bar{\imath}\bar{\jmath}\bar{k}}\,q_{\bar{\jmath}\bar{k}} = -\,\varepsilon^{\bar{\imath}\bar{\jmath}\bar{k}}\,e^{\bar{\jmath}\bar{k}} = \int_{X^{\bar{o}}=\theta_o} d^3X\,\varepsilon^{ijk}\,X^{\bar{\jmath}}\cdot J^{\bar{k}}(x) \qquad (54.c)$$

Veiem, doncs, que les expressions de $\varepsilon^{\bar{\lambda}}$ i $\mu^{\bar{\lambda}}$ en un S.C.F. lligat a L són anàlogues a les definicions clàssiques dels moments dipolars elèctric i magnètic, respectivament — veure ref. 20 , eq. (40.3) i (44.2) . Es per aquesta raó que anomenarem ε^{λ} moment dipolar elèctric i μ^{λ} moment dipolar magnètic.

3.4) Equacions del moviment.-

Si a l'equació (30) li fem un tractament anàleg al de l'equació (37) obtenim:

$$\frac{d}{dx^o}\left\{\frac{m^{\lambda_1\ldots\lambda_n\nu o}}{u^o}\right\} + \frac{n}{u^o}\left\{m^{(\lambda_1\ldots\lambda_n)\nu} + v^{(\lambda_1}m^{\lambda_2\ldots\lambda_n)\nu o}\right\} =$$

$$= \frac{1}{u^o}\,\Phi^{\lambda_1\ldots\lambda_n\nu} - (-1)^n\int_{\Sigma^o(s)} d^3\chi\cdot\chi^{\lambda_1}\cdots\chi^{\lambda_n}\left(\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\,\hat{T}^{\alpha\beta}_m\right)(z^\rho+\chi^\rho) \qquad (55)$$

on:

$$\Phi^{\lambda_1\ldots\lambda_n\nu} = (-1)^n\cdot u^o\int_{\Sigma^o(s)} d^3\chi\cdot\chi^{\lambda_1}\cdots\chi^{\lambda_n}\left(\alpha\cdot F^{\nu}{}_{\sigma}\hat{J}^{\sigma}\right)(z^\rho+\chi^\rho) \qquad (56)$$

Igual com a l'apartat anterior, en considerar l'aproximació dipolar, de (55) ens quedarà:

$$\frac{d}{dx^o}\left\{\frac{m^{\nu o}}{u^o}\right\} = \frac{1}{u^o}\left\{\Phi^{\nu} - \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\,m^{\alpha\beta} + \partial_\lambda\Gamma^{\nu}_{\beta\alpha}\cdot m^{\lambda\alpha\beta}\right\} \qquad (57.a)$$

$$\frac{d}{dx^o}\left\{\frac{m^{\lambda\nu o}}{u^o}\right\} + \frac{1}{u^o}\left(m^{\lambda\nu} - v^{\lambda}m^{\nu o}\right) = \frac{1}{u^o}\left\{\Phi^{\lambda\nu} - \Gamma^{\nu}_{\mu\rho}\,m^{\lambda\mu\rho}\right\} \qquad (57.b)$$

$$m^{(\lambda\rho)\nu} = v^{(\lambda} m^{\rho)\nu\sigma} \tag{57.c}$$

i la resta — $n > 2$ — són idènticament nul.les. Els símbols de Christoffel i les seves derivades són presos en el punt $z^{\rho}(s)$.

En el S.C.F. de la secció anterior tindrem, tenint en compte (57) i (40) :

$$\frac{dm^{\bar\nu\bar\sigma}}{ds} = \Phi^{\bar\nu} - \left(\xi^{\bar\nu} u_{\bar\alpha} u_{\bar\beta} - \xi_{\bar\alpha} u^{\bar\nu} u_{\bar\beta} - \xi_{\bar\beta} u_{\bar\alpha} u^{\bar\nu}\right) m^{\bar\alpha\bar\beta} + \partial_{\bar\lambda} \Gamma^{\bar\nu}_{\bar\rho\bar\alpha} \cdot m^{\bar\lambda\bar\rho\bar\alpha} \tag{58.a}$$

$$\frac{dm^{\bar\lambda\bar\nu\bar\sigma}}{ds} + m^{\bar\lambda\bar\nu} - u^{\bar\lambda} m^{\bar\nu\bar\sigma} = \Phi^{\bar\lambda\bar\nu} - \left(\xi^{\bar\nu} u_{\bar\mu} u_{\bar\rho} - \xi_{\bar\mu} u^{\bar\nu} u_{\bar\rho} - \xi_{\bar\rho} u_{\bar\mu} u^{\bar\nu}\right) m^{\bar\lambda\bar\mu\bar\rho} \tag{58.b}$$

$$m^{(\bar\lambda\bar\rho)\bar\nu} = u^{(\bar\lambda} m^{\bar\rho)\bar\nu\bar\sigma} \tag{58.c}$$

Ara definim les quantitats covariants amb suport a L:

$$p^{\mu\nu} = m^{\bar\alpha\bar\beta} \cdot \hat{w}^{\mu}_{\bar\alpha} \cdot \hat{w}^{\nu}_{\bar\beta} \quad ; \quad p^{\lambda\mu\nu} = m^{\bar\rho\bar\alpha\bar\beta} \cdot \hat{w}^{\lambda}_{\bar\rho} \cdot \hat{w}^{\mu}_{\bar\alpha} \hat{w}^{\nu}_{\bar\beta} \tag{59.a}$$

$$\psi^{\lambda} = \Phi^{\bar\alpha} \cdot \hat{w}^{\lambda}_{\bar\alpha} \quad ; \quad \psi^{\lambda\nu} = \Phi^{\bar\rho\bar\alpha} \cdot w^{\lambda}_{\bar\rho} \cdot w^{\nu}_{\bar\alpha} \tag{59.b}$$

que anomenarem MM(C) de la distribució d'impuls-energia material $\hat{T}^{\mu\nu}_{m}$ i de la força de Lorentz $\alpha F^{\nu}{}_{\sigma} \hat{J}^{\sigma}$, respectivament.

Les quantitats covariants (59) presenten les mateixes simetries que els $m^{\cdots}$ i les $\Phi^{\cdots}$, i també, d'acord amb (36.c) i (40), satisfan:

$$p^{\lambda\mu\nu}u_{\lambda} = 0 \qquad ; \qquad \varphi^{\lambda\nu}u_{\lambda} = 0 \tag{60}$$

Amb aquestes definicions podem escriure en lloc de (58.c):

$$p^{(\lambda\rho)\nu} = u^{(\lambda}p^{\rho)\nu\sigma}u_{\sigma} \tag{61}$$

la qual substituïda a la identitat:

$$2\,p^{\rho\lambda\nu} = p^{(\lambda\rho)\nu} + p^{(\rho\nu)\lambda} - p^{[\lambda\nu]\rho} \tag{62}$$

ens dóna:

$$p^{\rho\lambda\nu} = u^{\lambda}\,p^{[\rho\nu]\sigma}u_{\sigma} + u^{\rho}\,p^{(\lambda\nu)\sigma}u_{\sigma} + u^{\nu}\,p^{[\rho\lambda]\sigma}u_{\sigma} \tag{63}$$

on: $\quad p^{[\rho\nu]\sigma} \equiv \frac{1}{2}(p^{\rho\nu\sigma} - p^{\nu\rho\sigma})$

Definim ara el <u>tensor de spin</u>: $\quad S^{\lambda\nu} = 2\,p^{[\nu\lambda]\sigma}u_{\sigma} \qquad (64)$

que és un tensor antisimètric — més endavant justificarem el per què l'hem anomenat spin.

De (63) i (64) tindrem:

$$p^{\rho\lambda\nu} = u^{(\lambda}S^{\nu)\rho} + u^{\rho}\,p^{(\lambda\nu)\sigma}u_{\sigma} \tag{65}$$

i per contracció amb u_{ρ}, tenint en compte (60):

$$0 = u^{(\lambda}S^{\nu)\rho}u_{\rho} + p^{(\lambda\nu)\sigma}u_{\sigma} \tag{66}$$

que, substituint a (65), dóna finalment:

$$p^{\rho\lambda\nu} = u^{(\lambda}S^{\nu)\rho} - u^{\rho}\, u^{(\lambda}S^{\nu)\sigma}u_{\sigma} = \left(\eta^{\rho}_{\sigma} - u^{\rho}u_{\sigma}\right) u^{(\lambda}S^{\nu)\sigma} \tag{67}$$

Si ara escrivissim (58.b) en forma covariant, d'acord amb (59) i tenint en compte (20) i (67), tindrem:

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\delta S^{\lambda\nu}}{\delta s} + u_{\sigma}\,\frac{\delta}{\delta s}\left(S^{\sigma(\nu}u^{\lambda)}\right) + p^{\lambda\nu} - u^{\lambda}p^{\nu\sigma}u_{\sigma} = \psi^{\lambda\nu} \tag{68}$$

la qual, per contracció amb u_{ν}, ens permet de determinar $p^{\nu\sigma}u_{\sigma}$ i, simetritzant després respecte de λ i ν, obtenim:

$$p^{\lambda\nu} = p\,u^{\lambda}u^{\nu} - u_{\sigma}\,\frac{\delta S^{\sigma(\nu}}{\delta s}\,u^{\lambda)} - u_{\sigma}\,\frac{\delta}{\delta s}\left\{S^{\sigma(\nu}u^{\lambda)}\right\} + \psi^{(\lambda\nu)} + u^{(\lambda}\psi^{\nu)\sigma}u_{\sigma} \tag{69}$$

on: $p \equiv p^{\alpha\beta}u_{\alpha}u_{\beta}$

També, per antisimetrització de (68), obtenim:

$$\frac{\delta S^{\nu\lambda}}{\delta s} + u^{\lambda}u_{\sigma}\,\frac{\delta S^{\sigma\nu}}{\delta s} - u^{\nu}u_{\sigma}\,\frac{\delta S^{\sigma\lambda}}{\delta s} = 2\,\psi^{[\lambda\nu]} + 2\,u^{[\lambda}\psi^{\nu]\sigma}u_{\sigma} \tag{70}$$

Anàlogament, podem escriure (58.a) en forma covariant i, tenint en compte (67) i que el tensor de Riemann-Christoffel és:

$$R^{\nu}{}_{\rho\mu\sigma} = \partial_{\sigma}\Gamma^{\nu}_{\rho\mu} - \partial_{\rho}\Gamma^{\nu}_{\sigma\mu} + \Gamma^{\nu}_{\sigma\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\rho\mu} - \Gamma^{\nu}_{\rho\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} \tag{71}$$

— hem pres la definició de la ref. [7], eq. (5.6) — tindrem:

$$\frac{\delta}{\delta s}\left\{ p^{\nu\sigma}u_\sigma + u^\nu\left(u_\sigma S^{\sigma\rho}\xi_\rho\right)\right\} + \frac{1}{2} S^{\sigma\rho}u^\mu R^\nu{}_{\rho\mu\sigma} = \psi^\nu + u^\nu\left(\xi_\mu \psi^{\mu\sigma}u_\sigma\right) \tag{72}$$

o bé, utilitzant (69) :

$$\frac{\delta}{\delta s}\left\{ \left(p + u_\sigma S^{\sigma\rho}\xi_\rho\right)u^\nu - u_\sigma \frac{\delta S^{\sigma\nu}}{\delta s} + \psi^{\nu\sigma}u_\sigma\right\} + \frac{1}{2} S^{\sigma\rho}u^\mu R^\nu{}_{\rho\mu\sigma} =$$

$$= \psi^\nu + u^\nu\left(\xi_\mu \psi^{\mu\sigma}u_\sigma\right) \tag{73}$$

Les equacions del moviment i d'evolució del tensor de spin seran les (73) i (70) una vegada haurem explicitat els tensors ψ^ν i $\psi^{\lambda\nu}$ en funció del camp electromagnètic, la càrrega i els moments dipolars elèctric i magnètic.

3.5) Força i moment electromagnètics resultants.-

Recordant la definició (59.b) i l'expressió (56), tindrem en el S.C.F. :

$$\psi^{\bar\nu} = \alpha \left\{ F^{\bar\nu}{}_{\bar\sigma}\, q^{\bar\sigma} - \partial_{\bar\lambda} F^{\bar\nu}{}_{\bar\sigma} \cdot q^{\bar\lambda\bar\sigma}\right\} \tag{74.a}$$

$$\psi^{\bar\lambda\bar\nu} = \alpha\, F^{\bar\nu}{}_{\bar\sigma} \cdot q^{\bar\lambda\bar\sigma} \tag{74.b}$$

on els valors, tant del camp electromagnètic com de les seves derivades, els prenem sobre la línia L.

L'equació (74.b) es pot escriure immediatament en funció dels moments dipolars elèctric i magnètic. Substituint (52) a (74.b) i posant-ho en forma covariant:

$$\psi^{\lambda\nu} = -\alpha \cdot F^{\nu}{}_{\sigma} \left\{ \varepsilon^{\lambda} u^{\sigma} + \frac{1}{2} \eta^{\lambda\sigma\rho\beta} \mu_{\rho} u_{\beta} \right\} \tag{75}$$

Obtenir una expressió covariant per a ψ^{ν} és una mica més llarg. De (74.a) tenim:

$$\psi^{\bar{\nu}} = \alpha \left\{ F^{\bar{\nu}}{}_{\bar{\sigma}} q^{\bar{\sigma}} - \nabla_{\bar{\lambda}} F^{\bar{\nu}}{}_{\bar{\sigma}} \cdot q^{\bar{\lambda}\bar{\sigma}} + \Gamma^{\bar{\nu}}_{\bar{\lambda}\bar{\rho}} \cdot F^{\bar{\rho}}{}_{\bar{\sigma}} \cdot q^{\bar{\lambda}\bar{\sigma}} - \Gamma^{\bar{\rho}}_{\bar{\lambda}\bar{\sigma}} q^{\bar{\lambda}\bar{\sigma}} \cdot F^{\bar{\nu}}{}_{\bar{\rho}} \right\} \tag{76}$$

i, utilitzant (20), podem escriure en forma covariant:

$$\psi^{\nu} = \alpha \left\{ F^{\nu}{}_{\sigma} \left(q^{\sigma} + \xi_{\lambda} \cdot u_{\rho} q^{\lambda\rho} \cdot u^{\sigma} \right) - F^{\rho}{}_{\sigma} u_{\rho} \xi_{\lambda} q^{\lambda\sigma} u^{\nu} - \nabla_{\lambda} F^{\nu}{}_{\sigma} \cdot q^{\lambda\sigma} \right\} \tag{77}$$

on ja hem eliminat els termes del tipus $q^{\lambda\sigma} u_{\lambda}$ que, si recordem (43), són nuls.

Tenint en compte (52), podrem escriure pel terme en $\nabla_{\lambda} F^{\nu}{}_{\sigma}$ de (77) :

$$\begin{aligned} - q^{\lambda\sigma} \cdot \nabla_{\lambda} F^{\nu}{}_{\sigma} &= \left(\varepsilon^{\lambda} u^{\sigma} + \frac{1}{2} \eta^{\lambda\sigma\rho\beta} \mu_{\rho} u_{\beta} \right) \cdot \nabla_{\lambda} F^{\nu}{}_{\sigma} = \\ &= \varepsilon^{\sigma} u^{\lambda} \cdot \nabla_{\lambda} F^{\nu}{}_{\sigma} + \left(2\, \varepsilon^{[\lambda} u^{\sigma]} + \frac{1}{2} \eta^{\lambda\sigma\rho\beta} \mu_{\rho} u_{\beta} \right) \nabla_{\lambda} F^{\nu}{}_{\sigma} = \\ &= \varepsilon^{\sigma} \frac{\delta F^{\nu}{}_{\sigma}}{\delta s} + \left(2\, \varepsilon^{[\lambda} u^{\sigma]} + \frac{1}{2} \eta^{\lambda\sigma\rho\beta} \mu_{\rho} u_{\beta} \right) \cdot \nabla_{\lambda} F^{\nu}{}_{\sigma} \end{aligned} \tag{78}$$

Com que al segon terme del segon membre de (78) la derivada $\nabla_{\lambda} F^{\nu}{}_{\sigma}$ és contreta amb un tensor antisimètric, solament contribuirà la seva part antisimètrica de $\nabla_\lambda F^\nu{}_\sigma$ que, gràcies al primer parell d'equacions de Maxwell (2.b), val:

$$\nabla_{[\lambda} F^\nu{}_{\sigma]} = \frac{1}{2} \nabla^\nu F_{\lambda\sigma} \tag{79}$$

i, per tant, substituint (79) a (78), obtenim:

$$-q^{\lambda\sigma} \nabla_\lambda F^\nu{}_\sigma = \varepsilon^\sigma \cdot \frac{\delta F^\nu{}_\sigma}{\delta s} + \left(\varepsilon^\lambda u^\sigma + \frac{1}{4} \eta^{\lambda\sigma\alpha\beta} \mu_\alpha u_\beta\right) \cdot \nabla^\nu F_{\lambda\sigma} \tag{80}$$

Tornant ara a l'equació (77), si fem les substitucions que es segueixen de (80), (52) i (53), podrem posar:

$$\psi^\nu = \alpha \left\{ q F^\nu{}_\sigma u^\sigma + \frac{\delta}{\delta s}\left(F^\nu{}_\sigma \varepsilon^\sigma\right) + \frac{1}{2} u_\rho \cdot F^\rho{}_\sigma \cdot \eta^{\lambda\sigma\gamma\beta} \mu_\gamma u_\beta \xi_\lambda u^\nu + \right.$$
$$\left. + \left(\varepsilon^\lambda u^\sigma + \frac{1}{4} \eta^{\lambda\sigma\rho\beta} \mu_\rho u_\beta\right) \nabla^\nu F_{\lambda\sigma} \right\} \tag{81}$$

Així, d'acord amb (75), el segon membre de (73) s'escriurà:

$$\psi^\nu + u^\nu\left(\xi_\rho \psi^{\rho\sigma} u_\sigma\right) = \alpha \left\{ F^\nu{}_\sigma u^\sigma q + \frac{\delta}{\delta s}\left(F^\nu{}_\sigma \varepsilon^\sigma\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\varepsilon^\lambda u^\sigma + \frac{1}{4} \eta^{\lambda\sigma\rho\beta} \mu_\rho u_\beta\right) \cdot \nabla^\nu F_{\lambda\sigma} \right\} \tag{82}$$

Finalment, amb les equacions (75) i (82) estem en condicions d'escriure les equacions del moviment (70) i (73) en una forma més acabada:

$$\frac{\delta}{\delta s}\left\{ \left(p + u_\sigma S^{\sigma\rho} \xi_\rho\right) u^\nu - u_\sigma \frac{\delta S^{\sigma\nu}}{\delta s} - \alpha\left(F^\nu{}_\sigma \varepsilon^\sigma + \frac{1}{2} \eta^{\nu\sigma\rho\beta} \mu_\rho u_\beta u_\lambda F^\lambda{}_\sigma\right)\right\} +$$
$$+ \frac{1}{2} S^{\sigma\rho} u^\kappa R^\nu{}_{\rho\kappa\sigma} = \alpha \left\{ q F^\nu{}_\sigma u^\sigma + \left(\varepsilon^\lambda u^\sigma + \frac{1}{4} \eta^{\lambda\sigma\rho\beta} \mu_\rho u_\beta\right) \cdot \nabla^\nu F_{\lambda\sigma} \right\} \tag{83}$$

$$\frac{\delta S^{\nu\lambda}}{\delta s} + u^{\lambda} u_{\sigma} \cdot \frac{\delta S^{\sigma\nu}}{\delta s} - u^{\nu} u_{\sigma} \cdot \frac{\delta S^{\sigma\lambda}}{\delta s} =$$

$$= \alpha \left\{ 2\, g^{[\nu} F^{\lambda]}{}_{\sigma} \cdot u^{\sigma} + F^{[\lambda}{}_{\sigma} \eta^{\nu]\sigma\rho\beta} \mu_{\rho} u_{\beta} - u^{[\lambda} \eta^{\nu]\sigma\rho\beta} \mu_{\rho} u_{\beta} u_{\gamma} F^{\gamma}{}_{\sigma} \right\} \tag{84}$$

3.6) <u>Condició de "centre-de-moviment".-</u>

Aparentment les equacions (83) i (84) proporcionen 10 equacions diferencials que, en principi, serien suficients per a determinar completament les funcions incògnita: $p(s)$, $z^{\ell}(s)$, $S^{\lambda\nu}(s)$

Això no és així perquè (84) dóna tant sols 3 equacions independents — en lloc de 6 — ja que la contracció de (84) amb u_{ν} dóna idènticament zero.

Aquesta contrarietat no és res que ens vingui de nou. La línia d'univers L no ha estat, de fet, definida — recordem com a l'apartat (2.2) hem dit que L era dins, o molt a prop, d'Ω, però res més. Per tant, $z^{\ell}(s)$ i $S^{\lambda\nu}(s)$, que són l'equació de la línia L i el moment angular intrínsec referit a ella, respectivament, restaran indeterminats.

Aquest problema ens el trobem ja a la teoria newtoniana d'N cossos extensos i també a la teoria Especial de la Relativitat [21]. En ambdós casos es resol imposant tres condicion subsidiàries sobre $S^{\lambda\nu}$ que, per descomptat, siguin compatibles amb (83) i (84).

A la teoria newtoniana, usualment hom tria les condicions:

$$\int_{V} d^3x \cdot \rho(\bar{x},t) \cdot x^{\ell} = 0 \qquad ; \qquad \ell = 1,2,3 \tag{85}$$

llavors, hom diu que la línia L_o triada correspon a la línia d'univers del centre de massa.

En el nostre cas començarem per descomposar el tensor antisimètric d'acord amb l'expressió (23):

$$S^{\lambda\nu} = 2\, M^{[\lambda} u^{\nu]} + 2\, (S^{[\lambda} u^{\nu]})^{*} \tag{86.a}$$

on:
$$M^{\lambda} = S^{\lambda\sigma} u_{\sigma} \quad , \quad S^{\lambda} = -\overset{*}{S}{}^{\lambda\sigma} u_{\sigma} \tag{86.b}$$

i, evidentment:
$$M^{\sigma} u_{\sigma} = S^{\sigma} u_{\sigma} = 0 \tag{86.c}$$

Les equacions (86) ens permetran d'escriure (83) i (84) com:

$$\frac{\delta}{\delta s}\left\{ p u^{\nu} + \frac{\delta M^{\nu}}{\delta s} + \eta^{\sigma\nu\rho\beta} S_{\rho} u_{\beta} \xi_{\sigma} - \alpha\left(F^{\nu}{}_{\sigma} e^{\sigma} + \frac{1}{2}\eta^{\nu\rho\sigma\beta} \mu_{\sigma} u_{\beta} F^{\lambda}{}_{\rho} u_{\lambda}\right)\right\} +$$
$$+ \frac{1}{2}\eta^{\sigma\rho\lambda\beta} . S_{\lambda} u_{\beta} . u^{\mu} . R^{\nu}{}_{\rho\mu\sigma} = \alpha\left\{ q u^{\sigma} . F^{\nu}{}_{\sigma} + (\varepsilon^{\lambda} u^{\sigma} + \frac{1}{4}\eta^{\lambda\sigma\rho\beta} . \mu_{\rho} . u_{\beta}) . \nabla^{\nu} F_{\lambda\sigma}\right\} \tag{87}$$

$$\frac{\delta S^{\lambda}}{\delta s} = -\eta^{\lambda\nu\alpha\beta} . \xi_{\nu} . M_{\alpha} . u_{\beta} - S^{\nu} \xi_{\nu} u^{\lambda} +$$
$$+ \alpha\left\{ -\eta^{\lambda\nu\rho\beta} u_{\nu} \varepsilon_{\rho} . F_{\beta\sigma} u^{\sigma} + \frac{1}{2} F^{\nu}{}_{\beta} . (\eta^{\lambda}_{\nu} - u^{\lambda} u_{\nu}) \mu^{\beta}\right\} \tag{88}$$

Llavors, com que la descomposició (86) és biunívoca, els sistemes $\{(83),(84)\}$ i $\{(87),(88), M^{\lambda}$ arbitrari$\}$ són equivalents. Per tant, quan haguem triat $M^{\lambda}(s)$ — és a dir: haguem definit quina línia és L_o — el sistema $\{(87),(88)\}$ serà determinat.

En el S.C.F. lligat a L que estem utilitzant, els vectors $M^{\bar{\lambda}}$ i $S^{\bar{\lambda}}$ tenen l'aspecte següent:

$$M^{\bar{o}} = M^{\lambda} u_{\lambda} = 0 \qquad , \qquad S^{\bar{o}} = S^{\lambda} u_{\lambda} = 0 \tag{89.a}$$

$$M^{\bar{l}} = S^{\bar{l}\bar{o}} = p^{\bar{o}\bar{l}\bar{o}} - p^{\bar{l}\bar{o}\bar{o}} = \int_{X^{\bar{o}}=s} d^3X \cdot X^{\bar{l}} \cdot T_m^{\bar{o}\bar{o}}(X) \tag{89.b}$$

$$S^{\bar{l}} = -\overset{*}{S}{}^{\bar{l}\bar{o}} = -\frac{1}{2}\eta^{\bar{l}\bar{o}\bar{j}\bar{k}} S_{\bar{j}\bar{k}} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ljk} S^{\bar{j}\bar{k}} =$$

$$= \varepsilon^{ljk} p^{\bar{k}\bar{j}\bar{o}} = \int_{X^{\bar{o}}=s} d^3X \cdot \varepsilon^{ljk} X^{\bar{j}} \cdot T_m^{\bar{o}\bar{k}}(X) \tag{89.c}$$

En aquest sistema de coordenades és palesa l'analogia entre (89.b) i el primer membre de la condició newtoniana de centre de massa (85), i entre (89.c) i la definició newtoniana de vector moment angular intrínsec. Per aquesta raó, anomenarem S^{λ} quadrivector spin. Al mateix temps, aquestes comparacions justifiquen que haguem anomenat tensor de spin al $S^{\lambda\nu}$.

Si prenem $M^{\lambda}(s)=0$ (que en el sistema de coordenades de Fermi s'escriu $M^{\bar{l}}=0$) obtenim una generalització de l'expressió newtoniana (85). Cal fer notar, però, que aquesta no és l'única generalització possible de (85) — hom pot trobar una discussió detallada d'aquest tema a la ref.[21].

Aquesta analogia ens porta a formular la següent conjectura: sota condicions suficients de regularitat sobre el tensor $T_m^{\rho\nu}(x)$, existeix una línia d'univers $L_o \equiv z^{\rho}(s)$ única, que és dins, o molt a prop, d'Ω, tal que $M^{\lambda}(s)=0$. Aquesta línia l'anomenarem línia d'univers del "centre-de-moviment" de la partícula (C-M).

Així doncs, si substituim $M^{\lambda}=0$ a (87) i (88) obtenim les equacions del moviment del cos — és a dir: de la línia del "centre-de-moviment" — i del spin referit al "centre-de-moviment".

3.7) <u>Massa pròpia.-</u>

Per contracció de (87) amb u_ν obtenim:

$$\frac{dp}{ds} = -u_\nu \cdot \frac{\delta^2 M^\nu}{\delta s^2} + \alpha . \Big\{ (\varepsilon^\lambda u^\sigma + \frac{1}{4}\eta^{\lambda\sigma\rho\beta}\mu_\rho u_\beta) \cdot \frac{\delta F_{\lambda\sigma}}{\delta s} +$$

$$+ u_\nu \cdot \frac{\delta}{\delta s}\left(F^\nu{}_\sigma \varepsilon^\sigma + \frac{1}{2}\eta^{\nu\sigma\rho\beta}\mu_\rho u_\beta u_\lambda F^\lambda{}_\sigma\right)\Big\} \tag{90}$$

En el cas: $\varepsilon^\lambda = \mu^\lambda = 0$, quan prenem la condició de "centre-de-moviment": $M^\lambda = 0$ l'escalar p es conserva al llarg de la línia L_o. Per aquesta raó l'anomenarem <u>massa pròpia</u> (no electromagnètica) del cos(*). A partir d'ara escriurem m en lloc de p.

