Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Teorema del límit central: Extensions i aplicacions

Autor: Guillem Carbó Torrents

Directora: Dra. Marta Sanz-Solé

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 13 de juny de 2022

Abstract

In this work, using as a base concept the statement of the classic Central limit theorem, we will study under which additional conditions the theorem still holds if, in the original statement, we neglect some of the hypothesis that appear in it.

As an application of the previous topics, we will state and proof a theorem that answers a basic and common question that comes to mind when talking about convergence: the possibility of finding a bound, as best as possible, such that it gives us relevant information about the absolute error between the approximation and its limit.

Resum

En aquest treball, utilitzant com a base l'enunciat del Teorema del límit central clàssic, estudiarem sota quines condicions addicionals el teorema se segueix satisfent si a l'enunciat original deixem de banda algunes de les hipòtesis que hi apareixen.

Com a aplicació dels resultats trobats, enunciarem i demostrarem un teorema que resol una qüestió bastant comuna i bàsica quan es treballa amb convergències: la possibilitat de trobar una cota, la millor possible, que ens doni informació rellevant sobre l'error absolut entre l'aproximació i el seu límit.

2020 Mathematics Subject Classification. 28A33, 46N30, 60F05

Agraïments

Voldria agrair a la Dra. Marta Sanz-Solé per proposar-me el tema sobre el que tractarà aquesta memòria , i per tota l'ajuda i consells que m'ha propocionat durant aquest procés. També agrair a la meva família i a tots aquells companys i amics que m'han acompanyat durant tot aquest temps.

Índex

0 Introducció i conceptes previs

El Teorema del límit central, d'ara en endavant referit com a TLC, és un resultat fonamental a l'ensenyança universitària, especialment a les carreres científiques o d'enginyeria, on és un instrument que s'utilitza a diari en situacions quotidianes i professionals. Tot i ser, com veurem a continuació, un resultat que prové del segle XVIII, la denominació "Teorema del límit central" no apareix fins a l'any 1920 en un document científic escrit per George Pólya[1], titulat *Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und das Momentenproblem (Sobre el "teorema del límit" central del càlcul probabilístic i el problema dels moments).*

En l'actualitat, coneixem com a TLC a una sèrie de resultats sobre el comportament de la suma (o mitjana) de variables aleatòries (d'ara en endavant v.a's per a estalviar espai), que, de forma simplificada, estableix que: *"la suma d'un gran nombre de v.a's independents, i idènticament distribuïdes tendeix a seguir de manera asimptòtica una distribució normal, sempre que certes condicions siguin satisfetes".*

De manera més científica, ho podem reescriure en la seva forma més coneguda i que segur que resulta familiar al lector:

Teorema 0.1. *(TLC clàssic) Sigui $\{X_j, j \geq 1\}$ una successió de v.a's independents i idènticament distribuïdes, amb $\mathbb{E}(X_j) = \mu$ i $Var(X_j) = \sigma^2$. Si definim $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$, aleshores*

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

convergeix en distribució a una $N(0,1)$, quan $n \to \infty$.

Des del punt de vista històric, el TLC és un dels resultats més importants de les matemàtiques, especialment en estadística, però els seus orígens es remonten a bastant més endarrere de l'article de Pólya esmentat anteriorment, doncs fou establert per primera vegada l'any 1738 per de Moivre[2], sota condicions molt restingides. A principis del segle XIX, Laplace[3], va reformular-ne l'enunciat de de Moivre i el va enunciar de manera més general, com resa el següent corol.lari:

Corol.lari 0.2. *(Teorema de Laplace-de Moivre) Per a $0 < p < 1$, $p + q = 1$, i $x_1 < x_2$, quan $n \to \infty$:*

$$\sum_{x_1\sqrt{npq} \leq k - np \leq x_2\sqrt{npq}} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-y^2/2}\, dy, \tag{0.1}$$

on $\Phi(x)$ correspon a la funció de distribució d'una $N(0,1)$.

Aquest resultat, que de Moivre va enunciar i demostrar l'any 1733, no és res més que una aplicació del TLC clàssic on totes les v.a's X_j corresponen a distribucions Bernoulli[4] amb funció de distribució $p\delta_1 + q\delta_0$.

Notem que el Teorema 0.1 ens parla de la convergència en distribució de v.a's, concepte que apareixerà durant tota la memòria i del qual tot seguit anem a recordar-ne la seva definició i una caracterització molt important:

[1] György "George" Pólya, 1887-1985
[2] Abraham de Moivre, 1667-1754
[3] Pierre-Simon Laplace, 1749-1827
[4] Jakob Bernoulli, 1654-1705

Definició 0.3. *Diem que una successió de probabilitats* $\{\mu_n, n \geq 1\}$ *en* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *(on* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *denota els borelians)* ***convergeix feblement o en distribució*** *a una probabilitat* μ *sii per a tota funció* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *contínua i acotada,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f \ d\mu_n = \int_{\mathbb{R}} f \ d\mu.$$

La convergència en distribució es pot caracteritzar en termes de les funcions de distribució, com diu aquest important resultat que utilitzarem diverses vegades a la memòria:

Teorema 0.4. *Sigui* $\{\mu_n, n \geq 1\}$ *una successió de probabilitats en* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*, amb funcions de distribució associades* $\{F_n, n \geq 1\}$*. Sigui* μ *una probabilitat amb funció de distribució* F*. Aleshores,* μ_n *convergeix en distribució a* μ *sii* $F_n(x) \to F(x)$*, quan* $n \to \infty$*, per a tot* x *punt de continuïtat de* F*.*

Un altre concepte que ens acompanyarà durant tot el treball és el de funció característica d'una v.a, del qual també en recordarem la seva definició i un teorema derivat que resultarà clau per a vàries demostracions que farem:

Definició 0.5. *Sigui* μ *una probabilitat en* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*. La* ***funció característica*** *de* μ *es defineix com:* $\varphi_\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$*,*

$$\varphi_\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \ \mu(dx).$$

Si, com en el cas que ens interessa, $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *és una v.a, aleshores la* ***funció característica*** *de* X *és la funció característica de la seva llei:*

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \ dF_X(x),$$

on F_X *correspon a la funció de distribució de* X*.*

Un dels resultats importants que utilitzarem pràcticament en cada demostració que farem d'aquí en endavant, és un resultat que ens relaciona la convergència en distribució de v.a's i la funcions característiques, i és degut al matemàtic francès Paul Lévy[5].

Teorema 0.6. *(Teorema de continuïtat de Paul Lévy) Sigui* $\{\mu_n, n \geq 1\}$ *una successió de probabilitats amb funcions característiques associades* $\{\varphi_n, n \geq 1\}$*. Aleshores*

(1) Si μ_n *convergeix en distribució a* μ*, quan* $n \to \infty$*, i* φ *és la funció característica de la probabilitat* μ*, es té*

$$\varphi_n(t) \xrightarrow{n\to\infty} \varphi(t), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

(2) Si $\varphi_n(t) \xrightarrow{n\to\infty} \varphi(t)$*,* $\forall t \in \mathbb{R}$*, amb* φ *una funció contínua en zero, aleshores* φ *és la funció caratcerística d'una certa probabilitat* μ *i es té que* μ_n *convergeix en distribució a* μ*, quan* $n \to \infty$*.*

La importància d'aquest teorema recau en el fet que, com veurem més endavant, ens permet demostrar molts dels resultats que tenen a veure amb convergència en distribució de lleis, com el propi TLC clàssic i totes les seves extensions, treballant únicament amb funcions característiques, que són unes eines molt més simples i mal.leables.

[5] Paul Pierre Lévy, 1886-1971

Objectiu i estructura de la memòria

L'objectiu d'aquest treball consisteix en anar més enllà del TLC clàssic i estudiar-ne diverses extensions com, per exemple, si deixem de banda algunes de les hipòtesis que conformen l'enunciat del TLC clàssic o canviem la suma de variables aleatòries per a algun altre funcional, i preguntar-nos quina/es condicions necessitem afegir per a tal que el TLC segueixi sent cert. L'estructura de la memòria és la següent.

En les dues primeres seccions de la memòria, treballarem amb v.a's que no són idènticament distribuïdes.

En la secció 1, introduïm el concepte de matriu de v.a's, que ens serà necessari al llarg de tot el treball. Seguidament, definim què vol dir que una matriu de v.a's sigui uniformement asimptòticament negligible (UAN) i enunciem i demostrem el resultat que dóna nom al capítol, el teorema de Liapunov.

En la secció 2, utilitzant els conceptes de la secció anterior, enunciem i demostrem el teorema de Lindeberg-Feller, un resultat semblant al teorema de Liapunov. Tot seguit, compararem els dos resultats trobats i la seva relació amb el TLC clàssic.

En la tercera secció, ens centrarem en ramificacions del TLC, més concretament en els casos de v.a's amb un cert grau de dependència, v.a's amb un nombre aleatori de termes a la suma i, finalment, estudiarem què passa si intercanviem la suma per a un altre funcional de v.a's com, per exemple, el màxim de la suma.

Finalment, en l'última secció, la quarta, a través d'una sèrie de lemes, estudiarem un punt clau quan es parla de convergència de v.a's: l'error, és a dir, estudiar la diferència entre l'aproximació i el seu límit. Gràcies a un teorema, veurem que aquesta diferència es pot acotar de manera senzilla fent ús únicament del moments de tercer ordre.

1 Liapunov

1.1 Preliminars

El nom "teorema del límit central" fa referència a un resultat que afirma la convergència en distribució d'una suma "normada" de v.a $(S_n - a_n)/b_n$, a la funció de distribució normal estàndard $N(0,1)$. Hem vist a la secció anterior el TLC clàssic. En aquesta secció comencem generalitzant-ne la disposició. Si escrivim

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{X_j}{b_n} \right) - \frac{a_n}{b_n}, \tag{1.1}$$

podem observar que realment estem tractant amb una matriu, definida de la següent manera. Per a $n \geq 1$, considerem $\{X_{nj}, 1 \leq j \leq k_n\}$ k_n v.a's, on $k_n \to \infty$ quan $n \to \infty$:

$$\begin{array}{l} X_{11}, X_{12}, ..., X_{1k_1}\ ; \\ X_{21}, X_{22}, ..., X_{2k_2}\ ; \\ .... \\ X_{n1}, X_{n2}, ..., X_{nk_n}; \\ .... \end{array} \tag{1.2}$$

Considerarem les v.a's amb n al primer subíndex com l'n-èsima fila de la matriu (1.2).

Siguin F_{nj} i f_{nj} la funció de distribució i la funció característica, respectivament, de X_{nj}; i definim

$$S_n = S_{n,k_n} = \sum_{j=1}^{k_n} X_{nj}.$$

El cas particular $k_n = n$ per a cada n converteix (1.2) en una matriu triangular inferior. A més a més, si $X_{nj} = X_j$ per a tota n, aleshores es redueix als termes inicials d'una única successió $\{X_j, j \geq 1\}$.

Si no s'indica el contrari, suposem que *les v.a's a cada fila de la matriu (1.2) són independents entre les de la mateixa fila*, però poden ser arbitràriament dependents a aquelles en files diferents (per exemple, podrien estar definides en espais de probabilitats diferents sense relació entre elles). A continuació, introduïm la següent notació (que ens acompanyarà durant tota la resta de la memòria) respecte als moments, quan aquests estiguin definits, finits o infinits:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(X_{nj}) = \alpha_{nj}, && \sigma^2(X_{nj}) = \sigma^2_{nj}, \\ &\mathbb{E}(S_n) = \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_{nj} = \alpha_n, && \sigma^2(S_n) = \sum_{j=1}^{k_n} \sigma^2_{nj} = s^2_n, \\ &\mathbb{E}(|X_{nj}|^{2+\delta}) = \gamma_{nj}, && \Gamma_n = \sum_{j=1}^{k_n} \gamma_{nj}, \end{aligned}$$

per a algun $\delta > 0$. En el cas especial (1.1) que ens ocupa, tenim

$$X_{nj} = \frac{X_j}{b_n}, \qquad \sigma^2(X_{nj}) = \frac{\sigma^2(X_j)}{b_n^2}.$$

Si prenem $b_n = s_n$, aleshores

$$s_n^2 = \sum_{j=1}^{k_n} \sigma^2(X_{nj}) = 1. \tag{1.3}$$

Considerant $X_{nj} - \alpha_{nj}$ en comptes de X_{nj}, podem suposar

$$\forall n, \forall j : \alpha_{nj} = 0 \tag{1.4}$$

sempre que tals esperances existeixin. Aquesta reducció (a vegades anomenada "normar les v.a's") causada per (1.3) i (1.4) sempre està disponible si cada X_{nj} té moment de segon ordre finit. **Aquesta hipòtesi sobre els moments de segon ordre, juntament amb les propietats (1.3) i (1.4) anteriors, es mantindran durant tota la memòria llevat que l'autor indiqui el contrari.**

Treballant amb la matriu (1.2), és essencial imposar la hipòtesi que els termes individuals a la suma

$$S_n = \sum_{j=1}^{k_n} X_{nj}$$

són "negligibles" en comparació amb la suma en sí mateixa. Històricament, aquest fet sorgeix de la suposició que els "petits errors" s'acumulen i causen fenòmens de masses aleatòries predictibles probabilísticament. Veurem més endavant, en el següent capítol, que tal hipòtesi es torna un criteri vitalment necessari per al TLC.

Per tal de clarificar la noció intuitiva de la negligibilitat, considerem la següent jerarquia de condicions, cadascuna satisfent-se per a tot $\varepsilon > 0$:

$$(a) \qquad \forall j : \lim_{n\to\infty} P(|X_{nj}| > \varepsilon) = 0;$$

$$(b) \qquad \lim_{n\to\infty} \max_{1\le j\le k_n} P(|X_{nj}| > \varepsilon) = 0;$$

$$(c) \qquad \lim_{n\to\infty} P(\max_{1\le j\le k_n} |X_{nj}| > \varepsilon) = 0;$$

$$(d) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} P(|X_{nj}| > \varepsilon) = 0.$$

Proposició. *Per a v.a's arbitràries X_{nj} pertanyents a la matriu (1.2), les implicacions $(d) \Rightarrow (c) \Rightarrow (b) \Rightarrow (a)$ són totes estrictes. Per altra banda, si les X_{nj} són independents a cada fila, aleshores $(d) \equiv (c)$.*

Demostració: (b) $\Rightarrow$ (a): Clarament doncs $P(|X_{nj}| > \varepsilon) \le \max_{1\le j\le k_n} P(|X_{nj}| > \varepsilon)$.

