Máster en Ciencias Actuariales y Financieras

# TRABAJO FINAL DE MÁSTER

**Título: Comparativa de métodos de cálculo de provisiones en el seguro de automóviles: caso práctico**

**Autoría: Sílvia Meca Sánchez**

**Tutoría: Eva Boj y Teresa Costa**

**Curso académico: 2021-2022**

Universitat de Barcelona
Facultat d'Economia i Empresa

Màster de Ciències Actuarials i Financeres

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Barcelona

Trabajo Final de Máster

Máster en Ciencias Actuariales y Financieras

# Comparativa de métodos de cálculo de provisiones en el seguro de automóviles: caso práctico

Autoría: Sílvia Meca Sánchez

Tutoría: Eva Boj y Teresa Costa

*"El contenido de este documento es de exclusiva responsabilidad del autor, quien declara que no ha incurrido en plagio y que la totalidad de referencias a otros autores han sido expresadas en el texto."*

## Resumen

El presente trabajo se centra en el cálculo de la mejor estimación de la provisión por siniestros ocurridos, pero no declarados, en los seguros de no vida mediante métodos actuariales estocásticos.

En concreto, se realiza un estudio para los seguros de automóviles, teniendo en cuenta el tipo de vehículo y el tipo de cobertura, y tomando como datos de partida los triángulos de desarrollo de una compañía aseguradora española. Los resultados obtenidos se analizan y se comparan mediante diferentes criterios.

Todos los cálculos se realizan con el software R.



**Palabras clave:** Seguro de Automóviles, Provisiones técnicas, IBNR, Modelo de Mack, Modelo Lineal Generalizado.



## Abstract

This paper focuses on the calculation of the best estimate for incurred but not reported claims reserves in non-life insurance using stochastic actuarial methods.

Specifically, a practical case for motor insurance is developed, taking into account the type of vehicle and the type of coverage, and taking as starting data the run-off triangles of a Spanish insurance company. The obtained results are analyzed and compared using different criteria.

All calculations are performed with the R software.



**Keywords:** Motor Insurance, Technical Provisions, IBNR, Mack Model, Generalized Linear Model.

# ÍNDICE

# 1. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo, **Comparativa de métodos de cálculo de provisiones en el seguro de automóviles: caso práctico**, está dedicado al estudio de distintas metodologías actuariales de la literatura para el cálculo de provisiones por siniestros pendientes en los seguros de no vida y en la realización de un caso práctico para el cálculo de dichas provisiones en el seguro de automóviles, aplicando distintos métodos estocásticos y teniendo en cuenta diferentes tipos de vehículos y de coberturas.

El seguro de automóviles es un tipo de seguro perteneciente al ramo de no vida, y es el responsable de cubrir los riesgos inherentes al uso y circulación de los vehículos de motor. Se puede definir el seguro de automóviles como un seguro multirriesgo que, por un lado, cubre el riesgo relativo a la responsabilidad civil del asegurado por daños personales y materiales causados a terceros y, por otro lado, puede cubrir otros riesgos complementarios relativos al mismo vehículo, su conductor y ocupantes.

Las entidades aseguradoras, para poder hacer frente a los pagos futuros de siniestros que han ocurrido pero que no se han declarado, deben constituir unas provisiones técnicas. Para estimar el valor de estas provisiones en los seguros de automóviles se puede utilizar cualquiera de los múltiples métodos de cálculo actuariales disponibles para los seguros de no vida, tanto deterministas como estocásticos.

Tradicionalmente, uno de los métodos más utilizados por su sencillez en el cálculo, es el método determinista de Chain-Ladder. Posteriormente, en la literatura se han desarrollado otros métodos deterministas y también estocásticos. Desde el punto de vista estadístico, los métodos estocásticos proporcionan más información sobre la aleatoriedad de la estimación de las reservas. Desde el punto de vista actuarial, y motivado por las exigencias de Solvencia II (Directiva 2009/138/CE del Parlamento Europeo y del Consejo de 25 de noviembre de 2009), se justifica la introducción de métodos estocásticos de cálculo de provisiones que, por una parte, justifiquen el mecanismo de cálculo del nivel de provisiones y que, además, permitan cuantificar la incertidumbre asociada a estos mecanismos.

## 1.1. Objetivos

El objetivo del presente trabajo es aplicar distintos métodos estocásticos para calcular la mejor estimación de la provisión por siniestros ocurridos pero no declarados en el seguro de automóviles, en función del tipo de vehículo y del tipo de cobertura. Una vez realizados los cálculos, analizar los resultados y compararlos con los obtenidos según el tipo de vehículo y el tipo de cobertura para poder llegar a unas conclusiones. Para realizar la comparativa se establecen criterios de análisis y elección para cada modelo aplicado, ayudando a la toma de decisiones de la empresa aseguradora.

## 1.2. Estructura del trabajo

En cuanto a la estructura del trabajo, este se puede dividir en cinco apartados y un anexo:

En el primer apartado, se describe el concepto de provisiones técnicas y el contexto legal en el que se enmarca su cálculo.

El segundo apartado está dedicado a presentar algunos de los métodos actuariales que se pueden emplear en el cálculo de provisiones para siniestros pendientes, centrándose en los métodos estocásticos.

En el tercer apartado, se establecen los distintos criterios de análisis que se utilizarán en el caso práctico para la comparativa y elección de dichos métodos estocásticos.

El cuarto apartado se corresponde con el caso práctico del trabajo, donde se utilizan datos de una compañía aseguradora española modificados algorítmicamente, para respetar la confidencialidad de la empresa. En este apartado, se calcula la mejor estimación de la provisión por siniestros ocurridos pero no declarados para el seguro de automóviles, según el tipo de vehículo y tipo de cobertura, y se comparan los resultados obtenidos teniendo en cuenta los criterios explicados anteriormente.

Para los cálculos del caso práctico se utiliza el software R (*R Development Core Team*, 2022), en concreto se ejecutan funciones incluidas en la librería *ChainLadder* de Gesmann *et al.* (2022).

En el quinto apartado, se presentan las conclusiones del trabajo, donde se destacan las aportaciones que se han realizado. Seguidamente se lista la bibliografía consultada.

Y finalmente, se incluye un anexo donde se puede consultar el código del lenguaje de programación R con las funciones que se han utilizado para el desarrollo del caso práctico del trabajo.

# 2. PROVISIONES TÉCNICAS

Las provisiones técnicas reflejan las obligaciones derivadas de contratos de seguro y de reaseguro y forman parte de las deudas de las entidades aseguradoras y reaseguradoras, tal como se indica en el artículo 69 de la Ley 20/2015, de 14 de julio, de ordenación, supervisión y solvencia de las entidades aseguradoras y reaseguradoras (en adelante, LOSSEAR). A su vez, en el mismo artículo se define el valor de las provisiones técnicas como "el importe actual que las entidades aseguradoras y reaseguradoras tendrían que pagar si transfirieran sus obligaciones de seguro y reaseguro de manera inmediata a otra entidad aseguradora o reaseguradora".

En la actualidad, tal y como se detalla en Boj *et al.* (2021), debido a la nueva legislación de solvencia en España, recogida en la LOSSEAR y en el Real Decreto 1060/2015, de 20 de noviembre, de ordenación, supervisión y solvencia de las entidades aseguradoras y reaseguradoras (en adelante, ROSSEAR), el cálculo y definición de las provisiones técnicas se encuentra en transición. Este enfoque de las provisiones técnicas convive con su definición y cálculo desde el punto de vista contable, recogido en el Real Decreto 2486/1998, de 20 de noviembre, por el que se aprueba el Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados (ROSSP). De manera que, hasta que se apruebe el nuevo Plan Contable, las entidades de seguros y reaseguros realizarán un doble cómputo de las provisiones técnicas: uno a efectos de solvencia y otro a efectos contables.

Es relevante enmarcar el estudio de las provisiones técnicas en el contexto de la Directiva Solvencia II, a la que las entidades aseguradoras se han adaptado desde el año 2016.

Según la normativa de solvencia, el valor de las provisiones técnicas debe ser igual a la suma de la mejor estimación y de un margen de riesgo (artículo 48 del ROSSEAR):

- La mejor estimación se corresponderá con la media de los flujos de caja futuros ponderada por su probabilidad, teniendo en cuenta el valor temporal del dinero mediante la aplicación de la pertinente estructura temporal de tipos de interés sin riesgo, es decir, el valor actual esperado de los flujos de caja futuros.

- El margen de riesgo será tal que se garantice que el valor de las provisiones técnicas sea equivalente al importe que las entidades aseguradoras y reaseguradoras previsiblemente exigirían para poder asumir y cumplir las obligaciones del seguro y del reaseguro.

Como regla general, la misma ley indica que las entidades aseguradoras y reaseguradoras deberán calcular el margen de riesgo y la mejor estimación por separado. Se podrá calcular conjuntamente en caso de que los flujos de caja futuros puedan reproducirse mediante instrumentos financieros de los cuales se pueda encontrar un valor de mercado fiable; en este caso, el valor de las provisiones técnicas asociadas con esos flujos de caja futuros se determinará a partir del valor de mercado de dichos instrumentos financieros y no será necesario calcular por separado la mejor estimación y el margen de riesgo.

Si las entidades aseguradoras y reaseguradoras calculan la mejor estimación y el margen de riesgo por separado, el margen de riesgo será igual al coste de financiar el capital de solvencia obligatorio exigible por asumir las obligaciones de seguro y reaseguro durante su período de vigencia. Por lo tanto, para poder calcular el margen de riesgo es necesario haber calculado anteriormente el capital de solvencia obligatorio para diversos períodos futuros.

El margen de riesgo (MR) se calculará de la siguiente forma (artículo 37 del Reglamento Delegado[1]):

$$MR = CoC \sum_{t \geq 0} \frac{SCR(t)}{(1 + r_{(t+1)})^{(t+1)}}$$

donde:

- $CoC$ representará la tasa de coste del capital. El artículo 39 del Reglamento Delegado determina que el coste del capital se fija en el 6%.
- $SCR(t)$ representará el capital de solvencia obligatorio al cabo de $t$ años.
- $r_{(t+1)}$, será el tipo de interés sin riesgo básico correspondiente al vencimiento de $t + 1$ años.

Tal y como indica el artículo 48 del ROSSEAR, el cálculo de la mejor estimación se basará en información actualizada y fiable y en hipótesis realistas y se realizará con arreglo a métodos actuariales y estadísticos que sean suficientes, aplicables y pertinentes. Además, esta se deberá calcular en términos brutos, sin deducir los importes recuperables procedentes de los contratos de reaseguro y, en su caso, de las entidades con cometido especial.

En concreto, el cálculo de la mejor estimación incluirá todos los flujos de caja siguientes, en la medida en que tales flujos de caja se correspondan con contratos de seguro y reaseguro existentes (artículos 28 y 31 del Reglamento Delegado):

a) pagos de prestaciones a tomadores y beneficiarios de seguros;
b) pagos que la empresa de seguros y reaseguros deberá satisfacer al proporcionar prestaciones contractuales que se paguen en especie;
c) pagos de los gastos de administración, de gestión de inversiones y de adquisición. En todos ellos se tendrán en cuenta los gastos generales de administración. Los gastos se proyectarán partiendo del supuesto de que la empresa desarrollará nuevas actividades en el futuro;
d) pagos de primas y cualquier flujo de caja adicional que se derive de tales primas;
e) pagos entre la empresa de seguros o reaseguros e intermediarios en relación con obligaciones de seguro o reaseguro;
f) pagos entre la empresa de seguros y reaseguros y empresas de inversión en relación con contratos con prestaciones vinculadas a índices o a fondos de inversión;
g) pagos por salvamento y subrogación, en la medida en que no puedan considerarse activos o pasivos separados con arreglo a las normas internacionales de contabilidad, aprobadas por la Comisión en virtud del Reglamento (CE) nº 1606/2002;
h) pagos de impuestos cobrados, o que se prevea cobrar, a los tomadores de seguros, o que se precisen para liquidar las obligaciones de seguro o reaseguro.

[1] Reglamento delegado (UE) 2015/35 de la Comisión de 10 de octubre de 2014 por el que se completa la Directiva 2009/138/CE del Parlamento Europeo y del Consejo sobre el acceso a la actividad de seguro y reaseguro y su ejercicio (Solvencia II).

Según el artículo 53 del ROSSEAR, cuando en circunstancias específicas, las entidades aseguradoras y reaseguradoras no dispongan de datos suficientes de calidad adecuada para aplicar un método actuarial fiable a un conjunto o a un subconjunto de sus obligaciones de seguro o de reaseguro, o a los importes recuperables procedentes de los contratos de reaseguro o a las entidades con cometido especial, podrán utilizarse aproximaciones, incluidos métodos caso a caso, para el cálculo de la mejor estimación.

Las provisiones que se deben calcular a efectos de solvencia son (Boj *et al.* 2021):

- Provisión del seguro de vida.
- Provisión de los seguros de enfermedad con técnicas similares a las de los seguros de vida.
- Provisión para primas (en los seguros distintos al de vida).
- Provisión para siniestros pendientes (en los seguros distintos al de vida):
    - Provisión para siniestros declarados pendientes de liquidación o pago.
    - Provisión para siniestros ocurridos, pero no declarados.
    - Provisión por gastos de liquidación de siniestros.
- Provisión para primas (en los seguros de enfermedad calculados con técnicas similares a los de los seguros distintos al de vida).
- Provisión para siniestros pendientes (en los seguros de enfermedad calculados con técnicas similares a los de los seguros distintos al de vida):
    - Provisión para siniestros declarados pendientes de liquidación o pago.
    - Provisión para siniestros ocurridos, pero no declarados.
    - Provisión por gastos de liquidación de siniestros.

Este trabajo se va a centrar en el cálculo de la provisión para siniestros pendientes en los seguros de no vida, en concreto, en la provisión para siniestros ocurridos, pero no declarados, más conocida por su denominación en inglés *Incurred But Not Reported* (IBNR). En este caso, los flujos de caja futuros estarán relacionados con los siniestros ocurridos con anterioridad al momento de cálculo de dicha provisión, pero que todavía no han sido declarados a la entidad, es decir, se desconoce que han ocurrido y su importe. No obstante, como han ocurrido, dichos siniestros se declararán en un momento futuro y deberán ser abonados. El pago de estos siniestros deberá ir a cargo de la prima en el año de ocurrencia del siniestro y no a cargo de la prima que se cobrará cuando el siniestro sea definitivamente pagado, por este motivo se constituye la provisión técnica.

Para realizar el cálculo de la mejor estimación, se puede utilizar cualquiera de los múltiples métodos de cálculo actuariales disponibles, tanto deterministas como estocásticos. Los métodos actuariales que se van a describir en el presente trabajo se aplican para la determinación del valor esperado, sin actualizar, de los pagos futuros. A efectos contables, no es necesario actualizar financieramente dichos valores esperados de los pagos futuros, de forma que son posibles determinadas simplificaciones en el cálculo. Sin embargo, a efectos de solvencia, es imprescindible la actualización financiera de los valores esperados de los pagos futuros utilizando además una estructura de tipos de interés básicos predeterminada y cambiante en el tiempo, de forma que los importes de la provisión serán distintos.

# 3. MÉTODOS ACTUARIALES

Existen muchos métodos actuariales para realizar el cálculo de provisiones de siniestros pendientes. A su vez, estos métodos actuariales se pueden clasificar de varias maneras. A continuación, se describe la clasificación que se tiene en cuenta para la elaboración de este trabajo (ver Boj *et al.* 2021).

Según De Vylder (1986) y Taylor (1986) una de las clasificaciones para los métodos actuariales es:

- Métodos deterministas: no intervienen variables aleatorias.
- Métodos estocásticos: los siniestros se consideran realizaciones de variables aleatorias.
    - Modelos paramétricos: las distribuciones implicadas se suponen conocidas (Normal, Poisson, etc.) pero ciertos parámetros deben ser estimados.
    - Modelos de distribución libre: no se realizan hipótesis particulares sobre las distribuciones implicadas.

Algunos de los métodos deterministas de cálculo de provisiones son (Van Eeghen y De Vylder, 1981; Albarrán y Alonso, 2010): Grossing-up, Link ratio, Chain-Ladder, variantes de Chain-Ladder, mínimos cuadrados de De Vylder, separación aritmética y geométrica de Taylor. Posteriormente, se han propuesto métodos de carácter estocástico como el modelo de Mack y el Modelo Lineal Generalizado, que tienen la característica de generalizar, desde el punto de vista estocástico, el método determinista de Chain-Ladder.

Aunque este trabajo se centra en el cálculo de provisiones por métodos estocásticos, también se va a explicar con detalle el modelo determinista de Chain-Ladder, pues resulta necesario al ser uno de los más utilizados, además de surgir como caso particular del Modelo de Mack y del Modelo Lineal Generalizado y coincidir la estimación de las reservas.

## 3.1. Datos

Para poder calcular las provisiones deben observarse siniestros que se sabe que se han producido pero cuyo importe eventual es desconocido en el momento en que se calculan las provisiones.

Cada método de cálculo de provisiones utiliza distintos tipos de datos de partida (ver Boj *et al.* 2021). A continuación, se describen los datos sobre los siniestros que son necesarios para el cálculo de las provisiones en los métodos actuariales en los que nos centraremos en este trabajo:

- $c_{ij}$: cuantía pagada en el año de desarrollo $j$, respecto de los siniestros ocurridos en el año de origen $i$.
- $C_{ij}$: cuantía acumulada pagada hasta (e incluido) el año de desarrollo $j$, respecto de los siniestros ocurridos en el año de origen $i$.

Se considera el año de origen, $i$, como el año en el que ha ocurrido el siniestro. Por otro lado, el año de desarrollo, $j$, indica el número de años transcurridos desde el año de origen hasta el año de pago del siniestro. Finalmente, el año de calendario en el que se paga un siniestro se obtiene a partir de $i + j$.

Siendo $D = \{ i, j \mid i \in I, j \in J\}$ el dominio (años de origen, años de desarrollo para los que tenemos datos). Si $i = 0, \dots, k$ y $j = 0, 1, \dots, k$, el dominio $D$ tiene forma triangular.

De manera que, los datos de que disponemos para el cálculo de provisiones están resumidos en el denominado triángulo de desarrollo (triángulo *run-off*), donde los valores a lo largo de una fila muestran el patrón de desarrollo para cada año de ocurrencia, mientras que analizando los datos por columnas se observa el patrón de tendencia desde un año de origen hasta el siguiente. Finalmente, las diagonales permiten analizar la situación en sucesivos años de calendario, correspondiendo la última diagonal al año de calendario más reciente disponible.

Además, se representa por $F$ el conjunto de combinaciones de $i, j$ que permiten completar el cuadrado, que se representa en la Tabla 1:

| Año de origen $i$ | Año de desarrollo $j$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $0$ | $1$ | $\dots$ | $k-1$ | $k$ |
| $0$ | | | | | |
| $1$ | | $D$ | | | |
| $\vdots$ | | | | | |
| $k-1$ | | | | $F$ | |
| $k$ | | | | | |

**Tabla 1**. Cuadrado *run-off* de cuantías. Fuente: Elaboración propia.

## 3.2. Modelo Chain-Ladder clásico

El modelo Chain-Ladder es un método determinista que se considera clásico por ser de los primeros métodos planteados para el cálculo de provisiones. Fue mencionado por primera vez por Tarbell (1934) y su uso se remonta a los años 70. Algunas de las referencias en que fue utilizado son Kramreiter y Straub (1973), Skurnick (1973) y Clarke y Harland (1974).

La idea que hay detrás del método Chain-Ladder es que en cualquier año de desarrollo se paga el mismo porcentaje total de los siniestros de cada año de origen, es decir, en el triángulo de desarrollo las columnas son proporcionales.

A continuación, se describen los datos en que se basa, las hipótesis y la estimación de sus parámetros, tomando como referencia Boj *et al.* (2021):

<u>Datos de partida</u>: cuantías acumuladas pagadas hasta (e incluido) el año de desarrollo $j$, respecto de los siniestros ocurridos en el año de origen $i$ ($C_{ij}$).

Hipótesis-estimadores: Las columnas del triángulo son proporcionales. La relación entre una columna ($h$) y la siguiente ($h+1$) se denominará estimador del cambio o factor de desarrollo y lo representaremos como $\widehat{m}_h$, siendo:

$$\widehat{m}_h = \frac{\sum_{i=0}^{k-h-1} C_{i,h+1}}{\sum_{i=0}^{k-h-1} C_{i,h}}, \qquad C_{i,h+1} = \widehat{m}_h \cdot C_{i,h}.$$

Para calcular las estimaciones de las cuantías acumuladas pagadas en el futuro ($\hat{C}_{i,j}$), se utiliza la siguiente fórmula:

$$\hat{C}_{i,j} = C_{i,k-i} \cdot \prod_{h=k-i}^{j-1} \widehat{m}_h.$$

Para la aplicación de este método, los datos del triángulo deben ser positivos y las tasas de inflación constantes. Además, también puede aplicarse si los datos de partida son cuantías medias acumuladas pagadas.

## 3.3. Versión estocástica del modelo Chain-Ladder: Modelo de Mack

El modelo de Mack (Mack,1993) es una generalización estocástica del modelo Chain-Ladder clásico, ya que la estimación de las provisiones coincide en ambos métodos. La ventaja principal de este modelo con respecto al de Chain-Ladder es que proporciona una medida de dispersión o variabilidad de las provisiones estimadas, en concreto, calcula su error cuadrático medio.

Otra ventaja importante de este modelo es que es de distribución libre, de forma que no realiza hipótesis particulares sobre las distribuciones implicadas, sino que son hipótesis generales válidas para cualquier distribución.

A continuación, se describen para este modelo los datos de partida, las hipótesis y la estimación de sus parámetros, tomando como referencia Boj *et al.* (2021):

Datos de partida: cuantías acumuladas pagadas hasta (e incluido) el año de desarrollo $j$, respecto de los siniestros ocurridos en el año de origen $i$ ($C_{ij}$).

Hipótesis: Se asumen las siguientes 3 hipótesis:

- H1: $E\left[\frac{C_{i,h+1}}{C_{i,h}} \mid C_{i,h}\right] = m_h$ para $i = 0, 1, \dots, k-1$ y $h = 0, \dots, k-1$,

  o, de forma equivalente,

  $E\left[C_{i,h+1} \mid C_{i,h}\right] = m_h \cdot C_{i,h}$ para $i = 0, 1, \dots, k-1$ y $h = 0, \dots, k-1$,

- H2: $V\left[\frac{C_{i,h+1}}{C_{i,h}} \mid C_{i,h}\right] = \sigma_h^2$ para $i = 0, 1, \dots, k-1$ y $h = 0, \dots, k-1$,

  o, de forma equivalente,

$$V\left[C_{i,h+1} \mid C_{i,h}\right] = \sigma_h^2 \cdot C_{i,h} \text{ para } i = 0, 1, \dots, k-1 \text{ y } h = 0, \dots, k-1,$$

- H3: $C_{i_1,j_1}$ y $C_{i_2,j_2}$ son variables aleatorias independientes para $i_1 \neq i_2$.

Estimadores: Resulta necesario definir los estimadores $\widehat{m}_h$ y $\hat{\sigma}_h^2$ derivados de las hipótesis planteadas en el modelo.

- El primero de los estimadores, $\widehat{m}_h$, coincide con el del método de Chain-Ladder y es una media aritmética ponderada de los factores de desarrollo, siendo las ponderaciones $C_{i,h}$.

$$\widehat{m}_h = \sum_{i=0}^{k-h-1} \frac{C_{i,h}}{\sum_{i=0}^{k-h-1} C_{i,h}} \cdot \frac{C_{i,h+1}}{C_{i,h}} = \frac{\sum_{i=0}^{k-h-1} C_{i,h+1}}{\sum_{i=0}^{k-h-1} C_{i,h}}.$$

- El segundo estimador, por su parte, se define como:

$$\hat{\sigma}_h^2 = \frac{1}{k-h} \sum_{i=0}^{k-h-1} C_{i,h} \cdot \left(\frac{C_{i,h+1}}{C_{i,h}} - \widehat{m}_h\right)^2 \text{ para } h = 0, \dots, k-2.$$

  Esta expresión no resulta válida para $h = k-1$; en este caso, se proponen los siguientes métodos para su estimación:

  1. Si $\widehat{m}_{k-1} = 1$ y se espera que el desarrollo de los siniestros finalice tras $k-1$ años, entonces $\hat{\sigma}_{k-1}^2 = 0$.

  2. En caso contrario, es necesario extrapolar el siguiente valor de la secuencia $\{\hat{\sigma}_0^2, \hat{\sigma}_1^2, \dots, \hat{\sigma}_{k-2}^2\}$, que suele ser una sucesión de valores exponencialmente decrecientes.

Si suponemos que para la estimación de los valores futuros sirven las hipótesis 1, 2 y 3, entonces, del mismo modo que con el método clásico de Chain-Ladder:

$$\hat{C}_{i,j} = C_{i,k-i} \cdot \prod_{h=k-i}^{j-1} \widehat{m}_h \text{ para } i,j \in F = \{i,j \mid 0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq k, i+j > k\}.$$

Partiendo de estos valores estimados y los datos originales se calculan las provisiones estimadas por año de origen $\hat{R}_i$ para $i = 0, 1, \dots, k$.

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,j} - C_{i,k-i}.$$

### 3.4. Modelo Lineal Generalizado

El Modelo Lineal Generalizado (MLG o GLM, por sus siglas en inglés) se utiliza para evaluar y cuantificar la relación existente entre una variable, denominada respuesta o dependiente (endógena), y un conjunto de variables explicativas o independientes (exógenas). Se considera el MLG como una extensión del modelo de regresión lineal clásico, en el que la relación de las variables se realiza mediante una función de enlace y, además, se permite que la variable endógena tenga una distribución no Normal.

A continuación, se describen las características básicas del MLG, tomando como referencia a McCullagh y Nelder (1989), Boj y Costa (2014) y Costa (2015):

Se supone la variable aleatoria $Y_{(nx1)}$, $(y_i)$ para $i$ = 1, 2, …, $n$ observaciones independientes, que recogen la siniestralidad a explicar y juegan el papel de variable respuesta en el modelo. Se supone $P$ predictores o factores potenciales de la estructura de riesgo $F_1, F_2, \ldots, F_p$, vectores $(n\ x\ 1)$: $(f_{ij})$ para $i$ = 1, 2, …, $n$ y $j$ = 1, 2, …, $P$.

En el modelo clásico de regresión lineal por mínimos cuadrados ordinarios, el error tiene una distribución Normal centrada y con varianza constante, $\varepsilon_i \sim N\ (0, \sigma^2)$. La relación lineal de la respuesta con la estructura sistemática dada por los predictores es:

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{P} \beta_j f_{ij} + \varepsilon_i,$$

siendo $y_i$ la variable respuesta, $y_i \sim N\ (\mu_i, \sigma^2)$, y $f_{ij}$ los factores de riesgo.

En el MLG se siguen teniendo $(y_i)$ para $i$ = 1, 2, …, $n$ observaciones independientes de la respuesta, unos errores centrados $E[\varepsilon_i] = 0$, y un predictor lineal determinista al que simbolizamos por $\eta_i$:

$$\eta_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{P} \beta_j f_{ij}.$$

Las dos extensiones del MLG con respecto al modelo clásico de regresión lineal por mínimos cuadrados ordinarios (MCO) son:

1. La distribución de $Y$ no tiene porqué ser Normal, puede provenir de cualquier distribución derivada de la familia exponencial de McCullagh y Nelder. Estas distribuciones se caracterizan por tener la siguiente función de densidad en un punto de la forma:

$$f(y_i; \theta_i; \phi_i) = exp\left\{\frac{y_i\theta_i - b(\theta_i)}{a(\phi_i)} + c(y_i, \phi_i\right\},$$

   para funciones especificadas $a(\cdot)$, $b(\cdot)$, y $c(\cdot)$, donde $\theta_i$ se denomina parámetro canónico y $\phi_i$ parámetro de dispersión. Puede deducirse, a partir de la fórmula anterior, la esperanza y la varianza de $y_i$ :

$$E[y_i] = \mu_i = b'(\theta_i),$$

$$Var[y_i] = b''(\theta_i)\, a(\phi_i).$$

Siendo la varianza el producto de dos componentes:

- $b''(\theta_i)$: se le denomina función de varianza y depende únicamente del parámetro canónico $\theta_i$ (y por tanto de la esperanza $\mu_i$). De manera que: $b''(\theta_i) = V(\mu_i)$,
- $a(\phi_i)$: depende solo del parámetro de dispersión $\phi$ y usualmente adopta la forma $a(\phi_i) = \frac{\phi_i}{w_i}$, con parámetro de dispersión constante para todas las observaciones, $\phi$, y unos pesos especificados a priori, $w_i$, que varían de observación a observación.

  Por lo tanto, podemos reescribir:

$$Var[y_i] = \frac{\phi V(\mu_i)}{w_i}.$$

Se puede utilizar para la función de varianza la familia paramétrica de distribuciones de error, de manera que:

$$V(\mu_i) = \mu_i^{\varsigma}.$$

Con esta familia de distribuciones del error, se obtienen algunos casos particulares de la familia exponencial, por ejemplo:

- Si $\varsigma = 0$, la distribución del error es Normal.
- Si $\varsigma = 1$, la distribución del error es Poisson.
- Si $\varsigma = 2$, la distribución del error es Gamma.
- Si $\varsigma = 3$, la distribución del error es Inversa Gaussiana.