La constant α, que depèn del sistema d'unitats en el qual mesurem la càrrega elèctrica es pot determinar a partir de (83). Si demanem que en

---

(*) Pensem que, per a definir la massa pròpia hauria estat més complet trobar un escalar $m_T = m + m_{EM}$ tal que: $\frac{dm_T}{ds} = 0$. Això hauria resultat força complicat, oi més essent ε^λ i μ^λ arbitraris. L'escalar m presenta dos avantages: un ja l'hem vist al text d'ací dalt i l'altre és que, com veurem més endavant, a l'aproximació 1-PN és una constant del moviment.

el cas d'un espai-temps Minkowskià i a l'aproximació monopolar — és a dir: $\varepsilon^{\lambda}=\mu^{\lambda}=0$ i $M^{\lambda}=S^{\lambda}=0$ — l'equació (83) s'ha de reduir a l'equació d'una partícula puntual carregada en un camp electromagnètic a la Teoria Especial de la Relativitat — veure ref. [20], sec.(23) — tenim que $\alpha=\frac{1}{c^2}$ quan mesurem la càrrega i el camp electromagnètic en el sistema d'unitats de Gauss.

3.8) Resum del capítol.-

Partint de les condicions d'integrabilitat (25) i (32) de les equacions d'Einstein-Maxwell (1) i (2), hem obtingut els següents resultats:

- (44.a) Definició i llei de conservació de la càrrega pròpia.
- (52),(53) Expressions dels MM(C) del corrent elèctric en funció de: la pròpia línia d'univers L del cos, la càrrega pròpia i els moments dipolars elèctric i magnètic.
- (90) Definició i llei d'evolució de la massa pròpia (no electrom.)
- (67),(69) Expressions dels MM(C) del tensor d'impuls-energia en funció de: la línia d'univers L , la massa pròpia, el spin i magnituds de caràcter electromagnètic que apareixen a través del $\psi^{\lambda\nu}$ — explicitat a (75).
- (87),(88) Equacions del moviment de translació i del spin, respectivament.

3.9) Comentari.-

Ara ja estem en condicions d'explicar més en detall el contingut de la hipòtesi (2.2-G) segons la qual hem menyspreat els efectes de l'auto-potencial sobre la dinàmica del cos en consideració. Pel que ens interessa, això equival a suposar que mitjançant una redefinició adient de les variables dinàmiques: m, S^{λ}, M^{λ}, q, e^{λ} i μ^{λ} que apareixen a les equacions del moviment (87) i (88), podem fer desapareixer d'aquestes els termes que donarien compte dels efectes de l'auto-camp i l'auto-potencial.

Aquesta suposició és emprada usualment per Landau & Lifshitz a l'obra "Théorie des champs" [20] en referir-se al problema d'N cossos en interacció electromagnètica - sec. 65 — o gravitatòria — sec. 106.

Més encara, tot el que ací diem és cert, si més no, per a distribucions $T_m^{\mu\nu}$ i J^{μ} de la forma:

$$T_m^{\mu\nu}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds \cdot \left[m^{\mu\nu}(s) \cdot \hat{\delta}^4(z^{\rho}(s) - x^{\rho}) + \sum_{i=1}^{3} m^{i\mu\nu}(s) \cdot \partial_i \hat{\delta}^4(x^{\rho} - z^{\rho}(s)) \right]$$

$$J^{\mu}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds \left[e^{\mu}(s) \cdot \hat{\delta}^4(z^{\rho}(s) - x^{\rho}) + \sum_{i=1}^{3} e^{i\nu}(s) \cdot \partial_i \hat{\delta}^4(x^{\rho} - z^{\rho}(s)) \right]$$

on $\hat{\delta}^4$ són les "bones" funcions δ de Dirac que presenten Infeld & Plebansky a l'apèndix del text "Motion and Relativity" [5].

3.10) Comparació amb resultats obtinguts per altres autors.-

En aquest apartat compararem les equacions (70), (73) i (88) amb les equacions de Papapetrou[7] i Dixon[22] en el cas purament gravitatori i amb l'equació de Bargmann, Michel & Telegdi[23] per a la polarització d'una partícula carregada en un camp electromagnètic.

A. Papapetrou:

Per a una partícula sense càrrega són nuls els termes electromagnètics de les equacions (70) i (73) i aquestes es redueixen a:

$$\frac{\delta}{\delta s}\left\{ (m + u_\sigma S^{\sigma\rho}\xi_\rho)\, u^\nu - u_\sigma \cdot \frac{\delta S^{\sigma\nu}}{\delta s} \right\} + \frac{1}{2} S^{\sigma\rho} u^\mu R^\nu{}_{\rho\mu\sigma} = 0$$

$$\frac{\delta S^{\nu\lambda}}{\delta s} + u^\lambda \cdot u_\sigma \cdot \frac{\delta S^{\sigma\nu}}{\delta s} - u^\nu \cdot u_\sigma \cdot \frac{\delta S^{\sigma\lambda}}{\delta s} = 0$$

que coincideixen amb les equacions de Papapetrou(*) — ref.[7], eq. (5.3) i (5.7) . Això confirma la fidelitat del mètode desenvolupat ací.

W.G. Dixon:

D'altra part, les equacions de Dixon per a un cos extens en un camp gravitatori — ref.[22], eq. (49) i (50) — són:

(*) Tant sols hi ha una diferència: la massa pròpia que defineix Papapetrou és, en els termes utilitzats fins aquí, $m^* = m + u_\sigma S^{\sigma\rho}\xi_\rho$, que en general no coincideix amb la nostra m . No obstant, tant m com m^* són escalars i, quan les referim a la línia C-M $(u_\sigma S^{\sigma\rho} = 0)$ donen el mateix resultat.

$$\frac{\delta}{\delta s} p^{\varkappa} + \frac{1}{2} S^{\sigma\rho} u^{\mu} \cdot R^{\varkappa}{}_{\rho\mu\sigma} = f^{\kappa}$$

$$\frac{\delta S^{\varkappa\lambda}}{\delta s} - 2 p^{[\varkappa} u^{\lambda]} = d^{\varkappa\lambda}$$

on $f^{\varkappa}$ i $d^{\varkappa\lambda}$ són, respectivament, la força resultant i el moment total gravitatoris que actuen sobre el cos. El propi Dixon demostra que $f^{\varkappa}$ i $d^{\varkappa\lambda}$ depenen dels moments d'ordres quadrupolar i superior, així com de la mètrica de l'espai-temps. Per tant, a l'aproximació dipolar: $f^{\varkappa}=0$ i $d^{\varkappa\lambda}=0$.

Es evident que quan eliminem la part electromagnètica de les equacions (70) i (73), coincideixen amb les de Dixon, si posem:

$$p^{\varkappa} = (m + u_{\sigma} S^{\sigma\rho} \xi_{\rho})\, u^{\varkappa} - u_{\sigma} \cdot \frac{\delta S^{\sigma\varkappa}}{\delta s}$$

Cal remarcar que la línia d'univers del "centre-de-massa" que defineix Dixon per la condició: $p_{\varkappa} S^{\varkappa\lambda} = 0$, no coincideix amb la línia del "centre-de-moviment" que nosaltres hem definit: $u_{\sigma} S^{\sigma\lambda} = 0$ (com ja hem observat a l'apartat (3,6), no hi ha una única generalització possible de la condició newtoniana de centre de massa (85)).

Cal dir, també, que les equacions (73) i (70) presenten l'avantatge, en relació a les de Dixon, d'ésser equacions diferencials sobre la línia d'univers L .

L'equació (87), però — expressió definitiva de (73) després de descomposar $S^{\lambda\nu}$ segons (86) — presenta l'anomalia aparent d'ésser una equació diferencial de tercer ordre. No obstant això, la suposició de que ξ_{ν}

pot ésser desenrotllat en sèrie de potències d'1/c i que a l'ordre inferior l'acceleració és la que dóna la teoria newtoniana, junt amb (87) i (88), ens donarà una única acceleració físicament acceptable.

<u>Bargmann, Michel & Telegdi:</u> (ref. [23], [24] i [25])

Si eliminem la part gravitatòria de l'equació (88), tenim:

$$\frac{dS^\lambda}{ds} = -\eta^{\lambda\nu\alpha\beta}\xi_\nu M_\alpha u_\beta - S^\nu \xi_\nu \cdot u^\lambda + \frac{1}{c^2}\left\{-\eta^{\lambda\nu\alpha\beta}u_\nu \epsilon_\alpha F_{\beta\sigma}u^\sigma + \frac{1}{2}(\eta^\lambda_\nu - u^\lambda u_\nu)\cdot F^\nu{}_\beta \cdot \mu^\beta\right.$$

Si prenem com a referència la línia del C-M : $M^\lambda = 0$, i triant com a moment dipolar elèctric: $\epsilon^\lambda = 0$ i com a moment dipolar magnètic: $\mu^\lambda = g\,\frac{q}{m}\,S^\lambda$ — essent g la raó giromagnètica — obtenim:

$$\frac{dS^\lambda}{ds} = -(S\xi)u^\lambda + \frac{gq}{2m}\left[F^\lambda{}_\beta S^\beta - (u_\nu F^{\nu\beta}S_\beta)\cdot u^\lambda\right]$$

que coincideix amb l'equació de Bargmann, Michel & Telegdi per a l'evolució del vector polarització (valor esperat del spin) — veure ref. [23], eq.(6).

4.- POTENCIALS GRAVITATORI I ELECTROMAGNETIC

4.1) Primeres conseqüències de la hipòtesi (2.2-D).(*)

Per a una partícula de prova, sense càrrega i puntual, les equacions del moviment (87) es redueixen a:

$$\frac{\delta u^\nu}{\delta s} = 0 \qquad (91)$$

les quals es deriven del lagrangià: $\mathcal{L} = (g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu)^{1/2}$ (92)

El lagrangià del qual es derivin les equacions del moviment parametritzades segons la coordenada x^0 serà doncs: $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cdot \frac{dx^0}{ds}$

$$\mathcal{L}^* = (g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu)^{1/2} = (1 - \vec{v}^2 + h_{\mu\nu} v^\mu v^\nu)^{1/2} \qquad (93)$$

on: $v^\mu = \frac{u^\mu}{u^0}$ i $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$

D'altra part, el lagrangià del mateix problema a la teoria newtoniana és:

$$\mathcal{L}^{Nw} = \frac{1}{2}\vec{v}^2 - \frac{1}{c^2}\varphi(\vec{x}) \qquad (94)$$

essent $\varphi(\vec{x})$ el potencial newtonià. O bé, equivalentment:

$$\mathcal{L}^{Nw} = 1 - \frac{1}{2}\vec{v}^2 + \frac{1}{c^2}\varphi(\vec{x}) \qquad (95)$$

(*) El contingut d'aquest apartat l'hem tret, pràcticament en la seva totalitat, de la ref.[5].

Segons la hipòtesi (2.2-D), $\mathcal{L}^{NW}$ i l'ordre inferior de $\mathcal{L}^{*}$ han de coincidir, per tant:

$$h_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu} = \frac{2}{c^2} \varphi(\bar{x}) + O(3) \tag{96}$$

i, en conseqüència:

$$h_{oo} = O(2) \quad , \quad h_{oi} = O(2) \quad , \quad h_{ij} = O(1) \tag{97}$$

I, si escrivim: $$\hat{\gamma}^{\mu\nu} = \hat{g}^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu} \tag{98}$$

podem deduir immediatament de (97) :

$$\hat{\gamma}^{oo} = O(2) \quad , \quad \hat{\gamma}^{oi} = O(2) \quad , \quad \hat{\gamma}^{ij} = O(1) \tag{99}$$

4.2) Equacions del camp electromagnètic.-

En aquest apartat i el següent escriurem les equacions del camp (1) i (2) en una forma adient per a ésser integrades mitjançant l'aproximació de petites velocitats.

Partint de (2.a) tenim:

$$g^{\sigma\tau} \nabla_\sigma F_{\mu\tau} = -4\pi J_\mu \tag{100}$$

que en un sistema de coordenades harmònic — és a dir: que satisfaci la condició de De Donder (6) —es pot escriure:

$$g^{\sigma\tau}\cdot\partial_\sigma F_{\mu\tau} - g_{\mu\varkappa} F_{\tau\lambda} g^{\sigma\tau}\partial_\sigma g^{\varkappa\lambda} = -4\pi J_\mu \tag{101}$$

Prenent el "gauge" de Lorentz:

$$g^{\sigma\tau}\cdot\nabla_\sigma A_\tau = 0 \tag{102}$$

i tenint en compte (2.b), l'equació (101) es pot escriure:

$$g^{\sigma\tau}\cdot\partial_\sigma\partial_\tau A_\mu - 2\cdot\partial_\tau A_\lambda\cdot g^{\tau\sigma}\cdot\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} = 4\pi J_\mu \tag{103}$$

que es pot reordenar i posar com:

$$\Delta A_\mu = -4\pi\hat{J}_\mu + \partial_0^2 A_\mu + \hat{\gamma}^{\sigma\tau}\cdot\partial_\sigma\partial_\tau A_\mu - 2\cdot\partial_\tau A_\lambda\cdot(\eta^{\tau\sigma}+\hat{\gamma}^{\tau\sigma})\cdot\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \tag{104}$$

on: $\hat{J}_\mu = \sqrt{-g}\cdot J_\mu$

Tenint en compte (99), l'equació (104) és un bon punt de partença per a obtenir el potencial electromagnètic pel mètode de l'aproximació de petites velocitats, ja que ens permet calcular A_μ mòdul termes d'ordre $1/c^{s+1}$ suposant que coneixem $\hat{J}_\mu$ i les aproximacions mòdul termes d'ordre $1/c^s$ de $\hat{\gamma}^{\sigma\tau}$ i A_μ.

L'equació (104) ens permet, a més, de deduir quins són els ordres inferiors del desenrrotllament en $1/c$ de A_μ i $\hat{J}^\mu$.

Tenint en compte (106), les condicions de contorn (5) i la definició (7), l'equació (104) implica:

$$\mathrm{Ord}\,[A_\mu] = \mathrm{Ord}\,[\hat{J}_\mu] = \mathrm{Ord}\,[\hat{J}^\mu]$$

Per altra banda, l'equació de continuïtat del corrent elèctric (33) s'escriu: $\partial_0 \hat{J}^0 + \partial_i \hat{J}^i = 0$

Si, d'acord amb la hipòtesi (2.2-D), esperem que a l'ordre inferior aquesta equació es redueixi a l'equació de continuïtat newtoniana, obtenim:

$$\mathrm{Ord}\,[\hat{J}^i] = \mathrm{Ord}\,[\hat{J}^0] + 1$$

Finalment, com que l'ordre inferior del desenrotllament en sèrie d'1/c de l'equació (87) per un espai-temps pla ha de coincidir amb les equacions del moviment d'un cos en un camp coulombià, tindrem: $\mathrm{Ord}\,[A_0] = 0$. En conseqüència:

$$\mathrm{Ord}\,[A_0] = \mathrm{Ord}\,[\hat{J}^0] = 0 \quad , \quad \mathrm{Ord}\,[A_i] = \mathrm{Ord}\,[\hat{J}^i] = 1 \qquad (105)$$

4.3) Equacions del camp gravitatori.-

Prendrem l'expressió següent per al tensor d'Einstein:

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{2g} \cdot \hat{g}^{\alpha\beta} \cdot \partial_\alpha \partial_\beta \hat{g}^{\mu\nu} + \Pi^{\mu(\alpha\beta)} \cdot \Pi^{\nu}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} y^\mu y^\nu +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{-g}} \cdot \hat{g}^{\mu\nu} \cdot L + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} B - B^{\mu\nu} \qquad (106)$$

on:

$$\Pi^{\mu(\alpha\beta)} = \frac{1}{2g} \cdot \left\{ \hat{g}^{\alpha\rho} \cdot \partial_\rho \hat{g}^{\mu\beta} + \hat{g}^{\beta\rho} \cdot \partial_\rho \hat{g}^{\mu\alpha} - \hat{g}^{\mu\rho} \cdot \partial_\rho \hat{g}^{\alpha\beta} \right\} \qquad (107.a)$$

$$\Pi^{\nu}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\sigma} \cdot g_{\beta\tau}\, \Pi^{\nu(\sigma\tau)} \qquad (107.b)$$

$$y_\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \partial_\alpha \sqrt{-g} \quad ; \quad g = \det(g_{\mu\nu}) = \det(\hat{g}^{\mu\nu}) \qquad (107.c)$$

$$L = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \cdot \Pi^{\nu}_{\alpha\beta} \cdot \partial_\nu \hat{g}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} y_\nu y^\nu \quad . \tag{107.d}$$

i $B^{\mu\nu}=0$, $B=0$ en un sistema de coordenades harmònic.

L'expressió (106) dóna $G^{\mu\nu}$ en funció de la densitat de tensor mètric $\hat{g}^{\mu\nu}$ i l'hem pres de la ref. [6] , equació (D-87).

De (1) i (106) tenim, en coordenades harmòniques:

$$\Delta \hat{\gamma}^{\mu\nu} = \partial_0^2 \hat{\gamma}^{\mu\nu} + \hat{\gamma}^{\alpha\beta} \cdot \partial_\alpha \partial_\beta \hat{\gamma}^{\mu\nu} - 16\pi\varkappa \cdot \hat{T}^{\mu\nu} + 2g\, \Pi^{\mu(\alpha\beta)} \cdot \Pi^{\nu}_{\alpha\beta} -$$

$$- g \cdot y^{\mu} \cdot y^{\nu} + \sqrt{-g} \cdot L \cdot (\eta^{\mu\nu} + \hat{\gamma}^{\mu\nu}) \tag{108}$$

que, tenint en compte (99), ens permet de calcular $\hat{\gamma}^{\mu\nu}$ aproximat fins l'ordre $s+1$ quan coneixem $\hat{T}^{\mu\nu}$ i $\hat{\gamma}^{\mu\nu}$ fins l'ordre s.

Tot seguit passem a deduir quins són els ordres inferiors del desenrotllament en sèrie d'1/c de $\hat{T}^{\mu\nu}_m$ i $\hat{\gamma}^{\mu\nu}$.

Sigui $r(\mu\nu) = \mathrm{Ord}\,[\hat{\gamma}^{\mu\nu}]$ i $r = \min\{ r(\mu\nu) \,,\, \mu,\nu = 0,1,2,3 \}$. De (99) tindrem $r \geq 1$ i, de (108) :

$$\Delta \hat{\gamma}^{\mu\nu} = -16\pi\varkappa \cdot \hat{T}^{\mu\nu} + O(r(\mu\nu)+1) \tag{109.a}$$

i, per tant:
$$\mathrm{Ord}\,[\varkappa \hat{T}^{\mu\nu}] = r(\mu\nu) \quad . \tag{109.b}$$

Llavors, fent una primera aproximació de l'equació (30), tenim:

$$\partial_0 \hat{T}^{0\nu}_m + \partial_l \hat{T}^{l\nu}_m = \frac{1}{c^2} F^{\nu}{}_{\sigma} \cdot \hat{J}^{\sigma} + \frac{1}{2} \hat{T}^{\alpha\beta}_m \cdot \eta_{\varphi\alpha} \cdot \eta_{\rho\beta} \cdot \{ \partial^{\varphi}(\hat{\gamma}^{\nu\rho} - \hat{\gamma} \cdot \eta^{\nu\rho}) +$$

$$+ \partial^{\rho}(\hat{\gamma}^{\nu\varphi} - \eta^{\nu\varphi} \cdot \hat{\gamma}) - \partial^{\nu}(\hat{\gamma}^{\rho\varphi} - \hat{\gamma} \cdot \eta^{\rho\varphi}) \} + O(3r) \tag{110}$$

on: $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}^{\nu\rho}\eta_{\nu\rho}$ i $\partial^\rho = \eta^{\rho\alpha}\partial_\alpha$

Per la hipòtesi (2.2-D), l'ordre inferior de l'equació (110) ha de retre les equacions newtonianes del moviment d'un fluid — veure ref. [18], equacions (6.43) i (6.57) :

$$\partial_0\rho + \partial_l(\rho v^l) = 0 \quad ; \quad \partial_0(\rho v^i) + \partial_l(\rho v^i v^l + t^{il}) = \phi^i \tag{111}$$

i, per tant, les relacions següents hauran d'ésser satisfetes:

$$r(00) + 1 = r(0i) < 2r \quad , \quad r(0i) + 1 = r(il) = 2r \tag{112.a}$$

En conseqüència:

$$r(00) = 2 \quad , \quad r(0i) = 3 \quad , \quad r(ij) = 4 \tag{112.b}$$

Finalment, com que podem fixar arbitràriament l'ordre de la constant $\varkappa$, prendrem $\mathrm{Ord}[\varkappa] = 2$ i escriurem $\varkappa = \frac{G}{c^2}$. Llavors, pel $\hat{T}^{\mu\nu}_m$ tindrem, de (109.b) :

$$\mathrm{Ord}[\hat{T}^{00}_m] = 0 \quad , \quad \mathrm{Ord}[\hat{T}^{0i}_m] = 1 \quad , \quad \mathrm{Ord}[\hat{T}^{ij}_m] = 2 \tag{112.c}$$

4.4) <u>Els símbols de Christoffel (aproximació 1-PN) .-</u>

Els resultats (105) i (112) ens permetran de seguir endavant amb les equacions del camp aproximades. Com veurem més endavant — apartat (5.1) — els símbols de Christoffel, especificats precisament fins a l'ordre que correspon a l'aproximació 1-PN de les equacions (87) i (88), són:

$$\Gamma^{0}_{00} = -\frac{1}{4}\partial_0\hat{\gamma}^{00} + O(5) \qquad ; \qquad \Gamma^{0}_{0l} = -\frac{1}{4}\partial_l\hat{\gamma}^{00} + O(4)$$

$$\Gamma^{0}_{ls} = O(3) \qquad ; \qquad \Gamma^{i}_{00} = -\frac{1}{4}(1-2\hat{\gamma}^{00})\cdot\left\{\partial_i(\hat{\gamma}^{00}+\hat{\gamma}^{ll}) + 4\partial_0\hat{\gamma}^{0i}\right\} + O(6)$$

$$\Gamma^{i}_{0l} = \frac{1}{4}\partial_0\hat{\gamma}^{00}\cdot\delta^{il} + \frac{1}{2}\left(\partial_i\hat{\gamma}^{l0} - \partial_l\hat{\gamma}^{0i}\right) + O(5)$$

$$\Gamma^{i}_{ls} = \frac{1}{4}\left\{\delta^{i}_{l}\cdot\partial_s\hat{\gamma}^{00} + \delta^{i}_{s}\cdot\partial_l\hat{\gamma}^{00} - \delta_{ls}\partial_i\hat{\gamma}^{00}\right\} + O(4) \qquad (113)$$

on: $\hat{\gamma}^{ll} = \hat{\gamma}^{ij}\cdot\delta_{ij}$

Per tant, tant sols ens cal determinar el potencial $\hat{\gamma}^{0\nu}$ fins l'ordre $r(0\nu)$ i el $(\hat{\gamma}^{00}+\hat{\gamma}^{ll})$ fins l'ordre 4.

4.5) Potencials gravitatori i electromagnètic.-

En primera aproximació les equacions (108) i (104), tenint en compte (112) i (4), donen:

$$\Delta\hat{\gamma}^{00} = -\frac{16\pi G}{c^2}\hat{T}^{00}_{m} + O(4) \qquad (114.a)$$

$$\Delta\hat{\gamma}^{0i} = -\frac{16\pi G}{c^2}\hat{T}^{0i}_{m} + O(5) \qquad (114.b)$$

$$\Delta A_0 = -4\pi \hat{J}^0 + O(2) \tag{115.a}$$

$$\Delta A_i = 4\pi \hat{J}^i + O(3) \tag{115.b}$$

En una segona aproximació, obtenim:

$$\Delta\left(\hat{\gamma}^{00}+\hat{\gamma}^{ll}\right) = -\frac{16\pi G}{c^2}\left(1+\frac{1}{2}\hat{\gamma}^{00}\right)\left(\hat{T}^{00}+\hat{T}^{ll}\right) + \vec{\nabla}\hat{\gamma}^{00}\cdot\vec{\nabla}\hat{\gamma}^{00} + \partial_0^2\hat{\gamma}^{00} + O(6) \tag{116}$$

on: $\hat{T}^{ll}=\hat{T}^{ij}\cdot\delta_{ij}$,i $\vec{\nabla}$ és l'operador gradient.

Utilitzant (3) i (4), podem escriure:

$$\hat{T}^{00}+\hat{T}^{ll} = \hat{T}^{00}_m + \hat{T}^{ll}_m + \frac{1}{4\pi c^2}\vec{\nabla}A_0\cdot\vec{\nabla}A_0 \tag{117}$$

Substituint (117) a (116), utilitzant la identitat:

$$\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\psi = \frac{1}{2}\left\{\Delta(\phi\psi) - \phi\cdot\Delta\psi - \psi\cdot\Delta\phi\right\} \tag{118}$$

junt amb (114) i (115) i reordenant, obtenim:

$$\Delta\left\{\left(\hat{\gamma}^{00}+\hat{\gamma}^{ll}\right)\left(1-\frac{1}{2}\hat{\gamma}^{00}\right) + 2\frac{G}{c^4}A_0^2\right\} =$$
$$= -\frac{16\pi G}{c^2}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\hat{\gamma}^{00}\right)\cdot\left(\hat{T}^{00}_m+\hat{T}^{ll}_m\right) + \frac{1}{c^2}A_0\hat{J}^0\right\} + \partial_0^2\hat{\gamma}^{00} + O(6) \tag{119}$$

Per al potencial elèctric A_0, a l'aproximació 1-PN, tenim de (104):

$$\Delta A_0 = -4\pi\hat{J}^0 + \partial_0^2 A_0 - \frac{1}{2}\vec{\nabla}A_0\cdot\vec{\nabla}\hat{\gamma}^{00} + O(4) \tag{120}$$

que, utilitzant (114), (115) i (118) i reordenant, dóna:

$$\Delta\left\{\left(1+\frac{1}{4}\hat{\gamma}^{00}\right)A_0\right\} = -4\pi\left\{\left(1-\frac{1}{4}\hat{\gamma}^{00}\right)\hat{J}^0 + \frac{G}{c^2}A_0\cdot\hat{T}^{00}_m\right\} + \partial_0^2 A_0 + O(4) \qquad (121)$$

Finalment, podem escriure (119) i (121) en forma abreujada:

$$\Box\mathcal{W} = -\frac{16\pi G}{c^2}\mathcal{R} + O(6) \qquad (122)$$

$$\Box\mathcal{A} = -4\pi\mathcal{J} + O(4) \qquad (123)$$

on:

$$\mathcal{W} = \left(1-\frac{1}{2}\hat{\gamma}^{00}\right)\cdot\left(\hat{\gamma}^{00}+\hat{\gamma}^{\ell\ell}\right) + \frac{2G}{c^4}A_0^2 \qquad (124.a)$$

$$\mathcal{R} = \left(1-\frac{1}{2}\hat{\gamma}^{00}\right)\cdot\left(\hat{T}^{00}_m + \hat{T}^{\ell\ell}_m\right) + \frac{1}{c^2}A_0\hat{J}^0 \qquad (124.b)$$

$$\mathcal{A} = \left(1+\frac{1}{4}\hat{\gamma}^{00}\right)A_0 \qquad (125.a)$$

$$\mathcal{J} = \left(1-\frac{1}{4}\hat{\gamma}^{00}\right)\hat{J}^0 + \frac{G}{c^2}A_0\hat{T}^{00}_m \qquad (125.b)$$

La integració de les equacions (114), (115), (122) i (123) a l'aproximació 1-PN amb les condicions límit (5) és trivial, atès que totes elles són equacions del tipus Poisson o D'Alembert. Tenim, doncs, pels potencials:

$$\hat{\gamma}^{00}(\vec{x},x^0) = \frac{4G}{c^2}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\cdot\hat{T}^{00}_m(\vec{x}',x^0) + O(4) \qquad (126.a)$$

$$\hat{\gamma}^{0i}(\bar{x},x^0) = \frac{4G}{c^2}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{d^3x'}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\cdot \hat{T}_m^{0i}(\bar{x}',x^0) + O(6) \qquad (126.b)$$

$$W(\bar{x},x^0) = \frac{4G}{c^2}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{d^3x'}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\cdot \mathcal{R}(\bar{x}',x^0) + \frac{2G}{c^2}\cdot\partial_0^2\int_{\mathbb{R}^3} d^3x'\cdot|\bar{x}-\bar{x}'|\cdot\mathcal{R}(\bar{x}',x^0)+O(6) \qquad (126.c)$$

$$\mathcal{Q}(\bar{x},x^0) = \int_{\mathbb{R}^3}\frac{d^3x'}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\cdot \mathcal{J}(\bar{x}',x^0) + \frac{1}{2}\cdot\partial_0^2\int_{\mathbb{R}^3} d^3x'\cdot|\bar{x}-\bar{x}'|\cdot\mathcal{J}(\bar{x}',x^0)+O(4) \qquad (127.a)$$

$$A_i(\vec{x},x^0) = -\int_{\mathbb{R}^3}\frac{d^3x'}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\cdot \hat{J}^i(\vec{x}',x^0) + O(3) \qquad (127.b)$$

on: $|\vec{x}-\vec{x}'| = \sqrt{\delta_{ij}\,(x^i-x^{i'})\cdot(x^j-x^{j'})}$

El suport de les distribucions $\hat{T}_m^{\mu\nu}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{J}$, $\hat{J}^i$ serà format pels N "tubs d'univers" $\{\Omega_A\}_{A=1,\dots,N}$ dels quals hem parlat a la hipòtesi (2.2-A) concentrats cada un d'ells al voltant de la línia L_A corresponent.