(d) $\Rightarrow$ (c): També clar doncs $P(\max_{1\le j\le k_n} |X_{nj}| > \varepsilon) \le \sum_{j=1}^{k_n} P(|X_{nj}| > \varepsilon)$.

(c) $\Rightarrow$ (b): Fixant ε, considerem les v.a $(X_{nj})_j$ i sigui $X = \max_{1\le j\le k_n} |X_{nj}|$.

Ara, $\forall j, |X_{nj}| \le X \Rightarrow \{|X_{nj}| > \varepsilon\} \subset \{X > \varepsilon\} \Rightarrow P(|X_{nj}| > \varepsilon) \le P(X > \varepsilon), \forall j \Rightarrow \max_{1\le j\le k_n} P(|X_{nj}| > \varepsilon) \le P(\max_{1\le j\le k_n} |X_{nj}| > \varepsilon)$ i hem acabat.

Suposem que les X_{nj} són independents. Volem veure que (d) $\equiv$ (c). La implicació (d) $\Rightarrow$ (c) l'acabem de demostrar, doncs també és vàlida en el cas d'independència entre les v.a. Per a la implicació contrària, utilitzant la coneguda desigualtat $1 - x \le e^{-x}$ i mantenint $X = \max_{1\le j\le k_n} |X_{nj}|$. Per a cada ε, tenim $\{X \le \varepsilon\} = \bigcap_{j=1}^{k_n} \{|X_{nj}| \le \varepsilon\}$. Per tant, utilitzant la hipòtesi d'independència, $P(\max_{1\le j\le k_n} |X_{nj}| > \varepsilon) = P(X > \varepsilon) = 1 - \prod_{j=1}^{k_n}(1 - P(|X_{nj}| \le \varepsilon)) \ge 1 - \exp\left(-\sum_{j=1}^{k_n} P(|X_{nj}| > \varepsilon)\right)$ i obtenim que (c) $\Rightarrow$ (d).

Definició 1.1. *De les condicions de negligibilitat enunciades, resulta que la condició (b) és la que ens interessa i passem a donar-li un nom. La matriu (1.2) es diu que és* ***uniformement asimptòticament negligible (UAN)*** *si i només si satisfà (b).*

Teorema 1.2. *Una condició necessària i suficient per a que la matriu (1.2) sigui UAN és:*

$$\forall t \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} \max_{1\leq j\leq k_n} |f_{nj}(t) - 1| = 0. \tag{1.5}$$

Demostració: Suposant que (b) és cert, tenim

$$\begin{aligned}
|f_{nj}(t) - 1| &\leq \int |e^{itx} - 1| \; dF_{nj}(x) = \int_{|x|>\varepsilon} |e^{itx} - 1| \; dF_{nj}(x) + \int_{|x|\leq\varepsilon} |e^{itx} - 1| \; dF_{nj}(x) \\
&\leq \int_{|x|>\varepsilon} 2dF_{nj}(x) + |t| \int_{|x|\leq\varepsilon} |x| \; dF_{nj}(x) \\
&\leq 2 \int_{|x|>\varepsilon} dF_{nj}(x) + \varepsilon|t|;
\end{aligned}$$

i, conseqüentment,

$$\max_{1\leq j\leq k_n} |f_{nj}(t) - 1| \leq 2 \max_{1\leq j\leq k_n} P(|X_{nj} > \varepsilon) + \varepsilon|t|.$$

Fent primer $n \to \infty$, i després $\varepsilon \to 0$, obtenim (1.5). Per a demostrar la implicació contrària, utilitzarem un lema molt semblant a la coneguda desigualtat de truncació:

Lema. Per a cada $A > 0$, tenim

$$\mu([-2A, 2A]) \geq A \left| \int_{-A^{-1}}^{A^{-1}} f(t) \; dt \right| - 1.$$

Aplicant el lema a la mesura de probabilitat, obtenim

$$\begin{aligned}
P(|X_{nj}| > \varepsilon) = 1 - P(|X_{nj}| \leq 2(\varepsilon/2)) &\overset{Lema}{\leq} 2 - \frac{\varepsilon}{2} \left| \int_{|t|\leq 2/\varepsilon} f_{nj}(t) \; dt \right| \\
\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{|t|\leq 2/\varepsilon} dt - \frac{\varepsilon}{2} \int_{|t|\leq 2/\varepsilon} |f_{nj}(t)| \; dt &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{|t|\leq 2/\varepsilon} |1 - f_{nj}(t)| \; dt
\end{aligned}$$

i, per tant,

$$\max_{1\leq j\leq k_n} P(|X_{nj}| > \varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{|t|\leq 2/\varepsilon} \max_{1\leq j\leq k_n} |1 - f_{nj}(t)| \; dt.$$

Fent $n \to \infty$, la part de la dreta tendeix a 0 per (1.5) i el teorema de la convergència dominada (TCD); implicant la condició (b). Observem que la suposició bàsica sobre independència de les v.a's no és necessària en el teorema. □

1.2 El teorema de Liapunov

Per tal d'aconseguir simplificar la demostració del teorema que dóna nom a aquest capítol, abans ens cal enunciar i demostrar un important lema de càlcul.

Lema 1.3. *Sigui $\{\theta_{nj}, 1 \leq j \leq k_n, n \geq 1\}$ una matriu de nombres complexes que satisfà les següents condicions quan $n \to \infty$:*

(i) $\max_{1\leq j\leq k_n} |\theta_{nj}| \to 0$;

(ii) $\sum_{j=1}^{k_n} |\theta_{nj}| \leq M < \infty$, *on* M *no depèn de* n;

(iii) $\sum_{j=1}^{k_n} \theta_{nj} \to \theta$, *on* θ *és un nombre complex (finit).*

Aleshores tenim

$$\prod_{j=1}^{k_n}(1+\theta_{nj}) \to e^{\theta}. \tag{1.6}$$

Demostració: Per (i), existeix n_0 tal que si $n \geq n_0$, aleshores $|\theta_{nj}| \leq 1/2$ per a tota j, amb la qual cosa $1+\theta_{nj} \neq 0$. Durant la demostració, tindrem en compte únicament valors grans d'n i denotarem per $\log(1+\theta_{nj})$ la determinació del logaritme amb l'argument a $(-\pi,\pi]$ (estem al pla complex). A més, farem abús de notació i denotarem la norma complexa per $|\cdot|$. Així,

$$\log(1+\theta_{nj}) = \theta_{nj} + \Lambda|\theta_{nj}|^2, \tag{1.7}$$

on Λ és un nombre complex que depèn de diverses variables però que està acotat per una *constant absoluta* que no depèn de cap variable, i tal que el seu valor no necessàriament és sempre el mateix. En el cas en què ens trobem ara, de fet, tenim

$$\begin{aligned} |\log(1+\theta_{nj}) - \theta_{nj}| &= \left|\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m}\theta_{nj}^m\right| \leq \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|\theta_{nj}|^m}{m} \\ &\leq \frac{|\theta_{nj}|^2}{2}\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-2} = |\theta_{nj}|^2 \leq 1, \end{aligned}$$

que implica que podem prendre 1 com a valor de la constant absoluta esmentada abans. Per tant,

$$\sum_{j=1}^{k_n} \log(1+\theta_{nj}) = \sum_{j=1}^{k_n}\theta_{nj} + \Lambda\sum_{j=1}^{k_n}|\theta_{nj}|^2.$$

(Aquesta Λ no és la mateixa que abans, però està acotada per el mateix valor, 1). Finalment, se segueix directament de (ii) i (i) que

$$\sum_{j=1}^{k_n}|\theta_{nj}|^2 \leq \max_{1\leq j\leq k_n}|\theta_{nj}|\sum_{j=1}^{k_n}|\theta_{nj}| \leq M \max_{1\leq j\leq k_n}|\theta_{nj}| \to 0; \tag{1.8}$$

d'on, juntament amb la condició (iii), podem concloure que

$$\sum_{j=1}^{k_n}\log(1+\theta_{nj}) \to \theta,$$

resultat que és trivialment equivalent a (1.6). □

Teorema 1.4. *(Liapunov[6]) Suposem que les v.a's de la matriu (1.2) satisfan (1.3), (1.4) i existeix* $\delta > 0$ *tal que* $\gamma_{nj} < \infty$ *per a tota* n, j. *Si*

$$\Gamma_n \to 0, \tag{1.9}$$

quan $n \to \infty$, *aleshores* S_n *convergeix en distribució a una* $N(0,1)$.

Definició 1.5. *La condició (1.9) s'anomena* ***condició de Liapunov****. Per tal de simplificar càlculs en demostracions posteriors, si no s'indica el contrari, treballarem amb la condició de Liapunov per* $\delta = 1$ *(és a dir, amb el moments absoluts de tercer ordre).*

[6]Aleksandr Mikhàilovitx Liapunov, 1857-1918

Demostració del Teorema 1.4: Per a simplificar notació, per a cada n, $j \in \{1, ..., k_n\}$. Se segueix de la condició (1.9) i la desigualtat de Liapunov[7] que

$$\max_j \sigma_{nj}^3 \leq \max_j \gamma_{nj} \leq \Gamma_n \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{1.10}$$

Ara, utilitzant el desenvolupament de Taylor[8] al voltant de $t = 0$ de la funció característica, tenim

$$f_{nj}(t) = 1 - \frac{1}{2}\sigma_{nj}^2 t^2 + \Lambda_{nj}\gamma_{nj}|t|^3,$$

on $|\Lambda_{nj}| \leq 1/6$. Apliquem el Lema 1.3, per a un t fixat, a

$$\theta_{nj} = -\frac{1}{2}\sigma_{nj}^2 t^2 + \Lambda_{nj}\gamma_{nj}|t|^3.$$

La condició (i) del lema se satisfà, doncs

$$\max_j |\theta_{nj}| \leq \frac{t^2}{2}\max_j \sigma_{nj}^2 + \frac{|t|^3}{6}\max_j \gamma_{nj} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

per (1.10). La condició (ii) també se satsifà, ja que

$$\sum_j |\theta_{nj}| \leq \frac{t^2}{2} + \frac{|t|^3}{6}\Gamma_n$$

està acotat per (1.10); similarment, la condició (iii) també se satisfà doncs

$$\sum_j \theta_{nj} = -\frac{t^2}{2} + \Lambda_{nj}|t|^3\Gamma_n \xrightarrow{n\to\infty} -\frac{t^2}{2}.$$

Per tant, podem aplicar el Lema 1.3, d'on se segueix que

$$\prod_{j=1}^{k_n} f_{nj}(t) \to e^{-t^2/2}.$$

Com el producte de l'esquerra correspon a la funció característica de S_n i el membre de la dreta a la funció característica d'una $N(0,1)$, en virtut del teorema de continuïtat de Paul Lévy, hem acabat la demostració. □

Corol.lari. *Sense la suposició que $\mathbb{E}(X_{nj}) = 0$, suposem que per a cada n i cada j existeix una constant finita M_{nj} tal que $|X_{nj}| \leq M_{nj}$ g.p.t, i que*

$$\max_{1\leq j\leq k_n} M_{nj} \to 0, \;\; n \to \infty. \tag{1.11}$$

Aleshores, $S_n - \mathbb{E}(S_n)$ convergeix en distribució a una $N(0,1)$.

Demostració: Utilitzant la desigualtat triangular al primer pas, tenim

$$\sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E}(|X_{nj} - \mathbb{E}(X_{nj})|^3) \overset{D.T.}{\leq} 2 \max_{1\leq j\leq k_n} M_{nj} \sum_{j=1}^{k_n} \sigma^2(X_{nj}) = 2 \max_{1\leq j\leq k_n} M_{nj} \to 0$$

i, aplicant el teorema de Liapunov per $\delta = 1$, obtenim el resultat desitjat. □

[7] $\mathbb{E}(|X|^2)^{1/2} \leq \mathbb{E}(|X|^3)^{1/3} \Rightarrow (\sigma_{nj}^2)^{1/2} \leq \gamma_{nj}^{1/3} \Rightarrow \sigma_{nj}^3 \leq \gamma_{nj}$
[8] Brook Taylor, 1685-1731

La formulació usual del Teorema 1.4 per a una única succ. ($k_n = n$) de v.a $\{X_j\}_j$ independents que satisfà $\mathbb{E}(X_j) = 0,\ \sigma^2(X_j) = \sigma_j^2 < \infty,\ \exists\delta > 0$ t.q. $\mathbb{E}(|X_j|^{2+\delta}) = \gamma_j < \infty$,

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j, \qquad s_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2, \qquad \Gamma_n = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j, \tag{1.12}$$

és la següent:

Teorema 1.6. *(Liapunov II) Si la succ. $\{X_j\}_j$ satisfà la condició de Liapunov, és a dir,*

$$\frac{\Gamma_n}{s_n^{2+\delta}} \to 0, \tag{1.13}$$

quan $n \to \infty$, aleshores S_n/s_n convergeix en distribució a una $N(0,1)$.

Observació 1.7. El Teorema 1.6 és l'equivalent al Teorema 1.4 en el cas $X_{nj} = X_j/s_n$. La raó per la qual s'acostuma a treballar sota les hipòtesis del Teorema 1.4 és l'estalvi de fraccions farragoses tant en desmotracions com enunciats.

Observació 1.8. La condició de Liapunov (1.13) es pot reescriure de la següent manera:

$$\frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2+\delta}\, dF_{nj}(x) \to 0,\ n \to \infty. \tag{1.14}$$

Demostració del Teorema 1.6: En aquesta demostració, com a l'anterior, aplicarem la condició de Liapunov per a $\delta = 1$. L'esquema de la demostració usa l'anomenat mètode de Lindeberg, el mateix mètode que el propi Lindeberg va utilitzar per a demostrar la seva versió del TLC que veurem en el següent capítol.