2. La respuesta está relacionada con el predictor lineal a través de una función g (·), denominada función de enlace, que debe ser monótona y diferenciable:

$$\eta_i = g(E[y_i]) = g(\mu_i) = \beta_0 + \sum_{j=1}^{P} \beta_j f_{ij}.$$

De aquí se deriva que:

$$E[y_i] = \mu_i = g^{-1}(\eta_i) = g^{-1}\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{P} \beta_j f_{ij}\right).$$

Para algunas distribuciones de la familia exponencial, existen funciones de enlace "naturales", también denominadas canónicas. En este caso, el parámetro canónico coincide con el predictor lineal: $\theta(\mu_i) = \eta_i$. En general, se puede modelizar con cualquier otro enlace que no sea el canónico, siendo usual utilizar enlaces paramétricos:

$$\eta_i = g(\mu_i) = \begin{cases} \mu_i^{\lambda}, & \lambda \neq 0 \\ \log(\mu_i), & \lambda = 0. \end{cases}$$

En el MLG se obtiene un modelo aditivo combinando cualquier distribución del error con el enlace identidad, $\lambda$ = 1:

$$\mu_i = \eta_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{P} \beta_j f_{ij}.$$

En cambio, se obtiene un modelo multiplicativo si se utiliza el enlace logarítmico, $\lambda$ = 0:

$$\log(\mu_i) = \eta_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{P} \beta_j f_{ij} \rightarrow \mu_i = \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{P} \beta_j f_{ij}\right).$$

A continuación, se describen para el MLG los datos de partida necesarios para el cálculo de las provisiones, las hipótesis y la estimación de sus parámetros:

Datos de partida: cuantías no acumuladas pagadas en el año de desarrollo *j*, respecto de los siniestros ocurridos en el año de origen *i* ($c_{ij}$). Por lo tanto, $c_{ij}$ será la variable respuesta, considerando los factores de riesgo año de origen, *i*, y año de desarrollo, *j*.

Hipótesis: se asumen las siguientes hipótesis:

$$E[c_{ij}] = \mu_{ij}; V[c_{ij}] = \frac{\phi V(\mu_{ij})}{w_{ij}} = \frac{\phi}{w_{ij}} \mu_i^{\varsigma},$$

donde $\phi$ es el parámetro de dispersión y $w_{ij}$ son pesos a priori de los datos, que se asumen igual a uno, $w_{ij} = 1$, para las cuantías no acumuladas de un triángulo *run-off*.

Se asume para el MLG la función de enlace logarítmica: $log(\mu_{ij}) = \eta_{ij}$.

Estimación: el predictor lineal es de la forma:

$$\eta_{ij} = c_0 + \alpha_i + \beta_j,$$

siendo $c_0$ el término que se correspondería al año de origen y desarrollo 0, $\alpha_i$ el factor correspondiente a los años de origen *i* = 1, …, *k* y $\beta_j$ el factor correspondiente a los años de desarrollo *j* = 1, …, *k*.

A partir de aquí, se pueden realizar las predicciones de las cuantías pagadas no acumuladas, $\hat{c}_{ij}$, mediante la siguiente expresión:

$$\hat{c}_{ij} = \exp(c_0 + \alpha_i + \beta_j).$$

Una vez calculadas las cuantías anteriores, se obtienen los pagos futuros por año de origen ($\hat{R}_i$), sumando las cuantías estimadas por filas, y los pagos futuros totales ($\hat{R}$), como la suma de los individuales.

En el caso práctico de este trabajo, se va a aplicar el MLG para modelizar los datos $c_{ij}$ del triángulo *run-off* considerando las siguientes distribuciones para el error, junto con la función de enlace logarítmica:

- Distribución Normal.
- Distribución Poisson sobredispersa.
- Distribución Gamma.
- Distribución Gaussiana Inversa.

**Caso particular: método de mínimos cuadrados de De Vylder a partir de la distribución Normal.**

Si se considera el caso que la distribución del error es Normal, junto con la función de enlace logarítmica, se obtiene como caso particular el modelo determinista de mínimos cuadrados de De Vylder, es decir, la estimación de las cuantías futuras coincide en ambos modelos.

En este caso, tenemos que: $E[c_{ij}] = \mu_{ij}$; $V[c_{ij}] = \phi = \sigma^2$.

**Caso particular: método de Chain-Ladder a partir de la distribución Poisson sobredispersa.**

Si se considera el caso que la distribución del error es Poisson sobredispersa, junto con la función de enlace logarítmica, se obtiene como caso particular el modelo determinista de Chain-Ladder, es decir, la estimación de las cuantías futuras coincide en ambos modelos.

La distribución Poisson sobredispersa difiere de la distribución de Poisson en que la varianza no es igual a la media, pero es proporcional a esta.

En este caso, tenemos que: $E[c_{ij}] = \mu_{ij}$; $V[c_{ij}] = \phi\mu_{ij}$; $\phi > 1$.

La sobredispersión se introduce a través del parámetro $\phi$, que es conocido y se estima a partir de los datos disponibles.

**Caso particular: Distribución Gamma**

Si se considera que la distribución del error es Gamma, se puede deducir que: $E[c_{ij}] = \mu_{ij}$; $V[c_{ij}] = \phi\mu_{ij}^2$.

En este caso, la varianza es proporcional al cuadrado de la media y no proporcional a la media como ocurre en el caso Poisson sobredisperso.

**Caso particular: Distribución Gaussiana Inversa**

Si se considera que la distribución del error es Gaussiana Inversa, entonces: $E[c_{ij}] = \mu_{ij}$; $V[c_{ij}] = \phi\mu_{ij}^3 = \sigma^2\mu_{ij}^3$ .

# 4. CRITERIOS PARA LA COMPARATIVA DE MODELOS

## 4.1. Errores de predicción en el Modelo de Mack

El modelo de Mack, tal y como se ha comentado anteriormente, presenta la ventaja en comparación con el método Chain-Ladder clásico de proporcionar una medida de dispersión o variabilidad de las provisiones estimadas por año de origen ($\hat{R}_i$ ) calculando su Error Cuadrático Medio (ECM o MSE, por sus siglas en inglés):

$$MSE\left(\hat{R}_i\right) = \hat{C}_{i,k}^2 \cdot \sum_{s=k-i}^{k-1} \frac{\hat{\sigma}_s^2}{\widehat{m}_s^2} \cdot \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,s}^2} + \frac{1}{\sum_{q=0}^{k-s} \hat{C}_{q,s}}\right) \text{ para } i = 1, \dots, k.$$

Además, el modelo de Mack también proporciona un estimador para el error cuadrático medio de las provisiones totales, siendo:

$$MSE\left(\hat{R}\right) = \sum_{i=1}^{k} \left\{\left(s.e.\left(\hat{R}_i\right)\right)^2 + \hat{C}_{i,k}\left(\sum_{j=i+1}^{k} \hat{C}_{j,k}\right)\sum_{h=k-i}^{k-1} \frac{2\hat{\sigma}_h^2/\widehat{m}_h^2}{\sum_{n=0}^{k-h} \hat{C}_{n,h}}\right\}.$$

Tanto el estimador del error cuadrático medio de las provisiones por año de origen, como el de las provisiones totales, solo pueden utilizarse cuando las provisiones se calculan como suma aritmética de los pagos futuros, sin considerar rentabilidad sobre estas provisiones.

El MSE se calculará en el caso práctico y se utilizará para obtener el Coeficiente de Variación (CV), que se obtiene como la ratio de la raíz del MSE sobre el IBNR estimado.

## 4.2. Errores de predicción en el Modelo Lineal Generalizado

El MLG permite obtener el error cometido en la predicción, según la distribución supuesta en los datos, de los pagos futuros a partir de formulaciones analíticas y también haciendo uso de metodología *bootstrap*. A continuación, se explica en detalle tomando como referencia a England y Verrall (1999, 2002), Kaas *et al.* (2008), Boj y Costa (2014) y Boj *et al.* (2021).

Si se considera una variable aleatoria $c_{ij}$ y un valor predicho $\hat{c}_{ij}$, entonces el error cuadrático medio (MSE) de predicción utilizando la fórmula analítica del modelo se define y calcula aproximadamente como:

$$MSE\left(\hat{c}_{ij}\right) = E\left[\left(c_{ij} - \hat{c}_{ij}\right)^2\right] \cong Var\left[c_{ij}\right] + Var\left[\hat{c}_{ij}\right],$$

siendo,

- $Var\left[c_{ij}\right]$: la variabilidad de los datos (varianza del proceso)
- $Var\left[\hat{c}_{ij}\right]$: la variabilidad de la estimación (varianza de la estimación).

La varianza del proceso se estima con la fórmula de la varianza de la distribución, mientras que para la varianza de la estimación se utiliza la siguiente aproximación:

$$Var\left[\hat{c}_{ij}\right] \cong \left|\frac{\partial \mu_{ij}}{\partial \eta_{ij}}\right|^2 Var\left[\eta_{ij}\right].$$

A partir de aquí, asumiendo la función de enlace logarítmico y para la familia paramétrica de distribuciones, se obtiene:

- Error cuadrático medio para cada estimación de los pagos futuros:

$$MSE\left(\hat{c}_{ij}\right) \cong \frac{\phi}{w_{ij}}\hat{\mu}_{ij}^{\varsigma} + \hat{\mu}_{ij}^2 Var\left[\hat{\eta}_{ij}\right].$$

- Error cuadrático medio para la estimación de los pagos futuros por año de origen:

$$MSE\left(\hat{R}_i\right) \cong \sum_{j=k-i+1}^{k} \frac{\phi}{w_{ij}}\hat{\mu}_{ij}^{\varsigma} + \sum_{k=k-i+1}^{k} \hat{\mu}_{ij}^2 Var\left[\hat{\eta}_{ij}\right] + 2 \sum_{\substack{j_1=k-i+1 \\ j_2=k-i+1 \\ j_2>j_1}}^{k} \hat{\mu}_{ij_1}\hat{\mu}_{ij_2}\, Cov\left[\hat{\eta}_{ij_1,}\hat{\eta}_{ij_2}\right] \quad i = 1, \dots, k.$$

- Error cuadrático medio para la estimación de los pagos futuros totales:

$$MSE\left(\hat{R}\right) \cong \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k-i+1}^{k} \frac{\phi}{w_{ij}}\hat{\mu}_{ij}^{\varsigma} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{k=k-i+1}^{k} \hat{\mu}_{ij}^2 Var\left[\hat{\eta}_{ij}\right] + 2 \sum_{i=1}^{k} \sum_{\substack{j_1=k-i+1 \\ j_2=k-i+1 \\ j_2>j_1}}^{k} \hat{\mu}_{ij_1}\hat{\mu}_{ij_2}\, Cov\left[\hat{\eta}_{ij_1,}\hat{\eta}_{ij_2}\right].$$

Finalmente, el error de predicción para cada predicción de $\hat{c}_{ij}$, para las provisiones por año de origen y para la provisión total, se puede calcular como la raíz cuadrada de los correspondientes errores cuadráticos medios definidos.

Por otro lado, la estimación del error de predicción se puede realizar alternativamente haciendo uso de metodología de remuestreo *boostrap*.

Para aplicar esta metodología es necesario realizar el cálculo de los residuos de Pearson, mediante la siguiente expresión:

$$r_{ij}^{P} = \frac{c_{ij} - \hat{\mu}_{ij}}{\sqrt{\hat{\mu}_{ij}^{\varsigma} / w_{ij}}},$$

despejando $c_{ij} = r_{ij}^{P}\sqrt{\frac{\hat{\mu}_{ij}^{\varsigma}}{w_{ij}}} + \hat{\mu}_{ij}$.

Los residuos de Pearson son no escalados en el sentido que no incluyen el parámetro de escala $\phi$. Para estimar el parámetro de escala se aplica:

$$\hat{\phi}^{P} = \frac{1}{n-2k-1}\sum_{\substack{i,j=1,\dots,k\\ i+j\leq k}} w_{ij}\frac{(c_{ij}-\hat{\mu}_{ij})}{\hat{\mu}_{ij}^{\varsigma}},$$

donde $n = \frac{k(k+1)}{2}$ es el número de observaciones pasadas y $p = 2k+1$ es el número de parámetros estimados. Se utiliza $n-p$ en el denominar en lugar de $n$ para reducir el sesgo.

En el proceso de *bootstrap* se ajustan los residuos por los grados de libertad:

$$r_{ij}^{P'} = \sqrt{\frac{n}{n-2k-1}}\, r_{ij}^{P},$$

de la misma manera que en el parámetro de escala $\hat{\phi}^{P}$ para que sea compatible.

La idea o procedimiento general que se sigue al aplicar la metodología *bootstraping* es la siguiente:

1. Se aplica el MLG elegido al triángulo *run-off* de los datos de cuantías observadas y se calculan los residuos de Pearson.

2. Se remuestrean $B$ veces los residuos ajustados y con ellos, $r_{i}^{P*}$, y los valores estimados de $\hat{\mu}_{ij}$, se construyen $B$ nuevas muestras de triángulos *run-off* de cuantías no acumuladas aplicando la expresión:

$$c_{ij}{}^{*} = r_{ij}^{P'*}\sqrt{\hat{\mu}_{ij}^{\varsigma}} + \hat{\mu}_{ij}.$$

3. Se estima el MLG a cada una de las $B$ muestras y con él los pagos futuros individuales, por año de origen y totales.

El resultado es que se dispone de $B$ valores de los pagos futuros por año de origen y totales, lo que proporciona la distribución predictiva de dichos pagos.

El error de predicción (PE, por sus siglas en inglés) estimado se corresponde con la raíz cuadrada de la suma de la varianza de los pagos futuros según la distribución supuesta más la varianza estimada del error mediante *boostrap*, teniendo la siguiente expresión:

$$PE_{boot}(c_{ij}) \cong \sqrt{\frac{\hat{\phi}^{P}}{w_{ij}}\hat{c}_{ij}^{\varsigma} + V\left[\hat{c}_{ij}^{boot}\right]}, \qquad i,j = 1,\dots,k.$$

Las estimaciones *bootstrap* del error de predicción para las provisiones por año de origen son:

$$PE_{boot}(R_i) \cong \sqrt{\sum_{\substack{j=1,\dots,k \\ i+j>k}} \frac{\hat{\phi}^P}{w_{ij}} \hat{c}_{ij}^{\varsigma} + V\left[\hat{P}_i^{boot}\right]}, \qquad i = 1, \dots, k.$$

La estimación *bootstrap* del error de predicción para la provisión total es:

$$PE_{boot}(R) \cong \sqrt{\sum_{\substack{j=1,\dots,k \\ i+j>k}} \frac{\hat{\phi}^P}{w_{ij}} \hat{c}_{ij}^{\varsigma} + V\left[\hat{P}^{boot}\right]}.$$

Para poder comparar los resultados con el error de predicción definido de forma analítica para el MLG no ha sido necesario hacer un ajuste que tenga en cuenta los grados de libertad, porque se asume que en el proceso de *bootstraping* se están utilizando los residuos de Pearson ajustados. De lo contrario, si se utilizan los residuos de Pearson es necesario corregir el error estándar multiplicando por $\frac{n}{n-p}$, donde $p = 2k + 1$ es el número de parámetros del modelo.

Cuando se aplique el MLG en el caso práctico de este trabajo, se calcularán los errores de predicción mediante fórmula analítica para todas las distribuciones y, además, se podrán calcular también mediante metodología *bootstrap* cuando se suponga distribución Poisson sobredispersa y distribución Gamma. Posteriormente, se podrá obtener el CV, del mismo modo que con el Modelo de Mack.

## 4.3. Error en la estimación de los datos originales del triángulo de desarrollo

Otra forma de medir cómo se ajusta la estimación de un modelo a los datos reales es estimando los datos de partida. De esta manera, podremos comparar el valor estimado con el valor conocido y calcular el error de las predicciones respecto a los datos reales.

El cálculo de este error lo denominamos error cuadrático medio de los datos reales (ECMDR), siendo su expresión:

$$ECMDR = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (c_{ij} - \hat{c}_{ij})^2}{N}},$$

donde $N$ es el número total de observaciones.

En el caso práctico, se calculará el ECMDR para el MLG considerando $N = 21$. El resultado obtenido se dividirá por la suma de las $c_{ij}$ originales del triángulo que corresponda, obteniendo el error en porcentaje. De esta manera, lo podremos comparar no solo para los distintos métodos aplicados en un mismo triángulo, sino también para los diferentes triángulos con distintas cuantías. No se calculará el ECMDR para el Modelo de Mack, ya que los parámetros que obtenemos aplicando este modelo solo nos permiten realizar estimaciones para una parte del triángulo original y no para todo el triángulo.

## 4.4. Error de predicción en el resultado del desarrollo de los siniestros

Según Merz y Wüthrich (2008), la mejor estimación de la provisión para siniestros en el momento *t* es una predicción (insesgada) de los pasivos por pérdidas pendientes en el momento *t* en función de la información disponible en el momento *t*.

El resultado de desarrollo de los siniestros (*Claims Development Result*, CDR) describe cómo actualizamos esta predicción en el tiempo *t+1*. De esta manera, el CDR considera el problema de cuantificar los posibles cambios en las predicciones de siniestros con una visión a corto plazo.

Según Merz y Wüthrich (2014), podemos definir el cambio en la predicción del tiempo *t* al tiempo *t+1*, $CDR_{i,t+1}$, como:

$$CDR_{i,t+1} = \hat{C}_{i,j}^{(t)} - \hat{C}_{i,j}^{(t+1)},$$

siendo,

- $\hat{C}_{i,j}^{(t)}$: cuantía estimada acumulada de un año de origen y de desarrollo en concreto, con datos hasta el tiempo *t*.
- $\hat{C}_{i,j}^{(t+1)}$: cuantía estimada acumulada de un año de origen y de desarrollo en concreto, con datos hasta el tiempo *t+1*.

Merz y Wüthrich derivaron fórmulas analíticas para calcular el error cuadrático medio de la predicción del CDR para la versión estocástica del modelo Chain-Ladder (modelo de Mack) después de un año, asumiendo:

- Las reservas de apertura se establecieron utilizando el modelo Chain-Ladder (sin cola).
- Los siniestros se desarrollan en el año según los supuestos que subyacen al modelo de Mack.
- Las reservas se establecen después de un año utilizando el modelo Chain-Ladder (sin cola).

En el caso práctico, se calculará la desviación estándar del CDR después de un año, para el modelo de Mack (sin cola). También será posible realizar el cálculo para el MLG con distribución Poisson y distribución Gamma, solo en el caso que los errores de predicción se hayan calculado haciendo uso de metodología de remuestreo *bootstrap* (ver Gesmann *et al.* 2022).

Además, en el caso práctico, se calculará la desviación estándar del CDR total y se dividirá el resultado obtenido por el IBNR total estimado. De esta forma, se obtiene el resultado en forma de porcentaje y facilita la comparación para los distintos métodos aplicados y los diferentes datos de los que se dispone.

# 5. CASO PRÁCTICO

El caso práctico de este trabajo se enfoca en calcular la mejor estimación para la provisión de siniestros ocurridos pero no declarados, IBNR, en los seguros de automóviles, separándolos por tipo de vehículo y tipo de cobertura.

Para realizar los cálculos, se aplicarán los distintos métodos estocásticos explicados en el trabajo, que nos permiten obtener la estimación y el nivel de incertidumbre ligado al cálculo. Posteriormente, se analizarán los resultados y se compararán según el tipo de vehículo y el tipo de cobertura, aplicando los criterios de comparativa de modelos explicados, para poder llegar a unas conclusiones.

## 5.1. Datos

Se dispone de los triángulos *run-off* de una compañía aseguradora española con los datos de las cuantías pagadas por siniestros durante 6 años respecto de los accidentes ocurridos en el año de origen, según el tipo de vehículo y el tipo de cobertura. Para la realización del caso práctico, los datos de los triángulos han sido modificados algorítmicamente con el fin de respetar la confidencialidad de la empresa, sin que estos pierdan el sentido.

Los tipos de vehículo que se han considerado para realizar el estudio son el turismo y la motocicleta. Por otro lado, las coberturas que se han considerado son las que forman la cobertura de Responsabilidad Civil, siendo esta la protección más básica que debe tener un vehículo y, de hecho, la única obligatoria por ley. Dicha cobertura es la que garantiza que los daños a terceros serán cubiertos en caso de que el conductor asegurado sea el culpable del siniestro o accidente de tráfico y está diseñada para responder tanto por los daños personales como los materiales, de manera que esta cobertura se puede dividir en:

- Responsabilidad por daños personales: son los que sufren terceras personas cuando se produce un accidente y los ocupantes de otro vehículo resultan afectados. También cubre los daños y perjuicios que pueda sufrir un peatón o cualquier otra persona con la que se comparte la vía pública.

- Responsabilidad por daños materiales: cubre la reparación de daños materiales causados al vehículo o a la propiedad de otra persona cuando se produce un accidente.

Para más detalle, ver el Real Decreto Legislativo 8/2004, de 29 de octubre, por el que se aprueba el texto refundido de la Ley sobre responsabilidad civil y seguro en la circulación de vehículos a motor.

Además, el seguro de automóviles puede comprender otras coberturas que no son obligatorias por ley y que cubren tanto al conductor como al propio coche asegurado, en caso de verse involucrado en un accidente, con independencia de que sea o no el causante. No obstante, no se han tenido en cuenta estas coberturas para la realización del caso práctico.

## 5.2. Metodologías

La realización de los cálculos se hará mediante el lenguaje de programación R (*R Development Core Team*, 2022), haciendo uso de la librería *ChainLadder* (Gesmann *et al*. 2022) y, en concreto, de las siguientes funciones:

- *MackChainLadder:* para calcular las provisiones con el modelo de Mack, así como los errores de predicción derivados de su cálculo.
- *glmProvision:* para calcular las provisiones con el Modelo Lineal Generalizado para las distintas distribuciones mencionadas, así como los errores de predicción mediante fórmula analítica y *bootstrap.*
- *CDR:* para obtener la desviación estándar del resultado de desarrollo de los siniestros después de un año, para el modelo de Mack y el MLG con metodología *bootstrap*.

Tanto la función *MackChainLadder* como la función *glmReserve* permiten obtener el triángulo *run-off* completado con las cuantías acumuladas estimadas para los pagos futuros. También, ambas funciones proporcionan un resumen de información donde se recoge para cada año de origen y el total:

- Importe de las últimas cuantías acumuladas pagadas de siniestros observados (*Latest*).
- Ratio del importe de los últimos siniestros observados -*Latest*- sobre la predicción del importe de los siniestros del último año de desarrollo -*Ultimate*- (*Dev. To. Date*).
- Estimación del importe de los siniestros para el último año de desarrollo (*Ultimate*).
- Importe estimado de los pagos futuros (IBNR), así como su error estándar (SE) y su coeficiente de variación (CV).

Además, se calculará el vector de pagos futuros y la provisión total estimada de dos formas distintas:

1. Sin rentabilidad.
2. Tratando los pagos futuros como una renta, considerando la estructura temporal de tipos de interés libre de riesgo (ETTI) con ajuste por volatilidad de febrero de 2022 de Europa extraída de la web de EIOPA (2022):

| | **ETTI** |
|---|---|
| 1 | -0,335% |
| 2 | 0,066% |
| 3 | 0,276% |
| 4 | 0,392% |
| 5 | 0,480% |
| 6 | 0,548% |

**Tabla 2.** ETTI con ajuste por volatilidad de febrero de 2022 de Europa. Fuente: Elaboración propia.

$$\text{Provisión como renta} = \sum_{t=1}^{n} PF_t \ (1 + ETTI_t)^{-t},$$

donde los $PF_t$, con $t = 1, 2, \ldots, n$ y $n = 5$, corresponden a los pagos futuros estimados por año de calendario por siniestros IBNR.

Por último, se calculará el ECMDR considerando que $N$ = 21, y la desviación estándar del CDR, usando la función *CDR* del mismo paquete de R.

## 5.3. Seguro de turismos

### 5.3.1. Aplicación de las metodologías según el tipo de cobertura

A continuación, se aplican las metodologías explicadas para calcular la estimación de los pagos futuros por siniestros en los seguros de turismos según el tipo de cobertura que se considere.

**1) Cobertura de responsabilidad por daños personales**

Los datos de partida de los que se dispone es el triángulo *run-off* de cuantías no acumuladas:

| Año de origen *i* | Año de desarrollo *j* 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 80.300.236 | 62.428.615 | 18.367.893 | 8.475.488 | 5.210.896 | 2.393.488 |
| 1 | 82.739.239 | 60.234.236 | 20.270.531 | 9.336.214 | 6.521.613 | |
| 2 | 74.744.116 | 59.861.765 | 20.087.345 | 10.403.763 | | |
| 3 | 80.362.267 | 62.330.841 | 21.819.753 | | | |
| 4 | 80.216.434 | 63.211.320 | | | | |
| 5 | 75.008.510 | | | | | |

**Tabla 3.** Triángulo *run-off* de cuantías no acumuladas pagadas para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de turismos. Fuente: Elaboración propia.

### Resultados con el modelo de Mack

El cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas obtenido, que coincidiría con el que obtendríamos a través del método clásico de Chain-Ladder, es el siguiente:

| Año de origen *i* | Año de desarrollo *j* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | 80.300.236 | 142.728.851 | 161.096.744 | 169.572.232 | 174.783.128 | 177.176.616 |
| 1 | 82.739.239 | 142.973.475 | 163.244.006 | 172.580.220 | 179.101.833 | 181.554.462 |
| 2 | 74.744.116 | 134.605.881 | 154.693.226 | 165.096.989 | 170.758.214 | 173.096.584 |
| 3 | 80.362.267 | 142.693.108 | 164.512.861 | 174.202.793 | 180.176.259 | 182.643.601 |
| 4 | 80.216.434 | 143.427.763 | 163.947.189 | 173.603.803 | 179.556.729 | 182.015.587 |
| 5 | 75.008.510 | 133.015.081 | 152.044.822 | 161.000.377 | 166.521.128 | 168.801.476 |

**Tabla 4.** Cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de turismos obtenido con el Modelo de Mack. Fuente: Elaboración propia.

A continuación, se presenta un resumen de los resultados obtenidos con la aplicación del Modelo de Mack:

| Año de origen *i* | Latest | Dev.To.Date | Ultimate | IBNR | Mack SE | CV (IBNR) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 177.176.616 | 1,0000 | 177.176.616 | - | - | - |
| 1 | 179.101.833 | 0,9865 | 181.554.462 | 2.452.629 | 765.234 | 0,3120 |
| 2 | 165.096.989 | 0,9538 | 173.096.584 | 7.999.595 | 1.271.668 | 0,1590 |
| 3 | 164.512.861 | 0,9007 | 182.643.601 | 18.130.740 | 1.971.191 | 0,1087 |
| 4 | 143.427.763 | 0,7880 | 182.015.587 | 38.587.824 | 2.732.730 | 0,0708 |
| 5 | 75.008.510 | 0,4444 | 168.801.476 | 93.792.966 | 3.951.714 | 0,0421 |
| Totales | 904.324.572 | 0,8489 | 1.065.288.326 | 160.963.754 | 6.608.493 | 0,0411 |

**Tabla 5.** Resumen de resultados obtenidos con el modelo de Mack para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de turismos. Fuente: Elaboración propia

Los factores de desarrollo, coincidiendo con los del método clásico Chain-Ladder, son:

$$\hat{m}_1 = 1{,}773333 \qquad \hat{m}_2 = 1{,}143065 \qquad \hat{m}_3 = 1{,}058901$$
$$\hat{m}_4 = 1{,}034290 \qquad \hat{m}_5 = 1{,}013694.$$

La provisión total estimada, sin rentabilidad, con el modelo de Mack es de 160.963.754 €. El vector de pagos futuros, es decir, la suma de cada contradiagonal de las cuantías no acumuladas estimadas es el siguiente:

$$vpf = (96.329.783, 36.998.191, 17.375.823, 7.979.609, 2.280.348).$$

Se desprende de los valores obtenidos, que el error de predicción cometido en la estimación de la provisión total asciende al 4,11% de su importe.

Si calculamos la provisión total estimada como renta, esta es de 160.917.820 €, siendo el vector de pagos futuros actualizados si se tratan estos como una renta:

$$vpf = (96.653.572, 36.949.402, 17.232.742, 7.855{,}705, 2.226.399).$$

Además, si aplicamos la función *CDR* del mismo paquete, obtenemos que la desviación estándar del CDR es de 5.304.270, es decir, un 3,30% sobre el IBNR.

| Año de origen *i* | IBNR | CDR SE | Mack SE |
|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - |
| 1 | 2.452.629 | 765.234 | 765.234 |
| 2 | 7.999.595 | 1.099.246 | 1.271.668 |
| 3 | 18.130.740 | 1.556.120 | 1.971.191 |
| 4 | 38.587.824 | 2.003.804 | 2.732.730 |
| 5 | 93.792.966 | 3.050.767 | 3.951.714 |
| Totales | 160.963.754 | 5.304.270 | 6.608.493 |

**Tabla 6.** Resultados obtenidos a partir de la función *CDR* para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de turismos. Fuente: Elaboración propia.

Observamos que con la función *CDR*, no solo se obtiene la desviación estándar del resultado de desarrollo de los siniestros, sino que también se obtiene la estimación de los pagos futuros por año de origen, IBNR, y el error de predicción del modelo de Mack, ambos coincidiendo con los valores obtenidos anteriormente

**Modelo de Mack con efecto cola**

El modelo de Mack presenta la ventaja de que puede tener en cuenta el efecto cola para estimar las provisiones. Esto significa que las predicciones se pueden calcular más allá de las dimensiones del triángulo.

En este caso, el cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas y los factores de desarrollo coindicen con los obtenidos mediante el modelo de Mack puro (Chain-Ladder), no obstante, aquí se añade otro factor, denominado factor de cola, que se estima a través de una extrapolación lineal (Gesmann *et al*. 2022).