De les equacions (126) i (127) , és evident que en el desenrotllament multipolar dels potencials apareixeran els MM(NC) més aviat que els MM(C).

4.6) Els MM(NC) en funció dels MM(C).-

Com ja hem remercat més amunt les quantitats $m^{\mu\nu}$, $m^{\lambda\mu\nu}$, $e^{\lambda\nu}$, e^{ν} definides a (34) no són covariants sota canvis de coordenades. Les lleis de transformació per a les $m^{\mu\nu}$ i les $m^{\lambda\mu\nu}$ han estat donades per Papapetrou. A continuació farem un repàs de la derivació d'aquestes lleis.

Considerarem separadament dos tipus de transformacions:

i) $\quad x^{l} = f^{l}(x^{\mu'}) \quad , \quad x^0 = x^{0'}$

ii) $\quad x^{\ell} = x^{\ell'} \quad ; \quad f^{0}(x^{\mu'}) = x^{0}$

Una transformació de coordenades qualsevulla serà la composició d'una transformació del tipus (i) amb una altra del tipus (ii).

Sota transformacions del tipus (i) les $m^{\lambda\mu\nu}$ es transformen de manera covariant, atès que la integració que apareix a (34) es realitza sobre el mateix domini i que estem treballant a l'aproximació dipolar.

En el cas de les transformacions (ii) cal filar més prim, especialment perquè les hipersuperfícies $x^{0}=$ constant i $x^{0'}=$ constant ja no són la mateixa. Establint una relació entre els punts (x^{ℓ}, x^{0}) de la primera hipersuperfície i els $(x^{\ell}, x^{0'})$ de la segona, hom pot arribar a relacionar ambdues integrals. Així obtenim:

$$m^{\lambda\alpha\beta} = \partial_{\mu'} x^{\alpha} \cdot \partial_{\nu'} x^{\beta} \cdot \left(\partial_{\rho'} x^{\lambda} - \frac{u^{\lambda}}{u^{0}} \partial_{\rho'} x^{0} \right) \cdot m'^{\rho\mu\nu} \tag{128}$$

on les derivades estan preses sobre la línia L i $\partial_{\mu'} x^{\alpha} = \dfrac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\mu'}}$

Es trivial comprovar que l'expressió (128) també val per a les transfromacions (i). Per tant, valdrà també per a composicions de transformacions (i) amb transformacions (ii), és a dir: per a qualsevol canvi de coordenades.

De manera anàloga podem derivar la fòrmula de transformació per a les quantitats:

$$m^{\alpha\beta} = \partial_{\mu'} x^{\alpha} \cdot \partial_{\nu'} x^{\beta} \cdot m'^{\mu\nu} - \left(\partial_{\mu'} \partial_{\rho'} x^{\alpha} \cdot \partial_{\nu'} x^{\beta} + \partial_{\mu'} x^{\alpha} \cdot \partial_{\nu'} \partial_{\rho'} x^{\beta} \right) \cdot m'^{\rho\mu\nu}$$
$$+ \frac{d}{ds} \left\{ \partial_{\mu'} x^{\alpha} \cdot \partial_{\nu'} x^{\beta} \cdot \partial_{\rho'} x^{0} \cdot \frac{1}{u^{0}} \, m'^{\rho\mu\nu} \right\} \tag{129}$$

Els resultats (128) i (129) són presos de la ref. [7]. Nosaltres, però, hem de donar, a més, les lleis de transformació dels moments e^{ν} i $e^{\lambda\nu}$. Tenint en compte la semblança entre els MM(NC) e^{ν} i $m^{\alpha\beta}$, i $e^{\lambda\nu}$ i $m^{\lambda\alpha\beta}$, podem escriure immediatament, per analogia amb (128) i (129):

$$e^{\lambda\alpha} = \partial_{\mu'} x^{\alpha} \cdot \left(\partial_{\rho'} x^{\lambda} - \frac{u^{\lambda}}{u^{0}} \cdot \partial_{\rho'} x^{0} \right) \cdot e'^{\rho\mu} \tag{130}$$

$$e^{\alpha} = \partial_{\mu'} x^{\alpha} \, e'^{\mu} - \partial_{\rho'} \partial_{\mu'} x^{\alpha} \, e'^{\rho\mu} + \frac{d}{ds} \left(\partial_{\mu'} x^{\alpha} \, \partial_{\rho'} x^{0} \, \frac{e'^{\rho\mu}}{u^{0}} \right) \tag{131}$$

Per al nostre propòsit — escriure els MM(NC) a qualsevol sistema en funció dels MM(C) — és útil prendre com a sistema $\{x^{\mu'}\}$ un S.C.F. lligat a L .

Si $\{\hat{W}_{i}^{\alpha}, \hat{W}_{0}^{\alpha} = u^{\alpha}\}_{i=1,2,3}$ és la tètrada que prenem com a base per a construir el S.C.F. , tenim:

$$\left(\partial_{\mu'} x^{\alpha} \right)_{L} = \hat{W}_{\bar{\mu}}^{\alpha} \tag{132}$$

i, de l'expressió de la transformació dels símbols de Christoffel, tenim per a les derivades segones:

$$\partial_{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\beta}} \, x^{\lambda} = \Gamma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\bar{\rho}} \, \hat{W}_{\bar{\rho}}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \cdot \hat{W}_{\bar{\alpha}}^{\mu} \cdot \hat{W}_{\bar{\beta}}^{\nu} \tag{133}$$

Finalment, substituint (132) i (133) a (128) i (129), obtenim:

$$m^{\lambda\alpha\beta} = p^{\lambda\alpha\beta} - \frac{1}{u^{0}} u^{\lambda} p^{0\alpha\beta} \tag{134.a}$$

$$m^{\alpha\beta} = p^{\alpha\beta} + p^{\rho\mu\nu}\left(\xi_\rho u_\mu u^\alpha \delta_\nu^\beta + \xi_\rho u_\nu u^\beta \delta_\mu^\alpha + \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \delta_\nu^\beta + \right.$$
$$\left. + \Gamma_{\nu\rho}^\beta \cdot \delta_\mu^\alpha\right) + \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{u^0} p^{0\alpha\beta}\right) \qquad (134.b)$$

$$e^\alpha = q^\alpha + q^{\rho\mu}\left(\xi_\rho u_\mu u^\alpha + \Gamma_{\rho\mu}^\alpha\right) + \frac{d}{ds}\left(\frac{q^{0\alpha}}{u^0}\right) \qquad (135.a)$$

$$e^{\lambda\alpha} = q^{\lambda\alpha} - \frac{1}{u^0} u^\lambda q^{0\alpha} \qquad (135.b)$$

I, utilitzant (52), (53), (67) i (69), obtenim:

$$m^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{u^0} u^\lambda S^{0(\mu} u^{\nu)} - S^{\lambda(\mu} u^{\nu)} \qquad (136.a)$$

$$m^{\alpha\beta} = p u^\alpha u^\beta - \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{u^0} S^{0(\alpha} u^{\beta)}\right) + \frac{\delta M^{(\alpha}}{\delta s} u^{\beta)} - u^{(\beta}\eta^{\alpha)\sigma\nu\rho}\xi_\sigma S_\nu u_\rho -$$
$$- \frac{1}{c^2}\left\{ e^{(\beta} F^{\alpha)}{}_\sigma u^\sigma + \frac{1}{2} F^{(\alpha}{}_\sigma \eta^{\beta)\sigma\tau\rho} \mu_\tau u_\rho + \frac{1}{2} u^{(\alpha}\eta^{\beta)\sigma\rho\tau} \mu_\rho u_\tau F^\nu{}_\sigma u_\nu \right\} \qquad (136.b)$$

$$e^\lambda = q u^\lambda + \frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{u^0}\left(2 e^{[\lambda} u^{0]} - \frac{1}{2}\eta^{0\lambda\alpha\beta}\mu_\alpha u_\beta\right)\right\} \qquad (137.a)$$

$$e^{\lambda\nu} = \frac{e^0}{u^0} u^\lambda u^\nu - e^\lambda u^\nu + \frac{1}{2}\eta^{0\nu\alpha\beta}\mu_\alpha u_\beta \frac{u^\lambda}{u^0} - \frac{1}{2}\eta^{\lambda\nu\alpha\beta}\mu_\alpha u_\beta \qquad (137.b)$$

4.7) Potencials gravitatori i electromagnètic. Aproximació 1-PN i dipolar.-

En aquest apartat deduim les expressions aproximades dels potencials creats en el punt $(\vec{z}_A(x^0), x^0)$ per la resta de cossos: $B \neq A$, $B \in \{1, \ldots, N\}$.

Substituint a (126) i (127) $\hat{T}^{\mu\nu}_m$ i $\hat{J}^\mu$ per: $\sum_{B\neq A} \hat{T}^{\mu\nu}_{\substack{m\\B}}$ i $\sum_{B\neq A} \hat{J}^\mu_B$, obtenim a l'aproximació dipolar:

$$\overset{\Lambda}{\gamma}{}^{oo}_{A} = \frac{4G}{c^2}\sum_{B\neq A}\left\{\frac{1}{|\vec{z}_B-\vec{z}_A|}\cdot m_B^{oo} + \underset{A}{\partial_l}\frac{1}{|\vec{z}_B-\vec{z}_A|}\cdot m_B^{loo}\right\} + O(4) \qquad (138.a)$$

$$\overset{\Lambda}{\gamma}{}^{oi}_{A} = \frac{4G}{c^2}\sum_{B\neq A}\left\{\frac{1}{|\vec{z}_B-\vec{z}_A|}\cdot m_B^{oi} + \underset{A}{\partial_l}\frac{1}{|\vec{z}_B-\vec{z}_A|}\cdot m_B^{loi}\right\} + O(5) \qquad (138.b)$$

$$W_A = \frac{4G}{c^2}\sum_{B\neq A}\left\{\frac{1}{|\vec{z}_B-\vec{z}_A|}\cdot\frac{\mathcal{R}_B}{u_B^o} + \underset{A}{\partial_l}\frac{1}{|\vec{z}_B-\vec{z}_A|}\cdot\frac{\mathcal{R}_B^l}{u_B^o} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\,\mathcal{D}_B^2\left(\mathcal{R}_B\cdot|\vec{z}_B-\vec{z}_A| + \underset{A}{\partial_l}|\vec{z}_B-\vec{z}_A|\cdot\mathcal{R}_B^l\right)\right\} + O(6) \qquad (138.c)$$

$$\mathcal{Q}_A = \sum_{B\neq A}\left\{\frac{1}{|\vec{z}_B-\vec{z}_A|}\cdot\frac{\mathcal{J}_B}{u_B^o} + \underset{A}{\partial_l}\frac{1}{|\vec{z}_B-\vec{z}_A|}\cdot\frac{\mathcal{J}_B^l}{u_B^o} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\,\mathcal{D}_B^2\left(\mathcal{J}_B\cdot|\vec{z}_B-\vec{z}_A| + \mathcal{J}_B^l\cdot\underset{A}{\partial_l}|\vec{z}_B-\vec{z}_A|\right)\right\} + O(4) \qquad (139.a)$$

$$\underset{A}{A_i} = -\sum_{B\neq A}\left\{\frac{1}{|\vec{z}_B-\vec{z}_A|}\cdot e_B^i + \underset{A}{\partial_l}\frac{1}{|\vec{z}_B-\vec{z}_A|}\cdot e_B^{li}\right\} + O(3) \qquad (139.b)$$

on: $\mathcal{D}_B = \frac{1}{u_B^o}\cdot\frac{d}{ds_B}$ i els $\mathcal{R}^{\lambda_1\ldots\lambda_n}$, $\mathcal{J}^{\lambda_1\ldots\lambda_n}$ es defineixen a partir de $\mathcal{R}$ i $\mathcal{J}$ segons una expressió anàloga a (34).

Finalment, utilitzant els resultats de l'apèndix A, podem escriure:

$$\overset{\Lambda}{\gamma}{}^{oo}_{A} = \frac{4G}{c^2}\sum_{B\neq A}\left\{\frac{1}{|\vec{z}_B-\vec{z}_A|}\cdot m_B - \underset{A}{\partial_l}\frac{1}{|\vec{z}_B-\vec{z}_A|}\cdot M_B^l\right\} + O(4) \qquad (140.a)$$

$$\overset{\Lambda}{\gamma}{}^{oi}_{A} = \frac{4G}{c^2}\sum_{B\neq A}\left\{\frac{1}{|\vec{z}_B-\vec{z}_A|}\cdot\left(m_B v_B^i + \frac{dM_B^i}{dx^o}\right) - \underset{A}{\partial_l}\frac{1}{|\vec{z}_B-\vec{z}_A|}\left(M_B^l v_B^i + \frac{1}{2}\epsilon^{lik}\underset{B}{S^k}\right)\right.$$
$$\left. + O(5)\right. \qquad (140.b)$$

$$
\begin{aligned}
W_A = \frac{4G}{c^2} \sum_{B \neq A} \Big\{ & \frac{1}{|\bar{z}_B - \bar{z}_A|} \Big(m_B \big[1 + \tfrac{3}{2} v_B^2 - \tfrac{1}{4} \hat{\gamma}^{00}_B \big] + \tfrac{1}{c^2} \underset{B}{A_0} q_B + \dot{M}^0_B + \dot{M}^\ell_B v^\ell_B + \\
& + \frac{d}{dx^0} \big(M^\ell_B v^\ell_B \big) - \tfrac{1}{c^2} e^\ell_B \cdot \underset{B}{F}^\ell{}_0 - \tfrac{1}{2} \big(\underset{B}{\partial_\ell} \hat{\gamma}^{00}_B \big) \cdot M^\ell_B + \tfrac{1}{c^2} \big(\underset{B}{\partial_\ell} A_0 \big) e^\ell_B \Big) + \\
& + \underset{A}{\partial_\ell} \frac{1}{|\bar{z}_B - \bar{z}_A|} \cdot \Big(2 \varepsilon^{\ell k j} \cdot \underset{B}{S}^k \underset{B}{v}^j - M^\ell_B \cdot \big[1 - \tfrac{1}{4} \hat{\gamma}^{00}_B + \tfrac{3}{2} v_B^2 \big] + M^0_B v^\ell_B - \\
& - \tfrac{1}{c^2} \underset{B}{A_0} \cdot e^\ell_B \Big) + \tfrac{1}{2} D^2_B \Big(m_B |\bar{z}_B - \bar{z}_A| - M^\ell_B \cdot \underset{A}{\partial_\ell} |\bar{z}_B - \bar{z}_A| \Big) \Big\} + O(6)
\end{aligned}
\tag{140.c}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_A = \sum_{B \neq A} \Big\{ & \frac{1}{|\bar{z}_B - \bar{z}_A|} \cdot \Big(q_B \cdot \big[1 - \tfrac{1}{4} \hat{\gamma}^{00}_B \big] + \tfrac{G}{c^2} \underset{B}{A_0} m_B - \tfrac{1}{4} \underset{B}{\partial_\ell} \hat{\gamma}^{00}_B \cdot e^\ell_B + \tfrac{G}{c^2} \underset{B}{\partial_\ell} \underset{B}{A_0} \cdot M^\ell_B \Big) + \\
& + \underset{A}{\partial_\ell} \frac{1}{|\bar{z}_B - \bar{z}_A|} \cdot \Big(- \varepsilon^\ell_B \cdot \big[1 - \tfrac{1}{4} \hat{\gamma}^{00}_B \big] + \varepsilon^0_B v^\ell_B + \tfrac{1}{2} \varepsilon^{\ell j k} \underset{B}{\mu}^j \underset{B}{v}^k - \tfrac{G}{c^2} \cdot \underset{B}{A_0} \cdot M^\ell_B \Big) + \\
& + \tfrac{1}{2} D^2_B \Big(q_B \cdot |\bar{z}_B - \bar{z}_A| - e^\ell_B \cdot \underset{A}{\partial_\ell} |\vec{z}_B - \vec{z}_A| \Big) \Big\} + O(4)
\end{aligned}
\tag{141.a}
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{A}{A}_i = \sum_{B \neq A} \Big\{ & \frac{1}{|\bar{z}_B - \bar{z}_A|} \cdot \Big(- \underset{B}{q} v^i_B - \frac{d \varepsilon^i_B}{dx^0} \Big) + \underset{A}{\partial_\ell} \frac{1}{|\bar{z}_B - \bar{z}_A|} \cdot \Big(\varepsilon^\ell_B v^i_B + \tfrac{1}{2} \varepsilon^{\ell i k} \mu^k_B \Big) \Big\} + \\
& + O(3)
\end{aligned}
\tag{141.b}
$$

5.- EQUACIONS DEL MOVIMENT (aproximació 1-PN i dipolar)

En aquest capítol substituirem els potencials aproximats (140) i (141) a les equacions (87) i (88). Com ja hem dit més amunt — apartat (3.6) — aquestes equacions formen un sistema que no serà determinat fins que no fixem arbitràriament els valors de: $M_A^{\lambda}(s_A)$, $A=1,\dots,N$.

A partir d'ara ens ocuparem de cossos amb moment dipolar elèctric nul respecte de la línia $\underset{A}{L}$ del "centre-de-moviment": $M_A^{\lambda} = \mathcal{E}_A^{\lambda} = 0$ (142)

L'anàleg d'aquest cas a la teoria newtoniana seria el d'un sistema d'N cossos tals que, per a cada un d'ells i a cada instant, existís un punt respecte del qual s'anul.lessin els moments dipolars de les densitats de càrrega i massa.

Nosaltres pretenem trobar unes equacions aproximades del moviment de translació que siguin derivables d'un lagrangià. No hi ha cap raó per a creure que si prenem la línia $\underset{A}{L}$ per a representar el cos A — és a dir, la condició (142) — les equacions resultants admetin un lagrangià.

En qualsevol cas, atès que l'aproximació newtoniana d'aquest problema sí que admet un lagrangià quan prenem la condició newtoniana de centre de massa (85), prendrem:

$$M_A^{\ell}(s_A) = O(2) \quad , \quad A = 1,\dots,N. \tag{143.a}$$

que, tal com demostrarem a l'apèndix B, implica per al moment dipolar elèctric:

$$\mathcal{E}_A^{\ell}(s_A) = \frac{q_A}{m_A} \cdot M_A^{\ell}(s_A) + O(4) = O(2) \tag{143.b}$$

5.1) Moviment de translació.-

Les quatre equacions (87) són equivalents a (90) més les tres components espacials de (87).

Tenint en compte (140), (141), (143) i (A-1, 2, 3, 12), podem escriure (90) com:

$$\frac{dm_A}{ds_A} = O(5) \quad , \quad A = 1, \ldots, N \tag{144.a}$$

per tant, a l'ordre d'aproximació que ens interessa m_A serà una constant del moviment.

Per a les components espacials de (87) tenim, utilitzant (113), (124) i (125) :

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx^0}\Big\{ m\left(1+\tfrac{1}{2}v^2\right)v^i + m\cdot\left(\tfrac{3}{4}\hat{\gamma}^{00}v^i - \hat{\gamma}^{0i}\right) - \varepsilon^{ijk}S^k\cdot(\partial_j A_0)\cdot\frac{q}{mc^2} + \\
&\quad + \frac{1}{2c^2}\varepsilon^{ijk}\mu^k\cdot(\partial_j A_0) - \frac{q}{c^2}A_i + \frac{1}{4}\varepsilon^{jik}S^k\cdot(\partial_j\hat{\gamma}^{00})\Big\} + \\
&+ \partial_i\Big\{ -\frac{m}{4}W + \frac{m}{32}\hat{\gamma}^{00\,2} + \frac{Gm}{2c^4}A_0^2 - \frac{3m}{8}\hat{\gamma}^{00}\cdot v^2 + m v^l\cdot\hat{\gamma}^{l0} - \frac{1}{4}M^l\cdot(\partial_l\hat{\gamma}^{00}) + \\
&\quad + \frac{1}{2}\varepsilon^{lsk}\cdot S^k\cdot\partial_l\left(\hat{\gamma}^{s0} - \hat{\gamma}^{00}v^s\right) + \frac{q}{c^2}\left(A_0 + A_l v^l\right) + \frac{1}{c^2}e^l\cdot(\partial_l A_0) - \\
&\quad - \frac{1}{2c^2}\varepsilon^{lks}\cdot\mu^k\cdot\partial_l\left(A_s + A_0 v^s\right)\Big\} + \frac{1}{4}\varepsilon^{lik}\cdot(\partial_l\hat{\gamma}^{00})\cdot\frac{dS^k}{dx^0} = O(6)
\end{aligned}$$

(144.b)

Si ara introduïm a (144.b) els valors dels potencials obtinguts a (140) i (141) i substituïm $\vec{x}$, $\vec{v}$ per $\vec{z}_A$, $\vec{v}_A$ obtindrem les equacions del moviment de translació del cos A movent-se en el sí del camp creat pels N−1 restants.

Resulta senzill comprovar que, com era d'esperar, la part monopolar de les equacions resultants — és a dir: la part que no depen dels moments dipolars S_B^λ, M_C^λ, μ_D^λ, $\mathcal{E}_E^\lambda$ — coincideix amb les equacions de Bażański [26] i, per tant, pot ésser derivada del lagrangià de Bażański:

$$
\begin{aligned}
L_{BZ} = & \sum_{A=1}^{N} \left\{ \frac{1}{2} m_A \vec{v}_A^2 + \frac{1}{8} m_A (\vec{v}_A^2)^2 \right\} + \sum_{\substack{A,B=1\\ B\neq A}}^{N} \frac{G m_A m_B - q_A q_B}{2c^2 z_{AB}} + \\
& + \frac{3}{4c^2} \sum_{\substack{A,B=1\\ A\neq B}}^{N} \frac{G m_A m_B}{z_{AB}} (\vec{v}_A - \vec{v}_B)^2 + \frac{1}{4c^2} \sum_{\substack{B,A=1\\ A\neq B}}^{N} \frac{q_A q_B - G m_A m_B}{z_{AB}} \left[\vec{v}_A \cdot \vec{v}_B + \frac{(\vec{v}_A \cdot \vec{z}_{AB})(\vec{v}_B \cdot \vec{z}_{AB})}{z_{AB}^2} \right] + \\
& + \frac{1}{2c^4} \sum_{\substack{A,B,D=1\\ B\neq A\neq D}}^{N} \frac{1}{z_{AB} \cdot z_{AD}} \left[G q_A (q_B m_D + q_D m_B) - G m_A q_B q_D - G^2 m_A m_B m_D \right] + O(6)
\end{aligned} \tag{145}
$$

En conseqüència, les equacions del moviment de translació a l'aproximació 1-PN es poden escriure:

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{E}_A^i [L_{BZ}] + \frac{d}{dx^0} \left\{ \frac{\delta M_A^i}{\delta \Delta_A} + \sum_{B\neq A} \left[-\frac{G}{c^2} \varepsilon^{ilk} (2 S_B^k m_A + S_A^k m_B) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \varepsilon^{ilk} S_A^k \frac{q_A q_B}{m_A c^2} + \frac{1}{2c^2} \varepsilon^{ilk} (\mu_A^k q_B + \mu_B^k q_A) \right] \cdot \left(\partial_{Al} \frac{1}{z_{AB}} \right) \right\} + \\
& + \partial_{A^i} \sum_{B\neq A} \left\{ \left[-\varepsilon^{lsk} \left(\frac{2G}{c^2} (m_A S_B^k + m_B S_A^k) - \frac{1}{2c^2} (q_A \mu_B^k + q_B \mu_A^k) \right) \cdot (v_A^s - v_B^s) + \right. \right. \\
& \qquad \left. + \frac{G}{c^2} (m_A M_B^l - m_B M_A^l) + \frac{1}{c^2} (q_B \mathcal{E}_A^l - q_A \mathcal{E}_B^l) \right] \cdot \left(\partial_{Al} \frac{1}{z_{AB}} \right) + \\
& \qquad \left. + \left(\frac{G}{c^2} S_A^l S_B^t + \frac{1}{4c^2} \mu_A^l \mu_B^t \right) \cdot \left(\partial_{Alt} \frac{1}{z_{AB}} \right) \right\} - \frac{1}{4} \varepsilon^{lik} (\partial_l \gamma_A^{00}) \cdot \frac{dS_A^k}{dx^0} = \\
& = O(6)
\end{aligned} \tag{146}
$$

on: $\mathcal{E}^i_A[\;] \equiv \frac{d}{dx^0}\left(\frac{\partial}{\partial v^i_A}\right) - \partial_{\underset{A}{i}}$ és l'operador de Lagrange i $z_{AB} = |\vec{z}_A - \vec{z}_B|$.

L'últim terme del primer membre de (146) és $O(6)$, gràcies a que, de (88), tenim: $\frac{dS^i_A}{dx^0} = O(4)$

Tal i com podem veure immediatament a l'equació (146), si prenguessim les línies d'univers dels C-M : $\{\underset{A}{L}_0\}_{A=1,\ldots,N}$, per a descriure el moviment de translació dels cossos del sistema — és a dir: $M^\lambda_A = \mathcal{E}^\lambda_A = 0$ — obtindriem unes equacions que no serien derivables de cap lagrangià. A més, ens apareixeria un terme d'acoplament entre el spin i el camp coulombià: $\frac{d}{dx^0}\left\{\sum_{B\neq A} \varepsilon^{ilk} S^k_A \frac{q_A q_B}{m_A c^2}\left(\partial_{\underset{A}{l}} \frac{1}{z_{AB}}\right)\right\}$

5.2) Lagrangià aproximat per al moviment de translació.-

Al contrari, si prenem la condició:

$$M^i_A = \frac{1}{2}\, \varepsilon^{ijk} S^j_A v^k_A + O(4) \tag{147.a}$$

i, d'acord amb (143.b):

$$\mathcal{E}^i_A = \frac{1}{2}\,\frac{q_A}{m_A}\, \varepsilon^{ijk} S^j_A v^k_A + O(4) \tag{147.b}$$

tindrem que les equacions (146) es deriven del lagrangià aproximat:

$$L = L_{BZ} + \sum_{B\neq A} \frac{G}{2c^2}\cdot \varepsilon^{ilk}\left[\left(2m_B S_A^k + \frac{3}{2} m_A S_B^k\right) v_B^i - \left(2m_A S_B^k + \frac{3}{2} m_B S_A^k\right) v_A^i\right]\cdot$$

$$\cdot\left(\underset{A}{\partial_l}\frac{1}{z_{AB}}\right) + \frac{1}{4c^2}\sum_{B\neq A} \varepsilon^{ilk}\left(\underset{A}{\partial_l}\frac{1}{z_{AB}}\right)\cdot\left(\mu_A^k q_B + \mu_B^k q_A\right)\cdot\left(v_A^i - v_B^i\right) +$$

$$+ \frac{1}{4c^2}\sum_{B\neq A} \varepsilon^{ilk}\cdot q_A q_B\cdot\left(\underset{A}{\partial_l}\frac{1}{z_{AB}}\right)\cdot\left(\frac{v_B^i S_B^k}{m_B} - \frac{v_A^i S_A^k}{m_A}\right) +$$

$$+ \sum_{B\neq A}\left(-\frac{G}{2c^2} S_A^l S_B^t - \frac{1}{8c^2}\mu_A^l \mu_B^t\right)\cdot\left(\underset{A}{\partial_l}\underset{A}{\partial_t}\frac{1}{z_{AB}}\right) + O(6) \qquad (148)$$

on hem utilitzat:

$$\dot{M}_A^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} S_A^j \cdot \sum_{B\neq A} \frac{G m_B m_A - q_B q_A}{c^2 m_A}\cdot\left(\underset{A}{\partial_k}\frac{1}{z_{AB}}\right) + O(5) \qquad (147.c)$$

que s'obté de (147.a) utilitzant l'aproximació newtoniana de (144).