La idea de Lindeberg consisteix en aproximar la suma $X_1 + ... + X_n$ a (1.12) substituint successivament cada X per una v.a normal comparable (Gaussiana) Y de la següent manera: Siguin $\{Y_j, j \geq 1\}$ v.a's seguint una distribució normal $N(0, \sigma_j^2)$; així les Y_j's tenen totes la mateixa esperança i variància que les corresponents X_j's de l'enunciat. Siguin totes les X's i Y's totalment independents. Definim ara

$$Z_j = Y_1 + ... + Y_{j-1} + X_{j+1} + ... + X_n,\ 1 \leq j \leq k_n,$$

de manera que, per conveni, tenim

$$Z_1 = X_2 + ... + X_n \qquad Z_n = Y_1 + ... + Y_{n-1}.$$

Ara escrivim

$$g(X_1 + ... + X_n) - g(Y_1 + ... + Y_n) = \sum_{j=1}^{n} [g(X_j + Z_j) - g(Y_j + Z_j)].$$

Per a comparar la distribució de $(X_j + Z_j)/s_n$ amb la de $(Y_j + Z_j)/s_n$, utilitzarem un important teorema en l'àmbit de la convergència feble que ens diu el següent:

Teorema. *(Criteri general per a la convergència feble) Una successió $\{X_j, j \geq 1\}$ de v.a's convergeix feblement a una v.a X sii, per a tota funció contínua i acotada,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(g(X_n)) = \mathbb{E}(g(X)).$$

És a dir, farem una estimació de la diferència de l'expressió a continuació per a una classe de funcions g adequada:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[g\left(\frac{X_1+...+X_n}{s_n}\right)\right]&-\mathbb{E}\left[g\left(\frac{Y_1+...+Y_n}{s_n}\right)\right]\\&=\sum_{j=1}^{n}\left[\mathbb{E}\left[g\left(\frac{X_j+Z_j}{s_n}\right)\right]-\mathbb{E}\left[g\left(\frac{Y_j+Z_j}{s_n}\right)\right]\right].\end{aligned}\tag{1.15}$$

Prenem $g \in C_B^3$, la classe de funcions contínues acotades amb derivades fins a tercer ordre contínues i acotades. Pel teorema de Taylor, per a tot x, y:

$$\left|g(x+y)-\left[g(x)+g'(x)y+\frac{g''(x)}{2}y^2\right]\right|\leq\frac{M|y|^3}{6}$$

on $M=\sup_{x\in\mathbb{R}}|g^{(3)}(x)|$. Per tant, si ξ i η són v.a's independents tals que $\mathbb{E}(|\eta|^3)<\infty$, substituint i, tot seguit, integrant a l'expressió anterior tenim:

$$|\mathbb{E}(g(\xi+\eta))-\mathbb{E}(g(\xi))-\mathbb{E}(g'(\xi))\mathbb{E}(\eta)-\frac{1}{2}\mathbb{E}(g''(\xi))\mathbb{E}(\eta^2)|\leq\frac{M}{6}\mathbb{E}(|\eta|^3).\tag{1.16}$$

Observem que les v.a's $g(\xi)$, $g'(\xi)$ i $g''(\xi)$ són acotades i, per tant, integrables. Si ζ és una altra v.a independent de ξ que té les mateixes esperança i variància que η, i $\mathbb{E}(|\zeta|^3)<\infty$, reemplaçant ζ per η a (1.16), restant les dues expressions corresponents i prenent valor absolut, obtenim:

$$|\mathbb{E}(g(\xi+\eta))-\mathbb{E}(g(\xi+\zeta))|\leq\frac{M}{6}|\mathbb{E}(|\eta|^3)-\mathbb{E}(|\zeta|^3)|\leq\frac{M}{6}\mathbb{E}(|\eta|^3+|\zeta|^3).\tag{1.17}$$

Aquesta important fórmula s'aplica al terme a la dreta de la igualtat a (1.15), amb $\xi=Z_j/s_n$, $\eta=X_j/s_n$ i $\zeta=Y_j/s_n$. Així, utillitzant la linealitat de l'esperança, la part dreta de la fórmula (1.17) la podem acotar com

$$\frac{M}{6}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\gamma_j}{s_n^3}+\frac{c\sigma_j^3}{s_n^3}\right)\tag{1.18}$$

on $c=\sqrt{8/\pi}$, doncs el moment absolut de tercer ordre d'una $N(0,\sigma_j^2)$ és igual a $c\sigma_j^3$. Per la desigualtat de Liapunov (com hem vist a la demostració del Teorema 1.4), $\sigma_j^3\leq\gamma_j$ i, per tant, el terme (1.18) és de l'ordre $O(\Gamma_n/s_n^3)$. Ara, per conveniència de notació, introduïm una v.a normal unitària N de tal manera que $(Y_1+...+Y_n)/s_n$ pot ésser remplaçada per N en termes de la seva distribució. D'aquesta manera, ajuntant tots el resultats, obtenim la següent estimació:

$$\forall g\in C_B^3:\left|\mathbb{E}\left(g\left(\frac{S_n}{s_n}\right)\right)-\mathbb{E}(g(N))\right|\leq O\left(\frac{\Gamma_n}{s_n^3}\right).\tag{1.19}$$

En conseqüència, sota la condició de Liapunov (1.13), el terme de la dreta convergeix a zero quan $n\to\infty$. Finalment, se segueix del criteri general per a la convergència feble que hem enunciat anteriorment que S_n/s_n convergeix en distribució a una $N(0,1)$. $\square$

2 Lindeberg i Feller

2.1 El teorema de Lindeberg-Feller

Un resultat semblant al teorema de Liapunov és el teorema de Lindeberg-Feller per a la matriu (1.2) de la secció 1 (amb independència de les v.a's en cada fila).

Teorema 2.1. *(Lindeberg[9]-Feller[10]) Suposem* $\sigma_{nj}^2 < \infty$ *per a cada* n, j *i que les hipòtesis de reducció (1.3) i (1.4) de la secció 1 se satisfan. Per tal que, quan* $n \to \infty$, *les següents dues conclusions:*

(i) S_n *convergeix en distribució a una* $N(0, 1)$,

(ii) la matriu (1.2) de la secció 1 és UAN;

se satisfacin, és necessari i suficient que, per a tota $\eta > 0$, *es compleixi*

$$\sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x|>\eta} x^2 \, dF_{nj}(x) \to 0, \; n \to \infty. \tag{2.1}$$

Definició 2.2. *La condició (2.1) s'anomena* ***condició de Lindeberg****, i, gràcies a la hipòtesi (1.3) de la secció 1, es pot reescriure de la següent manera:*

$$\sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x|\le\eta} x^2 \, dF_{nj}(x) \to 1, \; n \to \infty. \tag{2.2}$$

Demostració del Teorema 2.1:

Suficiència: Seguint la demostració del Teorema 1.4 (teorema de Liapunov), només ens cal provar que $\prod_{j=1}^{k_n} f_{nj}(t) \to e^{-t^2/2}$ puntualment (utilitzant el teorema de continuïtat de Paul Lévy haurem acabat), on les $f_{nj}(t)$ són les funcions característiques de les v.a.'s X_{nj}. Per a veure això, utilitzem el Lema 1.3 amb $\theta_{nj}(t) + 1 = f_{nj}(t)$. Ara,

$$\begin{aligned}
-\theta_{nj}(t) &= 1 - f_{nj}(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dF_{nj}(x) - \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \, dF_{nj}(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{itx}) \, dF_{nj}(x).
\end{aligned}$$

Utilitzem ara el desenvolupament de Taylor de la funció e^{itx} al voltant de $t = 0$ definit d'aquesta forma:

$$e^{itx} = 1 + itx + \theta \frac{(tx)^2}{2}, \; |x| > \eta,$$

$$e^{itx} = 1 + itx - \frac{(tx)^2}{2} + \theta' \frac{|tx|^3}{6}, \; |x| \le \eta,$$

on els nombres θ i θ' satisfan $|\theta| < 1$, $|\theta'| < 1$. Imposant els dos desenvolupaments a la integral anterior obtenim

[9] Jarl Waldemar Lindeberg, 1876-1932

[10] Vilibald "William" Srećko Feller, 1906-1970

$$-\theta_{nj}(t) = \int_{|x|>\eta} \left(-itx - \theta \frac{t^2x^2}{2}\right) dF_{nj}(x) + \int_{|x|\leq\eta} \left(-itx + \frac{t^2x^2}{2} - \theta' \frac{|tx|^3}{6}\right) dF_{nj}(x).$$

Com que $\mathbb{E}(X_{nj}) = 0$, el terme itx desapareix i, canviant el signe a tota la igualtat, tenim

$$\theta_{nj}(t) = \frac{\theta t^2}{2} \int_{|x|>\eta} x^2 \; dF_{nj}(x) - \frac{t^2}{2} \int_{|x|\leq\eta} x^2 \; dF_{nj}(x) + \frac{\theta'|t|^3}{6} \int_{|x|\leq\eta} |x|^3 \; dF_{nj}(x). \quad (2.3)$$

Ara, utilitzant que per hipòtesi es compleix la condició de Lindeberg (2.1), tenim

$$\int_{|x|>\eta} x^2 \; dF_{nj}(x) \leq \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x|>\eta} x^2 \; dF_{nj}(x) \to 0 \Rightarrow \int_{|x|>\eta} x^2 \; dF_{nj}(x) \to 0. \quad (2.4)$$

Utilitzant també la condició (1.3) de la secció 1, que ens diu que $\sum_{j=1}^{k_n} \sigma^2(X_{nj}) = 1$, tenim

$$\int_{|x|\leq\eta} x^2 \; dF_{nj}(x) \leq \sum_{j=1}^{k_n} \sigma^2(X_{nj}) = 1 \Rightarrow \int_{|x|\leq\eta} x^2 \; dF_{nj}(x) \leq 1.$$

Per tant,

$$\int_{|x|\leq\eta} |x|^3 \; dF_{nj}(x) \leq \eta \int_{|x|\leq\eta} x^2 \; dF_{nj}(x) \leq \eta. \quad (2.5)$$

Definim ara la v.a $Y = \{X, \; |X| \leq \eta; \; 0, \; \text{altrament}\}$ i, utilitzant un cop més la desigualtat de Liapunov sobre Y, concluïm

$$\left(\int_{|x|\leq\eta} x^2 \; dF_{nj}(x)\right)^{1/2} \leq \left(\int_{|x|\leq\eta} |x|^3 \; dF_{nj}(x)\right)^{1/3}$$

és a dir,

$$\int_{|x|\leq\eta} x^2 \; dF_{nj}(x) \leq \left(\int_{|x|\leq\eta} |x|^3 \; dF_{nj}(x)\right)^{2/3} \overset{(2.5)}{\leq} \eta^{2/3} \quad (2.6)$$

Aplicant els resultats (2.4), (2.5) i (2.6) a (2.3) s'arriba a

$$\max_{1\leq j\leq k_n} |\theta_{nj}(t)| \leq \frac{t^2}{2}\eta^{2/3} + \frac{|t|^3}{6}\eta \to 0, \; n \to \infty,$$

i hem obtingut la primera condició del Lema 1.3. Per altra banda, utilitzant (2.3),

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k_n} |\theta_{nj}| &\leq \frac{|\theta|t^2}{2} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x|>\eta} x^2 \; dF_{nj}(x) + \frac{t^2}{2} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x|\leq\eta} x^2 \; dF_{nj}(x) + \frac{|\theta'||t|^3}{6} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x|\leq\eta} |x|^3 \; dF_{nj}(x) \\
&\leq \frac{t^2}{2} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x|>\eta} x^2 \; dF_{nj}(x) + \frac{t^2}{2} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x|\leq\eta} x^2 \; dF_{nj}(x) + \eta \frac{|t|^3}{6} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x|\leq\eta} x^2 \; dF_{nj}(x) \\
&= \frac{t^2}{2} + \frac{|t|^3}{6}\eta \leq M, \; n \to \infty,
\end{aligned}$$

on M és una constant que no depèn de n. Per a l'última igualtat hem utilitzat les dues versions de la condició de Lindeberg (2.1) i (2.2), respectivament.

Finalment, seguint el mateix raonament que acabem de fer sobre (2.3), obtenim

$$\sum_{j=1}^{k_n} \theta_{nj} = \frac{-t^2}{2} + \eta\frac{|t|^3}{6} \xrightarrow[\eta\to 0]{n\to\infty} \frac{-t^2}{2}.$$

Per tant, podem aplicar el Lema 1.3 de la secció 1 i arribem a que

$$\prod_{j=1}^{k_n}(1+\theta_{nj}(t)) = \prod_{j=1}^{k_n} f_{nj}(t) \to e^{-t^2/2}$$

d'on, pel teorema de continuïtat de Paul Lévy, obtenim que S_n convergeix en distribució a una $N(0,1)$, i tenim demostrada la condició (i) del Teorema 2.1.

Resta, doncs, demostrar la condició (ii). Per a tota $\eta > 0$, seguint l'argument que porta a la coneguda desigualtat de Txebixov[11] i utilitzant (2.4), obtenim

$$P(|X_{nj}| > \eta) = \int_{|x|>\eta} dF_{nj}(x) < \int_{|x|>\eta} \frac{x^2}{\eta^2}\, dF_{nj}(x) = \frac{1}{\eta^2}\int_{|x|>\eta} x^2\, dF_{nj}(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Per tant, $\forall\eta > 0$, $\lim_{n\to\infty}\max_{1\le j\le k_n} P(|X_{nj}| > \eta) = 0$, és a dir, se satisfà la condició (b) de negligibilitat d'on, per la Definició 1.1, concluïm que la matriu (1.2) és UAN. □

Necessitat: Seguint l'esquema de la part de suficiència, treballarem només manipulant funcions característiques. En virtut del teorema de continuïtat de Paul Lévy i el Teorema 1.2 de la secció 1, les condicions (i) i (ii) són equivalents a:

$$\forall t\in\mathbb{R} : \lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{k_n} f_{nj}(t) = e^{-t^2/2}\ , \tag{2.7}$$

i

$$\forall t\in\mathbb{R} : \lim_{n\to\infty}\max_{1\le j\le k_n}|f_{nj}-1| = 0. \tag{2.8}$$

respectivament. En particular, per a cada t, existeix $n_0(t)$ tal que, si $n \ge n_0(t)$, aleshores

$$\max_{1\le j\le k_n}|f_{nj}-1| \le \frac{1}{2}.$$

D'ara en endavant, considerarem únicament valors de n grans; tot seguit, prenem logaritmes a (2.7) i obtenim

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{k_n}\log f_{nj}(t) = -\frac{t^2}{2}. \tag{2.9}$$

Usant, respectivament, les expressions (1.7) i (1.8) de la secció 1, obtenim

$$\log f_{nj}(t) = f_{nj}(t) - 1 + \Lambda|f_{nj}(t)-1|^2; \tag{2.10}$$

$$\sum_{j=1}^{k_n}|f_{nj}(t)-1|^2 \le \max_{1\le j\le k_n}|f_{nj}(t)-1|\sum_{j=1}^{k_n}|f_{nj}(t)-1|. \tag{2.11}$$

Ara, utilitzant un cop més el desenvolupament de Taylor de la funció e^{itx} al voltant de $t=0$ fins ordre 2 per a algun nombre θ, $|\theta| \le 1$, la suma que apareix a la part dreta de la desigualtat (2.11) es pot reescriure com:

[11]Pafnuti Lvòvitx Txebixov, 1821-1894

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k_n}\left|\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itx}-1)\ dF_{nj}(x)\right| = \sum_{j=1}^{k_n}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(itx+\theta\frac{t^2x^2}{2}\right)\ dF_{nj}(x)\right| \\
&\le \sum_{j=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{\infty}|\theta|\frac{t^2x^2}{2}\ dF_{nj}(x) \le \frac{t^2}{2}\sum_{j=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{\infty}x^2\ dF_{nj}(x) = \frac{t^2}{2}.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Se segueix de (2.8) i (2.12) que la part esquerra de (2.11) tendeix a 0 quan $n \to \infty$. D'aquest resultat, (2.10), i (2.9), obtenim

$$
\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{k_n}(f_{nj}(t)-1) = -\frac{t^2}{2}.
$$

Prenent la part real d'aquesta expressió i canviant el signe, tenim

$$
\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos tx)\ dF_{nj}(x) = \frac{t^2}{2}.
$$

Per tant, per a un $\eta > 0$ fixat, si partim la integral en dues parts i transposem una d'aquestes parts, obtenim

$$
\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}&\left|\frac{t^2}{2}-\sum_{j=1}^{k_n}\int_{|x|\le\eta}(1-\cos tx)\ dF_{nj}(x)\right| = \limsup_{n\to\infty}\left|\sum_{j=1}^{k_n}\int_{|x|>\eta}(1-\cos tx)\ dF_{nj}(x)\right| \\
&\le \limsup_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{k_n}\int_{|x|>\eta}2\ dF_{nj}(x) \le 2\limsup_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{k_n}\frac{\sigma_{nj}^2}{\eta^2} = \frac{2}{\eta^2},
\end{aligned}
$$

on a l'última desigualtat hem utilitzat la desigualtat de Txebixov. Com $0 \le 1-\cos\theta \le \theta^2/2$ per a tot nombre real θ, això implica que

$$
\frac{2}{\eta^2} \ge \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{t^2}{2}-\sum_{j=1}^{k_n}\frac{t^2}{2}\int_{|x|\le\eta}x^2\ dF_{nj}(x)\right) \ge 0,
$$

doncs el terme dins el límit clarament és sempre positiu. Així,

$$
\frac{4}{t^2\eta^2} \ge \limsup_{n\to\infty}\left(1-\sum_{j=1}^{k_n}\int_{|x|\le\eta}x^2\ dF_{nj}(x)\right).
$$

Per acabar, com t pot ser arbitràriament gran mentre que η està fixat, l'expressió anterior implica la condició de Lindeberg (2.2), tal i com volíem. □

Observació 2.3. De manera més general, si les v.a's satisfan $\mathbb{E}(X_{nj}) = \mu_j$ i $s_n^2 \neq 1$, la condició de Lindeberg (2.1) es pot reescriure de la següent forma:

$$
\frac{1}{s_n^2}\sum_{j=1}^{k_n}\int_{|X_{nj}-\mu_j|>\eta s_n}(X_{nj}-\mu_j)^2\ dF_{nj}(x) \to 0,\ n\to\infty \tag{2.13}
$$

o, equivalentment,

$$
\frac{1}{s_n^2}\sum_{j=1}^{k_n}\mathbb{E}[(X_{nj}-\mu_j)^2\mathbb{1}_{\{|X_{nj}-\mu_j|>\eta s_n\}}] \to 0,\ n\to\infty. \tag{2.14}
$$

Tal i com també va passar a la secció 1 amb el teorema de Liapunov, la formulació mostrada del Teorema 2.1 no és la més habitual. El més comú es trobar-lo separat en dues parts, on la part de suficiència correspon al teorema de Lindeberg; mentre que la part de necessitat correspon al teorema de Feller.

Teorema 2.4. *(Lindeberg) Suposem que, a part de complir amb les hipòtesis de reducció (1.3) i (1.4) de la secció 1, la matriu (1.2) satisfà la condició de Lindeberg (2.1). Aleshores, S_n convergeix en distribució a una $N(0,1)$.*

Per a la implicació contrària, necessitem un important resultat previ:

Proposició 2.5. *La condició de Lindeberg (2.1) implica que $\max_{1\le j\le k_n}\sigma_{nj}^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$, resultat conegut com la* ***condició de Feller****. A més, la condició de Feller implica que la matriu (1.2) amb les hipòtesis de reducció (1.3) i (1.4) és UAN.*

Demostració: Per a tota $\eta > 0$, $X_{nj}^2 = X_{nj}^2 \mathbb{1}_{\{|X_{nj}|\le\eta\}} + X_{nj}^2 \mathbb{1}_{\{|X_{nj}|>\eta\}} \le \eta^2 + X_{nj}^2 \mathbb{1}_{\{|X_{nj}|>\eta\}} \Rightarrow \mathbb{E}(X_{nj}^2) \le \eta^2 + \mathbb{E}(X_{nj}^2 \mathbb{1}_{\{|X_{nj}|>\eta\}}) \Rightarrow \mathbb{E}(X_{nj}^2) \le \eta^2 + \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E}(X_{nj}^2 \mathbb{1}_{\{|X_{nj}|>\eta\}})$, resultat que és independent de j i, per tant, $\max_{1\le j\le k_n} \mathbb{E}(X_{nj}^2) = \max_{1\le j\le k_n}\sigma_{nj}^2 \le \eta^2 + \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E}(X_{nj}^2 \mathbb{1}_{\{|X_{nj}|>\eta\}}) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, en virtut de la condició de Lindeberg (2.14). Per acabar, utilitzant la desigualtat de Txebixov, es veu clarament que la condició de Feller implica que la matriu (1.2) és UAN, doncs, per a tota $\eta > 0$,

$$P(\max_{1\le j\le k_n} |X_{nj}| > \eta) \le \frac{\mathbb{E}(X_{nj}^2)}{\eta^2} \le \frac{\max_{1\le j\le k_n}\sigma_{nj}^2}{\eta^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

I, per tant, podem enunciar el teorema de Feller:

Teorema 2.6. *(Feller) Suposem que la matriu (1.2) satisfà les hipòtesis de reducció (1.3) i (1.4). Si és UAN i S_n convergeix en distribució a una $N(0,1)$, aleshores se satisfà la condició de Lindeberg (2.1).*

Observació 2.7. Degut a que la condició de Lindeberg (2.1) implica, com acabem de veure, la condició de Feller, la Proposició 2.5 ens garanteix que la contribució individual de cadascuna de les v.a's $X_j, 1 \le j \le k_n$, respecte la variància s_n^2 és arbitràriament petita, per a valors de n suficientment grans. A més, també s'observa com la condició de Lindeberg és suficient, però en general no necessària (la implicació contrària no sempre és certa). Únicament quan s'afegeix la hipòtesi de la condició de Feller, és quan es torna necessària i suficient, com en el cas del Teorema 2.1.

L'essència del teorema de Lindeberg-Feller recau en la suposició de la finitud dels moments d'ordre 2 juntament amb el "clàssic" factor normant s_n, que no és res més que la desviació estàndard de la suma S_n. Ara bé, és important destacar que l'incompliment de la condició de Lindeberg (2.1) implica **únicament** l'incompliment de la condició (i) o la condició (ii) del Teorema 2.1 *amb les constants s_n especificades*. El TLC podria seguir vigent sense cap mena de problema amb una successió de constants totalment diferent. Per tal d'il.lustrar de manera més clara aquest punt, veiem el següent exemple:

Exemple 2.8. Sigui $\{X_j, j\ge 1\}$ una única successió de v.a's independents tals que

$$P(X_j = \pm j^2) = \frac{1}{12j^2}\ , \qquad P(X_j = \pm j) = \frac{1}{12}\ , \qquad P(X_j = 0) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6j^2}\ .$$

Anem a veure que la condició de Lindeberg (2.13) no es compleix.

Observem primer que les v.a són simètriques, amb la qual cosa tenim $\mathbb{E}(X_j) = 0$. A més, $\mathbb{E}(X_j^2) = \sigma_j^2 = j^4 P(|X_j| = j) + j^2 P(|X_j| = j) = j^2/3$. Per tant,

$$s_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 = \frac{1}{18} n(n+1)(2n+1) \Rightarrow \max_{1\leq j\leq n} \frac{\sigma_j^2}{s_n^2} \leq 6 \frac{n^2}{n(n+1)(2n+1)} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

és a dir, que se satisfà la condició de Feller i, per la Proposició 2.5, la successió és UAN. Pel Teorema 2.1, això implica que se satisfarà el TLC si, i només si, se satisfà la condició de Lindeberg (2.13). Malgrat això, per a j suficientment grans, $s_j \sim j^{3/2}$ i, per tant, per a tota $\eta > 0$,

$$\int_{|X_j|>\eta s_j} X_j^2 \, dF_{nj}(x) = \int_{|X_j|=j^2} j^4 \, dF_{nj}(x) = j^4 P(|X_j| = j^2) = \frac{1}{6} j^2, \tag{2.15}$$

implicant que,

$$\frac{1}{s_n^2} \sum_{j=1}^{n} \int_{|X_j|>\eta s_j} X_j^2 \, dF_{nj}(x) \sim \frac{3}{n(n+1)(2n+1)} \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{2},$$

que no convergeix a 0 quan $n \to \infty$. Per tant, la condició de Lindeberg (2.13) no se satisfà i, conseqüentment, el TLC no es compleix en aquest cas, com volíem veure.

Tanmateix, si canviem les constants especificades s_n i prenem, per exemple, $b_n^2 = n^3/18$, observarem que passa una cosa bastant curiosa. Per a veure-ho, farem ús d'aquesta definició i el següent teorema sobre l'equivalència de v.a's:

Definició. *Siguin $\{X_j, j \geq 1\}$ i $\{Y_j, j \geq 1\}$ dues successions de v.a's. Es diu que són equivalents sii*

$$\sum_{j=1}^{\infty} P(X_j \neq Y_j) < \infty.$$

Teorema. *Si les successions de v.a's $\{X_j, j \geq 1\}$ i $\{Y_j, j \geq 1\}$ són equivalents, aleshores*

$$\sum_{j=1}^{\infty} (X_j - Y_j) < \infty, \text{ q.s.}$$

A més a més, si $\{a_n\}$ és una successió monòtona de nombres reals divergent a $+\infty$,

$$\frac{1}{a_n} \sum_{j=1}^{n} (X_j - Y_j) \xrightarrow{n\to\infty} 0, \text{ q.s.}$$

Ara, definim les v.a truncades $Y_j = X_j \mathbb{1}_{\{|X_j|\leq j\}}$ (en altres paraules, estem truncant el valor anormal $\pm j^2$). Aleshores,

$$\sum_{j=1}^{\infty} P(X_j \neq Y_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P(X_j = \pm j^2) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{6j^2} < \infty.$$

Pel lema de Borel-Cantelli, tenim $P(\lim_j \sup (X_j \neq Y_j)) = 0$, és a dir, que l'esdeveniment $\{X_j \neq Y_j\}_{j\geq 1}$ només pot produïr-se un nombre finit de vegades. Per tant, $S_n' = \sum_{j=1}^{n} Y_j$ i $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ són equivalents, tenen la mateixa distribució asimptòtica ($S_n \sim S_n'$). Ara, en el cas de les v.a's Y_j, $s_n^2 = b_n^2 = n^3/18$ per defineió, que implica que, per a j suficient grans, tornem a obtenim $s_j \sim j^{3/2}$ i, per tant, per a tota $\eta > 0$, (2.15) resulta en

$$\int_{|Y_j|>\eta s_j} Y_j^2 \, dF_{nj}(x) = \int_{|Y_j|=j^2} Y_j^2 \, dF_{nj}(x) = 0,$$

i la condició de Lindeberg (2.13) se satisfà. Això implica S'_n/s_n convergeix en distribució a una $N(0,1)$ i com, en virtut del teorema sobre equivalència de v.a's anterior, $S_n/s_n \sim S'_n/s_n$, això implica S_n/s_n convergeix en distribució a una $N(0,1)$ i, per tant, se satisfà el TLC. La clau és que els valors anormalment grans no s'haurien de tenir en compte! $\square$

En el cas més general on "no suposem res" tenim els següents criteris, en forma de dos teoremes (que no demostrarem), el primer degut a Feller i el segon degut a Lévy.

Teorema 2.9. *A la matriu (1.2) de la secció 1 (amb independència en cada fila), per a tal que existeixi una successió de constants $\{a_n\}$ tal que (i) $\sum_{j=1}^{k_n}(X_{nj} - a_n)$ convergeix en distribució a una $N(0,1)$, i (ii) la matriu sigui UAN, és necessari i suficient que les següents dues condicions se satisfacin per a tota $\eta > 0$, quan $n \to \infty$:*

$$(a) \quad \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x|>\eta} dF_{nj}(x) \to 0;$$

$$(b) \quad \sum_{j=1}^{k_n} \left(\int_{|x|\leq\eta} x^2 \, dF_{nj}(x) - \left(\int_{|x|\leq\eta} x \, dF_{nj}(x) \right)^2 \right) \to 1.$$

En el segon criteri, treballarem amb una única successió de v.a's i.i.d:

Teorema 2.10. *Sigui $\{X_j\}$ una successió de v.a's independents amb la mateixa funció de distribució F, i $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$. Per a tal que existeixin constants a_n i $b_n > 0$ (necessàriament $b_n \to \infty$ quan $n \to \infty$) tals que $(S_n - a_n)/b_n$ convergeixi en distribució a una $N(0,1)$, és necessari i suficient que, quan $y \to \infty$:*

$$y^2 \int_{|x|>y} dF(x) = o\left(\int_{|x|\leq y} x^2 \, dF(x) \right).$$

2.2 Lindeberg, Liapunov i el TLC clàssic

Per a acabar aquest capítol, enunciarem i demostrarem un seguit de proposicions que ens relacionen les condicions de Lindeberg i Liapunov, i el TLC clàssic.

