Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Cadenes de Markov a temps discret i la seva simulació

Autor: Xènia Castellà Camps

Director: Dra. Carme Florit Selma

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 13 de juny de 2022

Abstract

Markov chains are stochastic processes characterized by the fact that the outcome in a given state depends only on the previous state. In this work we will study this notion assuming time is discrete, as well as the properties that derive from it and how they can be classified in an environment where time does not intervene in its evolution. Finally, we will analyze a specific case, along with simulations on R and C.

Resum

Les cadenes de Markov són processos estocàstics que es caracteritzen pel fet que el resultat en un estat determinat depèn únicament de l'anterior. En aquest treball estudiarem en temps discret les seves nocions, així com les propietats que se'n deriven i com es poden classificar en un entorn on el temps no intervé en la seva evolució. Finalment, analitzarem un cas concret, juntament amb simulacions de R i C.

2020 Mathematics Subject Classification. 60G05, 60G07, 60J10, 60G50

Agraïments

Vull agrair a la Dra. Carme Florit per tot moment donar-me suport en totes les fases d'aquest treball, adaptant-se a les adversitats tant acadèmiques com personals, i encoratjar-me que aprengués sobre aquest tema i així poder ser jo qui trobés el fil que havia de seguir per fer-me propi aquest estudi.

Índex

1 Introducció **1**

2 Preliminars **3**

3 Cadenes de Markov **6**

3.1 Conceptes bàsics 6

3.2 Equació de Chapman-Kolmogorov 7

4 Classificació dels estats **11**

4.1 Estats transitoris i recurrents 12

4.2 Cadenes periòdiques 14

5 Temps d'absorció i probabilitat d'absorció **16**

6 Propietat forta de Markov **20**

7 Passejada aleatòria a $\mathbb{Z}$ **25**

7.1 Simulació: ruïna del jugador 29

8 Conclusions **34**

A Codi **35**

1 Introducció

El projecte

La resposta a la pregunta de si *"la probabilitat que demà plogui depèn únicament del temps que ha fet avui"* que *Andrei Markov* donaria seria afirmativa i afegiria que els altres estats anteriors no intervenen.

Andrei Andréievitx Markov fou un matemàtic rus conegut en les àrees de teoria de nombres, anàlisi matemàtic i teoria de la probabilitat. L'any 1906 va publicar l'article *Extension of the law of large numbers to dependent quantities*, on per primer cop es van introduir conceptes del que vint anys més tard, el matemàtic *Felix Bernstein* acabaria donant-hi el nom de *cadenes de Markov*.

Aquesta eina computacional que destaca pel fet que actualment es pot trobar aplicada en diferents camps va sorgir de l'afició que tenia *Markov* amb la poesia. Va començar a analitzar els patrons vocàlics i consonàntics dels versos, on es va adonar que existien successos enllaçats. Així va acabar creant una nova branca dins de la teoria de la probabilitat.

El treball que trobarem a continuació tracta sobre les cadenes de Markov a temps discret sense que el temps afecti les seves evolucions. Són interessants perquè aquest tipus de processos s'anomenen "sense memòria", és a dir, la probabilitat que una situació ocorri només depèn de l'esdeveniment que hi ha hagut just anteriorment. El nostre objecte d'estudi és la teoria que engloba aquest procés. Per tant, en aquest treball considerarem les definicions pertinents per poder entendre en quin entorn ens trobem i el desenvolupament per comprendre i analitzar més detalladament les cadenes de Markov. També ens ajudarem de simulacions per englobar els coneixements obtinguts al llarg de la memòria i veure'ls des d'una altra perspectiva.

És d'important esment que amb aquest treball es vol aconseguir que es tingui una idea clara i bàsica del que són les cadenes de Markov sota les condicions ja mencionades, ja que a partir d'aquests coneixements es pot aprofundir seguint altres línies de recerca que aquest treball no cobreix. Com poden ser la cadena de Markov a temps continu, d'ordre superior o bé la seva convergència.

Estructura de la Memòria

El treball que segueix a continuació s'estructura tal com s'explica seguidament.

Primer de tot hi ha la secció *preliminars* dedicada a posar-nos en context, és a dir, s'introdueix la base de la qual es desenvolupa el tema. També s'estableixen resultats i definicions de la teoria de probabilitats bàsica que cal tenir en consideració. Seguidament, comencem a introduir-nos al que serà d'ara endavant el nostre tema principal, les cadenes de Markov. S'inicia amb conceptes que es relacionen amb els vistos a la secció anterior amb l'objectiu de poder crear una base general de tot el que seguirà posteriorment. S'hi descriu de manera explícita l'entorn on treballarem en el transcurs del treball.

Un cop les nocions bàsiques estan establertes i s'han vist amb exemples, passarem a estudiar les cadenes de Markov a partir de la classificació dels estats. En aquesta secció trobarem conceptes que a partir de les seves propietats es poden relacionar. Tanmateix, seran imprescindibles per seccions posteriors.

El capítol *temps d'absorció i probabilitat d'absorció* ve generat per fer un pas endavant en l'estudi de classificació dels estats d'aquests processos. La pregunta que resoldrem és com trobar la probabilitat que una cadena sigui absorbida per un estat i el temps mig que tardarà a ser absorbida.

La darrera secció destinada en aprofundir en la teoria que envolta les cadenes de Markov se centra en la *propietat forta de Markov* i les propietats dels estats recurrents i transitoris que en deriven per poder definir-ne de diferents de les ja vistes anteriorment.

Per últim, trobarem un exemple comú de cadenes de Markov, la *passejada aleatòria a* $\mathbb{Z}$, que ens permetrà aplicar els conceptes vistos al llarg del treball. A més, a partir d'aquest exemple, s'inclou l'ús de la llibreria *markovchain* de R que implementa funcions que a partir d'una cadena prèviament definida, analitzen conceptes teòrics i fan simulacions. Per finalitzar, s'adjunta un programa amb C per resoldre probabilitats i temps mig d'absorció d'una cadena en concret.

2 Preliminars

Abans de començar a introduir conceptes de la teoria de les cadenes de Markov, cal fer un esment a certes nocions de la teoria de probabilitats que ens proporcionaran eines bàsiques i ens ajudaran a posar en context tot el que segueix posteriorment. Més endavant es puntualitzaran aquestes nocions dins del marc de treball per definir la teoria de les cadenes de Markov.

Definició 2.1. *Un **espai de probailitat** és una terna* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *on*

i. Ω *és l'**espai mostral**, és a dir, un conjunt que correspon al dels possibles resultats de l'experiment.*

ii. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ *és una* σ-***àlgebra****, i per tant, se satisfà:*

1) $\Omega \in \mathcal{A}$

2) $\mathcal{A}$ *és estable per pas al complementari, és a dir, si* $A \in \mathcal{A}$ *aleshores* $A^c \in \mathcal{A}$

3) $\mathcal{A}$ *és estable per reunions finites o numerables, és a dir, si* $\{A_i, i \geq 1\} \subseteq \mathcal{A}$ *aleshores* $\bigcup\limits_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A}$.

iii. $\mathbb{P} : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ *és una aplicaicó anomenada **probabilitat** tal que:*

1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

2) σ*-additivitat: si* $\{A_i, i \geq 1\}$ *és una successió de conjunts de* $\mathcal{A}$ *disjunts dos a dos tal que* $\bigcup\limits_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A}$ *aleshores*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\mathcal{A}_i) \tag{2.1}$$

D'ara en davant donarem per suposat que estem treballant sobre un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Definició 2.2. *Siguin* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *i* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{Q})$ *espais de probabilitat, on* $\mathcal{B}$ *és la* σ*-àlgebra de Borel generada pels oberts de* $\mathbb{R}$. *Diem que una **variable aleatòria*** X *és una aplicació*

$$\begin{array}{rccc} X\colon & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & w & \longmapsto & X(w) \end{array}$$

tal que

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{B} \tag{2.2}$$

A cada variable aleatòria li associem una probabilitat designada per

$$p_i = \mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(\{w\colon X(w) = i\}) \tag{2.3}$$

on p_i és una **distribució**, és a dir, $\sum_{i \in I} p_i = 1$ i $p_i \in [0, 1]$, per a tot $i \in \mathbb{R}$.

Definició 2.3. *Un **procés estocàstic** és una família* $\{X_t\colon t \in \mathbb{T}\}$ *de variables aleatòries que per cada* $t \in \mathbb{T}$,

$$\begin{array}{rccc} X_t\colon & \Omega & \longrightarrow & I \\ & w & \longmapsto & X_t(w) \end{array}$$

Observació 2.4. Notem que els processos estocàstics poden ser a temps discret o a temps continu.
En el cas de temps discret, prenem $\mathbb{T} = \{0, 1, ..., N\}$ per a un cert $N \in \mathbb{N}$ fixat o bé $\mathbb{T} = \mathbb{N}$. En el cas de temps continu, prenem $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$.

Els següents enunciats són eines que en el llarg de la memòria s'han de tenir en consideració, ja que en alguna demostració en fem ús.

Proposició 2.5. *(Probabilitat condicionada) La probabilitat d'un conjunt $A \in \mathcal{A}$ condicionada per un conjunt $B \in \mathcal{A}$ és*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Proposició 2.6. *(Fórmula de les probabilitats compostes) Siguin $A_1, ..., A_n$ elements de $\mathcal{A}$ tals que $\mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) > 0$, aleshores*

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap ... \cap A_{n-1})$$

Demostració. Fem la prova per inducció i fent ús de la definició de probabilit condicionada. Pel cas inicial $n = 2$ tenim que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)$. Suposem que la fórmula és certa per a $n - 1$,

$$\mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(A_{n-1}|A_1 \cap ... \cap A_{n-2})$$

Aplicant la hipòtesi d'inducció obtenim

$$\mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_{n-1} \cap A_n) = \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) \cdot \mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) = \mathbb{P}(A_1) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap ... \cap A_{n-1})$$

□

Proposició 2.7. *(Fórmula de Bayes) Considerem dues particions de l'espai mostral Ω, $\mathcal{P}_1 = \{A_1, ..., A_n\}$ i $\mathcal{P}_2 = \{B_1, ..., B_m\}$, donades per conjunts de $\mathcal{A}$ de probabilitat no nul·la. Calculem la probabilitat dels conjunts A_i condicionats pels B_j, per a tot $i = 1, ..., n$ i $j = 1, ..., m$ amb l'ajuda de la definició de probabilitat condicionada.*

$$\mathbb{P}(A_i|B_j) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B_j|A_i)}{\mathbb{P}(B_j)} = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B_j|A_i)}{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_j|A_k)\mathbb{P}(A_k)}$$

Teorema 2.8. *(Probabilitats totals) Considerem un espai de probabilitats $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ i sigui una partició finita o infinita numerable d'esdeveniments $A_1, ..., A_n, ...$ de Ω amb probabilitat no nul·la tal que*

1) $\Omega = \bigcup_{n \geq 1} A_n$

2) $A_n \in \mathcal{A}$, *per a tot* n

3) si $n \neq m$, $A_n \cap A_m = \emptyset$.

4) $\mathbb{P}(A_n) > 0$, *per a tot* n

Aleshores,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(B|A_n)\mathbb{P}(A_n)$$

per qualsevol esdeveniment B.

Demostració.

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap \Omega) = \mathbb{P}(B \cap (\bigcup_{n \geq 1} A_n)) = \mathbb{P}(\bigcup_{n \geq 1} (B \cap A_n)) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(B \cap A_n) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(B|An)\mathbb{P}(A_n)$$

$\square$

3 Cadenes de Markov

En aquesta secció introduirem les cadenes de Markov definint els conceptes essencials, així com les propietats. Sobreentendrem al llarg del treball que les cadenes de Markov estaran definides en temps discret i un cop s'hagin definit les cadenes de Markov homogènies, les considerem així.

3.1 Conceptes bàsics

A la secció anterior hem descrit p_i la probabilitat d'una variable aleatòria com una distribució per a tot $i \in \mathbb{R}$. D'ara endavant restringirem l'espai $\mathbb{R}$ pel conjunt numerable $I \subseteq \mathbb{R}$ que prendrà el nom d'**espai d'estats** i cada $i \in I$ li'n direm **estat**.

Definició 3.1. *Anomenem* ***probabilitat de transició*** *a l'element $p_{ij}(n,m)$ que denota la probabilitat quan el procés en el temps m està a l'estat j si en el temps n el procés estava a l'estat i, és a dir,*

$$p_{ij}(n,m) = P(X_m = j | X_n = i), \forall i,j \in I, n,m \in \mathbb{T} \tag{3.1}$$

Definició 3.2. *Diem que una matriu $P = (p_{ij} \colon i,j \in I)$ és de* ***transició (estocàstica,*** *de* ***probabilitat,*** *de* ***substitució*** *o de* ***Markov)*** *si satisfà:*

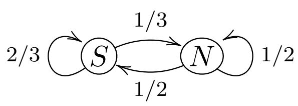
1) *$p_{ij} \in [0,1]$, per a tot $i,j \in I$.*

2) *$\sum_{j\in I} p_{ij} = 1$, per a tot $i \in I$.*

A continuació veiem un exemple d'una cadena Markov on també introduïm els diagrames que les descriuen. Cada diagrama i matriu de transició estan en correspondència bijectiva, és a dir, hi ha un únic diagrama per una única matriu de transició.

Exemple 3.3. (Predicció del temps) Considerem el temps d'una localització. Si més de la meitat del dia fa sol, ho denotem per S, i si no ho està és que està ennuvolat, N. Sabem que si un dia està ennuvolat, que el següent dia també ho estigui és igual de probable. Si el dia és assoleiat, hi ha una probabilitat de $\frac{2}{3}$ que el següent dia també ho sigui. La matriu de transició i el diagrama de la matriu són els següents

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$



(3.3)

Veiem ara la definició de cadena de Markov homogènia, que són les que tractarem en el llarg d'aquest treball. Es caracteritzen en què en cada instant de temps, les probabilitats de transició es mantenen constants i en conseqüència, aquestes probabilitats no depenen del temps.

