



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Àlgebra Lineal i Teoria de Grafs. Teorema de Tutte.

Autor: Horténsia Álvarez Sampons

Directora: Dra. Maria Eulàlia Montoro López

Realitzat a: Departament Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 13 de juny de 2022

Resum

Aquest treball, aprofundeix la relació entre alguns conceptes d'Àlgebra Lineal i la Teoria de Grafs. Hi ha dos grans blocs: en el primer, tractarem temes bàsics d'àlgebra, com són els determinants, teoria espectral, forma canònica de Jordan i matrius no negatives, des de la perspectiva dels grafs, per altra banda, el segon bloc tracta la relació dels grafs amb el teorema de Tutte i aborda aquest amb més profunditat estudiant també alguna de les seves conseqüències i la seva relació amb els grafs primers.

Abstract

This project explores in depth into the relationship between some concepts of Linear Algebra and Graph Theory. There are two main blocks. In the first one, we will deal with basic topics of algebra, such as: determinants, spectral theory, Jordan's canonical form and non-negative matrices. All of them from the perspective of Graphs Theory. On the other hand, the second block deals with the relationship between graphs and the theorem of Tutte, and it approaches this last one with more depth. We will also study some of its consequences and its relationship with the prime graphs.

Agraïments

Vull agrair a tothom que m'ha donat suport tant amb aquest treball com al llarg del grau.

En concret, m'agradaria donar moltes gràcies a la meva tutora, la Dra. Eulàlia Montoro, per presentar-me un tema que m'ha apassionat i en el qual no havia pensa. Per tot el suport i l'ajuda que m'ha donat. Encara que això portes a haver de contestar-me els correus en horaris intempestius.

També la meva família, tant la biològica com la que he conegut en al llarg d'aquests anys d'estudi, per aguantar-me tant en els meus moments bons com en els dolents, per animar-me a no rendir-me mai, i pel seu suport incondicional, sense ells no seria aquí avui.

I també voldria donar gràcies a tots els que ús preneu el temps de llegir aquest treball, fet amb tant esforç i amb ajuda de tanta gent.

Índex

1	Notació i conceptes bàsics	1
2	Introducció	7
2.1	Àlgebra lineal bàsica i Grafs	8
2.1.1	Determinants i grafs bipartits ponderats	12
2.1.2	Determinants i grafs dirigits ponderats	12
2.1.3	Forma Canònica de Jordan i Grafs	15
3	Matrius no negatives	18
4	Valors propis i grafs dirigits	25
5	Teorema de Tutte	31
5.1	Pfaffià d'una matriu	32
5.2	Grafs primers	42

Capítol 1

Notació i conceptes bàsics

En aquest capítol farem un repàs als conceptes bàsics i la notació que usarem al llarg del treball.

- Sigui \mathbb{F} un cos, podrà ser \mathbb{R} el cos dels **reals** o \mathbb{C} el cos dels complexos.
- $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ denota una **matriu** de m files i n columnes amb coeficients reals.
- Notarem el **determinant** d'una matriu A com $\det(A)$.
- El **rang** d'una matriu $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, és el màxim de files/columnes linealment independents. És a dir, és la dimensió de la submatriu quadrada més gran amb determinant no nul.
- Anomenarem A^t a la **transposada** de la matriu A .
- Direm que $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ és **diagonal dominant** si $|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$.

Exemple 1.0.1. La matriu

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3} \quad (1.0.1)$$

és diagonal dominant.

- Definirem els **valors propis** d'una matriu $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ com les arrels λ del polinomi $\det(A - \lambda \text{Id}) = 0$.

Exemple 1.0.2. Usant la matriu de l'exemple anterior tenim que $\det(A - \lambda \text{Id}) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 25\lambda + 15$, les arrels d'aquest polinomi són $\lambda = 4 + i, 4 - i, 1$, per tant, seran els valors propis.

- Definim **espectre** de $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ com $\text{Spec}(A) = \{\lambda \text{ tal que } \det(A - \lambda \text{Id}) = 0\}$.

Exemple 1.0.3. Seguint de l'exemple anterior tenim que $\text{Spec}(A) = \{4 + i, 4 - i, 1\}$.

- S_n és el **conjunt de les permutacions** d'ordre n .

- Sigui σ una permutació de m elements

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(m) \end{pmatrix} \quad (1.0.2)$$

considerem la matriu identitat $\text{Id}=(e_{ij})_{0 \leq i,j \leq m}$. P serà **matriu permutació** si

$$P = \begin{pmatrix} \sigma(e_1) \\ \vdots \\ \sigma(e_m) \end{pmatrix} \quad (1.0.3)$$

és a dir que cada fila i columna tindrà únicament un 1.

Exemple 1.0.4. La matriu

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (1.0.4)$$

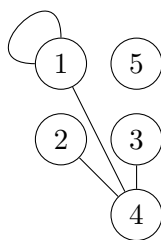
és de permutació, en canvi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (1.0.5)$$

no ho és, ja que la primera fila i la segona columna tenen dos valors no nuls.

- δ_{ik} són les **deltes de Kronecker**, la funció valdrà $\delta_{ik} = 1$ si $i = k$ i 0 altrament.
- Denotarem $G=(V,E)$ a un **graf**. V serà el conjunt dels seus **vèrtexs** i E representarà les unions entre ells, és a dir les **arestes**.

Exemple 1.0.5. La següent figura és un graf :



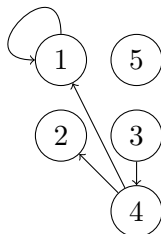
$G= \{V, E\}$ on el conjunt de vèrtexs és $V= \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i el conjunt d'arestes és $E= \{(1, 1), (1, 4), (2, 4), (3, 4)\} = \{(1, 1), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$.

- Anomenarem **ordre** d'un vèrtex, en un graf, a la quantitat d'arestes incidents en aquest.

Exemple 1.0.6. Mirant el graf de l'exemple anterior tenim : el vèrtex 4 té ordre 3, el vèrtex 1 té ordre 2, els vèrtexs 2 i 3 tenen ordre 1 i el vèrtex 5 té ordre 0.

- Direm que un **graf és dirigit** o un **digraf** D si les arestes tenen una orientació.

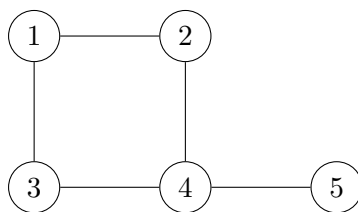
Exemple 1.0.7. Afegint orientació a les arestes del graf anterior obtenim un graf dirigit:



observem que a l'afegir sentit a les arestes canvia l'ordre dels vèrtexs, ara tindrem que: el vèrtex 1 té ordre 2, els vèrtexs 2 i 4 tenen ordre 1 i els vèrtexs 3 i 5 tenen ordre 0.

- Un **factor** d'un graf G , és un subgraf on tots els vèrtexs tenen el mateix ordre.

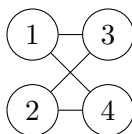
Exemple 1.0.8. Per exemple, donat:



un factor d'aquest podria ser subgraf format pels vèrtexs 1,2,3.

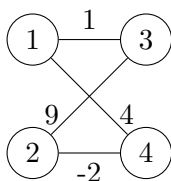
- Un **graf bipartit**, és aquell en què podem separar els vèrtexs en dos conjunts disjunts, tals que, les arestes només poden unir un vèrtex d'un conjunt a l'altre.

Exemple 1.0.9. Tenim dos conjunts de vèrtexs $V_1 = \{1, 2\}$ i $V_2 = \{3, 4\}$



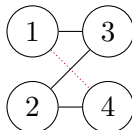
- Direm que un **graf és ponderat**, si les arestes tenen un valor que anomenarem pes associat.

Exemple 1.0.10. Per exemple, en el cas anterior afegint pesos obtenim el graf ponderat:

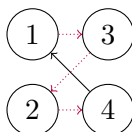


- Un **camí** en un graf, és una seqüència de vèrtexs connectats mitjançant una aresta entre cada vèrtex i el següent. Serà un **camí dirigit** si el graf és dirigit.

Exemple 1.0.11. Un camí d'1 a 4 seria per exemple l'aresta (1,4) :

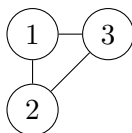


si el graf fos dirigit com a la següent imatge, un camí d'1 a 4 seria (1,3),(2,3) i (2,4):

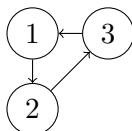


- G és un **graf connex** si existeixen camins entre qualsevol parella de vèrtexs.

Exemple 1.0.12. Un exemple de graf connex es correspondria a la següent figura :

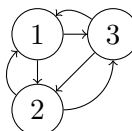


un graf connex dirigit seria:



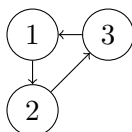
- Un graf G és **fortament connex** si entre dos vèrtexs qualssevol existeix un camí en els dos sentits.

Exemple 1.0.13. El següent graf és fortament connex:

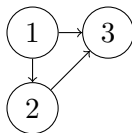


- Un **cicle** de G és un camí tancat. Si G no té cicles, direm que és acíclic.

Exemple 1.0.14. El següent graf té un cicle {1,2,3}



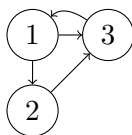
en canvi,



no té cap cicle.

- Un **passeig** de G és una seqüència finita de vèrtexs, (v_1, \dots, v_k) , tal que, entre (v_i, v_{i+1}) hi ha una aresta per $i=1, \dots, k-1$.

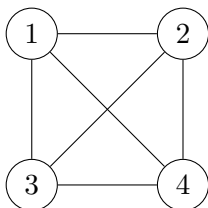
Exemple 1.0.15. El següent graf:



té un passeig passant vèrtex $1 \rightarrow$ vèrtex $3 \rightarrow$ vèrtex $1 \rightarrow$ vèrtex $2 \rightarrow$ vèrtex 3 .

- Un **graf complet**, és un graf on cada parella de vèrtexs està connectada per una aresta.

Exemple 1.0.16. Sigui



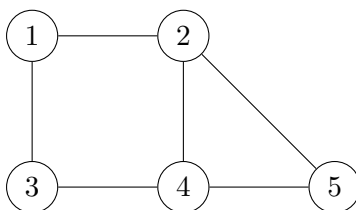
és un graf complet.

- Un **graf pla**, és un graf que es pot dibuixar en el pla, sense que les seves arestes s'intersequin.

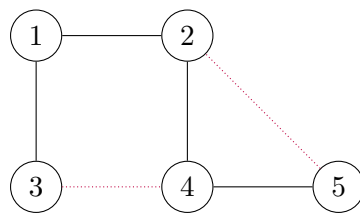
Exemple 1.0.17. Tots els grafs dels exemples utilitzats fins ara són plans.

- Un **emparellament** d'un graf és un conjunt M format per les arestes d'un graf que no tenen vèrtexs en comú.

Exemple 1.0.18. Sigui el graf

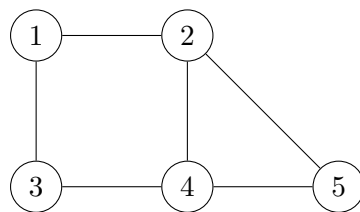


un possible emparellament seria:



- Una **matriu d'adjacència**, A , d'un graf G_A és aquella que assigna a cada aresta del graf un pes d'1.

Exemple 1.0.19. Considerem el graf de l'exemple anterior:



la seva matriu d'adjacència serà :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.0.6)$$

Capítol 2

Introducció

El projecte

Aquest treball pretén estudiar la relació simbiòtica entre l'Àlgebra Lineal i la Teoria de Grafs, usant com a referència inicial l'article de Richard A. Brualdi [4].

Els grafs, ens són d'utilitat per aclarir conceptes algebraics. El vincle entre les dues teories és un fet, ja que els grafs es poden expressar com a diferents tipus de matrius i aquestes són bàsiques per l'Àlgebra Lineal.