Començarem amb una interessant relació entre el teorema de Lindeberg-Feller (Teorema 2.1) i el TLC clàssic:

Proposició 2.11. *Podem derivar el TLC clàssic a partir del teorema de Lindeberg-Feller.*

Demostració: Sigui $\{X_n\}$ una successió de v.a i.i.d amb $\mathbb{E}(X_1) = \mu$ i variància $\sigma^2 < \infty$. Si veiem que aquesta successió de v.a satisfà la condició de Lindeberg (2.14), pel Teorema 2.1 obtindrem que també satisfà el TLC. En aquest cas, $k_n = n$ i $s_n^2 = n\sigma^2$. Per tant,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}((X_j - \mu)^2 \mathbb{1}_{\{|X_j-\mu|>\varepsilon\sigma\sqrt{n}\}}) \overset{i.i.d}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E}((X_1 - \mu)^2 \mathbb{1}_{\{|X_1-\mu|>\varepsilon\sigma\sqrt{n}\}}).$$

Ara, $(X_1-\mu)^2 \mathbb{1}_{\{|X_1-\mu|>\varepsilon\sigma\sqrt{n}\}} \leq (X_1-\mu)^2$ i $\mathbb{E}((X_1-\mu)^2)<\infty$. Utilitzant el Teorema de la Convergència Dominada, podem posar el límit dins el terme de l'esperança i tenim

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sigma^2}\mathbb{E}((X_1-\mu)^2\mathbb{1}_{\{|X_1-\mu|>\varepsilon\sigma\sqrt{n}\}}) = \frac{1}{\sigma^2}\mathbb{E}(\lim_{n\to\infty}(X_1-\mu)^2\mathbb{1}_{\{|X_1-\mu|>\varepsilon\sigma\sqrt{n}\}}) = \frac{1}{\sigma^2}\cdot 0 = 0.$$

Per tant, es compleix la condició de Lindeberg (2.14) d'on, aplicant el Teorema 2.1, obtenim que

$$\frac{\sum_{j=1}^n X_j - n\mathbb{E}(X_1)}{s_n} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

convergeix en distribució a una $N(0,1)$, que correspon a l'enunciat del TLC clàssic. $\square$

Ara, ens interessaria saber quina de les dues condicions que hem trobat al llarg del treball és més forta, si la de Lindeberg o la de Liapunov. La següent proposició ens dóna la resposta a aquesta important qüestió:

Proposició 2.12. *La condició de Liapunov implica la condició de Lindeberg.*

Demostració: Sent fidels a l'estructura de la memòria que hem estat seguint fins a aquest punt, demostrarem la proposició en el cas de la matriu (1.2) sota les hipòtesis de reducció (1.3) i (1.4) de la secció 1. Trivialment, es pot extrapolar el resultat al cas en què les hipòtesis de reducció no se satisfacin. Dit això, suposant que es compleix la condició de Liapunov (1.14) amb $1\leq j\leq k_n$ i $s_n^2=1$, tenim que $\forall\eta>0$, $\exists\delta>0$ tal que

$$\sum_{j=1}^{k_n}\int_{|x|>\eta} x^2\, dF_{nj}(x) < \sum_{j=1}^{k_n}\int_{|x|>\eta}\frac{|x|^{2+\delta}}{\eta^\delta}\, dF_{nj}(x) \leq \frac{1}{\eta^\delta}\sum_{j=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{\infty}|x|^{2+\delta}\, dF_{nj}(x) \xrightarrow[(1.14)]{n\to\infty} 0,$$

on a la primera desigualtat hem utilitzat que, si tenim $|x|>\eta$, aleshores, en particular, per a tota $\delta>0$, $(|x|^\delta/\eta^\delta)>1$. Per tant, se satisfà la condició de Lindeberg (2.1), com volíem, i hem acabat la demostració. $\square$

La Proposició 2.12 ens diu doncs que la condició de Lindeberg és una condició més dèbil que la de Liapunov, cosa que es podia sospitar degut a que la condició de Liapunov imposa restriccions sobre moments d'ordre $2+\delta$, amb $\delta>0$; mentre que la de Lindeberg només ho fa sobre els moments d'ordre 2.

Per a acabar, una pregunta que sorgeix instintivament és si la implicació contrària també és certa, és a dir, si la condició de Lindeberg implica la de Liapunov. Lamentablement, tal implicació no és certa, com veiem en la següent proposició:

Proposició 2.13. *La condició de Lindeberg no implica la condició de Liapunov.*

Demostració: Com s'acostuma a fer en aquests casos, només és necessari un contraexemple en el qual se satisfaci la condició de Lindeberg però la de Liapunov no ho faci per a cap $\delta>0$. Sigui $\{X_j, j\geq 1\}$ una successió de v.a's i.i.d definides de la següent manera:

$$P(X_j^2=n)=\frac{1}{n^2\log n},\ P(X_j^2=\frac{1}{n})=1-\frac{1}{\log n},\ P(X_j^2=0)=\frac{1}{\log n}-\frac{1}{n^2\log n}.$$

Al ésser simètriques, $\mathbb{E}(X_j)=0$ per a tota j. A més, les X_j's tenen variància finita, doncs

$$s_n^2 \overset{i.i.d}{=} n\mathbb{E}(X_1^2) = n\left(\frac{n}{n^2\log n}+\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{\log n}\right)\right) = 1<\infty.$$

Sigui $1/n < \eta < n$, obtenim

$$\frac{1}{s_n^2}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}(X_j^2\mathbb{1}_{\{|X_j|>\eta\}}) \overset{i.i.d}{=} n\mathbb{E}(X_1^2\mathbb{1}_{\{|X_1|>\eta\}}) = n\frac{n}{n^2\log n} = \frac{1}{\log n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Per tant, compleixen la condició de Lindeberg (2.14).

Respecte l'altre condició, sigui $\delta > 0$ i mantenint la η anterior, obtenim que

$$\frac{1}{s_n^{2+\delta}}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}(|X_j|^{2+\delta}) \geq \sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}(|X_j|^{2+\delta}\mathbb{1}_{\{|X_j|>\eta\}}) = \sum_{j=1}^{n} n^{2+\delta}\frac{1}{n^2\log n} = \frac{n^{\delta+1}}{\log n} \xrightarrow[\forall\delta>0]{n\to\infty} \infty.$$

I, per tant, la condició de Liapunov (1.13) no se satisfà, com volíem veure. $\square$

3 Ramificacions del Teorema del límit central

En aquesta secció, veurem tres extensions del TLC per a certes classes de v.a's especials.

3.1 m-dependència de variables aleatòries

Per a il.lustrar un mètode general d'extendre el TLC a certes classes de v.a's dependents, anem a enunciar i demostrar el següent resultat. Abans, però, necessitem una definició:

Definició 3.1. *Sigui $\{X_n, n \geq 1\}$ una successió de v.a's i sigui $\mathcal{F}_n$ la σ-àlgebra de Borel*[12] *generada per $\{X_k, 1 \leq k \leq n\}$. Es diu que la successió és* ***m-dependent*** *si, i només si, existeix un enter m tal que per a tota n i $j \geq m+1$, X_{n+j} és independent de $\mathcal{F}_n$. En el cas $m = 0$, això es redueix a la independència de v.a's que coneixem.*

Teorema 3.2. *Suposem que $\{X_n, n \geq 1\}$ és una successió de v.a's m-dependents i uniformement acotades tals que*

$$\frac{\sigma(S_n)}{n^{1/3}} \to \infty,$$

quan $n \to \infty$. Aleshores $[S_n - \mathbb{E}(S_n)]/\sigma(S_n)$ convergeix en distribució a una $N(0,1)$.

Demostració del Teorema 3.2: Anomenem M a la cota uniforme de l'enunciat. Sense pèrdua de generalitat, podem suposar que $\mathbb{E}(X_n) = 0$, per a tota n. Per a un enter $k \geq 1$, sigui $n_j = \lfloor jn/k \rfloor, 0 \leq j \leq k$, i definim, per a valors grans d'n:

$$\begin{aligned} Y_j &= X_{n_j+1} + X_{n_j+2} + \ldots + X_{n_{j+1}-m}; \\ Z_j &= X_{n_{j+1}-m+1} + X_{n_{j+1}-m+2} + \ldots + X_{n_{j+1}}. \end{aligned}$$

Per a veure la independència de les Y_j's i les Z_j's, necessitem abans un teorema previ:

Teorema. *Sigui $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_k = n$; f_1 una funció Borel-mesurable de n_1 variables, f_2 una de $n_2 - n_1$ variables, ..., f_k una de $n_k - n_{k-1}$ variables. Si $\{X_j, 1 \leq j \leq n\}$ són v.a's independents, aleshores les k v.a's*

$$f_1(X_1, \ldots, X_{n_1}), f_2(X_{n_1+1}, \ldots, X_{n_2}), \ldots, f_k(X_{n_{k-1}+1}, \ldots, X_{n_k})$$

són independents.

Seguint la definició de les Y_j's i les Z_j's, tenim

$$S_n = \sum_{j=0}^{k-1} Y_j + \sum_{j=0}^{k-1} Z_j = S'_n + S''_n. \tag{3.1}$$

Se segueix de la hipòtesi d'm-dependència i del teorema anterior que les Y_j's són independents; com també ho són les Z_j's, doncs $n_{j+1} - m + 1 - n_j > m$, si n/k és prou gran. Tot i que S'_n i S''_n no són independents entre elles, anem a veure que aquesta última és comparativament negligible, cosa que fa S_n es comporti com S'_n. Observem que tot terme X_r de S''_n és independent de tot terme X_s de S'_n excepte a, com a màxim, m termes, i que $\mathbb{E}(X_r X_s) = 0$ quan són independents, mentre que $|\mathbb{E}(X_r X_s)| \leq M^2$ altrament. Com tenim km termes a S''_n, se segueix que

$$|\mathbb{E}(S'_n S''_n)| \leq km \cdot m \cdot M^2 = k(mM)^2.$$

[12] Félix Edouard Justin Émile Borel, 1871-1956

També tenim, utilitzant que són centrades,

$$\mathbb{E}(S_n''^2) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{E}(Z_j^2) \leq k(mM)^2. \tag{3.2}$$

A partir d'aquestes desigualtats i la identitat que es dedueix de (3.1),

$$\mathbb{E}(S_n^2) = \mathbb{E}(S_n'^2) + 2\mathbb{E}(S_n' S_n'') + \mathbb{E}(S_n''^2),$$

obtenim

$$|\mathbb{E}(S_n^2) - \mathbb{E}(S_n'^2)| \leq 3km^2M^2. \tag{3.3}$$

Ara, curosament, escollim $k = k_n = \lfloor n^{2/3} \rfloor$ i escrivim $s_n^2 = \mathbb{E}(S_n^2) = \sigma^2(S_n)$, $s_n'^2 = \mathbb{E}(S_n'^2) = \sigma^2(S_n')$. Aleshores, quan $n \to \infty$, tenim

$$\left| 1 - \frac{s_n'^2}{s_n^2} \right| = \frac{|s_n^2 - s_n'^2|}{s_n^2} \overset{(3.3)}{\leq} \frac{3km^2M^2}{s_n^2} = 3m^2M^2 \left(\frac{k}{s_n^2} \right) \leq 3m^2M^2 \left(\frac{n^{2/3}}{\sigma^2(S_n)} \right)$$

que tendeix a 0, quan $n \to \infty$, per hipòtesi del teorema. Per tant, hem obtingut que

$$\frac{s_n'^2}{s_n^2} \to 1, \; n \to \infty,$$

o, equivalentment,

$$\frac{s_n'}{s_n} \to 1, \; n \to \infty. \tag{3.4}$$

També, utilitzant (3.2) i la hipòtesi del teorema un altre cop,

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n''^2}{s_n^2} \right) = \frac{\mathbb{E}(S_n''^2)}{s_n^2} \leq (mM)^2 \frac{k}{s_n^2} \leq (mM)^2 \frac{n^{2/3}}{\sigma^2(S_n)} \to 0, \; n \to \infty.$$

Per tant, obtenim

$$\mathbb{E}\left(\left(\frac{S_n''}{s_n} \right)^2 \right) \to 0, \; n \to \infty. \tag{3.5}$$

Per tant, primer, el resultat (3.5) ens diu que S_n''/s_n convergeix a 0 en el sentit de L^2. Per les equivalències entre convergències de v.a's, tenim que S_n''/s_n convergeix a 0 en probabilitat; segon, per (3.1), tenim

$$\frac{S_n}{s_n} = \frac{s_n'}{s_n} \frac{S_n'}{s_n'} + \frac{S_n''}{s_n}, \tag{3.6}$$

fet que implica que S_n/s_n convergirà en distribució a una $N(0,1)$ si S_n'/s_n' ho fa.

Com k_n és una funció d'n, a la notació anterior reemplacem les Y_j's per Y_{nj} en forma semblant a la matriu (1.2), $\{Y_{nj}, 0 \leq j \leq k_n - 1, n \geq 1\}$, mantenint la independència en cada fila. Com que cada Y_{nj} és la suma de no més de $\lfloor n/k_n \rfloor + 1$ v.a's X_n,

$$|Y_{nj}| \leq \left(\frac{n}{k_n} + 1 \right) M = O(n^{1/3}) = o(s_n) = o(s_n'),$$

on l'última igualtat és deguda a (3.4) i la que la precedeix del fet d'invertir la hipòtesi del teorema. Així, per a tota $\eta > 0$ i per a tota n suficientment gran, tenim:

$$\int_{|x|>\eta s'_n} x^2 \, dF_{nj}(x) = 0, \quad 0 \le j \le k_n - 1,$$

on F_{nj} correspon a la funció de distribució de Y_{nj}. Per tant, es compleix la condició de Lindeberg (2.13) per a la matriu $\{Y_{nj}/s'_n\}$, fet que, pel teorema de Lindeberg-Feller, implica que S'_n/s'_n convergeix en distribució a una $N(0,1)$ d'on, per (3.6), podem concloure que $S_n/s_n = S_n/\sigma(S_n)$ convergeix en distribució a una $N(0,1)$. $\square$

3.2 Nombre aleatori de termes a la suma

Per a la següent extensió del TLC, ens endinsem en el cas on tenim un nombre aleatori de termes a la suma. És a dir, haurem de treballar amb la v.a S_{ν_n}, tal que el seu valor a ω ve donat per $S_{\nu_n(\omega)}(\omega)$, on

$$S_n(\omega) = \sum_{j=1}^{n} X_j(\omega)$$

com abans, i $\{\nu_n(\omega), n \ge 1\}$ és una successió de v.a's. El cas més senzill, però no el més útil, és quan totes les v.a's de la "doble família" $\{X_n, \nu_n, n \ge 1\}$ són independents. El resultat que enunciarem a continuació és bastant més interessant i es caracteritza per la simple naturalesa de la seva hipòtesi.