Definició 3.4. *Diem que $\{X_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ és una* ***cadena de Markov homogènia*** *amb distribució inicial λ i matriu de transició P si per $n \in \mathbb{N}$ i $i_0, ..., i_{n+1} \in I$,* *1)* $\mathbb{P}(X_0 = i_0) = \lambda_{i_0}$.

2) $\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, ..., X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}$.

on p_{ij} *denota* $p_{ij}(n, n+1)$. *Sovint fem servir la notació* ***Markov(λ, P)***.

Observació 3.5. La propietat que se satisfà a 2) se'n diu **propietat de Markov**, la qual denota que la probabilitat del pròxim succés només depèn del succés previ. Per tant, les cadenes de Markov són un procés "sense memòria".

Observació 3.6. Les probabilitats de transició p_{ij} se'n diuen **estacionàries** perquè les probabilitats no canvien amb el temps.

Amb el següent resultat podrem definir si un procés estocàstic és una cadena de Markov.

Teorema 3.7. *Un procés aleatori a temps discret* $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ *és Markov(λ, P) si i només si,*

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, ..., X_n = i_n) = \lambda_{i_0} \cdot p_{i_0 i_1} \cdot ... \cdot p_{i_{n-1} i_n} \tag{3.4}$$

per a tot $i_0, ..., i_n \in I$.

Demostració. $\Longrightarrow$) Suposem que $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ és Markov(λ, P) llavors pel teorema de les probabilitats compostes obtenim

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, ..., X_n = i_n) = \mathbb{P}(X_0 = i_0) \cdot \mathbb{P}(X_1 = i_1, ..., X_n = i_n | X_0 = i_0)$$

$$= \mathbb{P}(X_0 = i_0) \cdot \mathbb{P}(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(X_n = i_n | X_0 = i_0, ..., X_{n-1} = i_{n-1})$$

$$= \lambda_{i_0} \cdot p_{i_0 i_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdot ... \cdot p_{i_{n-1} i_n}$$

$\Longleftarrow$)Recíprocament, suposem que se satisfà (3.4) per a tot $i_0, ..., i_n \in I$. A més, usant $\sum_{j \in I} p_{ij} = 1$ per a tot $i, j \in I$ obtenim:

Pel cas inicial tenim que quan $n = 0$, $\mathbb{P}(X_0 = i_0) = \lambda_{i_0}$, per tant es compleix la primera condició de la definició de cadena de Markov.
Vegem la segona condició aplicant el teorema de Bayes

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i = 0, ..., X_n = i_n) = \frac{\mathbb{P}(X_0 = i_0, ..., X_n = i_n, X_{n+1} = i_{n+1})}{\mathbb{P}(X_0 = i_0, ..., X_n = i_n)}$$

$$= \frac{\lambda_{i_0} \cdot p_{i_0 i_1} \cdot ... \cdot p_{i_n i_{n+1}}}{\lambda_{i_0} \cdot p_{i_0 i_1} \cdot ... \cdot p_{i_{n-1} i_n}} = p_{i_n i_{n+1}}$$

Per tant, $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ compleix les dues condicions d'una cadena de Markov i en conseqüència és Markov(λ, P). $\square$

3.2 Equació de Chapman-Kolmogorov

Fins ara havíem definit les cadenes de Markov homogènies a partir de les probabilitats de transició p_{ij}, les quals les podríem definir amb un sol pas, ja que es va d'un estat a l'estat immediat següent. En aquesta secció ens centrem en com conèixer la probabilitat que la cadena estigui en un estat determinat si les probabilitas es mantenen constants desprès de m passos.

Definició 3.8. *Sigui* $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ *una cadena de Markov(*λ*, P). Definim la* ***probabilitat de transició en m passos*** *com*

$$p_{ij}^{(m)} = \mathbb{P}(X_{n+m} = j | X_n = i)$$

per a tot $n, m \in \mathbb{T}$ *i per a tot* $i, j \in I$*. En particular, podem escriure*

$$p_{ij}^{(m)} = \mathbb{P}(X_m = j | X_0 = i)$$

Observació 3.9. Notem que la notació p_{ij} equival a $p_{ij}^{(1)}$.

Seguint amb la definició de matriu de transició, també podem usar-la per representar les probabilitats de transició en m passos com

$$P^{(m)} = (p_{ij}^{(m)} : i, j \in I) = \begin{pmatrix} p_{00}^{(m)} & p_{01}^{(m)} & \dots & p_{0n}^{(m)} \\ p_{10}^{(m)} & p_{11}^{(m)} & \dots & p_{1n}^{(m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n0}^{(m)} & p_{n1}^{(m)} & \dots & p_{nn}^{(m)} \end{pmatrix}$$

Proposició 3.10. *Siguin* $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ *una cadena de Markov(*λ*, P) i* $P^{(m)}$ *la matriu de transició en m passos. Aleshores,* $P^{(m)} = \overbrace{P \cdot \dots \cdot P}^{m} = P^m$ *i* $\lambda^{(m)} = \lambda P^m$.

Demostració. Provem el resultat per inducció. Primer considerem el cas inicial $m = 1$, com que per a tot $i, j \in I$ $p_{ij} = p_{ij}^{(1)}$, tenim que $P^{(1)} = P = P^1$. Ara apliquem la hipòtesi d'inducció a $m + 1$. Suposem el resultat cert per m, llavors es compleix $P^{(m)} = P^m$ i també que $p_{ij}^{(m)} = P(X_{n+m} = j | X_n = i)$. Veiem que,

$$p_{ij}^{(m+1)} = P(X_{n+m+1} = j | X_n = i) = \sum_{k \in I} P(X_{n+m} = k, X_{n+m+1} = j | X_n = i)$$

$$= \sum_{k \in I} P(X_{n+m} = k | X_n = i) P(X_{n+m+1} = j | X_{n+m} = k) = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(m)} p_{kj}$$

Per tant, se satisfà que $P^{(m+1)} = P^{(m)} \cdot P = P^m \cdot P = P^{m+1}$, tal com volíem provar. Un cop provat l'anterior igualtat, veiem que

$$\lambda_j^{(m)} = \mathbb{P}(X_{n+m} = j) = \sum_{k \in I} \mathbb{P}(X_m = j | X_0 = k) \mathbb{P}(X_0 = k) = \sum_{k \in I} \lambda_k p_{kj}^{(m)}$$

D'aquí obtenim directament que $\lambda^{(m)} = \lambda P^m$. □

El següent resultat serà una eina efectiva per poder calcular les probabilitats de transició en m passos:

Proposició 3.11. *(Equació de Chapman-Kolmogorov) Sigui* $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ *una cadena de Markov i P la matriu de transició. Aleshores es compleix,*

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)} \tag{3.5}$$

per a tot $i, j \in I$ *i n,m* $\in \mathbb{T}$.

Demostració. Veiem que es compleix la igualtat a partir de les definicions i la propietat de les probabilitats compostes per a tot $i, j \in I$ i $n, m \in \mathbb{T}$.

$$p_{ij}^{(n+m)} = \mathbb{P}(X_{n+m} = j | X_0 = i) = \sum_{k \in I} \mathbb{P}(X_{n+m} = j, X_n = k | X_0 = i)$$

$$= \sum_{k \in I} \mathbb{P}(X_{n+m} = j | X_n = k, X_0 = i) \mathbb{P}(X_n = k | X_0 = i)$$

$$= \sum_{k \in I} \mathbb{P}(X_{n+m} = j | X_n = k) \mathbb{P}(X_n = k | X_0 = i) = \sum_{k \in I} p_{kj}^{(m)} p_{ik}^{(n)} = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$$

. □

Hem vist que per obtenir la matriu $P^{(m)}$, sigui m un nombre finit de passos, es pot calcular a partir de successives multiplicacions de la matriu de transició P. Una altra manera de calcular-la és utilitzant la forma canònica de Jordan de la matriu P, on factoritzem la matriu P a partir de la seva forma de Jordan J, trobem els valors propis i la matriu dels vectors propis A. D'aquesta manera la matriu P pren la forma següent $P = AJA^{-1}$ i $P^m = \overbrace{(AJA^{-1}) \cdot ... \cdot (AJA^{-1})}^{m} = AJ^mA^{-1}$. Veiem-ne un exemple:

Exemple 3.12. Sigui una asseguradora de la llar que ha determinat segons els registres anteriors que la probabilitat que una llar presenti algun comunicat durant un any és del 20% si l'any anterior no en va presentar cap. Mentre que la probabilitat de presentar-ne un és del 15%, si l'any anterior ja n'havia fet. Si considerem que les probabilitats es mantenen al llarg dels anys, llavors tenim una cadena de Markov que es representa de la forma següent:

X_n = "actuació d'una llar durant l'any n, per a tot $n \in \mathbb{T}$", l'espai d'estat és $I = \{D, ND\}$, on D = "*la llar presenta un comunicat*" i ND = "*la llar no presenta un comunicat*". Llavors la matriu de transició és

$$P = \begin{pmatrix} 0.05 & 0.95 \\ 0.20 & 0.80 \end{pmatrix}$$

Per trobar la probabilitat que una llar que ha presentat algun comunicat durant l'any en curs no en presenti cap d'aquí m anys, necessitem calcular la matriu de transició en m passos i ho farem a través de la forma canònica de Jordan. Tenim,

$$p_{D,ND}^{(m)} = \mathbb{P}(X_m = ND | X_0 = D)$$

Calculem els valors propis i els vectors propis de P:

$$|P - \lambda Id| = \begin{vmatrix} 0.05 - \lambda & 0.95 \\ 0.20 & 0.80 - \lambda \end{vmatrix} = (0.05 - \lambda) \cdot (0.80 - \lambda) - 0.19 = 0$$

Obtenim dos valors propis, $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -0.15$. Per tant, la matriu diagonal és

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.15 \end{pmatrix}$$

Obtenim els vectors propis de cada valor propi:

Per $\lambda_1 = 1$, $P - \lambda_1 Id = \begin{pmatrix} -0.95 & 0.95 \\ 0.20 & -0.20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, aleshores $x - y = 0$ i $v_1 = (1, 1)$. Per $\lambda_2 = -0.15$, $P - \lambda_2 Id = \begin{pmatrix} 0.20 & 0.95 \\ 0.20 & 0.95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, aleshores $0.20x + 0.95y = 0$ i $v_2 = (19, -4)$.

Per tant, la matriu dels vectors propis és

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 19 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

i el seu determinant és -23. Llavors, la matriu inversa de A és

$$A^{-1} = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 4 & 19 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

i obtenim

$$P = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 1 & 19 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 19 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^m = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 1 & 19 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^m & 0 \\ 0 & -0.15^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 19 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 4 + 19(-0.15)^m & 19 - 19(-0.15)^m \\ 4 - 4(-0.15)^m & 19 + 4(-0.15)^m \end{pmatrix}$$

D'aquí podem treure $p_{D,ND}^{(m)} = \frac{1}{23}(19 - 19(-0.15)^m)$. D'aquest exemple també podem estudiar el comportament del procés a llarg termini:

$$\lim_{m\to\infty} P^m = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 4 + 19(-0.15)^m & 19 - 19(-0.15)^m \\ 4 - 4(-0.15)^m & 19 + 4(-0.15)^m \end{pmatrix} = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 4 & 19 \\ 4 & 19 \end{pmatrix}$$

4 Classifiació dels estats

Les propietats a llarg termini d'una cadena de Markov depenen en certa mesura de les característiques dels seus estats i de la matriu de transició. La classificació dels seus estats es basa en si és possible anar d'un estat a un altre independentment del nombre de passos entremitjos. Per tant, definir els diferents estats de la cadena de Markov i els diferents tipus de cadenes ajuda a poder desglossar la cadena i poder-ne fer un estudi més específic.

Definició 4.1. *Siguin i, j dos estats de l'espai d'estats I. Diem que l'estat j és* ***accessible*** *des de l'estat i si*

$$p_{ij}^{(m)} > 0 \text{ per algun } m \in \mathbb{T}$$

i escriurem $i \to j$.

Definició 4.2. *Diem que dos estats i i j de l'espai d'estats I es* ***comuniquen****, i escriurem $i \leftrightarrow j$, si i és accessible desde j i j és accessible des de i. És a dir,*

$$i \leftrightarrow j \iff i \to j \text{ i } j \to i.$$

Proposició 4.3. *La relació $\leftrightarrow$ és una relació d'equivalència sobre l'espai d'estats I.*

Demostració. Per tal que $\leftrightarrow$ sigui relació d'equivalència ha de satisfer les propietats reflexiva, simètrica i transitiva.

1) Reflexiva: si $i \leftrightarrow i$ per a tot $i \in I$ llavors tenim que $p_{ii}^{(0)} = P(X_0 = i | X_0 = i) = 1 > 0$. Per tant, $i \leftrightarrow i$.

2) Simètrica: suposem que se satisfà $i \leftrightarrow j$, per tant, per alguns $n, m \in \mathbb{T}$ tenim que $p_{ij}^{(n)} > 0$ i $p_{ji}^{(m)} > 0$. En conseqüència, obtenim $j \leftrightarrow i$.

3) Transitiva: siguin estats $i, k, j \in I$, si $i \leftrightarrow k$ i $k \leftrightarrow j$, aleshores $i \leftrightarrow j$.
Suposem que $i \leftrightarrow k$ llavors existeixen $n, m \in \mathbb{T}$ tal que $p_{ik}^{(n)} > 0$ i $p_{ki}^{(m)} > 0$. Per la relació $k \leftrightarrow j$, existeixen $n', m' \in \mathbb{T}$ tal que $p_{kj}^{(n')} > 0$ i $p_{jk}^{(m')} > 0$. Utilitzant l'equació de Chapman-Kolmogorov,

$$p_{ij}^{(n+n')} = \sum_{l \in I} p_{il}^{(n)} p_{lj}^{(n')} \geq p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(n')} > 0$$
$$p_{ji}^{(m+m')} = \sum_{l \in I} p_{jl}^{(m')} p_{li}^{(m)} \geq p_{jk}^{(m')} p_{ki}^{(m)} > 0$$

□

Definició 4.4. *A partir de la relació d'equivalència definim la* ***classe de comunicació*** *d'un estat com el conjunt de tots els estats que comuniquen amb ell. És a dir,*

$$C(i) = \{j \in I \colon i \leftrightarrow j\}, \forall i \in I$$

Definició 4.5. *Una cadena de Markov és* ***irreductible*** *si existeix una única classe. Per tant, tots els estats es comuniquen entre ells. En cas contrari rep el nom de* ***reductible****.*

La unió de totes les classes d'equivalència formen l'espai d'estats I. Les classes de comunicació es poden classificar segons si es pot sortir d'una classe i arribar a una altra.