5.3) Comparació amb altres lagrangians.-

Aquest apartat el dediquem a comparar alguns dels cassos particulars del lagrangià (148) amb altres lagrangians ja coneguts.

1er cas: Cossos no carregats: $q_A = 0 \quad ; \quad \varepsilon_A^\lambda = \mu_A^\lambda = 0 \quad , \quad A = 1,\dots,N$

De (148) tindrem:

$$L = L_{EIH} + \frac{G}{2c^2}\sum_{B\neq A} \varepsilon^{ilk}\left(\underset{A}{\partial_l}\frac{1}{z_{AB}}\right)\cdot\left[\left(2m_B S_A^k + \frac{3}{2} m_A S_B^k\right) v_B^i -\right.$$

$$\left. - \left(2m_A S_B^k + \frac{3}{2} m_B S_A^k\right) v_A^i\right] - \frac{G}{2c^2}\sum_{B\neq A} S_A^l S_B^t\cdot\left(\underset{A}{\partial_l}\underset{A}{\partial_t}\frac{1}{z_{AB}}\right) + O(6) \qquad (149)$$

(L_{EIH} és el lagrangià de Einstein, Infeld & Hoffmann) que coincideix amb l'aproximació dipolar del lagrangià de Fock — ref. [6], sec. (78) — quan en aquest escrivim S_A^k en lloc de $-\omega_{A\,si}\, I_{A\,sl}\, \varepsilon^{ilr}$.

En aquest cas també, quan fem $N=2$ i treballem al sistema de referència per al qual: $\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_1} + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_2} = 0$, obtenim l'aproximació dipolar del lagrangià de Barker & O'Conell [16] i, obviament, també el de Cho & Hari Dass [17].

2n. cas: Com hem dit més amunt, a l'aproximació monopolar el legrangià (148) es redueix al de Bażański [26], derivat també recentment per Barker & O'Conell [27] per un mètode de Teoria Quàntica de Camps.

3er cas: Si menyspreem la interacció gravitatòria — és a dir, en el límit $G \to 0$ — tindrem de (148):

$$L = L_{DW} + \frac{1}{4c^2}\cdot \sum_{B\neq A} \varepsilon^{ilk}\left(\partial_{A l}\frac{1}{z_{AB}}\right)\cdot\Big[\Big(q_B\mu_A^k - \frac{q_B q_A}{m_A} S_A^k + q_A\mu_B^k\Big) v_A^i -$$

$$-\Big(q_B\mu_A^k - \frac{q_B q_A}{m_B} S_B^k + q_A\mu_B^k\Big)\cdot v_B^i\Big] - \frac{1}{8c^2}\sum \mu_A^l \mu_B^t \left(\partial_{A l}\partial_{A t}\frac{1}{z_{AB}}\right) + O(6) \qquad (150)$$

on L_{DW} és el lagrangià de Darwin.

En el cas $N=2$ i prenent: $\mu_B^\lambda = g_B \frac{q_B}{m_B} S_B^\lambda$, on g_B és la raó giromagnètica del cos B , (150) s'escriurà:

$$L = \frac{1}{2}(m_1\vec{v}_1^2 + m_2\vec{v}_2^2) + \frac{1}{8}(m_1(\vec{v}_1^2)^2 + m_2(\vec{v}_2^2)^2) - \frac{1}{c^2}\frac{q_1 q_2}{x} +$$

$$+\frac{1}{2c^2}\frac{q_1 q_2}{x}\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 + \frac{1}{2c^2}\frac{q_1 q_2}{x^3}(\vec{v}_1\cdot\vec{x})(\vec{v}_2\cdot\vec{x}) +$$

$$+ \frac{q_1 q_2}{2c^2 x^3} \cdot \Big[(g_2-1) \cdot \frac{1}{m_2} \vec{v}_2 \cdot (\vec{x} \wedge \vec{S}_2) - (g_1-1) \cdot \frac{1}{m_1} \vec{v}_1 \cdot (\vec{x} \wedge \vec{S}_1) - \frac{g_2}{m_2} \vec{v}_1 \cdot (\vec{x} \wedge \vec{S}_2) +$$

$$+ \frac{g_1}{m_1} \vec{v}_1 \cdot (\vec{x} \wedge \vec{S}_2) \Big] + \frac{g_1 g_2 q_1 q_2}{4c^2 m_1 m_2 x^3} \cdot \Big[\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 - \frac{3}{x^2} (\vec{S}_1 \cdot \vec{x})(\vec{S}_2 \cdot \vec{x}) \Big] + O(6) \qquad (151)$$

que dóna una versió clàssica del lagrangià de Breit-Darwin — veure ref. 28 , eq.(83.17) — quan prenem $g_A = 2$, $A=1,2$. (com recordarem, aquest és el cas de l'electró).

5.4) Moviment de rotació.-

El moviment de rotació de cada cos vindrà descrit per l'equació d'evolució del seu spin. Aquesta l'obtindrem substituint els potencials aproximats (140) i (141) a l'equació (88).

Si desenrotllem (88) en sèrie de potències d'1/c , utilitzant la primera aproximació de (87), obtenim com a primer ordre no nul:

$$\frac{\delta S^\lambda}{\delta \lambda} = O\binom{3}{4}$$

$$\frac{\delta S^\lambda}{\delta \lambda} = \frac{1}{c^2} \eta^{\lambda\nu\alpha\beta} \cdot F_{\nu\sigma} \cdot u^\sigma u_\beta \left(\varepsilon_\alpha - \frac{q}{m} M_\alpha \right) -$$

$$- S^\nu \xi_\nu \cdot u^\lambda + \frac{1}{2c^2} F^\nu{}_\rho \cdot \mu^\rho \cdot (\eta^\lambda_\nu - u^\lambda u_\nu) + O\binom{5}{6} \qquad (152)$$

on el 3 i el 5 corresponen a $\lambda=0$, i el 4 i el 6, a $\lambda=1,2,3$.

Per tal de definir el trivector spin, considerarem la tètrada de referència $\{e^{\mu}_{\hat\alpha}\}_{\hat\alpha=0,1,2,3}$ que instantàniament es trasllada amb el cos i que no gira respecte del sistema de referència $\{x^{\mu}\}$ — veure MTW [29], apartat (40.7).

Sigui $\{e^{\mu}_{(\alpha)}\}$ la tètrada de vectors tangents a les línies coordenades en un punt qualsevol de la trajectòria. A l'aproximació 1-PN aquesta és una tètrada de vectors ortogonals. Sigui $\{e^{\mu}_{\tilde\alpha}\}$ la tètrada ortonormal que resulta de normalitzar els $e^{\mu}_{(\alpha)}$

La tètrada $\{e^{\mu}_{\hat\alpha}\}$ que es trasllada instantàniament amb el cos i que no gira respecte del sistema $\{x^{\mu}\}$ es construeix aplicant a la $\{e^{\mu}_{\tilde\alpha}\}$ una transformació de Lorentz pura: $e^{\mu}_{\hat\alpha} = \Lambda^{\tilde\beta}{}_{\hat\alpha} \cdot e^{\mu}_{\tilde\beta}$ tal que: $e^{\mu}_{\hat 0} = u^{\mu}$

Aquesta tètrada és, segons MTW [29], eq.(40.31):

$$e^{\mu}_{\hat 0} = u^{\mu}$$

$$e^{0}_{\hat j} = -v^{j} + O(3) \quad ; \quad e^{k}_{\hat j} = \left(1 - \tfrac{1}{4}\hat\gamma^{00}\right)\delta^{k}_{j} + \tfrac{1}{2} v^{k} v^{j} + O(4) \tag{153}$$

En aquesta base les components del quadrivector spin S^{μ} són:

$$S^{\hat\alpha} = \eta^{\hat\alpha\hat\beta} \cdot e^{\mu}_{\hat\beta} \cdot S_{\mu}$$

$$S^{\hat 0} = 0 \quad ; \quad S^{\hat j} = \left(1 + \tfrac{1}{4}\hat\gamma^{00}\right) S^{j} - \tfrac{1}{2} S^{k} v^{k} v^{j} + O(5) \tag{154}$$

El trivector spin, segons el sistema de referència $\{x^{\mu}\}$ queda definit per les tres components d'espai $S^{\hat j}$ en aquesta tètrada de referència.

Derivant a (154), tenint en compte (152) amb la condició (143) més les expressions (2) i (113), obtenim:

$$\frac{dS^{\hat j}}{ds} = \left\{ \tfrac{1}{2}\left(\partial_j \hat\gamma^{i0} - \partial_i \hat\gamma^{j0}\right) - \tfrac{3}{8}\left(v^{i}\partial_j \hat\gamma^{00} - v^{j}\partial_i \hat\gamma^{00}\right) + \frac{q}{2mc^2}\left(v^{j}\partial_i A_0 - v^{i}\partial_j A_0\right) \right\} S^{\hat j} +$$

$$+ \frac{1}{2c^2}\left\{ \left(\partial_j A_i - \partial_i A_j\right) + \left(v^{i}\partial_j A_0 - v^{j}\partial_i A_0\right) \right\} \mu^{\hat j} + O(6) \tag{155}$$

i substituint els potencials aproximats (140) i (141), tenim:

$$\frac{d\vec{S}_A}{ds_A} = \vec{\Omega}_{\circ A} \wedge \vec{S}_A + \vec{B}_A \wedge \vec{\mu}_A + O(6) \tag{156.a}$$

$$\vec{\Omega}_{\circ A} = \sum_{B \neq A} \left\{ \frac{1}{z_{AB}^3} \left[\frac{Gm_B}{c^2} \vec{z}_{AB} \wedge \left(\frac{3}{2}\vec{v}_A - 2\vec{v}_B \right) + \frac{q_A q_B}{2m_A c^2} \vec{z}_{AB} \wedge \vec{v}_A - \frac{G}{c^2} \vec{S}_B \right] + \frac{3G(\vec{z}_{AB} \cdot \vec{S}_B)}{c^2 z_{AB}^5} \vec{z}_{AB} \right\} \tag{156.b}$$

$$\vec{B}_A = \sum_{B \neq A} \left\{ \frac{1}{z_{AB}^3} \left[\frac{q_B}{2c^2} \vec{z}_{AB} \wedge (\vec{v}_B - \vec{v}_A) + \frac{1}{4c^2} \vec{\mu}_B \right] - \frac{3(\vec{z}_{AB} \cdot \vec{\mu}_B)}{4c^2 z_{AB}^5} \vec{z}_{AB} \right\} \tag{156.c}$$

En el cas particular que els quadrivectors moment dipolar magnètic i spin siguin paral.lels: $\mu_A^\nu = \frac{g_A q_A}{m_A} S_A^\nu$ — i per tant, també: $\mu_A^{\hat{j}} = \frac{g_A q_A}{m_A} S_A^{\hat{j}}$ — tenim que els trivector spin té un moviment de precessió respecte de la tètrada $\{e_{\hat{\alpha}}^\mu\}$ amb velocitat angular:

$$\vec{\Omega}_A = \vec{\Omega}_{\circ A} + \frac{g_A q_A}{m_A} . \vec{B}_A + O(6) \tag{157}$$

Cal remarcar que en el cas de cossos no carregats aquesta velocitat angular de precessió del spin és:

$$\vec{\Omega}_A(\text{grav}) = \sum_{B \neq A} \left\{ \frac{1}{z_{AB}^3} \left[\frac{Gm_B}{c^2} \left(2\vec{v}_B - \frac{3}{2}\vec{v}_A \right) \wedge \vec{z}_{AB} - \frac{G}{c^2} \vec{S}_B \right] + \frac{3G(\vec{z}_{AB} \cdot \vec{S}_B)}{c^2 z_{AB}^5} \vec{z}_{AB} \right\}$$

Resultat que coincideix amb el que obtenen Börner, Ehlers & Rudolph [30] partint d'una suposició diferent i també, amb el que obtenen Barker & O'Conell [16] i Cho & Hari Dass [17] per altres mètodes, com ja hem esmentat a la introducció.

5.5) Comentari: marc de validesa de l'aproximació.-

L'aproximació de "petites velocitats", que hem utilitzat — és a dir: desenrotllaments en sèrie de potències d'1/c, conservant únicament alguns dels ordres inferiors — és vàlida únicament quan es satisfan les tres condicions següents:

i) Les velocitats dels cossos són petites comparades amb la de la llum: $|\vec{v}_A| \ll 1$; $\vec{v}_A = \frac{d\vec{z}_A}{dx^0}$; $A = 1 \ldots N$

ii) Els cossos estan prou allunyats els uns dels altres com per que el camp sigui feble: $\frac{G m_A m_B}{c^2 |\vec{z}_A - \vec{z}_B|} \ll 1$, $\frac{q_A q_B}{c^2 |\vec{z}_A - \vec{z}_B|} \ll 1$

iii) Estan, però, suficientment a prop com per que els efectes del retard en la propagació de la interacció siguin descrits amb una aproximació suficient per la primera correcció introduïda en resoldre les equacions d'ona (122) i (123).

Això és així quan la longitud de les ones emeses és gran comparada amb les dimensions del sistema.

Aquesta condició limita el camp d'aplicació dels resultats obtinguts aquí al cas de sistemes lligats. Si R és una distància típica entre dos cossos del sistema i ω la velocitat angular de revolució d'un respecte de l'altre, aquesta condició s'escriu:

$R \ll \frac{1}{\omega}$, o bé: $R\omega \ll 1$, que equival a: $|\vec{v}| \ll 1$

Pel que fa referència a les dimensions dels cossos cal dir que aquests han d'ésser prou petits: $\frac{D}{R} \ll 1$, com per que les correccions degudes als termes d'ordres quadrupolar i superiors siguin menyspreables. Però han d'ésser suficientment grans com per que el camp en el seu interior sigui feble. Així, si r_0 és el radi gravitatori d'un cos del sistema i D és la cota definida a (2.2-A,iv), haurà d'ésser: $\frac{r_0}{D} \ll 1$

SEGONA PART

MECANICA RELATIVISTA

PREDICTIVA PER A

COSSOS EXTENSOS

6.- INTRODUCCIO

Ja és ben conegut i ha estat establert per diversos autors(*) que, des del punt de vista de la Teoria Clàssica de Camps, el moviment d'un sistema d'N cossos extensos sota llur mútua interacció pot ésser descrit mitjançant N línies d'univers $\{L_A\}_{A=1\ldots N}$ a la varietat espai-temps i N famílies de quantitats covariants definides sobre la L_A respectiva, les quals corresponen a: l'escalar massa pròpia, m_A ; el tensor antisimètric $S_A^{\lambda\nu}$, moment angular intrínsic — abreujadament, spin — respecte de la línia L_A i els moments multipolars del "corrent" responsable de la interacció, $\{q_A^{\lambda_1\ldots\lambda_r}\}$

La primera part d'aquest treball constitueix un exemple del que hem enunciat aquí dalt. A la primera part, els "corrents" responsables de la interacció eren $T^{\mu\nu}$ pel que fa a la interacció gravitatòria y J^μ per l'electromagnètica. Com que hem estat treballant a l'aproximació dipolar, els únics moments multipolars que han aparegut han estat ε^λ i μ^λ .

Partint de la llei local de conservació del tensor d'energia-impuls

---

(*) Hom pot trobar una documentació força completa sobre el tema a la ref. [21] pel que fa a la Teoria Especial de la Relativitat. Darrerament W.G.Dixon [10], [11], [12], [13] ha demostrat la validesa d'uns resultats similars en el marc de la Teoria General de la Relativitat.

($\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, a la Teoria Especial de la Relativitat i $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, a la Teoria General) hom dedueix les lleis del moviment del sistema, les quals tenen la forma:

$$\frac{d}{d\tau_A}\left\{ m_A u_A^\nu + \varphi_A^\nu \right\} = F_A^\nu \tag{158.a}$$

$$\frac{d S_A^{\lambda\nu}}{d\tau_A} = F_A^{[\lambda\nu]} + 2\,\varphi_A^{[\lambda} u_A^{\nu]} \tag{158.b}$$

on u_A^ν és la quadrivelocitat associada a L

El quadrivector φ_A^ν compleix: $\varphi_A^\nu u_{A\nu} = 0$ (159)

i pot ésser aillat contraient (158.b) amb $u_{A\nu}$.

Per a cada cos els termes F_A^ν i $F_A^{[\lambda\nu]}$ que enomenarem, respectivament, força total i moment total sobre A , depenen de la posició i velocitat del propi cos, del valor del "camp" responsable de la interacció i les seves derivades allà on el cos A es troba, i dels moments multipolars del "corrent" associats a A .

Alhora, les funcions "camp" dependran de les posicions i velocitats de les "fonts" — és a dir: de la resta de cossos — així com dels moments multipolars del "corrent" de les esmentades "fonts".

Els moments multipolars del "corrent" associats a A són una família de funcions covariants $\{q_A^{\lambda_1 \ldots \lambda_r}(\tau_A)\}_{r \in I}$ definides sobre L_A les quals es determinen arbitràriament(*). Usualment es trien per a cada cas concret en base a hipòtesis fetes sobre la constitució interna del cos, raons de simetria, etz.

El sistema (158) presenta, no obstant dues dificultats fonamentals. La primera d'elles és la indeterminació que, com recordarem, ja hem discutit a la primera part d'aquest treball. Com hem dit allà, es resol imposant unes condicions subsidiàries del tipus "centre-de-massa", "centre-de-moviment", etz.

La segona dificultat consisteix en que l'especificació del segon membre de les equacions (158) implica integrar prèviament les equacions del camp. Degut, però, a la "propagació no instantània" de la interacció, les equacions (158) no seran equacions diferencials ordinàries, i un nombre finit de condicions inicials no serà suficient per a determinar-ne una única solució.

Aquesta dificultat no es pot obviar treballant únicament en el marc d'una teoria de camps.

(*) En el cas que el "corrent" hagi de satisfer una llei de conservació local — per exemple: $\partial_\mu J^\mu = 0$, en el cas de l'electrodinàmica — podem desenrotllar-la multipolarment al voltant de L_A i obtenim unes relacions algebràiques que ens permeten escriure tots els moments multipolars en funció d'uns quants d'ells (que anomenem moments multipolars reduits), les seves derivades i el vector velocitat.

En el cas de partícules puntuals — és a dir: aproximació monopolar — la Mecànica Relativista Predictiva (M.R.P.) proporciona un marc en el qual aquesta dificultat pot ésser evitada.

La M.R.P. s'ocupa de l'estudi de sistemes dinàmics d'N cossos puntuals a partir de les hipòtesis següents:

<u>MRP 1 .-</u> <u>Predictivitat newtoniana:</u> Per a cada observador, les equacions del moviment són equacions diferencials ordinàries de segon ordre. En conseqüència, un nombre finit de condicions inicials (posicions i velocitats en un instant donat) determinen unívocament les trajectòries dels N cossos del sistema.

<u>MRP 2 .-</u> <u>Invariància sota canvis de coordenades:</u> Si un observador $\mathcal{S}$ obté una família d'N trajectòries partint d'unes determinades condicions inicials, aleshores un altre observador $\mathcal{S}'$, partint de condicions inicials preses sobre l'anterior solució, obtindrà la mateixa família de trajectòries, llevat d'un canvi de coordenades.

Ambdues hipòtesis condueixen a unes restriccions sobre les quadriacceleracions de les partícules — les anomenarem "Condicions M.R.P." — les quals, conjuntament amb l'aproximació monopolar de (158.a), ens menen a un sistema d'equacions diferencials ordinàries que, a un conjunt finit de condicions inicials (posicions i velocitats) li associa una única femília de trajectòries solució del problema.(*)

El que ens proposem aquí és fer una extensió de la M.R.P. al problema d'N cossos extensos en aproximació multipolar.(**) En aquest sentit és especialment interessant el treball de Ph. Droz-Vincent [34] referent a sistemes relativistes de partícules puntuals en interacció, que ens permetrà de fer directament l'esmentada generalització, una vegada haurem definit el marc matemàtic adient.

(*) El que hem resumit aquí sobre la M.R.P. es pot trobar amb tots els detalls a les referències: [31], [32], [33], [34] i [35], que són algunes de les clàssiques en aquest camp.

(**) L'expressió: aproximació multipolar, s'utilitza aquí amb el mateix sentit que a l'apartat (3.3), i vol dir que les famílies de moments multipolars $\{q_A^{\lambda_1 \dots \lambda_r}\}_{r \in I}$ són finites.

7.- VARIETAT DELS ESTATS DINAMICS D'UN COS (Aproximació multipolar)

Com ja hem dit al capítol anterior, l'estat dinàmic d'un cos extens en aproximació multipolar ve caracteritzat per: la seva posició, la seva velocitat, més un conjunt de quantitats covariants. Es a dir, per un punt de la varietat espai-temps més un conjunt de vectors i tensors tangents a aquesta varitat en aquest punt.

En aquesta secció pretenem dotar d'estructura de varietat diferenciable el conjunt d'estats dinàmics d'un cos en aproximació multipolar. Dedicarem tot el primer apartat a construir l'aparell matemàtic que ens serà necessari a tal efecte.

7.1) Capa tensorial d'ordre $(r_1, \ldots, r_m)$ sobre una varietat diferenciable.-

Sigui $\mathcal{M}$ una varietat diferenciable de classe C^K i dimensió s, i sigui: $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U},\varphi)\}$ el seu atlas.

Cada $(\mathcal{U},\varphi) \in \mathcal{A}$ és una carta local diferenciable(*).

Per a cada $z \in \mathcal{M}$, $\mathcal{M}_z$ dessignarà l'espai de vectors tangents a la varietat $\mathcal{M}$ al punt z. $\mathcal{M}_z$ és un espai vectorial de dimensió s sobre $\mathbb{R}$.

(*) La notació i nomenclatura d'aquesta secció és la mateixa que s'utilitza a la referència [36], secció (1)

$T^{(r)}(\mathcal{M}_z)$ dessignerà l'espai de tensors r vegades contravariants sobre $\mathcal{M}_z$, $r \in \mathbb{N}$.

Donada una m-pla: $(r_1,\dots,r_m) \in \mathbb{N}^m$, considerem el conjunt:

$$H(\mathcal{M}_z; r_1,\dots,r_m) = T^{(r_1)}(\mathcal{M}_z) \times \dots \times T^{(r_m)}(\mathcal{M}_z) \quad , \quad r_1,\dots,r_m \in \mathbb{N}$$

els elements del qual seran les m-ples:

$$D_z \in H(\mathcal{M}_z; r_1,\dots,r_m) \Rightarrow D_z = \left(D_z^{(r_1)},\dots,D_z^{(r_m)}\right), \quad \text{on} \quad D_z^{(r_i)} \in T^{(r_i)}(\mathcal{M}_z)$$

Es trivial de demostrar que les operacions:

- suma: $D_z + \hat{D}_z = \left(D_z^{(r_1)} + \hat{D}_z^{(r_1)}, \dots, D_z^{(r_m)} + \hat{D}_z^{(r_m)}\right)$
- producte per escalars: $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda D_z = \left(\lambda D_z^{(r_1)},\dots,\lambda D_z^{(r_m)}\right)$

defineixen una estructura d'espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ a $H(\mathcal{M}_z; r_1,\dots,r_m)$, de dimensió $\tilde{n} = \sum_{i=1}^{m} s^{r_i}$, que anomenem suma directa dels espais: $T^{(r_1)}(\mathcal{M}_z)$, ... , $T^{(r_m)}(\mathcal{M}_z)$.

$$H(\mathcal{M}_z; r_1,\dots,r_m) = \bigoplus_{i=1}^{m} T^{(r_i)}(\mathcal{M}_z) \qquad (160)$$

7.1.1.- Definició: Anomenarem capa tensorial d'ordre $(r_1, \dots , r_m)$ sobre $\mathcal{M}$ a la terna $\left(T(\mathcal{M}; r_1,\dots,r_m); \pi, \mathcal{M}\right)$, on:

i) $T(\mathcal{M}; r_1,\dots,r_m) = \bigcup_{z \in \mathcal{M}} \{z\} \times H(\mathcal{M}_z; r_1,\dots,r_m)$

ii) $$\left.\begin{array}{rl} \pi: T(\mathcal{M}; r_1,\dots,r_m) & \longrightarrow \mathcal{M} \\ (z, D_z) & \longrightarrow z \end{array}\right\}$$

Es evident que π és exhaustiva.

L'estructura diferenciable de $\mathcal{M}$ ens permetrà de definir primer una topologia i després una estructura diferenciable sobre $T(\mathcal{M}; r_1, \ldots, r_m)$.

En aquest sentit ens serà útil el següent resultat d'algebra tensorial:

7.1.2.- Lema: Siguin E i F dos espais vectorials sobre $\mathbb{R}$, i $\psi \in \mathcal{L}(E, F)$ un isomorfisme. Siguin $\mathcal{T}(E)$ i $\mathcal{T}(F)$ les respectives àlgebres tensorials sobre E i F. Aleshores existeix un únic isomorfisme $\Psi \in \mathcal{L}(\mathcal{T}(E), \mathcal{T}(F))$ tal que:

i) $\forall a, b \in \mathcal{T}(E) \quad , \quad \Psi(a \otimes b) = \Psi(a) \otimes \Psi(b)$

ii) $\Psi_{|E} = \psi \quad \wedge \quad \Psi_{|\mathbb{R}} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$

iii) Ψ commmuta amb les contraccions.

Aquest isomorfisme Ψ l'anomenarem extensió de ψ a les àlgebres tensorials.

Demostració:

Sigui $\psi^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ l'aplicació dual de ψ. Com que ψ és un isomorfisme, ψ^* també ho serà i $\psi^{*-1} \in \mathcal{L}(E^*, F^*)$.

Sigui $\{e_i\}_{i \in I}$ una base de E i sigui $\{\omega^i\}_{i \in I}$ la base dual. Si $T^r_p(E)$ és l'espai de tensors r-contravariants i p-covariants sobre E, tindrà com una base la família:

$$\{ e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes \omega^{j_1} \otimes \ldots \otimes \omega^{j_p} \}_{i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_p \in I}$$

Aleshores qualsevol element $x \in T^r_p(E)$ es podrà expressar:

$$x = x^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_p} \, e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p}$$

(utilitzem el conveni d'Einstein per a la suma). Definim:

$$\Psi(x) = x^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_r} \, \psi(e_{i_1}) \otimes \dots \otimes \psi(e_{i_r}) \otimes \psi(\omega^{j_1}) \otimes \dots \otimes \psi(\omega^{j_p}) \qquad (161)$$

Amb aquesta definició es demostra trivialment que Ψ satisfà les condicions (i), (ii), (iii).

Per a demostrar la unicitat és suficient adonar-se que, com que Ψ ha d'ésser un isomorfisme de les àlgebres tensorials $\mathcal{T}(E)$ i $\mathcal{T}(F)$, les quals són generades — via producte tensorial i combinació linial — per E, $\mathbb{R}$, E^* i F, $\mathbb{R}$, F^*, respectivament, aleshores Ψ queda unívocament determinat per $\Psi_{|E}$, $\Psi_{|\mathbb{R}}$ i $\Psi_{|E^*}$.

La condició (iii) implica que $\Psi_{|E^*} = \left(\Psi^{+}_{|E}\right)^{-1}$. Per tant, Ψ queda unívocament determinat per $\Psi_{|E}$, de la qual cosa es deriva la unicitat.

Trivialment es demostra a partir de (161) el següent:

7.1.3.- <u>Corol.lari:</u> L'isomorfisme Ψ conserva l'ordre dels tensors així com les simetries.

Considerem ara un $(z, D_z) \in T(\mathcal{M}; r_1, \dots, r_m)$, aleshores $\pi(z, D_z) = z \in \mathcal{M}$ i, per tant, existirà una carta local $(\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{Q}$ tal que: $z \in \mathcal{U}$.

L'aplicació $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^s$ serà injectiva i diferenciable de classe $C^k(\mathcal{U})$.