Teorema 3.3. *Sigui $\{X_j, j \ge 1\}$ una successió de v.a's independents i idènticament distribuïdes, amb esperança 0 i variància 1. Sigui $\{\nu_n, n \ge 1\}$ una successió de v.a's que prenen únicament valors enters positius tals que*

$$\frac{\nu_n}{n} \to c, \quad \textit{en probabilitat}, \tag{3.7}$$

quan $n \to \infty$, on c és una constant: $0 < c < \infty$. Aleshores $S_{\nu_n}/\sqrt{\nu_n}$ convergeix en distribució a una $N(0,1)$.

Demostració del Teorema 3.3: El TLC clàssic per a v.a's centrades i amb variància 1 ens diu que S_n/n convergeix en distribució a una $N(0,1)$, de manera que el Teorema 3.3 implica que podem substituïr n per ν_n. Un detall important és que no s'assumeix cap tipus d'independència sobre les ν_n's, únicament imposem la propietat (3.7). Per començar, observem que a l'enunciat del TLC clàssic podem substituïr n per la part entera de cn, $\lfloor cn \rfloor$, per concloure la convergència en distribució de $S_{\lfloor cn \rfloor}/\sqrt{\lfloor cn \rfloor}$ a una $N(0,1)$. Tot seguit, seguint el mateix argument que a (3.6), escrivim

$$\frac{S_{\nu_n}}{\sqrt{\nu_n}} = \left(\frac{S_{\lfloor cn \rfloor}}{\sqrt{\lfloor cn \rfloor}} + \frac{S_{\nu_n} - S_{\lfloor cn \rfloor}}{\sqrt{\lfloor cn \rfloor}} \right) \sqrt{\frac{\lfloor cn \rfloor}{\nu_n}}.$$

Per (3.7), el segon factor a la dreta (l'arrel quadrada fora del parèntesi) convergeix a 1 en probabilitat, quan $n \to \infty$. Per tant, el teorema d'Slutski[13] ens diu que el teorema serà cert si se satisfà

$$\frac{S_{\nu_n} - S_{\lfloor cn \rfloor}}{\sqrt{\lfloor cn \rfloor}} \to 0, \quad \text{en probabilitat}, \tag{3.8}$$

quan $n \to \infty$. Vegem-ho. Donat un ε, $0 < \varepsilon < 1$, definim

$$a_n = \lfloor (1-\varepsilon^3)\lfloor cn \rfloor \rfloor, \qquad b_n = \lfloor (1+\varepsilon^3)\lfloor cn \rfloor \rfloor - 1. \tag{3.9}$$

[13] Ievgueni Ievguenievitx Slutski, 1880-1948

Per (3.7), existeix un $n_0(\varepsilon)$ tal que, si $n \geq n_0(\varepsilon)$, aleshores el conjunt

$$\Lambda = \{\omega : a_n \leq \nu_n \leq b_n\}$$

té probabilitat $P(\Lambda) \geq 1-\varepsilon$. Si ω pertany al conjunt, aleshores $S_{\nu_n(\omega)}(\omega)$ és una de les sumes S_j, amb $a_n \leq j \leq b_n$. Per a $\lfloor cn \rfloor < j \leq b_n$, tenim

$$S_j - S_{\lfloor cn \rfloor} = X_{\lfloor cn \rfloor+1} + X_{\lfloor cn \rfloor+2} + ... + X_j;$$

d'on, per la desigualtat de Kolmogórov[14], les definicions (3.9) i la variància 1, obtenim

$$P(\max_{\lfloor cn \rfloor \leq j \leq b_n} |S_j - S_{\lfloor cn \rfloor}| > \varepsilon\sqrt{\lfloor cn \rfloor}) \overset{D.K.}{\leq} \frac{\sigma^2(S_{b_n} - S_{\lfloor cn \rfloor})}{\varepsilon^2 \lfloor cn \rfloor} \overset{(3.9)}{\leq} \frac{\varepsilon^3 \lfloor cn \rfloor}{\varepsilon^2 \lfloor cn \rfloor} \leq \varepsilon.$$

De manera anàloga, per el cas $a_n \leq j \leq \lfloor cn \rfloor$, tenim

$$P(\max_{a_n \leq j \leq \lfloor cn \rfloor} |S_{\lfloor cn \rfloor} - S_j| > \varepsilon\sqrt{\lfloor cn \rfloor}) \overset{D.K.}{\leq} \frac{\sigma^2(S_{\lfloor cn \rfloor} - S_{a_n})}{\varepsilon^2 \lfloor cn \rfloor} \overset{(3.9)}{\leq} \frac{\varepsilon^3 \lfloor cn \rfloor}{\varepsilon^2 \lfloor cn \rfloor} \leq \varepsilon.$$

Combinant les dues, concluïm que

$$P(\max_{a_n \leq j \leq b_n} |S_j - S_{\lfloor cn \rfloor}| > \varepsilon\sqrt{\lfloor cn \rfloor}) \leq 2\varepsilon.$$

Ara, si $n \geq n_0(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{S_{\nu_n} - S_{\lfloor cn \rfloor}}{\sqrt{\lfloor cn \rfloor}}\right| > \varepsilon\right) &= \sum_{j=1}^{\infty} P\left(\nu_n = j\ ;\ \left|\frac{S_{\nu_n} - S_{\lfloor cn \rfloor}}{\sqrt{\lfloor cn \rfloor}}\right| > \varepsilon\right) \\ &\leq \sum_{a_n \leq j \leq b_n} P(\nu_n = j; \max_{a_n \leq j \leq b_n} |S_j - S_{\lfloor cn \rfloor}| > \varepsilon\sqrt{\lfloor cn \rfloor}) + \sum_{j \notin [a_n, b_n]} P(\nu_n = j) \\ &\leq P(\max_{a_n \leq j \leq b_n} |S_j - S_{\lfloor cn \rfloor}| > \varepsilon\sqrt{\lfloor cn \rfloor}) + P(\nu_n \notin [a_n, b_n]) \\ &\leq 2\varepsilon + 1 - P(\Lambda) \leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Com ε és arbitrari, això demostra (3.8) i, conseqüentment, el teorema. □

3.3 Altres successions de variables aleatòries

Una tercera, un pèl més profunda, extensió del TLC és en la que donem exemple d'una altra distribució límit inherentment lligada amb la $N(0,1)$. Sigui $\{X_j, j \geq 1\}$ una successió de v.a's independents, idènticament distribuïdes, amb esperança 0 i variància 1; i

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j.$$

Es tornarà evident d'aquí poc que tals suposicions s'hauran de debilitar per tal que es mantingui certa la hipòtesi bàsica, que el TLC hauria de ser aplicable. Considerem ara la successió infinita de sumes $\{S_n, n \geq 1\}$. El teoremes límit que hem discutit fins ara treballen únicament amb els termes individuals de la successió $\{S_n\}_n$ mateixa, però hi ha diverses successions derivades d'aquesta que no són menys interessants. Per posar uns quants exemples:

[14]Andrei Nikolaievitx Kolmogórov, 1903-1987

$$\max_{1\le m\le n} S_m, \qquad \min_{1\le m\le n} S_m, \qquad \max_{1\le m\le n} |S_m|, \qquad \max_{1\le m\le n} \frac{|S_m|}{\sqrt{m}},$$

$$\sum_{m=1}^{n} \delta_a(S_m), \qquad \sum_{m=1}^{n} \gamma(S_m, S_{m+1});$$

on $\gamma(a,b) = 1$, si $ab < 0$ i 0 altrament. Així, els dos últims exemples representen, respectivament, el "nombre de sumes $\geq a$" i el "nombre de canvis de signe". Ara, la idea central, introduïda per Erdös[15] i Kac[16], és que el comportament asimptòtic d'aquests funcionals d'S_n hauria d'ésser el mateix independentment de les propietats especials de les X_j's, sempre i quan el TLC es pugui aplicar (com a mínim, quan certes condicions de regularitat se satisfan, com per exemple la finitud de moments d'ordre gran). Així, per tal d'obtenir la distribució asimptòtica d'algun d'aquests funcionals, hom hauria de reduïr-se a un cas molt particular on els càlculs siguin factibles. Tal mètode s'anomena "principi d'invariància", i consisteix en reduïr-se al cas del funcional $\max_{1\le m\le n} S_m$.

Per tant, per a una x fixada, anomenem

$$P_n(x) = P(\max_{1\le m\le n} S_m \le x\sqrt{n}).$$

Per a un enter $k \geq 1$, sigui $n_j = \lfloor jn/k \rfloor$, $0 \le j \le k$, i definim

$$R_{nk}(x) = P(\max_{1\le j\le k} S_{n_j} \le x\sqrt{n}).$$

Sigui, a més,

$$E_j = \{\omega : S_m(\omega) \le x\sqrt{n}, 1 \le m < j;\ S_j(\omega) > x\sqrt{n}\};$$

i, per a cada j, definim $l(j)$ tal que

$$n_{l(j)-1} < j < n_{l(j)}.$$

Ara, per a $0 < \varepsilon < x$, definim:

$$\begin{aligned} P(\max_{1\le m\le n} S_m > x\sqrt{n}) = &\sum_{j=1}^{n} P(E_j;\ |S_{n_{l(j)}} - S_j| \le \varepsilon\sqrt{n}) \\ &+ \sum_{j=1}^{n} P(E_j;\ |S_{n_{l(j)}} - S_j| > \varepsilon\sqrt{n}) = \Sigma_1 + \Sigma_2. \end{aligned}$$

Com els conjunts E_j són independents del conjunt $\{|S_{n_{l(j)}} - S_j| > \varepsilon\sqrt{n}\}$ i $\sigma^2(S_{n_{l(j)}} - S_j) \le n/k$, tenim, per la desigualtat de Txebixov a la primera desigualtat:

$$\Sigma_2 \le \sum_{j=1}^{n} P(E_j) \frac{\frac{n}{k}}{\varepsilon^2 n} \le \frac{1}{\varepsilon^2 k}.$$

Per altra banda, com $S_j > x\sqrt{n}$, i $|S_{n_{l(j)}} - S_j| \le \varepsilon\sqrt{n}$ implica $S_{n_{l(j)}} > (x-\varepsilon)\sqrt{n}$, tenim

$$\Sigma_1 \le P(\max_{1\le l\le k} S_{n_l} > (x-\varepsilon)\sqrt{n}) = 1 - R_{nk}(x-\varepsilon).$$

[15] Pál "Paul" Erdös, 1913-1996

[16] Marek "Mark" Kac, 1914-1984

Se segueix que

$$P_n(x) = 1 - \Sigma_1 - \Sigma_2 \geq R_{nk}(x-\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon^2 k}. \tag{3.10}$$

Com, trivialment, $P_n(x) \leq R_{nk}(x)$, intercanviant x per $x+\varepsilon$ i viceversa a (3.10), i utilitzant que $R_{nk}(x)$ és creixent per definició, obtenim les següents desigualtats:

$$P_n(x) \leq R_{nk}(x) \leq P_n(x+\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2 k}. \tag{3.11}$$

Demostrarem ara que, per a unes x, k fixades, $\lim_{n\to\infty} R_{nk}(x)$ existeix. Com

$$R_{nk}(x) = P(S_{n_1} \leq x\sqrt{n}, S_{n_2} \leq x\sqrt{n}, ..., S_{n_k} \leq x\sqrt{n}),$$

per definició, és suficient veure que la successió de vectors aleatoris k-dimensionals

$$\left(\sqrt{\frac{k}{n}} S_{n_1}, \sqrt{\frac{k}{n}} S_{n_2}, ..., \sqrt{\frac{k}{n}} S_{n_k}\right)$$

convergeix en distribució quan $n \to \infty$. Ara, la funció característica d'aquest vector aleatori $f(t_1, ..., t_k)$ ve donada per

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(\exp{(i\sqrt{k/n}(t_1 S_{n_1} + ... + t_k S_{n_k}))}\\ &\quad = \mathbb{E}(\exp{(i\sqrt{k/n}[(t_1 + ... + t_k)S_{n_1} + (t_2 + ... + t_k)(S_{n_2} - S_{n_1}) + ... + t_k(S_{n_k} - S_{n_{k-1}})]}),\end{aligned}$$

que convergeix a

$$\exp{[-(t_1 + ... + t_k)^2/2]} \exp{[-(t_2 + ... + t_k)^2/2]} \cdots \exp{[-t_k^2/2]}, \tag{3.12}$$

doncs les funcions característiques de

$$\sqrt{\frac{k}{n}} S_{n_1}, \sqrt{\frac{k}{n}}(S_{n_2} - S_{n_1}), ..., \sqrt{\frac{k}{n}}(S_{n_k} - S_{n_{k-1}})$$

convergeixen totes a $e^{-t^2/2}$ en virtut del TLC clàssic, ja que $n_{j+1} - n_j$ és asimptòticament igual a n/k per a tota j. És ben sabut que la funció característica donada per (3.12) correspon a una distribució normal k-dimensional, però, per al nostre propòsit, és suficient saber que el teorema de continuïtat de Paul Lévy se satisfà per a qualsevol dimensió, és a dir, que R_{nk} convergeix dèbilment a $R_{\infty k}$, on $R_{\infty k}$ correspon a una distribució k-dimensional qualsevol.

Suposem ara que treballem amb una successió $\{\tilde{X}_j, j \geq 1\}$ que satisfà les mateixes condicions que les X_j's definides a l'inici de la subsecció. Aleshores, es pot veure que la seva corresponent $\tilde{P}_n$ convergeix ("puntualment" de fet, però "dèbilment" si és necessari):

$$\forall x : \lim_{n\to\infty} \tilde{P}_n(x) = G(x). \tag{3.13}$$

Vegem-ho. Com $R_{\infty k}$ és una distribució fixada, aplicant (3.11) però canviant $\tilde{P}_n$ per P_n, i fent $n \to \infty$, , obtenim:

$$G(x) \leq R_{\infty k} \leq G(x+\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2 k}.$$

Substituïnt un altre cop a (3.11) i prenents límits inferior i superior, obtenim

$$G(x-\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon^2 k} \le R_{\infty k}(x-\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon^2 k} \le \liminf_{n\to\infty} P_n(x) \le \lim_{n\to\infty} P_n(x)$$
$$\le \limsup_{n\to\infty} P_n(x) \le R_{\infty k}(x) \le G(x+\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2 k}.$$

Fent $k \to \infty$, com ε és arbitrari, podem concloure que $P_n(x)$ convergeix dèbilment a $G(x)$.