Los resultados obtenidos de la aplicación del modelo de Mack con efecto cola son:

| Año de origen *i* | Latest | Dev.To.Date | Ultimate | IBNR | Mack SE | CV (IBNR) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 177.176.616 | 0,9926 | 178.500.080 | 1.323.464 | 587.488 | 0,4439 |
| 1 | 179.101.833 | 0,9792 | 182.910.627 | 3.808.794 | 975.702 | 0,2562 |
| 2 | 165.096.989 | 0,9467 | 174.389.571 | 9.292.582 | 1.405.371 | 0,1512 |
| 3 | 164.512.861 | 0,8941 | 184.007.902 | 19.495.041 | 2.074.760 | 0,1064 |
| 4 | 143.427.763 | 0,7822 | 183.375.197 | 39.947.434 | 2.817.579 | 0,0705 |
| 5 | 75.008.510 | 0,4411 | 170.062.380 | 95.053.870 | 4.021.442 | 0,0423 |
| Totales | 904.324.572 | 0,8426 | 1.073.245.757 | 168.921.185 | 7.149.459 | 0,0423 |

**Tabla 7.** Resumen de resultados obtenidos con el modelo de Mack con efecto cola para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de turismos. Fuente: Elaboración propia

El factor de cola obtenido en este caso es: $\widehat{m}_6 = 1{,}007470$. Este factor es el que se utiliza para calcular las predicciones más allá de las dimensiones del triángulo.

La provisión total estimada, sin rentabilidad, a través del modelo de Mack con efecto cola es de 168.921.185 €. Si calculamos el vector de pagos futuros, en este caso, tenemos un año más que en el resto de los modelos, es decir, $n$ = 6:

$$vpf = (97.653.247, 38.354.356, 18.668.810, 9.343.910, 3.639.958, 1.260.904).$$

Se desprende de los valores obtenidos, que el error de predicción cometido en la estimación de la provisión total asciende al 4,23% de su importe.

Si calculamos la provisión total estimada como renta, esta es de 168.773.239 €, siendo el vector de pagos futuros actualizados si se tratan estos como una renta:

$$vpf = (97.981.485, 38.303.778, 18.515.082, 9.198.822, 3.553.843, 1.220.229).$$

No es posible obtener la desviación estándar del CDR con este modelo.

**MLG con distribución Normal y función de enlace logarítmica**

En este caso, el cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas obtenido coincidiría con el que obtendríamos a través del método determinista de mínimos cuadrados de De Vylder:

| | Año de desarrollo *j* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Año de origen *i* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | 80.300.236 | 142.728.851 | 161.096.744 | 169.572.232 | 174.783.128 | 177.176.616 |
| 1 | 82.739.239 | 142.973.475 | 163.244.006 | 172.580.220 | 179.101.833 | 181.554.462 |
| 2 | 74.744.116 | 134.605.881 | 154.693.226 | 165.096.989 | 170.758.214 | 173.096.584 |
| 3 | 80.362.267 | 142.693.108 | 164.512.861 | 174.202.793 | 180.176.259 | 182.643.601 |
| 4 | 80.216.434 | 143.427.763 | 163.947.189 | 173.603.803 | 179.556.729 | 182.015.587 |
| 5 | 75.008.510 | 133.015.081 | 152.044.822 | 161.000.377 | 166.521.128 | 168.801.476 |

**Tabla 8.** Cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de turismos obtenido con el MLG (distribución Normal). Fuente: Elaboración propia.

| Año de origen *i* | Latest | Dev.To.Date | Ultimate | IBNR | SE | CV |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 179.101.833 | 0,9867 | 181.520.622 | 2.418.789 | 2.156.354 | 0,8915 |
| 2 | 165.096.989 | 0,9548 | 172.910.125 | 7.813.136 | 2.777.747 | 0,3555 |
| 3 | 164.512.861 | 0,9020 | 182.390.979 | 17.878.118 | 3.358.797 | 0,1879 |
| 4 | 143.427.763 | 0,7889 | 181.811.993 | 38.384.230 | 3.809.384 | 0,0992 |
| 5 | 75.008.510 | 0,4448 | 168.623.483 | 93.614.973 | 4.512.399 | 0,0482 |
| Totales | 727.147.956 | 0,8195 | 887.257.203 | 160.109.247 | 11.041.465 | 0,0690 |

**Tabla 9.** Resumen de resultados obtenidos con el MLG (distribución Normal) para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de turismos. Fuente: Elaboración propia

La provisión total estimada, sin rentabilidad, con el MLG suponiendo una distribución Normal es de 160.109.249 €. El vector de pagos futuros, es decir, la suma de cada contradiagonal de las cuantías no acumuladas estimadas es el siguiente:

$$vpf = (96.004.155, 36.764.072, 17.212.921, 7.885.684, 2.242.417).$$

Se desprende de los valores obtenidos, que el error de predicción cometido en la estimación de la provisión total asciende al 6,90% de su importe.

La provisión total estimada como renta es de 160.066.227 €, siendo el vector de pagos futuros actualizados si se tratan estos como una renta:

$$vpf = (96.326.850, 36.715.591, 17.071.181, 7.763.239, 2.189.365).$$

El ECMDR que se obtiene es de un 0,12% sobre las cuantías originales. No es posible obtener la desviación estándar del CDR con este modelo.

**MLG con distribución Poisson sobredispersa y función de enlace logarítmica**

En este caso, el cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas y el vector de los pagos futuros coincidiría con el que obtendríamos a través del método clásico de Chain-Ladder, por lo tanto, son los mismos que los obtenidos con el Modelo de Mack.

Si se calculan los errores de predicción mediante fórmula analítica, se obtiene:

| Año de origen *i* | Latest | Dev.To.Date | Ultimate | IBNR | SE | CV |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 179.101.833 | 0,9865 | 181.554.462 | 2.452.629 | 667.252 | 0,2721 |
| 2 | 165.096.989 | 0,9538 | 173.096.584 | 7.999.595 | 1.097.005 | 0,1371 |
| 3 | 164.512.861 | 0,9007 | 182.643.601 | 18.130.740 | 1.623.837 | 0,0896 |
| 4 | 143.427.763 | 0,7880 | 182.015.587 | 38.587.824 | 2.415.204 | 0,0626 |
| 5 | 75.008.510 | 0,4444 | 168.801.476 | 93.792.966 | 4.766.494 | 0,0508 |
| Totales | 727.147.956 | 0,8188 | 888.111.710 | 160.963.754 | 6.596.482 | 0,0410 |

**Tabla 10.** Resumen de resultados obtenidos con el MLG (distribución Poisson sobredispersa) mediante fórmula analítica para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de turismos. Fuente: Elaboración propia

Observamos que el error de predicción cometido en la estimación de la provisión total asciende al 4,10% de su importe.

Por otro lado, si se calculan los errores de predicción con metodología *bootstrap*, se obtiene:

| Año de origen *i* | Latest | Dev.To.Date | Ultimate | IBNR | SE | CV |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 179.101.833 | 0,9865 | 181.554.462 | 2.452.629 | 654.917 | 0,2670 |
| 2 | 165.096.989 | 0,9538 | 173.096.584 | 7.999.595 | 1.117.926 | 0,1397 |
| 3 | 164.512.861 | 0,9007 | 182.643.601 | 18.130.740 | 1.609.805 | 0,0888 |
| 4 | 143.427.763 | 0,7880 | 182.015.587 | 38.587.824 | 2.388.545 | 0,0619 |
| 5 | 75.008.510 | 0,4444 | 168.801.476 | 93.792.966 | 4.690.375 | 0,0500 |
| Totales | 727.147.956 | 0,8188 | 888.111.710 | 160.963.754 | 6.679.360 | 0,0415 |

**Tabla 11.** Resumen de resultados obtenidos con el MLG (distribución Poisson sobredispersa) mediante *bootstrap* para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de turismos. Fuente: Elaboración propia

En este caso, el error de predicción cometido en la estimación de la provisión total asciende al 4,15% de su importe. Además, mediante la metodología *bootstrap*, es posible obtener la desviación estándar del CDR:

| Año de origen *i* | IBNR | IBNR SE | CDR SE |
|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - |
| 1 | 2.450.373 | 656.167 | 656.167 |
| 2 | 8.037.967 | 1.122.938 | 957.338 |
| 3 | 18.126.172 | 1.612.304 | 1.285.992 |
| 4 | 38.561.087 | 2.466.006 | 1.907.539 |
| 5 | 93.561.050 | 4.586.140 | 4.065.145 |
| Total | 160.736.649 | 6.410.129 | 5.547.972 |

**Tabla 12.** Resultados obtenidos a partir de la función CDR para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de turismos. Fuente: Elaboración propia.

El CDR SE total representa un 3,45% del IBNR total estimado. El ECMDR que se obtiene con la aplicación del MLG suponiendo una distribución Poisson sobredispersa es de un 0,13% sobre las cuantías originales.

### MLG con distribución Gamma y función de enlace logarítmica

El cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas que se obtiene es el siguiente:

| Año de origen *i* | Año de desarrollo *j* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | 80.300.236 | 142.728.851 | 161.096.744 | 169.572.232 | 174.783.128 | 177.176.616 |
| 1 | 82.739.239 | 142.973.475 | 163.244.006 | 172.580.220 | 179.101.833 | 181.698.747 |
| 2 | 74.744.116 | 134.605.881 | 154.693.226 | 165.096.989 | 171.070.861 | 173.619.220 |
| 3 | 80.362.267 | 142.693.108 | 164.512.861 | 174.376.007 | 180.558.860 | 183.196.367 |
| 4 | 80.216.434 | 143.427.763 | 163.932.700 | 173.628.229 | 179.706.009 | 182.298.693 |
| 5 | 75.008.510 | 133.027.357 | 152.022.840 | 161.004.641 | 166.635.010 | 169.036.836 |

**Tabla 13.** Cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de turismos obtenido con el MLG (distribución Gamma). Fuente: Elaboración propia.

La provisión total estimada, sin rentabilidad, con el MLG suponiendo una distribución Gamma es de 162.701.907 €. El vector de pagos futuros es el siguiente:

$$vpf = (96.957.716, 37.422.224, 17.697.088, 8.223.053, 2.401.826).$$

La provisión total estimada como renta es de 162.648.225 €, siendo el vector de pagos futuros actualizados si se tratan estos como una renta:

$$vpf = (97.283.616, 37.372.876, 17.551.361, 8.095.369, 2.345.003).$$

Si se calculan los errores de predicción mediante fórmula analítica, se obtiene:

| Año de origen *i* | Latest | Dev.To.Date | Ultimate | IBNR | SE | CV |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 179.101.833 | 0,9857 | 181.698.747 | 2.596.914 | 271.759 | 0,1046 |
| 2 | 165.096.989 | 0,9509 | 173.619.219 | 8.522.230 | 656.320 | 0,0770 |
| 3 | 164.512.861 | 0,8980 | 183.196.367 | 18.683.506 | 1.281.735 | 0,0686 |
| 4 | 143.427.763 | 0,7868 | 182.298.693 | 38.870.930 | 2.766.446 | 0,0712 |
| 5 | 75.008.510 | 0,4437 | 169.036.837 | 94.028.327 | 8.358.221 | 0,0889 |
| Totales | 727.147.956 | 0,8172 | 889.849.863 | 162.701.907 | 9.257.692 | 0,0569 |

**Tabla 14.** Resumen de resultados obtenidos con el MLG (distribución Gamma) mediante fórmula analítica para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de turismos. Fuente: Elaboración propia.

El error de predicción cometido en la estimación de la provisión total asciende al 5,69% de su importe.

Por otro lado, si se calculan los errores de predicción con metodología *bootstrap*, se obtiene:

| Año de origen *i* | Latest | Dev.To.Date | Ultimate | IBNR | SE | CV |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 179.101.833 | 0,9857 | 181.698.747 | 2.596.914 | 289.179 | 0,1114 |
| 2 | 165.096.989 | 0,9509 | 173.619.219 | 8.522.230 | 653.511 | 0,0767 |
| 3 | 164.512.861 | 0,8980 | 183.196.367 | 18.683.506 | 1.271.893 | 0,0681 |
| 4 | 143.427.763 | 0,7868 | 182.298.693 | 38.870.930 | 2.809.282 | 0,0723 |
| 5 | 75.008.510 | 0,4437 | 169.036.837 | 94.028.327 | 7.953.399 | 0,0846 |
| Totales | 727.147.956 | 0,8172 | 889.849.863 | 162.701.907 | 9.096.985 | 0,0559 |

**Tabla 15.** Resumen de resultados obtenidos con el MLG (distribución Gamma) mediante *bootstrap* para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de turismos. Fuente: Elaboración propia.

En este caso, el error de predicción cometido en la estimación de la provisión total es del 5,59% de su importe. Además, mediante *bootstrap* obtenemos la desviación estándar del CDR:

| Año de origen *i* | IBNR | IBNR SE | CDR SE |
|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - |
| 1 | 2.464.185 | 640.235 | 640.235 |
| 2 | 8.039.786 | 1.062.079 | 923.751 |
| 3 | 18.184.218 | 1.660.126 | 1.255.387 |
| 4 | 38.600.416 | 2.441.761 | 1.929.242 |
| 5 | 94.072.430 | 4.915.794 | 4.399.959 |
| Total | 161.361.034 | 6.577.390 | 5.751.715 |

**Tabla 16.** Resultados obtenidos a partir de la función CDR para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de turismos. Fuente: Elaboración propia.

El CDR SE total representa un 3,54% del IBNR total estimado. El ECMDR que se obtiene con la aplicación del MLG suponiendo una distribución Gamma es de un 0,24% sobre las cuantías originales.

**MLG con distribución Gaussiana Inversa y función de enlace logarítmica**

En este caso, el cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas y el resumen de los resultados obtenidos son:

| Año de origen *i* | Año de desarrollo *j* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | 80.300.236 | 142.728.851 | 161.096.744 | 169.572.232 | 174.783.128 | 177.176.616 |
| 1 | 82.739.239 | 142.973.475 | 163.244.006 | 172.580.220 | 179.101.833 | 181.877.659 |
| 2 | 74.744.116 | 134.605.881 | 154.693.226 | 165.096.989 | 171.460.532 | 174.280.224 |
| 3 | 80.362.267 | 142.693.108 | 164.512.861 | 174.581.568 | 181.016.593 | 183.867.959 |
| 4 | 80.216.434 | 143.427.763 | 163.809.398 | 173.474.107 | 179.650.933 | 182.387.891 |
| 5 | 75.008.510 | 133.023.309 | 151.881.575 | 160.823.922 | 166.539.078 | 169.071.469 |

**Tabla 17**. Cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de turismos obtenido con el MLG (distribución Gaussiana Inversa). Fuente: Elaboración propia.

| Año de origen *i* | Latest | Dev.To.Date | Ultimate | IBNR | SE | CV |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 179.101.833 | 0,9847 | 181.877.659 | 2.775.826 | 130.206 | 0,0469 |
| 2 | 165.096.989 | 0,9473 | 174.280.225 | 9.183.236 | 481.229 | 0,0524 |
| 3 | 164.512.861 | 0,8947 | 183.867.959 | 19.355.098 | 1.319.243 | 0,0682 |
| 4 | 143.427.763 | 0,7864 | 182.387.891 | 38.960.128 | 4.043.983 | 0,1038 |
| 5 | 75.008.510 | 0,4436 | 169.071.470 | 94.062.960 | 14.739.226 | 0,1567 |
| Totales | 727.147.956 | 0,8157 | 891.485.204 | 164.337.248 | 15.613.252 | 0,0950 |

**Tabla 18.** Resumen de resultados obtenidos con el MLG (distribución Gaussiana Inversa) para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de turismos. Fuente: Elaboración propia

La provisión total estimada, sin rentabilidad, con el MLG suponiendo una distribución Gaussiana Inversa es de 164.337.246 €. El vector de pagos futuros es el siguiente:

$$vpf = (97.604.510\,, 37.777.692\,, 17.970.539\,, 8.452.114\,, 2.532.391).$$

Se desprende de los valores obtenidos, que el error de predicción cometido en la estimación de la provisión total asciende al 9,50% de su importe.

La provisión total estimada como renta es de 164.276.372 €, siendo el vector de pagos futuros actualizados si se tratan estos como una renta:

$$vpf = (97.932.584, 37.727.875, 17.822.561, 8.320.874, 2.472.479).$$

El ECMDR que se obtiene es de un 0,41% sobre las cuantías originales. No es posible obtener la desviación estándar del CDR con este modelo.

### 2) Cobertura de responsabilidad por daños materiales

Los datos de partida de los que se dispone es el triángulo *run-off* de cuantías no acumuladas:

| Año de origen *i* | Año de desarrollo *j* 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 77.465.022 | 18.730.886 | 2.749.354 | 892.187 | 543.453 | 170.915 |
| 1 | 81.685.949 | 19.927.660 | 2.948.816 | 1.225.692 | 515.315 | |
| 2 | 83.571.563 | 19.623.953 | 2.837.212 | 1.252.474 | | |
| 3 | 83.535.630 | 20.763.444 | 2.593.942 | | | |
| 4 | 86.586.308 | 21.713.092 | | | | |
| 5 | 83.555.815 | | | | | |

**Tabla 19.** Triángulo *run-off* de cuantías no acumuladas pagadas para la cobertura de responsabilidad por daños materiales del seguro de turismos. Fuente: Elaboración propia.

### Resultados con el modelo de Mack

A continuación, se presenta el cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas obtenido, que coincidiría con el que obtendríamos a través del método clásico de Chain-Ladder, y el resumen de resultados obtenidos con el Modelo de Mack:

| Año de origen *i* | Año de desarrollo *j* 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 77.465.022 | 96.195.908 | 98.945.262 | 99.837.449 | 100.380.902 | 100.551.817 |
| 1 | 81.685.949 | 101.613.609 | 104.562.425 | 105.788.117 | 106.303.432 | 106.484.431 |
| 2 | 83.571.563 | 103.195.516 | 106.032.728 | 107.285.202 | 107.837.615 | 108.021.226 |
| 3 | 83.535.630 | 104.299.074 | 106.893.016 | 108.056.894 | 108.613.280 | 108.798.212 |
| 4 | 86.586.308 | 108.299.400 | 111.273.214 | 112.484.785 | 113.063.970 | 113.256.480 |
| 5 | 83.555.815 | 103.948.490 | 106.802.832 | 107.965.728 | 108.521.644 | 108.706.420 |

**Tabla 20.** Cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas para la cobertura de responsabilidad por daños materiales del seguro de turismos obtenido con el Modelo de Mack. Fuente: Elaboración propia.

| Año de origen *i* | Latest | Dev.To.Date | Ultimate | IBNR | Mack SE | CV (IBNR) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 100.551.817 | 1,0000 | 100.551.817 | - | - | - |
| 1 | 106.303.432 | 0,9983 | 106.484.431 | 180.999 | 32.027 | 0,1769 |
| 2 | 107.285.202 | 0,9932 | 108.021.226 | 736.024 | 61.668 | 0,0838 |
| 3 | 106.893.016 | 0,9825 | 108.798.212 | 1.905.196 | 202.469 | 0,1063 |
| 4 | 108.299.400 | 0,9562 | 113.256.480 | 4.957.080 | 306.179 | 0,0618 |
| 5 | 83.555.815 | 0,7686 | 108.706.420 | 25.150.605 | 670.541 | 0,0267 |
| Totales | 612.888.682 | 0,9490 | 645.818.586 | 32.929.904 | 831.371 | 0,0252 |

**Tabla 21.** Resumen de resultados obtenidos con el modelo de Mack para la cobertura de responsabilidad por daños materiales del seguro de turismos. Fuente: Elaboración propia.

Los factores de desarrollo, coincidiendo con los del método clásico Chain-Ladder, son:

$$\hat{m}_1 = 1{,}244061 \qquad \hat{m}_2 = 1{,}027459 \qquad \hat{m}_3 = 1{,}010888$$
$$\hat{m}_4 = 1{,}005149 \qquad \hat{m}_5 = 1{,}001703.$$

La provisión total estimada, sin rentabilidad, con el modelo de Mack es de 32.929.904 €. El vector de pagos futuros es el siguiente:

$$vpf = (25.263.779\,, 4.805.909\,, 1.927.013\,, 748.427\,, 184.776).$$

Se desprende de los valores obtenidos, que el error de predicción cometido en la estimación de la provisión total asciende al 2,52% de su importe.

Si calculamos la provisión total estimada como renta, esta es de 32.976.624 €, siendo el vector de pagos futuros actualizados si se tratan estos como una renta:

$$vpf = (25.348.697, 4.799.572, 1.911.145, 736.805, 180.405).$$

Además, si aplicamos la función *CDR* del mismo paquete, obtenemos que la desviación estándar del CDR es de 735.856, es decir, un 2,23% sobre el IBNR total estimado.

| Año de origen *i* | IBNR | CDR SE | Mack SE |
|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - |
| 1 | 180.999 | 32.027 | 32.027 |
| 2 | 736.024 | 55.081 | 61.668 |
| 3 | 1.905.196 | 194.330 | 202.469 |
| 4 | 4.957.080 | 232.199 | 306.179 |
| 5 | 25.150.605 | 604.687 | 670.541 |
| Totales | 32.929.904 | 735.856 | 831.371 |

**Tabla 22.** Resultados obtenidos a partir de la función *CDR* para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de turismos. Fuente: Elaboración propia.

**Modelo de Mack con efecto cola**

En este caso, se tiene en cuenta el efecto cola para estimar las provisiones a través del modelo de Mack. Esto significa que se calculan predicciones más allá de las dimensiones del triángulo.

El cuadrado *run-off* obtenido de cuantías acumuladas y los factores de desarrollo coindicen con los obtenidos mediante el modelo de Mack puro (Chain-Ladder), la diferencia es que aquí se añade un factor de cola, que se estima a través de una extrapolación lineal, y es el que se utiliza para calcular las predicciones más allá de las dimensiones del triángulo.

Los resultados obtenidos de la aplicación del modelo de Mack con efecto cola son:

| Año de origen *i* | Latest | Dev.To.Date | Ultimate | IBNR | Mack SE | CV (IBNR) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 100.551.817 | 0,9994 | 100.617.132 | 65.315 | 17.826 | 0,2729 |
| 1 | 106.303.432 | 0,9977 | 106.553.599 | 250.167 | 37.062 | 0,1481 |
| 2 | 107.285.202 | 0,9925 | 108.091.392 | 806.190 | 64.514 | 0,0800 |
| 3 | 106.893.016 | 0,9819 | 108.868.883 | 1.975.867 | 203.482 | 0,1030 |
| 4 | 108.299.400 | 0,9556 | 113.330.047 | 5.030.647 | 306.998 | 0,0610 |
| 5 | 83.555.815 | 0,7681 | 108.777.032 | 25.221.217 | 671.243 | 0,0266 |
| Totales | 612.888.682 | 0,9484 | 646.238.085 | 33.349.403 | 836.466 | 0,0251 |

**Tabla 23.** Resumen de resultados obtenidos con el modelo de Mack con efecto cola para la cobertura de responsabilidad por daños materiales del seguro de turismos. Fuente: Elaboración propia

Siendo, el factor de cola obtenido $\widehat{m}_6 = 1{,}000650$.

La provisión total estimada, sin rentabilidad, a través del modelo de Mack con efecto cola es de 33.349.403 €, y el vector de pagos futuros, teniendo en cuenta que $n = 6$, es el siguiente:

$$vpf = (25.329.094\,, 4.875.078\,, 1.997.180, 819.098, 258.343, 70.612).$$

Se desprende de los valores obtenidos, que el error de predicción cometido en la estimación de la provisión total asciende al 2,51% de su importe.

Si calculamos la provisión total estimada como renta, esta es de 33.390.558 €, siendo el vector de pagos futuros actualizados si se tratan estos como una renta:

$$vpf = (25.414.231, 4.868.649, 1.980.734, 806.379, 252.231, 68.334).$$

No es posible obtener la desviación estándar del CDR con este modelo.

**MLG con distribución Normal y función de enlace logarítmica**

En este caso, el cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas obtenido coincidiría con el que obtendríamos a través del método determinista de mínimos cuadrados de De Vylder:

| Año de origen *i* | Año de desarrollo *j* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | 77.465.022 | 96.195.908 | 98.945.262 | 99.837.449 | 100.380.902 | 100.551.817 |
| 1 | 81.685.949 | 101.613.609 | 104.562.425 | 105.788.117 | 106.303.432 | 106.483.760 |
| 2 | 83.571.563 | 103.195.516 | 106.032.728 | 107.285.202 | 107.839.321 | 108.023.412 |
| 3 | 83.535.630 | 104.299.074 | 106.893.016 | 108.059.082 | 108.614.659 | 108.799.234 |
| 4 | 86.586.308 | 108.299.400 | 111.255.647 | 112.465.031 | 113.041.247 | 113.232.679 |
| 5 | 83.555.815 | 103.956.017 | 106.804.453 | 107.969.732 | 108.524.934 | 108.709.384 |

**Tabla 24.** Cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas para la cobertura de responsabilidad por daños materiales del seguro de turismos obtenido con el MLG (distribución Normal). Fuente: Elaboración propia.

| Año de origen *i* | Latest | Dev.To.Date | Ultimate | IBNR | SE | CV |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 106.303.432 | 0,9983 | 106.483.760 | 180.328 | 503.745 | 2,7935 |
| 2 | 107.285.202 | 0,9932 | 108.023.412 | 738.210 | 667.394 | 0,9041 |
| 3 | 106.893.016 | 0,9825 | 108.799.234 | 1.906.218 | 780.660 | 0,4095 |
| 4 | 108.299.400 | 0,9564 | 113.232.679 | 4.933.279 | 884.700 | 0,1793 |
| 5 | 83.555.815 | 0,7686 | 108.709.385 | 25.153.570 | 958.321 | 0,0381 |
| Totales | 512.336.865 | 0,9396 | 545.248.470 | 32.911.605 | 2.638.152 | 0,0802 |

**Tabla 25.** Resumen de resultados obtenidos con el MLG (distribución Normal) para la cobertura de responsabilidad por daños materiales del seguro de turismos. Fuente: Elaboración propia

La provisión total estimada, sin rentabilidad, con el MLG suponiendo una distribución Normal es de 32.911.604 €. El vector de pagos futuros, es decir, la suma de cada contradiagonal de las cuantías no acumuladas estimadas es el siguiente:

$$vpf = (25.256.962, 4.797.488, 1.926.070, 746.634, 184.450).$$

Se desprende de los valores obtenidos, que el error de predicción cometido en la estimación de la provisión total asciende al 8,02% de su importe.

La provisión total estimada como renta es de 32.958.355 €, siendo el vector de pagos futuros actualizados si se tratan estos como una renta:

$$vpf = (25.341.857, 4.791.162, 1.910.210, 735.041, 180.086).$$

El ECMDR que se obtiene es de un 0,04% sobre las cuantías originales. No es posible obtener la desviación estándar del CDR con este modelo.

**MLG con distribución Poisson sobredispersa y función de enlace logarítmica**

En este caso, el cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas y el vector de los pagos futuros coincidiría con el que obtendríamos a través del método clásico de Chain-Ladder, por lo tanto, son los mismos que los obtenidos con el Modelo de Mack.

Si se calculan los errores de predicción mediante fórmula analítica, se obtiene:

| Año de origen *i* | Latest | Dev.To.Date | Ultimate | IBNR | SE | CV |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 106.303.432 | 0,9983 | 106.484.431 | 180.999 | 69.876 | 0,3861 |
| 2 | 107.285.202 | 0,9932 | 108.021.226 | 736.024 | 126.804 | 0,1723 |
| 3 | 106.893.016 | 0,9825 | 108.798.212 | 1.905.196 | 192.947 | 0,1013 |
| 4 | 108.299.400 | 0,9562 | 113.256.480 | 4.957.080 | 302.859 | 0,0611 |
| 5 | 83.555.815 | 0,7686 | 108.706.420 | 25.150.605 | 723.501 | 0,0288 |
| Totales | 512.336.865 | 0,9396 | 545.266.769 | 32.929.904 | 909.675 | 0,0276 |

**Tabla 26.** Resumen de resultados obtenidos con el MLG (distribución Poisson sobredispersa) mediante fórmula analítica para la cobertura de responsabilidad por daños materiales del seguro de turismos. Fuente: Elaboración propia

Observamos que el error de predicción cometido en la estimación de la provisión total asciende al 2,76% de su importe.

Por otro lado, si se calculan los errores de predicción con metodología *bootstrap*, se obtiene:

| Año de origen *i* | Latest | Dev.To.Date | Ultimate | IBNR | SE | CV |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 106.303.432 | 0,9983 | 106.484.431 | 180.999 | 71.356 | 0,3942 |
| 2 | 107.285.202 | 0,9932 | 108.021.226 | 736.024 | 127.786 | 0,1736 |
| 3 | 106.893.016 | 0,9825 | 108.798.212 | 1.905.196 | 196.124 | 0,1029 |
| 4 | 108.299.400 | 0,9562 | 113.256.480 | 4.957.080 | 317.545 | 0,0641 |
| 5 | 83.555.815 | 0,7686 | 108.706.420 | 25.150.605 | 738.317 | 0,0294 |
| Totales | 512.336.865 | 0,9396 | 545.266.769 | 32.929.904 | 931.374 | 0,0283 |

**Tabla 27.** Resumen de resultados obtenidos con el MLG (distribución Poisson sobredispersa) mediante *bootstrap* para la cobertura de responsabilidad por daños materiales del seguro de turismos. Fuente: Elaboración propia

En este caso, el error de predicción cometido en la estimación de la provisión total asciende al 2,83 % de su importe.