Usant aquesta relació, aprofundirem especialment, en com intervenen els grafs a l'estudi de diferents àrees de l'àlgebra lineal com seran: els determinants, la forma canònica de Jordan, teoria de matrius no negatives i la teoria espectral.

Partint d'aquests conceptes, i exposant breument el Teorema de König, arribarem al Teorema de Tutte. Aquest permet calcular els emparellaments perfectes o 1-factors d'un graf i és una generalització del teorema de König, ja que aquest només és vàlid per grafs bipartits.

Estructura de la Memòria

Aquesta memòria està dividida en diferents capítols. El primer i previ a aquesta secció és un repàs elemental sobre la relació entre els grafs i els conceptes sobre matrius i grafs. A continuació, ens trobarem la introducció (capítol 2) que conté una secció (2.1) de conceptes bàsics i notació. Servirà per donar una primera ullada a la relació entre grafs i àlgebra lineal, ja que, estudiarà com es relacionen conceptes bàsics de la Teoria de Matrius a la de Grafs i viceversa.

En el capítol 3, estudiarem el cas particular de les matrius no negatives i la seva relació amb els grafs. En aquest, descobrim resultats com el teorema de Perron-Frobenius (Teorema 3.0.10) o el de Kellogg-Stephens (Teorema 3.0.11).

El capítol 4, està dedicat a veure com simplifiquen els grafs la cerca de valors propis, i veurem una versió del teorema de Gerschgorin per grafs (Corolari 4.0.11).

Finalment, en el capítol 5, fem una petita introducció i demostració del teorema de Tutte, partint del teorema de König i explicant la seva relació tant amb grafs com amb els determinants.

2.1 Àlgebra lineal bàsica i Grafs

La relació més immediata, és dona entre els grafs i les matrius, perquè els grafs es poden expressar en matrius de diferents maneres. Això els converteix en una eina molt intuïtiva per facilitar raonaments algebraics, per exemple, permeten simplificar demostracions traient-ne subíndex i beneficiant així al lector d'aquestes, que es pot centrar en les idees subjacents.

Donada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (2.1.1)$$

I $\mathcal{L}_m = \{1, \dots, m\}$ i $\mathcal{L}_n = \{1, \dots, n\}$, considerem la funció

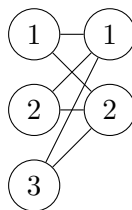
$$f : \mathcal{L}_m \times \mathcal{L}_n \longrightarrow \mathcal{C}$$

tal que $f(i,j)=a_{ij}$, aleshores podem veure $\ker(f) = \{(i, j), f(i, j) = 0\}$ com un subgraf del graf bipartit $K_{m,n}$. Cada vèrtex del primer conjunt, està unit per una aresta a un del segon si no pertany al nucli. D'aquí deduïm, que els elements del nucli són arestes i aleshores podem pensar aquest com l'arbre d'expansió bipartit de $K_{m,n}$.

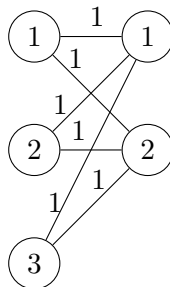
Exemple 2.1.1. Considerem la matriu :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \quad (2.1.2)$$

Podem veure-la de dues maneres : com un subgraf de $G_A=K_{3,2}$ tal que (i,j) arestes si el terme a_{ij} de la matriu és diferent de 0.



Tenim els conjunts $\mathcal{L}_2 = \{1, 2, 3\}$ i $\mathcal{L}_3 = \{1, 2\}$, i la matriu equival a un graf bipartit. També podem veure la matriu com el següent graf ponderat.



Per altra banda, el complementari del nucli, $\overline{\ker(f)} = K_{m,n} - \ker(f)$, localitza els elements $a_{ij} \neq 0$ de la matriu. Aleshores, es pot interpretar com un graf ponderat bipartit.

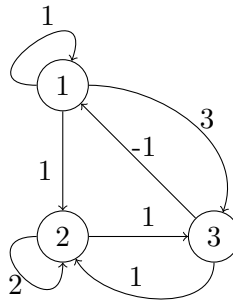
Considerem dos casos particulars :

- Cas matriu quadrada ($m=n$): És a dir $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Anomenarem arcs a les arestes formades per parells de vèrtexs ordenats, incloent els bucles. En aquest cas, el nucli determina la posició dels zeros de la matriu i el complementari els elements no nuls.

Exemple 2.1.2. Sigui la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (2.1.3)$$

que representa el graf G_A



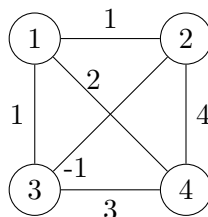
Tenim el conjunt d'arcs $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$, aleshores el nucli és $\ker(f) = \{(2, 1), (3, 3)\}$, que indica la posició dels elements nuls en A , en canvi, $\overline{\ker(f)} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$ indica els no nuls.

- Cas matriu simètrica ($A = A^t$) : En aquest cas, tenim un graf complet amb vèrtexs a \mathcal{L}_n , l'anomenarem K_n^o . D'aquesta manera tenim que $\overline{\ker(f)}$ és un arbre d'expansió ponderat.

Exemple 2.1.3. Prenem la següent matriu simètrica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \quad (2.1.4)$$

Amb graf complet G_A



El nucli serà $\ker(f)=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ i el seu complementari $\overline{\ker(f)} = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.

Recapitulant, tenim :

- Matriu rectangular \rightarrow graf bipartit ponderat.
- Matriu quadrada \rightarrow graf dirigit ponderat.
- Matriu quadrada simètrica \rightarrow graf ponderat.

Observació 2.1.4. Si considerem dues matrius rectangulars $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, i el seus grafs dirigits associats D_A i D_B amb $m+n$ vèrtexs. Podem observar, que els seus grafs ens permeten explicar la suma entre matrius i el producte d'una matriu per un escalar, ja que $A+B$ tindrà el graf D_{A+B} que surt de sumar els pesos de les arestes de D_A i D_B i seguint el mateix raonament si tenim $r \in \mathbb{Z}$ constant, el graf de rA és rD_A .

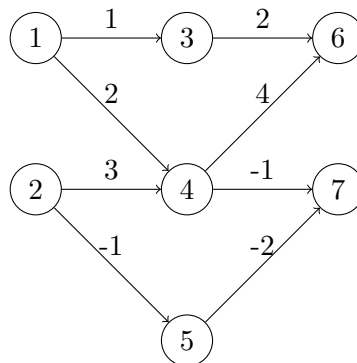
És fàcil veure que els grafs també serveixen per calcular el producte de matrius.

Definició 2.1.5. La concatenació de dos grafs, D_A i D_B , associats a $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es defineix com el graf, $D_A * D_B$, format per la unió dels n vèrtexs corresponent a les columnes de A amb els vèrtexs de les files de B .

Exemple 2.1.6. Siguin,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$$

el graf $D_A * D_B$ serà



Teorema 2.1.7. [6, Theorem 1, p.69] El terme en la posició (i, j) de la matriu AB és igual a la suma dels pesos dels diferents camins de $D_A * D_B$ on $i \in D_A$ i el $j \in D_B$.

Demostració. Cada camí format per dues arestes entre els vèrtexs i, j passa per un únic vèrtex k . Per definició, el pes del camí és el producte dels pesos dels seus arcs, que són a_{ik} i b_{kj} tal com volíem.

□

Exemple 2.1.8. Seguint de l'Exemple 3.6 tenim que

$$AB = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 12 & 5 \end{pmatrix} \tag{2.1.5}$$

mirant el graf podem veure que

- a_{11} : en aquest cas tenim dos camins diferents que porten del vèrtex 1 de D_A al 1 de D_B , aleshores sumant els pesos d'aquests obtenim $a_{11} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 10$.
- a_{12} : en aquest cas únicament tenim un camí, aleshores $a_{12} = 2 \cdot (-1) = -2$.
- a_{21} : seguint el procediment previ $a_{21} = 3 \cdot 4 = 12$
- a_{22} : en aquest cas $a_{22} = 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) = -1$

Els grafs permeten demostrar, de forma molt trivial, diferents propietats del producte de matrius, per exemple :

- Si $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ són dues matrius de permutació, aleshores $P_1 P_2$ també ho és.
- Si $Diag_1, Diag_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrius diagonals, aleshores el producte $Diag_1 Diag_2$ també ho és.
- Si $T_1, T_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrius triangular, aleshores el producte $T_1 T_2$ també ho és.

Les matrius venen determinades bàsicament per dos conceptes clau, els rangs i els valors propis. La dependència d'aquests, es pot veure a la taula que es troba a continuació:

Rang	Valors propis
Matrius no singulars i inverses	Matriu definida positiva
Resolutivitat de $Ax = b$	Norma matricial
Formes canòniques (Factorització LU, escalonat per files ...)	Formes canòniques (Diagonal, Jordan, factorització QR ...)
\vdots	\vdots

Podem obtenir el rang i els valors propis en funció dels determinants. Recordem que donada $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, es defineix el determinant de A com :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

on $\sigma \in S_n$ és una permutació d'ordre n.

Exemple 2.1.9. Sigui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \tag{2.1.6}$$

té un conjunt de permutacions $S_n = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ on $\sigma_1 = \{(1, 1), (2, 2)\}$ i $\sigma_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$. Aleshores tindrà determinant:

$$\det(A) = (1)a_{11}a_{22} + (-1)a_{12}a_{21} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

Aquesta fórmula es pot representar en termes de grafs bipartits ponderats i grafs dirigits ponderats.

2.1.1 Determinants i grafs bipartits ponderats

En aquesta secció, estudiarem com expressar la forma prèvia en termes de grafs bipartits ponderats i també veurem com afecten les propietats d'aquests a les dels determinants.

Definició 2.1.10. Considerem el graf complet K_n , llavors, donada $\sigma \in S_n$, definim un 1-factor F_σ com el conjunt:

$$F_\sigma = \{(1, \sigma(1)), \dots, (n, \sigma(n))\}.$$

També es podrà anomenar emparellament perfecte, ja que, té tots els vèrtexs del graf són incidents a una única aresta de l'emparellament.

Observació 2.1.11. Perquè existeixi un 1-factor, o emparellament perfecte, el conjunt de vèrtexs del graf ha de tenir cardinal parell.

Definició 2.1.12. El pes de F_σ es defineix com :

$$wt(F_\sigma) = (\text{sign}(\sigma)) \cdot (\text{Producte dels pesos de les arestes de } F_\sigma)$$

Aleshores:

$$\det(A) = \sum_{F_\sigma \in \mathcal{F}_n} wt(F_\sigma) \text{ on } \mathcal{F}_n = \{F_\sigma, \sigma \in S_n\}$$

Exemple 2.1.13. Donada la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad (2.1.7)$$

$$\mathcal{F}_\sigma = \{(1, 1), (2, 2)\} \cup \{(1, 2), (2, 1)\}.$$

Els pesos associats a cada 1-factor són :

- $wt(\{(1, 1), (2, 2)\}) = (1)(a_{11} \cdot a_{22}) = 2 \cdot 3 = 6$
- $wt(\{(1, 2), (2, 1)\}) = (-1)(a_{12} \cdot a_{21}) = (-1) \cdot (-1) \cdot 1 = 1$

Aleshores $\det(A) = wt(\mathcal{F}_2) = 6 + 1 = 7$.

2.1.2 Determinants i grafs dirigits ponderats

En aquesta secció estudiarem com expressar el determinant a partir dels grafs dirigits ponderats i com aquests afecten les propietats del determinant.

Seguint amb la notació anterior, ara definim F_σ com el conjunt de parelles d'arestes d'un graf dirigit complet.