Definició 4.6. *Una classe de comunicació $C \subseteq I$ és* ***tancada*** *si*

$$p_{ij}^{(m)} = 0,\ \forall i \in C, \forall j \notin C, \forall m \in \mathbb{T}$$

o equivalentment,

$$\sum_{j \in C} p_{ij} = 1, \forall i \in C$$

Dit d'una altra manera, si un cop la cadena entra dins d'aquesta classe, no en pot sortir. Si no compleix aquesta condició, li'n diem ***no tancada****, és a dir, de tots els estats de C és possible arribar en una altra classe de comunicació. Formalment,*

$$\exists i \in C, \exists j \notin C \colon p_{ij}^{(m)} > 0 \Leftrightarrow \exists i \in C \colon \sum_{j \in C} p_{ij}^{(m)} < 1, \textit{per a tot } m \in \mathbb{T}$$

4.1 Estats transitoris i recurrents

Les següents definicions fan referència a la classificació dels estats segons si la cadena retorna o no a l'estat de sortida.

Definició 4.7. *Siguin $\{X_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ una cadena de Markov(λ, P) i un estat $i \in I$. Llavors diem,*

1) *L'estat i és* ***transitori*** *si $\mathbb{P}(X_n = i \textit{ per un número infinit de } n | X_0 = i) = 0$.*

2) *L'estat i és* ***recurrent*** *si $\mathbb{P}(X_n = i \textit{ per un número infinit de } n | X_0 = i) = 1$.*

Dit menys formalment, un estat $i \in I$ és transitori si després que el procés hagi sortit de l'estat, no hi torna, és a dir, $p_{ii}^{(m)} = 0$, per a tot $m \in \mathbb{T}$. Un estat $i \in I$ és recurrent si quan el procés entra en un estat, més endavant hi torna a entrar.

Observació 4.8. Un estat i és transitori si i només si existeix un estat j que és accessible per l'estat i i l'estat i no és accessible des de l'estat j.

Definició 4.9. *Un estat $i \in I$ és* ***absorbent*** *si un cop el procés ha entrat en aquest estat, no en torna a sortir, és a dir, $p_{ii} = 1$. De manera que si un estat i és absorbent, necessàriament ha de ser recurrent i la seva classe és tancada.*

Anem a veure propietats que relacionen els tipus d'estats amb la classe de comunicació.

Proposició 4.10. *Siguin $\{X_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ una cadena de Markov homogènia i $C(i)$ la classe de comunicació de l'estat $i \in I$. Aleshores,*

1) *Si i és un estat transitori, aleshores $C(i) = \emptyset$.*

2) *Si i és un estat absorbent, aleshores $C(i) = \{i\}$.*

3) *Si $C(i) \neq \emptyset$, aleshores almenys conté l'estat i.*

4) *Si dos estats són diferents, aleshores les seves classes són disjuntes o bé són iguales.*

Demostració. 1) Sigui l'estat i transitori, de manera que per a tot $i \in I$, $p_{ii}^{(m)} = 0$ per a tot $m \in \mathbb{T}$. Suposem que $C(i) \neq \emptyset$. Per tant, existeix un estat $j \in I$ que pertany a $C(i)$. Llavors $i \leftrightarrow j$ que per definició $i \to j$ i $j \to i$. Com que la relació de la classe comunicant és transitiva, $i \leftrightarrow i$. Arribem a contradicció, ja que aquest mateix estat és transitori i per tant, no s'hi pot accedir des de cap estat.

2) Sigui que l'estat i és abosrbent, per tant $p_{ii} = 1$. Suposem que existeix un estat j diferent de l'estat i tal que pertany a C(i). Llavors $i \leftrightarrow j$ i existeix $m \in \mathbb{T}$ tal que $p_{ij}^{(m)} > 0$. Per l'equació de Chapman-Kolmogorov i que per a tot $k \neq i$, $p_{ik} = 0$ al ser i estat absorbent, obtenim

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_{k \in I} p_{ik} p_{kj}^{(m-1)} = p_{ii} p_{ij}^{(m-1)} = p_{ij}^{(m-1)}$$

Aplicat el procediment reiteradament,

$$p_{ij}^{(m)} = p_{ij}^{(m-1)} = ... = p_{ij} = 0$$

Llavors arribem a contradicció, ja que hem suposat que existeix un estat j diferent de l'estat i absorbent. Per tant, $C(i) = \{i\}$.

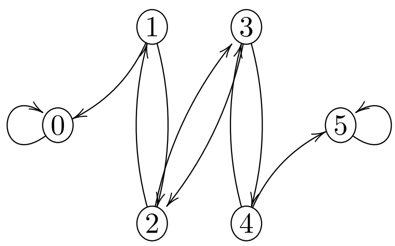
3) Suposem que $C(i) \neq \emptyset$ i per això existeix un estat j que hi pertany. Per tant, $i \leftrightarrow j$ que per definició $i \to j$ i $j \to i$ i per satisfer la relació transitiva, $i \leftrightarrow i$. D'aquesta manera hem provat que $i \in C(i)$.

4) Considerem dos estats diferents $i, j \in I$. Suposem que $C(i) \cap C(j) \neq \emptyset$. Llavors existeix un estat $k \in I$ tal que $k \in C(i) \cap C(j)$ i per tant $k \in C(i)$ i $k \in C(j)$. Aleshores, $k \leftrightarrow i$ i $k \leftrightarrow j$ i en conseqüència, $i \leftrightarrow j$. Així que $j \in C(i)$ i la seva classe de comunicació $C(j) \subseteq C(i)$ perquè tots els estats que comuniquen amb l'estat j també comuniquen amb l'estat i. Pel mateix raonament obtenim que $C(i) \subseteq C(j)$. Per tant, $C(i) = C(j)$. Així que dues classes d'estats diferents o bé són disjuntes o bé en el cas que no ho siguin, han de ser idèntiques.

$\square$

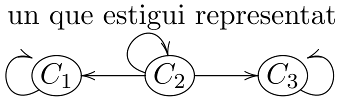
Veiem un exemple a partir d'un diagrama que representa una cadena de Markov per classificar els estats.

Exemple 4.11. Considerem el diagrama següent



(4.1)

del qual podem veure les relacions que hi ha d'accessibilitat i comunicació entre els estats. Per exemple, veiem que en un sol pas, els estats 0 i 5 són absorbents, l'estat 0 és accessible per l'1 ($1 \to 0$) i 1 i 2 es comuniquen ($1 \leftrightarrow 2$). Els estats 1 i 4 ($1 \leftrightarrow 4$) es comuniquen però amb tres passos. Llavors podem analitzar quines classes de comunicació formen l'espai d'estats. En tenim tres:
$C_1 = C(0) = \{0\}$, $C_2 = C(1) = \{1, 2, 3, 4\} = C(2) = C(3) = C(4)$ i $C_3 = C(5) = \{5\}$.
A més, veiem que la cadena no és irreductible per tenir més d'una classe. Podem reformular el diagrama anterior per un que estigui representat per les classes de comunicació:



(4.2)

Aquest diagrama ens permet caracteritzar que les classes C_1 i C_3 són tancades i en canvi, C_2 és no tancada pel fet que les altres dues classes són accessibles des d'ella.

4.2 Cadenes periòdiques

Hem vist que l'espai d'estats es pot descompondre amb classes de comunicació a partir del comportament dels seus estats. Ara veurem que a través d'aquestes característiques que podrem determinar com evolucionen aquests estats veient la periodicitat de les transicions.

Definició 4.12. *Definim el* ***període*** *d'un estat com l'enter d $(d > 1)$ màxim comú divisor que satisfà $p_{ii}^{(m)} > 0$ per a tot $m = kd, k \in \mathbb{Z}^+$. Dit d'una altra manera,*

$$m.c.d.\{m \geq 1 \colon p_{ii}^{(m)} > 0\}$$

i escrivim d(i).

Definició 4.13. *Un estat i és* ***periòdic*** *si $d(i) > 1$. Altrament, un estat i és* ***aperiòdic*** *si $d(i) = 1$, és a dir, si donats dos temps consecutius, s i $s+1$, el procès es troba a l'estat i tant en s com en $s+1$, amb $s \in \mathbb{N}$.*

Direm que una cadena de Markov és aperiòdica si tots els seus estats són aperiòdics.

Podem aplicar aquest concepte a l'exemple (4.11) on d(5)=1 o bé d(1)=6. Notem que d(4) també és 6, igual com l'estat 1, que prèviament hem vist que estan comunicats. Tanmateix, els següents resultats donen caracteritzacions sobre la periodicitat i les classes de comunicació.

Proposició 4.14. *Siguin $\{X_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ una cadena de Markov i estats $i, j \in C(i)$, aleshores $d(i) = d(j)$.*

Demostració. Considerem $i, j \in C(i)$ i veurem que $d(i) = d(j)$ si $d(i)|d(j)$ i $d(j)|d(i)$. Tenim que $i \leftrightarrow j$ i existeixen $n, m \in \mathbb{T}$ tal que $p_{ij}^{(n)} > 0$ i $p_{ji}^{(m)} > 0$. Llavors per l'equació de Chapman-Kolmogorov

$$p_{ii}^{(n+m)} = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(n)} p_{ki}^{(m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(m)} > 0$$

tenim que $d(i)|(n+m)$. A més, sigui $r \in \mathbb{T}$ tal que $p_{jj}^{(r)} > 0$, tenim que

$$p_{ii}^{(n+r+m)} \geq \sum_{k \in I} p_{ik}^{(n)} p_{kk}^{(r)} p_{ki}^{(m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jj}^{(r)} p_{ji}^{(m)} > 0$$

Així que $d(i)|(n+r+m)$ i per tant també $d(i)|r$. Per definició de d(j) tenim que d(i)|d(j). Pel mateix raonament obtenim que d(j)|$d(i)$ i d'aquesta manera ja hem vist el que volíem veure, que el període de i i de j coincideixen. □

Un cop hem vist aquest resultat, podem definir les classes de comunicació de període d de la mateixa manera que ho hem fet pels estats, ja que acabem de veure que els estats d'una mateixa classe de comunicació tenen el mateix període d.

Proposició 4.15. *Siguin $\{X_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ una cadena de Markov i un estat $i \in I$. Si C(i) és una classe de comunicació de període d, aleshores C(i) és tancada.*

Demostració. Considerem que la classe C(i) té període d i és no tancada. Pel fet de ser no tancada tindríem que en algun m $\in \mathbb{T}$, $p_{ij}^{(m)} > 0$, per algun j $\notin C(i)$. Llavors s'hauria de complir que C(j) és tancada pel fet que la cadena no retorni a C(i), però es contradiu amb la suposició que C(i) és periòdica. Per tant, si la classe és periòdica, també ha de ser tancada. □

Definició 4.16. *Anomenem una cadena* ***periòdica*** *si és irreductible i la seva única classe de comunicació és de període d. Si la seva classe no és periòdica, llavors la cadena és* ***aperiòdica****.*

Proposició 4.17. *Sigui* $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ *una cadena de Markov irreductible, si existeix un estat* $i \in I$ *tal que* $p_{ii} > 0$*, aleshores* $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ *és aperiòdica.*

Demostració. Suposem que la cadena és irreductible i per tant només existeix una única classe C(i), per a tot $i \in I$. També suposem que $p_{ii} > 0$, així que per a tot $r \in \mathbb{T}$, m.c.d.(1,4)=1. Per definició de període tenim que d(i)=1 i per tant, la cadena és aperiòdica. $\square$

5 Temps d'absorció i probabilitat d'absorció

En aquesta secció ens centrarem en definir la probabilitat que una cadena sigui absorbida per una classe tancada de l'espai d'estats i quin és el temps mig per tal que això passi.

Definició 5.1. *Sigui $\{X_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ una cadena de Markov(λ, P). Definim el **temps d'absorció** d'un subconjunt $A \subseteq I$ com la variable aleatòria*

$$\begin{array}{rccl} H^A\colon & \Omega & \longrightarrow & \{0,1,2,...\} \cup \{\infty\} \\ & w & \longmapsto & H^A(w) = inf\{n \geq 0\colon X_n(w) \in A\} \end{array}$$

És a dir, el temps d'absorció indica el primer cop que la cadena entra en el subconjunt A. Per convenció, definim $H^A = \infty$ si $\{n \geq 0\colon X_n(w) \in A\} = \emptyset$.

Podem donar la probabilitat que la cadena començant des de l'estat i entri al subconjunt A com

$$h_i^A\colon = \mathbb{P}(H^A < \infty | X_0 = i)$$

A partir d'aquest concepte podrem donar la següent definició.

Definició 5.2. *La **probabilitat d'absorció** és la probabilitat $h_i^A\colon = \mathbb{P}(H^A < \infty | X_0 = i)$ si A és una classe tancada.*

A partir d'ara considerem que el subconjunt A és una classe tancada. Notem que si la cadena comença a l'estat i$\in I$ i també pertany a A, llavors el temps d'absorció és $H^A = 0$ i la probabilitat d'absorció és $h_i^A = 1$.

Definició 5.3. *El **temps mig d'absorció** és el temps mitjà per tal que la cadena arribi a A. És a dir,*

$$k_i^A = \mathbb{E}(H^A | X_0 = i) = \sum_{n<\infty} n\mathbb{P}(H^A = n | X_0 = i) + \infty \mathbb{P}(H^A = \infty | X_0 = i)$$

Notem que si l'estat $i \in I$ pertany a A, $k_i^A = 0$.