Sigui $\varphi_z^T : \mathcal{M}_z \longrightarrow (\mathbb{R}^s)_{\varphi(z)} \simeq \mathbb{R}^s$ l'aplicació jacobiana de φ al punt $z \in \mathcal{U}$ — veure ref.[36], secció (1.4) . En aquest cas, φ_z^T serà un isomorfisme dels espais vectorials $\mathcal{M}_z$ i $\mathbb{R}^s$, per tant, estem en condicions d'aplicar el lema (7.1.2):

Existirà un únic isomorfisme Φ_z de les àlgebres tensorials $\mathfrak{T}(\mathcal{M}_z)$ i $\mathfrak{T}(\mathbb{R}^s)$ que conserva l'ordre i les simetries, tal que: $\Phi_{z|\mathcal{M}_z} = \varphi_z^T$ i $\Phi_{z|\mathbb{R}} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$.

Atès que $H(\mathcal{M}_z; r_1, \dots, r_m)$ és suma directa de subespais d'ordre constant de $\mathfrak{T}(\mathcal{M}_z)$, Φ_z determinarà un isomorfisme dels espais $H(\mathcal{M}_z; r_1, \dots, r_m)$ i $H(\mathbb{R}^s; r_1, \dots r_m) \simeq \mathbb{R}^{\tilde{n}}$.

Amb tot això podem definir:

$$\left.\begin{array}{rcl} \Phi : \pi^{-1}(\mathcal{U}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{\tilde{n}} \\ (x, D_x) & \longrightarrow & (\varphi(x),\ \Phi_x(D_x)) \end{array}\right\} \tag{162}$$

que serà injectiva pel fet d'ésser-ho φ i Φ_x .

Les aplicacions Φ — una per a cada carta local — ens permeten de definir la següent topologia sobre $T(\mathcal{M}; r_1, \dots, r_m)$:

7.1.4.- <u>Definició:</u> Els oberts de $T(\mathcal{M}; r_1, \dots, r_m)$ seran els conjunts de la forma:

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} \Phi_i^{-1}(A_i) \tag{163}$$

on A_i són oberts de $\mathbb{R}^{s+\tilde{n}}$ i les Φ_i són aplicacions injectives definides a partir de les cartes locals de $\mathcal{M}$ pel mateix procediment que (162).

7.2) Coordenades.-

Donada una carta local $(\mathcal{U}, \varphi)$ sobre $\mathcal{M}$, siguin $x^1, \dots, x^s$ les components de φ. Aleshores, $\{\partial_i(z)\}_{i=1\dots s}$ on $\partial_i(z) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{(z)}$ serà una base de l'espai vectorial $\mathcal{M}_z$ i $\{\partial_{i_1}(z) \otimes \dots \otimes \partial_{i_r}(z)\}$ ho serà de $T^{(r)}(\mathcal{M}_z)$.

En aquesta base qualsevol tensor $D_z^{(r)} \in T^{(r)}(\mathcal{M}_z)$ s'escriurà:

$$D_z^{(r)} = D_z^{i_1 \dots i_r} \partial_{i_1}(z) \otimes \dots \otimes \partial_{i_r}(z) \tag{164}$$

i, per tant, a partir d'una carta local $(\mathcal{U}, \varphi)$ podem definir l'aplicació:

$$\left.\begin{array}{rcl} \hat{\underline{\Phi}}: \pi^{-1}(\mathcal{U}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{s+\tilde{n}} \\ (z, D_z) & \longrightarrow & (\varphi(z), D_z^{i_1 \dots i_{r_1}}, \dots, D_z^{i_1 \dots i_{r_m}}) \end{array}\right\} \tag{165}$$

7.2.1.- Proposició: $\hat{\mathcal{Q}} = \{(\pi^{-1}(\mathcal{U}), \hat{\underline{\Phi}}) / (\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{Q}\}$ indueix una estructura de varietat diferenciable C^{K-1} sobre $T(\mathcal{M}; r_1, \dots, r_m)$

Demostració:

Tota vegada que els suports $\mathcal{U}$ de les cartes locals de $\mathcal{M}$ recobreixen $\mathcal{M}$ i que π és exhaustiva, resulta evident que els $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ també recobriran $T(\mathcal{M}; r_1, \dots, r_m)$.

Si $(\pi^{-1}(\mathcal{U}),\hat{\Phi}), (\pi^{-1}(\mathcal{V}),\hat{\Psi}) \in \hat{\mathcal{A}}$ i $\pi^{-1}(\mathcal{U}) \cap \pi^{-1}(\mathcal{V}) \neq \phi$ aleshores $\hat{\Phi}\circ\hat{\Psi}^{-1}$ és una aplicació diferenciable de classe C^{K-1} sobre $\hat{\Psi}(\pi^{-1}(\mathcal{U})\cap\pi^{-1}(\mathcal{V}))$. En efecte: siguin $(\mathcal{U},\varphi), (\mathcal{V},\psi) \in \mathcal{A}$ les cartes locals a partir de les quals hem construït $(\pi^{-1}(\mathcal{U}),\hat{\Phi})$, $(\pi^{-1}(\mathcal{V}),\hat{\Psi})$, i siguin $x^1,\dots,x^s$ i $\tilde{x}^1,\dots,\tilde{x}^s$ les components de φ i ψ, respectivament.

Considerem l'aplicació:

$$\left.\begin{aligned} \hat{\Phi}\circ\hat{\Psi}^{-1} :\ & \hat{\Psi}(\pi^{-1}(\mathcal{U})\cap\pi^{-1}(\mathcal{V})) \longrightarrow \hat{\Phi}(\pi^{-1}(\mathcal{U})\cap\pi^{-1}(\mathcal{V})) \\ & (\tilde{x}^i, \tilde{D}_z^{i_1\dots i_{r_1}},\dots,\tilde{D}_z^{i_1\dots i_{r_m}}) \longrightarrow (x^j, D_z^{j_1\dots j_{r_1}},\dots,D_z^{j_1\dots j_{r_m}}) \end{aligned}\right\}$$

on els $D_z^{i_1\dots i_r}$ i els $\tilde{D}_z^{j_1\dots j_r}$ estaran relacionats per:

$$D_z^{i_1\dots i_r}\cdot\partial_{i_1}(z)\otimes\dots\otimes\partial_{i_r}(z) = \tilde{D}_z^{j_1\dots j_r}\cdot\tilde{\partial}_{j_1}(z)\otimes\dots\otimes\tilde{\partial}_{j_r}(z) \tag{166}$$

i per tant:

$$D_z^{j_1\dots j_r} = \tilde{D}_z^{i_1\dots i_r}\cdot\left(\frac{\partial x^{j_1}}{\partial\tilde{x}^{i_1}}\right)_{(\tilde{x}^1\dots\tilde{x}^s)}\cdots\left(\frac{\partial x^{j_r}}{\partial\tilde{x}^{i_r}}\right)_{(\tilde{x}^1,\dots\tilde{x}^s)} \tag{167}$$

Tota vegada que $\mathcal{M}$ és de classe C^K, els canvis de coordenades a $\mathcal{M}$: $x^i = x^i(\tilde{x}^1,\dots,\tilde{x}^s)$ tenen derivades contínues fins l'ordre K. Per tant, la matriu jacobiana $\left(\frac{\partial x^i}{\partial\tilde{x}^j}\right)(\tilde{x}^1,\dots,\tilde{x}^s)$ serà derivable amb continuïtat $K-1$ vegades i, per tant, $\hat{\Phi}\circ\hat{\Psi}^{-1}$ també ho serà $K-1$ vegades.

7.3) <u>Estats dinàmics d'un cos (aproximació 2^n-polar).-</u>

Com ja hem dit al capítol anterior, l'evolució dinàmica d'un cos en aproximació multipolar ve descrita per:

i) una línia temporal: $L \equiv z^\rho(s)$ a la varietat espai-temps M^4.

ii) la seva massa pròpia m i el tensor de spin $S^{\lambda\nu}$ i

iii) els moments multipolars de ña distribució de "corrent":

$\{q^{\lambda_1 \ldots \lambda_{r_1}}, \ldots, q^{\lambda_1 \ldots \lambda_{r_m}}\}$, el nombre dels quals variarà segons quin sigui l'ordre d'aproximació multipolar al que treballem.

Per a representar aquesta evolució dinàmica utilitzarem la capa tensorial d'ordre $(0, 1, 2, r_1, \ldots, r_m)$ sobre M^4 : $T(M^4; 0,1,2,r_1,\ldots,r_m)$ d'acord amb la següent:

7.3.1.- <u>Definició:</u> L'estat dinàmic d'un cos (aproximació multipolar) en un instant determinat és un punt de $T(M^4; 0,1,2,r_1,\ldots r_m)$.

Per a un referencial qualsevol vindrà donat per les quantitats:

$$\left(z^\rho, m, u^\rho, S^{\lambda\nu}, q^{\lambda_1 \ldots \lambda_{r_1}}, \ldots, q^{\lambda_1 \ldots \lambda_{r_m}}\right)$$

Més encara, tota vegada que els canvis de coordenades conserven les simetries a la capa tensorial — corol.lari (7.1.3) — tindrem que, en un referencial qualsevol, s'hauran de satisfer les condicions següents:

$S^{\nu\lambda} = - S^{\lambda\nu}$

$q^{\lambda_1 \ldots \lambda_{r_i}} \approx$ la simetria o relació d'ortogonalitat que li correspongui, cas de tenir-ne alguna, $i = 1, \ldots, m$

(en el cas que hem tractat a la primera part tenim, per exemple: $\mu^{\lambda\nu} = - \mu^{\nu\lambda}$

si utilitzem aquest tensor per a representar el "corrent" electromagnètic, o bé, si utilitzem els moments dipolars ε^λ i μ^λ , tindrem: $\varepsilon^\lambda u_\lambda = \mu^\lambda u_\lambda = 0$).

Per tant, el conjunt dels estats dinàmics possibles d'un cos en aproximació multipolar es redueix a una subvarietat $\mathcal{E}$ de $T(M^4; 0,1,2,r_1,\ldots,r_m)$

Tota vegada que les equacions de la subvarietat $\mathcal{E}$ no inclouen cap condició sobre χ^ρ , la restricció de π definida a (7.2.1-ii) a $\mathcal{E}$ seguirà essent exhaustiva:

$$\pi : \mathcal{E} \longrightarrow M^4 \qquad (168)$$

8.- GRUPS N-PARAMETRICS LOCALS DE TRANSLACIONS SOBRE UNA VARIETAT

En aquest capítol construim l'aparell matemàtic que ens serà necessari en els dos següents, en els quals estudiarem les "condicions M.R.P."

Per tal com no ens ha estat possible trobar un text que s'ocupés en algun punt dels grups locals N-paramètrics, la majoria dels resultats d'aquest capítol han estat obtinguts per generalització de resultats anàlegs vàlids per a grups uniparamètrics locals, els quals es poden trobar a la ref.[37], capítol V .

Cal remarcar, però, que algunes de les proposicions vàlides per a grups uniparamètriques locals no són generalitzables per a N paràmetres, degut a que, si bé els subconjunts conexos de $\mathbb{R}$ són simplement conexes, no així els subconjunts conexos de $\mathbb{R}^N$.

8.1.1.- **Definició:** Un grup local N-paramètric de translacions sobre $\mathcal{M}$ és una parella $(\mathcal{U}, \Phi)$ on:

- $\mathcal{U}$ és un entorn obert de $\{\vec{0}\}\times\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N\times\mathcal{M}$
- Φ és una aplicació diferenciable $\Phi: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}$, tal que:

i) $\forall y \in \mathcal{M}\,;\quad \mathcal{U}\cap \mathbb{R}^N\times\{y\}$ és conex.

ii) $\forall y \in \mathcal{M}\,;\quad \Phi(\vec{0}, y) = y$

iii) $(\vec{t}, y)\,,\ (\vec{t}', \Phi(\vec{t}, y))\,,\ (\vec{t}'+\vec{t}, y) \in \mathcal{U} \Rightarrow \Phi(\vec{t}', \Phi(\vec{t}, y)) = \Phi(\vec{t}+\vec{t}', y)$

Quan $\mathcal{U} = \mathbb{R}^N\times\mathcal{M}$ diem que $(\mathcal{U}, \Phi)$ és un grup global i, en tal cas, $(\mathcal{U}, \Phi)$ és una realització del grup de Lie $(\mathbb{R}^N, +)$.

8.1.2.- <u>Definició:</u> A cada grup N-paramètric local de translacions sobre $\mathcal{M}$ li podem associar N camps: $X_1, \ldots, X_N$ de vectors tangents a $\mathcal{M}$, segons la següent definició:

$$\forall y \in \mathcal{M}, \quad \forall f \in C^K(\mathcal{M}) \; ; \qquad (X_A f)_y = \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ \Phi)(h\hat{u}_A, y) - f(y)}{h}$$

on: $\hat{u}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$; $\hat{u}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$; . . . ; $\hat{u}_N = (0, 0, \ldots, 1)$

Els camps $X_1, \ldots, X_N$ els anomenem <u>generadors infinitesimals</u> del grup $(\mathcal{U}, \Phi)$.

Per la forma particular de la llei de composició (8.1.1-iii), el grup local $(\mathcal{U}, \Phi)$ és localment isomorf al grup de Lie $(\mathbb{R}^N, +)$. Per tant, els generadors infinitesimals satisfaran les mateixes regles de commutació que els del grup $(\mathbb{R}^N, +)$:

$$[X_A, X_B] = 0 \quad ; \qquad \forall A, B \in \{1, \ldots, N\} \tag{169}$$

La diferenciabilitat dels X_A es demostra fàcilment a partir de la diferenciabilitat de Φ . A més, si Φ és de classe $C^p(\mathcal{U})$ aleshores els X_A són de classe $C^{p-1}(\mathcal{M})$.

A la inversa, el següent resultat és també cert:

8.1.3.- <u>Teorema:</u> Siguin $X_1, \ldots, X_N$ camps de vectors tangents a $\mathcal{M}$ tals que: $[X_A, X_B] = 0$; $\forall A, B \in \{1, \ldots, N\}$

Aleshores existeix un grup N-paramètric local de translacions de $\mathcal{M}$: $(\mathcal{U}, \Phi)$ tal que té $X_1, \ldots, X_N$ per generadors infinitesimals.

Per a demostrar aquest teorema utilitzarem el següent:

8.1.4.- __Lema:__ (Teorema de Frobenius)

Sigui $Q \subset \mathbb{R}^{N+s}$ un obert, i siguin. $A_{ij} : Q \longrightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq N$, funcions reals diferenciables, $A_{ij} \in C^{l}(Q)$

Sigui $(t, b) = (t_1, \ldots, t_N ; b_1, \ldots, b_s) \in Q$

Aleshores, existeix un entorn V de $t \in \mathbb{R}^N$ i una única funció $f : V \to \mathbb{R}^s$ de classe $C^{(l+1)}(V)$ satisfent les tres condicions següents:

i) $f(t) = b$

ii) $\forall \tau \in V, \quad (\tau, f(\tau)) \in Q$

iii) $\forall \tau \in V, \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial \tau_j}\right)_{(\tau)} = A_{ij}(\tau, f(\tau))$

si, i tant sols si, $\forall (\tau, u) = (\tau^1, \ldots, \tau^N ; u^1, \ldots, u^s) \in Q$:

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial \tau^r} + \sum_{d=1}^{s} \frac{\partial A_{ij}}{\partial u^d} \cdot A_{dr} = \frac{\partial A_{ir}}{\partial \tau^j} + \sum_{d=1}^{s} \frac{\partial A_{ir}}{\partial u^d} \cdot A_{dj} \; ; \; r = 1, \ldots N \qquad (170)$$

No explicitarem la demostració d'aquest teorema, ja que es troba a qualsevol text de geometria diferencial — per exemple, ref. [36], sec. (9.1).

Donats els camps de vectors tangents a M : $X_1, \ldots, X_N$ i un punt $b \in M$, triem (U, φ) una carta local tal que: $b \in U$.

Siguin $(u^1, \ldots, u^s)$ les components de φ . $\forall z \in U$ podrem descomposar $X_A(z)$ segons:

$$X_A(z) = \sum_{i=1}^{s} \beta_A^i(\varphi(z)) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{(z)}$$

on les funcions $\beta_A^i : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ seran diferenciables perquè els camps X_A ho són.

Les funcions β_A^i, definides a $\varphi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^s$, les utilitzarem en un sentit més dilatat per a expressar:(*)

$$\left.\begin{array}{rl} \beta_A^i : \mathbb{R}^N \times \varphi(\mathcal{U}) & \longrightarrow \mathbb{R}^s \\ (\vec{t}, u) & \longrightarrow \beta_A^i(u) \end{array}\right\} \qquad (171)$$

Les relacions de commutació $[X_A, X_B] = 0$ s'escriuran:

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \beta_A^i}{\partial u^j} \cdot \beta_B^j - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \beta_B^i}{\partial u^j} \cdot \beta_A^j = 0 \quad ; \quad A, B \in \{1, \dots, N\}$$

D'altra banda, de (171) és evident que $\frac{\partial \beta_A^i}{\partial t^B} = 0$. Per tant, les funcions $\beta_A^i(t^1, \dots, t^N; u^1, \dots u^s)$ satisfan trivialment les relacions (170) i, en conseqüència, podem aplicar per a elles el lema de Frobenius (8.1.4):

$\forall (\vec{t}, a) \in \mathbb{R}^N \times \varphi(\mathcal{U})$, $\exists\, \varepsilon > 0$ i una funció diferenciable única:

$f : \mathbb{B}(\vec{t}; \varepsilon) \longrightarrow \varphi(\mathcal{U})$, tal que:

i) $f(\vec{t}) = a$

ii) $\forall \vec{\tau} \in \mathbb{B}(\vec{t}; \varepsilon)$, $\left(D_A (u^i \circ f)\right)(\vec{\tau}) = \beta_A^i\left(f(\vec{\tau})\right)$

on: $\mathbb{B}(\vec{t}; \varepsilon) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^N / \, |\vec{x} - \vec{t}| < \varepsilon\}$ i D_A significa: derivada parcial respecte de l'A-èsima variable.

Per tant, podem enunciar la següent:

8.1.5.- <u>Proposició:</u> Siguin $X_1, \dots, X_N$ camps de vectros tangents a $\mathcal{M}$ tals que: $[X_A, X_B] = 0$, $\forall A, B \in \{0, 1, \dots, N\}$. Aleshores:

(*) A partir d'ací, i per conveniències de notació, senyalarem amb una fletxa ($\rightarrow$) els elements de $\mathbb{R}^N$, no així els de $\mathbb{R}^s$.

$\forall \vec{t} \in \mathbb{R}^N$, $\forall z \in \mathcal{M}$ existeix un $\varepsilon > 0$ i una aplicació diferenciable única:

$\psi : \mathbb{B}(\vec{t};\varepsilon) \longrightarrow \mathcal{M}$, tal que:

i) $\psi(\vec{t}) = z$

ii) $\forall \vec{\tau} \in \mathbb{B}(\vec{t};\varepsilon)$, $g \in \mathcal{G}$

(172)

Les línies que precedeixen aquest enunciat demostren que donat $(\vec{t},z) \in \mathbb{R}^N \times \mathcal{M}$ i triant una carta local $(\mathcal{U},\varphi)$ podem construir $f : \mathbb{B}(\vec{t},\varepsilon) \longrightarrow \varphi(\mathcal{U})$, tal que satisfaci (171). Aleshores, $\varphi^{-1} \circ f = \psi$ satisfà (172).

Donada una altra carta local $(\tilde{\mathcal{U}},\tilde{\varphi})$ tal que també $z \in \tilde{\mathcal{U}}$ podrem construir una nova $\tilde{f} : \mathbb{B}(\vec{t},\tilde{\varepsilon}) \longrightarrow \tilde{\varphi}(\tilde{\mathcal{U}})$.

Per tal de provar la unicitat de ψ cal veure que: $\varphi^{-1} \circ f = \tilde{\varphi}^{-1} \circ \tilde{f}$

o, equivalentment: $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} \circ f = \tilde{f}$

Ara bé, això és trivial a partir de que: d'una banda,

$$(\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} \circ f)(\vec{t}) = \tilde{\varphi}(z) = \tilde{f}(\vec{t}) \qquad (173.a)$$

i de l'altra: $\tilde{\beta}^i_A(\tilde{u}) = \left(\frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^j}\right)_{(u)} \cdot \beta^j_A(u)$.

Això, junt amb (171-ii) implica que:

$$\left(D_A\left(\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} \circ f\right)^i\right)(\vec{\tau}) = \left(D_A \tilde{f}^i\right)(\vec{\tau}) \quad , \quad \forall \vec{\tau} \in \mathbb{B}(\vec{t},\eta) \qquad (173.b)$$

essent: $\eta = \min\{\varepsilon,\tilde{\varepsilon}\}$

Aplicant el resultat de la proposició (8.1.5) a $(\vec{0},z)$, $\forall z \in \mathcal{M}$ tindrem que existirà un $\varepsilon(z)$ — funció contínua estrictament positiva de $\mathfrak{X}$ — i una aplicació diferenciable <u>única</u>: $\phi_z : \mathbb{B}(\vec{0}, \epsilon_z) \longrightarrow \mathcal{M}$ satisfent (172-i,ii).

Definim ara el conjunt:

$$\mathcal{W} = \bigcup_{z \in \mathcal{M}} \mathbb{B}(\vec{0}; \epsilon(z)) \times \{z\} \subset \mathbb{R}^N \times \mathcal{M} \tag{174.a}$$

que serà un obert de $\mathbb{R}^N \times \mathcal{M}$, i l'aplicació:

$$\left.\begin{aligned} \Psi : \mathcal{W} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (\vec{\tau}, z) &\longrightarrow \phi_z(\vec{\tau}) \end{aligned}\right\} \tag{174.b}$$

que serà diferenciable. En efecte: d'una banda $\phi_z(\vec{\tau})$ és diferenciable, $\forall z \in \mathcal{M}$. De l'altra, la diferenciabilitat respecte de les variables $\mathfrak{X}$ es demostra de manera anàloga a la dels teoremes (8) i (9) de la ref. [38].

8.1.6.- <u>Proposició:</u> $(\mathcal{W}, \Psi)$ definit a (174) té les propietats següents:

i) $\forall z \in \mathcal{M}$, $\mathbb{R}^N \times \{z\} \cap \mathcal{W}$ és convex.

ii) $\forall z \in \mathcal{M}$; $\Psi(\vec{0}, z) = z$

iii) $\forall g \in C^K(\mathcal{M})$, $\forall (\vec{\tau}, z) \in \mathcal{W}$;

$$\left(D_A (g \circ \Psi)\right)_{(\vec{\tau}, z)} = (X_A g)(\Psi(\vec{\tau}, z)), \quad A = 1, \dots, N$$

iv) $(\vec{\tau}, z) \in \mathcal{W}$, $(\vec{\tau}', \Psi(\vec{\tau}, z)) \in \mathcal{W}$, $(\vec{\tau} + \vec{\tau}', z) \in \mathcal{W} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Psi(\vec{\tau}', \Psi(\vec{\tau}, z)) = \Psi(\vec{\tau} + \vec{\tau}', z)$$

v) (Unicitat) Si $(\mathcal{V}, \Sigma)$ és una parella de dades anàlogues a $(\mathcal{W}, \Psi)$, tenint les propietats (i,ii,iii), aleshores també satisfà (iv) i a més: $\Psi_{|(W\cap V)_0} = \Sigma_{|(W\cap V)_0}$

Demostració:

i) $\mathbb{R}^N\times\{z\}\cap W = \mathbb{B}(\vec{0};\varepsilon_z)\times\{z\}$, que és evidentment conex.

ii) $\Psi(\vec{0};z) = \psi_z(\vec{0}) = z$, per construcció.

Tota vegada que $(\vec{\tau},z)\in W$, la propietat (iii) es demostra trivialment a partir de la propietat (172) de l'aplicació ψ_z

iv) $(\vec{\tau},z)\in W$; $(\vec{\tau}',\Psi(\vec{\tau},z))\in W$, $(\vec{\tau}'+\vec{\tau},z)\in W$.

Sigui $y=\Psi(\vec{\tau},z)$, aplicant el resultat (8.1.5) a $(\vec{\tau}',y)\in\mathbb{R}^N\times\mathcal{M}$ existirà una aplicació diferenciable única $\hat{\psi}:\mathbb{B}(\vec{\tau};\varepsilon_y)\rightarrow\mathcal{M}$ tal que satisfaci (172).

Per la propietat (iii) és trivial demostrar que les aplicacions:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B}(\vec{\tau},\varepsilon_y) & \xrightarrow{\hat{\psi}_1} & \mathcal{M} \\ \vec{\theta} & \longrightarrow & \Psi(\vec{\theta}-\vec{\tau};y) \end{array} \qquad\Bigg|\qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{B}(\vec{\tau},\varepsilon_y) & \xrightarrow{\hat{\psi}_2} & \mathcal{M} \\ \vec{\theta} & \longrightarrow & \Psi(\vec{\theta},z) \end{array}$$

satisfan (172) i $\hat{\psi}_1(\vec{\tau}) = \hat{\psi}_2(\vec{\tau})$. Per tant, $\hat{\psi}_1 = \hat{\psi}_2$, i en con- conseqüència: $\Psi(\vec{\tau}',\Psi(\vec{\tau},z)) = \Psi(\vec{\tau}'+\vec{\tau},z)$

v) Es demostra de manera anàloga a (iv), utilitzant la propietat d'unicitat que hem citat a la proposició (8.1.5).

Amb tot això queda demostrat el teorema (8.1.3). Es més, la propietat (8.1.6-v) ens permet d'afirmar:

8.1.7.- <u>Proposició:</u> Siguin (W,Ψ), (V,Σ) dos grups N-paramètrics locals de translacions sobre $\mathcal{M}$ tals que tinguin $X_1,\dots,X_N$ com a generadors infinitesimals. Aleshores: $\Phi_{|(W\cap V)_0} = \Sigma_{|(W\cap V)_0}$

essent $(W\cap V)_0$ la component conexa de $(W\cap V)$ que conté a $\{\vec{0}\}\times\mathcal{M}$.

9.- FORMULACIO DELS AXIOMES DE LA M. R. P.

9.1) Varietat de les condicions inicials.-

Sigui $\mathcal{E}$ l'espai dels estats dinàmics possibles d'un cos (aproximació multipolar) tal com l'hem definit a l'apartat (7.3). Sigui $\pi: \mathcal{E} \to M$ l'aplicació exhaustiva que projecta cada estat dinàmic sobre la posició corresponent: $(z^\rho, m, u^\lambda, S^{\nu\sigma}, q^{\lambda_1 \dots \lambda_r}, \dots) \xrightarrow{\pi} z^\rho$

En principi, l'estat dinàmic d'un sistema d'N cossos (aproximació multipolar) vindrà donat per un punt de l'espai $\mathcal{E}^N$.

D'ara endavant considerarem també les projeccions de $\mathcal{E}^N$ sobre cada una de les seves components:

$$\left.\begin{array}{l} p_i : \mathcal{E}^N \longrightarrow \mathcal{E} \\ a = (a_1, \dots a_N) \to a_i \end{array}\right\} \qquad i = 1, \dots, N. \tag{175}$$

Podria donar-se el cas, però, que un punt $a \in \mathcal{E}^N$ no representés estats simultanis de tots els cossos per a cap referencial(*). Es per això que ens caldrà restringir un xic $\mathcal{E}^N$, i ho farem a partir de la següent:

9.1.1.- <u>Definició:</u> Un punt causal de $\mathcal{E}^N$ és un $a = (a_1, \dots, a_N) \in \mathcal{E}^N$ tal que

---

(*) Un referencial és un sistema de coordenades per al qual la coordenada x^0 és temporal. L'estructura mètrica de M^4 és la de Minkowsky en el cas que es tracti d'un sistema aïllat. Si es tactés d'un sistema immers la geodèsica de M^4 que uneix $\pi(a_i)$ amb $\pi(a_j)$, $i \neq j$, és de tipus espai.

Sigui $\mathcal{C}_N \subset \mathcal{E}^N$, el conjunt de tots els punts causals de $\mathcal{E}^N$.. $\mathcal{C}_N$ és un obert de $\mathcal{E}^N$ i, per tant, l'estructura diferenciable d'aquest n'indueix una altra a $\mathcal{C}_N$, amb la mateixa dimensió.