Definició 2.1.14. El pes d'un cicle γ es defineix com:

$$wt(\gamma) = (-1)^{\text{sign}(\gamma)} \cdot (\text{producte dels pesos de les arestes de } \gamma)$$

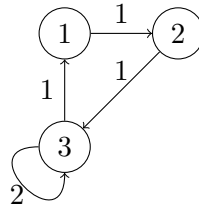
i el pes d'un 1-Factor, $wt(F_\sigma) = \prod_{\gamma \in F_\sigma} wt(\gamma)$, aleshores:

$$wt(F_\sigma) = (-1)^n \text{sign}(\sigma) (\text{producte pesos de } F_\sigma)$$

i per tant:

$$\det(A) = (-1)^n \text{wt}(\mathcal{F}_n).$$

Exemple 2.1.15. Si prenem el graf



amb matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (2.1.8)$$

Sabem que $\det(A)=1$. Calculem els pesos dels cicles, per comprovar si es compleix $\det(A) = (-1)^n \text{wt}(\mathcal{F}_n)$. Observem que, en aquest cas, tenim dos cicles :

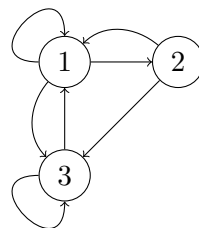
- Un bucle en el tercer vèrtex. Per definició, en aquest cas $F_\sigma = \{(3, 3)\}$ i $\text{wt}(F_\sigma)=-2$.
- Un cicle de vèrtex $1 \rightarrow$ vèrtex $2 \rightarrow$ vèrtex 3 . Aleshores el nostre conjunt serà : $F_\sigma = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ i $\text{wt}(F_\sigma)=1$.

Ajuntant-ho tot obtenim $\det(A)=(-1)(-2+1)=1$, tal com volíem veure.

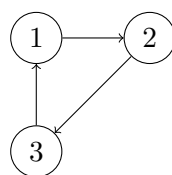
Els grafs, també ens permeten demostrar els canvis en el determinant, produïts a partir d'operacions elementals sobre la matriu. Recordem la definició de factor.

Definició 2.1.16. Un factor d'un graf G , és un subgraf on tots els vèrtexs tenen el mateix ordre, és a dir, que hi incideixen el mateix nombre d'arestes.

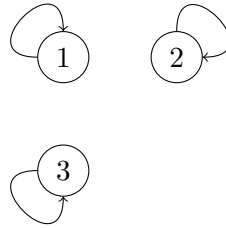
Exemple 2.1.17. Sigui el graf :



dos exemples d'un factor d'ordre 1 de D podrien ser :



i el subgraf :



Teorema 2.1.18. [6, Theorem 4, p.72] Sigui $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i $\lambda \in \mathbb{R}$. Definim

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (2.1.9)$$

C és A fent una permutació de la fila i -ésima i la fila j -ésima, i

$$E = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + a_{j1} & a_{i2} + a_{j2} & \cdots & a_{in} + a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (2.1.10)$$

aleshores $\det(B) = \lambda \det(A)$, $\det(C) = -\det(A)$ i $\det(E) = \det(A)$.

Demostració.

- $\det(B) = \lambda \det(A)$:

– D_B s'obté de multiplicar per λ tota aresta que surti del vèrtex i de D_A . Aleshores, F és un factor de A si i només si ho és de B . El grau de sortida de cada vèrtex del factor és 1. Tots els pesos dels factors de D_A i D_B excepte un són iguals, el diferent, és el que està multiplicat per λ . Aquest pes en D_B és λ vegades el de D_A . Usant la definició de determinant a partir dels pesos aconseguirem que $\det(B) = \lambda \det(A)$.

- $\det(C) = -\det(A)$:

– La idea és agafar D_A i moure algunes arestes, ja que, $a_{ik} = c_{jk}$ i $a_{jk} = c_{ik}$ tenim que D_C surt de D_A . Estudiem com afecta l'intercanvi de files a un tros concret del graf, per fer-ho, considerem un factor F , veiem que en fer el canvi el pes del factor no varia perquè:

- * Si i i j són part del mateix cicle: el moviment de les arestes els separa en dos cicles amb el mateix pes.
- * Si i i j estan en cicles diferents: fent el moviment d'arestes es combinen formant un sol cicle del mateix pes.

L'únic que varia és el nombre de cicles augmentant o disminuint en 1 i, per tant, afecta el signe del determinant, obtenint així que $\det(C) = -\det(A)$.

- $\det(E) = \det(A)$:

- Sabem que si A té dues files idèntiques i les intercanviem canvia el signe del determinant, però no el valor, és a dir que hem de tenir $\det(A) = 0$. Anomenem A' a la matriu obtinguda d'intercanviar les files i -ésima i j -ésima de A . Un factor de D_E ho serà també de D_A i $D_{A'}$. El pes de l'aresta sortint del vèrtex i -èssim serà l'únic diferent en E , tindrem el pes $a_{ik} + a_{jk}$, en A l'aresta valdrà a_{ik} i en A' a_{jk} . Com que el pes en E és la suma dels de A i A' sumant tots els factors aconseguim $\det(E) = \det(A) + \det(A') = \det(A)$.

□

Dos exemples clàssics de l'ús de la Teoria de Grafs en la Teoria de Matrius serien:

Exemple 2.1.19. [4, exemple 1, p.73] Sigui $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ no singular. Existeixen P i Q matrius de permutació d'ordre n , tals que, PAQ és una matriu triangular inferior si i només si en el graf bipartit ponderat associat a A hi ha un únic 1-factor amb pes no nul.

Exemple 2.1.20. [4, exemple 2, p.73] Sigui

$$A = \begin{pmatrix} 0 & r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & r_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_{n-1} \\ r_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (2.1.11)$$

pel teorema de Gersgorin, sabem que cada valor propi λ de A satisfà $|\lambda| \leq \max\{r_1, \dots, r_n\}$ però $\det(\lambda I - A) = \lambda^n + (-r_1 r_2 \dots r_n)$ on $-r_1 r_2 \dots r_n$ es el pes de l'únic 1-factor no nul del graf dirigit associat a A . Per tant, $|\lambda| = \sqrt{r_1 \dots r_n}$

2.1.3 Forma Canònica de Jordan i Grafs

Un resultat molt important de l'Àlgebra Lineal és la forma canònica de Jordan d'una matriu. La connexió entre els grafs i la forma canònica de Jordan va ser estudiada per Brualdi [3]. Va demostrar l'existència de la forma canònica de Jordan d'una matriu $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ usant grafs dirigits.

Definició 2.1.21. Direm que $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ és similar a $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, i ho notarem $A \sim B$, si existeix una matriu $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertible tal que $B = S^{-1}AS$.

Exemple 2.1.22. Siguin:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \quad (2.1.12)$$

i

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \quad (2.1.13)$$

són matrius similars, ja que existeix

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \quad (2.1.14)$$

tal que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 2.1.23. (Teorema de Jacobi) [3, Teorema 1, p.259] Tota matriu $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ és similar a una matriu triangular superior $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Els valors de la diagonal de T es corresponen als valors propis de A . T es pot triar perquè els valors quedin ordenats en un ordre específic.

Exemple 2.1.24. Siguin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \sim B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

B triangular superior, són similars, ja que existeix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \quad (2.1.15)$$

tal que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

per tant, A és similar a B triangular superior.

Observem que, usant la permutació de files i columnes, podem expressar T com una suma de matrius triangulars amb diagonal constant, és a dir que cada matriu tindrà un únic valor propi al qual anomenarem invariant de Jordan.

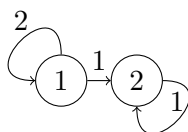
Això ens permet veure que una matriu triangular amb la diagonal nul·la és equivalent a un graf dirigit acíclic, i que el graf associat a un bloc de Jordan és un camí.

Teorema 2.1.25. (Teorema de Jacobi Versió grafs) [3, p.260] Tota matriu $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ és similar a una matriu $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ amb graf associat acíclic.

Exemple 2.1.26. Tenim la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \sim B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

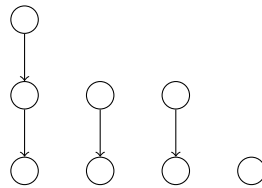
i B es pot interpretar com el següent graf sense cicles



La demostració del Teorema de Jacobi es pot resumir en tres passos:

- Podem transformar tota matriu en una triangular superior.
- Reduir al cas on tots els valors propis de la matriu triangular superior valen el mateix.
- Usar inducció per transformar la matriu anterior en la forma canònica de Jordan.

Definim un subconjunt $\mathcal{J}(A)$ induït pels blocs de Jordan, és a dir que si J una matriu de Jordan amb 4 blocs de dimensions 3,2,2,1 dels valors propis de A , aleshores $\mathcal{J}(A)$ és el següent digraf:



Teorema 2.1.27. (Enunciat combinatori de la forma Canònica de Jordan) [3, Theorem 1.2, p.10] *Sigui $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és similar a una forma de Jordan J . J té $\mathcal{J}(A)$ com a digraf associat, és a dir, una col·lecció de camins disjunts de parelles de vèrtexs, on cada camí està associat exactament a un valor propi.*

Definició 2.1.28. *Anomenarem índex d'un valor propi λ al menor k enter positiu tal que $\text{rg}(A - \lambda I)^k = \text{rg}(A - \lambda I)^{k+1}$.*

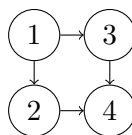
Proposició 2.1.29. [4, p.79] *L'índex del valor propi ρ és igual a la longitud de la cadena més llarga del conjunt $\mathcal{J}(A)$.*

Observació 2.1.30. S'ha vist que no hi ha una relació concreta entre els grafs dirigits i les matrius amb diagonal principal constant de Jordan.

Exemple 2.1.31. Siguin

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 4}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$$

les dues matrius tenen el digraf :



però, calculant les seves formes de Jordan

$$J_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 4}, J_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$$

obtenim que són diferents.

Capítol 3

Matrius no negatives

Les matrius no negatives tenen unes propietats molt particulars [9]. En aquest capítol estudiarem com afecta que una matriu sigui no negativa a la teoria de grafs i a les propietats d'aquests.

Definició 3.0.1. Direm que una matriu $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ és no negativa si $a_{ij} \geq 0$.

Exemple 3.0.2. La següent matriu és no negativa :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \quad (3.0.1)$$

Definició 3.0.3. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és reduïble si existeix una matriu permutació $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que:

$$P^T A P = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \quad (3.0.2)$$

Equivalentment, A reduïble si el conjunt $\{1, \dots, n\}$ es pot partir en dos subconjunts disjunts no buits:

$$\{i_1, \dots, i_u\} \text{ i } \{j_1, \dots, j_v\} \text{ on } u + v = n$$

tals que:

$$a_{i_\alpha j_\beta} = 0 \text{ on } \alpha = 1, \dots, u; \beta = 1, \dots, v$$

Si P no existeix aleshores, direm que, A és irreductible.

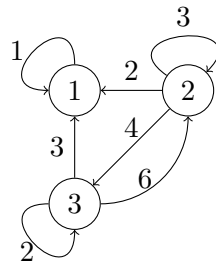
Observació 3.0.4. La definició anterior es pot veure amb ajuda dels grafs dirigits. Si pensem cada matriu com un graf D_A amb n vèrtexs, on i, j vèrtexs es connecten si $a_{ij} > 0$. Llavors A és irreductible si i només si tota parella de vèrtexs de D_A es pot unir mitjançant un camí.

Exemple 3.0.5. La matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad (3.0.3)$$

és reduïble, ja que, podem separar el conjunt $\{1, 2, 3\}$ en $\{1, 2\}$ i $\{3\}$ subconjunts disjunts tals que $a_{13} = a_{12} = 0$.

Amb l'Observació 3.0.4 veiem que A té associat el graf dirigit :

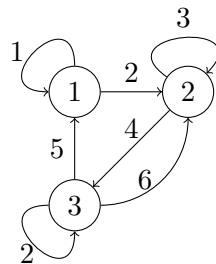


En el que, es veu clarament que, no hi ha un camí del vèrtex 1 als vèrtexs 2 o 3.