A continuació veiem un exemple on aquests conceptes s'apliquen.

Exemple 5.4. Sigui el diagrama d'una cadena de Markov

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "1"] & 2 \arrow[l, "1/2"'] \arrow[r, bend left, "1/2"] & 3 \arrow[l, bend left, "1/2"] \arrow[r, "1/2"] & 4 \arrow[loop right, "1"] \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

amb matriu de transició

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

Prenem que l'estat d'inici és el 2 i volem esbrinar la probabilitat d'absorció pel 4 i el temps mig per ser absorbida per 1 o 4. Llavors directament veiem que les probabilitats d'absorció $h_1^{\{4\}} = 0$ i $h_4^{\{4\}} = 1$ i els seus temps mitjos d'absorció són $k_1^{\{1,4\}} = 0$ i $k_4^{\{1,4\}} = 0$, respectivament. Si partim de l'estat 2,

$$h_2^{\{4\}} = \frac{1}{2}h_1^{\{4\}} + \frac{1}{2}h_3^{\{4\}}$$

ja que considerem la situació després d'haver fet un pas, amb probabilitat $\frac{1}{2}$ es trobarà a l'estat 1 i amb probabilitat $\frac{1}{2}$ a l'estat 3. El temps mig d'absorció que li correspon és

$$k_2^{\{1,4\}} = 1 + \frac{1}{2}k_1^{\{1,4\}} + \frac{1}{2}k_3^{\{1,4\}}$$

on l'1 correspon al temps pel primer pas. Pel mateix raonament obtenim,

$$h_3^{\{4\}} = \frac{1}{2}h_2^{\{4\}} + \frac{1}{2}h_4^{\{4\}} \ i \ k_3^{\{1,4\}} = 1 + \frac{1}{2}k_2^{\{1,4\}} + \frac{1}{2}k_4^{\{1,4\}}$$

Fent les respectives substitucions obtenim

$$h_2^{\{4\}} = \frac{1}{2}h_3^{\{4\}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}h_2^{\{4\}} + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow h_2^{\{4\}} = \frac{1}{3}$$

$$k_2^{\{1,4\}} = 1 + \frac{1}{2}k_3^{\{1,4\}} = 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}k_2^{\{1,4\}}\right) \Leftrightarrow k_2^{\{1,4\}} = 2$$

El mateix per l'estat 3 i obtenim $h_3^{\{4\}} = \frac{2}{3}$ i $k_3^{\{1,4\}} = 2$.

Aquest ha sigut un cas senzill on hem pogut calcular les probabilitats d'absorció i els temps mitjos fàcilment, però ens caldran els següents resultats per poder-ho calcular de manera general. Cal tenir en compte que quan diem que $y = \{y_i : i \in I\}$ és una *solució minimal* ens referim si $x = \{x_i : i \in I\}$ és una solució d'un sistema, aleshores $x_i \geq y_i$ per a tot $i \in I$.

D'ara endavant farem servir la notació $h^A = \{h_i^A : i \in I\}$ per referir-nos al vector de les probabilitats d'absorció i $k^A = \{k_i^A : i \in I\}$ pel vector dels temps mitjos d'absorció.

Teorema 5.5. *El vector de les probabilitats d'absorció h^A és la solució minimal no negativa del sistema d'equacions lineals*

$$\begin{cases} h_i^A = 1 & si \ i \in A \\ h_i^A = \sum_{j \in I} p_{ij} h_j^A & si \ i \notin A \end{cases} \tag{5.3}$$

Demostració. Primer de tot veiem que h^A satisfà (5.3). Si $X_0 = i \in A$ llavors com hem vist anteriorment, $H^A = 0$ i la probabilitat d'absorció $h_i^A = 1$, tal com es defineix en el sistema d'equacions lineal. En canvi si $X_0 = i \notin A$, $H^A \geq 1$ i per la propietat de Markov

$$\mathbb{P}(H^A < \infty | X_0 = i, X_1 = j) = \mathbb{P}(H^A < \infty | X_1 = j) = h_j^A$$

Aplicant definicions i probabilitats condicionades obtenim

$$h_i^A = \mathbb{P}(H^A < \infty | X_0 = i) = \sum_{j \in I} \mathbb{P}(H^A, X_1 = j | X_0 = i)$$

$$= \sum_{j \in I} \mathbb{P}(H^A < \infty | X_0 = i, X_1 = j)\mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i) = \sum_{j \in I} h_j^A p_{ij}$$

Tal com volíem veure en el cas que $i \notin A$.
Per acabar la demostració falta provar que h^A és una solució minimal. Suposem que existeix una altra solució no negativa $x = \{x_i : i \in I\}$ de (5.3). Tornem a tenir dos casos. Si $i \in A$, $h_i^A = x_i = 1$ o bé, si $i \notin A$, el qual

$$x_i = \sum_{j \in I} p_{ij} x_j = \sum_{j \in A} p_{ij} x_j + \sum_{j \notin A} p_{ij} x_j = \sum_{j \in A} p_{ij} + \sum_{j \notin A} p_{ij} x_j$$

Substituim x_j pel mateix raonament que acabem d'utilitzar,

$$x_i = \sum_{j\in A} p_{ij} + \sum_{j\notin A} p_{ij} \left(\sum_{k\in A} p_{jk} + \sum_{k\notin A} p_{jk}x_k \right) = \sum_{j\in A} p_{ij} + \sum_{j\notin A}\sum_{k\in A} p_{ij}p_{jk} + \sum_{j\notin A}\sum_{k\notin A} p_{ij}p_{jk}x_k$$

$$= \mathbb{P}(X_1 \in A|X_0 = i) + \mathbb{P}(X_2 \in A, X_1 \notin A|X_0 = i) + \sum_{j\notin A}\sum_{k\notin A} p_{ij}p_{jk}x_k$$

Si apliquem el procediment de substituir x_k reiteradament fins a n passos

$$x_i = \mathbb{P}(X_1 \in A|X_0 = i) + ... + \mathbb{P}(X_n \in A, X_{n-1} \notin A, ..., X_1 \notin A|X_0 = i)$$

$$+ \sum_{j_1\notin A} ... \sum_{j_n\notin A} p_{ij_1}p_{j_1j_2} \cdot ... \cdot p_{j_{n-1}j_n}x_{j_n}$$

$$= \mathbb{P}(H^A \leq n|X_0 = i) + \sum_{j_1\notin A} ... \sum_{j_n\notin A} p_{ij_1}p_{j_1j_2} \cdot ... \cdot p_{j_{n-1}j_n}x_{j_n}$$

on l'última igualtat prové que x_{j_n} és no negativa. Llavors és cert que $x_i \geq \mathbb{P}(H^A \leq n|X_0 = i)$ per a tot n i,

$$x_i \geq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(H^A \leq n|X_0 = i) = \mathbb{P}(H^A < \infty|X_0 = i) = h_i^A$$

Per tant, h^A és el vector de la solució minimal no negativa de (5.3). □

Teorema 5.6. *El vector dels temps mitjos d'absorció k^A és la solució minimal no negativa del sistema d'equacions lineals*

$$\begin{cases} k_i^A = 0 & si\ i \in A \\ k_i^A = 1 + \sum_{j\notin A} p_{ij}k_j^A & si\ i \notin A \end{cases} \tag{5.4}$$

Demostració. Primer de tot veiem que k^A satisfà (5.4). Si $X_0 = i \in A$ llavors com hem vist anteriorment, $H^A = 0$ i el temps mig d'absorció $k_i^A = 0$, tal com es defineix en el sistema d'equacions lineal. En canvi si $X_0 = i \notin A$, $H^A \geq 1$ i per la propietat de Markov

$$\mathbb{E}(H^A|X_0 = i, X_1 = j) = 1 + \mathbb{E}(H^A|X_1 = j) = 1 + k_j^A$$

Aplicant definicions i propietats de l'esperança condicionada obtenim

$$k_i^A = \mathbb{E}(H^A|X_0 = i) = \sum_{j\in I} \mathbb{E}(H^A \mathbb{1}_{\{X_1=j\}}|X_0 = i)$$

$$= \sum_{j\in I} \mathbb{E}(H^A|X_0 = i, X_1 = j)\mathbb{P}(X_1 = j|X_0 = i) = 1 + \sum_{j\notin A} p_{ij}k_j^A$$

Tal com volíem veure en el cas que $i \notin A$.
Per acabar la demostració falta provar que k^A és una solució minimal. Suposem que existeix una altra solució no negativa $x = \{x_i : i \in I\}$ de (5.4). Tornem a tenir dos casos. Si $i \in A$, $k_i^A = x_i = 0$ o bé, si $i \notin A$, el qual substituïm x_j

$$x_i = 1 + \sum_{j\notin A} p_{ij}x_j = 1 + \sum_{j\notin A} p_{ij} \left(1 + \sum_{k\notin A} p_{jk}x_k \right)$$

$$= \mathbb{P}(H^A \geq 1|X_0 = i) + \mathbb{P}(H^A \geq 2|X_0 = i) + \sum_{j \notin A} \sum_{k \notin A} p_{ij} p_{jk} x_k$$

Si apliquem el procediment de substituir x_k reiteradament fins a n passos

$$x_i = \mathbb{P}(H^A \geq 1|X_0 = i) + ... + \mathbb{P}(H^A \geq n|X_0 = i) + \sum_{j_1 \notin A} ... \sum_{j_n \notin A} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \cdot ... \cdot p_{j_{n-1} j_n} x_{j_n}$$

Si x_{j_n} és no negativa, llavors

$$x_i \geq \lim_{n \to \infty} (\mathbb{P}(H^A \geq 1|X_0 = i) + ... + \mathbb{P}(H^A \geq n|X_0 = i)) = \mathbb{E}(H^A|X_0 = i) = k_i^A$$

Per tant, k^A és el vector de la solució minimal no negativa de (5.4).

□

Un cop hem vist aquests dos últims teoremes, ens remetem a l'exemple (5.4) per trobar les probabilitats d'absorció per l'estat 4 i el temps mig d'absorció pels estats 1 o 4 si l'estat d'inici és el 2 a partir dels teoremes.

Exemple 5.7. El sistema d'equacions lineal corresponent a les probabilitats d'absorció per l'estat 4 és

$$\begin{cases} h_4^{\{4\}} = 1 & si\ 4 \in A \\ h_2^{\{4\}} = \frac{1}{2} h_1^{\{4\}} + \frac{1}{2} h_3^{\{4\}} & si\ 2 \notin A \\ h_3^{\{4\}} = \frac{1}{2} h_2^{\{4\}} + \frac{1}{2} h_4^{\{4\}} & si\ 3 \notin A \\ h_1^{\{4\}} = 0 & si\ 1 \notin A \end{cases}$$

Resolent el sistema obtenim el mateix resultat que havíem vist anteriorment: $h_4^{\{4\}} = 1$, $h_2^{\{4\}} = \frac{1}{3}$, $h_3^{\{4\}} = \frac{2}{3}$ i $h_1^{\{4\}} = 0$. Pel que fa al sistema de temps mig d'abosrció obtenim

$$\begin{cases} k_1^{\{1,4\}} = 0 & si\ 1 \in A \\ k_4^{\{1,4\}} = 0 & si\ 4 \in A \\ k_2^{\{1,4\}} = 1 + \frac{1}{2} k_3^{\{1,4\}} & si\ 2 \notin A \\ k_3^{\{1,4\}} = 1 + \frac{1}{2} k_2^{\{1,4\}} & si\ 3 \notin A \end{cases}$$

i resolent-ho obtenim que $k_4^{\{1,4\}} = k_1^{\{1,4\}} = 0$ i $k_2^{\{1,4\}} = k_3^{\{1,4\}} = 2$.

En aquest cas no ens hem hagut de preocupar per si la solució minimal és no negativa, com passa en altres casos.

6 Propietat forta de Markov

Al principi del treball hem vist la propietat de Markov. Ara veurem un pas més d'aquesta propietat.

Definició 6.1. *Sigui $\{X_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ una cadena de Markov. Definim* ***temps d'atur*** *com una variable aleatòria no negativa $T\colon \Omega \to \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ tal que per a tot $n \in \mathbb{N}$, l'esdeveniment $\{T = n\}$ depèn de $\{X_0, X_1, ..., X_n\}$ i no de $\{X_{n+m}, m \geq 1\}$.*

Exemple 6.2. Veiem exemples sobre si són o no temps d'atur.

1) El temps de recurrència de l'estat: si el definim com la probabilitat condicionada que donada una cadena de Markov que es troba a l'estat i fins que hi torna hi ha n passos és temps d'atur perquè

$$\{T_i = n\} = \{X_0 = i, X_1 \neq i, ..., X_{n-1} \neq i, X_n = i\}$$

2) El primer temps d'arribada: si el definim com la probabilitat condicionada que donada una cadena de Markov que es troba a estats diferents a i, fins que hi arriba per primer cop hi ha n passos, és a dir, $T_i(w) = inf\{n \geq 1\colon X_n(w) = i\}$, és temps d'atur perquè

$$\{T_i = n\} = \{X_0 \neq i, X_1 \neq i, ..., X_{n-1} \neq i, X_n = j\}$$

3) El primer temps d'absorció d'un subconjunt A: sigui H^A el temps d'absorció d'un subconjunt $A \subseteq I$, és a dir, $H^A = inf\{n \geq 0\colon X_n(w) \in A\}$ és temps d'atur perquè

$$\{H^A = n\} = \{X_0 \notin A, ..., X_{n-1} \notin A, X_n \in A\}$$

4) El cas de l'últim temps de sortida d'un subconjunt $A \subseteq I$, $L^A = sup\{n \geq 0\colon X_n \in A\}$ no és un temps d'atur perquè depèn de si $\{X_{n+m}, m \geq 1\}$ entra a A o no.