Además, mediante la metodología *bootstrap*, es posible obtener la desviación estándar del CDR:

| Año de origen *i* | IBNR | IBNR SE | CDR SE |
|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - |
| 1 | 180.983 | 71.175 | 71.175 |
| 2 | 742.594 | 128.209 | 112.775 |
| 3 | 1.899.393 | 199.944 | 151.380 |
| 4 | 4.954.350 | 301.115 | 231.433 |
| 5 | 25.151.280 | 711.560 | 665.218 |
| Total | 32.928.600 | 883.876 | 795.433 |

**Tabla 28.** Resultados obtenidos a partir de la función CDR para la cobertura de responsabilidad por daños materiales del seguro de turismos. Fuente: Elaboración propia.

El CDR SE total representa un 2,42% del IBNR total estimado. El ECMDR que se obtiene con la aplicación del MLG suponiendo una distribución Poisson sobredispersa es de un 0,04% sobre las cuantías originales.

### MLG con distribución Gamma y función de enlace logarítmica

El cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas que se obtiene es el siguiente:

| Año de origen $i$ | Año de desarrollo $j$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | 77.465.022 | 96.195.908 | 98.945.262 | 99.837.449 | 100.380.902 | 100.551.817 |
| 1 | 81.685.949 | 101.613.609 | 104.562.425 | 105.788.117 | 106.303.432 | 106.490.038 |
| 2 | 83.571.563 | 103.195.516 | 106.032.728 | 107.285.202 | 107.848.166 | 108.037.678 |
| 3 | 83.535.630 | 104.299.074 | 106.893.016 | 108.013.763 | 108.556.659 | 108.739.416 |
| 4 | 86.586.308 | 108.299.400 | 111.305.494 | 112.513.278 | 113.098.336 | 113.295.286 |
| 5 | 83.555.815 | 103.943.100 | 106.804.275 | 107.953.834 | 108.510.687 | 108.698.142 |

**Tabla 29.** Cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas para la cobertura de responsabilidad por daños materiales del seguro de turismos obtenido con el MLG (distribución Gamma). Fuente: Elaboración propia.

La provisión total estimada, sin rentabilidad, con el MLG suponiendo una distribución Gamma es de 32.923.695 €. El vector de pagos futuros es el siguiente:

$$vpf = (25.263.696, 4.801.367, 1.917.374, 753.803, 187.455).$$

La provisión total estimada como renta es de 32.970.353 €, siendo el vector de pagos futuros actualizados si se tratan estos como una renta:

$$vpf = (25.348.614, 4.795.035, 1.901.585, 742.098, 183.020).$$

Si se calculan los errores de predicción mediante fórmula analítica, se obtiene:

| Año de origen $i$ | Latest | Dev.To.Date | Ultimate | IBNR | SE | CV |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 106.303.432 | 0,9982 | 106.490.038 | 186.606 | 22.201 | 0,1190 |
| 2 | 107.285.202 | 0,9930 | 108.037.679 | 752.477 | 67.089 | 0,0892 |
| 3 | 106.893.016 | 0,9830 | 108.739.416 | 1.846.400 | 148.204 | 0,0803 |
| 4 | 108.299.400 | 0,9559 | 113.295.285 | 4.995.885 | 417.615 | 0,0836 |
| 5 | 83.555.815 | 0,7687 | 108.698.142 | 25.142.327 | 2.737.437 | 0,1089 |
| Totales | 512.336.865 | 0,9396 | 545.260.559 | 32.923.694 | 2.793.041 | 0,0848 |

**Tabla 30.** Resumen de resultados obtenidos con el MLG (distribución Gamma) mediante fórmula analítica para la cobertura de responsabilidad por daños materiales del seguro de turismos. Fuente: Elaboración propia.

El error de predicción cometido en la estimación de la provisión total asciende al 8,48% de su importe.

Por otro lado, si se calculan los errores de predicción con metodología *bootstrap*, se obtiene:

| Año de origen *i* | Latest | Dev.To.Date | Ultimate | IBNR | SE | CV |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 106.303.432 | 0,9982 | 106.490.038 | 186.606 | 23.412 | 0,1255 |
| 2 | 107.285.202 | 0,9930 | 108.037.679 | 752.477 | 69.095 | 0,0918 |
| 3 | 106.893.016 | 0,9830 | 108.739.416 | 1.846.400 | 149.708 | 0,0811 |
| 4 | 108.299.400 | 0,9559 | 113.295.285 | 4.995.885 | 426.381 | 0,0853 |
| 5 | 83.555.815 | 0,7687 | 108.698.142 | 25.142.327 | 2.801.695 | 0,1114 |
| Totales | 512.336.865 | 0,9396 | 545.260.559 | 32.923.694 | 2.864.636 | 0,0870 |

**Tabla 31.** Resumen de resultados obtenidos con el MLG (distribución Gamma) mediante *bootstrap* para la cobertura de responsabilidad por daños materiales del seguro de turismos. Fuente: Elaboración propia.

En este caso, el error de predicción cometido en la estimación de la provisión total es del 8,70% de su importe. Además, con *bootstrap* se obtiene la desviación estándar del CDR:

| Año de origen *i* | IBNR | IBNR SE | CDR SE |
|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - |
| 1 | 183.963 | 68.952 | 68.952 |
| 2 | 740.824 | 129.542 | 113.851 |
| 3 | 1.911.800 | 200.506 | 156.573 |
| 4 | 4.969.303 | 308.556 | 246.608 |
| 5 | 25.139.784 | 709.170 | 660.119 |
| Total | 32.945.673 | 904.237 | 812.681 |

**Tabla 32.** Resultados obtenidos a partir de la función CDR para la cobertura de responsabilidad por daños materiales del seguro de turismos. Fuente: Elaboración propia.

El CDR SE total representa un 2,47% del IBNR total estimado. El ECMDR que se obtiene con la aplicación del MLG suponiendo una distribución Gamma es de un 0,13% sobre las cuantías originales.

**MLG con distribución Gaussiana Inversa y función de enlace logarítmica**

En este caso, el cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas y el resumen de los resultados obtenidos son:

| Año de origen *i* | Año de desarrollo *j* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | 77.465.022 | 96.195.908 | 98.945.262 | 99.837.449 | 100.380.902 | 100.551.817 |
| 1 | 81.685.949 | 101.613.609 | 104.562.425 | 105.788.117 | 106.303.432 | 106.486.547 |
| 2 | 83.571.563 | 103.195.516 | 106.032.728 | 107.285.202 | 107.886.027 | 108.086.063 |
| 3 | 83.535.630 | 104.299.074 | 106.893.016 | 107.925.702 | 108.439.971 | 108.611.190 |
| 4 | 86.586.308 | 108.299.400 | 111.325.925 | 112.510.137 | 113.099.865 | 113.296.207 |
| 5 | 83.555.815 | 103.964.426 | 106.823.709 | 107.942.483 | 108.499.624 | 108.685.116 |

**Tabla 33**. Cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas para la cobertura de responsabilidad por daños materiales del seguro de turismos obtenido con el MLG (distribución Gaussiana Inversa). Fuente: Elaboración propia.

| Año de origen $i$ | Latest | Dev.To.Date | Ultimate | IBNR | SE | CV |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 106.303.432 | 0,9983 | 106.486.547 | 183.115 | 12.554 | 0,0686 |
| 2 | 107.285.202 | 0,9926 | 108.086.064 | 800.862 | 72.953 | 0,0911 |
| 3 | 106.893.016 | 0,9842 | 108.611.190 | 1.718.174 | 228.589 | 0,1330 |
| 4 | 108.299.400 | 0,9559 | 113.296.207 | 4.996.807 | 1.663.095 | 0,3328 |
| 5 | 83.555.815 | 0,7688 | 108.685.116 | 25.129.301 | 18.866.094 | 0,7508 |
| Totales | 512.336.865 | 0,9398 | 545.165.125 | 32.828.260 | 18.968.681 | 0,5778 |

**Tabla 34.** Resumen de resultados obtenidos con el MLG (distribución Gaussiana Inversa) para la cobertura de responsabilidad por daños materiales del seguro de turismos. Fuente: Elaboración propia

La provisión total estimada, sin rentabilidad, con el MLG suponiendo una distribución Gaussiana Inversa es de 32.828.258 €. El vector de pagos futuros es el siguiente:

$$vpf = (25.251.762, 4.757.800, 1.879.721, 753.483, 185.492).$$

Se desprende de los valores obtenidos, que el error de predicción cometido en la estimación de la provisión total asciende al 57,78% de su importe.

La provisión total estimada como renta es de 32.875.295 €, siendo el vector de pagos futuros actualizados si se tratan estos como una renta:

$$vpf = (25.336.640, 4.751.526, 1.864.242, 741.783, 181.104).$$

El ECMDR que se obtiene es de un 0,35% sobre las cuantías originales. No es posible obtener la desviación estándar del CDR con este modelo.

### 5.3.2. Análisis de los resultados

Se pueden resumir los resultados obtenidos de la aplicación de los distintos métodos estocásticos para estimar la provisión de siniestros IBNR en el seguro de turismos, para las coberturas de responsabilidad por daños personales y daños materiales, en las siguientes tablas:

| **Método estocástico** | **IBNR** | **Provisión como renta** | **CV total** | **CDR SE** | **Dev. To Date** | **ECMDR** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Modelo de Mack | 160.963.754 | 160.917.820 | 4,11% | 3,30% | 84,89% | - |
| Modelo de Mack con efecto cola | 168.921.185 | 168.773.239 | 4,23% | - | 84,26% | - |
| MLG Normal | 160.109.249 | 160.066.227 | 6,90% | - | 81,95% | 0,12% |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| MLG Poisson sobredispersa "fórmula" | 160.963.754 | 160.917.820 | 4,10% | - | 81,88% | 0,13% |
| MLG Poisson sobredispersa "bootstrap" | 160.963.754 | 160.917.820 | 4,15% | 3,45% | 81,88% | 0,13% |
| MLG Gamma "fórmula" | 162.701.907 | 162.648.225 | 5,69% | - | 81,72% | 0,24% |
| MLG Gamma "bootstrap" | 162.701.907 | 162.648.225 | 5,59% | 3,54% | 81,72% | 0,24% |
| MLG Gaussiana Inversa | 164.337.246 | 164.276.372 | 9,50% | - | 81,57% | 0,41% |

**Tabla 35.** Resumen de los resultados obtenidos de la aplicación de los distintos métodos estocásticos para la cobertura de responsabilidad por daños personales en el seguro de turismos. Fuente: Elaboración propia.

| Método estocástico | IBNR | Provisión como renta | CV total | CDR SE | Dev. To Date | ECMDR |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Modelo de Mack | 32.929.904 | 32.976.624 | 2,52% | 2,23% | 94,90% | - |
| Modelo de Mack con efecto cola | 33.349.403 | 33.390.558 | 2,51% | - | 94,84% | - |
| MLG Normal | 32.911.604 | 32.958.355 | 8,02% | - | 93,96% | 0,04% |
| MLG Poisson sobredispersa "fórmula" | 32.929.904 | 32.976.624 | 2,76% | - | 93,96% | 0,04% |
| MLG Poisson sobredispersa "bootstrap" | 32.929.904 | 32.976.624 | 2,83% | 2,42% | 93,96% | 0,04% |
| MLG Gamma "fórmula" | 32.923.695 | 32.970.353 | 8,48% | - | 93,96% | 0,13% |
| MLG Gamma "bootstrap" | 32.923.695 | 32.970.353 | 8,70% | 2,47% | 93,96% | 0,13% |
| MLG Gaussiana Inversa | 32.828.258 | 32.875.295 | 57,78% | - | 93,98% | 0,35% |

**Tabla 36.** Resumen de los resultados obtenidos de la aplicación de los distintos métodos estocásticos para la cobertura de responsabilidad por daños materiales en el seguro de turismos. Fuente: Elaboración propia.

Los criterios que se han considerado para analizar los resultados y poder comparar los modelos son: la estimación del IBNR total, la provisión total considerada como renta, el CV total, la desviación estándar del CDR sobre el IBNR total estimado, la ratio *Dev. To*

*Date* o desviación total hasta la fecha y el ECMDR sobre la suma de las cuantías originales.

No hay una única opción para escoger uno de los modelos, pues la elección dependerá de los criterios que se tengan en cuenta y de la aversión al riesgo que tenga la entidad aseguradora o reaseguradora.

Si se considera que la aseguradora o reaseguradora es adversa al riesgo, de manera que prefiere evitar la incertidumbre, y se centra para la elección del modelo en el valor obtenido del CV, esta escogería el modelo que proporcione el CV total menor. En este caso, para la cobertura de responsabilidad por daños personales se escogería el MLG con distribución Poisson sobredispersa "fórmula" y para la cobertura de responsabilidad por daños materiales el Modelo de Mack.

Por otro lado, puede ser que la aseguradora o reaseguradora sea adversa al riesgo pero centre su atención en los valores obtenidos de IBNR total o provisión total como renta, entonces esta escogería el modelo que proporcione un importe de estos más elevado. En este caso, se podría escoger para ambas coberturas el Modelo de Mack con efecto cola. No obstante, si no se quiere considerar el efecto cola, entonces, para la cobertura de responsabilidad por daños personales se escogería el MLG con distribución Gaussiana Inversa y para la cobertura de responsabilidad por daños materiales el Modelo de Mack o el MLG con distribución Poisson sobredispersa.

Si la entidad aseguradora o reaseguradora tiene en cuenta la incertidumbre asociada al modelo a corto plazo, escogerá el modelo que proporcione una desviación estándar del CDR menor. En este caso, se escogería el Modelo de Mack para realizar las predicciones para ambas coberturas.

Si se elige el modelo teniendo en cuenta la mejor estimación obtenida para los datos reales observados del triángulo de cuantías pagadas, de entre los MLG estimados, se escogerá el modelo que proporcione el ECMDR menor. En este caso, se escogería para ambas coberturas el MLG con distribución Normal o Poisson sobredispersa.

Además, con los resultados obtenidos, se puede observar que en la cobertura de responsabilidad por daños personales la ratio *Dev. To. Date.* es bastante menor que la obtenida en la cobertura de responsabilidad por daños materiales. Esto significa que, el importe de los últimos siniestros observados -*Latest*- sobre la predicción del importe de los siniestros del último año de desarrollo -*Ultimate*- es menor en la cobertura de responsabilidad por daños personales, es decir, que los pagos tardan más en desarrollarse completamente cuando se trata de cubrir daños personales. En este caso, podría ser una buena opción considerar el Modelo de Mack con efecto cola para hacer predicciones más allá del triángulo.

Del hecho anterior también se deduce que, el IBNR total estimado sobre el valor *Ultimate* es mayor en la cobertura de responsabilidad por daños personales, lo que conlleva que, en general, los coeficientes de variación obtenidos para los mejores modelos sean mayores que los obtenidos en la cobertura de responsabilidad por daños materiales.

## 5.4. Seguro de motocicletas

### 5.4.1. Aplicación de las metodologías según el tipo de cobertura

A continuación, se aplican las metodologías explicadas para calcular la estimación de los pagos futuros por siniestros en los seguros de motocicletas según el tipo de cobertura que se considere.

**1) Cobertura de responsabilidad por daños personales**

Los datos de partida de los que se dispone es el triángulo *run-off* de cuantías no acumuladas:

| Año de origen *i* | Año de desarrollo *j* 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 11.992.074 | 6.889.531 | 1.180.619 | 753.910 | 311.012 | 77.299 |
| 1 | 12.427.139 | 7.029.833 | 2.292.458 | 573.651 | 365.704 | |
| 2 | 13.519.414 | 7.950.634 | 1.869.977 | 848.005 | | |
| 3 | 14.243.021 | 7.538.052 | 1.694.661 | | | |
| 4 | 14.734.046 | 9.364.844 | | | | |
| 5 | 14.496.066 | | | | | |

**Tabla 37.** Triángulo *run-off* de cuantías no acumuladas pagadas para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de motocicletas. Fuente: Elaboración propia.

### Resultados con el modelo de Mack

El cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas obtenido, que coincidiría con el que obtendríamos a través del método clásico de Chain-Ladder, es el siguiente:

| Año de origen *i* | Año de desarrollo *j* 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 11.992.074 | 18.881.605 | 20.062.224 | 20.816.134 | 21.127.146 | 21.204.445 |
| 1 | 12.427.139 | 19.456.972 | 21.749.430 | 22.323.081 | 22.688.785 | 22.771.798 |
| 2 | 13.519.414 | 21.470.048 | 23.340.025 | 24.188.030 | 24.567.463 | 24.657.349 |
| 3 | 14.243.021 | 21.781.073 | 23.475.734 | 24.259.643 | 24.640.199 | 24.730.352 |
| 4 | 14.734.046 | 24.098.890 | 26.177.598 | 27.051.728 | 27.476.083 | 27.576.611 |
| 5 | 14.496.066 | 22.895.507 | 24.870.414 | 25.700.895 | 26.104.060 | 26.199.568 |

**Tabla 38.** Cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de motocicletas obtenido con el Modelo de Mack. Fuente: Elaboración propia.

A continuación, se presenta un resumen de los resultados obtenidos con la aplicación del Modelo de Mack:

| Año de origen *i* | Latest | Dev.To.Date | Ultimate | IBNR | Mack SE | CV (IBNR) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 21.204.445 | 1,0000 | 21.204.445 | - | - | - |
| 1 | 22.688.785 | 0,9964 | 22.771.798 | 83.013 | 14.306 | 0,1723 |
| 2 | 24.188.030 | 0,9810 | 24.657.349 | 469.319 | 32.896 | 0,0701 |
| 3 | 23.475.734 | 0,9493 | 24.730.352 | 1.254.618 | 167.444 | 0,1335 |
| 4 | 24.098.890 | 0,8739 | 27.576.611 | 3.477.721 | 630.092 | 0,1812 |
| 5 | 14.496.066 | 0,5533 | 26.199.568 | 11.703.502 | 932.365 | 0,0797 |
| Totales | 130.151.950 | 0,8845 | 147.140.123 | 16.988.173 | 1.228.090 | 0,0723 |

**Tabla 39.** Resumen de resultados obtenidos con el modelo de Mack para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de motocicletas. Fuente: Elaboración propia

Los factores de desarrollo, coincidiendo con los del método clásico Chain-Ladder son:

$$\widehat{m}_1 = 1{,}579429 \qquad \widehat{m}_2 = 1{,}086257 \qquad \widehat{m}_3 = 1{,}033392$$
$$\widehat{m}_4 = 1{,}015687 \qquad \widehat{m}_5 = 1{,}003659.$$

La provisión total estimada, sin rentabilidad, con el modelo de Mack es de 16.988.173 €. El vector de pagos futuros, es decir, la suma de cada contradiagonal de las cuantías no acumuladas estimadas es el siguiente:

$$vpf = (11.724.503, 3.319.480, 1.344.988, 503.693, 95.508).$$

Se desprende de los valores obtenidos, que el error de predicción cometido en la estimación de la provisión total asciende al 7,23% de su importe.

Si calculamos la provisión total estimada como renta, esta es de 17.002.048 €, siendo el vector de pagos futuros actualizados si se tratan estos como una renta:

$$vpf = (11.763.912, 3.315.103, 1.333.913, 495.872, 93.249).$$

Además, si aplicamos la función *CDR* del mismo paquete, obtenemos que la desviación estándar del CDR es de 1.053.371, es decir, un 6,20% sobre el IBNR total estimado.

| Año de origen *i* | IBNR | CDR SE | Mack SE |
|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - |
| 1 | 83.013 | 14.306 | 14.306 |
| 2 | 469.319 | 30.255 | 32.896 |
| 3 | 1.254.618 | 164.700 | 167.444 |
| 4 | 3.477.721 | 606.093 | 630.092 |
| 5 | 11.703.502 | 718.292 | 932.365 |
| Totales | 16.988.173 | 1.053.371 | 1.228.090 |

**Tabla 40.** Resultados obtenidos a partir de la función *CDR* para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de motocicletas. Fuente: Elaboración propia.

Observamos que también se obtiene la estimación de los pagos futuros por año de origen, IBNR, y el error de predicción del modelo de Mack, ambos coincidiendo con los valores obtenidos anteriormente.

**Modelo de Mack con efecto cola**

En este caso, el cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas y los factores de desarrollo coindicen con los obtenidos mediante el modelo de Mack puro (Chain-Ladder). La diferencia es que, teniendo en cuenta el efecto cola se añade otro factor de desarrollo, denominado factor de cola, que se estima a través de una extrapolación lineal.

Los resultados obtenidos de la aplicación del modelo de Mack con efecto cola son:

| Año de origen *i* | Latest | Dev.To.Date | Ultimate | IBNR | Mack SE | CV (IBNR) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 21.204.445 | 0,9984 | 21.239.099 | 34.654 | 5.994 | 0,1730 |
| 1 | 22.688.785 | 0,9947 | 22.809.014 | 120.229 | 15.662 | 0,1303 |
| 2 | 24.188.030 | 0,9794 | 24.697.646 | 509.616 | 33.627 | 0,0660 |
| 3 | 23.475.734 | 0,9477 | 24.770.768 | 1.295.034 | 167.853 | 0,1296 |
| 4 | 24.098.890 | 0,8725 | 27.621.680 | 3.522.790 | 631.164 | 0,1792 |
| 5 | 14.496.066 | 0,5524 | 26.242.386 | 11.746.320 | 933.915 | 0,0795 |
| Totales | 130.151.950 | 0,8831 | 147.380.593 | 17.228.643 | 1.230.488 | 0,0714 |

**Tabla 41.** Resumen de resultados obtenidos con el modelo de Mack con efecto cola para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de motocicletas. Fuente: Elaboración propia

El factor de cola obtenido en este caso es: $\widehat{m}_6 = 1{,}001634$. Este factor es el que se utiliza para calcular las predicciones más allá de las dimensiones del triángulo.

La provisión total estimada, sin rentabilidad, a través del modelo de Mack con efecto cola es de 17.228.643 €, y el vector de pagos futuros, teniendo en cuenta que $n = 6$, es el siguiente:

$$vpf = (11.759.158, 3.356.696, 1.385.286, 544.110, 140.577, 42.818).$$

Se desprende de los valores obtenidos, que el error de predicción cometido en la estimación de la provisión total asciende al 7,14% de su importe.

Si calculamos la provisión total estimada como renta, esta es de 17.239.179 €, siendo el vector de pagos futuros actualizados si se tratan estos como una renta:

$$vpf = (11.798.683, 3.352.269, 1.373.878, 535.661, 137.251, 41.437).$$

No es posible obtener la desviación estándar del CDR con este modelo.

**MLG con distribución Normal y función de enlace logarítmica**

En este caso, el cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas obtenido coincidiría con el que obtendríamos a través del método determinista de mínimos cuadrados de De Vylder:

| Año de origen $i$ | Año de desarrollo $j$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | 11.992.074 | 18.881.605 | 20.062.224 | 20.816.134 | 21.127.146 | 21.204.445 |
| 1 | 12.427.139 | 19.456.972 | 21.749.430 | 22.323.081 | 22.688.785 | 22.769.226 |
| 2 | 13.519.414 | 21.470.048 | 23.340.025 | 24.188.030 | 24.566.036 | 24.654.041 |
| 3 | 14.243.021 | 21.781.073 | 23.475.734 | 24.275.512 | 24.662.893 | 24.753.081 |
| 4 | 14.734.046 | 24.098.890 | 26.147.580 | 27.015.248 | 27.435.513 | 27.533.356 |
| 5 | 14.496.066 | 22.916.609 | 24.885.428 | 25.719.269 | 26.123.149 | 26.217.178 |

**Tabla 42.** Cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de motocicletas obtenido con el MLG (distribución Normal). Fuente: Elaboración propia.

| Año de origen $i$ | Latest | Dev.To.Date | Ultimate | IBNR | SE | CV |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 22.688.785 | 0,9965 | 22.769.226 | 80.441 | 570.969 | 7,0980 |
| 2 | 24.188.030 | 0,9811 | 24.654.041 | 466.011 | 783.258 | 1,6808 |
| 3 | 23.475.734 | 0,9484 | 24.753.081 | 1.277.347 | 921.579 | 0,7215 |
| 4 | 24.098.890 | 0,8753 | 27.533.356 | 3.434.466 | 1.064.221 | 0,3099 |
| 5 | 14.496.066 | 0,5529 | 26.217.178 | 11.721.112 | 1.185.764 | 0,1012 |
| Totales | 108.947.505 | 0,8652 | 125.926.882 | 16.979.377 | 3.222.712 | 0,1898 |

**Tabla 43.** Resumen de resultados obtenidos con el MLG (distribución Normal) para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de motocicletas. Fuente: Elaboración propia

La provisión total estimada, sin rentabilidad, con el MLG suponiendo una distribución Normal es de 16.979.377 €. El vector de pagos futuros, es decir, la suma de cada contradiagonal de las cuantías no acumuladas estimadas es el siguiente:

$$vpf = (11.727.458, 3.311.873, 1.344.294, 501.723, 94.029).$$

Se desprende de los valores obtenidos, que el error de predicción cometido en la estimación de la provisión total asciende al 18,98% de su importe.

La provisión total estimada como renta es de 16.993.344 €, siendo el vector de pagos futuros actualizados si se tratan estos como una renta:

$$vpf = (11.766.877, 3.307.506, 1.333.224, 493.932, 91.804).$$

El ECMDR que se obtiene es de un 0,21% sobre las cuantías originales. No es posible obtener la desviación estándar del CDR con este modelo.

**MLG con distribución Poisson sobredispersa y función de enlace logarítmica**

En este caso, el cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas y el vector de los pagos futuros coincidiría con el que obtendríamos a través del método clásico de Chain-Ladder, por lo tanto, son los mismos que los obtenidos con el Modelo de Mack.

Si se calculan los errores de predicción mediante fórmula analítica, se obtiene:

| Año de origen *i* | Latest | Dev.To.Date | Ultimate | IBNR | SE | CV |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 22.688.785 | 0,9964 | 22.771.798 | 83.013 | 90.807 | 1,0939 |
| 2 | 24.188.030 | 0,9810 | 24.657.349 | 469.319 | 195.513 | 0,4166 |
| 3 | 23.475.734 | 0,9493 | 24.730.352 | 1.254.618 | 305.014 | 0,2431 |
| 4 | 24.098.890 | 0,8739 | 27.576.611 | 3.477.721 | 512.337 | 0,1473 |
| 5 | 14.496.066 | 0,5533 | 26.199.568 | 11.703.502 | 1.120.060 | 0,0957 |
| Totales | 108.947.505 | 0,8651 | 125.935.678 | 16.988.173 | 1.435.772 | 0,0845 |

**Tabla 44.** Resumen de resultados obtenidos con el MLG (distribución Poisson sobredispersa) mediante fórmula analítica para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de motocicletas. Fuente: Elaboración propia

Observamos que el error de predicción cometido en la estimación de la provisión total asciende al 8,45% de su importe.

Por otro lado, si se calculan los errores de predicción mediante *bootstrap*, se obtiene:

| Año de origen *i* | Latest | Dev.To.Date | Ultimate | IBNR | SE | CV |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 22.688.785 | 0,9964 | 22.771.798 | 83.013 | 91.204 | 1,0987 |
| 2 | 24.188.030 | 0,9810 | 24.657.349 | 469.319 | 198.736 | 0,4235 |
| 3 | 23.475.734 | 0,9493 | 24.730.352 | 1.254.618 | 308.442 | 0,2458 |
| 4 | 24.098.890 | 0,8739 | 27.576.611 | 3.477.721 | 507.564 | 0,1459 |
| 5 | 14.496.066 | 0,5533 | 26.199.568 | 11.703.502 | 1.097.798 | 0,0938 |
| Totales | 108.947.505 | 0,8651 | 125.935.678 | 16.988.173 | 1.440.764 | 0,0848 |

**Tabla 45.** Resumen de resultados obtenidos con el MLG (distribución Poisson sobredispersa) mediante *bootstrap* para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de motocicletas. Fuente: Elaboración propia

En este caso, el error de predicción cometido en la estimación de la provisión total asciende al 8,48% de su importe. Además, mediante *bootstrap* obtenemos la desviación estándar del CDR:

| Año de origen *i* | IBNR | IBNR SE | CDR SE |
|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - |
| 1 | 86.492 | 93.043 | 93.043 |
| 2 | 461.236 | 188.614 | 169.907 |
| 3 | 1.258.632 | 305.044 | 243.600 |
| 4 | 3.531.955 | 533.207 | 430.143 |
| 5 | 11.744.182 | 1.107.463 | 997.524 |
| Total | 17.082.497 | 1.427.722 | 1.274.054 |

**Tabla 46.** Resultados obtenidos a partir de la función CDR para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de motocicletas. Fuente: Elaboración propia.

El CDR SE total representa un 7,50% sobre el IBNR total estimado. El ECMDR que se obtiene con la aplicación del MLG suponiendo una distribución Poisson sobredispersa es de un 0,22% sobre las cuantías originales.

### MLG con distribución Gamma y función de enlace logarítmica

El cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas que se obtiene es el siguiente:

| Año de origen *i* | Año de desarrollo *j* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | 11.992.074 | 18.881.605 | 20.062.224 | 20.816.134 | 21.127.146 | 21.204.445 |
| 1 | 12.427.139 | 19.456.972 | 21.749.430 | 22.323.081 | 22.688.785 | 22.776.505 |
| 2 | 13.519.414 | 21.470.048 | 23.340.025 | 24.188.030 | 24.576.144 | 24.670.893 |
| 3 | 14.243.021 | 21.781.073 | 23.475.734 | 24.231.641 | 24.599.632 | 24.689.468 |
| 4 | 14.734.046 | 24.098.890 | 26.194.319 | 27.075.815 | 27.504.946 | 27.609.708 |
| 5 | 14.496.066 | 22.865.435 | 24.828.036 | 25.653.654 | 26.055.582 | 26.153.703 |

**Tabla 47.** Cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de motocicletas obtenido con el MLG (distribución Gamma). Fuente: Elaboración propia.