En canvi :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad (3.0.4)$$

és irreductible, ja que, $a_{13} = a_{21} = 0$ i, per tant, no podem separar $\{1, 2, 3\}$ en dos subconjunts complementaris no buits. Vist en termes de grafs dirigits, tenim que té el següent associat:



en el qual, si hi ha un camí entre qualsevol parella de vèrtexs.

Dos resultats importants, lligats a aquests conceptes, són :

Teorema 3.0.6. [9, Teorema 3.2, p.9] Sigui $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriu no negativa. Sigui $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, definim $A^k = (a_{ij}^{(k)})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$. Aleshores $a_{ij}^{(k)} \neq 0$ si, i només si hi ha un passeig de longitud k del vèrtex i al j en el graf dirigit D_A associat a la matriu A .

Demostració. Usarem inducció sobre k :

- Cas $k=1$: Trivial.

- Cas d'inducció:

\Leftarrow Suposem que hi ha un únic passeig de longitud $k+1$, (i, \dots, p_k, j) , entre dos vèrtexs $(i, j) \in V \times V$ de D_A i volem veure que $a_{ij}^{(k+1)} \neq 0$. La hipòtesi d'inducció ens diu que hi ha un passeig, (i, \dots, p_k) , de longitud k de i a p_k i $a_{ij}^{(k)} \neq 0$.

Sigui $A^k = (a_{ij}^{(k)})$, llavors $A^{k+1} = (a_{ij}^{(k+1)})$ on $a_{ij}^{(k+1)} = \sum_p a_{ip}^{(k)} a_{pj}$, però per hipòtesi d'inducció $a_{ip}^{(k)} > 0$ i $a_{pj} > 0$ i, per tant, $a_{ij}^{(k+1)} \neq 0$.

\Rightarrow Ara suposem $a_{ij}^{(k+1)} \neq 0$. Aleshores $a_{ij}^{(k+1)} = \sum_p a_{ip}^{(k)} a_{pj} > 0$, i $\exists a_{ip}^{(k)} a_{pj} > 0$, això es donarà únicament si $a_{ip}^{(k)} > 0$ i $a_{pj} > 0$, llavors per hipòtesi d'inducció hi ha

un passeig de longitud k , de i a p en D , i com que (p,j) és una aresta en D_A existeix un passeig de longitud $k+1$ de i a j .

□

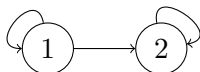
Exemple 3.0.7. Donada la següent matriu no negativa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad (3.0.5)$$

tenim que la seva potència k -èsima és

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad (3.0.6)$$

i si $k \neq 0$ ambdues tenen graf associat D_A



Aleshores:

- $a_{11}^{(k)} = 1 \neq 0$ i hi ha un passeig vèrtex 1 $\rightarrow_{k\text{-vegades}}$ vèrtex 1 usant el bucle.
- En el cas $a_{12}^{(k)}$ tenim diversos casos:
 - longitud $k=0$: En aquest cas tindrem que $A^0 = \text{Id}$ i tindrem el graf



que no té cap aresta entre els dos vèrtexs i , per tant, $a_{12}^{(0)} = 0$.

- longitud $k=1$: l'únic passeig possible seria vèrtex 1 \rightarrow vèrtex 1.
- longitud $k=2$: En aquest cas agafaríem el passeig: vèrtex 1 \rightarrow vèrtex 1 \rightarrow vèrtex 2.
- longitud $k > 2$ Farem el passeig: vèrtex 1 \rightarrow vèrtex 2 $\rightarrow_{k-1\text{vegades}}$ vèrtex 2.
- $a_{21}^{(k)} = 0$ del vèrtex 2 al vèrtex 1 no hi ha cap passeig de dimensió k possible si k és parell.
- $a_{22}^{(k)} = 1 \neq 0$ Aquest cas serà anàleg al $a_{11}^{(k)}$, és a dir, recorrerem el bucle k -vegades.

Teorema 3.0.8. [9, Teorema 3.1, p.9] Direm que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriu no negativa, és irreductible si i només si el seu graf dirigit associat, $D_A = (V, E)$, és fortament connex, és a dir que, per a qualsevol parella de vèrtexs diferents existeix un camí que els connecta.

Demostració. \Leftarrow Suposem que A és una matriu reduïble, és a dir que podem escriure:

$$PAP^t = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \quad (3.0.7)$$

on $A_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ ($1 \leq k \leq n-1$) i $p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és una matriu de permutació.

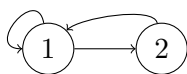
A més, el graf de PAP^t s'obté de reordenar els nodes de A i, per tant, no afecta que sigui o no fortament connex.

Agafant qualsevol camí amb origen en vèrtex i, llavors $a_{ij} \neq 0$. Aleshores serà possible fer una connexió de i a j únicament si $j > k$. Fent recursivament el raonament, es veu que no existeix cap camí de (i,j) amb $i > k$ i $j < k$, i per tant, el graf no és fortament connex. Aleshores tal com volíem veure si A reduïble D_A no és fortament connex.

⇒ Conseqüència del Teorema 4.6.

□

Exemple 3.0.9. Seguint amb l'Exemple 3.0.7 és fàcil veure que D_A



és fortament connex i A és irreductible, ja que, tota parella de vèrtexs es pot unir per un camí.

En matrius no negatives, algunes propietats espectrals depenen únicament de la posició dels elements no nuls, és a dir, depenen del digraf ponderat associat.

Els següents resultats, demostren la forta influència que té el digraf d'una matriu no negativa A, sobre les seves propietats espectrals. Per fer-ho, necessitarem dues definicions prèvies:

Definició 3.0.10. Recordem que definim $Spec(A)$ com el conjunt de valors propis de la matriu A, direm que el seu radi espectral ρ és el valor propi amb mòdul més gran, és a dir $\rho = \text{radi espectral de } A = \max\{|\lambda|, \lambda \in Spec(A)\}$.

Definició 3.0.11. Direm que A és matriu primitiva, si és no negativa, tal que per un k positiu A^k té tots els termes positius.

- Un resultat molt important, és el següent teorema :

Teorema 3.0.12. [Teorema de Perron-Frobenius per a matrius irreductibles]
Sigui $\lambda \in Spec(A)$ tal que $|\lambda| = \rho$, és a dir, és valor propi de mòdul màxim aleshores $\rho \in Spec(A)$.

- $\#\{\lambda \in Spec(A) / |\lambda| = \rho\} = \text{mcd}(\text{llargades de } D_A)$.
- Sigui A matriu primitiva, aquest k és el més petit tal que per totes les parelles ordenades de vèrtexs hi ha un camí de llargada ρ .

Sigui $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ amb radi espectral ρ i graf dirigit associat D_A . Sigui m la longitud del circuit de D_A més llarg.

Donat el conjunt de matrius no negatives, $M_p(G)$, amb radi espectral ρ . El problema principal és determinar el conjunt de tots els valors propis possibles. Kellog i Stephens van trobar el següent resultat :

Teorema 3.0.13. (Teorema de Kellogg i Stephens) [11, Teorema 1, p.180] Sigui $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriu no negativa, irreductible, amb graf associat D_A i radi espectral ρ . Sigui m la longitud del cicle dirigit més llarg de G_A . Aleshores si:

- $m = 2$: tots els valors propis de A són reals.
- $m > 2$: qualsevol $\lambda = u + iv \in \text{Spec}(A)$ satisfà:

$$u + |v| \tan\left(\frac{\pi}{m}\right) \leq \rho$$

Demostració (Idea). Poder demostrar el teorema de Kellogg i Stephens suposarem que $\rho = 1$ i A matriu irreductible, a més a més necessitem els següents resultats previs.

Sigui $\lambda = u + iv$ un valor propi, no real de A , amb vector propi associat $z = (z_1, \dots, z_n)$. Sempre suposarem $v > 0$, és a dir, $\arg(\lambda) \in (0, \pi)$. Definim l com la línia de λ a $\chi\lambda$, amb $\chi \in \mathbb{C}$ i $\chi \neq 0$, que divideix el pla complex. Anomenarem on $H(\chi, \lambda)$ al semiplà tancat creat per l que no conté l'origen.

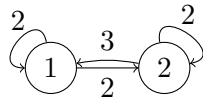
A partir d'aquí, definirem conceptes necessaris per a la demostració.

Definició 3.0.14. Direm que un graf dirigit, D , és λ -aresta, si $z_i \neq 0$, $z_k \neq z_i$ i $z_k \in H(z_k, \lambda)$. Un λ -camí o λ -circuit, és un camí o circuit format per λ -arestes.

Exemple 3.0.15. Sigui la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad (3.0.8)$$

amb D_A



és λ -aresta, ja que, $\lambda = \sqrt{3} + 2$ un valor propi amb vector propi $z = (\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$.

El següent lema ens servirà per garantir que existeixen les λ -arestes necessàries.

Lema 3.0.16. [11, Lemma 1, p.181] Sigui $z = (z_1, \dots, z_n)$ vector propi de λ valor propi, de $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, si $z_j \neq 0$ aleshores existeix una k tal que (j, k) és una λ -aresta.

Demostració. Com que treballem amb $\lambda \in \text{Spec}(A)$, podem escriure:

$$\sum_j a_{jl} z_l = \lambda z_j$$

Suposem que per algun valor de l tenim $a_{jl} \neq 0$ amb $z_l \notin L(z_j, \lambda)$. Aleshores, per convexitat ha d'existir un k , tal que, $a_{jk} \neq 0$ amb $z_k \in H^o(z_j, \lambda)$ i (j, k) és una λ -aresta.

Com que podem fer aquest procediment per tot valor de l tal que $a_{jl} \neq 0$, aleshores sempre tindrem una λ -aresta tal com volíem.

□

El següent resultat ens servirà per demostrar el teorema en el cas $m > 2$.

Lema 3.0.17. [11, Lemma 2, p.181] Sigui $\psi_i \in (0, \pi)$ amb $1 \leq i \leq k$ i $\bar{\psi} = k^{-1} \sum(\psi_i)$. Aleshores

$$\prod_i \sin(\psi_i) \leq (\sin(\bar{\psi}))^k.$$

La igualtat, es donarà únicament si $\psi_1 = \dots = \psi_k = \bar{\psi}$

Demostració. Definim $f(\psi_1, \dots, \psi_k) = \prod_j \sin(\psi_j)$, s'anul·larà per $\psi_j = 0, \pi$. El màxim de la funció s'assolirà en $\psi_j \in (0, \pi)$. Aleshores, $\prod_i \sin(\psi_i) \leq (\sin(\bar{\psi}))^k$.

□

Donat $\xi \neq 0$, anomenarem $L(\xi, \lambda)$ la recta entre ξ i $\lambda\xi$. Aquesta divideix el pla complex en dues meitats, una de les quals conté l'origen. Anomenarem $H(\xi, \lambda)$ el semiplà tancat que inclou l'origen.

Del Lema 3.0.17 en podem deduir:

Lema 3.0.18. [11, Lemma 3, p.181] Siguin i_1, \dots, i_k els vèrtexs d'un λ -circuit de D_A , aleshores:

$$u + |v| \tan\left(\frac{\pi}{k}\right) \leq 1$$

Observació 3.0.19. Si es dona la igualtat tindrem que z_{i_1}, \dots, z_{i_k} , de $z=(z_1, \dots, z_n)$, seran els vèrtexs d'un polígon regular de k costats, centrat en l'origen i amb els vèrtexs ordenats en sentit antihorari.

Observació 3.0.20. Sense pèrdua de generalitat es pot suposar que $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ és estocàstica per files, és a dir, és una matriu quadrada on els seus elements són probabilitats de tal manera que la suma de tots els valors d'una fila dona 1.