El següent resultat mostra com la propietat de Markov se segueix complint pel temps d'atur. Cal tenir en compte la definició d'unitat de massa de l'estat $j \in I$ com $\delta_j = (\delta_{ji}\colon i \in I) = \begin{cases} 1 & si\ j = i \\ 0 & si\ j \neq i \end{cases}$

Teorema 6.3. *(Propietat forta de Markov) Siguin $\{X_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ una cadena de Markov(λ, P) i T un seu temps d'atur. Aleshores, condicionat amb $\{T < \infty\}$ i $\{X_T = i\}$, $\{X_{T+n}\colon n \in \mathbb{N}\}$ és una cadena de Markov(δ_i, P) i és independent a $X_0, X_1, ..., X_T$.*

Demostració. Per demostrar aquesta propietat cal tenir en compte que si un esdeveniment $B \subseteq \Omega$ està determinat per $X_0, ..., X_T$, llavors $B\cap\{T = m\}$ està determinat per $X_0, ..., X_m$ per a tot $m \in \mathbb{N}$. Per tant, podem obtenir

$$\mathbb{P}(\{X_T = j_0, X_{T+1} = j_1, ..., X_{T+n} = j_n\} \cap B \cap \{T = m\} \cap \{X_T = i\})$$

$$= \mathbb{P}(\{X_m = j_0, X_{m+1} = j_1, ..., X_{m+n} = j_n\} \cap B \cap \{T = m\} \cap \{X_m = i\})$$

Utilitzant la propietat de Markov en el temps m, la probabilitat condicionada i que $\{X_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ té probabilitats de transició p_{ij}.

$$\mathbb{P}(X_m = j_0, ..., X_{m+n} = j_n | B \cap \{T = m\} \cap \{X_m = i\})\mathbb{P}(B \cap \{T = m\} \cap \{X_m = i\})$$

$$= \mathbb{P}(X_m = j_0, ..., X_{m+n} = j_n | X_m = i)\mathbb{P}(B \cap \{T = m\} \cap \{X_m = i\})$$

$$= \mathbb{P}(X_0 = j_0, ..., X_n = j_n | X_0 = i)\mathbb{P}(B \cap \{T = m\} \cap \{X_m = i\})$$

Si sumem per a tot valor de m a les dues bandes de la igualtat,

$$\mathbb{P}(\{X_T = j_0, X_{T+1} = j_1, ..., X_{T+n} = j_n\} \cap B \cap \{T < \infty\} \cap \{X_T = i\})$$

$$= \mathbb{P}(X_0 = j_0, ..., X_n = j_n | X_0 = i)\mathbb{P}(B \cap \{T < \infty\} \cap \{X_T = i\})$$

Fent ús de la probabilitat condicionada,

$$\mathbb{P}(\{X_T = j_0, X_{T+1} = j_1, ..., X_{T+n} = j_n\} \cap B | \{T < \infty\} \cap \{X_T = i\})\mathbb{P}(\{T < \infty\} \cap \{X_T = i\})$$

$$= \mathbb{P}(X_0 = j_0, ..., X_n = j_n | X_0 = i)\mathbb{P}(B | \{T < \infty\} \cap \{X_T = i\})\mathbb{P}(\{T < \infty\} \cap \{X_T = i\})$$

Dividint banda i banda per $\mathbb{P}(\{T < \infty\} \cap \{X_T = i\})$,

$$\mathbb{P}(\{X_T = j_0, X_{T+1} = j_1, ..., X_{T+n} = j_n\} \cap B | \{T < \infty\} \cap \{X_T = i\})$$

$$= \mathbb{P}(X_0 = j_0, ..., X_n = j_n | X_0 = i)\mathbb{P}(B | \{T < \infty\} \cap \{X_T = i\})$$

Amb aquest resultat obtingut veiem que $\{X_{T+n} : n \in \mathbb{N}\}$ condicionat a $\{T < \infty\}$ i $\{X_T = i\}$ és independent a $X_0, ..., X_T$. Immediatament veiem que $\{X_{T+n} : n \in \mathbb{N}\}$ condicionat a $\{T < \infty\}$ i $\{X_T = i\}$ és una cadena de Markov(δ_i, P) si

$$\mathbb{P}(X_0 = j_0, ..., X_n = j_n | X_0 = i)\mathbb{P}(B | \{T < \infty\} \cap \{X_T = i\})$$

$$= \delta_{ij_0}\mathbb{P}(X_0 = j_0, ..., X_n = j_n)\mathbb{P}(B | \{T < \infty\} \cap \{X_T = i\})$$

$$= \delta_{ij_0} p_{ij_1} \cdot ... \cdot p_{j_{n-1}j_n}\mathbb{P}(B | \{T < \infty\} \cap \{X_T = i\})$$

és cert en particular per $B = \Omega$,

$$\mathbb{P}(\{X_T = j_0, X_{T+1} = j_1, ..., X_{T+n} = j_n\} | \{T < \infty\} \cap \{X_T = i\}) = \delta_{ij_0} \cdot p_{j_0j_1} \cdot ... \cdot p_{j_{n-1}j_n}$$

tal com volíem provar.

□

Recordem que el primer temps d'arribada és $T_i(w) = inf\{n \geq 1 : X_n(w) = i\}$ on $inf\{\emptyset\} = \infty$. A partir d'aquest primer temps, podem definir el r-èsim temps d'arribada i la seva longitud.

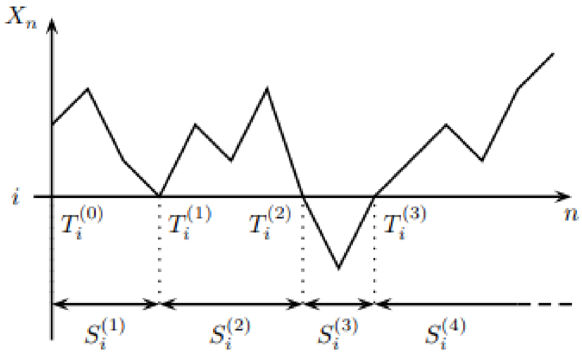
Definició 6.4. *El* ***r-èsim temps d'arribada*** $T_i^{(r)}$ *a un estat i es defineix com*

$$T_i^{(r)} = \begin{cases} 0 & si\ r = 0 \\ T_i(w) & si\ r = 1 \\ inf\{n \geq T_i^{(r-1)}(w) + 1 : X_n(w) = i\} & si\ r \geq 2 \end{cases}$$

Definició 6.5. *La* ***longitud de la r-èsima excursió*** *fins a un estat i es defineix com*

$$S_i^{(r)} = \begin{cases} T_i^{(r)} - T_i^{(r-1)} & si\ T_i^{(r-1)} < \infty \\ 0 & altrament \end{cases}$$

Per entendre aquests dos nous conceptes, el gràfic següent ens dona una representació. Tenim l'estat i representat que ens permet veure com es distribueixen per tot $r \in \mathbb{N}$ els r-èsims temps d'arribada, $T_i^{(r)}$, i la longitud que hi ha entre dos temps d'arribada consecutius, $S_i^{(r)}$.



Lema 6.6. *Per a $r \geq 2$ condicionat a l'esdeveniment $T_i^{(r-1)} < \infty$, $S_i^{(r)}$ és independent de $\{X_m \colon m \leq T_i^{(r-1)}\}$ i se satisfà*

$$\mathbb{P}(S_i^{(r)} = n | T_i^{(r-1)} < \infty) = \mathbb{P}_i(T_i = n)$$

Demostració. Considerem el temps d'arribada $T = T_i^{(r-1)}$ i si $T < \infty$ llavors $X_T = i$. Per tant, podem aplicar la propietat forta de Markov i obtenim que $\{X_{T+n} \colon n \in \mathbb{N}\}$ condicionat a $\{T < \infty\}$ és una cadena de Markov(δ_i, P) i és independent a $X_0, X_1, ..., X_T$. Per definició de longitud de la r-èsima excursió, $S_i^{(r)} = T_i^{(r)} - T_i^{(r-1)}$ per suposar que $T_i^{(r-1)} < \infty$ i, a més, $S_i^{(r)}$ és independent de $\{X_m \colon m \leq T_i^{(r-1)}\}$.

Veiem per definicions que $S_i^{(r)} = T_i^{(r)} - T_i^{(r-1)} = inf\{n \geq T_i^{(r-1)} + 1 \colon X_n = i\} - T_i^{(r-1)} = inf\{n \geq 1 \colon X_{T+n} = i\}$. Per tant, obtenim que $S_i^{(r)}$ és el primer temps d'arribada a l'estat i de la cadena $\{X_{T+n} \colon n \in \mathbb{N}\}$. Amb això, ja hem acabat de demostrar el lema perquè obtenim que

$$\mathbb{P}(S_i^{(r)} = n | T_i^{(r-1)} < \infty) = \mathbb{P}(T_i = n | X_0 = i)$$

□

Definició 6.7. *El **nombre de visites a i** d'una cadena $\{X_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ es defineix com*

$$V_i = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = i\}}$$

Notem que el nombre de visites esperades d'una cadena a l'estat i es pot trobar aplicant esperances, és a dir,

$$\mathbb{E}(V_i | X_0 = i) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = i\}} | X_0 = i\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X_n = i\}} | X_0 = i)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = i | X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$$

Definició 6.8. *La* ***probabilitat de retorn a l'estat i en el pas n*** *es defineix*

$$f_i^{(n)} = \mathbb{P}(T_i = n | X_0 = i)$$

per un estat $i \in I$ i $n \geq 1$. En particular, podem definir la ***probabilitat de retorn a l'estat i*** *com*

$$f_i = \sum_{n=1}^{\infty} f_i^{(n)} = \mathbb{P}(T_i < \infty | X_0 = i)$$

Observem que aquesta probabilitat acabada de definir no és la mateixa que la probabilitat de transició en n passos, ja que $f_i^{(n)}$ és la probabilitat que la primera visita a l'estat i es doni en el pas n, i en canvi, $p_{ii}^{(n)}$ és la probabilitat que després de n passos, la cadena torni al mateix estat i.

Lema 6.9. *Per $r \in \mathbb{N}$, se satisfà la igualtat $\mathbb{P}(V_i > r | X_0 = i) = f_i^r$.*

Demostració. Sigui $X_0 = i$, llavors es compleix la igualtat $\{V_i > r\} = \{T_i^{(r)} < \infty\}$ que utilitzarem pels següents resultats. La demostració del lema la farem a partir d'inducció.

Veiem que pel cas inicial $r = 0$ obtenim $\mathbb{P}(V_i > 0 | X_0 = i) = \mathbb{P}(T_i^{(0)} < \infty | X_0 = i) = \mathbb{P}(0 < \infty | X_0 = i) = 1 = f_i^0$. De manera que satisfà la igualtat de l'enunciat.

Apliquem la hipòtesi d'inducció i suposem que la igualtat es manté certa per r, és a dir, tenim que es compleix $\mathbb{P}(V_i > r | X_0 = i) = f_i^r$. Veiem que també és certa per $r+1$, fent servir que $S_i^{(r+1)} = T_i^{(r+1)} - T_i^{(r)}$ i si $T_i^{(r+1)}$ és finit, llavors $S_i^{(r+1)}$ i $T_i^{(r)}$ són finits i usant el lema (6.6),

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V_i > r+1 | X_0 = i) = \mathbb{P}(T_i^{(r+1)} < \infty | X_0 = i) &= \mathbb{P}(T_i^{(r)} < \infty, S_i^{(r+1)} < \infty | X_0 = i) \\
&= \mathbb{P}(S_i^{(r+1)} < \infty | T_i^{(r)} < \infty, X_0 = i)\mathbb{P}(T_i^{(r)} < \infty | X_0 = i) \\
&= \mathbb{P}(T_i < \infty | X_0 = i)\mathbb{P}(V_i > r | X_0 = i) = f_i \cdot f_i^r = f_i^{r+1}
\end{aligned}$$

Per tant, hem demostrat el resultat que volíem.

□

El següent teorema ens serà útil per establir que un estat sigui recurrent o transitori, definits a (4.1), però abans fem la següent observació.

Observació 6.10. Sigui X una variable aleatòria que pren valors enters no negatius, llavors

$$\sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{P}(V > r) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{v=r+1}^{\infty} \mathbb{P}(V = v) = \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{v-1} \mathbb{P}(V = v) = \sum_{v=1}^{\infty} v\mathbb{P}(V = v) = \mathbb{E}(V)$$

Teorema 6.11. *Siguin $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una cadena de Markov(λ, P) i un estat $i \in I$. Aleshores,*

1) Si $f_i = \mathbb{P}(T_i < \infty | X_0 = i) = 1$, aleshores l'estat i és recurrent i $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$.

2) Si $f_i = \mathbb{P}(T_i < \infty | X_0 = i) < 1$, aleshores l'estat i és transitori i $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$.

En particular, cada estat és recurrent o bé transitori.

Demostració. Per la demostració de cada situació farem servir el lema (6.9), per a $r \geq 0$ $f_i^r = \mathbb{P}(V_i > r | X_0 = i)$, i també el resultat que s'obté del nombre de visites esperades a l'estat i, és a dir, $\mathbb{E}(V_i | X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$. Procedim a veure cada cas en concret.

1) Suposem que $f_i = 1$, aleshores tenim que $\mathbb{P}(V_i > r | X_0 = i) = 1$ i obtenim

$$\mathbb{P}(V_i = \infty | X_0 = i) = \lim_{r \to \infty} \mathbb{P}(V_i > r | X_0 = i) = 1$$

que per definició, obtenim que l'estat i és recurrent i

$$\mathbb{E}(V_i | X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$$

tal com volíem veure.

2) Suposem que $f_i < 1$, aleshores

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \mathbb{E}(V_i | X_0 = i) = \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{P}(V_i > r | X_0 = i) = \sum_{r=0}^{\infty} f_i^r = \frac{1}{1 - f_i} < \infty$$

que sabem que convergeix perquè és la sèrie geomètrica de raó f_i tal que $|f_i| < 1$. Amb l'ajuda d'aquest resultat podem concloure que

$$\mathbb{P}(V_i = \infty | X_0 = i) = 0$$

i per definició, l'estat i és transitori.

□

Acabem de veure que un estat sigui recurrent o transitori es complementa, és a dir, si un estat no és transitori, és recurrent, i viceversa. En el següent resultat veurem que tots els estats d'una classe de comunicació o bé són recurrents o bé transitoris.