Per a cada punt causal $a \in \mathcal{C}_N$ podem considerar les N posicions associades $\pi(a_1), \ldots, \pi(a_N) \in M^4$ com si estiguessin disposades sobre una hipersuperfície espacial de M^4 , que correspondrà a la hipersuperfície $x^0 = 0$ per a algun referencial. Es per això que un punt causal $a \in \mathcal{C}_N$ representa un conjunt <u>físicament</u> admisible de <u>condicions inicials.</u>

9.1.2.- <u>Definició:</u> L'estat dinàmic d'un sistema d'N cossos (aproximació multipolar) en un instant donat és un punt de la varietat $\mathcal{C}_N$ de les condicions inicials.

9.2) <u>Trajectòria fàsica del sistema:</u>

La trajectòria de cada cos és una corba $(\sigma_A ,]\alpha_A, \beta_A[)$,on $\alpha_A, \beta_A \in \mathbb{R}$

---

en un camp gravitatori originat per fonts exteriors (respecte de la qual les partícules del sistema es comportarien com "partícules de prova") la geometria de M^4 vindria donada per la mètrica associada a aquest camp.

a En el cas d'un sistema aïllat la condició (9.1.1) s'escriurà en coordenades cartesianes: $(\pi(a_i) - \pi(a_j))^2 < 0$; $i \neq j$; $\eta = (+---)$.

i σ_A és una aplicació $\sigma_A :]\alpha_A, \beta_A[\longrightarrow \mathcal{E}$, que suposarem diferenciable de classe C^P .

La projecció d'aquesta trajectòria sobre M^4:

$$\pi \circ \sigma_A :]\alpha_A , \beta_A[\longrightarrow M^4$$

haurà d'ésser una corba temporal.

Triant una bona parametrització per a σ_A — per exemple, la longitud d'arc de $\pi \circ \sigma_A$ — la coordenada temporal és una funció monòtona estrictament creixent per a qualsevol referencial, per tant, el camp de vectors tangent a σ_A no s'anul.la mai i σ_A és injectiva.

L'evolució del sistema d'N cossos vindrà donada per les N trajectòries individuals $\{(\sigma_A ,]\alpha_A,\beta_A[)\}_{A=1,\dots N}$ o, equivalentment, per la parella (Γ, I) on I és l'N-interval: $I =]\alpha_1, \beta_1[\times \dots \times]\alpha_N, \beta_N[$ i $\Gamma : I \longrightarrow \mathcal{E}^N$ és l'aplicació: $\Gamma(\vec{\tau}) = (\sigma_1(\tau_1), \dots , \sigma_N(\tau_N))$.

Tota vegada que les σ_A són injectives i C^P , Γ també ho serà.

Per tot això, $\Gamma(I)$ serà una subvarietat N dimensional de $\mathcal{E}^N$

En un referencial determinat, l'evolució del sistema serà descrita per una seqüència de valors de $\{(z_A^\ell, m_A, u_A^\lambda, \dots\dots, q_A^{\lambda_1 \dots \lambda r_m})\}_{A=1\dots N}$ corresponents a estats simultanis — des del seu punt de vista, evidentment — dels N cossos. Això equival a dir que, en l'esmentat referencial, l'evolució del sistema ve donada per la corba intersecció de la N-subvarietat $\Gamma(I)$ amb les N − 1 hipersuperfícies:

$$z_1^0 = z_2^0 \quad ; \quad z_1^0 = z_3^0 \quad ; \quad \dots \quad ; \quad z_1^0 = z_N^0 \tag{176}$$

L'esmentada corba canviarà d'un referencial a un altre perquè les equacions (176) no són covariants.(*)

El que resulta clar és que , per a qualsevol referencial, aquesta intersecció tant sols afectarà als punts causals de $\Gamma(I)$: $\Gamma(I) \cap \mathcal{C}_N$, és a dir, a aquelles N-ples d'estats dels diferents cossos que corresponen a posicions simultànies.

(Γ, I) ens permet de definir el conjunt $\mathcal{V} = \Gamma^{-1}(\Gamma(I) \cap \mathcal{C}_N)$, que serà un obert conex de $\mathbb{R}^N$, i l'aplicació $\hat{\Gamma}: \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{C}_N$, on: $\hat{\Gamma} = \Gamma_{|\mathcal{V}}$.

9.2.1.- <u>Definició:</u> Una trajectòria fàsica del sistema d'N cossos és una parella $(\Phi, \mathcal{U})$ tal que:

i) $\mathcal{U}$ és un obert conex de $\mathbb{R}^N$

ii) $\Phi: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{C}_N$ és una aplicació diferenciable $C^p(\mathcal{U})$ i injectiva a $\mathcal{U}$, tal que: $\vec{\tau} \in \mathcal{U}$, $\vec{\tau} + t\hat{u}_A \in \mathcal{U} \Rightarrow$

$$(p_B \circ \Phi)(\vec{\tau} + t\hat{u}_A) = (p_B \circ \Phi)(\vec{\tau}) \quad ; \ \forall B \neq A$$

iii) $(\pi \circ p_A \circ \Phi)(\vec{\tau} + t\hat{u}_A)$ és una corba temporal i orientada cap el futur.

Aquí: $\hat{u}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$; $\hat{u}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$; ... ; $\hat{u}_N = (0, 0, \ldots, 1)$

Es trivial demostrar que la parella $(\hat{\Gamma}, \mathcal{V})$, construïda unes línies més amunt a partir de la família de trajectòries (Γ, I) , és una trajectòria fàsica del sistema d'N cossos.

(*) Una explicació detallada de com es determina aquesta corba-evolució del sistema per a cada referencial pot ésser trobada a la ref. [34]. Es per això que aquí no ens estenem més sobre el particular.

$(\hat{\Gamma},\mathcal{V})$ l'anomenarem: trajectòria fàsica associada a la família de trajectòries (Γ,I).

9.2.2.- Proposició: Sia $(\Phi,\mathcal{U})$ una trajectòria fàsica del sistema. Aleshores, existeix una única família de trajectòries (Γ,I) tal que:

$$\mathcal{U}\subset I \quad , \quad \Gamma_{|\mathcal{U}} = \Phi$$

Demostració:

Tota vegada que $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^N$ és obert i conex, la seva imatge per cada una de les projeccions p_A (175) serà un obert conex de $\mathbb{R}$ — és a dir, serà un interval obert: $p_A(\mathcal{U}) =]\alpha_A,\beta_A[$

La propietat (9.2.1-ii) ens permet de definir unívocament:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_A :]\alpha_A,\beta_A[&\longrightarrow \mathcal{E} \\ t_A &\longrightarrow (p_A\circ\Phi)(q_A^{-1}(t_A)) \end{aligned}\right\} \qquad (177)$$

on q_A és la projecció: $\left.\begin{aligned} q_A:\mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathcal{T} &\longrightarrow t_A \end{aligned}\right\} \quad A=1,\dots,N$

Les propietats (9.2.1-ii,iii) ens permeten d'assegurar que la corba $(\sigma_A,]\alpha_A,\beta_A[)$ és diferenciable C^r, injectiva i temporal.

Per fi, la família de trajectòries demanada és:

$\{(\sigma_A,]\alpha_A,\beta_A[)\}_{A=1,\dots,N}$. A partir d'aquí la resta de la demostració és trivial.

9.2.3.- Corol.lari: Sigui $(\Phi,\mathcal{U})$ una trajectòria fàsica del sistema i sigui (Γ,I) la família de trajectòries individuals construïda a partir d'ella. Si $(\hat{\Gamma}, \mathcal{V})$ és la trajectòria fàsica associada a (Γ, I) aleshores: $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, $\hat{\Gamma}_{|\mathcal{U}} = \Phi$.

9.3) Axioma M.R.P..-

$\forall a \in \mathcal{C}_N$ existeix un conjunt no buit de trajectòries fàsiques $\mathcal{F}_a = \{(\Sigma_a^i, W_a^i)\}_{i \in I}$, tal que:

i) $\forall i \in I$, (Σ_a^i, W_a^i) passa per a : $\vec{0} \in W_a^i$, $\Sigma_a^i(\vec{0}) = a$

ii) (Unicitat) (Σ_a^i, W_a^i) , $(\Sigma_a^j, W_a^j) \in \mathcal{F}_a \Rightarrow (\Sigma_a^{ij}, W_a^{ij}) \in \mathcal{F}_a$

on: W_a^{ij} és la component conexa de $W_a^i \cap W_a^j$ contenint el $\vec{0}$,

i $\Sigma_a^{ij} = \Sigma_{a\,|W_a^{ij}}^i = \Sigma_{a\,|W_a^{ij}}^j$.

iii) Si $b \in \mathcal{C}_N$ és tal que $\exists (\Sigma_a, W_a) \in \mathcal{F}_a$, de manera que: $\exists \vec{\tau} \in W_a$, $\Sigma_a(\vec{\tau}) = b$, aleshores: $(\Sigma_b, W_b) \in \mathcal{F}_b$, on:

$$W_b = W_a - \vec{\tau} = \{\vec{\theta} \in \mathbb{R}^N / \vec{\theta} + \vec{\tau} \in W_a\} \; ; \quad \Sigma_b : \begin{array}{l} W_b \longrightarrow \mathcal{C}_N \\ \vec{\theta} \longrightarrow \Sigma_a(\vec{\theta} + \vec{\tau}) \end{array}$$

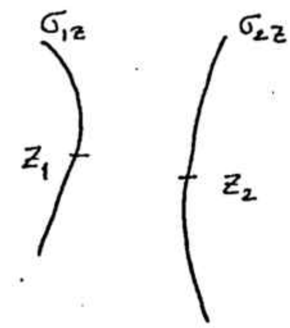
iv) Suposarem, a més, que les aplicacions Σ_a satisfan unes condicions de regularitat suficients respecte de les condicions inicials $a \in \mathcal{C}_N$, de manera que l'aplicació Σ que definirem a (178) sigui diferenciable.

El significat d'aquest axioma en termes de les trajectòries individuals és el següent — per una major claretat, farem el cas $N = 2$:

Donades unes condicions inicials $z = (z_1, z_2) \in \mathcal{C}_2$, existeix tota una col.lecció de parelles d'arcs de trajectòria $(\sigma_{1z},\sigma_{2z})$ tals que:

i) $(\sigma_{1z},\sigma_{2z}) \in \mathcal{F}_z \Rightarrow$

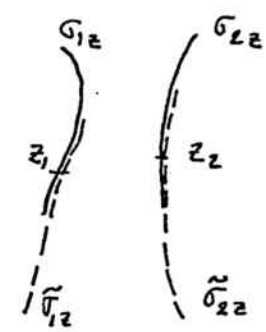
$\Rightarrow \sigma_{1z}(0) = z_1 \wedge \sigma_{2z}(0) = z_2$



ii) $(\sigma_{1z},\sigma_{2z}), (\tilde{\sigma}_{1z},\tilde{\sigma}_{2z}) \in \mathcal{F}_z$

coincideixen a un entorn

de (z_1, z_2)



ii), iii) Sigui $y=(y_1,y_2)$ tal que

y_A és sobre un arc de trajectòria

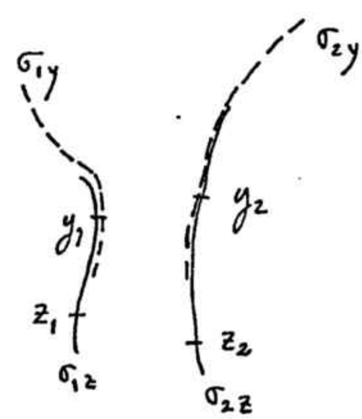
σ_{Az} , $A=1,2$. Aleshores qual-

sevol parella d'arcs de trajectòria

que passin per y : $(\sigma_{1y},\sigma_{2y})$

coincidirà amb $(\sigma_{1z},\sigma_{2z})$ a un entorn

de (y_1,y_2)



9.4) Comentari.-

La formulació de l'axioma M.R.P. que hem donat aquí és lleugerament diferent de la que dóna Droz-Vincent[34].

A l'esmentada referència, el terme "trajectòria d'una partícula" es pren en el sentit maximal — és a dir: la seva línia d'univers tota sencera, no perllongable — i a patir d'ell es defineix el concepte de "trajectòria fàsica" d'una manera semblant a comací hem exposat.

La formulació de l'axioma M.R.P. a la ref. 34 és la següent:

i) $\forall z \in \mathcal{C}_N$, existeix una única trajectòria fàsica que passa per z — és a dir: $\Sigma_z(\vec{0}) = z$

ii) Si Σ_z és la trajectòria fàsica que passa per z i $y \in \mathcal{C}_N$ està sobre ella — és a dir: $\exists \vec{\tau} / \Sigma_z(\vec{\tau}) = y$ — aleshores les imatges de Σ_z y Σ_y coincideixen.

Les condicions necessàries i suficients per que es satisfaci l'axioma M.R.P., segons la ref. [34], són:

i) Les mateixes (10.2.1-i,ii,iii) que nosaltres obtindrem, amb la condició adicional, però, de que:

ii) els camps $X_1, \dots, X_N$ han d'ésser regulars a tota la varietat $\mathcal{E}^N$.

Per a nosaltres la condició (ii) és un inconvenient ja que, d'una banda, els camps d'acceleracions amb sentit físic presenten singularitats en els punts de $\mathcal{E}^N$ que corresponen a estats dinàmics en els quals dues partícules són al mateix lloc en el mateix instant. D'altra part, hi ha diferents treballs sobre M.R.P. per a partícules puntuals en els quals hom manipula quadriacceleracions que no estan definides a $\mathcal{E}^N - \mathcal{C}_N$ i que tendeixen a ∞ a la frontera de $\mathcal{C}_N$ — veure, per exemple, ref.[39] i[40].

La condició (ii) no és conseqüència de la formulació de l'axioma M.R.P. de la ref.[34], sino de suposicions adicionals que introdueix Droz-Vincent per a simplificar el discurs del treball — utilització de grups N-paramètrics globals.

Creiem que el mateix axioma M.R.P., utilitzant grups locals de translacions (en lloc de globals) permetria d'arribar a una condició més feble que la (ii):

ii') Els camps $X_1, \ldots, X_N$ són regulars a tota la varietat $\mathcal{C}_N$ de les condicions inicials.

La qual és físicament raonable.

Fer això presenta, no obstant, una complicació greu. En utilitzar el concepte de trajectòria en sentit maximal estariem obligats a treballar amb grups N-paramètrics locals maximals.

Aquests presenten el inconvenient de que no podem assegurar - excepte en el cas $N=1$ — que donat un conjunt de camps $X_1, \ldots, X_N$ existeixi un grup N-paramètric local maximal único que els tingui per generadors infinitesimals. La superació d'aquesta dificultat ens obligaria a sobrecarregar el tractament matemàtic.

Per tal d'obviar aquests inconvenients hem donat una formulació menys ambiciosa de l'axioma M.R.P. que conserva el mateix significat físic local que el de la ref. [34], que evita, però, afirmacions sobre les trajectòries "senceres" de les partícules del sistema.

10.- LES CONDICIONS M. R. P.

10.1) Condicions necessàries.-

Per tal com els suports W_a^i de les trajectòries fàsiques que passen per un $a \in \mathcal{C}_N$ donat són entorns conexes de $\vec{0} \in \mathbb{R}^N$, podem construir un entorn W_0 de $\{\vec{0}\} \times \mathcal{C}_N \subset \mathbb{R}^N \times \mathcal{C}_N$, tal que:

$$W_0 \subset \bigcup_{a \in \mathcal{C}_N} \left(\bigcup_{i \in I} W_a^i \right) \times \{a\} \tag{178.a}$$

i una aplicació:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma_0 : W_0 &\longrightarrow \mathcal{C}_N \\ (\vec{\tau}, a) &\longrightarrow \Sigma_0(\vec{\tau}, a) = \Sigma_a^i(\vec{\tau}) \ , \ i \in I \end{aligned}\right\} \tag{178.b}$$

Gràcies a (9.3.1-ii,iv) Σ_0 està unívocament definida i és diferenciable.

Considerem ara el conjunt: $W = \{ (\vec{\tau}, a) \in W_0 \ / \ (-\vec{\tau}, \Sigma(\vec{\tau}, a)) \in W_0 \}$ que serà també un entorn obert de $\{\vec{0}\} \times \mathcal{C}_N$ i l'aplicació: $\Sigma = \Sigma_0|_W$

10.1.1.- Proposició: (W, Σ) és un grup N-paramètric local de translacions sobre $\mathcal{C}_N$.

Demostració:

Les propietats (8.1.1-i,ii) es demostren trivialment. Tant sols resta veure què passa amb (8.1.1-iii).

Siguin $(\vec{\tau}, a) \in W$, $(\vec{\tau}', \Sigma(\vec{\tau}, a)) \in W$, $(\vec{\tau}' + \vec{\tau}, a) \in W$ i sigui $b = \Sigma(\vec{\tau}, a)$

Per la construcció de W, $(\vec{\tau}, a) \in W \Longrightarrow (-\vec{\tau}, b) \in W$

Siguin: $\mathcal{W}_b = \{\vec{\theta} \in \mathbb{R}^N / (\vec{\theta}, b) \in \mathcal{W}\}$, $\Sigma_b(\vec{\theta}) = \Sigma(\vec{\theta}, b)$

i $\mathcal{W}_a = \{\vec{\theta} \in \mathbb{R}^N / (\vec{\theta}, a) \in \mathcal{W}\}$, $\Sigma_a(\vec{\theta}) = \Sigma(\vec{\theta}, a)$.

Aleshores, per l´axioma (9.3.1-iii): $\Sigma_b(-\vec{\tau}) = \Sigma_a(-\vec{\tau}+\vec{\tau}) = a$

Per tant, la parella $(\Phi_a, \mathcal{U}_a)$ definida per $\mathcal{U}_a = \mathcal{W}_b + \vec{\tau}$,

$\Phi_a(\vec{\theta}) = \Sigma_b(\vec{\theta}-\vec{\tau})$ serà una trajectòria fàsica que passi per a :

$$(\Phi_a, \mathcal{U}_a) \in \mathcal{F}_a$$

Ara bé: $(\Sigma_a, \mathcal{W}_a) \in \mathcal{F}_a$, i per l´axioma (9.3.1-ii) Σ_a i Φ_a coincidiran sobre la intersecció: $(\mathcal{U}_a \cap \mathcal{W}_a)_0$. Per tant, si $(\vec{\tau}, a) \in \mathcal{W}$, $\forall \vec{\tau}' / (\vec{\tau}'+\vec{\tau}, a) \in \mathcal{W} \wedge (\vec{\tau}', b) \in \mathcal{W}$ podrem escriure:

$\Sigma(\vec{\tau}', \Sigma(\vec{\tau}, a)) = \Sigma(\vec{\tau}'+\vec{\tau}, a)$, tal i com preteniem demostrar.

D´acord amb (169), els generadors infinitesimals de $(\mathcal{W}, \Sigma)$ satisfaran les regles de commutació: $[X_A, X_B] = 0$; $\forall A, B \in \{1, 2, \ldots, N\}$

A partir de (9.2.1-ii,iii) és trivial demostrar la següent propietat per als generadors infinitesimals:

10.1.2.- <u>Proposició:</u> Sigui $p_A: \mathcal{E}_N \longrightarrow \mathcal{E}$ l´aplicació definida per (175) i sigui $\pi: \mathcal{E} \longrightarrow M^4$ la projecció (168). Aleshores:

i) $p_B^T(X_A) = 0$, $\forall B \neq A$

ii) $(\pi \circ p_A)^T(X_A) \in T(M^4)$ és un camp de vectors temporals i orientats cap al futur.

on p_B^T dessigna l´aplicació jacobiana de p_B.

10.2) Condicions suficients.-

Aquestes queden expressades en el següent:

10.2.1.- Teorema: Siguin $X_1, \dots, X_N$ camps de vectors tangents a $\mathcal{C}_N$ satisfent les condicions següents:

i) $[X_A, X_B] = 0$; $\forall A, B \in \{1, 2, \dots, N\}$

ii) $p_B^T(X_A) = 0$, $\forall B \neq A$

iii) $(\Pi \circ p_A)^T(X_A) \in T(M^4)$ és un camp de vectors temporals i orientats cap al futur.

Aleshores, $\forall z \in \mathcal{C}_N$ existeix un conjunt $\mathcal{F}_z$ de trajectòries fàsiques amb les propietats esmentades a l'axioma M.R.P. (9.3.1).

Demostració:

Per la condició (i), d'acord amb el teorema (8.1.3), existirà una família de grups N-paramètrics locals de translacions sobre $\mathcal{C}_N$ que tindran $X_1, \dots, X_N$ per generadors infinitesimals. Sigui (W, Σ) un d'aquests grups.

$\forall z \in \mathcal{C}_N$, triem $W_z = \{\vec{\tau} \in \mathbb{R}^N / (\vec{\tau}, z) \in W\}$ i considerem l'aplicació diferenciable $\Sigma_z : W_z \longrightarrow \mathcal{C}_N \; / \; \Sigma_z(\vec{\tau}) = \Sigma(\vec{\tau}, z)$.

(Σ_z, W_z) és una trajectòria fàsica. En efecte: en primer lloc W_z és un obert conex de $\mathbb{R}^N$ i Σ_z és diferenciable i injectiva.

En segon lloc, $\forall \vec{\tau} \in W_z$, $\forall t \in \mathbb{R} \; / \; \vec{\tau} + t\hat{u}_A \in W_z$, $\forall f \in C^K(\mathcal{C}_N)$;

$$\frac{1}{t}\left\{(f \circ p_B \circ \Sigma_z)(\vec{\tau} + t\hat{u}_A) - (f \circ p_B \circ \Sigma_z)(\vec{\tau})\right\} =$$

$$= \frac{1}{t}\left\{(f \circ p_B \circ \Sigma_z)(\vec{\tau} + t\hat{u}_A, z) - (f \circ p_B \circ \Sigma)(\vec{\tau}, z)\right\} \xrightarrow[t \to 0]{}$$

$$\lim_{t\to 0} \left(X_A \left(f\circ p_B\right)\right)_{(\Sigma(\vec{\tau},z))} = \left(\left(p_B^T(X_A)\right)(f)\right)_{(\Sigma(\vec{\tau},z))} = 0\ ,\ \forall B\neq A$$

on hem aplicat la hipòtesi (ii)

En conseqüència: $(p_B\circ\Sigma_z)\,(\vec{\tau}+t\,\hat{u}_A) = (p_B\circ\Sigma_z)(\vec{\tau})\ ;\quad \forall B\neq A.$

Per fi, hom pot demostrar de manera anàloga, a partir de la hipòtesi (iii), que $(\pi\circ p_A\circ\Sigma_z)(\vec{\tau}+t\hat{u}_A)$ és un arc de corba temporal i orientat cap al futur.

La família de trajectòries fàsiques $\mathfrak{F}_z$ així construïda té les propietats (9.3.1). Això és trivial per a (9.3.1-i) i (9.3.1-ii) és conseqüència immediata de la proposició (8.1.7). La propietat (9.3.1-iii) es demostra a partir de (8.1.1-iii).

10.2.2.- Proposició: El camp $p_A^T(X_A)$ és el camp de vectors tangent a les trajectòries individuals que s'obtindrien a partir de les trajectòries fàsiques $(\Sigma_z, \mathcal{W}_z)\in\mathfrak{F}_z$, pel mètode descrit a la proposició (9.2.2).

Això és trivial a partir de la definició de σ_A i del fet de que l'aplicació:

$$\begin{aligned} T_y(\mathcal{E}_N) &\longrightarrow T_{y_1}(\mathcal{E})\times\ldots\times T_{y_n}(\mathcal{E}) \\ X_y &\longrightarrow (p_1^T(X_y),\ldots,p_N^T(X_y)) \end{aligned}$$

és l'aplicació identitat.

En resum: donats N camps de vectors tangents a $\mathcal{E}_N$: $X_1,\ldots,X_N$, les condicions (10.2.1-i,ii,iii) són necessàries i suficients per que, $\forall z\in\mathcal{E}_N$ existeixi una família de trajectòries fàsiques $\mathfrak{F}_z$ que satisfaci l'axioma M.R.P. (9.3.1) i tal que, $p_A^T(X_A(z))$ sigui el vector tangent a la trajectòria individual $\sigma_A(z)$, construïda segons (9.2.2) a partir de qualsevol $(\Sigma_z, \mathcal{W}_z) \in \mathcal{F}_z$.

10.3) Expressió en coordenades.-

En un referencial qualsevol les lleis d'evolució del sistema vindran donades pel sistema diferencial:

$$\frac{dz^\rho_A}{d\tau_B} = u^\rho_A \cdot \delta_{AB} \quad ; \quad \frac{dm_A}{d\tau_B} = \delta_{AB} \cdot h_A(z^\rho_C, u^\nu_D, m_E, S^{\lambda\mu}_F, q^{\cdots}_G)$$

$$\frac{du^\rho_A}{d\tau_B} = \delta_{AB} \cdot \xi^\rho_A (z^\nu_C, u^\lambda_D, m_E, S^{\rho\nu}_F, q^{\cdots}_G)$$

$$\frac{dS^{\lambda\nu}_A}{d\tau_B} = \delta_{AB} \cdot d^{\lambda\nu}_A (z_C, u_D, m_E, S_F, q_G)$$

$$\frac{dq^{\lambda_1\ldots\lambda_{r_i}}_A}{d\tau_B} = \delta_{AB} \cdot \omega^{\lambda_1\ldots\lambda_{r_i}}_A (z_C, u_D, m_E, S_F, q_G) \quad ; \quad i = 1 \ldots m. \qquad (179)$$

o, equivalentment, pels N camps de vectors tangents a $\mathcal{E}_N$:

$$X_A = u^\rho_{(A)} \cdot \frac{\partial}{\partial z^\rho_{(A)}} + \xi^\rho_{(A)} \cdot \frac{\partial}{\partial u^\rho_{(A)}} + h_{(A)} \frac{\partial}{\partial m_{(A)}} + d^{\lambda\nu}_{(A)} \cdot \frac{\partial}{\partial S^{\lambda\nu}_{(A)}} + \sum_{i=1}^{m} \omega^{\lambda_1\ldots\lambda_{r_i}}_{(A)} \cdot \frac{\partial}{\partial q^{\lambda_1\ldots\lambda_{r_i}}_{(A)}} \qquad (180)$$

on la regla d'Einstein de la suma no compta per als índexs entre parèntesi.

Suposarem que estem a la subvarietat $\hat{\mathcal{E}}_N$ de $\mathcal{E}_N$, restringida per les equacions:

$$u^\nu_A \, u_{A\nu} = 1 \qquad , \qquad A = 1, \ldots, N \qquad (181)$$

Per a $\hat{\mathcal{E}}_N$ valen també tots els resultats obtinguts fins aquí, en particular els del capítol (10).

Els camps de vectors (180) satisfan, evidentment, (10.2.1-ii) i, gràcies a (181) satisfaran també (10.2.1-iii) en cas que siguin tangents a $\hat{\mathscr{C}}_N$. La condició necessària i suficient per que això passi s'obté derivant (181) segons X_A:

$$\mu_A^{\rho} \cdot \xi_{A\rho} = 0 \qquad ; \qquad A = 1, \dots, N \tag{182}$$

Per fi, la condició (10.2.1-1) s'escriu:

$$[X_B, X_A] \quad 0 \quad . \quad \forall A,B \in \{1, \dots, N\} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall A \neq A',$$

$$\frac{d\xi_A^{\nu}}{d\tau_{A'}} = 0 \quad ; \quad \frac{dh_A}{d\tau_{A'}} = 0 \quad ; \quad \frac{d\, d_A^{\lambda\nu}}{d\tau_{A'}} = 0 \quad ; \quad \frac{d\omega_A^{\lambda_1 \dots \lambda r_i}}{d\tau_{A'}} = 0 \, . \tag{183}$$

En conclusió: un sistema d'equacions diferencials del tipus (179) admetrà per a cada conjunt de condicions inicials una família de trajectòries solució invariant sota canvis de coordenades en el sentit de la M.R.P. si, i tant sols si, les condicions (182) i (183) són satisfetes.

11.- APLICACIO AL CAS D'UN SISTEMA DE DOS COSSOS EXTENSOS, GRAVITANTS I AMB CARREGA ELECTRICA (aproximació dipolar i 1-PN)

A la primera part hem derivat les equacions del moviment de translació (144) i del spin (155) per al problema d'N cossos carregats i gravitants a l'aproximació dipolar i 1-PN. En aquest capítol veurem com aquestes equacions són compatibles amb les condicions M.R.P. . Per raons de simplicitat estudiarem únicament el cas $N=2$.