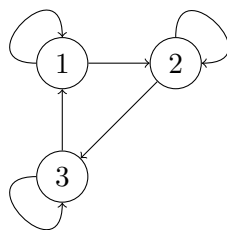
Vist això, ja podem demostrar el cas $m > 2$ del Teorema de Kellogg i Stephens.
Demostració. (Del teorema 3.1.10) Cas $m > 2$: Sigui $\lambda = u + iv$, $v > 0$ un valor propi, no real de A , amb vector propi $z = (z_1, \dots, z_n)$ i algun $z_i \neq 0$. Pel lema 3.1.12, podem trobar un λ -camí i, i_1, \dots de G . Continuant-lo, trobarem un λ -circuit i_1, \dots, i_k , i com que $k \leq m$ aplicant el lema 3.1.13 obtindríem el resultat.

□

Exemple 3.0.21. Sigui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (3.0.9)$$

matriu no negativa irreductible amb graf associat



El seu cicle de longitud més llarga seria ell mateix, és a dir $m=6 > 2$. La matriu té valors propis $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ i $\lambda_3 = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$ i radi espectral $\rho = 1$ es satisfà :

- Per $\lambda_1 = 1$

$$1 + |0| \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) \leq 1$$

- Per $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ i $\lambda_3 = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4\sqrt{3}} \approx 0.933013 \leq 1$$

Observació 3.0.22.

- Quan m decreix, la inequació restringeix la regió dels valors propis complexos de A .
- Com a cas particular, tenim que els valors propis d'una matriu tridiagonal no negativa són reals.

Capítol 4

Valors propis i grafs dirigits

En aquesta secció veurem com el graf dirigit associat a una matriu, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, pot donar informació sobre el seu espectre. Per estudiar-ho, usarem resultats com el teorema de Gerschgorin o el de Lévy-Deplanques i la relació d'aquests amb la teoria de grafs.

Teorema 4.0.1. (Teorema de Gerschgorin, 1931) [4, p.80] Sigui la matriu $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Per $k=1, \dots, n$ definim el radi dels discs de Gerschgorin com:

$$r_k = \sum_{j \neq k} |a_{kj}| \in \mathbb{R}^+$$

és a dir, és la suma dels mòduls dels elements de la fila k -ésima fora de la diagonal de A . Aleshores, per tot $\lambda \in \text{Spec}(A)$ tenim que $\lambda \in \cup_{k=1}^n \mathbb{D}_k$ on:

$$\mathbb{D}_k = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z - a_{kk}| \leq r_k\} \quad (k=1, \dots, n)$$

Direm que $\cup_{k=1}^n \mathbb{D}_k = G(A)$ és la regió de Gerschgorin.

Demostració. Sigui $\lambda \in \text{Spec}(A)$ i $v = (v_1, \dots, v_n)$ un vector propi associat, és a dir $Av = A\lambda v$. Sigui k , tal que $|v_k| \geq |v_i| \forall i$. Aleshores:

$$\lambda v_k = [\lambda v]_k = [Av]_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} v_j \Leftrightarrow v_k(\lambda - a_{kk}) = \sum_{j=1, j \neq k}^n a_{kj} v_j$$

Usant la desigualtat triangular obtindrem:

$$|v_k| |\lambda - a_{kk}| = \left| \sum_{j=1, j \neq k}^n a_{kj} v_j \right| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj} v_j| \leq |v_k| \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}| = |v_k| r_k$$

Per tant, $|\lambda - a_{kk}| \leq r_k$ per alguna k . És a dir $\lambda \in \overline{D(a_{kk}, r_k)}$.

□

Exemple 4.0.2. Sigui la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \tag{4.0.1}$$

En aquest cas:

- $r_1 = 2$ i $\mathbb{D}_1 = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z - 1| \leq 2\}$.

- $r_2 = 0$ i $\mathbb{D}_2 = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z - 3| \leq 0\} = \{3\}$.

Per tant, $\cup \mathbb{D}_i = \mathbb{D}_1 \cup \{3\}$. És fàcil comprovar que els valors propis són: $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 3$ i es troben en \mathbb{D}_1 i \mathbb{D}_2 respectivament .

Del Teorema de Gerschgorin (Teorema 3.2.1), se'n deriva el següent resultat:

Teorema 4.0.3. [10, Theorem 6.2.5, p.355] Sigui $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ i $\lambda \in \text{Spec}(A)$, tal que, $\lambda \in \text{Fr}(\cup_i \mathbb{D}_i) = \cup_i \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z - a_{ii}| = r_i\}$. Suposem que $a_{ij} \neq 0$ per algun $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, aleshores:

- Tot cercle de Gerschgorin conté un $\lambda \in \text{Spec}(A)$.
- Si $Av = \lambda v$, amb $v = (v_1, \dots, v_n) \neq 0$, aleshores $|v_i| = \sqrt{\sum_{j=1}^n |v_j|^2}$ per tot $i=1, \dots, n$.

Recordem la definició de matriu diagonal dominant.

Definició 4.0.4. Direm que la matriu $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ és diagonal dominant si

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

I serà diagonal dominant estricta si no és dona la igualtat.

Corol·lari 4.0.5. (Teorema de Lévy-Deplanques) [10, Corollary 6.2.6, p.355] Sigui $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ on per tot $i, j=1, \dots, n$ $a_{ij} \neq 0$. Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ és diagonal dominant, i $|a_{ii}| > r_i$ per un $i \in \{1, \dots, n\}$ aleshores, A és invertible, és a dir $\det(A) \neq 0$.

Demostració. Per provar-ho usarem el contrarecíproc. Per hipòtesi $\det(A) = 0$ aleshores $\lambda = 0$ és un valor propi i pel teorema de Gerschgorin (Teorema 3.2.1) obtenim $|a_{ii}| \leq r_i$ tal com volíem veure.

□

Exemple 4.0.6. Sigui la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad (4.0.2)$$

diagonal dominant. Tenim que es compleix $|3| > |1|$ i $|-2| > |1|$. I, per tant, A és invertible.

Usant teoria de grafs, podem fer una versió més precisa del corol·lari previ (Corol·lari 4.0.5). Introduïm uns resultats previs.

Definició 4.0.7. Donat un graf $G = (V, E)$, i un vèrtex $u \in V$ definim el pre-ordre com:

- $G^+(u) = \{v \text{ tal que } (u, v) \in E\}$.
- $G^-(u) = \{v \text{ tal que } (v, u) \in E\}$.

Lema 4.0.8. Sigui $D = (V, E)$ el graf dirigit. Suposem que tots els vèrtexs estan connectats, és a dir, $D^+(u) \neq \emptyset$ per tot $u \in V$. Aleshores existeix un cicle, u_{i_1}, \dots, u_{i_k} , tal que $u_{i(j+1)}$ és l'element més gran de $D^+(u)$ per $j=1, \dots, k$.

Teorema 4.0.9. [2, Theorem 2.9, p.149] Sigui $A = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ irreductible. Sigui γ un cicle tal que:

$$\prod_{i \in \gamma} |a_{ii}| \geq \prod_{i \in \gamma} r_i$$

Aleshores $\det(A) \neq 0$.

Demostració. Suposem que $\forall \gamma$ cicle, es compleix:

$$\prod_{i \in \gamma} |a_{ii}| = \prod_{i \in \gamma} r_i$$

i per tant $\det(A) = 0$. Aleshores, $\exists v = (v_1, \dots, v_n) \neq 0$ tal que $Av = 0$. Com que cada vèrtex forma part d'un cicle del graf D_A :

$$|v_{i_{j+1}}| = |v_k| \text{ on } j = 1, \dots, p$$

és a dir, $|v_k|$ constant per tots els vèrtexs. Com que A és irreductible tenim que D_A és fortament connex. Suposem que hi ha almenys un vèrtex que no forma part de cap cicle γ' i, per tant, hi ha una aresta partint d'aquest que tampoc en forma part. Però, sabem pel lema que, hi ha d'haver un γ'' amb almenys un vèrtex $u \notin \gamma'$ que compleixi $|v_{i_{j+1}}| \geq |v_k|$. Aleshores:

$$a_{i_j i_j} x_{i_j} = - \sum_{k \neq i_j} a_{i_j k} x_k$$

aplicant la desigualtat triangular obtenim:

$$\begin{aligned} |a_{i_j i_j}| |x_{i_j}| &\leq \sum_{k \neq i_j} |a_{i_j k}| |x_k| \leq \sum_{k \in D^+(i_j)} |a_{i_j k}| |x_k| \leq \\ &(\sum (|a_{i_j k}|) |x_{i_{j+1}}| \leq r_{i_j} |x_{i_{j+1}}| \end{aligned}$$

Multiplicant podem concloure que:

$$\prod_{i \in \gamma''} |a_{ii}| = \prod_{i \in \gamma''} r_i$$

per cada circuit γ'' que porta a contradicció.

□

Com a conseqüències del Teorema 3.2.10 tindriem:

Proposició 4.0.10. [4, p.80] Sigui $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ irreductible, i $\lambda \in Fr(\mathbb{D}_k) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z - a_{kk}| = r_k\}$. Aleshores :

$$\lambda \in Spec(A) \Leftrightarrow \lambda \in Fr(\mathbb{D}_i) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z - a_{ii}| = r_i\} \forall i=1, \dots, n.$$

Demostració. \Leftarrow Cert per definició dels discs de Gerschgorin.

\Rightarrow Sigui $v = (v_1, \dots, v_n)$ vector propi de valor propi λ , seguint el procediment de la demostració del teorema de Gerschgorin tenim:

$$v_k(\lambda - a_{kk}) = \sum_{j=1, j \neq k}^n a_{kj} v_j$$

per $k = 1, \dots, n$. Aleshores:

$$|v_k| |\lambda - a_{kk}| = \left| \sum_{j=1, j \neq k}^n a_{kj} v_j \right| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj} v_j| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}| |v_k| = |v_k| r_k$$

Llavors tindrem:

$$|\lambda - a_k| = r_p \quad \forall k=1, \dots, n$$

i, per tant, $\lambda \in \text{Spec}(A)$ és de la frontera de tots els discs.

□

Corol·lari 4.0.11. (Teorema de Gerchgorin, versió grafs) [2, Corollary 2.11, p.149]
 Sigui $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ irreductible, D_A el seu graf dirigit associat (D_A és fortament connex).
 Sigui γ un cicle dirigit de D_A , que no sigui un bucle. Definim la regió :

$$\mathbb{D}(\gamma) = \{ z \text{ tal que } \prod_{\gamma} |z - a_{ii}| \leq \prod_{\gamma} r_i \}$$

aleshores:

$$\lambda \in \text{Spec}(A) \Rightarrow \lambda \in \cup_{\gamma} \mathbb{D}(\gamma)$$

Si $\lambda \in \text{Fr}(A)$ pot ser un valor propi de $A \Leftrightarrow \lambda \in \text{Fr}(\mathbb{D}(\gamma)) \quad \forall \mathbb{D}(\gamma)$.

Demostració. Sigui $\lambda \in \text{Spec}(A)$, definim $B = A - \lambda Id$ i llavors $\det(B) = 0$. Aleshores pel Teorema 4.0.9 tenim que:

$$\prod_{i \in \gamma} |b_{ii}| < \prod_{i \in \gamma} r_i \tag{4.0.3}$$

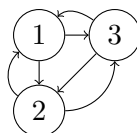
i per tot γ cicle tindrem la igualtat en 4.0.3 , per tant, $\lambda \in \text{Fr}(G(A))$.

□

Exemple 4.0.12. Sigui

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3} \tag{4.0.4}$$

amb $\text{Spec}(A) = \{-1, 2\}$ i amb el graf fortament connex associat



sigui γ el cicle dirigit que passa pels vèrtexs $\{1, 3\}$. Per tant:

$$\mathbb{D}(\gamma) = \{ z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \prod_{\gamma} |z| \leq 2 \}$$

Aleshores $\text{Spec}(A) \subset \overline{\mathbb{D}}(0, 2) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z| \leq 2\}$.