La provisión total estimada, sin rentabilidad, con el MLG suponiendo una distribución Gamma es de 16.952.772 €. El vector de pagos futuros es el siguiente:

$$vpf = (11.696.539, 3.306.837, 1.344.585, 506.690, 98.121).$$

La provisión total estimada como renta es de 16.966.465 €, siendo el vector de pagos futuros actualizados si se tratan estos como una renta:

$$vpf = (11.735.854, 3.302.476, 1.333.513, 498.822, 95.800).$$

Si se calculan los errores de predicción mediante fórmula analítica, se obtiene:

| Año de origen *i* | Latest | Dev.To.Date | Ultimate | IBNR | SE | CV |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 22.688.785 | 0,9961 | 22.776.505 | 87.720 | 21.678 | 0,2471 |
| 2 | 24.188.030 | 0,9804 | 24.670.892 | 482.862 | 91.946 | 0,1904 |
| 3 | 23.475.734 | 0,9508 | 24.689.469 | 1.213.735 | 204.618 | 0,1686 |
| 4 | 24.098.890 | 0,8728 | 27.609.708 | 3.510.818 | 609.412 | 0,1736 |
| 5 | 14.496.066 | 0,5543 | 26.153.703 | 11.657.637 | 2.539.548 | 0,2178 |
| Totales | 108.947.505 | 0,8653 | 125.900.277 | 16.952.772 | 2.662.393 | 0,1570 |

**Tabla 48.** Resumen de resultados obtenidos con el MLG (distribución Gamma) mediante fórmula analítica para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de motocicletas. Fuente: Elaboración propia.

El error de predicción cometido en la estimación de la provisión total asciende al 15,70% de su importe.

Por otro lado, si se calculan los errores de predicción con metodología *bootstrap*, se obtiene:

| Año de origen *i* | Latest | Dev.To.Date | Ultimate | IBNR | SE | CV |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 22.688.785 | 0,9961 | 22.776.505 | 87.720 | 22.743 | 0,2593 |
| 2 | 24.188.030 | 0,9804 | 24.670.892 | 482.862 | 90.075 | 0,1865 |
| 3 | 23.475.734 | 0,9508 | 24.689.469 | 1.213.735 | 209.402 | 0,1725 |
| 4 | 24.098.890 | 0,8728 | 27.609.708 | 3.510.818 | 590.901 | 0,1683 |
| 5 | 14.496.066 | 0,5543 | 26.153.703 | 11.657.637 | 2.509.634 | 0,2153 |
| Totales | 108.947.505 | 0,8653 | 125.900.277 | 16.952.772 | 2.607.033 | 0,1538 |

**Tabla 49.** Resumen de resultados obtenidos con el MLG (distribución Gamma) mediante *bootstrap* para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de motocicletas. Fuente: Elaboración propia.

En este caso, el error de predicción cometido en la estimación de la provisión total es del 15,38% de su importe. Además, se obtiene la desviación estándar del CDR:

| Año de origen *i* | IBNR | IBNR SE | CDR SE |
|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - |
| 1 | 84.481 | 99.273 | 99.273 |
| 2 | 466.222 | 194.738 | 177.661 |
| 3 | 1.234.528 | 300.990 | 248.128 |
| 4 | 3.474.097 | 485.995 | 396.520 |
| 5 | 11.746.412 | 1.175.706 | 1.040.651 |
| Total | 17.005.741 | 1.467.248 | 1.269.983 |

**Tabla 50.** Resultados obtenidos a partir de la función CDR para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de motocicletas. Fuente: Elaboración propia.

El CDR SE total representa un 7,49% sobre el IBNR total estimado. El ECMDR que se obtiene con la aplicación del MLG suponiendo una distribución Gamma es de un 0,31% sobre las cuantías originales.

### MLG con distribución Gaussiana Inversa y función de enlace logarítmica

En este caso, el cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas y el resumen de los resultados obtenidos son:

| Año de origen *i* | Año de desarrollo *j* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | 11.992.074 | 18.881.605 | 20.062.224 | 20.816.134 | 21.127.146 | 21.204.445 |
| 1 | 12.427.139 | 19.456.972 | 21.749.430 | 22.323.081 | 22.688.785 | 22.773.912 |
| 2 | 13.519.414 | 21.470.048 | 23.340.025 | 24.188.030 | 24.593.406 | 24.691.027 |
| 3 | 14.243.021 | 21.781.073 | 23.475.734 | 24.198.243 | 24.554.058 | 24.639.744 |
| 4 | 14.734.046 | 24.098.890 | 26.214.442 | 27.098.573 | 27.533.983 | 27.638.837 |
| 5 | 14.496.066 | 22.819.114 | 24.768.144 | 25.582.683 | 25.983.821 | 26.080.421 |

**Tabla 51**. Cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de motocicletas obtenido con el MLG (distribución Gaussiana Inversa). Fuente: Elaboración propia.

| Año de origen *i* | Latest | Dev.To.Date | Ultimate | IBNR | SE | CV |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 22.688.785 | 0,9963 | 22.773.912 | 85.127 | 9.037.345 | 0,1062 |
| 2 | 24.188.030 | 0,9796 | 24.691.027 | 502.997 | 76.788.300 | 0,1527 |
| 3 | 23.475.734 | 0,9528 | 24.639.744 | 1.164.010 | 243.968.242 | 0,2096 |
| 4 | 24.098.890 | 0,8719 | 27.638.837 | 3.539.947 | 1.435.178.676 | 0,4054 |
| 5 | 14.496.066 | 0,5558 | 26.080.421 | 11.584.355 | 7.887.737.441 | 0,6809 |
| Totales | 108.947.505 | 0,8659 | 125.823.940 | 16.876.435 | 8.067.148.571 | 0,4780 |

**Tabla 52.** Resumen de resultados obtenidos con el MLG (distribución Gaussiana Inversa) para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de motocicletas. Fuente: Elaboración propia

La provisión total estimada, sin rentabilidad, con el MLG suponiendo una distribución Gaussiana Inversa es de 16.876.436 €. El vector de pagos futuros es el siguiente:

$$vpf = (11.651.612, 3.286.597, 1.335.635, 505.992, 96.600).$$

Se desprende de los valores obtenidos, que el error de predicción cometido en la estimación de la provisión total asciende al 47,80 % de su importe.

La provisión total estimada como renta es de 16.890.126 €, siendo el vector de pagos futuros actualizados si se tratan estos como una renta:

$$vpf = (11.690.776, 3.282.263, 1.324.637, 498.135, 94.315).$$

El ECMDR que se obtiene es de un 0,39% sobre las cuantías originales. No es posible obtener la desviación estándar del CDR con este modelo.

### 2) Cobertura de responsabilidad por daños materiales

Los datos de partida de los que se dispone es el triángulo *run-off* de cuantías no acumuladas:

| Año de origen *i* | Año de desarrollo *j* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | 1.853.440 | 2.182.174 | 489.058 | 211.766 | 103.670 | 30.337 |
| 1 | 1.686.632 | 2.468.739 | 550.092 | 284.535 | 162.179 | |
| 2 | 1.622.188 | 2.083.109 | 502.041 | 261.952 | | |
| 3 | 2.156.282 | 2.453.129 | 467.514 | | | |
| 4 | 2.386.124 | 2.382.182 | | | | |
| 5 | 3.014.112 | | | | | |

**Tabla 53.** Triángulo *run-off* de cuantías no acumuladas pagadas para la cobertura de responsabilidad por daños materiales del seguro de motocicletas. Fuente: Elaboración propia.

**Resultados con el modelo de Mack**

A continuación, se presenta el cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas obtenido, que coincidiría con el que obtendríamos a través del método clásico de Chain-Ladder:

| Año de origen *i* | Año de desarrollo *j* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | 1.853.440 | 4.035.614 | 4.524.672 | 4.736.438 | 4.840.108 | 4.870.445 |
| 1 | 1.686.632 | 4.155.371 | 4.705.463 | 4.989.998 | 5.152.177 | 5.184.470 |
| 2 | 1.622.188 | 3.705.297 | 4.207.338 | 4.469.290 | 4.591.447 | 4.620.226 |
| 3 | 2.156.282 | 4.609.411 | 5.076.925 | 5.363.407 | 5.510.003 | 5.544.539 |
| 4 | 2.386.124 | 4.768.306 | 5.348.598 | 5.650.410 | 5.804.850 | 5.841.234 |
| 5 | 3.014.112 | 6.607.359 | 7.411.460 | 7.829.676 | 8.043.681 | 8.094.098 |

**Tabla 54.** Cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas para la cobertura de responsabilidad por daños materiales del seguro de motocicletas obtenido con el Modelo de Mack. Fuente: Elaboración propia.

| Año de origen *i* | Latest | Dev.To.Date | Ultimate | IBNR | Mack SE | CV (IBNR) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 4.870.445 | 1,0000 | 4.870.445 | - | - | - |
| 1 | 5.152.177 | 0,9938 | 5.184.470 | 32.293 | 49.932 | 1,5462 |
| 2 | 4.469.290 | 0,9673 | 4.620.226 | 150.936 | 62.490 | 0,4140 |
| 3 | 5.076.925 | 0,9157 | 5.544.539 | 467.614 | 86.355 | 0,1847 |
| 4 | 4.768.306 | 0,8163 | 5.841.234 | 1.072.928 | 124.638 | 0,1162 |
| 5 | 3.014.112 | 0,3724 | 8.094.098 | 5.079.986 | 609.711 | 0,1200 |
| Totales | 27.351.255 | 0,8008 | 34.155.012 | 6.803.756 | 674.557 | 0,0991 |

**Tabla 55.** Resumen de resultados obtenidos con el modelo de Mack para la cobertura de responsabilidad por daños materiales del seguro de motocicletas. Fuente: Elaboración propia.

Los factores de desarrollo, coincidiendo con los del método clásico Chain-Ladder, son:

$$\hat{m}_1 = 2{,}192141 \qquad \hat{m}_2 = 1{,}121698 \qquad \hat{m}_3 = 1{,}056428$$
$$\hat{m}_4 = 1{,}027333 \qquad \hat{m}_5 = 1{,}006268.$$

La provisión total estimada, sin rentabilidad, con el modelo de Mack es de 6.803.756 €. El vector de pagos futuros es el siguiente:

$$vpf = (4.614.472, 1.281.287, 607.192, 250.389, 50.416).$$

Se desprende de los valores obtenidos, que el error de predicción cometido en la estimación de la provisión total asciende al 9,91% de su importe.

Si calculamos la provisión total estimada como renta, esta es de 6.807.497 €, siendo el vector de pagos futuros actualizados si se tratan estos como una renta:

$$vpf = (4.629.982, 1.279.597, 602.192, 246.501, 49.224).$$

Además, si aplicamos la función *CDR* del mismo paquete, obtenemos que la desviación estándar del CDR es de 637.069, es decir, un 9,36% sobre el IBNR total estimado.

| Año de origen *i* | IBNR | CDR SE | Mack SE |
|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - |
| 1 | 32.293 | 49.932 | 49.932 |
| 2 | 150.936 | 48.314 | 62.490 |
| 3 | 467.614 | 58.355 | 86.355 |
| 4 | 1.072.928 | 94.020 | 124.638 |
| 5 | 5.079.986 | 592.324 | 609.711 |
| Totales | 6.803.756 | 637.069 | 674.557 |

**Tabla 56.** Resultados obtenidos a partir de la función *CDR* para la cobertura de responsabilidad por daños personales del seguro de motocicletas. Fuente: Elaboración propia.

### Modelo de Mack con efecto cola

En este caso, el cuadrado *run-off* obtenido de cuantías acumuladas y los factores de desarrollo coindicen con los obtenidos mediante el modelo de Mack puro (Chain-Ladder). La diferencia es que aquí se añade un factor de cola, que se estima a través de una extrapolación lineal, y se utiliza para calcular las predicciones más allá de las dimensiones del triángulo.

Los resultados obtenidos de la aplicación del modelo de Mack con efecto cola son:

| Año de origen *i* | Latest | Dev.To.Date | Ultimate | IBNR | Mack SE | CV (IBNR) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 4.870.445 | 0,9974 | 4.883.356 | 12.911 | 18.089 | 1,4011 |
| 1 | 5.152.177 | 0,9911 | 5.198.213 | 46.036 | 53.524 | 1,1627 |
| 2 | 4.469.290 | 0,9648 | 4.632.473 | 163.183 | 65.030 | 0,3985 |
| 3 | 5.076.925 | 0,9132 | 5.559.236 | 482.311 | 88.839 | 0,1842 |
| 4 | 4.768.306 | 0,8142 | 5.856.718 | 1.088.412 | 126.668 | 0,1164 |
| 5 | 3.014.112 | 0,3714 | 8.115.553 | 5.101.441 | 611.904 | 0,1199 |
| Totales | 27.351.255 | 0,7987 | 34.245.549 | 6.894.295 | 682.596 | 0,0990 |

**Tabla 57.** Resumen de resultados obtenidos con el modelo de Mack con efecto cola para la cobertura de responsabilidad por daños materiales del seguro de motocicletas. Fuente: Elaboración propia

Siendo, el factor de cola obtenido $\widehat{m}_6 = 1{,}002651$.

La provisión total estimada, sin rentabilidad, a través del modelo de Mack con efecto cola es de 6.894.295 €, y el vector de pagos futuros, teniendo en cuenta que $n = 6$, es el siguiente:

$$vpf = (4.627.382, 1.295.030, 619.439, 265.087, 65.901, 21.456).$$

Se desprende de los valores obtenidos, que el error de predicción cometido en la estimación de la provisión total asciende al 9,90% de su importe.

Si calculamos la provisión total estimada como renta, esta es de 6.896.673 €, siendo el vector de pagos futuros actualizados si se tratan estos como una renta:

$$vpf = (4.642.936, 1.293.322, 614.339, 260.971, 64.341, 20.764).$$

No es posible obtener la desviación estándar del CDR con este modelo.

**MLG con distribución Normal y función de enlace logarítmica**

En este caso, el cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas obtenido coincidiría con el que obtendríamos a través del método determinista de mínimos cuadrados de De Vylder:

| Año de origen *i* | Año de desarrollo *j* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | 1.853.440 | 4.035.614 | 4.524.672 | 4.736.438 | 4.840.108 | 4.870.445 |
| 1 | 1.686.632 | 4.155.371 | 4.705.463 | 4.989.998 | 5.152.177 | 5.183.850 |
| 2 | 1.622.188 | 3.705.297 | 4.207.338 | 4.469.290 | 4.590.343 | 4.618.459 |
| 3 | 2.156.282 | 4.609.411 | 5.076.925 | 5.366.794 | 5.515.345 | 5.549.848 |
| 4 | 2.386.124 | 4.768.306 | 5.339.092 | 5.638.639 | 5.792.150 | 5.827.804 |
| 5 | 3.014.112 | 6.581.811 | 7.375.309 | 7.791.735 | 8.005.144 | 8.054.710 |

**Tabla 58.** Cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas para la cobertura de responsabilidad por daños materiales del seguro de motocicletas obtenido con el MLG (distribución Normal). Fuente: Elaboración propia.

| Año de origen *i* | Latest | Dev.To.Date | Ultimate | IBNR | SE | CV |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5.152.177 | 0,9939 | 5.183.850 | 31.673 | 207.524 | 6,5521 |
| 2 | 4.469.290 | 0,9677 | 4.618.459 | 149.169 | 259.732 | 1,7412 |
| 3 | 5.076.925 | 0,9148 | 5.549.848 | 472.923 | 332.973 | 0,7041 |
| 4 | 4.768.306 | 0,8182 | 5.827.804 | 1.059.498 | 378.998 | 0,3577 |
| 5 | 3.014.112 | 0,3742 | 8.054.711 | 5.040.599 | 557.820 | 0,1107 |
| Totales | 22.480.810 | 0,7690 | 29.234.671 | 6.753.861 | 1.230.337 | 0,1822 |

**Tabla 59.** Resumen de resultados obtenidos con el MLG (distribución Normal) para la cobertura de responsabilidad por daños materiales del seguro de motocicletas. Fuente: Elaboración propia

La provisión total estimada, sin rentabilidad, con el MLG suponiendo una distribución Normal es de 6.753.861 €. El vector de pagos futuros, es decir, la suma de cada contradiagonal de las cuantías no acumuladas estimadas es el siguiente:

$$vpf = (4.581.080, 1.269.712, 604.440, 249.063, 49.566).$$

Se desprende de los valores obtenidos, que el error de predicción cometido en la estimación de la provisión total asciende al 18,22% de su importe.

La provisión total estimada como renta es de 6.757.568 €, siendo el vector de pagos futuros actualizados si se tratan estos como una renta:

$$vpf = (4.596.478, 1.268.038, 599.463, 245.196, 48.393).$$

El ECMDR que se obtiene es de un 0,36% sobre las cuantías originales. No es posible obtener la desviación estándar del CDR con este modelo.

**MLG con distribución Poisson sobredispersa y función de enlace logarítmica**

En este caso, el cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas y el vector de los pagos futuros coincidiría con el que obtendríamos a través del método clásico de Chain-Ladder, por lo tanto, son los mismos que los obtenidos con el Modelo de Mack.

Si se calculan los errores de predicción mediante fórmula analítica, se obtiene:

| Año de origen *i* | Latest | Dev.To.Date | Ultimate | IBNR | SE | CV |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5.152.177 | 0,9938 | 5.184.470 | 32.293 | 29.536 | 0,9146 |
| 2 | 4.469.290 | 0,9673 | 4.620.226 | 150.936 | 56.086 | 0,3716 |
| 3 | 5.076.925 | 0,9157 | 5.544.539 | 467.614 | 99.188 | 0,2121 |
| 4 | 4.768.306 | 0,8163 | 5.841.234 | 1.072.928 | 153.483 | 0,1431 |
| 5 | 3.014.112 | 0,3724 | 8.094.098 | 5.079.986 | 487.398 | 0,0959 |
| Totales | 22.480.810 | 0,7677 | 29.284.566 | 6.803.756 | 567.940 | 0,0835 |

**Tabla 60.** Resumen de resultados obtenidos con el MLG (distribución Poisson sobredispersa) mediante fórmula analítica para la cobertura de responsabilidad por daños materiales del seguro de motocicletas. Fuente: Elaboración propia

Observamos que el error de predicción cometido en la estimación de la provisión total asciende al 8,35% de su importe.

Por otro lado, si se calculan los errores de predicción con metodología *bootstrap*, se obtiene:

| Año de origen *i* | Latest | Dev.To.Date | Ultimate | IBNR | SE | CV |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5.152.177 | 0,9938 | 5.184.470 | 32.293 | 29.062 | 0,9000 |
| 2 | 4.469.290 | 0,9673 | 4.620.226 | 150.936 | 55.448 | 0,3674 |
| 3 | 5.076.925 | 0,9157 | 5.544.539 | 467.614 | 96.032 | 0,2054 |
| 4 | 4.768.306 | 0,8163 | 5.841.234 | 1.072.928 | 158.622 | 0,1478 |
| 5 | 3.014.112 | 0,3724 | 8.094.098 | 5.079.986 | 503.756 | 0,0992 |
| Totales | 22.480.810 | 0,7677 | 29.284.566 | 6.803.756 | 579.476 | 0,0852 |

**Tabla 61.** Resumen de resultados obtenidos con el MLG (distribución Poisson sobredispersa) mediante *bootstrap* para la cobertura de responsabilidad por daños materiales del seguro de motocicletas. Fuente: Elaboración propia

En este caso, el error de predicción cometido en la estimación de la provisión total asciende al 8,52% de su importe.

Además, mediante la metodología *bootstrap*, es posible obtener la desviación estándar del CDR:

| Año de origen *i* | IBNR | IBNR SE | CDR SE |
|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - |
| 1 | 31.243 | 30.009 | 30.009 |
| 2 | 149.206 | 56.362 | 49.647 |
| 3 | 471.557 | 99.696 | 78.543 |
| 4 | 1.074.715 | 156.068 | 121.614 |
| 5 | 5.069.603 | 496.004 | 459.672 |
| Total | 6.796.323 | 573.869 | 520.093 |

**Tabla 62.** Resultados obtenidos a partir de la función CDR para la cobertura de responsabilidad por daños materiales del seguro de motocicletas. Fuente: Elaboración propia.

El CDR SE total representa un 7,64% del IBNR total estimado. El ECMDR que se obtiene con la aplicación del MLG suponiendo una distribución Poisson sobredispersa es de un 0,37% sobre las cuantías originales.

**MLG con distribución Gamma y función de enlace logarítmica**

El cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas que se obtiene es el siguiente:

| Año de origen *i* | Año de desarrollo *j* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | 1.853.440 | 4.035.614 | 4.524.672 | 4.736.438 | 4.840.108 | 4.870.445 |
| 1 | 1.686.632 | 4.155.371 | 4.705.463 | 4.989.998 | 5.152.177 | 5.188.442 |
| 2 | 1.622.188 | 3.705.297 | 4.207.338 | 4.469.290 | 4.594.736 | 4.626.537 |
| 3 | 2.156.282 | 4.609.411 | 5.076.925 | 5.348.176 | 5.487.356 | 5.522.639 |
| 4 | 2.386.124 | 4.768.306 | 5.355.622 | 5.655.006 | 5.808.621 | 5.847.563 |
| 5 | 3.014.112 | 6.620.409 | 7.429.266 | 7.841.580 | 8.053.140 | 8.106.772 |

**Tabla 63.** Cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas para la cobertura de responsabilidad por daños materiales del seguro de motocicletas obtenido con el MLG (distribución Gamma). Fuente: Elaboración propia.

La provisión total estimada, sin rentabilidad, con el MLG suponiendo una distribución Gamma es de 6.811.143 €. El vector de pagos futuros es el siguiente:

$$vpf = (4.626.575, 1.279.222, 601.212, 250.502, 53.632).$$

La provisión total estimada como renta es de 6.814.898 €, siendo el vector de pagos futuros actualizados si se tratan estos como una renta:

$$vpf = (4.642.126, 1.277.535, 596.261, 246.612, 52.363).$$

Si se calculan los errores de predicción mediante fórmula analítica, se obtiene:

| Año de origen *i* | Latest | Dev.To.Date | Ultimate | IBNR | SE | CV |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5.152.177 | 0,9930 | 5.188.442 | 36.265 | 6.837 | 0,1885 |
| 2 | 4.469.290 | 0,9660 | 4.626.537 | 157.247 | 22.767 | 0,1448 |
| 3 | 5.076.925 | 0,9193 | 5.522.638 | 445.713 | 56.992 | 0,1279 |
| 4 | 4.768.306 | 0,8154 | 5.847.563 | 1.079.257 | 140.106 | 0,1298 |
| 5 | 3.014.112 | 0,3718 | 8.106.771 | 5.092.659 | 842.378 | 0,1654 |
| Totales | 22.480.810 | 0,7675 | 29.291.951 | 6.811.141 | 866.503 | 0,1272 |

**Tabla 64.** Resumen de resultados obtenidos con el MLG (distribución Gamma) mediante fórmula analítica para la cobertura de responsabilidad por daños materiales del seguro de motocicletas. Fuente: Elaboración propia.

El error de predicción cometido en la estimación de la provisión total asciende al 12,72% de su importe.

Por otro lado, si se calculan los errores de predicción con metodología *bootstrap*, se obtiene:

| Año de origen *i* | Latest | Dev.To.Date | Ultimate | IBNR | SE | CV |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5.152.177 | 0,9930 | 5.188.442 | 36.265 | 7.588 | 0,2092 |
| 2 | 4.469.290 | 0,9660 | 4.626.537 | 157.247 | 23.695 | 0,1507 |
| 3 | 5.076.925 | 0,9193 | 5.522.638 | 445.713 | 60.348 | 0,1354 |
| 4 | 4.768.306 | 0,8154 | 5.847.563 | 1.079.257 | 138.140 | 0,1280 |
| 5 | 3.014.112 | 0,3718 | 8.106.771 | 5.092.659 | 843.145 | 0,1656 |
| Totales | 22.480.810 | 0,7675 | 29.291.951 | 6.811.141 | 860.747 | 0,1264 |

**Tabla 65.** Resumen de resultados obtenidos con el MLG (distribución Gamma) mediante *bootstrap* para la cobertura de responsabilidad por daños materiales del seguro de motocicletas. Fuente: Elaboración propia.

En este caso, el error de predicción cometido en la estimación de la provisión total es del 12,64% de su importe. Además, con la metodología *bootstrap* es posible obtener la desviación estándar del CDR:

| Año de origen *i* | IBNR | IBNR SE | CDR SE |
|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - |
| 1 | 31.514 | 29.998 | 29.998 |
| 2 | 152.124 | 57.642 | 52.734 |
| 3 | 464.238 | 98.324 | 80.082 |
| 4 | 1.072.818 | 156.412 | 121.868 |
| 5 | 5.087.846 | 492.756 | 451.693 |
| Total | 6.808.539 | 580.854 | 520.924 |

**Tabla 66.** Resultados obtenidos a partir de la función CDR para la cobertura de responsabilidad por daños materiales del seguro de motocicletas. Fuente: Elaboración propia.

El CDR SE total representa un 7,65% del IBNR total estimado. El ECMDR que se obtiene con la aplicación del MLG suponiendo una distribución Gamma es de un 0,46% sobre las cuantías originales.

**MLG con distribución Gaussiana Inversa y función de enlace logarítmica**

El cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas y el resumen de los resultados obtenidos son:

| Año de origen *i* | Año de desarrollo *j* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | 1.853.440 | 4.035.614 | 4.524.672 | 4.736.438 | 4.840.108 | 4.870.445 |
| 1 | 1.686.632 | 4.155.371 | 4.705.463 | 4.989.998 | 5.152.177 | 5.194.570 |
| 2 | 1.622.188 | 3.705.297 | 4.207.338 | 4.469.290 | 4.598.230 | 4.634.166 |
| 3 | 2.156.282 | 4.609.411 | 5.076.925 | 5.321.979 | 5.447.456 | 5.482.427 |
| 4 | 2.386.124 | 4.768.306 | 5.354.263 | 5.642.668 | 5.790.343 | 5.831.500 |
| 5 | 3.014.112 | 6.597.031 | 7.395.588 | 7.788.634 | 7.989.889 | 8.045.979 |

**Tabla 67**. Cuadrado *run-off* de cuantías acumuladas para la cobertura de responsabilidad por daños materiales del seguro de motocicletas obtenido con el MLG (distribución Gaussiana Inversa). Fuente: Elaboración propia.

| Año de origen *i* | Latest | Dev.To.Date | Ultimate | IBNR | SE | CV |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5.152.177 | 0,9918 | 5.194.570 | 42.393 | 2.855 | 0,0674 |
| 2 | 4.469.290 | 0,9644 | 4.634.165 | 164.875 | 14.069 | 0,0853 |
| 3 | 5.076.925 | 0,9260 | 5.482.426 | 405.501 | 45.714 | 0,1127 |
| 4 | 4.768.306 | 0,8177 | 5.831.500 | 1.063.194 | 204.288 | 0,1921 |
| 5 | 3.014.112 | 0,3746 | 8.045.980 | 5.031.868 | 1.728.694 | 0,3435 |
| Totales | 22.480.810 | 0,7702 | 29.188.642 | 6.707.832 | 1.748.291 | 0,2606 |

**Tabla 68.** Resumen de resultados obtenidos con el MLG (distribución Gaussiana Inversa) para la cobertura de responsabilidad por daños materiales del seguro de motocicletas. Fuente: Elaboración propia

La provisión total estimada, sin rentabilidad, con el MLG suponiendo una distribución Gaussiana Inversa es de 6.707.832 €. El vector de pagos futuros es el siguiente:

$$vpf = (4.585.263, 1.248.375, 575.692, 242.412, 56.090).$$

Se desprende de los valores obtenidos, que el error de predicción cometido en la estimación de la provisión total asciende al 26,06% de su importe.

La provisión total estimada como renta es de 6.711.766 €, siendo el vector de pagos futuros actualizados si se tratan estos como una renta:

$$vpf = (4.600.675, 1.246.729, 570.951, 238.648, 54.763).$$

El ECMDR que se obtiene es de un 0,75% sobre las cuantías originales. No es posible obtener la desviación estándar del CDR con este modelo.