Si $\{x^\mu\}_{\mu=0,1,2,3}$ és el sistema de coordenades en el qual estan escrites les equacions (144) i (155), definirem la mètrica següent:

$$d\tau^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \tag{184}$$

No donem, en principi, cap mena de significat físic a aquesta mètrica, sino que la utilitzarem únicament per a definir un paràmetre escalar sobre la trajectòria de cada cos, independentment dels altres.

11.1) Plantejament del problema.-

Partint de l'equació (144) podem especificar la triacceleració del cos A:

$$\begin{aligned}\vec{a}_A = {} & \vec{a}_A(BZ) - \frac{1}{m_A}\cdot\frac{d^2 M_A}{dx^{0^2}} - \frac{G m_{A'}}{c^2 x^3}\eta_A \eta^B \vec{v}_B \wedge \vec{\sigma}_A - \frac{3 G m_{A'}}{c^2 x^5}(\vec{x}\cdot\vec{v}_B)\eta^B \eta_A \vec{x}\wedge(2\vec{\sigma}_{A'}+\vec{\sigma}_A) + \\ & + \frac{q_1 q_2}{c^2 m_A x^3}\eta_A \eta^B \vec{v}_B \wedge \vec{\sigma}_A - \frac{3 q_1 q_2}{m_A c^2 x^5}(\vec{x}\cdot\vec{v}_B)\eta^B \eta_A \vec{x}\wedge\vec{\sigma}_A - \\ & - \frac{3(\vec{x}\cdot\vec{v}_B)\eta^B}{2c^2 m_A x^5}\eta_A \vec{x}\wedge(q_1\vec{\mu}_2 + q_2\vec{\mu}_1) + \frac{1}{2c^2 m_A x^3}\eta_A \vec{x}\wedge(q_1\dot{\vec{\mu}}_2 + q_2\dot{\vec{\mu}}_1) +\end{aligned}$$

$$+\frac{G m_{A'}}{c^2 x^3}\left(\frac{\vec{M}_{A'}}{m_{A'}}-\frac{\vec{M}_A}{m_A}\right)-\frac{q_1 q_2}{c^2 m_A x^3}\left(\frac{\vec{e}_{A'}}{q_{A'}}-\frac{\vec{e}_A}{q_A}\right)+$$

$$+\vec{x}\,\eta_A\cdot\Big\{\frac{6 G m_{A'}}{c^2 x^5}\cdot(\vec{\sigma}_{A'}+\vec{\sigma}_A)\cdot(\vec{x}\wedge\eta^B\vec{v}_B)+\frac{3}{2c^2 m_A x^5}(q_1\vec{\mu}_2+q_2\vec{\mu}_1)\cdot(\vec{x}\wedge\vec{v}_B)\eta^B-$$

$$-\frac{3Gm_{A'}}{c^2x^5}\left(\frac{\vec{x}\cdot\vec{M}_{A'}}{m_{A'}}-\frac{\vec{x}\cdot\vec{M}_A}{m_A}\right)\eta_A+\frac{3q_1q_2}{c^2m_Ax^5}\left(\frac{\vec{x}\cdot\vec{e}_{A'}}{q_{A'}}-\frac{\vec{x}\cdot\vec{e}_A}{q_A}\right)\eta_A-\frac{3Gm_{A'}}{c^2x^5}(\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2)-$$

$$-\frac{3}{4m_Ac^2x^5}(\vec{\mu}_1\cdot\vec{\mu}_2)+\frac{15}{c^2x^7}\left(Gm_{A'}(\vec{\sigma}_1\vec{x})(\vec{\sigma}_2\vec{x})+\frac{1}{4m_A}(\vec{\mu}_1\vec{x})(\vec{\mu}_2\vec{x})\right)\Big\}-$$

$$-\frac{3Gm_{A'}}{c^2x^5}\eta_A\left\{(\vec{\sigma}_{A'}\vec{x})\,\vec{\sigma}_A+(\vec{\sigma}_A\vec{x})\,\vec{\sigma}_{A'}\right\}-$$

$$-\frac{3}{4m_Ac^2x^5}\eta_A\cdot\left\{(\vec{\mu}_A\vec{x})\,\vec{\mu}_{A'}+(\vec{\mu}_{A'}\vec{x})\,\vec{\mu}_A\right\}+O(6) \qquad (185)$$

on: $\vec{\sigma}_B=\dfrac{\vec{S}_B}{m_B}$, $\vec{x}=\eta^B\vec{z}_B$, $x=|\vec{x}|$, $\eta_B=(-1)^{A+1}$

i $\vec{a}_A(BZ)$ és la triacceleració que es deriva del lagrangià de Bażański:

$$\vec{a}_A(BZ)=\vec{x}\,\eta_A\frac{1}{m_A}\Big\{-\frac{\varkappa}{c^2x^3}+\frac{1}{2c^2x^3}\left(\varkappa\,[\vec{v}_A^2+2\vec{v}_1\vec{v}_2-v_{A'}^2]+3k\,(\eta^Bv_B)^2\right)-$$

$$-\frac{\beta_A}{c^4x^4}+\frac{3\varkappa\,(\vec{x}\vec{v}_{A'})^2}{2c^2x^5}\Big\}+\frac{1}{m_A}\left\{\frac{\varkappa\,(\vec{x}\vec{v}_A)}{c^2x^3}-\frac{3k\,(\vec{x}\vec{v}_B)\eta^B\eta_A}{c^2x^3}\right\}\eta^B\vec{v}_B+O(6) \qquad (186)$$

amb: $\varkappa=Gm_1m_2-q_1q_2$; $k=Gm_1m_2$

$$\beta_A=G^2m_1m_2(3m_{A'}+2m_A)-Gq_1q_2(m_A+3m_{A'})-G\left(m_Aq_{A'}^2+m_{A'}q_A^2\right)+\frac{q_1^2q_2^2}{m_A} \qquad (187)$$

També, partint de (152) tenim:

$$\vec{\theta}_A = \frac{d\vec{S}_A}{dx^0} = -\frac{Gm_{A'}}{c^2x^3}(\vec{x}\cdot\vec{v}_B)\eta^B\vec{S}_A + \left(\frac{2Gm_{A'}}{c^2x^3}(\vec{x}\cdot\vec{S}_A) - \frac{q_{A'}}{2c^2x^3}(\vec{x}\cdot\vec{\mu}_A)\right)\vec{v}_B\eta^B +$$

$$+\vec{x}\left\{-\frac{2Gm_{A'}}{c^2x^3}\eta^B(\vec{v}_B\cdot\vec{S}_A) + \frac{3G}{c^2x^5}\vec{x}\cdot(\vec{S}_A\wedge\vec{S}_{A'}) + \frac{q_{A'}}{2c^2x^3}\eta^B(\vec{v}_B\cdot\vec{\mu}_A) -\right.$$

$$\left.-\frac{3}{4c^2x^5}\vec{x}\cdot(\vec{\mu}_A\wedge\vec{\mu}_{A'})\right\} + \left(-\frac{Gm_{A'}}{c^2x^3} + \frac{q_1q_2}{c^2x^3m_A}\right)(\vec{x}\cdot\vec{S}_A)\eta_A\vec{v}_A -$$

$$-\frac{2G}{c^2x^3}\vec{S}_A\wedge\vec{S}_{A'} + \frac{3G}{c^2x^5}(\vec{S}_A\cdot\vec{x})(\vec{x}\wedge\vec{S}_{A'}) - \frac{1}{2c^2x^3}\vec{\mu}_A\wedge\vec{\mu}_{A'} -$$

$$-\frac{3}{4c^2x^5}(\vec{x}\vec{\mu}_A)(\vec{x}\wedge\vec{\mu}_{A'}) + O(6) \qquad (188.a)$$

i per a la component S_A^0 tenim, de (152):

$$\theta_A^0 = \frac{dS_A^0}{dx^0} = \left(-\frac{Gm_{A'}}{c^2x^3} + \frac{q_Aq_{A'}}{m_Ac^2x^3}\right)(\vec{x}\cdot\vec{S}_A)\eta_A + O(5) \qquad (188.b)$$

El problema que ens plantejem consisteix en veure si existeixen unes equacions del moviment (manifestament covariants):

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz_A^\mu}{d\tau_B} &= \delta_{AB}\, u_A^\mu \\ \frac{du_A^\mu}{d\tau_B} &= \delta_{AB}\cdot \xi_A^\mu\,(z_C, u_D, M_E, S_F, \mu_G, \varepsilon_H) \\ \frac{dS_A^\lambda}{d\tau_B} &= \delta_{AB}\cdot d_A^\lambda\,(z_C, u_D, M_E, S_F, \mu_G, \varepsilon_H) \end{aligned}\right\} \quad A, B, \dots, H = 1,2 \qquad (189)$$

i una tria de les línies d'univers L_A: $\quad M_A^\lambda(\tau_A)\,,\ A=1,2$

i dels moments multipolars $\varepsilon_A^\lambda(\tau_A), \mu_A^\lambda(\tau_A)$ tals que:

i) Satisfacin les condicions de compatibilitat (182) i (183) de la M.R.P., que en aquest cas s'escriuran:

$$u_{A\rho}\cdot \xi_A^\rho = 0 \quad ; \quad u_{A\rho}\cdot d_A^\rho + S_{A\rho}\cdot \xi_A^\rho = 0 \quad ; \quad A=1,2 \tag{190.a}$$

$$\frac{d\,\xi_A^\rho}{d\tau_{A'}} = 0 \quad , \quad \frac{d\,d_A^\rho}{d\tau_{A'}} = 0 \quad ; \quad A' \neq A \tag{190.b}$$

ii) Particularitzades per al referencial en el qual estan escrites (188) i (185) s'obtinguin justament aquestes equacions. Això vol dir que, quan fem $z_1^0 = z_2^0 = x^0$, hem d'obtenir:

$$\xi_A^\nu \Big|_{z_1^0 = z_2^0 = x^0} = \left(\frac{\vec{v}_A\cdot\vec{a}_A}{(1-\vec{v}_A^2)^2} \; , \; \frac{1}{1-\vec{v}_A^2}\,\vec{a}_A + \frac{\vec{v}_A\cdot\vec{a}_A}{(1-\vec{v}_A^2)^2}\,\vec{v}_A \right) \tag{191.a}$$

$$d_A^\nu \Big|_{z_1^0 = z_2^0 = x^0} = \theta_A^\nu \cdot \frac{1}{(1-\vec{v}_A^2)^{1/2}} \tag{191.b}$$

si més no a l'aproximació a la que treballem.

El paràmetre τ_A que hem introduït a les equacions (189) és el paràmetre longitud d'arc de la trajectòria del cos A, segons la mètrica (184).

11.2.- Equacions del moviment (manifestament covariants).-

Construim primer dos quadrivectors ξ_A i d_A^ν tals que, en el sistema de coordenades en el qual són vàlides (188) i (185), satisfacin (191) i, a més, les condicions:

$$\eta_{\mu\nu}\, u_A^\mu \cdot \xi_A^\nu = 0 \tag{192.a}$$

$$\eta_{\mu\nu}\left(u_A^{\mu}\cdot d_A^{\nu} + \xi_A^{\mu}\cdot S_A^{\nu}\right) = 0 \tag{192.b}$$

D'acord amb (191.a) i els resultats de l'apèndix C , podem escriure:

$$\xi_A^{\nu} = \overset{0}{\xi}{}_A^{\nu} + \overset{1}{\xi}{}_A^{\nu} + \Delta\xi_A^{\nu} \tag{193.a}$$

$$\overset{0}{\xi}{}_A^{\nu} = y^{\nu}\eta_A \frac{1}{m_A}\cdot\left\{-\frac{\varkappa}{c^2(-y^2)^{3/2}} + \frac{3K-\varkappa}{c^2(-y^2)^{3/2}}(M-1) - \frac{\beta_A}{c^4(-y^2)^2} + \frac{3\varkappa N_{A'}^2}{2c^2(-y^2)^{5/2}}\right\} +$$
$$+ \frac{3KN_B\eta^B}{m_A c^2(-y^2)^{3/2}}\cdot u_A^{\nu} + \frac{1}{m_A}\left\{-\frac{3KN_B\eta^B}{c^2(-y^2)^{3/2}} + \frac{\varkappa N_A}{c^2(-y^2)^{3/2}}\right\}u_{A'}^{\nu} \tag{193.b}$$

$$\overset{1}{\xi}{}_A^{\lambda} = -\frac{1}{m_A}\cdot\frac{d^2M_A^{\lambda}}{d\tau_A^2} + \frac{1}{c^2(-y^2)^{3/2}}\eta_A\cdot\eta^{\lambda\rho\alpha\beta}u_{1\rho}u_{2\alpha}\left(-\frac{\varkappa}{m_A}\sigma_{A\beta}\right) -$$
$$- \frac{3\eta^B N_B}{c^2(-y^2)^{5/2}}\cdot\eta_A\,\eta^{\lambda\rho\alpha\beta}u_{A\rho}y_{\alpha}\left[2Gm_{A'}\sigma_{A'\beta} + \left(Gm_{A'} + \frac{q_1q_2}{m_A}\right)\sigma_{A\beta} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2m_A}\left(q_1\mu_{2\beta} + q_2\mu_{1\beta}\right)\right] +$$
$$+ \frac{1}{2c^2m_A(-y^2)^{3/2}}\eta_A\cdot\eta^{\lambda\rho\alpha\beta}u_{A\rho}y_{\alpha}\left(q_1\dot{\mu}_{2\beta} + q_2\dot{\mu}_{1\beta}\right) + \frac{Gm_{A'}}{c^2(-y^2)^{3/2}}\cdot\left(\frac{M_{A'}^{\lambda}}{m_{A'}} - \frac{M_A^{\lambda}}{m_A}\right) -$$
$$- \frac{q_1q_2}{c^2m_A(-y^2)^{3/2}}\left(\frac{\mathcal{E}_{A'}^{\lambda}}{q_{A'}} - \frac{\mathcal{E}_A^{\lambda}}{q_A}\right) + \frac{3Gm_{A'}}{c^2(-y^2)^{5/2}}\eta_A\left\{(\sigma_{A'}y)\sigma_A^{\lambda} + (\sigma_A y)\sigma_{A'}^{\lambda}\right\} +$$
$$+ \frac{3\eta_A}{4m_Ac^2(-y^2)^{5/2}}\left\{(\mu_{A'}y)\mu_A^{\lambda} + (\mu_A y)\mu_{A'}^{\lambda}\right\} +$$
$$+ y^{\lambda}\eta_A\cdot\left\{\eta^{\rho\nu\alpha\beta}u_{1\rho}u_{2\nu}y_{\alpha}\left[Gm_{A'}(\sigma_{A\beta} + \sigma_{A'\beta}) + \frac{1}{4m_A}\left(q_1\mu_{2\beta} + q_2\mu_{1\beta}\right)\right]\frac{G}{c^2(-y^2)^{5/2}} + \right.$$
$$+ \frac{3Gm_{A'}}{c^2(-y^2)^{5/2}}\left(\frac{yM_{A'}}{m_{A'}} - \frac{yM_A}{m_A}\right)\eta_A - \frac{3q_1q_2}{m_Ac^2(-y^2)^{5/2}}\left(\frac{y\mathcal{E}_{A'}}{q_{A'}} - \frac{y\mathcal{E}_A}{q_A}\right)\eta_A +$$
$$+ \left(Gm_{A'}(\sigma_1\sigma_2) + \frac{1}{4m_A}(\mu_1\mu_2)\right) +$$
$$\left. + \frac{15}{c^2(-y^2)^{7/2}}\left(Gm_{A'}(\sigma_1 y)(\sigma_2 y) + \frac{(\mu_1 y)(\mu_2 y)}{4m_A}\right)\right\} \tag{193.c}$$

i $\Delta\xi_A^{\nu}$ és $O\left(\frac{5}{c}\right)$ en el sentit de que, quan particularitzem per a qualsevol referencial, el desenrotllament en potències d'1/c de $\Delta\xi_A^{0}$ comença a $\frac{1}{c^5}$ i el de $\Delta\xi_A^{i}$, a $\frac{1}{c^6}$.

De la mateixa manera, a partir de (188) i de (191.b), tenim:

$$
\begin{aligned}
d_A^{\nu} = {} & \frac{G m_{A'}}{c^2(-y^2)^{3/2}}\, \eta^{B} N_B\, S_A^{\nu} + \frac{1}{c^2(-y^2)^{3/2}}\left(-2G m_{A'}(yS_A) + \frac{1}{2} q_{A'}(y\mu_A)\right)\eta^{B} u_B^{\nu} + \\
& + \frac{\varkappa}{m_A c^2(-y^2)^{3/2}}\,(yS_A)\,\eta_A\, u_A^{\nu} + \frac{2G}{c^2(-y^2)^{3/2}}\,\eta^{\nu\rho\alpha\beta} \underset{A}{S}_{\alpha} \underset{A'}{S}_{\beta}\left(C_1^{B} \underset{B}{u}_{\rho}\right) + \\
& + \frac{3G}{c^2(-y^2)^{5/2}}\,(S_A y)\,\eta^{\nu\rho\alpha\beta} y_{\alpha} \underset{A'}{S}_{\beta}\left(C_2^{B} \underset{B}{u}_{\rho}\right) + \frac{1}{2c^2(-y^2)^{3/2}}\,\eta^{\nu\rho\alpha\beta} \underset{A}{\mu}_{\alpha} \underset{A'}{\mu}_{\beta}\left(C_3^{B} \underset{B}{u}_{\rho}\right) - \\
& - \frac{3}{4c^2(-y^2)^{5/2}}\,(y\mu_A)\,\eta^{\nu\rho\alpha\beta} y_{\alpha} \underset{A'}{\mu}_{\beta}\left(C_4^{B} \underset{B}{u}_{\rho}\right) + \Delta d_A^{\nu}
\end{aligned}
\tag{194}
$$

$C_1^B,\ C_2^B,\ C_3^B,\ C_4^B \in \mathbb{R}$

amb $\Delta d_A^{\nu} = O\left(\frac{5}{c}\right)$, en el sentit explicitat més amunt.

11.3) Les condicions M.R.P..-

D'acord amb (193), (194) i els formularis (C-1) i (C-2) de l'apèndix C, podem escriure: (*)

$$\xi_A^{\mu} = f_A^{I} \cdot W_I^{\mu} \tag{195.a}$$

$$d_A^{\mu} = g_A^{I} \cdot W_I^{\mu} \tag{195.b}$$

(*) La repetició de l'índex I vol dir "suma per a tots els valors d'aquest índex".

on les funcions f_A^I, g_A^I són funcions polinòmiques dels escalars e_J que enumerem a l'apèndix C i els W_I^μ estan també explicitats al mateix apèndix.

Derivant (195) i aplicant (C-3) i (C-4), tenim:

$$\frac{d\xi_\Delta^\mu}{d\tau_{\Delta'}} = \left[f_\Delta^I \cdot M_I^J(\Delta') + \frac{\partial f_\Delta^J}{\partial e_K} \cdot Q_K(\Delta') \right] W_J^\mu \tag{196.a}$$

$$\frac{d\, d_\Delta^\mu}{d\tau_{\Delta'}} = \left[g_\Delta^I \cdot M_I^J(\Delta') + \frac{\partial g_\Delta^J}{\partial e_K} \cdot Q_K(\Delta') \right] W_J^\mu \tag{196.b}$$

Així, serà suficient — encara que no necessari — per que es satisfacin les condicions M.R.P. (190), que es compleixin les relacions següents:

$$f_\Delta^I M_I^J(\Delta') + \frac{\partial f_\Delta^J}{\partial e_K} \cdot Q_K(\Delta') = 0 \tag{197.a}$$

$$g_\Delta^I \cdot M_I^J(\Delta') + \frac{\partial g_\Delta^J}{\partial e_K} \cdot Q_K(\Delta') = 0 \tag{197.b}$$

D'acord amb la descomposició (C-5.b), l'equació (197.a) és equivalent a:

$$\underbrace{f_\Delta^I \cdot M_I^J(\Delta') + \frac{\partial f_\Delta^J}{\partial e_K} \cdot Q_K(\Delta')}_{(s)} = 0 \quad ; \quad \forall s \in \mathbb{N} \tag{198}$$

la qual es pot escriure també, d'acord amb (C-6,9,10,11):

$$\sum_{\substack{l+h=s \\ h\geq 0}} \underset{(l)}{f_\Delta^I} \cdot \underset{(h)}{M_I^J}(\Delta') + \sum_{\substack{l+h=s \\ h>r_K}} \frac{\partial}{\partial e_K} \Big(\underset{(l+r_K)}{f_\Delta^J} \Big) \cdot \underset{(h)}{Q_K}(\Delta') - \eta_\Delta \sum_{D=1,2} \frac{\partial}{\partial N_D} \Big(\underset{s+1}{f_\Delta^J} \Big) = 0 \tag{199}$$

Per a les g_A^J tindrem una expressió anàloga.

En conseqüència, als dos primers termes del primer membre de (199) hi apareixen els ordres inferiors a s de la f_A^J, i a l'últim terme hi surt $\underset{s+1}{f_A^J}$.

Les equacions (193) i (194) ens donen coneixement d'uns pocs termes del desenrotllament de les f_A^J, g_A^J.

Sigui t_A^J l'ordre màxim conegut de f_A^J. L'afirmació: "les funcions f_A^s satisfan les relacions (197) a l'aproximació a la que treballem" significa exactament que la relació (199) es satisfà per a $s \leq t_A^J - 1$. Anàlogament per al g_A^J.

Això és molt senzill de comprovar per a les funcions f_A^J i g_A^J que apareixen a les expressions (193) i (194).

Com a exemple estudiarem en detall el cas de f_A^1 $(w_1^\lambda = y^\lambda)$

$$f_A^1 = \underset{(2)}{f_A^1} + \underset{(4)}{f_A^1} + \dots \tag{200.a}$$

$$\underset{(2)}{f_A^1} = -\eta_A \frac{\varkappa}{m_A c^2 (-y^2)^{3/2}} \tag{200.b}$$

$$\begin{aligned}\underset{(4)}{f_A} = \eta_A \frac{1}{m_A} \Big\{ & \frac{(3k-\varkappa)(M-1)}{c^2(-y^2)^{3/2}} - \frac{\beta_A}{c^4(-y^2)^2} + \frac{3\varkappa N_{\Delta'}^2}{2c^2(-y^2)^{5/2}} + \\ & + \frac{6}{c^2(-y^2)^{5/2}} \cdot \eta^{\rho\nu\alpha\beta} \underset{1\rho}{u} \underset{2\nu}{u} \left[k\, \varepsilon^B \sigma_{B\beta} + \frac{1}{4}(q_1 \mu_{2\beta} + q_2 \mu_{1\beta}) \right] - \\ & - \frac{3}{c^2(-y^2)^{5/2}} \left[k\, \eta^B \frac{yM_B}{m_B} - q_1 q_2 \eta^B \frac{y\varepsilon_B}{q_B} \right] + \frac{3}{c^2(-y^2)^{5/2}} \left[k(\sigma_1\sigma_2) + \frac{1}{4}(\mu_1\mu_2) \right] + \\ & + \frac{15}{c^2(-y^2)^{7/2}} \left[k(\sigma_1 y)(\sigma_2 y) + \frac{1}{4}(\mu_1 y)(\mu_2 y) \right] \Big\}\end{aligned} \tag{200.c}$$

Per tant, en aquest cas tant sols haurem de verificar la relació (199) per a $s \leq 3$:

- per a $s < 3$ és trivialment certa.
- per a $s = 3$:

$$\sum_{l+h=3} \underset{(l)}{f_A^I} \cdot \underset{(h)}{M_I^1}(A') + \frac{\partial}{\partial e_2}\left(\underset{(2)}{f_A^1}\right) \cdot \frac{de_2}{d\tau_{A'}} - \eta_D \cdot \sum_{D=1}^{2} \frac{\partial}{\partial N_D}\left(\underset{(4)}{f_\Delta^1}\right) =$$

$$= \sum_{l+h=3} \underset{(l)}{f_A^I}\, \underset{(h)}{M_I^1}(A') + \frac{3\varkappa N_{A'}}{m_A c^2 (-y^2)^{5/2}} - \frac{1}{m_A} \cdot \frac{3\varkappa N_{A'}}{c^2(-y^2)^{5/2}} = \sum_{l+h=3} \underset{(l)}{f_A^I} \cdot \underset{(h)}{M_I^1}(A')$$

que, es comprova fàcilment, dóna zero.

Com veiem, doncs, les condicions M.R.P. són satisfetes a l'aproximació que treballem, independentment de quins M_A^λ , ε_A^λ i μ_A^λ (quadrivectors) triem.

12.- CONCLUSIO

Hem desenvolupat ací un mètode per a derivar les equacions del moviment per a una partícula de prova amb estructura multipolar finita, en un camp gravitatori i electromagnètic. Aquest mètode ens permet de tractar aproximacions 2^n-polars — per valors petits de n — sens necessitat d'un aparell tant potent com el desenvolupat per Dixon. Al present treball ens centrem a l'aproximació dipolar.

Es fonamental en el nostre mètode la utilització dels sistemes de coordenades de Fermi lligats a la línia d'univers que representa el moviment de translació. Com ja hem vist a l'apartat (3.10) les equacions del moviment que hem obtingut estan totalment d'acord amb les equacions que per a cassos particulars del nostre problema ja es coneixien a la literatura.

Hem obtingut, també, un lagrangià aproximat per a les equacions del moviment de translació d'un sistema d'N cossos extensos, carregats i gravitants. Com ja hem vist a l'apartat (5.3), aquest està d'acord amb els que ja es coneixien per a cassos particulars del nostre problema, aquests són els lagrangians de Fock, Barker & O'Conell, Cho & Hari Dass, Bażański i Breit-Darwin, alguns dels quals han estat derivats mitjançant mètodes de Teoria Quàntica de Camps.

Cal remarcar que el fet de que les equacions del moviment de translació siguin derivables d'un lagrangià depèn de quines línies d'univers $\{L_A\}_{A=1\ldots N}$ triem per a descriure aquest moviment. Veiem que si definim L_A mitjançant la condició de "centre-de-moviment" — una generalització relativista de la condició newtoniana de centre de massa, que definim a l'apartat (3.6) — les equacions que s'obtenen no són derivables d'un lagrangià aproximat. No obstant, trobem una condició per a definir les línies d'univers L_A com a conseqüència d'exigir l'existència d'un lagrangià per al moviment de translació.

Aquesta redefinició de les línies d'univers L_A, segons hem comprovat posteriorment, coincideix amb els resultats obtinguts al respecte per Fustero i Verdaguer [41] en un esquema totalment diferent.

Obtenim també l'equació d'evolució del spin per a cada cos en el nostre problema d'N cossos, a la mateixa aproximació.

Pel que avui sabem d'Astrofísica, no sembla que la contribució electromagnètica introdueixi correccions relevants, fins i tot en el cas d'un sistema binari de pulsars. En canvi, la perllongació dels càlculs purament gravitatoris fins a l'ordre quadrupolar, cosa que estem fent actualment, promet ésser d'aplicació immediata a l'astronomia de posició d'estrelles de neutrons i altres objectes estelars o galàctics.

Per fi, hem obtingut una generalització de les condicions de la Mecànica Relativista Predictiva, en el sentit d'incloure-hi l'estructura multipolar dels cossos.

Hem comprovat, també, que aquestes condicions eren satisfetes per les equacions (144) i (155) del moviment de translació i del spin per al nostre problema d'N cossos, a l'aproximació a la que treballem. Aquestes equacions són, per tant, invariants sota el grup de Poincaré. Això generalitza el resultat ja conegut de que les equacions de Bazansky, així com les d'Einstein, Infeld & Hoffmann i les de Darwin, són invariants sota transformacions de Poincaré a l'aproximació corresponent.[42], [43]

A) MOMENTS MULTIPOLARS (Aproximació 1-PN)

En aquest apèndix escriurem expressions aproximades dels moments multipolars — tant dels MM(NC) com dels MM(C) — que ens seran útils per a escriure els potencials gravitatori i electromagnètic a l'aproximació 1-PN.