Per generalitzar el Teorema 4.0.1 agafem una matriu per blocs

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & A_{p3} & \cdots & A_{pp} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (4.0.5)$$

i necessitem definir la següent norma matricial:

Definició 4.0.13. Sigui A com en (4.0.5). Aleshores $\|A_{ij}\| = \sup\left\{\frac{\|A_{ij}x\|_i}{\|x\|_j}\right\}$ tal que $0 \neq x \in \mathbb{C}^{n_j}$ on

$$\|A_{ii}\|' = \inf\left\{\frac{\|A_{ij}x\|_i}{\|x\|_i}\right\}$$

i $\|A_{ii}^{-1}\|^{-1} = 0$ si A_{ii} és singular.

Definim

$$B = \begin{pmatrix} \|A_{11}^{-1}\|^{-1} & \|A_{12}\| & \cdots & \|A_{1p}\| \\ \|A_{21}\| & \|A_{22}^{-1}\|^{-1} & \cdots & \|A_{2p}\| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \|A_{p1}\| & \|A_{p2}\| & \cdots & \|A_{pp}^{-1}\|^{-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (4.0.6)$$

i

$$T_k = \sum_{k \neq j} \|A_{kj}\| \text{ per } k=1, \dots, p$$

Si B és irreductible, aleshores tot $\lambda \in \text{Spec}(B)$ satisfà:

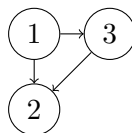
$$\prod_{j \in \gamma} \|(\lambda Id - A_{jj})^{-1}\|^{-1} \leq \prod_{j \in \gamma} T_j$$

per almenys un cicle $\gamma \in D_B$.

Podem estudiar també, la relació entre un graf dirigit i els seus valors propis màxims. Suposarem $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriu d'adjacència del graf D_A , sense els seus bucles. Aleshores $a_{ii} = 0$ per tot $i=1, \dots, n$.

Definició 4.0.14. Direm $g_i = \#G(A)^+(i)$, on $G(A)^+(i) = \{j \text{ tal que } (i, j) \in E\}$, és el grau superior del vèrtex i .

Exemple 4.0.15. Sigui D_A el graf



Aleshores :

- $g_1 = \#D_A^+(1) = \#\{(1, 2), (1, 3)\} = 2$

- $g_2 = \#D_A^+(2) = 0$
- $g_3 = \#D_A^+(3) = \#\{(3, 2)\} = 1$

a més a més, observant la seva matriu d'adjacència

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (4.0.7)$$

podem veure que $g_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$.

Teorema 4.0.16. [2, Theorem 5.1, p.163] *Sigui D_A un graf dirigit, fortament connex, amb seqüència de graus superiors:*

$$0 \leq r_1 \leq \dots \leq r_n$$

sigui $\lambda \in \text{Spec}(A)$ valor propi amb mòdul màxim i A matriu associada a D_A . Suposem que la longitud del cicle més curt de D_A és m . Aleshores :

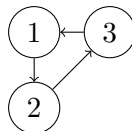
$$\sqrt[m]{g_1 \dots g_m} \leq \lambda \leq \sqrt[m]{g_{n-m+1} \dots g_n}$$

i $\lambda = \sqrt[m]{r_1 \dots r_g}$ si i només si D_A compleix que $g_s < g_{s+1} = \dots = g_n$ per una $s \leq m - 1$.

Exemple 4.0.17. Donada la matriu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (4.0.8)$$

amb el graf dirigit fortament connex associat



La matriu té valors propis: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ i $\lambda_3 = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$. Aleshores el valor propi de mòdul màxim serà $\rho = 1$.

En aquest cas el cicle més curt tindrà llargada $m=3$.

I la nostra seqüència de graus serà: $g_1 = g_2 = g_3 = 1$. Aleshores :

$$\sqrt{1 \cdot 1 \cdot 1} \leq 1 \leq \sqrt{1 \cdot 1 \cdot 1}$$

es compleix.

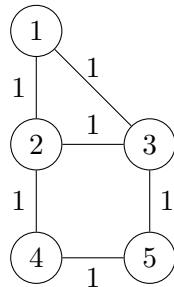
Capítol 5

Teorema de Tutte

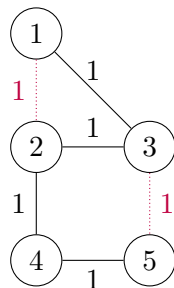
El teorema de Tutte, proporcionarà les condicions necessàries i suficients perquè un graf, G , tingui un emparellament perfecte. Recordem que, un emparellament és un conjunt format per les arestes no adjacents d'un graf, i un emparellament és perfecte quan tots els vèrtexs del graf són incidents a una única aresta de l'emparellament. A un emparellament perfecte també li direm 1-factor. A no ser que es digui el contrari, a partir d'ara parlarem de grafs sense bucles.

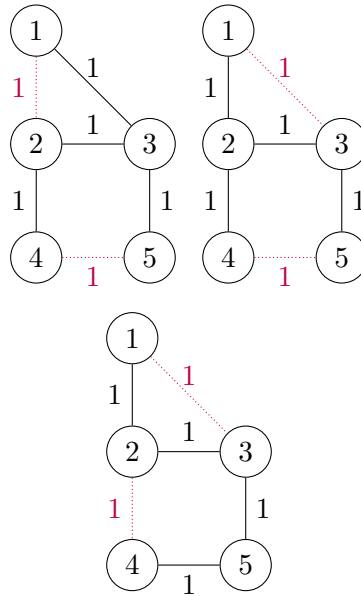
Observació 5.0.1. Per poder tenir un emparellament perfecte, necessitem que el nostre graf tingui un nombre parell de vèrtexs.

Exemple 5.0.2. Sigui el graf amb nombre imparell de vèrtexs

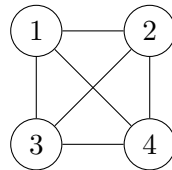


no té un emparellament perfecte, ja que les úniques opcions que tenim serien :

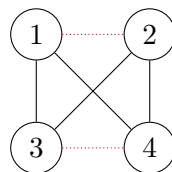




que no recobreixen tots els vèrtexs. En canvi, si agafem el graf amb nombre de vèrtexs parell :



pot tenir com emparellament perfecte :



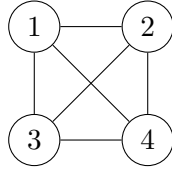
5.1 Pfaffià d'una matriu

En aquest apartat treballarem del revés que en la resta del projecte, ja que usarem un enfocament algebraic per resoldre el problema dels emparellaments perfectes d'un graf. Per això necessitarem definir el Pfaffià.

Definició 5.1.1. Una matriu $A=(a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és antisimètrica si $A^t = -A$, és a dir que, $a_{ij} = -a_{ji}$ per cada aresta $(i, j) \in E$ i $a_{ij} = 0$ si $(i, j) \notin E$.

Construirem la matriu antisimètrica a partir del graf. De moment, no es consideraran els pesos de les arestes.

Exemple 5.1.2. Sigui el graf:



Seguint la definició, podem construir la seva matriu antisimètrica :

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (5.1.1)$$

Observació 5.1.3. Observem que si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és antisimètrica:

$$\det(A) = \det(-A^t) = (-1)^n \det(A)$$

en particular, si n és imparell $\det(A) = 0$.

Si calculem el determinant de l'Exemple 5.3, obtenim:

$$\det(A) = (a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2$$

que és suma de monomis al quadrat, on cada monomi està vinculat a un 1-factor.

Podem definir l'*emparellament perfecte* o *1-factor* a partir de $\sigma \in S_n$, on S_n són les permutacions d'ordre n , com :

$$F_\sigma = \{(\sigma(2i-1), \sigma(2i)) : 1 \leq i \leq n/2\}$$

Això, ens permet veure que hi ha una funció exhaustiva entre les permutacions i els emparellaments.

Observem que, donat que la matriu és antisimètrica, podem redefinir el pes de F_σ com:

$$wt(F_\sigma) = \text{sign}(\sigma) \left(\prod_{i=1}^{n/2} a_{(\sigma(2i-1), \sigma(2i))} \right)$$

Definició 5.1.4. Sigui $A \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$ matriu antisimètrica. El Pfaffià de A es defineix com :

$$Pf(A) = \sum_{F_\sigma \in \mathcal{F}_n} wt(F_\sigma)$$

on $\mathcal{F}_n = \{F_\sigma : \sigma \in S_n\}$ i $n=2m$.

Teorema 5.1.5. (Teorema Cayley) [8, Theorem 1, p.2] Si $A \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$ antisimètrica llavors $\det(A) = (Pf(A))^2$.

Demostració. Usant la definició de determinant, que A és antisimètrica i escrivint $n=2m$ obtenim:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \left(\prod_{i=1}^{n/2} a_{(\sigma(2i-1), \sigma(2i))} \right) \right)^2 = \\ &= \left(\sum_{F_\sigma \in \mathcal{F}_n} wt(F_\sigma) \right)^2 = (Pf(A))^2 \end{aligned}$$

□

Exemple 5.1.6. Sigui la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \quad (5.1.2)$$

Tenim $\det(A) = 9$ i $Pf(A) = 3$. Evidentment $Pf(A) = 3^2 = 9 = \det(A)$.

Lema 5.1.7. *Existeix una bijecció $T : (\mathcal{F}_n)^2 \rightarrow S_{2n}$, on S_{2n} conjunt format per cicles de longitud parella.*

Demostració. Definirem la funció $T(\sigma) = (F_{\sigma_1}, F_{\sigma_2})$. Per cada cicle $\sigma \in S_{2n}$, considerem l'índex i més petit que assigna l'aresta $(i, \sigma(i))$ a M i $(\sigma(i), \sigma(\sigma(i)))$ a M' . Aquesta aplicació és bijectiva, ja que, per cada 1-factor podem recórrer el camí invers per construir T .

□

Exemple 5.1.8. Considerem la següent matriu de cicles:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in S_n \quad (5.1.3)$$

amb $\text{sign}(\alpha) = 1$. Si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{43} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \quad (5.1.4)$$

tindrà pes $wt(A) = a_{14}a_{23}$.

En alguns casos, podem usar el teorema de Cayley per comptar el nombre d'1-factors. Si tenim una matriu

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{43} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \quad (5.1.5)$$

on tots els $a_{ij} = \pm 1$, aleshores $wt(A) = \pm 1$. Si aconseguíssim tenir $wt(A) = 1$ o $wt(A) = -1$, usant $Pf(A)^2 = \det(A)$, podríem saber quants emparellaments perfectes hi ha.

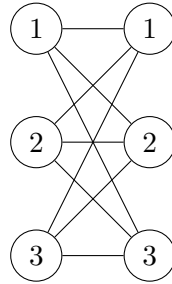
Per facilitar la tasca, és convenient afegir orientació a les arestes, \vec{E} del graf i definir la funció:

$$\begin{cases} a_{ij} = +1 & \text{si } (i, j) \in \vec{E} \\ a_{ij} = -1 & \text{si } (j, i) \in \vec{E} \\ a_{ij} = 0 & \text{altres casos} \end{cases}$$

Definició 5.1.9. $G = (V, E)$ no dirigit té orientació Pfaffiana, si per tots els emparellaments M, N tenim $wt(M) = wt(N)$.

Cal tenir en compte que no tots els grafs admeten una orientació Pfaffiana.

Exemple 5.1.10. El següent graf no dirigit no pot tenir una orientació Pfaffiana :



si agafem els emparellaments perfectes: $M = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ i $N = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ tindrem que $wt(M) = 1 \neq wt(N) = -1$.

Teorema 5.1.11. (Teorema de Kasteleyn) [8, Theorem 8, p.6] *Tots els grafs plans admeten orientació Pfaffiana.*

Demostració. Sigui G un graf pla qualssevol. Ordenem les arestes de G de manera que cada cicle de longitud constant, té un nombre imparell d'arestes orientades en sentit antihorari. Aleshores, ja tenim una orientació Pfaffiana.