### 5.4.2. Análisis de los resultados

Del mismo modo que se ha hecho en el apartado 5.3.2. para el seguro de turismos, se pueden resumir los resultados obtenidos de la aplicación de los distintos métodos estocásticos para estimar la provisión de siniestros IBNR para el seguro de motocicletas, para las coberturas de responsabilidad por daños personales y daños materiales, en las siguientes tablas:

| **Método estocástico** | **IBNR** | **Provisión como renta** | **CV total** | **CDR SE** | **Dev. To Date** | **ECMDR** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Modelo de Mack | 16.988.173 | 17.002.048 | 7,23% | 6,20% | 88,45% | - |
| Modelo de Mack con efecto cola | 17.228.643 | 17.239.179 | 7,14% | - | 88,31% | - |
| MLG Normal | 16.979.377 | 16.993.344 | 18,98% | - | 86,52% | 0,21% |
| MLG Poisson sobredispersa "fórmula" | 16.988.173 | 17.002.048 | 8,45% | - | 86,51% | 0,22% |
| MLG Poisson sobredispersa "bootstrap" | 16.988.173 | 17.002.048 | 8,48% | 7,50% | 86,51% | 0,22% |
| MLG Gamma "fórmula" | 16.952.772 | 16.966.465 | 15,70% | - | 86,53% | 0,31% |
| MLG Gamma "bootstrap" | 16.952.772 | 16.966.465 | 15,38% | 7,49% | 86,53% | 0,31% |
| MLG Gaussiana Inversa | 16.876.436 | 16.890.126 | 47,80% | - | 86,59% | 0,39% |

**Tabla 69.** Resumen de los resultados obtenidos de la aplicación de los distintos métodos estocásticos para la cobertura de responsabilidad por daños personales en el seguro de motocicletas. Fuente: Elaboración propia.

| **Método estocástico** | **IBNR** | **Provisión como renta** | **CV total** | **CDR SE** | **Dev. To Date** | **ECMDR** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Modelo de Mack | 6.803.756 | 6.807.497 | 9,91% | 9,36% | 80,08% | - |
| Modelo de Mack con efecto cola | 6.894.295 | 6.896.673 | 9,90% | - | 79,87% | - |
| MLG Normal | 6.753.861 | 6.757.568 | 18,22% | - | 76,90% | 0,36% |
| MLG Poisson sobredispersa "fórmula" | 6.803.756 | 6.807.497 | 8,35% | - | 76,77% | 0,37% |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| MLG Poisson sobredispersa "bootstrap" | 6.803.756 | 6.807.497 | 8,52% | 7,64% | 76,77% | 0,37% |
| MLG Gamma "fórmula" | 6.811.143 | 6.814.898 | 12,72% | - | 76,75% | 0,46% |
| MLG Gamma "bootstrap" | 6.811.143 | 6.814.898 | 12,64% | 7,65% | 76,75% | 0,46% |
| MLG Gaussiana Inversa | 6.707.832 | 6.711.766 | 26,06% | - | 77,02% | 0,75% |

**Tabla 70.** Resumen de los resultados obtenidos de la aplicación de los distintos métodos estocásticos para la cobertura de responsabilidad por daños materiales en el seguro de motocicletas. Fuente: Elaboración propia.

Los criterios que se han considerado para analizar los resultados y poder comparar los modelos son los mismos que los utilizados en el apartado 5.3.2. Como ya se ha comentado para el seguro de turismos, no hay una única opción para escoger uno de los modelos, ya que dependerá de los criterios que se tengan en cuenta y de la aversión al riesgo que tenga la entidad aseguradora o reaseguradora.

Si la aseguradora o reaseguradora quiere minimizar la incertidumbre y se centra para la elección del modelo en el valor obtenido del CV, esta escogería el modelo que proporcione el CV total menor. En este caso, para la cobertura de responsabilidad por daños personales se escogería el Modelo de Mack o el Modelo de Mack con efecto cola y para la cobertura de responsabilidad por daños materiales el MLG con distribución Poisson sobredispersa “fórmula”.

Por otro lado, si la aseguradora o reaseguradora es adversa al riesgo, pero centra su atención en los valores obtenidos de IBNR total o provisión total como renta, entonces esta escogería el modelo que proporcione un importe de estos más elevado. En este caso, se podría escoger para ambas coberturas el Modelo de Mack con efecto cola. No obstante, si no se quiere considerar el efecto cola, entonces, para la cobertura de responsabilidad por daños personales se escogería el Modelo de Mack o el MLG con distribución Poisson sobredispersa y para la cobertura de responsabilidad por daños materiales el MLG con distribución Gamma.

Si la entidad aseguradora o reaseguradora tiene en cuenta la incertidumbre asociada al modelo a corto plazo, escogerá el modelo que proporcione una desviación estándar del CDR menor. En este caso, se escogería el Modelo de Mack para la cobertura de responsabilidad por daños personales y el MLG con distribución Poisson sobredispersa “*bootstrap*” para la cobertura de responsabilidad por daños materiales.

Si se elige el modelo teniendo en cuenta la mejor estimación obtenida para los datos reales observados del triángulo de cuantías pagadas, de entre los MLG estimados, se escogerá el modelo que proporcione el ECMDR menor. En este caso, se escogería para ambas coberturas el MLG con distribución Normal o distribución Poisson sobredispersa.

Además, se puede observar que, en este caso, en la cobertura de responsabilidad por daños materiales, la ratio *Dev. To. Date.* es bastante menor que la obtenida en la cobertura de responsabilidad por daños personales. Esto significa que el importe de los últimos siniestros observados -*Latest*- sobre la predicción del importe de los siniestros del último año de desarrollo -*Ultimate*- es menor en la cobertura de responsabilidad por daños materiales, es decir, que los pagos tardan más en desarrollarse completamente cuando se trata de cubrir daños materiales. Por lo tanto, el IBNR total estimado sobre el valor *Ultimate* es mayor en la cobertura de responsabilidad por daños materiales.

## 5.5. Comparativa de modelos según el tipo de vehículo y cobertura

Para concluir el análisis, se pueden comparar, según el tipo de vehículo y el tipo de cobertura analizados, los resultados obtenidos de la aplicación de los distintos métodos estocásticos para estimar la provisión de siniestros IBNR.

A continuación, se destacan las principales diferencias observadas de la comparación de los resultados obtenidos:

- Por un lado, observamos que en el seguro de turismos los pagos son mucho mayores que en el seguro de motocicletas. Además, en el seguro de turismos los pagos tardan más en desarrollarse completamente cuando se trata de cubrir daños personales, presentando una ratio *Dev. To. Date.* bastante menor. En cambio, en el seguro de motocicletas, los pagos tardan más en desarrollarse completamente cuando se trata de cubrir daños materiales.

- Por otro lado, para el seguro de turismos se observa que los CV, CDR SE y ECMDR obtenidos son, generalmente, menores que los obtenidos para el seguro de motocicletas. De esta manera, las estimaciones realizadas para el seguro de turismos son mejores o más precisas que las realizadas para el seguro de motocicletas.

A pesar de estas diferencias, si se observan todos los resultados se puede concluir que los modelos que realizan mejores estimaciones, independientemente del tipo de vehículo y del tipo de cobertura, son las versiones estocásticas del modelo Chain-Ladder, es decir, el Modelo de Mack y el MLG suponiendo una distribución Poisson sobredispersa.

Del mismo modo, se puede concluir que el modelo que realiza peores estimaciones, obteniendo el CV más elevado, independientemente del tipo de vehículo y del tipo de cobertura, es el MLG suponiendo una distribución Gaussiana Inversa.

No obstante, aunque se haya obtenido que los modelos que realizan mejores y peores estimaciones son los mismos, independientemente del tipo de vehículo y tipo de cobertura que se considere, también se ha observado como, en este caso, los tipos de siniestros presentan características distintas según el tipo de vehículo que se trata y la cobertura considerada.

En resumen, ha resultado interesante realizar la estimación de la provisión de siniestros IBNR teniendo en cuenta dos tipos de vehículos diferentes y considerando las coberturas de Responsabilidad Civil por separado. De esta manera, por un lado, se ha conseguido observar y analizar las diferencias y similitudes en los resultados obtenidos y, por otro lado, se ha conseguido realizar unas estimaciones más precisas al no perder diferenciación y homogeneidad en los tipos de siniestros.

# 6. CONCLUSIONES

Como se señalaba en la Introducción, con este trabajo se ha pretendido estudiar distintos métodos estocásticos actuariales para calcular la provisión por siniestros pendientes en los seguros de no vida.

En concreto, el objetivo ha sido aplicar distintos métodos estocásticos para calcular la mejor estimación de la provisión por siniestros IBNR en el seguro de automóviles, considerando diferentes tipos de vehículo y de coberturas, y establecer diferentes criterios para comparar los resultados obtenidos y poder llegar a unas conclusiones.

En el primer apartado, se ha explicado el concepto de provisiones técnicas, así como el contexto legal en el que se enmarca su cálculo, y se ha podido observar la importancia de Solvencia II en su valoración.

En el segundo apartado, se han presentado algunos de los métodos actuariales que se emplean actualmente en el cálculo de provisiones para siniestros pendientes. Primero, se ha explicado en detalle el modelo determinista de Chain-Ladder, al ser uno de los más utilizados y al surgir como caso particular de algunos de los métodos estocásticos más importantes. Posteriormente, se ha entrado en detalle en explicar los métodos estocásticos conocidos como Modelo de Mack y Modelo Lineal Generalizado, que son los que se han aplicado en el caso práctico de este trabajo.

En el tercer apartado, se han establecido distintos criterios para poder comparar posteriormente cada uno de los modelos aplicados y, de esta manera, poder determinar qué modelo realiza mejores predicciones de las provisiones técnicas, según el tipo de vehículo y el tipo de cobertura, para ayudar a la toma de decisiones de la empresa aseguradora. Estos criterios analizados son el ECMDR y la desviación estándar del CDR, además de los errores de predicción que se obtienen tanto de la aplicación del Modelo de Mack como del Modelo Lineal Generalizado, que se utilizan para calcular el CV.

En el cuarto apartado, se ha llevado a cabo el caso práctico del trabajo. Para ello, se han utilizado los triángulos *run-off* de una compañía aseguradora española con los datos de las cuantías pagadas por siniestros durante 6 años, según el tipo de vehículo y el tipo de cobertura. Dichos triángulos han sido previamente modificados algorítmicamente, con el fin de respetar la confidencialidad de la empresa, sin que estos pierdan el sentido.

Los tipos de vehículo que se han considerado para realizar el estudio son el turismo y la motocicleta. Por otro lado, las coberturas que se han considerado son las coberturas de Responsabilidad Civil, es decir, la cobertura por daños personales y la cobertura por daños materiales, separadamente.

Los modelos aplicados, como se ha mencionado anteriormente, han sido el Modelo de Mack y el Modelo Lineal Generalizado. Por un lado, el Modelo de Mack es una generalización estocástica del modelo Chain-Ladder clásico que tiene la ventaja de ser un modelo de distribución libre. La aplicación del Modelo de Mack ha permitido también tener en cuenta el efecto cola para estimar las provisiones, de manera que se han podido hacer predicciones más allá de las dimensiones del triángulo. Por otro lado, para la aplicación del Modelo Lineal Generalizado, las distribuciones que se han considerado para el error, junto con la función de enlace logarítmica, han sido la distribución Normal, distribución Poisson sobredispersa, distribución Gamma y distribución Gaussiana Inversa. Cuando se considera la distribución Poisson sobredispersa, junto con la función de enlace logarítmica, se obtiene como caso particular el modelo determinista de Chain-Ladder.

La realización de los cálculos se ha hecho mediante el lenguaje de programación R, haciendo uso de la librería *ChainLadder* de Gesmann *et al.* (2022). Las principales funciones utilizadas han sido *MackChainLadder* y *glmProvision*, que nos han permitido obtener, según el tipo de vehículo y el tipo de cobertura, el importe estimado de los pagos futuros (IBNR), su desviación estándar y su CV. Además, se ha estimado la provisión técnica de dos formas distintas: sin rentabilidad y tratando los pagos futuros como una renta, considerando la ETTI libre de riesgo con ajuste por volatilidad de febrero de 2022 de Europa (EIOPA, 2022).

Una vez realizados los cálculos, se han utilizado los criterios establecidos para analizar los resultados y poder comparar los distintos modelos aplicados para escoger aquel que realice una mejor estimación. Como se ha comentado, no hay una única opción para escoger uno de los modelos ya que esta dependerá de los criterios que se prioricen y de la aversión al riesgo que tenga la entidad aseguradora o reaseguradora.

Para concluir el trabajo, se ha realizado la comparación, según el tipo de vehículo y el tipo de cobertura, de los resultados que se han obtenido al haber aplicado los distintos métodos estocásticos para estimar la provisión de siniestros IBNR.

Se ha observado que los tipos de siniestros tienen un comportamiento distinto dependiendo del tipo de vehículo que se trate y de la cobertura que se considere. Por un lado, en el seguro de turismos los pagos tardan más en desarrollarse cuando se trata de cubrir daños personales y, en cambio, en el seguro de motocicletas, los pagos tardan más en desarrollarse cuando se trata de cubrir daños materiales. Por otro lado, para el seguro de turismos se observa que los CV, CDR SE y ECMDR obtenidos son menores que los obtenidos para el seguro de motocicletas, indicando que las estimaciones realizadas para el seguro de turismos son mejores que las realizadas para el seguro de motocicletas.

En definitiva, en el presente trabajo se ha demostrado la importancia que tiene para las compañías aseguradoras y reaseguradoras realizar una buena estimación de las provisiones técnicas. Mediante la realización del caso práctico, al haber estimado el cálculo de la provisión considerando dos tipos de vehículos y de coberturas diferentes, se han podido observar diferencias y similitudes en los resultados obtenidos y en los tipos de siniestros, concluyendo que, para no perder diferenciación y homogeneidad en los tipos de siniestros y poder realizar unas estimaciones más precisas, resulta conveniente realizar el cálculo teniendo en cuenta los tipos de vehículos y de coberturas por separado.

En cuanto a los resultados obtenidos en el caso práctico sobre qué modelos realizan mejores estimaciones, estos son similares para ambos tipos de vehículos y de coberturas. De manera que, para nuestros datos, se ha demostrado que independientemente del tipo de vehículo y tipo de cobertura considerado, los modelos que obtienen mejores resultados en las estimaciones son las versiones estocásticas del modelo Chain-Ladder, es decir, el Modelo de Mack y el MLG suponiendo una distribución Poisson sobredispersa.

# 7. BIBLIOGRAFÍA

Albarrán, I., Alonso, P. (2010). *Métodos estocásticos de estimación de las provisiones técnicas en el marco de Solvencia II*. Cuadernos de la Fundación MAPFRE, 158. Fundación MAPFRE Estudios, Madrid.

Boj, E., Costa, T. (2014). *Modelo lineal generalizado y cálculo de la provisión técnica.* Depósito digital de la Universidad de Barcelona (España). Colección de objetos y materiales docentes (OMADO). http://hdl.handle.net/2445/49068

Boj, E., Costa, T., Espejo, J. (2014). Provisiones técnicas por años de calendario mediante el modelo lineal generalizado. Una aplicación con RExcel. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, 20, 83-116.

Boj, E., Claramunt, M.M., Costa, T. (2021). *Tarificación y provisiones (tercera edición).* Depósito digital de la Universidad de Barcelona (España). Colección de objetos y materiales docentes (OMADO). http://hdl.handle.net/2445/149241

Boletín Oficial del Estado (1998). *Real Decreto 2486/1998, de 20 de noviembre, por el que se aprueba el Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados.* Ministerio de Economía y Hacienda.

Boletín Oficial del Estado (2004). *Real Decreto Legislativo 8/2004, de 29 de octubre, por el que se aprueba el texto refundido de la Ley sobre responsabilidad civil y seguro en la circulación de vehículos a motor.* Ministerio de la Presidencia.

Boletín Oficial del Estado (2015). *Ley 20/2015, de 14 de julio, de ordenación, supervisión y solvencia de las entidades aseguradoras y reaseguradoras*. Jefatura del Estado.

Boletín Oficial del Estado (2015). *Real Decreto 1060/2015, de 20 de noviembre, de ordenación, supervisión y solvencia de las entidades aseguradoras y reaseguradoras.* Ministerio de Economía y Competitividad.

Boletín Oficial del Estado (2015). *Reglamento delegado (UE) 2015/35 de la Comisión de 10 de octubre de 2014 por el que se completa la Directiva 2009/138/CE del Parlamento Europeo y del Consejo sobre el acceso a la actividad de seguro y de reaseguro y su ejercicio (Solvencia II).*

Clarke, T.G., Harland, N. (1974). A practical statistical method of estimating claims liability and claims cash Flow. *ASTIN Bulletin*, 8, 26–37.

Costa, T. (2015). *Modelos basados en distancias con aplicación a la gestión del riesgo en el ámbito actuarial.* Depósito digital de la Universidad de Barcelona (España). Colección de Tesis Doctorales - Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial. http://hdl.handle.net/2445/68064

De Vylder, F.E. (1986). *Advanced risk theory*. Editions de l'Université de Bruxelles, Swiss Association of Actuaries. Bruselas (Bélgica).

EIOPA. (2022). Risk-free interest rate term structures. http://www.eiopa.europa.eu/tools-and-data/risk-free-interest-rate-term-structures_en

England, P.D., Verrall, R.J. (1999). Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving. *Insurance: Mathematics and Economics*, 25, 281–293.

England, P.D., Verrall, R.J. (2002). Stochastic claims reserving in general insurance (with discussion). *British Actuarial Journal*, 8, 443–544.

Gesmann, M., Murphy, D., Zhang, Y., Carrato, A., Crupi, G., Dutang, C., Lacoume, A., Charpentier, A., Wuthrich, M., Concina, F. (2022). *ChainLadder: Statistical methods for the calculation of outstanding claims reserves in general insurance.* Package on CRAN. Version 0.2.15. Publicado 09-01-2022. https://CRAN.R-project.org/package=ChainLadder

Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., Denuit, M. (2008). *Modern actuarial risk theory: using R. (Second edition).* Springer-Verlag, Heidelberg (Alemania).

Kramreiter, H., Straub, E. (1973). On the calculacation of IBNR reserves II. *Mittelungen der Vereinigung Schewizerischer Versicherugsmathematike*, 73, 177–190.

Mack, T. (1993). Distribution-free calculation of the standard error of chain-ladder reserve estimates. *Astin Bulletin*, 23:2, 213–225.

McCullagh, P., Nelder, J. (1989). *Generalized linear models (Segunda edición).* Chapman and Hall (London).

Merz, M., Wüthrich, M.V. (2008). *Modelling the claims development result for solvency purposes.* Casualty Actuarial Society E-Forum, Fall.

Merz, M., Wüthrich, M.V. (2014). Claims run-off uncertainty: the full picture. *Swiss Finance Institute Research Paper*, 14–69.

R Development Core Team (2022). *R Development Core Team, R: a language and environment for statistical computing*. Vienna, Austria, 2022. http://www.R-project.org/

Skurnick, D. (1973). A survey of loss reserving methods. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 16–58.

Tarbell, T.F. (1934). Incurred but not reported claims reserve. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 20, 275-289.

Taylor, G.C., (1986). *Claim reserving in non-life insurance*, North Holland, Insurance Series 1.

Van Eeghen, J., De Vylder, F.E. (1981). *Loss reserving methods*. Surveys of Actuarial Studies, n. 1, National Nederlanden.