Resta demostrar (3.13) per a una classe concreta de X_j's i determinar G. Això es pot fer amb rapidesa si la funció de distribució comuna de les X_j's correspon a una Bernoulli simètrica $\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_{-1})$. En aquest cas, de fet, podem computar la probabilitat més específica

$$P(\max_{1\le m\le n} S_m < x;\ S_n = y), \tag{3.14}$$

on x i y són dos enters tals que $x > 0, x > y$. Si observem que, en el nostre cas particular, $\max_{1\le m\le n} S_m \ge x$ si, i només si, $S_j = x$ per a alguna j, $1 \le j \le n$, la probabilitat (3.14) és exactament igual a

$$\begin{aligned}
&P(S_n = y) - P(\max_{1\le m\le n} S_m \ge x;\ S_n = y) \\
&\quad = P(S_n = y) - \sum_{j=1}^{n} P(S_m < x, 1 \le m < j;\ S_j = x;\ S_n = y) \\
&\quad = P(S_n = y) - \sum_{j=1}^{n} P(S_m < x, 1 \le m < j;\ S_j = x;\ S_n - S_j = y - x) \\
&\quad = P(S_n = y) - \sum_{j=1}^{n} P(S_m < x, 1 \le m < j;\ S_j = x) P(S_n - S_j = y - x),
\end{aligned}$$

on l'últim pas és per independència. Ara, la v.a

$$S_n - S_j = \sum_{m=j+1}^{n} X_m$$

és simètrica i, per tant, $P(S_n - S_j = y - x) = P(S_n - S_j = x - y)$. Substituint això i fent marxa enrere amb els passos anteriors, obtenim

$$\begin{aligned}
&P(S_n = y) - \sum_{j=1}^{n} P(S_m < x, 1 \le m < j;\ S_j = x) P(S_n - S_j = x - y) \\
&\quad = P(S_n = y) - \sum_{j=1}^{n} P(S_m < x, 1 \le m < j;\ S_j = x;\ S_n - S_j = x - y) \\
&\quad = P(S_n = y) - \sum_{j=1}^{n} P(S_m < x, 1 \le m < j;\ S_j = x;\ S_n = 2x - y) \\
&\quad = P(S_n = y) - P(\max_{1\le m\le n} S_m \ge x;\ S_n = 2x - y).
\end{aligned}$$

Com $2x - y > x$, $S_n = 2x - y$ implica que $\max_{1\le m\le n} S_m \le x$, l'última línia es redueix a

$$P(S_n = y) - P(S_n = 2x - y), \tag{3.15}$$

i hem demostrat que el valor de la probabilitat (3.14) ve donat per (3.15).

Observació: El truc que acabem d'utilitzar, que consisteix en canviar el signe de cada X_j després de la primera vegada que S_n assoleix el valor x, o geomètricament parlant, reflectint el camí $\{(j, S_j), j \geq 1\}$ sobre la línia $S_j = x$ després d'arribar-hi per primera vegada, s'anomena "principi de reflexió".

El valor de (3.15) és, per descomptat, ben conegut en el cas de v.a's simètriques Bernoulli, i, si n és parell, sumant sobre y, obtenim:

$$
\begin{aligned}
P(\max_{1\leq m\leq n} S_m < x) &= \sum_{y<x} \frac{1}{2^n} \left\{ \binom{n}{\frac{n-y}{2}} - \binom{n}{\frac{n-2x+y}{2}} \right\} \\
&= \sum_{y<x} \frac{1}{2^n} \left\{ \binom{n}{\frac{n-y}{2}} - \binom{n}{\frac{n+2x-y}{2}} \right\} \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{\frac{n-x}{2}<j\leq\frac{n+x}{2}} \binom{n}{j} = \frac{1}{2^n} \sum_{\left|j-\frac{n}{2}\right|<\frac{x}{2}} \binom{n}{j} + \frac{1}{2^n}\binom{n}{\frac{n+x}{2}},
\end{aligned}
$$

on $\binom{n}{j} = 0$, si $|j| > n$ o si j no és un enter. Reemplaçant $x\sqrt{n}$ (o $\lfloor x\sqrt{n} \rfloor$ si hom ho creu oportú) per x a l'última expressió i utilitzant el TLC per al cas de v.a's Bernoulli (l'expressió (0.1) del Corol.lari 0.2) amb $p = q = 1/2$, veiem que la probabilitat anterior tendeix al límit

$$
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-y^2/2}\, dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-y^2/2}\, dy,
$$

quan $n \to \infty$. Per altra banda, és obvi, fins i tot sense la necessitat de repetir els càlculs anteriors, que s'obté el mateix límit en cas què n sigui imparella. Finalment, ja que aquest límit, com a funció de x, és una funció de distribució amb suport a $(0, \infty)$, el corresponent límit per a $x \leq 0$ ha de ser 0. Per tant, estem en posició d'enunciar el següent resultat sobre l'última extensió del TLC que tractarem:

Teorema 3.4. *Siguin $\{X_j, j \geq 0\}$ v.a's independents i idènticament distribuïdes, amb esperança 0 i variància 1. Si denotem per $\Phi(x)$ la funció de distribució d'una $N(0,1)$, aleshores $(\max_{1\leq m\leq n} S_m)/\sqrt{n}$ convergeix en distribució a la "funció de distribució normal positiva" G, on*

$$
\forall x \in \mathbb{R} : \; G(x) = \max_{x\in\mathbb{R}}\{(2\Phi(x) - 1), 0\}.
$$

4 Estimació d'errors

Quan parlem de convergència, és inevitable preguntar-se per la "velocitat" d'aquesta convergència, és a dir, investigar sobre la diferència entre l'aproximació i el seu límit. Específicament, si una successió de funcions de distribució F_n convergeix a la funció de distribució normal unitària $\Phi(x)$, com és el cas del TLC, què en podem dir del "terme restant" $F_n(x) - \Phi(x)$? Un estimació adequada d'aquest terme és necessària en diverses aplicacions matemàtiques, així com per a computacions numèriques. Sota la condició de Liapunov existeix una "cota superior", trobada per Berry[17] i Esseen[18], que van millorar un resultat antic del propi Liapunov, tal i com resa el teorema a continuació.

Teorema 4.1. *Sota les hipòtesis del Teorema 1.4 (Liapunov amb $\delta = 1$), existeix una constant universal A_0 tal que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - \Phi(x)| \leq A_0\Gamma_n, \tag{4.1}$$

on F_n i Γ_n corresponen a la funció de distribució de S_n i a la suma dels moments absoluts de tercer ordre, respectivament.

En el cas d'una única successió de v.a's $\{X_j, j \geq 1\}$ independents i idènticament distribuïdes, amb esperança 0, variància σ^2, i moment absolut de tercer ordre $\gamma < \infty$, el Teorema 1.6 (Liapunov II amb $\delta = 1$) ens diu que la part dreta de (4.1) es redueix a

$$A_0 \frac{n\gamma}{(n\sigma^2)^{3/2}} = \frac{A_0\gamma}{\sigma^3\sqrt{n}}.$$

Cramér[19] i Hsu[20] van demostrar que, sota algunes condicions més fortes, hom pot obtenir una expansió asimptòtica de la forma:

$$F_n(x) = \Phi(x) + \frac{H_1(x)}{n^{1/2}} + \frac{H_2(x)}{n} + \frac{H_3(x)}{n^{3/2}} + ...,$$

on les H's són funcions explícites que involucren els polinomis d'Hermite[21]. No entrarem en la demostració d'aquest resultat, doncs el mètode bàsic per a arribar a tal expansió és similar a la demostració del teorema anterior, però amb considerables dificultats tècniques i que, per tant, escapen del tema sobre el que treballem.

Per a la demostració del Teorema 4.1 seran necessaris una sèrie de lemes que treballaran amb funcions característiques, així com una proposició.

Lema 4.2. *Sigui F una funció de distribució i G una funció a valors reals que satisfà les següents condicions:*

(i) $\lim_{x\to-\infty} G(x) = 0,\ \lim_{x\to\infty} G(x) = 1$;

(ii) La derivada de G està acotada a tot arreu: $\sup_{x\in\mathbb{R}} |G'(x)| \leq M$.

Si definim

$$\Delta = \frac{1}{2M} \sup_{x\in\mathbb{R}} |F(x) - G(x)|, \tag{4.2}$$

[17] Andrew Campbell Berry, 1906-1998

[18] Carl-Gustav Esseen, 1918-2001

[19] Carl Harald Cramér, 1893-1985

[20] Pao-Lu "P.L." Hsu, 1910-1970

[21] Charles Hermite, 1822-1901

aleshores existeix un nombre real a tal que, per a tota $T > 0$, tenim:

$$\begin{aligned} 2MT\Delta \left\{ 3 \int_0^{T\Delta} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx - \pi \right\} \\ \leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos Tx}{x^2} (F(x+a) - G(x+a))\, dx \right|. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Demostració del Lema 4.2: Clarament, la Δ a (4.2) és finita, doncs G està acotada a tot arreu per les condicions (i) i (ii). Suposarem que el terme de l'esquerra de (4.3) és positiu ja que, sinó, no hi ha res a demostrar. Per tant, $\Delta > 0$. Com $F - G$ s'anul.la a $\pm\infty$ per (i), existeix una successió de nombres $\{x_n\}_n$, que convergeix a un limit finit b, tal que $F(x_n) - G(x_n)$ convergeix a $2M\Delta$ o $-2M\Delta$. Per tant, $F(b) - G(b) = 2M\Delta$ o $F(b-) - G(b) = -2M\Delta$. Com els dos casos són clarament similars, tractarem amb el segon. Sigui $a = b - \Delta$, aleshores si $|x| < \Delta$, utilitzant la condició (ii) i el teorema del valor mitjà de càlcul diferencial:

$$G(x+a) \geq G(b) + (x - \Delta)M$$

i, conseqüentment,

$$F(x+a) - G(x+a) \leq F(b-) - [G(b) + (x-\Delta)M] = -M(x+\Delta).$$

Se segueix d'aquí, utilitzant que $(1-\cos Tx)/x^2$ és una funció parella, que

$$\begin{aligned} &\int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{1-\cos Tx}{x^2}(F(x+a) - G(x+a))\, dx \\ &\leq -M \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{1-\cos Tx}{x^2}(x+\Delta)\, dx = -2M\Delta \int_0^{\Delta} \frac{1-\cos Tx}{x^2}\, dx; \text{ i, també} \\ &\left| \int_{-\infty}^{-\Delta} \frac{1-\cos Tx}{x^2}(F(x+a) - G(x+a))\, dx + \int_{\Delta}^{\infty} \frac{1-\cos Tx}{x^2}(F(x+a) - G(x+a))\, dx \right| \\ &\leq 2M\Delta \left(\int_{-\infty}^{-\Delta} \frac{1-\cos Tx}{x^2}\, dx + \int_{\Delta}^{\infty} \frac{1-\cos Tx}{x^2}\, dx \right) = 4M\Delta \int_{\Delta}^{\infty} \frac{1-\cos Tx}{x^2}\, dx. \end{aligned}$$

Ajuntant aquestes desigualtats, i sempre que la T sigui suficientment gran com per que el terme de l'esquerra a (4.3) sigui positiu (sinó el resultat és trivial), obtenim (4.3), ja que

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos Tx}{x^2}(F(x+a) - G(x+a))\, dx \\ &\quad \leq 2M\Delta \left\{ -\int_0^{\Delta} \frac{1-\cos Tx}{x^2}\, dx + 2\int_{\Delta}^{\infty} \frac{1-\cos Tx}{x^2}\, dx \right\} \\ &\quad = 2M\Delta \left\{ -3\int_0^{\Delta} \frac{1-\cos Tx}{x^2}\, dx + 2\int_0^{\infty} \frac{1-\cos Tx}{x^2}\, dx \right\} \\ &\quad = 2MT\Delta \left\{ -3\int_0^{T\Delta} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx + \pi \right\} = -2MT\Delta \left\{ 3\int_0^{T\Delta} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx - \pi \right\} \end{aligned}$$

on, a la primera integral hem fet un canvi de variable i a la segona hem utilitzat que

$$\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} \left[\int_0^x \sin u\, du \right] dx = \int_0^{\infty} \sin u \left[\int_u^{\infty} \frac{dx}{x^2} \right] du = \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u}\, du = \frac{\pi}{2},$$

d'on, si la variable és Tx, fent un canvi de variable obtenim que val exactament $\pi T/2$. $\square$

Lema 4.3. *Sota les hipòtesis del Lema 4.2, suposem també que*

(iii) G *és de variació acotada a* $(-\infty, \infty)$*;*

(iv) $\int_{-\infty}^{\infty} |F(x) - G(x)| \, dx < \infty$.