Teorema 6.12. *Siguin $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una cadena de Markov(λ, P) i C una classe de comunicació. Llavors tots els estats de C són recurrents o bé transitoris.*

Demostració. Siguin $i, j \in C$ i suposem que l'estat i és transitori, aleshores existeixen $n, m \in \mathbb{N}$ tals que $p_{ij}^{(n)} > 0$ i $p_{ji}^{(m)} > 0$. Per l'equació de Chapman-Kolmogorov obtenim que per $r \geq 0$,

$$p_{ii}^{(n+r+m)} \geq \sum_{k \in I} p_{ik}^{(n)} p_{kk}^{(r)} p_{ki}^{(m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jj}^{(r)} p_{ji}^{(m)}$$

Fent ús del teorema (6.11)

$$\sum_{r=0}^{\infty} p_{jj}^{(r)} \geq \frac{1}{p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(m)}} \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n+r+m)} < \infty$$

obtenim que l'estat j també és transitori. □

7 Passejada aleatòria a $\mathbb{Z}$

En aquesta secció ens centrarem en l'exemple concret de passejada aleatòria per aplicar els conceptes definits al llarg del treball. D'aquesta manera farem un anàlisi i estudi d'aquesta cadena.

Primer de tot considerem una successió $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ de variables aleatòries independents i indènticament distribuïdes que pren valors a $I = \mathbb{Z}$. La distribució de Y_i és p_Y definida per $p_Y(i) = \mathbb{P}(Y_n = i)$ per a tot $i \in I$. Definim la successió $X_n = \sum_{i=0}^{n} Y_i$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ i veiem que és una cadena de Markov. Primer comprovem que satisfà la propietat de Markov i seguidament que té definida una distribució inicial.

Veiem que es compleix per a tot $n \in \mathbb{N}$ i per a tot $i_0, ..., i_{n+1} \in I$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, ..., X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n) = p_{i_n i_{n+1}}$$

ja que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, ..., X_n = i_n) = \frac{\mathbb{P}(X_0 = i_0, ..., X_{n+1} = i_{n+1})}{\mathbb{P}(X_0 = i_0, ..., X_n = i_n)}$$
$$= \frac{\mathbb{P}(Y_0 = i_0, Y_1 = i_1 - i_0, ..., Y_{n+1} = i_{n+1} - i_n)}{\mathbb{P}(Y_0 = i_0, ..., Y_n = i_n - i_{n-1})}$$
$$= \frac{p_Y(i_0) \cdot p_Y(i_1 - i_0) \cdot ... \cdot p_Y(i_n - i_{n-1}) \cdot p_Y(i_{n+1} - i_n)}{p_Y(i_0) \cdot p_Y(i_1 - i_0) \cdot ... \cdot p_Y(i_n - i_{n-1})} = p_Y(i_{n+1} - i_n) = p_{i_n i_{n+1}}$$

Per altra banda tenim que,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n) = \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1}, X_n = i_n)}{\mathbb{P}(X_n = i_n)} = \frac{\mathbb{P}(Y_{n+1} = i_{n+1} - i_n, X_n = i_n)}{\mathbb{P}(X_n = i_n)}$$
$$= \frac{\mathbb{P}(Y_{n+1} = i_{n+1} - i_n)\mathbb{P}(X_n = i_n)}{\mathbb{P}(X_n = i_n)} = p_Y(i_{n+1} - i_n) = p_{i_n i_{n+1}}$$

Obtenim el mateix resultat, per tant sesatisfà la propietat de Markov. A més, les probabilitats de transició també han quedat definides. Falta veure la distribució inicial de X_0. Considerem $\mathbb{P}(X_0 = i_0) = \lambda_{i_0}$ i la propietat de Markov i usant el teorema (3.7)

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, ..., X_n = i_n) = p_{i_0 i_1} \cdot ... \cdot p_{i_{n-1} i_n} \cdot \lambda_{i_0}$$

Per tant, queda defnida la distribució inicial de X_0 i amb això acabem de veure que X_n és una cadena de Markov.

Un cop definida aquesta cadena de Markov ja podem explicar-ne un cas particular com és el nostre exemple de la **passejada aleatòria**. On considerem que la successió $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ pren valors a $I = \{-1, 1\}$ amb les probabilitats de transició $p_Y(-1) = 1 - p = q$ i $p_Y(1) = p$ tal que $0 < p = 1 - q < 1$. Per tant, $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ són variables aleatòries independents idènticament distribuïdes amb distribució de Bernoulli. Llavors definint $X_0 = 0$ com la distribució inicial, tenim que el procès estocàstic $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ és una cadena de Markov definida per

$$X_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} Y_i = X_0 + Y_1 + ... + Y_n$$

Una manera d'entendre-ho és considerant que el procés comença a l'estat $i = 0$ amb valor $X_0 = 0$ i per intervals iguals de temps, es mou amb un pas en una línia recta on tindrà dues possibilitats. Si es mou un pas a la dreta ho farà amb una probabilitat p i si és a l'esquerra, la probabilitat serà q, és a dir,

$$p_{ij} = p_Y(j-i) = \begin{cases} p & si \;\; j-i=1 \\ q & si \;\; j-i=-1 \\ 0 & altrament \end{cases}$$

Llavors el diagrama corresponent és

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, bend left, "p"] & -2 \arrow[l, bend left, "q"] \arrow[r, bend left, "p"] & -1 \arrow[l, bend left, "q"] \arrow[r, bend left, "p"] & 0 \arrow[l, bend left, "q"] \arrow[r, bend left, "p"] & 1 \arrow[l, bend left, "q"] \arrow[r, bend left, "p"] & 2 \arrow[l, bend left, "q"] \arrow[r, bend left, "p"] & \cdots \arrow[l, bend left, "q"] \end{tikzcd} \tag{7.1}$$

amb matriu de transició

$$P = \begin{pmatrix} ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & 0 & p & 0 & ... \\ ... & q & 0 & p & ... \\ ... & 0 & q & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

Amb aquesta informació en fem prou per definir que sigui $i \in I$, i és accessible per $i+1$ i per $i-1$. Per tant, $i \leftrightarrow i+1$, es comuniquen. Com per qualsevol i tenim que es comunica amb un altre estat, només existeix una única classe de comunicació, i en conseqüència $I = C(i)$ i, a més, la cadena és irreductible. Aquesta cadena té període 2 perquè per qualsevol estat es necessita mínim 2 passos per tornar-hi a arribar. Com tots els estats estan comunicats entre ells, aquesta única classe de comunicació és tancada, satisfà $\sum_{j \in C(i)} p_{ij} = 1$ per tot $i \in C(i)$.

Notem que estem tractant amb una cadena que té infinits estats. Si tingués finits estats, podríem deduir fàcilment que tots els seus estats són recurrents. No obstant, ens podem ajudar pel fet que és una cadena irreductible, la qual cosa ens permet reduir a estudiar un únic estat, l'estat 0, sense pèrdua de generalitat i del teorema (6.11), així que buscarem si $\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)}$ convergeix o no. Per tal que la cadena torni en aquest estat, només és possible amb un nombre parell de passos, és a dir, $p_{00}^{(2n+1)} = 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Com Y_n té distribució de Bernoulli, tenim que X_n té distribució Binomial(2n,p),

$$p_{00}^{(2n)} = \mathbb{P}(X_{2n} = k) = \binom{2n}{k} p^k q^{2n-k}$$

però en el nostre cas tenim que els n passos que s'avancen cap a un sentit són els mateixos cap a l'altre sentit, per tant,

$$p_{00}^{(2n)} = \mathbb{P}(X_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} p^n q^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}(pq)^n$$

Pel següent pas usem la *fórmula de Stirling* per obtenir una aproximació de n! suficientment bona quan n és prou gran.

Sigui $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$, *o equivalentment, quan* n *és prou gran,* $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Per tant,

$$p_{00}^{(2n)} \approx \frac{\sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}(pq)^n = \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}$$

Ara bé, hem de distingir dos casos.

1) Si $4pq = 1$, aleshores $p = q = \frac{1}{2}$ i $p_{00}^{(2n)} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ quan n és prou gran. Llavors tenim que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty$. Com la sèrie divergeix, tenim que l'estat 0 és recurrent i generalitzant a tots els estats tenim que tots són recurrents.

2) Si $4pq < 1$, aleshores $p \neq \frac{1}{2}$ i $p_{00}^{(2n)} \approx \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}$ quan n és prou gran. Llavors tenim que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}} < \sum_{n=1}^{\infty} (4pq)^n < \infty$. Com la sèrie convergeix, tenim que l'estat 0 és transitori i per tant, la resta d'estats també són transitoris.

En aquest cas modificat podem estudiar els temps i probabiltiats d'absorció on la condició de minimal és essencial pel fet de ser una cadena infinita. Ara considerem la *ruïna el jugador* que és una passejada aleatòria on l'espai d'estats és als $\mathbb{N}$ i l'estat 0 és absorbent. De manera que tenim el següent diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left, "1"] & 1 \arrow[l, "q"] \arrow[r, bend left, "p"] & 2 \arrow[l, bend left, "q"] \arrow[r, bend left, "p"] & \cdots \arrow[l, bend left, "q"] \end{tikzcd} \tag{7.3}$$

amb matriu de transició

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... \\ q & 0 & p & ... \\ 0 & q & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{pmatrix} \tag{7.4}$$

és a dir, $\begin{cases} p_{00} = 1 \\ p_{i,i-1} = q & si\ i = 1, 2, ... \\ p_{i,i+1} = p & si\ i = 1, 2, ... \end{cases}$

Aquest cas podria representar la situació d'un jugador d'apostes que cada cop que juga pot o bé guanyar diners incrementant el valor amb una unitat cada cop jugat o bé perdre'n disminuïnt una unitat cada cop. No té límit en termes de quants diners pot guanyar però sí que quan es queda sense diners no pot passar a números negatius i per tant, s'arruïna i abandona. Una dada interessant a conèixer és saber amb quina probablitat el jugador s'arruïna, és a dir, hem de calcular la probabilitat d'absorció de l'estat 0 per qualsevol $i \in I$, $h_i^{\{0\}}$. Apliquem el teorema (5.5)

$$\begin{cases} h_0^{\{0\}} = 1 & si\ 0 \in \{0\} \\ h_i^{\{0\}} = q h_{i-1}^{\{0\}} + p h_{i+1}^{\{0\}} & si\ i \notin \{0\} \end{cases} \tag{7.5}$$

Ens trobem amb una equació que per resoldre-la ens hem d'ajudar de les relacions de recurrència de la forma $ph_{i+1}^{\{0\}} - h_i^{\{0\}} + qh_{i-1}^{\{0\}} = 0$, amb $a, c \neq 0$. Sigui $h_i^{\{0\}} = \lambda^i$ una solució d'aquesta equació, per $i = 1$ tenim $p\lambda^2 - \lambda + q = 0$ on obtenim dues solucions, 1 i $\frac{q}{p}$. Per tant, la nostra solució general és $h_i^{\{0\}} = \begin{cases} A \cdot 1^i + B \left(\frac{q}{p}\right)^i & si\ 1 \neq \frac{q}{p} \\ (A + iB)1^i & si\ 1 = \frac{q}{p} \end{cases}$, on A i B són dues constants que compleixen $\begin{cases} h_0^{\{0\}} = A + B \\ h_1^{\{0\}} = A \cdot 1 + B \left(\frac{q}{p}\right) \end{cases}$. Veiem els dos casos:

1) Si $1 \neq \frac{q}{p}$, la solució de recurrència és $h_i^{\{0\}} = A + B\left(\frac{q}{p}\right)^i$, distingim dues opcions. Si $\frac{q}{p} > 1$, com tractem probabilitats, $h_i^{\{0\}} \in [0,1]$, necessitem que $B = 0$ i per definició del cas, $h_0^{\{0\}} = 1$, i per la condició a complir, tenim que $1 = A + B$. Llavors per qualsevol $i \in I$, $A = 1$ i $h_i^{\{0\}} = 1$, és a dir, el jugador s'arruïna independentment dels diners que té al principi. En el cas que $\frac{q}{p} < 1$, per la condició de $h_0^{\{0\}} = 1 = A + B \Leftrightarrow B = 1 - A$, de manera que ens queda

$$h_i^{\{0\}} = A + (1-A)\left(\frac{q}{p}\right)^i = \left(\frac{q}{p}\right)^i + A\left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i\right)$$

Fent ús que la solució ha de ser minimal i no negativa, A=0, per tant $h_i^{\{0\}} = \left(\frac{q}{p}\right)^i$. D'on deduïm que com més diners es té al principi, menys porbabilitats hi ha d'arruïnar-se.

2) Si $1 = \frac{q}{p}$, la solució de recurrència és $h_i^{\{0\}} = A + iB$. Com $h_i^{\{0\}} \in [0,1]$, B=0 i una altra vegada tenim que A=1 i per tant, $h_i^{\{0\}} = 1$ i el jugador s'arruïna.

Seguint amb el cas de la ruïna del jugador, podem usar la propietat forta de Markov per obtenir més informació sobre els temps d'absorció de la cadena. Ara obtindrem una distribució completa del temps d'absorció de 0 si es comença per l'estat 1 a partir de la funció generatriu. Recordem que el resultat anterior ens dona únicament la probabilitat d'absorció en aquest mateix cas.