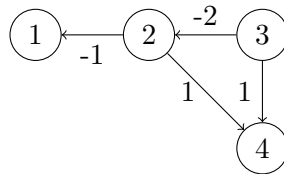
□

Teorema 5.1.12. [6, Theorem 7, p.4] *Si $G = (V, \vec{E})$ és un graf amb orientació Pfaffiana \vec{E} i amb la matriu associada antisimètrica A , aleshores, el nombre d'1-factors o emparellaments perfectes és igual a $\sqrt{\det(A)}$.*

Demostració. Pel teorema de Cayley (Teorema 5.1.5) sabem que $\det(A) = (Pf(A))^2$, aleshores $Pf(A) = \sqrt{\det(A)}$, i el Pfaffià, per definició, compta el nombre d'emparellaments perfectes.

□

Exemple 5.1.13. El graf pla



té orientació Pfaffiana. I la seva matriu associada és

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \tag{5.1.6}$$

Tenim que $\det(A) = 1$ i $\sqrt{\det(A)} = 1 = Pf(A)$ i un únic 1-factor agafant les arestes $\{(2, 1), (3, 4)\}$.

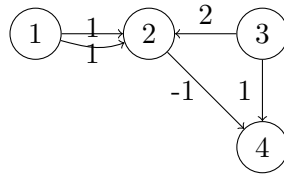
D'aquí se'n dedueix :

Lema 5.1.14. [8, Lemma 9, p.6] Una orientació \vec{E} de $G = (V, E)$, és Pfaffiana si per cada cicle C , tal que $G \setminus V(C)$ té un emparellament perfecte, el nombre d'arcs orientats en sentit contrari al llarg de C és imparell.

En grafs plans, podem definir una orientació més forta.

Teorema 5.1.15. [8, Theorem 10, p.6] Sigui $G = (V, E)$ un graf pla. Suposem que G admet una orientació \vec{E} tal que, per cada cara interna de G , el nombre d'arcs en sentit horari és senar. Aleshores \vec{E} és Pfaffiana.

Exemple 5.1.16. El graf



té una orientació \vec{E} que és Pfaffiana.

Lema 5.1.17. (Lema Schwartz-Zippel) [8, Lemma 4, p.3] Considerem un espai F_q qualsevol. Sigui $p(x_1, \dots, x_m) \in F_q$, grau(p) = d en F_q . Sigui $r = (r_1, \dots, r_m)$ elegit uniformement de F_q^m . Aleshores tenim la següent probabilitat :

$$\mathbb{P}[p \neq 0] \leq \frac{d}{q}$$

Demostració. Usarem inducció sobre el nombre de variables m :

- Cas $m=1$: Es compleix, ja que, un polinomi de grau d no pot tenir més d'arrels.
- Cas iteratiu : Suposem que es satisfà quan $d \leq m-1$ i volem provar el cas $d=m$. Per hipòtesi, sabem que existeix una i tal que p_i no nul amb grau(p_i) $\leq d - i$ complint:

$$\mathbb{P}[p_i(r_1, \dots, r_{m-1})] \leq \frac{d-i}{q}$$

Si $p_i(r_1, \dots, r_{m-1}) \neq 0$ aleshores, el grau de $p(r_1, \dots, r_{m-1}, x_m)$ polinomi en x_m és i . Així que:

$$\mathbb{P}[p(r_1, \dots, r_m) = 0 | p_i(r_1, \dots, r_{m-1}) \neq 0] \leq \frac{i}{d}$$

i aconseguim $\mathbb{P}[p \neq 0] \leq \frac{d}{q}$, tal com volíem provar.

□

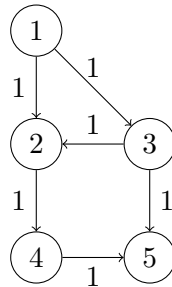
Teorema 5.1.18. [8, Theorem 3, p.3] Sigui $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, llavors:

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow G_A \text{ no té un emparellament perfecte.}$$

Demostració. Sigui $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{F}^{n \times n}$, la idea de la demostració és usar un algoritme per provar diferents valors aleatoris de a_{ij} . Pel lema de Schwartz-Zippel, la probabilitat que el determinant valgui zero és petita.

□

Exemple 5.1.19. El graf G



no té emparellaments perfectes. Observem que té matriu associada

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.1.7)$$

amb $\det(A)=0$.

El primer en intentar comptar els emparellaments perfectes va ser König, i ho va fer en el cas de grafs bipartits obtenint el següent resultat :

Teorema 5.1.20. (Teorema de König) [4, p.82] *Sigui G un graf bipartit. El nombre més gran d'arestes que no es toquen, és igual, al menor nombre de vèrtexs que toquen totes les arestes.*

En particular, si G és subgraf d'un graf bipartit complet $K_{m,m}$, tindrà un 1-factor si i només si m és el nombre més petit de vèrtexs que toquen totes les arestes.

La demostració d'aquest teorema ens dóna informació addicional molt útil, ja que, ens proporciona el mètode per trobar un recobriment mínim d'un emparellament.

Demostració. Sigui $G=(V,E)$ un graf bipartit, i $V=(R,L)$ on R és el conjunt de vèrtexs de la dreta i L el conjunt de vèrtexs de l'esquerra. Suposem que M és un emparellament on cap vèrtex pot tocar més d'una aresta de M , així que, si es pot construir ha de ser mínim.

Per fer-lo, considerem U el conjunt de vèrtexs no usats en L i Z el conjunt de vèrtexs que està en U o connectats a vèrtexs de U per camins que no han de ser necessàriament de l'emparellament.

Sigui:

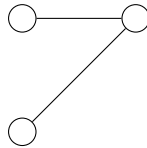
$$K=(L \setminus Z) \cup (R \cap Z)$$

Cada aresta pertany a un camí i acaba a la dreta en K , o a l'esquerra en K . Aleshores, si l'aresta està emparellada el seu final, no pot estar en un camí fora de l'1-factor i així pertany a $(L \setminus Z) \cup (R \cap Z)$. Altrament, si l'aresta no és de l'emparellament, es podria afegir un tros de camí perquè ho fos.

A més, cada vèrtex en K és el final d'una aresta de l'emparellament. Llavors, cada vèrtex en $K=(L\setminus Z)\cup(R\cap Z)$ està emparellat perquè $U\subset Z$. Per tant, cap aresta emparellada pot tenir els dos vèrtexs en K , així que K és un recobriment de vèrtexs d'ordre igual que M i ha de ser mínim.

□

Exemple 5.1.21. Considerem el graf bipartit



el nombre d'arestes més grans que no es toquen és 1, i només hi ha un vèrtex que toca totes les arestes.

Observem, que aquest graf, és un subgraf de $K_{2,2}$ i no té dos vèrtexs que toquin totes les arestes, aleshores no té 1-factors.

König, es va centrar en l'estudi dels emparellaments perfectes en grafs bipartits. A més a més, va descobrir les condicions necessàries i suficients perquè un graf bipartit G tingui un 1-factor. Més generalment, va definir el nombre més gran d'arestes de G que no es toquen dos a dos.

Fer el raonament necessari per passar del teorema de König, a un resultat equivalent en grafs no bipartits no és evident. Tutte va arribar a la següent conclusió que generalitzava el de Teorema de König.

Teorema 5.1.22. (Teorema de Tutte) [15, Theorem 3, p. 110] *Un graf, $G=(V,E)$, té un 1-factor si i només si per a cada subconjunt S de vèrtexs, $p(S)=\{\text{components connexes amb un nombre imparell de vèrtexs del graf } G\setminus S\}$.*

$$p(S)\leq |S|$$

Demostració. Sigui A matriu d'adjacència de G i Z una matriu antisimètrica, amb diagonal nul·la i els elements de sobre la diagonal algebraicament independents. Definim el seu producte d'Hadamard com $B=(b_{ij})=(a_{ij}\cdot z_{ij})$ i pel teorema de Cayley (Teorema 5.1.5) tenim :

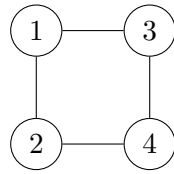
$$\det(B)=(Pf(B))^2$$

Com que els elements de sobre la diagonal principal de Z són independents, $Pf(M)=0$ si i només si G_A té un emparellament perfecte.

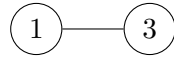
Però pel teorema de Jacobi, sobre càlcul d'un determinant d'una submatriu a partir de l'adjunta i la inversa, si G no té un emparellament perfecte aleshores hi ha contradicció amb la condició de Tutte.

□

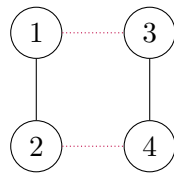
Exemple 5.1.23. Considerem el graf G



al treure-li els vèrtexs 2 i 4, és a dir $S=\{2, 4\}$ i $|S|=2$, obtenim



que és un graf format per una component senar, aleshores $p(S) = 1 < 2$. El graf té un 1-factor:



Observem que el teorema de König es pot deduir directament del teorema de Tutte, ja que n'és un cas particular. De Tutte també obtindrem les següents conseqüències.

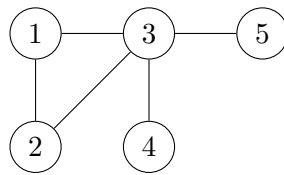
Teorema 5.1.24. [15, Theorem 4, p. 110] *Un graf $G=(V,E)$ és primer si, i només si existeix un subconjunt $S \subset V$ de vèrtexs tals que :*

$$p(S) > |S|$$

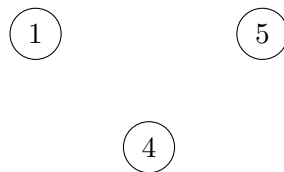
Demostració. Pel teorema de Tutte (Teorema 5.1.), tenim que G tindrà un 1-factor si i només si $p(S) \leq |S|$. Aleshores G no tindrà emparellaments perfectes, és a dir, serà primer, si i només si $p(S) > |S|$.

□

Exemple 5.1.25. Considerem el graf G



al treure-li els vèrtexs 2 i 3, per tant $S=\{2, 3\}$ i $|S|=2$, obtenim



que és un graf format per tres components connexes d'ordre senar, aleshores, $p(S) = 3 > 2 = |S|$ i, per tant, el nostre graf és primer.

I ahora aquest teorema és equivalent a :

Proposició 5.1.26. [15, p. 110] *Sigui $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A^t = -A$, amb elements sobre la diagonal nuls o part d'un sistema independent d'indeterminades. Aleshores $\det(A) = 0$ si, i només si A té una submatriu diagonal A_0 que sigui producte directe de matrius antisimètriques, d'ordre imparell, que excedeixin la diferència d'ordres de A i A_0 .*

Teorema 5.1.27. [15, Theorem 5, p. 111] *Sigui G un graf connex, d'ordre parell i regular amb grau n . Si G no té components connexes de grau menor a $n-1$ aleshores almenys existeix un factor.*

Demostració. Sigui G un graf connex i S_n qualssevol component de S . Sigui $L(S_n)$ el nombre d'arestes que tenen un vèrtex en S i l'altre en S_n . Si l'ordre n de S_n és imparell, tenim que, $L(S_n) \geq \sigma$. L'única possibilitat és que $L(S_n) = \sigma - 1$. En aquest cas el nombre de vèrtexs de S_n seria $\frac{1}{2}(\sigma n - \sigma + 1) \notin \mathbb{Z}$. Si anomenem k el nombre de vèrtexs de $L(S_n)$ obtindrem:

$$\sigma p(S) \leq k \leq \sigma |S|$$

i, pel Teorema 4.2.14, G té un factor.