# 8. ANEXOS

## 8.1. Código en R: Seguro de turismos

```
install.packages("ChainLadder")
library(ChainLadder)

######################################################################
# 1) Cobertura: Responsabilidad por daños personales
######################################################################

# Datos
c0 <- c(80300236,62428615,18367893,8475488,5210896,2393488)
c1 <- c(82739239,60234236,20270531,9336214,6521613)
c2 <- c(74744116,59861765,20087345,10403763)
c3 <- c(80362267,62330841,21819753)
c4 <- c(80216434,63211329)
c5 <- 75008510

C0 <- cumsum(c0)
C1 <- c(cumsum(c1),NA)
C2 <- c(cumsum(c2),NA,NA)
C3 <- c(cumsum(c3),NA,NA,NA)
C4 <- c(cumsum(c4),NA,NA,NA,NA)
C5 <- c(cumsum(c5),NA,NA,NA,NA,NA)

TBI <- matrix(c(C0,C1,C2,C3,C4,C5),ncol=6)
TBI <- t(TBI); TBI
TBI <- as.triangle(TBI); TBI

# ------------------------------------------
# Modelo de Mack
# ------------------------------------------

# Aplicación Modelo de Mack
mack <- MackChainLadder(TBI,tail = FALSE, mse.method="Mack");mack
mack$FullTriangle
mack_smmry <- summary(mack)
mack_smmry$ByOrigin
mack$f

# Desacumulamos triángulo
a <- matrix(c(rep(0,dim(TBI)[1]),mack$FullTriangle),
          nrow=dim(TBI)[1],ncol=dim(TBI)[1])
noncumFullTriangle<-mack$FullTriangle-a; noncumFullTriangle

# Obtenemos el vector de pagos futuros
vpf <- rep(0, dim(TBI)[1] - 1)
for (k in 1:dim(TBI)[1] - 1) {
  future<-row(noncumFullTriangle)+col(noncumFullTriangle)-1 ==
dim(TBI)[1]+k
  vpf[k]<-sum(noncumFullTriangle[future])
}

# Provisión sin rentabilidad
vpf
```

```
sum(vpf)

# Provisión como renta: teniendo en cuenta ETTI libre de riesgo con
ajuste por volatilidad
ETI.V <- c(-0.00335,0.00066,0.00276,0.00392,0.00480)
i.renta <- numeric(length(ETI.V))
for (i in 1:length(ETI.V)) {i.renta[i]<-(1+ETI.V[i])^(-i)}; i.renta
prov.renta <- vpf*i.renta; prov.renta
sum(prov.renta)

# CDR
## S3 method for class 'MackChainLadder'
CDR(MackChainLadder(TBI,tail = FALSE, mse.method="Mack"))

# ------------------------------------------
#  Modelo de Mack con cola
# ------------------------------------------

# Aplicación Modelo de Mack con cola
mack <- MackChainLadder(TBI,tail = TRUE, mse.method="Mack");mack
mack$FullTriangle
mack_smmry <- summary(mack)
mack_smmry$ByOrigin
mack$f

# Obtenemos el vector de pagos futuros
c06 <- (mack$FullTriangle[1,7]-mack$FullTriangle[1,6])
c16 <- (mack$FullTriangle[2,7]-mack$FullTriangle[2,6])
c26 <- (mack$FullTriangle[3,7]-mack$FullTriangle[3,6])
c36 <- (mack$FullTriangle[4,7]-mack$FullTriangle[4,6])
c46 <- (mack$FullTriangle[5,7]-mack$FullTriangle[5,6])
c56 <- (mack$FullTriangle[6,7]-mack$FullTriangle[6,6])

vpf_tail <- c(vpf[1]+c06, vpf[2]+c16, vpf[3]+c26, vpf[4]+c36,
vpf[5]+c46, c56)

# Provisión sin rentabilidad
vpf_tail
sum(vpf_tail)

# Provisión como renta: teniendo en cuenta ETTI libre de riesgo con
ajuste por volatilidad
ETI.V2 <- c(-0.00335,0.00066,0.00276,0.00392,0.00480,0.00548)
i.renta2 <- numeric(length(ETI.V2))
for (i in 1:length(ETI.V2)) {i.renta2[i]<-(1+ETI.V2[i])^(-i)};
i.renta2
prov.renta_tail <- vpf_tail*i.renta2; prov.renta_tail
sum(prov.renta_tail)

# ------------------------------------------
#  GLM Normal log link
# ------------------------------------------

# Aplicación GLM Normal log link
glmformula <- glmReserve(TBI, var.power = 0, link.power = 0,
mse.method ="formula")
glmformula$FullTriangle
```

```
glmformula$summary

# Desacumulamos triángulo
a <-
matrix(c(rep(0,dim(TBI)[1]),glmformula$FullTriangle),nrow=dim(TBI)[1],
ncol=dim(TBI)[1]);a
noncumFullTriangle<-glmformula$FullTriangle-a; noncumFullTriangle

# Obtenemos el vector de pagos futuros
vpf <- rep(0, dim(TBI)[1] - 1)
for (k in 1:dim(TBI)[1] - 1) {
  future <- row(noncumFullTriangle) + col(noncumFullTriangle) - 1 ==
dim(TBI)[1] + k
  vpf[k] <- sum(noncumFullTriangle[future])
}

# Provisión sin rentabilidad
vpf
sum(vpf)

# Provisión como renta: teniendo en cuenta ETTI libre de riesgo con
ajuste por volatilidad
prov.renta <- vpf*i.renta; prov.renta
sum(prov.renta)

# ECMDR
intercept <- glmformula$model$coefficients[1]
alfa1 <- glmformula$model$coefficients[2]
alfa2 <- glmformula$model$coefficients[3]
alfa3 <- glmformula$model$coefficients[4]
alfa4 <- glmformula$model$coefficients[5]
alfa5 <- glmformula$model$coefficients[6]
beta1 <- glmformula$model$coefficients[7]
beta2 <- glmformula$model$coefficients[8]
beta3 <- glmformula$model$coefficients[9]
beta4 <- glmformula$model$coefficients[10]
beta5 <- glmformula$model$coefficients[11]

c00 <- exp(intercept);c00
c10 <- exp(intercept)*exp(alfa1);c10
c20 <- exp(intercept)*exp(alfa2);c20
c30 <- exp(intercept)*exp(alfa3);c30
c40 <- exp(intercept)*exp(alfa4);c40
c50 <- exp(intercept)*exp(alfa5);c50
c01 <- exp(intercept)*exp(beta1);c01
c11 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta1);c11
c21 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta1);c21
c31 <- exp(intercept)*exp(alfa3)*exp(beta1);c31
c41 <- exp(intercept)*exp(alfa4)*exp(beta1);c41
c02 <- exp(intercept)*exp(beta2);c02
c12 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta2);c12
c22 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta2);c22
c32 <- exp(intercept)*exp(alfa3)*exp(beta2);c32
c03 <- exp(intercept)*exp(beta3);c03
c13 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta3);c13
c23 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta3);c23
c04 <- exp(intercept)*exp(beta4);c04
```

```
c14 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta4);c14
c05 <- exp(intercept)*exp(beta5);c05

e00 <- (noncumFullTriangle[1,1]-c00)^2
e10 <- (noncumFullTriangle[2,1]-c10)^2
e20 <- (noncumFullTriangle[3,1]-c20)^2
e30 <- (noncumFullTriangle[4,1]-c30)^2
e40 <- (noncumFullTriangle[5,1]-c40)^2
e50 <- (noncumFullTriangle[6,1]-c50)^2
e01 <- (noncumFullTriangle[1,2]-c01)^2
e11 <- (noncumFullTriangle[2,2]-c11)^2
e21 <- (noncumFullTriangle[3,2]-c21)^2
e31 <- (noncumFullTriangle[4,2]-c31)^2
e41 <- (noncumFullTriangle[5,2]-c41)^2
e02 <- (noncumFullTriangle[1,3]-c02)^2
e12 <- (noncumFullTriangle[2,3]-c12)^2
e22 <- (noncumFullTriangle[3,3]-c22)^2
e32 <- (noncumFullTriangle[4,3]-c32)^2
e03 <- (noncumFullTriangle[1,4]-c03)^2
e13 <- (noncumFullTriangle[2,4]-c13)^2
e23 <- (noncumFullTriangle[3,4]-c23)^2
e04 <- (noncumFullTriangle[1,5]-c04)^2
e14 <- (noncumFullTriangle[2,5]-c14)^2
e05 <- (noncumFullTriangle[1,6]-c05)^2

sumerrores <-
sum(e00,e10,e20,e30,e40,e50,e01,e11,e21,e31,e41,e02,e12,e22,e32,e03,e1
3,e23,e04,e14,e05)
ECMDR <- sqrt(sumerrores/21);ECMDR

# -----------------------------------------
#  GLM Poisson sobredisperso log link "fórmula"
# -----------------------------------------

# Aplicación GLM Poisson sobredisperso log link con fórmula
glmformula <- glmReserve(TBI, var.power = 1, link.power = 0,
mse.method ="formula")
glmformula$FullTriangle
glmformula$summary

# Desacumulamos triángulo
a <-
matrix(c(rep(0,dim(TBI)[1]),glmformula$FullTriangle),nrow=dim(TBI)[1],
ncol=dim(TBI)[1]);a
noncumFullTriangle<-glmformula$FullTriangle-a; noncumFullTriangle

# Obtenemos el vector de pagos futuros
vpf <- rep(0, dim(TBI)[1] - 1)
for (k in 1:dim(TBI)[1] - 1) {
  future <- row(noncumFullTriangle) + col(noncumFullTriangle) - 1 ==
dim(TBI)[1] + k
  vpf[k] <- sum(noncumFullTriangle[future])
}

# Provisión sin rentabilidad
vpf
sum(vpf)
```

```
# Provisión como renta: teniendo en cuenta ETTI libre de riesgo con
ajuste por volatilidad
prov.renta <- vpf*i.renta; prov.renta
sum(prov.renta)

# ECMDR
intercept <- glmformula$model$coefficients[1]
alfa1 <- glmformula$model$coefficients[2]
alfa2 <- glmformula$model$coefficients[3]
alfa3 <- glmformula$model$coefficients[4]
alfa4 <- glmformula$model$coefficients[5]
alfa5 <- glmformula$model$coefficients[6]
beta1 <- glmformula$model$coefficients[7]
beta2 <- glmformula$model$coefficients[8]
beta3 <- glmformula$model$coefficients[9]
beta4 <- glmformula$model$coefficients[10]
beta5 <- glmformula$model$coefficients[11]

c00 <- exp(intercept);c00
c10 <- exp(intercept)*exp(alfa1);c10
c20 <- exp(intercept)*exp(alfa2);c20
c30 <- exp(intercept)*exp(alfa3);c30
c40 <- exp(intercept)*exp(alfa4);c40
c50 <- exp(intercept)*exp(alfa5);c50
c01 <- exp(intercept)*exp(beta1);c01
c11 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta1);c11
c21 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta1);c21
c31 <- exp(intercept)*exp(alfa3)*exp(beta1);c31
c41 <- exp(intercept)*exp(alfa4)*exp(beta1);c41
c02 <- exp(intercept)*exp(beta2);c02
c12 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta2);c12
c22 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta2);c22
c32 <- exp(intercept)*exp(alfa3)*exp(beta2);c32
c03 <- exp(intercept)*exp(beta3);c03
c13 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta3);c13
c23 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta3);c23
c04 <- exp(intercept)*exp(beta4);c04
c14 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta4);c14
c05 <- exp(intercept)*exp(beta5);c05

e00 <- (noncumFullTriangle[1,1]-c00)^2
e10 <- (noncumFullTriangle[2,1]-c10)^2
e20 <- (noncumFullTriangle[3,1]-c20)^2
e30 <- (noncumFullTriangle[4,1]-c30)^2
e40 <- (noncumFullTriangle[5,1]-c40)^2
e50 <- (noncumFullTriangle[6,1]-c50)^2
e01 <- (noncumFullTriangle[1,2]-c01)^2
e11 <- (noncumFullTriangle[2,2]-c11)^2
e21 <- (noncumFullTriangle[3,2]-c21)^2
e31 <- (noncumFullTriangle[4,2]-c31)^2
e41 <- (noncumFullTriangle[5,2]-c41)^2
e02 <- (noncumFullTriangle[1,3]-c02)^2
e12 <- (noncumFullTriangle[2,3]-c12)^2
e22 <- (noncumFullTriangle[3,3]-c22)^2
e32 <- (noncumFullTriangle[4,3]-c32)^2
e03 <- (noncumFullTriangle[1,4]-c03)^2
```

```r
e13 <- (noncumFullTriangle[2,4]-c13)^2
e23 <- (noncumFullTriangle[3,4]-c23)^2
e04 <- (noncumFullTriangle[1,5]-c04)^2
e14 <- (noncumFullTriangle[2,5]-c14)^2
e05 <- (noncumFullTriangle[1,6]-c05)^2

sumerrores <-
sum(e00,e10,e20,e30,e40,e50,e01,e11,e21,e31,e41,e02,e12,e22,e32,e03,e1
3,e23,e04,e14,e05)
ECMDR <- sqrt(sumerrores/21);ECMDR

# -----------------------------------------
#  GLM Poisson sobredisperso log link "bootstrap"
# -----------------------------------------

# Aplicación GLM Poisson sobredisperso log link con bootstrsap
set.seed(1111)
glmbootstrap <- glmReserve(TBI,mse.method = "bootstrap"); glmbootstrap
glmbootstrap$FullTriangle

# Desacumulamos triángulo
a <-
matrix(c(rep(0,dim(TBI)[1]),glmbootstrap$FullTriangle),nrow=dim(TBI)[1
],ncol=dim(TBI)[1]);a
noncumFullTriangle<-glmbootstrap$FullTriangle-a; noncumFullTriangle

# Obtenemos el vector de pagos futuros
vpf <- rep(0, dim(TBI)[1] - 1)
for (k in 1:dim(TBI)[1] - 1) {
  future <- row(noncumFullTriangle) + col(noncumFullTriangle) - 1 ==
dim(TBI)[1] + k
  vpf[k] <- sum(noncumFullTriangle[future])
}

# Provisión sin rentabilidad
vpf
sum(vpf)

# Provisión como renta: teniendo en cuenta ETTI libre de riesgo con
ajuste por volatilidad
prov.renta <- vpf*i.renta; prov.renta
sum(prov.renta)

#CDR
## S3 method for class 'BOOTSTRAP'
CDR(BootChainLadder(TBI,R=1000,process.distr = c("od.pois")))

# -----------------------------------------
#  GLM Gamma log link "fórmula"
# -----------------------------------------

# Aplicación GLM Gamma log link con fórmula
glmformula <- glmReserve(TBI, var.power = 2, link.power = 0,
mse.method ="formula")
glmformula$FullTriangle
glmformula$summary
```

```r
# Desacumulamos triángulo
a <-
matrix(c(rep(0,dim(TBI)[1]),glmformula$FullTriangle),nrow=dim(TBI)[1],
ncol=dim(TBI)[1]);a
noncumFullTriangle<-glmformula$FullTriangle-a; noncumFullTriangle

# Obtenemos el vector de pagos futuros
vpf <- rep(0, dim(TBI)[1] - 1)
for (k in 1:dim(TBI)[1] - 1) {
  future <- row(noncumFullTriangle) + col(noncumFullTriangle) - 1 ==
dim(TBI)[1] + k
  vpf[k] <- sum(noncumFullTriangle[future])
}

# Provisión sin rentabilidad
vpf
sum(vpf)

# Provisión como renta: teniendo en cuenta ETTI libre de riesgo con
ajuste por volatilidad
prov.renta <- vpf*i.renta; prov.renta
sum(prov.renta)

# ECMDR
intercept <- glmformula$model$coefficients[1]
alfa1 <- glmformula$model$coefficients[2]
alfa2 <- glmformula$model$coefficients[3]
alfa3 <- glmformula$model$coefficients[4]
alfa4 <- glmformula$model$coefficients[5]
alfa5 <- glmformula$model$coefficients[6]
beta1 <- glmformula$model$coefficients[7]
beta2 <- glmformula$model$coefficients[8]
beta3 <- glmformula$model$coefficients[9]
beta4 <- glmformula$model$coefficients[10]
beta5 <- glmformula$model$coefficients[11]

c00 <- exp(intercept);c00
c10 <- exp(intercept)*exp(alfa1);c10
c20 <- exp(intercept)*exp(alfa2);c20
c30 <- exp(intercept)*exp(alfa3);c30
c40 <- exp(intercept)*exp(alfa4);c40
c50 <- exp(intercept)*exp(alfa5);c50
c01 <- exp(intercept)*exp(beta1);c01
c11 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta1);c11
c21 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta1);c21
c31 <- exp(intercept)*exp(alfa3)*exp(beta1);c31
c41 <- exp(intercept)*exp(alfa4)*exp(beta1);c41
c02 <- exp(intercept)*exp(beta2);c02
c12 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta2);c12
c22 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta2);c22
c32 <- exp(intercept)*exp(alfa3)*exp(beta2);c32
c03 <- exp(intercept)*exp(beta3);c03
c13 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta3);c13
c23 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta3);c23
c04 <- exp(intercept)*exp(beta4);c04
c14 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta4);c14
c05 <- exp(intercept)*exp(beta5);c05
```

```
e00 <- (noncumFullTriangle[1,1]-c00)^2
e10 <- (noncumFullTriangle[2,1]-c10)^2
e20 <- (noncumFullTriangle[3,1]-c20)^2
e30 <- (noncumFullTriangle[4,1]-c30)^2
e40 <- (noncumFullTriangle[5,1]-c40)^2
e50 <- (noncumFullTriangle[6,1]-c50)^2
e01 <- (noncumFullTriangle[1,2]-c01)^2
e11 <- (noncumFullTriangle[2,2]-c11)^2
e21 <- (noncumFullTriangle[3,2]-c21)^2
e31 <- (noncumFullTriangle[4,2]-c31)^2
e41 <- (noncumFullTriangle[5,2]-c41)^2
e02 <- (noncumFullTriangle[1,3]-c02)^2
e12 <- (noncumFullTriangle[2,3]-c12)^2
e22 <- (noncumFullTriangle[3,3]-c22)^2
e32 <- (noncumFullTriangle[4,3]-c32)^2
e03 <- (noncumFullTriangle[1,4]-c03)^2
e13 <- (noncumFullTriangle[2,4]-c13)^2
e23 <- (noncumFullTriangle[3,4]-c23)^2
e04 <- (noncumFullTriangle[1,5]-c04)^2
e14 <- (noncumFullTriangle[2,5]-c14)^2
e05 <- (noncumFullTriangle[1,6]-c05)^2

sumerrores <-
sum(e00,e10,e20,e30,e40,e50,e01,e11,e21,e31,e41,e02,e12,e22,e32,e03,e1
3,e23,e04,e14,e05)
ECMDR <- sqrt(sumerrores/21);ECMDR

# ------------------------------------------
#  GLM Gamma log link "bootstrap"
# ------------------------------------------

# Aplicación GLM Gamma log link con bootstrap
set.seed(1111)
glmbootstrap<-glmReserve(TBI,var.power = 2,mse.method = "bootstrap");
glmbootstrap
glmbootstrap$FullTriangle

# Desacumulamos triángulo
a<-
matrix(c(rep(0,dim(TBI)[1]),glmbootstrap$FullTriangle),nrow=dim(TBI)[1
],ncol=dim(TBI)[1]);a
noncumFullTriangle<-glmbootstrap$FullTriangle-a; noncumFullTriangle

# Obtenemos el vector de pagos futuros
vpf <- rep(0, dim(TBI)[1] - 1)
for (k in 1:dim(TBI)[1] - 1) {
  future <- row(noncumFullTriangle) + col(noncumFullTriangle) - 1 ==
dim(TBI)[1] + k
  vpf[k] <- sum(noncumFullTriangle[future])
}

# Provisión sin rentabilidad
vpf
sum(vpf)
```

```
# Provisión como renta: teniendo en cuenta ETTI libre de riesgo con
ajuste por volatilidad
prov.renta <- vpf*i.renta; prov.renta
sum(prov.renta)

#CDR
## S3 method for class 'BOOTSTRAP'
CDR(BootChainLadder(TBI,R=1000,process.distr = c("gamma")))

# -------------------------------------------
#  GLM Gaussiana Inversa log link
# -------------------------------------------

# Aplicación GLM Gaussiana Inversa log link
glmformula <- glmReserve(TBI, var.power = 3, link.power = 0,
mse.method ="formula")
glmformula$FullTriangle
glmformula$summary

# Desacumulamos triángulo
a<-
matrix(c(rep(0,dim(TBI)[1]),glmformula$FullTriangle),nrow=dim(TBI)[1],
ncol=dim(TBI)[1]);a
noncumFullTriangle<-glmformula$FullTriangle-a; noncumFullTriangle

# Obtenemos el vector de pagos futuros
vpf <- rep(0, dim(TBI)[1] - 1)
for (k in 1:dim(TBI)[1] - 1) {
  future <- row(noncumFullTriangle) + col(noncumFullTriangle) - 1 ==
dim(TBI)[1] + k
  vpf[k] <- sum(noncumFullTriangle[future])
}

# Provisión sin rentabilidad
vpf
sum(vpf)

# Provisión como renta: teniendo en cuenta ETTI libre de riesgo con
ajuste por volatilidad
prov.renta <- vpf*i.renta; prov.renta
sum(prov.renta)

# ECMDR
intercept <- glmformula$model$coefficients[1]
alfa1 <- glmformula$model$coefficients[2]
alfa2 <- glmformula$model$coefficients[3]
alfa3 <- glmformula$model$coefficients[4]
alfa4 <- glmformula$model$coefficients[5]
alfa5 <- glmformula$model$coefficients[6]
beta1 <- glmformula$model$coefficients[7]
beta2 <- glmformula$model$coefficients[8]
beta3 <- glmformula$model$coefficients[9]
beta4 <- glmformula$model$coefficients[10]
beta5 <- glmformula$model$coefficients[11]

c00 <- exp(intercept);c00
c10 <- exp(intercept)*exp(alfa1);c10
```

```
c20 <- exp(intercept)*exp(alfa2);c20
c30 <- exp(intercept)*exp(alfa3);c30
c40 <- exp(intercept)*exp(alfa4);c40
c50 <- exp(intercept)*exp(alfa5);c50
c01 <- exp(intercept)*exp(beta1);c01
c11 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta1);c11
c21 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta1);c21
c31 <- exp(intercept)*exp(alfa3)*exp(beta1);c31
c41 <- exp(intercept)*exp(alfa4)*exp(beta1);c41
c02 <- exp(intercept)*exp(beta2);c02
c12 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta2);c12
c22 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta2);c22
c32 <- exp(intercept)*exp(alfa3)*exp(beta2);c32
c03 <- exp(intercept)*exp(beta3);c03
c13 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta3);c13
c23 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta3);c23
c04 <- exp(intercept)*exp(beta4);c04
c14 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta4);c14
c05 <- exp(intercept)*exp(beta5);c05

e00 <- (noncumFullTriangle[1,1]-c00)^2
e10 <- (noncumFullTriangle[2,1]-c10)^2
e20 <- (noncumFullTriangle[3,1]-c20)^2
e30 <- (noncumFullTriangle[4,1]-c30)^2
e40 <- (noncumFullTriangle[5,1]-c40)^2
e50 <- (noncumFullTriangle[6,1]-c50)^2
e01 <- (noncumFullTriangle[1,2]-c01)^2
e11 <- (noncumFullTriangle[2,2]-c11)^2
e21 <- (noncumFullTriangle[3,2]-c21)^2
e31 <- (noncumFullTriangle[4,2]-c31)^2
e41 <- (noncumFullTriangle[5,2]-c41)^2
e02 <- (noncumFullTriangle[1,3]-c02)^2
e12 <- (noncumFullTriangle[2,3]-c12)^2
e22 <- (noncumFullTriangle[3,3]-c22)^2
e32 <- (noncumFullTriangle[4,3]-c32)^2
e03 <- (noncumFullTriangle[1,4]-c03)^2
e13 <- (noncumFullTriangle[2,4]-c13)^2
e23 <- (noncumFullTriangle[3,4]-c23)^2
e04 <- (noncumFullTriangle[1,5]-c04)^2
e14 <- (noncumFullTriangle[2,5]-c14)^2
e05 <- (noncumFullTriangle[1,6]-c05)^2

sumerrores <-
sum(e00,e10,e20,e30,e40,e50,e01,e11,e21,e31,e41,e02,e12,e22,e32,e03,e1
3,e23,e04,e14,e05)
ECMDR <- sqrt(sumerrores/21);ECMDR

#########################################################################
# 2) Cobertura: Responsabilidad por daños materiales
#########################################################################

# Datos
c0 <- c(77465022,18730886,2749354,892187,543453,170915)
c1 <- c(81685949,19927660,2948816,1225692,515315)
c2 <- c(83571563,19623953,2837212, 1252474)
c3 <- c(83535630,20763444,2593942)
c4 <- c(86586308,21713092)
```

```r
c5 <- 83555815

C0 <- cumsum(c0)
C1 <- c(cumsum(c1),NA)
C2 <- c(cumsum(c2),NA,NA)
C3 <- c(cumsum(c3),NA,NA,NA)
C4 <- c(cumsum(c4),NA,NA,NA,NA)
C5 <- c(cumsum(c5),NA,NA,NA,NA,NA)

TMD <- matrix(c(C0,C1,C2,C3,C4,C5),ncol=6)
TMD <- t(TMD); TMD
TMD <- as.triangle(TMD); TMD

# ------------------------------------------
# Modelo de Mack
# ------------------------------------------

# Aplicación Modelo de Mack
mack <- MackChainLadder(TMD,tail = FALSE, mse.method="Mack");mack
mack$FullTriangle
mack_smmry <- summary(mack)
mack_smmry$ByOrigin
mack$f

# Desacumulamos triángulo
a <- matrix(c(rep(0,dim(TMD)[1]),mack$FullTriangle),
          nrow=dim(TMD)[1],ncol=dim(TMD)[1])
noncumFullTriangle<-mack$FullTriangle-a; noncumFullTriangle

# Obtenemos el vector de pagos futuros
vpf <- rep(0, dim(TMD)[1] - 1)
for (k in 1:dim(TMD)[1] - 1) {
  future<-row(noncumFullTriangle)+col(noncumFullTriangle)-1 ==
dim(TMD)[1]+k
  vpf[k]<-sum(noncumFullTriangle[future])
}

# Provisión sin rentabilidad
vpf
sum(vpf)

# Provisión como renta: teniendo en cuenta ETTI libre de riesgo con
ajuste por volatilidad
ETI.V <- c(-0.00335,0.00066,0.00276,0.00392,0.00480)
i.renta <- numeric(length(ETI.V))
for (i in 1:length(ETI.V)) {i.renta[i]<-(1+ETI.V[i])^(-i)}; i.renta
prov.renta <- vpf*i.renta; prov.renta
sum(prov.renta)

# CDR
## S3 method for class 'MackChainLadder'
CDR(MackChainLadder(TMD,tail = FALSE, mse.method="Mack"))

# ------------------------------------------
#  Modelo de Mack con cola
# ------------------------------------------
```

```r
# Aplicación Modelo de Mack con cola
mack<-MackChainLadder(TMD,tail = TRUE, mse.method="Mack");mack
mack$FullTriangle
mack_smmry <- summary(mack)
mack_smmry$ByOrigin
mack$f

# Obtenemos el vector de pagos futuros
c06 <- (mack$FullTriangle[1,7]-mack$FullTriangle[1,6])
c16 <- (mack$FullTriangle[2,7]-mack$FullTriangle[2,6])
c26 <- (mack$FullTriangle[3,7]-mack$FullTriangle[3,6])
c36 <- (mack$FullTriangle[4,7]-mack$FullTriangle[4,6])
c46 <- (mack$FullTriangle[5,7]-mack$FullTriangle[5,6])
c56 <- (mack$FullTriangle[6,7]-mack$FullTriangle[6,6])

vpf_tail <- c(vpf[1]+c06, vpf[2]+c16, vpf[3]+c26, vpf[4]+c36,
vpf[5]+c46, c56)

# Provisión sin rentabilidad
vpf_tail
sum(vpf_tail)

# Provisión como renta: teniendo en cuenta ETTI libre de riesgo con
ajuste por volatilidad
ETI.V2 <- c(-0.00335,0.00066,0.00276,0.00392,0.00480,0.00548)
i.renta2 <- numeric(length(ETI.V2))
for (i in 1:length(ETI.V2)) {i.renta2[i]<-(1+ETI.V2[i])^(-i)};
i.renta2
prov.renta_tail <- vpf_tail*i.renta2; prov.renta_tail
sum(prov.renta_tail)

# -----------------------------------------
#  GLM Normal log link
# -----------------------------------------

# Aplicación GLM Normal log link
glmformula <- glmReserve(TMD, var.power = 0, link.power = 0,
mse.method ="formula")
glmformula$FullTriangle
glmformula$summary

# Desacumulamos triángulo
a <-
matrix(c(rep(0,dim(TMD)[1]),glmformula$FullTriangle),nrow=dim(TMD)[1],
ncol=dim(TMD)[1]);a
noncumFullTriangle<-glmformula$FullTriangle-a; noncumFullTriangle

# Obtenemos el vector de pagos futuros
vpf <- rep(0, dim(TMD)[1] - 1)
for (k in 1:dim(TMD)[1] - 1) {
  future <- row(noncumFullTriangle) + col(noncumFullTriangle) - 1 ==
dim(TMD)[1] + k
  vpf[k] <- sum(noncumFullTriangle[future])
}

# Provisión sin rentabilidad
vpf
```

```
sum(vpf)

# Provisión como renta: teniendo en cuenta ETTI libre de riesgo con
ajuste por volatilidad
prov.renta <- vpf*i.renta; prov.renta
sum(prov.renta)

# ECMDR
intercept <- glmformula$model$coefficients[1]
alfa1 <- glmformula$model$coefficients[2]
alfa2 <- glmformula$model$coefficients[3]
alfa3 <- glmformula$model$coefficients[4]
alfa4 <- glmformula$model$coefficients[5]
alfa5 <- glmformula$model$coefficients[6]
beta1 <- glmformula$model$coefficients[7]
beta2 <- glmformula$model$coefficients[8]
beta3 <- glmformula$model$coefficients[9]
beta4 <- glmformula$model$coefficients[10]
beta5 <- glmformula$model$coefficients[11]

c00 <- exp(intercept);c00
c10 <- exp(intercept)*exp(alfa1);c10
c20 <- exp(intercept)*exp(alfa2);c20
c30 <- exp(intercept)*exp(alfa3);c30
c40 <- exp(intercept)*exp(alfa4);c40
c50 <- exp(intercept)*exp(alfa5);c50
c01 <- exp(intercept)*exp(beta1);c01
c11 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta1);c11
c21 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta1);c21
c31 <- exp(intercept)*exp(alfa3)*exp(beta1);c31
c41 <- exp(intercept)*exp(alfa4)*exp(beta1);c41
c02 <- exp(intercept)*exp(beta2);c02
c12 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta2);c12
c22 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta2);c22
c32 <- exp(intercept)*exp(alfa3)*exp(beta2);c32
c03 <- exp(intercept)*exp(beta3);c03
c13 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta3);c13
c23 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta3);c23
c04 <- exp(intercept)*exp(beta4);c04
c14 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta4);c14
c05 <- exp(intercept)*exp(beta5);c05

e00 <- (noncumFullTriangle[1,1]-c00)^2
e10 <- (noncumFullTriangle[2,1]-c10)^2
e20 <- (noncumFullTriangle[3,1]-c20)^2
e30 <- (noncumFullTriangle[4,1]-c30)^2
e40 <- (noncumFullTriangle[5,1]-c40)^2
e50 <- (noncumFullTriangle[6,1]-c50)^2
e01 <- (noncumFullTriangle[1,2]-c01)^2
e11 <- (noncumFullTriangle[2,2]-c11)^2
e21 <- (noncumFullTriangle[3,2]-c21)^2
e31 <- (noncumFullTriangle[4,2]-c31)^2
e41 <- (noncumFullTriangle[5,2]-c41)^2
e02 <- (noncumFullTriangle[1,3]-c02)^2
e12 <- (noncumFullTriangle[2,3]-c12)^2
e22 <- (noncumFullTriangle[3,3]-c22)^2
e32 <- (noncumFullTriangle[4,3]-c32)^2
```

```
e03 <- (noncumFullTriangle[1,4]-c03)^2
e13 <- (noncumFullTriangle[2,4]-c13)^2
e23 <- (noncumFullTriangle[3,4]-c23)^2
e04 <- (noncumFullTriangle[1,5]-c04)^2
e14 <- (noncumFullTriangle[2,5]-c14)^2
e05 <- (noncumFullTriangle[1,6]-c05)^2

sumerrores <-
sum(e00,e10,e20,e30,e40,e50,e01,e11,e21,e31,e41,e02,e12,e22,e32,e03,e1
3,e23,e04,e14,e05)
ECMDR <- sqrt(sumerrores/21);ECMDR

# -----------------------------------------
#  GLM Poisson sobredisperso log link "fórmula"
# -----------------------------------------

# Aplicación GLM Poisson sobredisperso log link con fórmula
glmformula <- glmReserve(TMD, var.power = 1, link.power = 0,
mse.method ="formula")
glmformula$FullTriangle
glmformula$summary

# Desacumulamos triángulo
a <-
matrix(c(rep(0,dim(TMD)[1]),glmformula$FullTriangle),nrow=dim(TMD)[1],
ncol=dim(TMD)[1]);a
noncumFullTriangle<-glmformula$FullTriangle-a; noncumFullTriangle

# Obtenemos el vector de pagos futuros
vpf <- rep(0, dim(TMD)[1] - 1)
for (k in 1:dim(TMD)[1] - 1) {
  future <- row(noncumFullTriangle) + col(noncumFullTriangle) - 1 ==
dim(TMD)[1] + k
  vpf[k] <- sum(noncumFullTriangle[future])
}

# Provisión sin rentabilidad
vpf
sum(vpf)

# Provisión como renta: teniendo en cuenta ETTI libre de riesgo con
ajuste por volatilidad
prov.renta <- vpf*i.renta; prov.renta
sum(prov.renta)

# ECMDR
intercept <- glmformula$model$coefficients[1]
alfa1 <- glmformula$model$coefficients[2]
alfa2 <- glmformula$model$coefficients[3]
alfa3 <- glmformula$model$coefficients[4]
alfa4 <- glmformula$model$coefficients[5]
alfa5 <- glmformula$model$coefficients[6]
beta1 <- glmformula$model$coefficients[7]
beta2 <- glmformula$model$coefficients[8]
beta3 <- glmformula$model$coefficients[9]
beta4 <- glmformula$model$coefficients[10]
beta5 <- glmformula$model$coefficients[11]
```

```
c00 <- exp(intercept);c00
c10 <- exp(intercept)*exp(alfa1);c10
c20 <- exp(intercept)*exp(alfa2);c20
c30 <- exp(intercept)*exp(alfa3);c30
c40 <- exp(intercept)*exp(alfa4);c40
c50 <- exp(intercept)*exp(alfa5);c50
c01 <- exp(intercept)*exp(beta1);c01
c11 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta1);c11
c21 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta1);c21
c31 <- exp(intercept)*exp(alfa3)*exp(beta1);c31
c41 <- exp(intercept)*exp(alfa4)*exp(beta1);c41
c02 <- exp(intercept)*exp(beta2);c02
c12 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta2);c12
c22 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta2);c22
c32 <- exp(intercept)*exp(alfa3)*exp(beta2);c32
c03 <- exp(intercept)*exp(beta3);c03
c13 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta3);c13
c23 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta3);c23
c04 <- exp(intercept)*exp(beta4);c04
c14 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta4);c14
c05 <- exp(intercept)*exp(beta5);c05

e00 <- (noncumFullTriangle[1,1]-c00)^2
e10 <- (noncumFullTriangle[2,1]-c10)^2
e20 <- (noncumFullTriangle[3,1]-c20)^2
e30 <- (noncumFullTriangle[4,1]-c30)^2
e40 <- (noncumFullTriangle[5,1]-c40)^2
e50 <- (noncumFullTriangle[6,1]-c50)^2
e01 <- (noncumFullTriangle[1,2]-c01)^2
e11 <- (noncumFullTriangle[2,2]-c11)^2
e21 <- (noncumFullTriangle[3,2]-c21)^2
e31 <- (noncumFullTriangle[4,2]-c31)^2
e41 <- (noncumFullTriangle[5,2]-c41)^2
e02 <- (noncumFullTriangle[1,3]-c02)^2
e12 <- (noncumFullTriangle[2,3]-c12)^2
e22 <- (noncumFullTriangle[3,3]-c22)^2
e32 <- (noncumFullTriangle[4,3]-c32)^2
e03 <- (noncumFullTriangle[1,4]-c03)^2
e13 <- (noncumFullTriangle[2,4]-c13)^2
e23 <- (noncumFullTriangle[3,4]-c23)^2
e04 <- (noncumFullTriangle[1,5]-c04)^2
e14 <- (noncumFullTriangle[2,5]-c14)^2
e05 <- (noncumFullTriangle[1,6]-c05)^2

sumerrores <-
sum(e00,e10,e20,e30,e40,e50,e01,e11,e21,e31,e41,e02,e12,e22,e32,e03,e1
3,e23,e04,e14,e05)
ECMDR <- sqrt(sumerrores/21);ECMDR

# ------------------------------------------
#  GLM Poisson sobredisperso log link "bootstrap"
# ------------------------------------------

# Aplicación GLM Poisson sobredisperso log link con bootstrsap
set.seed(1111)
glmbootstrap <- glmReserve(TMD,mse.method = "bootstrap"); glmbootstrap
```

```
glmbootstrap$FullTriangle

# Desacumulamos triángulo
a <-
matrix(c(rep(0,dim(TMD)[1]),glmbootstrap$FullTriangle),nrow=dim(TMD)[1
],ncol=dim(TMD)[1]);a
noncumFullTriangle<-glmbootstrap$FullTriangle-a; noncumFullTriangle

# Obtenemos el vector de pagos futuros
vpf <- rep(0, dim(TMD)[1] - 1)
for (k in 1:dim(TMD)[1] - 1) {
  future <- row(noncumFullTriangle) + col(noncumFullTriangle) - 1 ==
dim(TMD)[1] + k
  vpf[k] <- sum(noncumFullTriangle[future])
}

# Provisión sin rentabilidad
vpf
sum(vpf)

# Provisión como renta: teniendo en cuenta ETTI libre de riesgo con
ajuste por volatilidad
prov.renta <- vpf*i.renta; prov.renta
sum(prov.renta)

#CDR
## S3 method for class 'BOOTSTRAP'
CDR(BootChainLadder(TMD,R=1000,process.distr = c("od.pois")))

# ------------------------------------------
#  GLM Gamma log link "fórmula"
# ------------------------------------------

# Aplicación GLM Gamma log link con fórmula
glmformula <- glmReserve(TMD, var.power = 2, link.power = 0,
mse.method ="formula")
glmformula$FullTriangle
glmformula$summary

# Desacumulamos triángulo
a <-
matrix(c(rep(0,dim(TMD)[1]),glmformula$FullTriangle),nrow=dim(TMD)[1],
ncol=dim(TMD)[1]);a
noncumFullTriangle<-glmformula$FullTriangle-a; noncumFullTriangle

# Obtenemos el vector de pagos futuros
vpf <- rep(0, dim(TMD)[1] - 1)
for (k in 1:dim(TMD)[1] - 1) {
  future <- row(noncumFullTriangle) + col(noncumFullTriangle) - 1 ==
dim(TMD)[1] + k
  vpf[k] <- sum(noncumFullTriangle[future])
}

# Provisión sin rentabilidad
vpf
sum(vpf)
```

```
# Provisión como renta: teniendo en cuenta ETTI libre de riesgo con ajuste por volatilidad
prov.renta <- vpf*i.renta; prov.renta
sum(prov.renta)

# ECMDR
intercept <- glmformula$model$coefficients[1]
alfa1 <- glmformula$model$coefficients[2]
alfa2 <- glmformula$model$coefficients[3]
alfa3 <- glmformula$model$coefficients[4]
alfa4 <- glmformula$model$coefficients[5]
alfa5 <- glmformula$model$coefficients[6]
beta1 <- glmformula$model$coefficients[7]
beta2 <- glmformula$model$coefficients[8]
beta3 <- glmformula$model$coefficients[9]
beta4 <- glmformula$model$coefficients[10]
beta5 <- glmformula$model$coefficients[11]

c00 <- exp(intercept);c00
c10 <- exp(intercept)*exp(alfa1);c10
c20 <- exp(intercept)*exp(alfa2);c20
c30 <- exp(intercept)*exp(alfa3);c30
c40 <- exp(intercept)*exp(alfa4);c40
c50 <- exp(intercept)*exp(alfa5);c50
c01 <- exp(intercept)*exp(beta1);c01
c11 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta1);c11
c21 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta1);c21
c31 <- exp(intercept)*exp(alfa3)*exp(beta1);c31
c41 <- exp(intercept)*exp(alfa4)*exp(beta1);c41
c02 <- exp(intercept)*exp(beta2);c02
c12 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta2);c12
c22 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta2);c22
c32 <- exp(intercept)*exp(alfa3)*exp(beta2);c32
c03 <- exp(intercept)*exp(beta3);c03
c13 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta3);c13
c23 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta3);c23
c04 <- exp(intercept)*exp(beta4);c04
c14 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta4);c14
c05 <- exp(intercept)*exp(beta5);c05

e00 <- (noncumFullTriangle[1,1]-c00)^2
e10 <- (noncumFullTriangle[2,1]-c10)^2
e20 <- (noncumFullTriangle[3,1]-c20)^2
e30 <- (noncumFullTriangle[4,1]-c30)^2
e40 <- (noncumFullTriangle[5,1]-c40)^2
e50 <- (noncumFullTriangle[6,1]-c50)^2
e01 <- (noncumFullTriangle[1,2]-c01)^2
e11 <- (noncumFullTriangle[2,2]-c11)^2
e21 <- (noncumFullTriangle[3,2]-c21)^2
e31 <- (noncumFullTriangle[4,2]-c31)^2
e41 <- (noncumFullTriangle[5,2]-c41)^2
e02 <- (noncumFullTriangle[1,3]-c02)^2
e12 <- (noncumFullTriangle[2,3]-c12)^2
e22 <- (noncumFullTriangle[3,3]-c22)^2
e32 <- (noncumFullTriangle[4,3]-c32)^2
e03 <- (noncumFullTriangle[1,4]-c03)^2
e13 <- (noncumFullTriangle[2,4]-c13)^2
```

```
e23 <- (noncumFullTriangle[3,4]-c23)^2
e04 <- (noncumFullTriangle[1,5]-c04)^2
e14 <- (noncumFullTriangle[2,5]-c14)^2
e05 <- (noncumFullTriangle[1,6]-c05)^2

sumerrores <-
sum(e00,e10,e20,e30,e40,e50,e01,e11,e21,e31,e41,e02,e12,e22,e32,e03,e1
3,e23,e04,e14,e05)
ECMDR <- sqrt(sumerrores/21);ECMDR

# -----------------------------------------
#  GLM Gamma log link "bootstrap"
# -----------------------------------------

# Aplicación GLM Gamma log link con bootstrap
set.seed(1111)
glmbootstrap <- glmReserve(TMD,var.power = 2,mse.method =
"bootstrap"); glmbootstrap
glmbootstrap$FullTriangle

# Desacumulamos triángulo
a <-
matrix(c(rep(0,dim(TMD)[1]),glmbootstrap$FullTriangle),nrow=dim(TMD)[1
],ncol=dim(TMD)[1]);a
noncumFullTriangle<-glmbootstrap$FullTriangle-a; noncumFullTriangle

# Obtenemos el vector de pagos futuros
vpf <- rep(0, dim(TMD)[1] - 1)
for (k in 1:dim(TMD)[1] - 1) {
  future <- row(noncumFullTriangle) + col(noncumFullTriangle) - 1 ==
dim(TMD)[1] + k
  vpf[k] <- sum(noncumFullTriangle[future])
}

# Provisión sin rentabilidad
vpf
sum(vpf)

# Provisión como renta: teniendo en cuenta ETTI libre de riesgo con
ajuste por volatilidad
prov.renta <- vpf*i.renta; prov.renta
sum(prov.renta)

#CDR
## S3 method for class 'BOOTSTRAP'
CDR(BootChainLadder(TMD,R=1000,process.distr = c("gamma")))

# -----------------------------------------
#  GLM Gaussiana Inversa log link
# -----------------------------------------

# Aplicación GLM Gaussiana Inversa log link
glmformula <- glmReserve(TMD, var.power = 3, link.power = 0,
mse.method ="formula")
glmformula$FullTriangle
glmformula$summary
```

```r
# Desacumulamos triángulo
a <-
matrix(c(rep(0,dim(TMD)[1]),glmformula$FullTriangle),nrow=dim(TMD)[1],
ncol=dim(TMD)[1]);a
noncumFullTriangle<-glmformula$FullTriangle-a; noncumFullTriangle

# Obtenemos el vector de pagos futuros
vpf <- rep(0, dim(TMD)[1] - 1)
for (k in 1:dim(TMD)[1] - 1) {
  future <- row(noncumFullTriangle) + col(noncumFullTriangle) - 1 ==
dim(TMD)[1] + k
  vpf[k] <- sum(noncumFullTriangle[future])
}

# Provisión sin rentabilidad
vpf
sum(vpf)

# Provisión como renta: teniendo en cuenta ETTI libre de riesgo con
ajuste por volatilidad
prov.renta <- vpf*i.renta; prov.renta
sum(prov.renta)

# ECMDR
intercept <- glmformula$model$coefficients[1]
alfa1 <- glmformula$model$coefficients[2]
alfa2 <- glmformula$model$coefficients[3]
alfa3 <- glmformula$model$coefficients[4]
alfa4 <- glmformula$model$coefficients[5]
alfa5 <- glmformula$model$coefficients[6]
beta1 <- glmformula$model$coefficients[7]
beta2 <- glmformula$model$coefficients[8]
beta3 <- glmformula$model$coefficients[9]
beta4 <- glmformula$model$coefficients[10]
beta5 <- glmformula$model$coefficients[11]

c00 <- exp(intercept);c00
c10 <- exp(intercept)*exp(alfa1);c10
c20 <- exp(intercept)*exp(alfa2);c20
c30 <- exp(intercept)*exp(alfa3);c30
c40 <- exp(intercept)*exp(alfa4);c40
c50 <- exp(intercept)*exp(alfa5);c50
c01 <- exp(intercept)*exp(beta1);c01
c11 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta1);c11
c21 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta1);c21
c31 <- exp(intercept)*exp(alfa3)*exp(beta1);c31
c41 <- exp(intercept)*exp(alfa4)*exp(beta1);c41
c02 <- exp(intercept)*exp(beta2);c02
c12 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta2);c12
c22 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta2);c22
c32 <- exp(intercept)*exp(alfa3)*exp(beta2);c32
c03 <- exp(intercept)*exp(beta3);c03
c13 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta3);c13
c23 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta3);c23
c04 <- exp(intercept)*exp(beta4);c04
c14 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta4);c14
c05 <- exp(intercept)*exp(beta5);c05
```

```
e00 <- (noncumFullTriangle[1,1]-c00)^2
e10 <- (noncumFullTriangle[2,1]-c10)^2
e20 <- (noncumFullTriangle[3,1]-c20)^2
e30 <- (noncumFullTriangle[4,1]-c30)^2
e40 <- (noncumFullTriangle[5,1]-c40)^2
e50 <- (noncumFullTriangle[6,1]-c50)^2
e01 <- (noncumFullTriangle[1,2]-c01)^2
e11 <- (noncumFullTriangle[2,2]-c11)^2
e21 <- (noncumFullTriangle[3,2]-c21)^2
e31 <- (noncumFullTriangle[4,2]-c31)^2
e41 <- (noncumFullTriangle[5,2]-c41)^2
e02 <- (noncumFullTriangle[1,3]-c02)^2
e12 <- (noncumFullTriangle[2,3]-c12)^2
e22 <- (noncumFullTriangle[3,3]-c22)^2
e32 <- (noncumFullTriangle[4,3]-c32)^2
e03 <- (noncumFullTriangle[1,4]-c03)^2
e13 <- (noncumFullTriangle[2,4]-c13)^2
e23 <- (noncumFullTriangle[3,4]-c23)^2
e04 <- (noncumFullTriangle[1,5]-c04)^2
e14 <- (noncumFullTriangle[2,5]-c14)^2
e05 <- (noncumFullTriangle[1,6]-c05)^2

sumerrores <-
sum(e00,e10,e20,e30,e40,e50,e01,e11,e21,e31,e41,e02,e12,e22,e32,e03,e1
3,e23,e04,e14,e05)
ECMDR <- sqrt(sumerrores/21);ECMDR
```