Sabem que el temps mig d'absorció queda definit per $H^A = inf\{n \geq 0 \colon X_n \in A\}$ que el podem representar per $H_j = inf\{n \geq 0 \colon X_n = j\}$, $j \in I$. Per $0 \leq s < 1$, la funció generatriu de H_0 és

$$\phi_{H_0}(s) = \mathbb{E}(s^{H_0} | X_0 = 1) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \mathbb{P}(H_0 = n | X_0 = 1)$$

Si ara comencem des de l'estat 2, usem la propietat forta de Markov a H_1 per veure que sobre $\mathbb{P}$ condicionat per $H_1 < \infty$ i $X_0 = 2$ tenim que $H_0 = H_1 + \tilde{H}_0$, on $\tilde{H}_0$ és el temps que tarda H_1 a arribar a l'estat 0, el qual és independent a H_1 i segueix la mateixa distribució de H_1. Aplicant propietats de l'esperança, obtenim

$$\mathbb{E}(s^{H_0} | X_0 = 2) = \mathbb{E}(s^{H_1} | H_1 < \infty, X_0 = 2)\mathbb{E}(s^{\tilde{H}_0} | H_1 < \infty, X_0 = 2)\mathbb{P}(H_1 < \infty, X_0 = 2)$$

$$= \mathbb{E}(s^{H_1} \mathbb{1}_{\{H_1 < \infty\}} | X_0 = 2)\mathbb{E}(s^{\tilde{H}_0} | H_1 < \infty, X_0 = 2) = \mathbb{E}(s^{H_1} | X_0 = 2)^2 = \phi_{H_0}(s)^2$$

Per la propietat de Markov al temps 1 condicinat per $X_1 = 2$ tenim que $H_0 = 1 + \bar{H}_0$, on $\bar{H}_0$ és el temps que hi ha entre el temps 1 fins arribar a 0, i té la mateixa distribució de H_0 sobre $\mathbb{P}$ condicionat per $X_0 = 2$.

$$\phi_{H_0}(s) = \mathbb{E}_1(s^{H_0}) = p\mathbb{E}(s^{H_0} | X_1 = 2) + q\mathbb{E}(s^{H_0} | X_1 = 0)$$

$$= p\mathbb{E}(s^{1+\bar{H}_0} | X_1 = 2) + q\mathbb{E}(s | X_1 = 0)$$

$$= ps\mathbb{E}(s^{H_0} | X_0 = 2) + qs = ps\phi_{H_0}(s)^2 + qs$$

Si $\phi = \phi_{H_0}(s)$, obtenim

$$ps\phi^2 - \phi + qs = 0 \tag{7.6}$$

i les seves solucions són $\phi = \frac{1\pm\sqrt{1-4pqs^2}}{2ps}$. Pel fet que $\phi(0) \leq 1$ i ϕ és contínua, prenem la solució $\phi = \frac{1-\sqrt{1-4pqs^2}}{2ps}$. Per tal d'aconseguir la distribució de H_0 fem ús de la sèrie de Taylor centrada a 1 per $\sqrt{t}$.

$$\sqrt{t} = 1 + \frac{1}{2}(t-1) - \frac{1}{2!}\frac{1}{4}(t-1)^2 + ...$$

Si $t = 1 - 4pqs^2$, obtenim la distribució de H_0

$$\phi = \frac{1}{2ps}\left[1 - \left(1 + \frac{1}{2}(-4pqs^2) - \frac{1}{2!}\frac{1}{4}(-4pqs^2)^2 + ...\right)\right] = \frac{1}{2ps}\left(2pqs^2 + 2(pqs^2)^2 + ...\right)$$

$$= qs + pq^2s^3 + ... = s\mathbb{P}(H_0 = 1|X_0 = 1) + s^2\mathbb{P}(H_0 = 2|X_0 = 1) + s^3\mathbb{P}(H_0 = 3|X_0 = 1) + ...$$

D'on veiem que si s tendeix a 1, $\phi_{H_0}(s) \rightarrow \mathbb{P}(H_0 < \infty|X_0 = 1) = \frac{1-\sqrt{1-4pq}}{2p} = \begin{cases} 1 & si\ p \leq q \\ \frac{q}{p} & si\ p > q \end{cases}$.

Llavors podem obtenir el temps mig d'absorció amb $\mathbb{E}(H_0|X_0 = 1) = \lim_{s\rightarrow 1} \phi'_{H_0}(s)$, en el qual només considerem el cas en què $p \leq q$ perquè és quan el temps pot ser finit. Derivem (7.6) respecte s,

$$\frac{\partial}{\partial s}(ps\phi^2 - \phi + qs) = p\phi^2 + 2ps\phi\phi' - \phi' + q = 0$$

Com estem en el cas $p \leq q$ i s tendeix a 1, $\mathbb{P}(H_0 < \infty|X_0 = 1) = 1$. Recordant que $q = 1 - p$ i de la igualtat anterior aïllant ϕ' obtenim

$$\phi'_{H_0}(s) = \frac{p\phi_{H_0}(s)^2 + q}{1 - 2ps\phi_{H_0}(s)} \xrightarrow[s\rightarrow 1]{} \frac{p+q}{1-2p} = \frac{1}{1-2p}$$

Per tant, hem trobat el temps mig d'absorció per 0 de l'estat inicial a l'1, $k_1^{\{0\}} = \frac{1}{1-2p}$.

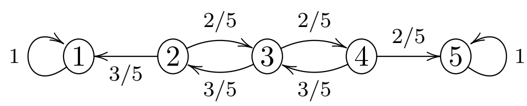
7.1 Simulació: ruïna del jugador

Vista la passejada aleatòria i el cas de la ruïna del jugador, ara simularem aquest últim però amb l'espai d'estats finit. Considerem la ruïna del jugador de tal manera que al principi del joc tindrà una quantitat inicial i en cada moment aposta una unitat, de manera que guanya el doble de l'aposta amb probabilitat p o bé, perd l'aposta amb probabilitat q. El joc s'acabarà un cop el jugador s'arruïna, és a dir, perd tots els diners o bé arriba al màxim de diners que pot guanyar, que en aquest cas serà 5.

Aquest nou context que acabem de descriure és l'anomenada **passejada aleatòria a $\mathbb{Z}$ amb barreres absorbents**. Es descriu com el procès estocàstic $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ de l'evolució del capital del jugador, on considerem una condició inicial $X_0 = a$, per a tot $a \in I$, i el procés $X_{n+1} = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ tal que $X_n : \Omega \longrightarrow I$ i $\{Y_n : n \geq 1\}$ és el conjunt de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes, tal com està definit al principi de la secció. Prenent les probabilitats de transició p i q tal com ho hem fet fins ara, la matriu de transició té la forma:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & \dots & & 0 \\ \dots & & & & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & & q & 0 & p \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.7}$$

Tornant al nostre exemple, per fer una situació més real, a les cases d'apostes $p < q$, i és tal com ho prendrem. De manera que tenim el següent diagrama si considerem $p = \frac{2}{5}$ i $q = \frac{3}{5}$,



(7.8)

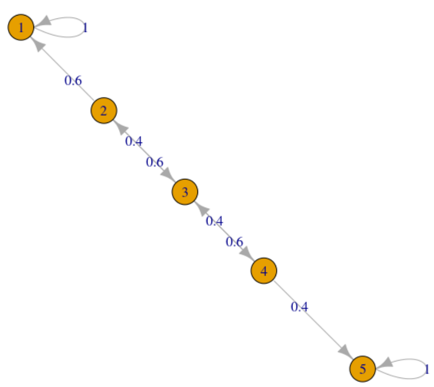
amb matriu de transició

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.9}$$

Farem la nostra simulació d'aquesta cadena fent servir tant R com C, que els respectius codis es trobaran a l'Annex (A). Pel que fa a R, té incorporat el paquet "markovchain"que tracta les cadenes de Markov a temps discret. Ens permetrà obtenir ràpidament conceptes vistos a la secció (4) i així com, també calcular les probabilitats d'absorció, gràcies a les funcions que té incorporades en el paquet. Veiem-ho:
Primer de tot introduïm els paràmetres necessaris per definir la cadena i dibuixem el diagrama corresponent amb la funció *plot()*.

```
library(markovchain)

q <- 0.6000
p <- 0.4000
P <- matrix(c(1,0,0,0,0,q,0,p,0,0,0,q,0,p,0,0,0,q,0,p,0,0,0,0,1), nrow=5, byrow= TRUE)
mc <- new("markovchain", transitionMatrix=P, name="Cadena 1")
diagrama <- plot(mc)
```



Seguidament executem funcions que té implementades. Tenim la funció *transitionProbability()* que ens dona la probabilitat de transició que hi ha entre un estat i un altre en un únic pas, *is.accessible()* ens retorna TRUE o FALSE si des d'un estat donat es pot accedir a un altre o no. En el programa veiem que podem usar aquesta funció dins d'un *for* per comparar cada un dels estats i amb impressió a pantalla ens dona una idea de quines són les classes de comunicació que ens dona la funció *communicatingClasses()*. També veiem si la cadena estudiada és irreductible amb *is.irreducible()* que retorna TRUE o FALSE. En el nostre cas ens retorna que no és irreductible, però si ho fos, també seria interessant la funció *period()* que retorna el període. També tenim funcions que fan referència als estats recurrents, transitoris i absorbents en un únic pas amb *recurrentStates()*, *transientStates()* i *absorbingStates()*.

```
> transitionProbability(mc, "2", "3")
[1] 0.4
> for ( i in 1:5 ) {
+   for( j in 1:5){
+     if ( i != j ) {
+       k <- is.accessible(mc, from=vi[i], to=vj[j]);
+       cat(i, 'és accessible per', j, ':',k, '\n');
+     }
+   }
+ }
1 és accessible per 2 : FALSE
1 és accessible per 3 : FALSE
1 és accessible per 4 : FALSE
1 és accessible per 5 : FALSE
2 és accessible per 1 : TRUE
2 és accessible per 3 : TRUE
2 és accessible per 4 : TRUE
2 és accessible per 5 : TRUE
3 és accessible per 1 : TRUE
3 és accessible per 2 : TRUE
3 és accessible per 4 : TRUE
3 és accessible per 5 : TRUE
4 és accessible per 1 : TRUE
4 és accessible per 2 : TRUE
4 és accessible per 3 : TRUE
4 és accessible per 5 : TRUE
5 és accessible per 1 : FALSE
5 és accessible per 2 : FALSE
5 és accessible per 3 : FALSE
5 és accessible per 4 : FALSE
> communicatingClasses(mc)
[[1]]
[1] "1"

[[2]]
[1] "2" "3" "4"

[[3]]
[1] "5"

> is.irreducible(mc)
[1] FALSE
> recurrentStates(mc)
[1] "1" "5"
> transientStates(mc)
[1] "2" "3" "4"
> absorbingStates(mc)
[1] "1" "5"
```

Aquesta llibreria també és útil per fer simulacions, és a dir, podem generar tantes mostres aleatòries com vulguem a partir de la nostra cadena amb la funció *rmarkovchain()*. A més, se li pot indicar des de quin estat comencem, que en el nostre cas serà a partir de l'estat 3, comencem el joc amb 3 unitats de valor. D'aquesta manera veiem com possiblement evoluciona la cadena.

```
> x <- rmarkovchain(100, mc, t0="3")
> x
  [1] "2" "3" "2" "3" "2" "3" "4" "3" "2" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1"
 [25] "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1"
 [49] "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1"
 [73] "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1" "1"
 [97] "1" "1" "1" "1"
```

Finalment, la funció *hittingProbabilities()* és una altra que usem que ens retorna una matriu on hi ha els valors de les probabilitats d'absorció de cada estat per a tot estat, és a dir, per cada columna j tenim per cada fila i la probabilitat d'absorció $h_i^{\{j\}}$.

```
> hittingProbabilities(mc)
          1         2    3         4         5
1 1.0000000 0.0000000 0.00 0.0000000 0.0000000
2 0.8769231 0.3157895 0.40 0.2105263 0.1230769
3 0.6923077 0.7894737 0.48 0.5263158 0.3076923
4 0.4153846 0.4736842 0.60 0.3157895 0.5846154
5 0.0000000 0.0000000 0.00 0.0000000 1.0000000
```

Pel que respecte a C, he fet un programa concret per aquesta cadena que ens doni la probabilitat d'absorció de l'estat 1 i del 5 per cada un dels estats. També he inclós el temps mig d'absorció de l'estat 1 o bé del 5 per cada estat. Aquests resultats estan reflectits en el fitxer de sortida *resultats.dat* tal com es mostra a l'annex (A). El programa només té en compte els estats que no són absorbents, el 2, 3 i 4, ja que si són absorbents ja sabem directament que per l'estat 1, $h_1^{\{1\}} = 1$ i $h_5^{\{1\}} = 0$, i per l'estat 5, $h_5^{\{5\}} = 1$ i $h_1^{\{5\}} = 0$ i que el temps mig d'absorció pels estats 1 o 5 és $k_1^{\{1,5\}} = k_5^{\{1,5\}} = 0$. Els resultats del programa està segmentat amb diverses repeticions del procés. De manera que podem observar que com major és el nombre de repeticions obtenim un resultat més exacte. Els resultats de les probabilitats d'absorció es poden comparar amb els resultats de les columnes corresponents que dona la funció *hittingProbabilities()* de R. De la imatge anterior hem d'observar la columna 1 i 5 per comparar-la amb els valors del fitxer *resultats.dat* de l'annex que fan referència a la probabilitat d'absorció de l'estat 1 i del 5, respectivament, amb el nombre de repeticions $n = 10000$.