Donarem directament els resultats, els quals es poden obtenir utilitzant les equacions: (34), (50), (86), (105), (112), (136) i (137):

$$\mathcal{E}^\circ = \frac{-\mathcal{E}^i u_i}{u_o} = O(1) \quad , \quad M^\circ = \frac{-M^i u_i}{u_o} = O(1) \qquad (1)$$

$$\mu^i = O(1) \quad , \quad \mu^\circ = O(2) \qquad (2)$$

$$S^i = O(1) \quad , \quad S^\circ = O(2) \qquad (3)$$

$$u^i = O(1) \quad , \quad u^\circ = O(0) \qquad (4)$$

$$u^\circ_B = 1 + \frac{1}{4}\hat{\gamma}^{oo}_B + \frac{1}{2}\vec{v}^2_B + O(4) \qquad (5)$$

$$q = O(0) \quad , \quad m = O(0) \qquad (6)$$

$$\xi^i = O(2) \quad , \quad \xi^\circ = O(3) \qquad (7)$$

$$e^{i} = q v^{i} + \frac{d\mathcal{E}^{i}}{dx^{0}} + O(3) \quad , \qquad e^{0} = q u^{0} \tag{8}$$

$$e^{li} = - e^{l} v^{i} - \frac{1}{2}\, \varepsilon^{lik} \mu^{k} + O(3) \tag{9.a}$$

$$e^{l0} = \mathcal{E}^{0} v^{l} - \mathcal{E}^{l} u^{0} + \frac{1}{2}\, \varepsilon^{ljk} \mu^{j} v^{k} + O(4) \tag{9.b}$$

$$m^{00} = m \cdot u^{0 2} + \dot{M}^{0} + O(4) \tag{10.a}$$

$$m^{0i} = m v^{i} + \frac{dM^{i}}{dx^{0}} + O(3) \tag{10.b}$$

$$m^{ij} = m v^{i} v^{j} + \frac{d}{dx^{0}}\left(M^{(i} v^{j)}\right) + \dot{M}^{(i} v^{j)} - \frac{1}{c^{2}}\, \mathcal{E}^{(i} F^{j)}{}_{0} + O(4) \tag{10.c}$$

$$m^{l00} = - u^{0 2} M^{l} + M^{0} v^{l} + \varepsilon^{lkj} S^{k} v^{j} + O(4) \tag{11.a}$$

$$m^{l0i} = - M^{l} v^{i} + \frac{1}{2}\, \varepsilon^{ilk} S^{k} + O(3) \tag{11.b}$$

$$m^{lij} = - M^{l} v^{i} v^{j} + v^{(i} \varepsilon^{j)lk} S^{k} + O(4) \tag{11.c}$$

$$\frac{R_{B}}{u^{0}_{B}} = m_{B}\left(1 + \frac{3}{2}\vec{v}_{B}^{2} - \frac{1}{4}\hat{\gamma}^{00}_{B}\right) + \dot{M}^{0}_{B} + \dot{M}^{l}_{B} v^{l}_{B} + \frac{d}{dx^{0}}\left(M^{l}_{B} v^{l}_{B}\right) -$$

$$+ \frac{2}{c^{2}}\, \mathcal{E}^{l}_{B} \cdot \partial_{l} \underset{B}{A}{}_{0} - \frac{1}{2}\, \partial_{l} \hat{\gamma}^{00}_{B} \cdot M^{l}_{B} + \frac{1}{c^{2}} \underset{B}{A}{}_{0} \cdot q_{B} + O(4)$$

$$\frac{R^{l}_{B}}{u^{0}_{B}} = - M^{l}_{B}\left(1 - \frac{1}{4}\hat{\gamma}^{00}_{B} + \frac{3}{2}\vec{v}_{B}^{2}\right) + M^{0}_{B} v^{l}_{B} + 2\, \varepsilon^{lkj} \underset{B}{S}{}^{k} v^{j}_{B} - \frac{1}{c^{2}} \underset{B}{A}{}_{0} \cdot \mathcal{E}^{l}_{B}$$

$$\frac{J_B}{u_B^0} = q_B\left(1-\frac{1}{4}\hat{\gamma}_B^{00}\right) + \frac{G}{c^2}\underset{B}{A}_0 m_B - \frac{1}{4}\,{}_B\partial_\ell \hat{\gamma}_B^{00}\cdot \mathcal{E}_B^\ell + \frac{G}{c^2}\,{}_B\partial_\ell \underset{B}{A}_0 \cdot M_B^\ell + O(4) \qquad (14)$$

$$\frac{J_B^\ell}{u_B^0} = \left(1-\frac{1}{4}\hat{\gamma}_B^{00}\right)\left\{-\mathcal{E}_B^\ell + \mathcal{E}_B^0 v_B^\ell + \frac{1}{2}\varepsilon^{\ell jk}\underset{B}{\mu}^j v_B^k\right\} - \frac{G}{c^2}\underset{B}{A}_0 \cdot M_B^\ell + O(4) \qquad (15)$$

Les equacions (5), (12), (13), (14) i (15) estan "renormalitzades". Això vol dir que hem escrit $\underset{B}{\hat{\gamma}}^{\mu\nu}$ i $\underset{B}{A}_\mu$ en lloc de $\hat{\gamma}^{\mu\nu}$ i A_μ ; és a dir, hem eliminat els termes d'auto-camp i auto-potencial.

APENDIX B

Relació entre els MM(C) definits respecte de dues línies temporals properes:

Siguin L i $\tilde{L}$ dues línies temporals i siguin $\{X^{\bar\alpha}\}_{\alpha=0,1,2,3}$ i $\{X^{\bar\alpha'}\}$ dos sistemes de coordenades de Fermi lligats a L i $\tilde{L}$, respectivament. Sigui $\{x^\nu\}_{\nu=0,1,2,3}$ un sistema de referència qualsevol tal que x^0 sigui temporal.

De (136.a), tenim:

$$m^{\bar\rho\bar\alpha\bar\beta} = \lambda^{\bar\alpha}_{\mu}\cdot\lambda^{\bar\beta}_{\nu}\cdot\left(\lambda^{\bar\rho}_{\sigma} - \delta^{\bar\rho}_{0}\, u_\sigma\right) m^{\sigma\mu\nu} \tag{B.1}$$

i, utilitzant la definició (34), $m^{\sigma\mu\nu}$ està relacionat amb els MM(NC) referits a $\tilde{L}$, per:

$$\frac{1}{u^0}\, m^{\sigma\mu\nu} = \frac{1}{\tilde u^0}\cdot\left(\tilde m^{\sigma\mu\nu} - \tilde m^{\mu\nu}\cdot\Delta^\sigma\right)$$

$$\Delta^\sigma_{(s)} = \tilde z^\sigma(\tilde s(s)) - z^\sigma(s) \quad ; \quad \tilde z^0(\tilde s(s)) = z^0(s) \tag{B.2}$$

D'acord amb (86) i (64), i utilitzant (B.1,2), tenim:

$$-M^{\bar\ell} = u_\mu u_\nu\, \lambda^{\bar\ell}_{\sigma}\, \frac{u^0}{\tilde u^0}\left(\tilde m^{\sigma\mu\nu} - \tilde m^{\mu\nu}\cdot\Delta^\sigma\right) \tag{B.3}$$

Evidentment, l'expressió del segon membre no és covariant. Més encara, hi apareixen contraccions de quantitats que no estan definides al mateix punt.

Utilitzant (136), podem escriure:

$$u_\mu u_\nu \tilde m^{\sigma\mu\nu} = (u\tilde u)\Big[(u\tilde u)\Big(\frac{\tilde M}{\tilde u^0}\,\tilde u^\sigma - \tilde M^\sigma\Big) + \frac{1}{\tilde u^0}\,\tilde u^\sigma \eta^{0\mu\alpha\beta}\tilde S_\alpha \tilde u_\beta u_\mu - \tag{B.4.a}$$
$$- \eta^{\sigma\mu\alpha\beta} u_\mu \tilde S_\alpha \tilde u_\beta\Big]$$

$$\tilde{m}^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = \tilde{m}\,(u\tilde{u})^2 - \frac{d}{d\tilde{s}}\left(\frac{1}{\tilde{u}^0}\,\tilde{S}^{\sigma\mu}\tilde{u}^\nu\right) u_\mu u_\nu + \frac{\delta\tilde{M}^\nu}{\delta\tilde{s}}\,u_\nu\,(u\tilde{u}) - (u\tilde{u})\,\eta^{\mu\sigma\nu\rho} u_\mu \tilde{\xi}_\sigma \tilde{S}_\nu \tilde{u}_\rho -$$

$$- \frac{1}{c^2}\left[(u\tilde{\mathcal{E}})\cdot u_\nu \tilde{F}^{\nu\sigma}\tilde{u}_\sigma + \frac{1}{2}\,(u_\nu + \tilde{u}_\nu (u\tilde{u}))\, u_\mu \eta^{\mu\sigma\alpha\beta}\tilde{F}^\nu{}_\sigma \tilde{\mu}_\alpha \tilde{u}_\beta\right] \qquad \text{(B.4.b)}$$

on: $u\tilde{u} = u_\sigma \tilde{u}^\sigma$ i $u\tilde{\mathcal{E}} = u_\sigma \tilde{\mathcal{E}}^\sigma$. Les quantitats amb ($\sim$) són definides al punt $\tilde{z}^\rho(\tilde{s}(s))$.

Si ara prenem $\tilde{M}^\alpha = \tilde{\mathcal{E}}^\alpha = 0$ tindrem, de (B.4):

$$\tilde{m}^{\sigma\mu\nu} u_\mu u_\nu = (u\tilde{u})\cdot\left[\frac{1}{\tilde{u}^0}\eta^{0\mu\alpha\beta}\tilde{S}_\alpha \tilde{u}_\beta u_\mu\cdot \tilde{u}^\sigma - \eta^{\sigma\mu\alpha\beta}\tilde{S}_\alpha \tilde{u}_\beta u_\mu\right] \qquad \text{(B.5.a)}$$

$$\tilde{m}^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = \tilde{m}\,(u\tilde{u})^2 - \frac{d}{d\tilde{s}}\left(\frac{1}{\tilde{u}^0}\eta^{0\mu\alpha\beta}\tilde{S}_\alpha \tilde{u}_\beta \tilde{u}^\nu\right) u_\mu u_\nu - (u\tilde{u})\,\eta^{\sigma\nu\rho\mu} u_\sigma \tilde{\xi}_\nu \tilde{S}_\rho \tilde{u}_\mu -$$

$$- \frac{1}{2c^2}\left[u_\nu + \tilde{u}_\nu (u\tilde{u})\right] u_\mu \eta^{\mu\sigma\alpha\beta}\tilde{F}^\nu{}_\sigma \tilde{\mu}_\alpha \tilde{u}_\beta \qquad \text{(B.5.b)}$$

Així, tenint en compte els resultats de l'apèndix A,

$$\tilde{m}^{0\mu\nu} u_\mu u_\nu = 0 \qquad ; \quad \tilde{m}^{i\mu\nu} u_\mu u_\nu = -\epsilon^{ijk}\tilde{S}^j (v^k - \tilde{v}^k) + O(4) \qquad \text{(B.6.a)}$$

$$\tilde{m}^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = \tilde{m}\,(u\tilde{u})^2 + O(4) \qquad \text{(B.6.b)}$$

$$-M^{\bar{\ell}} = \lambda^{\bar{\ell}}_i \,\frac{u^0}{\tilde{u}^0}\left[-\epsilon^{ijk}\tilde{S}^j (v^k - \tilde{v}^k) - m(u\tilde{u})^2 \Delta^i\right] + O(4) \qquad \text{(B.7)}$$

I, per un canvi de coordenades:

$$\left.\begin{aligned} &M^\nu = \lambda^\nu_{\bar{\rho}}\, M^{\bar{\rho}} = \lambda^\nu_{\bar{j}}\, M^{\bar{j}} \quad ; \quad \lambda^\nu_{\bar{j}}\cdot\lambda^{\bar{j}}_\alpha = \delta^\nu_\alpha - u^\nu u_\alpha \\ &M^\ell = \frac{u^0}{\tilde{u}^0}\left[\epsilon^{\ell jk}\tilde{S}^j (v^k - \tilde{v}^k) + m(u\tilde{u})^2\Delta^\ell + m(\vec{v}\cdot\vec{\Delta})\, v^\ell\right] + O(4) \\ &M^0 = -\frac{1}{u_0}\, M^i u_i \end{aligned}\right\} \qquad \text{(B.8)}$$

De la mateixa manera tindrem per al moment dipolar elèctric:

$$-\varepsilon^{\bar{i}} = \lambda^{\bar{i}}_{\sigma} \, \frac{u^0}{\tilde{u}^0} \, (\tilde{e}^{\sigma\mu} - \Delta^{\sigma}\tilde{e}^{\mu}) u_{\mu} \tag{B.9}$$

$$\tilde{e}^{\sigma\mu}u_{\mu} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tilde{u}^0}\,\eta^{o\alpha\beta\nu}u_{\alpha}\tilde{\mu}_{\beta}\tilde{u}_{\nu}\,\tilde{u}^{\sigma} - \eta^{\sigma\nu\alpha\beta}u_{\nu}\tilde{\mu}_{\alpha}\tilde{u}_{\beta}\right)$$

$$\tilde{e}^{o\mu}u_{\mu} = 0 \quad ; \quad \tilde{e}^{i\mu}u_{\mu} = -\epsilon^{ijk}\tilde{\mu}^{j}(V^{k}-\tilde{V}^{k}) + O(4) \tag{B.10.a}$$

$$\tilde{e}^{\mu}u_{\mu} = q\,(u\tilde{u}) + \frac{d}{d\tilde{s}}\left(-\frac{1}{2\tilde{u}^0}\,\eta^{o\mu\alpha\beta}\,\tilde{\mu}_{\alpha}\tilde{u}_{\beta}\right)u_{\mu} = q(u\tilde{u}) + O(4) \tag{B.10.b}$$

$$\varepsilon^{\bar{i}} = \frac{u^0}{\tilde{u}^0}\left[\,q(u\tilde{u})\cdot\Delta^{l} + \epsilon^{ljk}\tilde{\mu}^{j}\,(V^{k}-\tilde{V}^{k})\right]\cdot\lambda^{\bar{i}}_{l} + O(4) \tag{B.11}$$

$$\varepsilon^{i} = \frac{u^0}{\tilde{u}^0}\,\left(q\,(u\tilde{u})\Delta^{l} + \epsilon^{ljk}\tilde{\mu}^{j}\,(V^{k}-\tilde{V}^{k})\right)\cdot\left(\delta^{i}_{l} - u^{i}u_{l}\right) + O(4) \tag{B.12}$$

$$\varepsilon^{0} = -\,\frac{1}{u_0}\,\varepsilon^{i}u_{i}$$

Per fi, en el supòsit de que $\Delta^{l} = O(2)$ — llavors, $V^{k}-\tilde{V}^{k} = O(3)$ — tindrem, comparant (B.8) i (B.12):

$$M^{l} = m\Delta^{l} + O(4)$$

$$\varepsilon^{l} = q\,\Delta^{l} + O(4)$$

$$\varepsilon^{l} = \frac{q}{m}\,M^{l} + O(4) \tag{B.13}$$

APENDIX C

C.1) Vectors que es poden formar amb y^ν, u_A^μ, S_C^μ, M_D^λ, ε_F^ρ, μ_G^σ :

$$W_1^\mu = y^\mu = \eta^B z_B^\mu \quad , \quad \eta_B = (-1)^{B+1}$$
$$W_{2B}^\mu = u_B^\mu$$
$$W_{3B}^\lambda = S_B^\lambda \quad , \quad W_{4B}^\lambda = M_B^\lambda$$
$$W_{5B}^\lambda = \mu_B^\lambda \quad , \quad W_{6B}^\lambda = \varepsilon_B^\lambda$$
$$W_{7AB}^\lambda = \eta^{\lambda\nu\alpha\beta} u_{A\nu}\, y_\alpha\, S_{B\beta}$$
$$W_{8B}^\lambda = \eta^{\lambda\nu\alpha\beta} u_{1\nu}\, u_{2\alpha}\, S_{B\beta}$$
$$W_{9B}^\lambda = \eta^{\lambda\nu\alpha\beta} u_{B\nu}\, S_{1\alpha}\, S_{2\beta} \qquad ; \quad B = 1,2$$

i els anàlegs a W_{7AB}^λ, W_{8B}^λ i W_{9B}^λ , canviant S_B^α per ε_B^α , M_B^α o μ_B^α.

Els representarem genèricament per W_I^μ . Els que hem explicitat són els que apareixen a les expressions (193) i (194).

C.2) Escalars:

$$e_{1B} = N_B = y u_B \quad ; \quad e_2 = (-y^2)^{-1/2}$$
$$e_3 = M - 1 = u_1 u_2 - 1 \quad ; \quad e_{4B} = y S_B$$
$$e_{5AB} = u_A S_B \quad ; \quad e_6 = S_1 S_2$$

$$e_{7B} = \eta^{\rho\nu\alpha\beta} \underset{1}{u}_{\rho} \underset{2}{u}_{\nu} y_{\alpha} \underset{B}{S}_{\beta}$$

$$e_{8B} = \eta^{\rho\nu\alpha\beta} \underset{B}{u}_{\rho} y_{\nu} \underset{1}{S}_{\alpha} \underset{2}{S}_{\beta}$$

$$e_{9} = \eta^{\rho\nu\alpha\beta} \underset{1}{u}_{\rho} \underset{2}{u}_{\nu} \underset{1}{S}_{\alpha} \underset{2}{S}_{\beta}$$

i els anàlegs a e_{4B}, $e_{5\Delta B}$, e_{6}, e_{7B}, e_{8B} i e_{9}, canviant $\underset{B}{S}_{\beta}$ per $\underset{B}{M}_{\beta}$, $\underset{B}{\varrho}_{\beta}$ o $\underset{B}{\mu}_{\beta}$. Els representarem genèricament per e_{K}.

Tots els productes escalars que apareixen a (C.1) i a (C.2), així com el tensor de Levi-Civita, són referits a la mètrica (184).

C.3) Particularització a un referencial qualsevol:

$$\underset{o}{w}_{I}^{\lambda} \equiv \left(w_{I}^{\lambda}\right)_{z_1^o = z_2^o = x^o} \quad ; \quad \underset{o}{e}_{I} = \left(e_{I}\right)_{z_1^o = z_2^o = x^o}$$

$$\underset{o}{w}_{1}^{\mu} = (0, \vec{x}) \quad , \quad \underset{o}{w}_{2B}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{1-v_B^2}} (1, \vec{v}_B) = (1+O(2), \vec{v}_B + O(3))$$

$$\underset{o}{w}_{7\Delta B}^{\lambda} = \left(-\vec{v}_A \cdot (\vec{x} \wedge \vec{S}_B) + O(4), \; -\vec{x} \wedge \vec{S}_B + O(3)\right)$$

$$\underset{o}{w}_{8B}^{\lambda} = \left(\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \wedge \vec{S}_B) + O(5), \; \eta^{c} \vec{v}_c \wedge \vec{S}_B + O(4)\right)$$

$$\underset{o}{w}_{9B}^{\lambda} = \left(\vec{v}_B \cdot (\vec{S}_1 \wedge \vec{S}_2) + O(5), \; -\vec{S}_1 \wedge \vec{S}_2 + O(4)\right)$$

$$\underset{o}{e}_{1B} = -\vec{x} \cdot \vec{v}_B + O(3) \quad , \quad \underset{o}{e}_{2} = \frac{1}{x}$$

$$\underset{o}{e}_{3} = \frac{1}{2} \left(\eta^{B} \vec{v}_B\right)^2 + O(4) \quad , \quad \underset{o}{e}_{4A} = -\vec{x} \cdot \vec{S}_A$$

$$\underset{o}{e}_{5\Delta B} = \vec{S}_B \cdot (\vec{v}_B - \vec{v}_A) + O(4) \quad , \quad \underset{o}{e}_{6} = -\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + O(4)$$

$$e^{\circ}_{7B} = \vec{S}_B \cdot (\vec{x}\wedge\vec{v}_c)\eta^c + O(4)$$

$$e^{\circ}_{8B} = \vec{x} \cdot (\vec{s}_1\wedge\vec{s}_2) + O(4)$$

$$e^{\circ}_{9} = \eta^c\vec{v}_c \cdot (\vec{s}_1\wedge\vec{s}_2) + O(5)$$

Aquesta tabla ens permet assignar a cada escalar e_K el número natural: $r_K = \mathrm{Ord}\,[e^{\circ}_K]$

D'aquesta manera , podrem classificar els termes d'una funció polinòmica qualsevulla: $$f = \sum b_{K_1\cdots K_n}\, e_{K_1}^{a_1}\cdots e_{K_n}^{a_n} \qquad \text{(C.4-a)}$$

segons: $$f = \sum_s f_{(s)} \qquad \text{(C.4-b)}$$

$$f_{(s)} = \sum_{r_1\cdot a_1+\ldots+r_n\cdot a_n = s} b_{K_1\cdots K_n}\, e_{K_1}^{a_1}\cdots e_{K_n}^{a_n} \qquad \text{(C.4-c)}$$

Direm que $f_{(s)}$ és la component d'ordre s de la funció polinòmica.

Es fàcil comprovar que, d'acord amb la definició (7):

$$\mathrm{Ord}\,[f] = \min \{ s\in\mathbb{N} \,/\, f_{(s)} \neq 0 \}$$

També es demostra trivialment que, per a una funció polinòmica dels escalars e_K , tenim:

$$\underline{\left(\frac{\partial f}{\partial e_K}\right)}_{(s)} = \frac{\partial}{\partial e_K}\left(f_{(s+r_K)}\right) \qquad \text{(C.5)}$$

El que hem dit aquí és vàlid també si canviem "funció polinòmica" per "sèrie polinòmica".

Derivades:

D'acord amb les expressions (193) i (194) i la tria que hem de fer de $M_A^\lambda(\tau_A; u_A^\rho, S_A^\nu)$, $e_A^\lambda(\tau_A; u_A^\rho, S_A^\nu)$ i $\mu_A^\lambda(\tau_A; u_A^\rho, S_A^\nu)$, quan derivem un vector W_I^μ dels enumerats a (C.1) respecte de τ_B, obtindrem una nova combinació linial dels W_J^μ:

$$\frac{dW_I^\mu}{d\tau_B} = M_I^J(B) \cdot W_J^\mu \tag{C.6}$$

I, de manera anàloga, per a un escalar e_K:

$$\frac{de_K}{d\tau_B} = Q_K(B) \tag{C.7}$$

on $M_I^J(B)$, $Q_K(B)$ són sèries polinòmiques dels escalars e_I.

D'acord amb la hipòtesi (2.2-E) i la definició de $d\tau_B^2$ (184), podem prendre com a regla que la derivació respecte de τ_B d'un escalar e_K dels enumerats a (C.2) augmenta en una unitat l'ordre de la magnitud derivada. L'única excepció a aquesta regla són els escalars:

$$e_{1D} = N_D \quad ; \quad r_{1D} = 1 \quad ; \quad \frac{dN_D}{d\tau_B} = \eta_B u_D u_D + y \xi_B \cdot \delta_{BD} \tag{C.8}$$

En conseqüència:

$$* \quad \forall K \neq 1D \quad ; \quad \underset{s}{Q_K}(B) = 0 \quad , \quad \text{si} \quad s < r_K + 1$$

$$* \quad \underset{(0)}{Q_{1D}}(B) = \eta_B \quad , \quad Q_{1D}(B) - \underset{(0)}{Q_{1D}}(B) = \eta_B (M-1)\, \delta_{BD'} + y\, \xi_B \cdot \delta_{BD} \tag{C.9}$$

Per a la derivació dels vectors respecte val una regla semblant i, d'acord amb (C.1) i (C.3) tenim:

$$r < 0 \quad \Rightarrow \quad \underset{(r)}{M}{}_I^J(B) = 0 \qquad (C.10)$$

REFERENCIES

1.- EINSTEIN, A.; INFELD, L. & HOFFMANN, B.: Ann. Math. 39, 65 (1939)

2.- FOCK, V.: J. Phys. Moscow, 1, 81 (1939)

3.- PETROVA, N.: J. Eksp. Teor. Phys. 19, 989 (1949)

4.- INFELD, L.: Acta Phys. Polon. 13, 187 (1954)

5.- INFELD, L. & PLEBANSKY, J.: "Motion and Relativity" Pergamon Press (Warszava, 1960)

6.- FOCK, V.: "The theory of space, time and gravitation" Pergamon Press (London, 1964)

7.- PAPAPETROU, A.: Proc. R. Soc. London, A 209, 248 (1951)

8.- TULCZYJEW, W.: Acta Phys. Polon. 18, 37 (1959)

9.- HULSE, R.A. & TAYLOR, J.H.: Astrophys. J. Lett. 195, L 51 (1975)

10.- DIXON, W.G.: Proc. R. Soc. London, A 314, 499 (1970)

11.- DIXON, W.G.: Proc. R. Soc. London, A 319, 509 (1970)

12.- DIXON, W.G.: Gen. Rel. Grav. 4, 199 (1973)

13.- DIXON, W.G.: Gen. Rel. Grav. 8, 595 (1977)

14.- BEIGLBOCK, W.: Commun. Math. Phys. 5, 106 (1967)

15.- EHLERS, J. & RUDOLPH, E.: Gen. Rel. Grav. 8, 197 (1977)

16.- BARKER, B.M. & O'CONELL, R.F.: Phys. Rev. D 12, 2, 329 (1975)

17.- CHO, C.F. & HARI DASS, N.D.: Ann. Phys. 96, 406 (1976)

18.- LICHNEROWICZ, A.: "Elementos de cálculo tensorial" Aguilar (Madrid, 1968)

19.- OHTA, T., OKAMURA, H.; KIMURA, T. & HIIDA, K.:
Prog. Theor. Phys. 50, 2, 492 (1973)

20.- LANDAU, L. & LIFSHITZ, E.: "Théorie des champs"
Editions MIR (Moscou, 1967)

21.- HAVAS, P.: International School of Physics "ENRICO FERMI",
LXVII Course (Varenna, 1976)

22.- DIXON, W.G.: International School of Physics "ENRICO FERMI",
LXVII Course (Varenna, 1976).

23.- BARGMANN, V., MICHEL, L. & TELEGDI, V.L.: Phys. Rev. Lett. 2, 435 (1959)

24.- JACKSON, J.D.: "Classical Electrodynamics"
John Wiley & Sons, Inc. (New York, 1975)

25.- HAGEDORN, R.: "Relativistic Kinematics" Benjamin (1964)

26.- BAZANSKY, S.: "The equations of motion and the action principle in General Relativity" in: "Recent developments in General Relativity". Pergamon Press (Warszawa, 1962)

27.- BARKER; B.M. & O'CONELL, R.F.: J. Math. Phys. 18, 9, 1818 (1977)

28.- BERESTETSKII, V.B., LIFSHITZ, E. & PITAEVSKII, L.P.:
"Teoría Cuàntica Relativista" Reverté, (Barcelona, 1971)

29.- MISNER, C.W., THORNE, K.S. & WHEELER, J.A.: "Gravitation"
W.H. Freeman & Co. (San Francisco, 1973)

30.-BORNER, G., EHLERS, J. & RUDOLPH, E.: Astron. & Astrophys. 44, 417 (1975)

31.- HILL, R.N.: J. Math. Phys. 8, 201 (1967)

32.- CURRIE, D.G.: J. Math. Phys. 4, 1470 (1973)

33.- CURRIE, D.G., JORDAN, T.F. & SUDARSHAN, E.C.G.: Rev. Mod. Phys. 35, 350 (1963)

34.- DROZ-VINCENT, P.: Physica Scripta, 2, 129 (1970)

35.- BEL, L.: Ann. Inst, H. Poincaré, 14, 89 (1971)

36.- HICKS, N.J.: "Notes on differential geometry" D. Van Nostrand Company, Inc. (Princeton, 1965)

37.- GODBILLON, C.: "Géométrie différentielle et mécanique analytique" Hermann (Paris, 1969)

38.- HUREWICZ, W.: "Sobre ecuaciones diferenciales ordinarias" Ediciones Rialp, S.A. (Madrid, 1966)

39.- LAPIEDRA, R. & MAS, L.: Phys. Rev, D 13, 28o5 (1976)

40.- LAPIEDRA; R. & MUSSONS, A.: An. Fis. 72, 109 (1976)

41.- FUSTERO, X. i VERDAGUER, E.: "Interacciones entre sistemas de partículas en Mecànica Relativista Predictiva" (no publicat)

42.- MAS, L.: C, R. Acad. Sc. Paris, 271, 206 (1970)

43.- HAVAS, P. & STAECHEL, J.: Phys. Rev. 185, 5, 1636 (1969)