□

Corol·lari 5.1.28. [3, Corollary, p. 111] *Sigui (a, b) una arista de G . Aleshores, G té un factor que conté l'aresta.*

Demostració. Siguin a_r i a_s dos vèrtexs de G . Suposem que el corol·lari és fals per algun G , aleshores $G \setminus \{a_r, a_s\}$ és primer. Pel teorema 5.1.24, existeix un conjunt S en $G \setminus \{a_r, a_s\}$ tal que :

$$p(S) > |S|$$

Definim $S' = S \cup \{a_r, a_s\}$. Clarament tindrem :

$$\begin{aligned} |S'| &= |S| + 2 \\ p(S') &= p(S) \end{aligned}$$

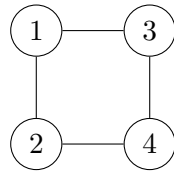
veiem que $|S'| > p(S')$ i, de la demostració del teorema previ, deduïm que la igualtat es donarà si, i només si cada arista incident en un element de S' ho és també en un de $G \setminus S'$. Però això, no és cert per G , ja que donat G senar serà :

$$\begin{aligned} |S'| &= |S| + 2 \\ p(S') &\geq p(S) \end{aligned}$$

que es contradiu amb la definició de S .

□

Exemple 5.1.29. Prenem el graf G



No té cap component connexa de grau menor a $2-1=1$. Aleshores existeix un factor. I donada una aresta de G , la conté.

Anàlogament, podem escriure el teorema de Tutte en funció dels rangs de la matriu del graf :

Teorema 5.1.30. (Teorema de Tutte, versió rangs) [8, Theorem 5, p.4] *Sigui $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matriu antisimètrica, associada a un graf i M la dels seus emparellaments, aleshores :*

$$2 \cdot \max_M |M| = \text{rg}(A)$$

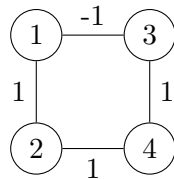
on $\max_M |M|$ és la mida més gran de l'emparellament perfecte.

Demostració. Anomenarem $m = \max_M |M|$. Triem qualsevol emparellament de mida m , i sigui $U \subset V$ el seu conjunt de vèrtexs. Anomenarem G_B al subgraf induït per G i $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ la seva matriu associada. Per poder tenir emparellament perfecte necessitem $\det(B) \neq 0$. Aleshores, pel Teorema 5.1.18, G_B té emparellament perfecte de mida $\frac{m}{2}$, i per tant G té un emparellament d'aquesta mida.

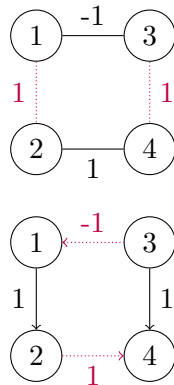
Ara, ens queda veure que és emparellament perfecte en G . Suposem que G té un emparellament de mida més gran que $\frac{m}{2}$. Anomenem C , a la submatriu obtinguda agafant les files o columnes corresponent als vèrtexs de l'emparellament en B . Tenim $\text{rg}(C) > m$ i $\det(C) \neq 0$ pel Teorema 5.1.18, això porta a contradicció.

□

Exemple 5.1.31. Considerem el graf



que té dos possibles emparellaments perfectes :



Ambdós tenen ordre 2, ja que sol agafem dues arestes, per tant, $2 \cdot \max_M |M| = 2 \cdot 2 = 4$. La matriu del graf és

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \quad (5.1.8)$$

i té $\text{rg}(A)=4$.

5.2 Grafes primers

En aquesta secció estudiarem el teorema de Tutte i els Pfaffians a partir dels grafes primers. Per fer-ho, primer necessitarem definir que és un graf primer i quines propietats té. Recordem, que donat un graf $G=(V,E)$, un *factor* d'aquest és un subgraf amb el mateix conjunt de vèrtexs de G i on aquests tenen el mateix ordre.

Definició 5.2.1. *Direm que un graf $G=(V,E)$ és primer, si tots els seus vèrtexs tenen ordres diferents. És a dir, G , no té factors.*

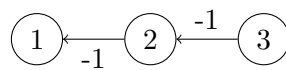
Lema 5.2.2. *Si $G=(V,E)$ un graf amb un nombre senar de vèrtexs, és primer si el seu Pfaffià és nul.*

Demostració. Suposem que A és la matriu de G_A . Aleshores, utilitzant el contra-recíproc, si $\text{Pf}(A) \neq 0$ volem veure que G_A no és primer, és a dir que té factors. Que el Pfaffià no sigui nul, equival a què G_A té emparellaments perfectes o 1-factors. I, per tant, té factors tal com volíem veure.

□

Exemple 5.2.3.

- Observem que el graf de l'Exemple 5.1.25 és d'ordre primer i té Pfaffià 1.
- Si considerem el graf



veiem que és senar amb Pfaffià 0, és a dir, és primer.

Observem que tots els grafes senars són primers.

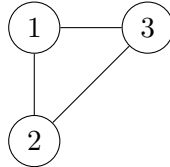
Definició 5.2.4. *Si $G=(V,E)$ un graf. Definim la seva singularitat com el vèrtex a_i , tal que per cada $a_j \neq a_i$, $i \neq j$, el graf $G \setminus \{a_i, a_j\} = (V \setminus \{a_i, a_j\}, G \setminus \{(a_i, a_j)\})$ és primer.*

Teorema 5.2.5. (Teorema de Tutte, versió grafes primers) [15, Theorem 1, p. 109] *Si $G=(V,E)$ graf primer d'ordre parell i $a_i \neq a_j$ dos vèrtexs units per una aresta, aleshores, $G \setminus \{a_i, a_j\}$ és primer.*

Demostració. Suposem els vèrtexs a_i i a_j units per una aresta (i,j) . Si hi ha un factor de $G \setminus (i,j)$, aleshores $F \cup (i,j)$ serà un factor de G . Això ens porta a contradicció amb la hipòtesi que no hi ha factors.

□

Exemple 5.2.6. Considerem el següent graf primer d'ordre parell



Si traiem per exemple els vèrtexs 2 i 3 obtindrem

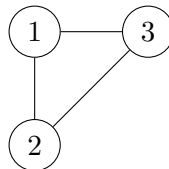


que també és un graf primer.

Definició 5.2.7. Sigui $G=(V,E)$ un graf primer, direm que, és hiperprimer si prenent dos vèrtexs qualssevol, units per una aresta i eliminant-los, obtenim un graf primer.

Exemple 5.2.8.

- El següent graf és hiperprimer.



- Qualsevol graf primer d'ordre parell serà hiperprimer per la segona versió del teorema de Tutte.

Teorema 5.2.9. [3, Theorem 2, p. 109] Sigui $G=(V,E)$ graf primer, podem construir un graf hiperprimer, $\bar{G} = (V, \bar{E})$, que conté G com a subgraf.

Demostració. Sigui G un graf hiperprimer, hi haurà una parella de vèrtexs a_i i a_j no units per una aresta, tal que, $G \setminus (a_i, a_j)$ és primer.

Si afegim l'aresta, (i,j) , i suposem el graf resultant té un factor F , tindrem dos casos, si $(i,j) \notin F$, aleshores F és factor en N , o si $(i,j) \in F$. En el segon cas, tornem a tenir dues possibilitats:

- $F \cap G \setminus (a_i, a_j)$ factor de $G \setminus (a_i, a_j)$, ens porta a contradicció.
- En cas contrari, haurem de continuar iterant el procés fins a arribar a la contradicció.

□

Conclusions

Aquest treball, va començar amb l'objectiu d'estudiar la relació de simbiosis entre la Teoria Matricial i la Combinatòria. Al llarg de la seva creació, ens hem desviat d'aquest propòsit per centrar-nos en la relació que hi ha entre la Teoria de Grafs i l'Àlgebra Lineal. Al primer capítol hem repassat conceptes i notació sobre Grafs i Teoria de Matrius, necessaris al llarg del treball.

En la introducció, s'ha estudiat la relació entre els dos conceptes, descobrint que els grafs es poden utilitzar per estudiar operacions amb matrius o determinants i a més a més hem parlat per primera vegada d'1-factors i pesos. L'últim apartat del capítol està dedicat a veure breument la relació d'un resultat molt important de l'Àlgebra Lineal, la forma canònica de Jordan d'una matriu, amb els Grafs.

A continuació, hem vist com els resultats en matrius no negatives o la teoria espectral afecten els resultats de teoria grafs i viceversa.

Finalment, en l'últim capítol, i en contrast amb la resta del treball, hem usat l'Àlgebra Lineal per estudiar resultats sobre els grafs. En aquest apartat, s'ha profunditzat en el vincle que hi ha entre els 1-factors i els pesos dels grafs. Això, ens ha permès trobar una relació molt útil entre els Pfaffians d'una matriu i els determinants, també ha facilitat estudiar els grafs primers des d'un punt de vista de la teoria de matrius.

A part, hem descobert que el teorema de Tutte sorgeix d'una primera idea que va tenir König, ja que va intentar comptar els emparellaments perfectes que tenen els grafs bipartits. Tutte, va aconseguir generalitzar el resultat de König, descobrint la forma de comptar els 1-factors en qualsevol classe de graf.

Resumint, la relació entre els Grafs i l'Àlgebra Lineal és molt estreta i molt útil, ja que, ens permet simplificar resultats i demostracions que d'altra manera serien molt tediosos. A més a més crec que alguns resultats, que a mi em van sorprendre, podrien ser il·lustratius per ensenyar teoria de matrius, perquè són molt visuals, un exemple podria ser l'explicació en grafs del producte de matrius, matriu per un enter o suma de matrius. Per a nivells més avançats es pot usar per Jordan i Gerschgorin entre altres.

Per tant, aquest tema d'investigació, m'ha semblat molt interessant, ja que aparentment no hi ha límit per les aplicacions d'aquesta relació.

Bibliografia

- [1] Aitken, A. C. *Determinantes y matrices*. Madrid, Dossat, 1949.
- [2] Brualdi, A. Richard (1982): *Matrices eigenvalues, and directed graphs, Linear and Multilinear Algebra*, 11:2, 143-165.
- [3] Brualdi, A. Richard. The jordan canonical form: an old proof. *The American Mathematical Monthly*, vol. 94, n^o 3(Mar. 1987), pàg. 257-267.
- [4] Brualdi, A. Richard. The symbiotic relationship of combinatorics and matrix theory. *Linear algebra and its applications*. Volums 162-164:65-105,1992.
- [5] Cimasoni, David.[Recurs electrònic] The geometry of dimer models.[Consulta : 16 de maig de 2022] Disponible en: <<https://arxiv.org/pdf/1409.4631.pdf>>
- [6] Doob, Michael. *Applications of Graph Theory in Linear Algebra*. Mathematics Magazine, vol.57, n^o2, 1984, p.67-76.
- [7] Fiedler, M. *Special Matrices and their Applications in Numerical Mathematics*. Martinus Nijhoff, Dordrecht, 1986.
- [8] Goemans, Michel X.18.438 *Advanced Combinatorial Optimization, Lectures 4 and 6*. UC Santa Barbara, 2014.
- [9] Gracia, Juan-Miguel. *Matrices no negativas, paseos aleatorios y cadenas de Markov*. Universidad del País Vasco Matemática Aplicada y Estadística, 2002.
- [10] Horn, Roger A. i Johnson, Charles R. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1987. ISBN 0521305861.
- [11] Kellogg, R.B. i Stephens, A.B. Complex eigenvalues of a non-negative matrix with a specified graph. *Linear algebra and its applications* 20, 179-187,1978.
- [12] Lancaster, P. i Tismenetsky M. *The theory of matrices with applications*. Academic Press, second edition, 1985.
- [13] Schneider, Hans. "The Influence of the Marked Reduced Graph of a Nonnegative Matrix on the Jordan Form and on Related Properties: A Survey." *Linear Algebra and its Applications* 84 (1986): 161–189.
- [14] Sourabh, Saket. *Advanced Graph Algorithms Lecture 11-January 28,2014*.UC Santa Barbara, 2014.
- [15] Tutte, W.T. *The factorization of linear graphs*, J. London Math. Soc. 22 (1948) ,pàg. 107-111.

- [16] Varga, Richard S. *Geršgorin and his circles* 1st ed. 2004, Corr. 4th printing 2011 Edición. ISBN 9783540211006.
- [17] Varga, Richard S. *Matrix Iterative Analysis* 1^a ed. New Jersey : Prentice-Hall, INC., 1962. ISBN 9780135655078 .