Si definim

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \, dF(x), \qquad g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \, dG(x),$$

aleshores tenim

$$\Delta \leq \frac{1}{\pi M} \int_0^T \frac{|f(t) - g(t)|}{t} \, dt + \frac{12}{\pi T}. \tag{4.4}$$

Demostració del Lema 4.3: La finitud de la integral a la dreta de la desigualtat a (4.4) serà aparent en breus; a més, com és una integral de Lebesgue[22], el valor de l'integrand a $t = 0$ es pot passar per alt. Ara, fent integració per parts, que tenim permís per fer sota la condició (iii) del lema, i recordant que $F - G$ s'anul.la a $\pm\infty$, obtenim:

$$f(t) - g(t) = -it \int_{-\infty}^{\infty} (F(x) - G(x)) e^{itx} \, dx, \tag{4.5}$$

i, conseqüentment, multiplicant (4.5) per e^{-ita}

$$\frac{f(t) - g(t)}{-it} e^{-ita} = \int_{-\infty}^{\infty} (F(x+a) - G(x+a)) e^{itx} \, dx,$$

on a l'integral hem fet el canvi de variable corresponent. En particular, per la condició (iv), el membre de l'esquerra en aquesta última igualtat està acotat per a tota $t \neq 0$. Multiplicant l'expressió anterior per $(T - |t|)$ i integrant entre $-T$ i T, obtenim

$$\int_{-T}^{T} \frac{f(t) - g(t)}{-it} e^{-ita} (T - |t|) \, dt = \int_{-T}^{T} \int_{-\infty}^{\infty} (F(x+a) - G(x+a)) e^{itx} (T - |t|) \, dx \, dt.$$

Ara, un càlcul ràpid i senzill ens diu que

$$\frac{1 - \cos Tx}{x^2} = \frac{1}{2} \int_{-T}^{T} (T - |t|) e^{itx} \, dt. \tag{4.6}$$

Així, pel teorema de Fubini[23] i la condició (iv), podem invertir la integral doble i, utilitzant el resultat (4.6), obtenim

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos Tx}{x^2} (F(x+a) - G(x+a)) \, dx \right| \leq T \int_0^T \frac{|f(t) - g(t)|}{t} \, dt.$$

on, per a obtenir l'expressió de la dreta de la desigualtat, hem utilitzat, un altre cop, el teorema de Fubini i la condició (iv), juntament amb l'equació (4.5) i el fet que l'integral d'una funció senar sobre un interval simètric és 0. Aquesta expressió, en conjunció amb l'expressió (4.3) del lema anterior, ens dóna:

[22] Henri-Léon Lebesgue, 1875-1941

[23] Guido Fubini, 1879-1943

$$2M\Delta\left\{3\int_0^{T\Delta}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx-\pi\right\}\le\int_0^T\frac{|f(t)-g(t)|}{t}\,dt. \tag{4.7}$$

La quantitat entre els claudàtors no és menor que

$$3\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx-3\int_{T\Delta}^{\infty}\frac{2}{x^2}-\pi=\frac{3\pi}{2}-\frac{6}{T\Delta}-\pi=\frac{\pi}{2}-\frac{6}{T\Delta}.$$

Implementant aquest resultat a (4.7), s'obté (4.4). □

El Lema 4.3 ens acota la màxima diferència entre dues funcions de distribució que satsifan certes condicions de regularitat, en termes d'una certa diferència mitjana entre les seves funcions característiques. El lemes que enunciarem a continuació ja seran aplicats al cas específic de les funcions de distribució F_n i Φ del Teorema 4.1. Sigui f_n la funció característica de F_n, aleshores

$$f_n(t)=\prod_{j=1}^{k_n}f_{nj}(t).$$

Lema 4.4. *Per a* $|t|<1/(2\Gamma_n^{1/3})$*, se satsifà*

$$|f_n(t)-e^{-t^2/2}|\le\Gamma_n|t|^3e^{-t^2/2}. \tag{4.8}$$

Demostració del Lema 4.4: Sigui θ un nombre complex "genèric" tal que $|\theta|\le 1$, tot i que aquest valor pot no ser el mateix cada vegada. Pel desenvolupament de Taylor,

$$f_{nj}(t)=1-\frac{\sigma_{nj}^2}{2}t^2+\theta\frac{\gamma_{nj}}{6}t^3.$$

Per al rang de t donat a l'enunciat del lema i la desigualtat de Liapunov, tenim

$$|\sigma_{nj}t|\le|\gamma_{nj}^{1/3}t|\le|\Gamma_n^{1/3}t|<\frac{1}{2}, \tag{4.9}$$

i, per tant,

$$\left|-\frac{\sigma_{nj}^2}{2}t^2+\frac{\theta\gamma_{nj}t^3}{6}\right|<\frac{1}{8}+\frac{1}{48}<\frac{1}{4}.$$

Utilitzant el resultat (1.7) de la secció 1, amb $\Lambda=\theta/2$, podem escriure

$$\log f_{nj}(t)=-\frac{\sigma_{nj}^2}{2}t^2+\frac{\theta\gamma_{nj}}{6}t^3+\frac{\theta}{2}\left(-\frac{\sigma_{nj}^2t^2}{2}+\frac{\theta\gamma_{nj}t^3}{6}\right)^2.$$

Per (4.9), el valor absolut de l'últim terme a la dreta de la igualtat és menor que

$$\frac{\sigma_{nj}^4t^4}{4}+\frac{\gamma_{nj}^2t^6}{36}\le\left(\frac{\sigma_{nj}|t|}{4}+\frac{\gamma_{nj}|t|^3}{36}\right)\gamma_{nj}|t|^3\le\left(\frac{1}{4\cdot 2}+\frac{1}{36\cdot 8}\right)\gamma_{nj}|t|^3$$

i, per tant,

$$\log f_{nj}(t)\le-\frac{\sigma_{nj}^2}{2}t^2+\frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{288}\right)\gamma_{nj}|t|^3\le-\frac{\sigma_{nj}^2}{2}t^2+\frac{\theta}{2}\gamma_{nj}|t|^3.$$

Sumant sobre j i imposant la hipòtesi de reducció (1.3), obtenim

$$\log f_{nj}(t) \leq -\frac{t^2}{2} + \frac{\theta}{2}\Gamma_n|t|^3,$$

o, de manera explícita, prenent valors absoluts:

$$\left|\log f_{nj}(t) + \frac{t^2}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\Gamma_n|t|^3.$$

Aplicant la desigualtat $|e^u - 1| \leq |u|e^{|u|}$, per a tota u, a l'expressió anterior, s'obté

$$|f_{nj}(t)e^{t^2/2} - 1| \leq \frac{\Gamma_n|t|^3}{2} \exp\left[\frac{\Gamma_n|t|^3}{2}\right].$$

Finalment, com $\Gamma_n|t|^3/2 \leq 1/16$, per hipòtesi del lema, i $e^{1/16} \leq 2$, obtenim (4.8). □

Lema 4.5. *Per a $t < 1/(4\Gamma_n)$, se satisfà*

$$|f_n(t)| \leq e^{-t^2/3}. \tag{4.10}$$

Demostració del Lema 4.5: Per a facilitar l'estimació que ens demana el lema, utilitzarem una tècnica coneguda anomenada "simetrització", que consisteix en considerar la v.a $X - Y$ (on Y posseeix la mateixa distribució que X) i la funció característica $|f|^2$, en comptes de la v.a X i la funció característica f. Això es degut a que la funció característica de $X - Y$ és, precisament,

$$\mathbb{E}(e^{it(X-Y)}) = \mathbb{E}(e^{itX})\mathbb{E}(e^{-itY}) = f(t)f(-t) = |f(t)|^2.$$

Per tant, tenim

$$|f_{nj}(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cos t(x-y)\; dF_{nj}(x)\; dF_{nj}(y),$$

doncs $|f_{nj}|^2$ és un nombre real. Ara, utilitzant les desigualtats elementals

$$\left|\cos u - 1 + \frac{u^2}{2}\right| \leq \frac{|u|^3}{6},$$
$$|x-y|^3 \leq 4(|x|^3 + |y|^3);$$

que es poden deduïr a partir del desenvolupament de Taylor i la desigualtat de Jensen[24], respectivament, s'observa que la doble integral anterior no supera

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [1 - \frac{t^2}{2}(x^2 - 2xy + y^2) + \frac{2}{3}|t|^3(|x|^3 + |y|^3)]\; dF_{nj}(x)\; dF_{nj}(y)$$
$$= 1 - \sigma_{nj}^2 t^2 + \frac{4}{3}\gamma_{nj}|t|^3 \leq \exp\left(-\sigma_{nj}^2 t^2 + \frac{4}{3}\gamma_{nj}|t|^3\right),$$

on, a l'últim pas, hem utilitzat la desigualtat $1 + x \leq e^x$. Multiplicant sobre j, obtenim

$$|f_n(t)|^2 \leq \exp\left(-t^2 + \frac{4}{3}\Gamma_n|t|^3\right) \leq e^{-(2/3)t^2},$$

per al rang de t especificat a l'enunciat del lema, demostrant (4.10). □

[24] Johan Ludwig William Valdemar Jensen, 1859-1925

Observem que el Lema 4.5 és més dèbil que el Lema 4.4, però té validesa en un rang molt més ampli. Per a aquest últim lema, combinem aquests dos anteriors:

Lema 4.6. *Per a $|t| < 1/(4\Gamma_n)$, se satifà*

$$|f_n(t) - e^{-t^2/2}| \leq 16\Gamma_n |t|^3 e^{-t^2/3}. \tag{4.11}$$

Demostració del Lema 4.6: Si $|t| < 1/(2\Gamma_n^{1/3})$, el lema és cert per (4.8), doncs $e^{-t^2/2} \leq e^{-t^2/3}, \forall t \in \mathbb{R}$. Si $1/(2\Gamma_n^{1/3}) \leq t < 1/(4\Gamma_n)$, aleshores $1 \leq 8\Gamma_n|t|^3$ i, per (4.10), obtenim:

$$|f_n(t) - e^{-t^2/2}| \leq |f_n(t)| + e^{-t^2/2} \leq 2e^{-t^2/3} \leq 16\Gamma_n|t|^3 e^{-t^2/3},$$

que correspon a l'expressió que volíem demostrar. $\square$

Abans de demostrar el Teorema 4.1, demostrarem aquesta important proposició que ens relaciona els moments de primer ordre de dues funcions de distribució amb l'integral de la seva diferència:

Proposició 4.7. *Siguin F i G dues funcions de distribució, ambdues amb moments de primer ordre finit. Aleshores*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x) - G(x)| \; dx < \infty.$$

Demostració: Utilitzant aquesta coneguda propietat de l'esperança per a v.a positives,

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} P(X > x) \; dx = \int_0^{\infty} P(X \geq x) \; dx,$$

es comprova ràpidament que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \; dF(x) = \mathbb{E}(|X|) < \infty \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} F(x) \; dx < \infty \text{ i } \int_0^{\infty} (1 - F(x)) \; dx < \infty.$$

Utilitzant que tant F com G verifiquen aquest resultat (ambdues tenen moment de primer ordre finit per hipòtesi), s'obté que

$$\int_{-\infty}^{0} F(x) \; dx < \infty, \; \int_{-\infty}^{0} G(x) \; dx < \infty \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} (G(x) - F(x)) \; dx < \infty$$

i també

$$\int_0^{\infty} (1 - F(x)) \; dx < \infty, \; \int_0^{\infty} (1 - G(x)) \; dx < \infty \Rightarrow \int_0^{\infty} (F(x) - G(x)) \; dx < \infty,$$

d'on podem concloure que

$$\int_{-\infty}^{0} (G(x) - F(x)) \; dx + \int_0^{\infty} (F(x) - G(x)) \; dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(x) - G(x)| \; dx < \infty,$$

just el resultat que volíem demostrar. $\square$

Amb tots aquests resultats que hem enunciat en la secció, i dels quals n'acabem de demostrar la seva certesa, estem en posició de demostrar l'últim resultat important en aquesta memòria: el Teorema 4.1.

Demostració del Teorema 4.1: Sota les hipòtesis del teorema, aplicarem el Lema 4.3 amb $F = F_n$ i $G = \Phi$, on Φ correspon a la funció de distribució d'una $N(0,1)$. Primer, prenem $1/\sqrt{2\pi}$ com a valor de la cota M que apareix a la condició (ii) del Lema 4.2. Ara, tant F_n com G tenen esperança 0 i variància 1, és a dir, que totes dues tenen moment de primer ordre finit. Per tant, per la Proposició 4.7, se satisfà la condició (iv) del Lema 4.3.

Si a l'expressió (4.4) prenem $T = 1/(4\Gamma_n)$, aleshores per (4.2), (4.4) i (4.11) tenim:

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - \Phi(x)| &\leq \int_0^{1/(4\Gamma_n)} \frac{|f_n(t) - e^{-t^2/2}|}{t}\, dt + \frac{96}{\sqrt{2\pi^3}}\Gamma_n \\
&\leq \frac{32\Gamma_n}{\pi} \int_0^{1/(4\Gamma_n)} t^2 e^{-t^2/3}\, dt + \frac{96}{\sqrt{2\pi^3}}\Gamma_n \\
&\leq \Gamma_n \left\{ \frac{32}{\pi} \int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2/3}\, dt + \frac{96}{\sqrt{2\pi^3}} \right\} = \Gamma_n A_0.
\end{aligned}$$

Aquest resultat ens estableix un valor numèric per a la constant universal A_0 (el qual es podria millorar una mica) i, per tant, hem acabat la demostració. $\square$

5 Conclusions

En aquesta memòria hem estudiat diverses extensions i aplicacions del Teorema del límit central i hem aconseguit veure que, en tots els casos plantejats, el resultat és satisfactori, el TLC segueix sent cert. Hem demostrat que, si deixem de banda algunes de les hipòtesis que apareixen a l'enunciat del TLC clàssic, ja sigui la idèntica distribució, la independència de les v.a's o, fins i tot, substituïnt la suma per un altre funcional, i imposem certes restriccions de negligibilitat sobre la matriu de v.a's (secció 1), les condicions que cal imposar per a que se segueixi satisfent el TLC no resulten massa complicades, com hom podria pensar, sinó que només involucren moments de ordre major que 2 (Liapunov i Lindeberg) o alguna condició simple sobre les v.a's que hi apareixen (secció 3).

També hem pogut demostrar que l'error en l'aproximació del TLC es pot acotar fent ús únicament dels moments de tercer ordre i una constant, un resultat bastant interessant i que no es mostra en les assignatures cursades en el grau.

Finalment, des d'un punt de vista personal, com a gran entusiasta de la branca de Probabilitats, persona molt curiosa i que sempre vol aprofundir en allò que aprèn, la realització d'aquest treball ha estat molt enriquidora, doncs m'ha permès resoldre molts dubtes i sospites sobre què passa si anem més enllà del TLC clàssic amb el qual es treballa a diverses assignatures del grau. A més a més, aquesta també ha sigut la meva primera experiència redactant un text científic d'aquest tipus de manera formal, amb tota la feina que comporta, ja sigui fer recerca, entendre i demostrar resultats desconeguts i estructurar els resultats que hi van apareixent.

Referències

[1] Alabert, A.; *Mesura i probabilitat.* Departament de Matemàtiques. Universitat Autònoma de Barcelona (UAB), Bellaterra (Barcelona), 2002.

[2] Alvarado, H.; Batanero, C.: El Significado del Teorema Central Del Límite: Evolución Histórica a partir de sus Campos de Problemas. ***https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Articulo%20TFS.pdf***, 2015.

[3] Chen, L.H.Y et al.: *Normal Approximation by Stein's Method.* Probability and Its Applications. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2011.

[4] Chow, Y.S.; Teicher, H.: *Probability Theory: Independence, Interchangeability, Martingales. 3rd edition.* Springer Texts in Statistics. Springer-Verlag, New York, 2003.

[5] Chung, K.L: *A course in probability theory. Second edition.* Probability and Mathematical Statistics. Academic Press, INC., New York, 1974.

[6] Goldstein, L.: A Probabilistic Proof of the Lindeberg-Feller Central Limit Theorem. ***https://dornsife.usc.edu/assets/sites/1193/docs/lin.pdf***. Department of Mathematics. University of Southern California, Los Angeles.

[7] Nualart, D.; Sanz-Solé, M.: *Curs de probabilitats.* Facultat de Matemàtiques. Universitat de Barcelona (UB), Barcelona, 1990.

[8] Rosenberg, D.S.: Lecture 10: Setup for the Central Limit Theorem. ***https://www.stat.berkeley.edu/users/pitman/s205f02/lecture10.pdf***.