En definitiva, acabem de calcular les solucions dels següents sistemes d'equacions lineals, de la probabilitat d'absorció de l'estat 1 i de l'estat 5 i també el temps mig d'absorció de $\{1, 5\}$ per cada estat.

$$\begin{cases} h_1^{\{1\}} = 1 & ja\ que\ 1 \in \{1\} \\ h_2^{\{1\}} = \frac{3}{5}h_1^{\{1\}} + \frac{2}{5}h_3^{\{1\}} & ja\ que\ 2 \notin \{1\} \\ h_3^{\{1\}} = \frac{3}{5}h_2^{\{1\}} + \frac{2}{5}h_4^{\{1\}} & ja\ que\ 3 \notin \{1\} \\ h_4^{\{1\}} = \frac{3}{5}h_3^{\{1\}} + \frac{2}{5}h_5^{\{1\}} & ja\ que\ 4 \notin \{1\} \\ h_5^{\{1\}} = 0 & ja\ que\ 5 \notin \{1\} \end{cases}$$

D'on obtenim que $h_1^{\{1\}} = 1, h_2^{\{1\}} = \frac{57}{65}, h_3^{\{1\}} = \frac{9}{13}, h_4^{\{1\}} = \frac{27}{65}$ i $h_5^{\{1\}} = 0$.

$$\begin{cases} h_1^{\{5\}} = 0 & ja\ que\ 1 \notin \{5\} \\ h_2^{\{5\}} = \frac{3}{5}h_1^{\{5\}} + \frac{2}{5}h_3^{\{5\}} & ja\ que\ 2 \notin \{5\} \\ h_3^{\{5\}} = \frac{3}{5}h_2^{\{5\}} + \frac{2}{5}h_4^{\{5\}} & ja\ que\ 3 \notin \{5\} \\ h_4^{\{5\}} = \frac{3}{5}h_3^{\{5\}} + \frac{2}{5}h_5^{\{5\}} & ja\ que\ 4 \notin \{5\} \\ h_5^{\{5\}} = 5 & ja\ que\ 5 \in \{5\} \end{cases}$$

D'on obtenim que $h_1^{\{5\}} = 0, h_2^{\{5\}} = \frac{8}{65}, h_3^{\{5\}} = \frac{4}{13}, h_4^{\{5\}} = \frac{38}{65}$ i $h_5^{\{5\}} = 1$.

$$\begin{cases} k_1^{\{1,5\}} = 0 & ja\ que\ 1 \in \{1,5\} \\ k_2^{\{1,5\}} = 1 + \frac{3}{5}k_1^{\{1,5\}} + \frac{2}{5}k_3^{\{1,5\}} & ja\ que\ 2 \notin \{1,5\} \\ k_3^{\{1,5\}} = 1 + \frac{3}{5}k_2^{\{1,5\}} + \frac{2}{5}k_4^{\{1,5\}} & ja\ que\ 3 \notin \{1,5\} \\ k_4^{\{1,5\}} = 1 + \frac{3}{5}k_3^{\{1,5\}} + \frac{2}{5}k_5^{\{1,5\}} & ja\ que\ 4 \notin \{1,5\} \\ k_5^{\{1,5\}} = 0 & ja\ que\ 5 \in \{1,5\} \end{cases}$$

D'on obtenim que $k_1^{\{1,5\}} = 0, k_2^{\{1,5\}} = \frac{33}{13}, k_3^{\{1,5\}} = \frac{50}{13}, k_4^{\{1,5\}} = \frac{43}{13}$ i $k_5^{\{1,5\}} = 0$.

8 Conclusions

Tal com hem comentat a la introducció del treball, l'objectiu que volíem assolir era donar una idea general de les cadenes de Markov homogènies en temps discret per poder establir una base que ens serviria de punt d'inici per poder desenvolupar les cadenes de Markov en una direcció més concreta que no es troba en aquest treball. Per aquest fet, considero rellevant extreure les següents conclusions.

Primer de tot vull fer referència com són de destacables les probabilitats de transició en n passos i l'equació de Chapman-Kolmogorov per poder desenvolupar tot el que segueix a continuació. L'estudi d'una cadena de Markov es basa en el seu comportament i sobretot com evoluciona, d'aquesta manera ens permet estudiar-ho tal com concloc a continuació.

La importància de la classificació dels estats segons com es comporti la cadena és fonamental per poder catalogar els estats en si són accessibles, es comuniquen, si són transitoris o recurrents, si són absorbents o el seu període per poder definir el tipus de cadena que tractem. Les propietats que relacionen els diferents estats sota certes condicions permet lligar conceptes per tal que esdevinguin resultats importants com són el càlcul de les probabilitats d'absorció i el temps mig d'absorció, la propietat forta de Markov o bé les relacions entre la probabilitat de retorn d'un estat i, que l'estat sigui recurrent o transitori i si $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ és convergent o no, entre altres.

Així doncs, he pogut extreure un lligam global de tot l'esmentat anteriorment que ha quedat reflectit en un exemple específic, la passejada aleatòria als enters.

Fent un anàlisi global un cop finalitzada la memòria i vistos els objectius marcats a l'inici del treball i el que he aconseguit, puc concloure que aquest treball m'ha aportat un ampli coneixement d'un tema que no havia tractat mai durant la carrera.

Finalment, m'agradaria afegir que durant l'elaboració d'aquest treball m'he sentit atreta per tot el que he après. Hi ha hagut temes que m'han semblat interessants d'afegir, però malauradament els he hagut de deixar fora del treball perquè involucraven tota una línia d'estudi bastant rigorosa i distant al que és la idea principal d'aquesta memòria. En tot cas, m'han servit de motivació per reflexionar sobre nocions descrites i entendre-les millor.

A Codi

En aquí trobarem el codi que he programat primer en R, després en C i també el fitxer *resultats.dat.*

```
### Ruina del jugador     ####

library(markovchain)

q <- 0.6000
p <- 0.4000
P <- matrix(c(1,0,0,0,0,q,0,p,0,0,0,q,0,p,0,0,0,q,0,p,0,0,0,0,1)
    , nrow=5, byrow= TRUE)
mc <- new("markovchain", transitionMatrix=P, name="Cadena 1")
diagrama <- plot(mc)


### mirem propietats de la cadena     ###

transitionProbability(mc, "2", "3")

vi <- c("1","2","3","4","5")
vj <- c("1","2","3","4","5")

for ( i in 1:5 ) {
  for( j in 1:5){
    if ( i != j ) {
      k <- is.accessible(mc, from=vi[i], to=vj[j]);
      cat(i, 'es accessible per', j, ':',k, '\n');
    }
  }
}

classcom <- communicatingClasses(mc)
irred <- is.irreducible(mc)
recurrents <- recurrentStates(mc)
transitoris <- transientStates(mc)
absorbents <- absorbingStates(mc)

recurrents <- recurrentStates(mc)
transitoris <- transientStates(mc)


### simulacio     ####

x <- rmarkovchain(100, mc, t0="3")

### probabilitats d'absorcio      ###

probsabs <- hittingProbabilities(mc)
```

El codi en C és el següent:

```c
/*ruina del jugador*/

#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include<math.h>
#include<time.h>

int main(void){
  int i, k, m, j, l, abs1, abs5, est, sum, t;
  double absorcio1, absorcio5, tempsabsorcio;
  int v[6]={10,50,100,500,1000,10000};
  FILE *fp;

  fp = fopen("resultats.dat", "w");

  srand(time(NULL));

  /*fem i=2,3,4 perque els altres estats son absorbents*/
  for ( i = 2; i < 5; i++ ) {

    fprintf(fp, "Per l'estat %d tenim els seguents resultats:\n\n", i);

    for ( k = 0; k < 6; k++ ) {
      abs1=0;
      abs5=0;
      sum = 0;
      /*per executar varies vegades*/
        for ( l = 0; l < v[k]; l++) {
        t=0;
        est = i;
        for ( m = 0; ( est != 1) && (est != 5); m++) {
          if (est == 2) {
            j = rand();
            j = j % 5;
            if (j == 0 || j == 1 || j == 2) {
              est = 1;
              abs1++;
            }
            if (j == 3 || j == 4) {
              est = 3;
            }
            t++;
          }
          if ( est == 3 ) {
            j = rand() % 5;
            if ( j == 0 ||j == 1 || j == 2 ) {
              est = 2;
            }
            if ( j == 3 || j == 4 ) {
              est = 4;
            }
            t++;
          }
          if ( est == 4 ) {
            j = rand() % 5;
            if ( j == 0 || j == 1 || j == 2 ) {
              est = 3;
            } else {
              est = 5;
```

```
                abs5++;
              }
              t++;
            }
          }
          sum = sum+t;
        }
        absorcio1 = abs1 * (1./v[k]);
        absorcio5 = abs5 * (1./v[k]);
        tempsabsorcio = sum * (1./v[k]);
        fprintf(fp, "Si n=%d, els resultats son:\n",v[k]);
        fprintf(fp, "Probabilitat d'absorcio del 1: %le\n", absorcio1);
        fprintf(fp, "Probabilitat d'absorcio del 5: %le\n", absorcio5);
        fprintf(fp, "Temps mig d'absorcio del 1o del 5: %le\n",tempsabsorcio);
        fprintf(fp,"\n\n");
      }
    }
    fclose(fp);
    return 0;
}
```

El fitxer *resultats.dat* és el següent:

```
Per l'estat 2 tenim els seguents resultats:

Si n=10, els resultats son:
Probabilitat d'absorcio del 1: 9.000000e-01
Probabilitat d'absorcio del 5: 1.000000e-01
Temps mig d'absorcio del 1 o del 5: 1.600000e+00


Si n=50, els resultats son:
Probabilitat d'absorcio del 1: 8.800000e-01
Probabilitat d'absorcio del 5: 1.200000e-01
Temps mig d'absorcio del 1 o del 5: 2.880000e+00


Si n=100, els resultats son:
Probabilitat d'absorcio del 1: 8.800000e-01
Probabilitat d'absorcio del 5: 1.200000e-01
Temps mig d'absorcio del 1 o del 5: 2.480000e+00


Si n=500, els resultats son:
Probabilitat d'absorcio del 1: 8.780000e-01
Probabilitat d'absorcio del 5: 1.220000e-01
Temps mig d'absorcio del 1 o del 5: 2.472000e+00


Si n=1000, els resultats son:
Probabilitat d'absorcio del 1: 8.670000e-01
Probabilitat d'absorcio del 5: 1.330000e-01
Temps mig d'absorcio del 1 o del 5: 2.598000e+00
```

```
Si n=10000, els resultats son:
Probabilitat d'absorcio del 1: 8.767000e-01
Probabilitat d'absorcio del 5: 1.233000e-01
Temps mig d'absorcio del 1 o del 5: 2.569200e+00


Per l'estat 3 tenim els seguents resultats:

Si n=10, els resultats son:
Probabilitat d'absorcio del 1: 7.000000e-01
Probabilitat d'absorcio del 5: 3.000000e-01
Temps mig d'absorcio del 1 o del 5: 3.600000e+00


Si n=50, els resultats son:
Probabilitat d'absorcio del 1: 7.200000e-01
Probabilitat d'absorcio del 5: 2.800000e-01
Temps mig d'absorcio del 1 o del 5: 3.560000e+00


Si n=100, els resultats son:
Probabilitat d'absorcio del 1: 7.800000e-01
Probabilitat d'absorcio del 5: 2.200000e-01
Temps mig d'absorcio del 1 o del 5: 3.980000e+00


Si n=500, els resultats son:
Probabilitat d'absorcio del 1: 6.440000e-01
Probabilitat d'absorcio del 5: 3.560000e-01
Temps mig d'absorcio del 1 o del 5: 3.980000e+00


Si n=1000, els resultats son:
Probabilitat d'absorcio del 1: 6.680000e-01
Probabilitat d'absorcio del 5: 3.320000e-01
Temps mig d'absorcio del 1 o del 5: 3.602000e+00


Si n=10000, els resultats son:
Probabilitat d'absorcio del 1: 6.943000e-01
Probabilitat d'absorcio del 5: 3.057000e-01
Temps mig d'absorcio del 1 o del 5: 3.863600e+00


Per l'estat 4 tenim els seguents resultats:

Si n=10, els resultats son:
Probabilitat d'absorcio del 1: 3.000000e-01
```

```
Probabilitat d'absorcio del 5: 7.000000e-01
Temps mig d'absorcio del 1 o del 5: 4.400000e+00


Si n=50, els resultats son:
Probabilitat d'absorcio del 1: 3.800000e-01
Probabilitat d'absorcio del 5: 6.200000e-01
Temps mig d'absorcio del 1 o del 5: 3.480000e+00


Si n=100, els resultats son:
Probabilitat d'absorcio del 1: 4.300000e-01
Probabilitat d'absorcio del 5: 5.700000e-01
Temps mig d'absorcio del 1 o del 5: 3.260000e+00


Si n=500, els resultats son:
Probabilitat d'absorcio del 1: 4.520000e-01
Probabilitat d'absorcio del 5: 5.480000e-01
Temps mig d'absorcio del 1 o del 5: 3.364000e+00


Si n=1000, els resultats son:
Probabilitat d'absorcio del 1: 4.190000e-01
Probabilitat d'absorcio del 5: 5.810000e-01
Temps mig d'absorcio del 1 o del 5: 3.322000e+00


Si n=10000, els resultats son:
Probabilitat d'absorcio del 1: 4.121000e-01
Probabilitat d'absorcio del 5: 5.879000e-01
Temps mig d'absorcio del 1 o del 5: 3.275400e+00
```

Referències

[1] Borovkov, A.A. (2013). *Probability theory*, Londres: Springer.

[2] Douc, R., Moulines, E., Priouret, P., Soulier, P. (2018). Markov Chains: Basic Definitions. *Springer Series in Operations Research and Financial Engineering* 3-25, doi: https://doi.org/10.1007/978-3-319-97704-1_1.

[3] Hayes, B.(2013). First Links in the Markov Chain: Probability and poetry were unlikely partners in the creation of a computational tool. *American Scientist*, 101 (2), 92. doi: https://doi.org/10.1511/2013.101.92.

[4] Kemeny, J.G., Snell, J.L. (1976). *Finite Markov Chains*, Estats Units: Springer-Verlag.

[5] Pishro-Nik, H. (2014). *Introduction to Probability, Statistics, and Random Processes*, Kappa Research, LLC.

[6] Norris, J.R. (1997). *Markov Chains*, New York: Cambridge University Press.

[7] Nuñez, J.J. (2013). *Análisis dinámico mediante procesos estocásticos para actuarios y finanzas.* Recuperat de
https://elibro-net.sire.ub.edu/es/ereader/craiub/53550?page=62.

[8] Seneta, E. (2006). *Markov and the creation of Markov chains.* In Amy N. Langville i William J. Stewart *MAM2006: Markov Anniversary Meeting.* Boson Books, Raleigh, North Carolina, 1-20.

[9] Spedicato, G.A.; Seung, T.; Bhargav, S.; Yadav, D.; Cordón, I.: *The markovchain Package: A Package for Easily Handling Discrete Markov Chains in R.* Recuperat de
https://2ea1c31afd084bbfa015e38c85ac4fb8.app.rstudio.cloud/help/library/markovchain/doc/an_introduction_to_markovchain_package.pdf