## 8.2. Código en R: Seguro de motocicletas

```
######################################################################
# 1) Cobertura: Responsabilidad por daños personales
######################################################################

# Datos
c0 <- c(11992074,6889531,1180619,753910,311012,77299)
c1 <- c(12427139,7029833,2292458,573651,365704)
c2 <- c(13519414,7950634,1869977,848005)
c3 <- c(14243021,7538052,1694661)
c4 <- c(14734046,9364844)
c5 <- 14496066

C0 <- cumsum(c0)
C1 <- c(cumsum(c1),NA)
C2 <- c(cumsum(c2),NA,NA)
C3 <- c(cumsum(c3),NA,NA,NA)
C4 <- c(cumsum(c4),NA,NA,NA,NA)
C5 <- c(cumsum(c5),NA,NA,NA,NA,NA)

MBI <- matrix(c(C0,C1,C2,C3,C4,C5),ncol=6)
MBI <- t(MBI); MBI
MBI <- as.triangle(MBI); MBI

# ------------------------------------------
# Modelo de Mack
```

```r
# ------------------------------------------

# Aplicación Modelo de Mack
mack <- MackChainLadder(MBI,tail = FALSE, mse.method="Mack");mack
mack$FullTriangle
mack_smmry <- summary(mack)
mack_smmry$ByOrigin
mack$f

# Desacumulamos triángulo
a <- matrix(c(rep(0,dim(MBI)[1]),mack$FullTriangle),
          nrow=dim(MBI)[1],ncol=dim(MBI)[1])
noncumFullTriangle<-mack$FullTriangle-a; noncumFullTriangle

# Obtenemos el vector de pagos futuros
vpf <- rep(0, dim(MBI)[1] - 1)
for (k in 1:dim(MBI)[1] - 1) {
  future<-row(noncumFullTriangle)+col(noncumFullTriangle)-1 ==
dim(MBI)[1]+k
  vpf[k]<-sum(noncumFullTriangle[future])
}

# Provisión sin rentabilidad
vpf
sum(vpf)

# Provisión como renta: teniendo en cuenta ETTI libre de riesgo con
ajuste por volatilidad
ETI.V <- c(-0.00335,0.00066,0.00276,0.00392,0.00480)
i.renta <- numeric(length(ETI.V))
for (i in 1:length(ETI.V)) {i.renta[i]<-(1+ETI.V[i])^(-i)}; i.renta
prov.renta <- vpf*i.renta; prov.renta
sum(prov.renta)

# CDR
## S3 method for class 'MackChainLadder'
CDR(MackChainLadder(MBI,tail = FALSE, mse.method="Mack"))

# ------------------------------------------
#  Modelo de Mack con cola
# ------------------------------------------

# Aplicación Modelo de Mack con cola
mack <- MackChainLadder(MBI,tail = TRUE, mse.method="Mack");mack
mack$FullTriangle
mack_smmry <- summary(mack)
mack_smmry$ByOrigin
mack$f

# Obtenemos el vector de pagos futuros
c06 <- (mack$FullTriangle[1,7]-mack$FullTriangle[1,6])
c16 <- (mack$FullTriangle[2,7]-mack$FullTriangle[2,6])
c26 <- (mack$FullTriangle[3,7]-mack$FullTriangle[3,6])
c36 <- (mack$FullTriangle[4,7]-mack$FullTriangle[4,6])
c46 <- (mack$FullTriangle[5,7]-mack$FullTriangle[5,6])
c56 <- (mack$FullTriangle[6,7]-mack$FullTriangle[6,6])
```

```
vpf_tail <- c(vpf[1]+c06, vpf[2]+c16, vpf[3]+c26, vpf[4]+c36,
vpf[5]+c46, c56)

# Provisión sin rentabilidad
vpf_tail
sum(vpf_tail)

# Provisión como renta: teniendo en cuenta ETTI libre de riesgo con
ajuste por volatilidad
ETI.V2 <- c(-0.00335,0.00066,0.00276,0.00392,0.00480,0.00548)
i.renta2 <- numeric(length(ETI.V2))
for (i in 1:length(ETI.V2)) {i.renta2[i]<-(1+ETI.V2[i])^(-i)};
i.renta2
prov.renta_tail <- vpf_tail*i.renta2; prov.renta_tail
sum(prov.renta_tail)

# ------------------------------------------
#  GLM Normal log link
# ------------------------------------------

# Aplicación GLM Normal log link
glmformula <- glmReserve(MBI, var.power = 0, link.power = 0,
mse.method ="formula")
glmformula$FullTriangle
glmformula$summary

# Desacumulamos triángulo
a <-
matrix(c(rep(0,dim(MBI)[1]),glmformula$FullTriangle),nrow=dim(MBI)[1],
ncol=dim(MBI)[1]);a
noncumFullTriangle<-glmformula$FullTriangle-a; noncumFullTriangle

# Obtenemos el vector de pagos futuros
vpf <- rep(0, dim(MBI)[1] - 1)
for (k in 1:dim(MBI)[1] - 1) {
  future <- row(noncumFullTriangle) + col(noncumFullTriangle) - 1 ==
dim(MBI)[1] + k
  vpf[k] <- sum(noncumFullTriangle[future])
}

# Provisión sin rentabilidad
vpf
sum(vpf)

# Provisión como renta: teniendo en cuenta ETTI libre de riesgo con
ajuste por volatilidad
prov.renta <- vpf*i.renta; prov.renta
sum(prov.renta)

# ECMDR
intercept <- glmformula$model$coefficients[1]
alfa1 <- glmformula$model$coefficients[2]
alfa2 <- glmformula$model$coefficients[3]
alfa3 <- glmformula$model$coefficients[4]
alfa4 <- glmformula$model$coefficients[5]
alfa5 <- glmformula$model$coefficients[6]
beta1 <- glmformula$model$coefficients[7]
```

```
beta2 <- glmformula$model$coefficients[8]
beta3 <- glmformula$model$coefficients[9]
beta4 <- glmformula$model$coefficients[10]
beta5 <- glmformula$model$coefficients[11]

c00 <- exp(intercept);c00
c10 <- exp(intercept)*exp(alfa1);c10
c20 <- exp(intercept)*exp(alfa2);c20
c30 <- exp(intercept)*exp(alfa3);c30
c40 <- exp(intercept)*exp(alfa4);c40
c50 <- exp(intercept)*exp(alfa5);c50
c01 <- exp(intercept)*exp(beta1);c01
c11 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta1);c11
c21 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta1);c21
c31 <- exp(intercept)*exp(alfa3)*exp(beta1);c31
c41 <- exp(intercept)*exp(alfa4)*exp(beta1);c41
c02 <- exp(intercept)*exp(beta2);c02
c12 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta2);c12
c22 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta2);c22
c32 <- exp(intercept)*exp(alfa3)*exp(beta2);c32
c03 <- exp(intercept)*exp(beta3);c03
c13 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta3);c13
c23 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta3);c23
c04 <- exp(intercept)*exp(beta4);c04
c14 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta4);c14
c05 <- exp(intercept)*exp(beta5);c05

e00 <- (noncumFullTriangle[1,1]-c00)^2
e10 <- (noncumFullTriangle[2,1]-c10)^2
e20 <- (noncumFullTriangle[3,1]-c20)^2
e30 <- (noncumFullTriangle[4,1]-c30)^2
e40 <- (noncumFullTriangle[5,1]-c40)^2
e50 <- (noncumFullTriangle[6,1]-c50)^2
e01 <- (noncumFullTriangle[1,2]-c01)^2
e11 <- (noncumFullTriangle[2,2]-c11)^2
e21 <- (noncumFullTriangle[3,2]-c21)^2
e31 <- (noncumFullTriangle[4,2]-c31)^2
e41 <- (noncumFullTriangle[5,2]-c41)^2
e02 <- (noncumFullTriangle[1,3]-c02)^2
e12 <- (noncumFullTriangle[2,3]-c12)^2
e22 <- (noncumFullTriangle[3,3]-c22)^2
e32 <- (noncumFullTriangle[4,3]-c32)^2
e03 <- (noncumFullTriangle[1,4]-c03)^2
e13 <- (noncumFullTriangle[2,4]-c13)^2
e23 <- (noncumFullTriangle[3,4]-c23)^2
e04 <- (noncumFullTriangle[1,5]-c04)^2
e14 <- (noncumFullTriangle[2,5]-c14)^2
e05 <- (noncumFullTriangle[1,6]-c05)^2

sumerrores <-
sum(e00,e10,e20,e30,e40,e50,e01,e11,e21,e31,e41,e02,e12,e22,e32,e03,e1
3,e23,e04,e14,e05)
ECMDR <- sqrt(sumerrores/21);ECMDR

# ------------------------------------------
#  GLM Poisson sobredisperso log link "fórmula"
# ------------------------------------------
```

```r
# Aplicación GLM Poisson sobredisperso log link con fórmula
glmformula <- glmReserve(MBI, var.power = 1, link.power = 0,
mse.method ="formula")
glmformula$FullTriangle
glmformula$summary

# Desacumulamos triángulo
a <-
matrix(c(rep(0,dim(MBI)[1]),glmformula$FullTriangle),nrow=dim(MBI)[1],
ncol=dim(MBI)[1]);a
noncumFullTriangle<-glmformula$FullTriangle-a; noncumFullTriangle

# Obtenemos el vector de pagos futuros
vpf <- rep(0, dim(MBI)[1] - 1)
for (k in 1:dim(MBI)[1] - 1) {
  future <- row(noncumFullTriangle) + col(noncumFullTriangle) - 1 ==
dim(MBI)[1] + k
  vpf[k] <- sum(noncumFullTriangle[future])
}

# Provisión sin rentabilidad
vpf
sum(vpf)

# Provisión como renta: teniendo en cuenta ETTI libre de riesgo con
ajuste por volatilidad
prov.renta <- vpf*i.renta; prov.renta
sum(prov.renta)

# ECMDR
intercept <- glmformula$model$coefficients[1]
alfa1 <- glmformula$model$coefficients[2]
alfa2 <- glmformula$model$coefficients[3]
alfa3 <- glmformula$model$coefficients[4]
alfa4 <- glmformula$model$coefficients[5]
alfa5 <- glmformula$model$coefficients[6]
beta1 <- glmformula$model$coefficients[7]
beta2 <- glmformula$model$coefficients[8]
beta3 <- glmformula$model$coefficients[9]
beta4 <- glmformula$model$coefficients[10]
beta5 <- glmformula$model$coefficients[11]

c00 <- exp(intercept);c00
c10 <- exp(intercept)*exp(alfa1);c10
c20 <- exp(intercept)*exp(alfa2);c20
c30 <- exp(intercept)*exp(alfa3);c30
c40 <- exp(intercept)*exp(alfa4);c40
c50 <- exp(intercept)*exp(alfa5);c50
c01 <- exp(intercept)*exp(beta1);c01
c11 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta1);c11
c21 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta1);c21
c31 <- exp(intercept)*exp(alfa3)*exp(beta1);c31
c41 <- exp(intercept)*exp(alfa4)*exp(beta1);c41
c02 <- exp(intercept)*exp(beta2);c02
c12 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta2);c12
c22 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta2);c22
```

```
c32 <- exp(intercept)*exp(alfa3)*exp(beta2);c32
c03 <- exp(intercept)*exp(beta3);c03
c13 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta3);c13
c23 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta3);c23
c04 <- exp(intercept)*exp(beta4);c04
c14 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta4);c14
c05 <- exp(intercept)*exp(beta5);c05

e00 <- (noncumFullTriangle[1,1]-c00)^2
e10 <- (noncumFullTriangle[2,1]-c10)^2
e20 <- (noncumFullTriangle[3,1]-c20)^2
e30 <- (noncumFullTriangle[4,1]-c30)^2
e40 <- (noncumFullTriangle[5,1]-c40)^2
e50 <- (noncumFullTriangle[6,1]-c50)^2
e01 <- (noncumFullTriangle[1,2]-c01)^2
e11 <- (noncumFullTriangle[2,2]-c11)^2
e21 <- (noncumFullTriangle[3,2]-c21)^2
e31 <- (noncumFullTriangle[4,2]-c31)^2
e41 <- (noncumFullTriangle[5,2]-c41)^2
e02 <- (noncumFullTriangle[1,3]-c02)^2
e12 <- (noncumFullTriangle[2,3]-c12)^2
e22 <- (noncumFullTriangle[3,3]-c22)^2
e32 <- (noncumFullTriangle[4,3]-c32)^2
e03 <- (noncumFullTriangle[1,4]-c03)^2
e13 <- (noncumFullTriangle[2,4]-c13)^2
e23 <- (noncumFullTriangle[3,4]-c23)^2
e04 <- (noncumFullTriangle[1,5]-c04)^2
e14 <- (noncumFullTriangle[2,5]-c14)^2
e05 <- (noncumFullTriangle[1,6]-c05)^2

sumerrores <-
sum(e00,e10,e20,e30,e40,e50,e01,e11,e21,e31,e41,e02,e12,e22,e32,e03,e1
3,e23,e04,e14,e05)
ECMDR <- sqrt(sumerrores/21);ECMDR

# -----------------------------------------
#  GLM Poisson sobredisperso log link "bootstrap"
# -----------------------------------------

# Aplicación GLM Poisson sobredisperso log link con bootstrsap
set.seed(1111)
glmbootstrap <- glmReserve(MBI,mse.method = "bootstrap"); glmbootstrap
glmbootstrap$FullTriangle

# Desacumulamos triángulo
a <-
matrix(c(rep(0,dim(MBI)[1]),glmbootstrap$FullTriangle),nrow=dim(MBI)[1
],ncol=dim(MBI)[1]);a
noncumFullTriangle <- glmbootstrap$FullTriangle-a; noncumFullTriangle

# Obtenemos el vector de pagos futuros
vpf <- rep(0, dim(MBI)[1] - 1)
for (k in 1:dim(MBI)[1] - 1) {
  future <- row(noncumFullTriangle) + col(noncumFullTriangle) - 1 ==
dim(MBI)[1] + k
  vpf[k] <- sum(noncumFullTriangle[future])
}
```

```
# Provisión sin rentabilidad
vpf
sum(vpf)

# Provisión como renta: teniendo en cuenta ETTI libre de riesgo con
ajuste por volatilidad
prov.renta <- vpf*i.renta; prov.renta
sum(prov.renta)

#CDR
## S3 method for class 'BOOTSTRAP'
CDR(BootChainLadder(MBI,R=1000,process.distr = c("od.pois")))

# -------------------------------------------
#  GLM Gamma log link "fórmula"
# -------------------------------------------

# Aplicación GLM Gamma log link con fórmula
glmformula <- glmReserve(MBI, var.power = 2, link.power = 0,
mse.method ="formula")
glmformula$FullTriangle
glmformula$summary

# Desacumulamos triángulo
a <-
matrix(c(rep(0,dim(MBI)[1]),glmformula$FullTriangle),nrow=dim(MBI)[1],
ncol=dim(MBI)[1]);a
noncumFullTriangle<-glmformula$FullTriangle-a; noncumFullTriangle

# Obtenemos el vector de pagos futuros
vpf <- rep(0, dim(MBI)[1] - 1)
for (k in 1:dim(MBI)[1] - 1) {
  future <- row(noncumFullTriangle) + col(noncumFullTriangle) - 1 ==
dim(MBI)[1] + k
  vpf[k] <- sum(noncumFullTriangle[future])
}

# Provision sin rentabilidad
vpf
sum(vpf)

# Provisión como renta: teniendo en cuenta ETTI libre de riesgo con
ajuste por volatilidad
prov.renta <- vpf*i.renta; prov.renta
sum(prov.renta)

# ECMDR
intercept <- glmformula$model$coefficients[1]
alfa1 <- glmformula$model$coefficients[2]
alfa2 <- glmformula$model$coefficients[3]
alfa3 <- glmformula$model$coefficients[4]
alfa4 <- glmformula$model$coefficients[5]
alfa5 <- glmformula$model$coefficients[6]
beta1 <- glmformula$model$coefficients[7]
beta2 <- glmformula$model$coefficients[8]
beta3 <- glmformula$model$coefficients[9]
```

```
beta4 <- glmformula$model$coefficients[10]
beta5 <- glmformula$model$coefficients[11]

c00 <- exp(intercept);c00
c10 <- exp(intercept)*exp(alfa1);c10
c20 <- exp(intercept)*exp(alfa2);c20
c30 <- exp(intercept)*exp(alfa3);c30
c40 <- exp(intercept)*exp(alfa4);c40
c50 <- exp(intercept)*exp(alfa5);c50
c01 <- exp(intercept)*exp(beta1);c01
c11 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta1);c11
c21 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta1);c21
c31 <- exp(intercept)*exp(alfa3)*exp(beta1);c31
c41 <- exp(intercept)*exp(alfa4)*exp(beta1);c41
c02 <- exp(intercept)*exp(beta2);c02
c12 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta2);c12
c22 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta2);c22
c32 <- exp(intercept)*exp(alfa3)*exp(beta2);c32
c03 <- exp(intercept)*exp(beta3);c03
c13 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta3);c13
c23 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta3);c23
c04 <- exp(intercept)*exp(beta4);c04
c14 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta4);c14
c05 <- exp(intercept)*exp(beta5);c05

e00 <- (noncumFullTriangle[1,1]-c00)^2
e10 <- (noncumFullTriangle[2,1]-c10)^2
e20 <- (noncumFullTriangle[3,1]-c20)^2
e30 <- (noncumFullTriangle[4,1]-c30)^2
e40 <- (noncumFullTriangle[5,1]-c40)^2
e50 <- (noncumFullTriangle[6,1]-c50)^2
e01 <- (noncumFullTriangle[1,2]-c01)^2
e11 <- (noncumFullTriangle[2,2]-c11)^2
e21 <- (noncumFullTriangle[3,2]-c21)^2
e31 <- (noncumFullTriangle[4,2]-c31)^2
e41 <- (noncumFullTriangle[5,2]-c41)^2
e02 <- (noncumFullTriangle[1,3]-c02)^2
e12 <- (noncumFullTriangle[2,3]-c12)^2
e22 <- (noncumFullTriangle[3,3]-c22)^2
e32 <- (noncumFullTriangle[4,3]-c32)^2
e03 <- (noncumFullTriangle[1,4]-c03)^2
e13 <- (noncumFullTriangle[2,4]-c13)^2
e23 <- (noncumFullTriangle[3,4]-c23)^2
e04 <- (noncumFullTriangle[1,5]-c04)^2
e14 <- (noncumFullTriangle[2,5]-c14)^2
e05 <- (noncumFullTriangle[1,6]-c05)^2

sumerrores <-
sum(e00,e10,e20,e30,e40,e50,e01,e11,e21,e31,e41,e02,e12,e22,e32,e03,e1
3,e23,e04,e14,e05)
ECMDR <- sqrt(sumerrores/21);ECMDR

# -----------------------------------------
#  GLM Gamma log link "bootstrap"
# -----------------------------------------

# Aplicación GLM Gamma log link con bootstrap
```

```
set.seed(1111)
glmbootstrap <- glmReserve(MBI,var.power = 2,mse.method =
"bootstrap"); glmbootstrap
glmbootstrap$FullTriangle

# Desacumulamos triángulo
a <-
matrix(c(rep(0,dim(MBI)[1]),glmbootstrap$FullTriangle),nrow=dim(MBI)[1
],ncol=dim(MBI)[1]);a
noncumFullTriangle <- glmbootstrap$FullTriangle-a; noncumFullTriangle

# Obtenemos el vector de pagos futuros
vpf <- rep(0, dim(MBI)[1] - 1)
for (k in 1:dim(MBI)[1] - 1) {
  future <- row(noncumFullTriangle) + col(noncumFullTriangle) - 1 ==
dim(MBI)[1] + k
  vpf[k] <- sum(noncumFullTriangle[future])
}

# Provisión sin rentabilidad
vpf
sum(vpf)

# Provisión como renta: teniendo en cuenta ETTI libre de riesgo con
ajuste por volatilidad
prov.renta <- vpf*i.renta; prov.renta
sum(prov.renta)

#CDR
## S3 method for class 'BOOTSTRAP'
CDR(BootChainLadder(MBI,R=1000,process.distr = c("gamma")))

# -----------------------------------------
#  GLM Gaussiana Inversa log link
# -----------------------------------------

# Aplicación GLM Gaussiana Inversa log link
glmformula <- glmReserve(MBI, var.power = 3, link.power = 0,
mse.method ="formula")
glmformula$FullTriangle
glmformula$summary

# Desacumulamos triángulo
a<-
matrix(c(rep(0,dim(MBI)[1]),glmformula$FullTriangle),nrow=dim(MBI)[1],
ncol=dim(MBI)[1]);a
noncumFullTriangle<-glmformula$FullTriangle-a; noncumFullTriangle

# Obtenemos el vector de pagos futuros
vpf <- rep(0, dim(MBI)[1] - 1)
for (k in 1:dim(MBI)[1] - 1) {
  future <- row(noncumFullTriangle) + col(noncumFullTriangle) - 1 ==
dim(MBI)[1] + k
  vpf[k] <- sum(noncumFullTriangle[future])
}

# Provisión sin rentabilidad
```

```
vpf
sum(vpf)

# Provisión como renta: teniendo en cuenta ETTI libre de riesgo con
ajuste por volatilidad
prov.renta <- vpf*i.renta; prov.renta
sum(prov.renta)

# ECMDR
intercept <- glmformula$model$coefficients[1]
alfa1 <- glmformula$model$coefficients[2]
alfa2 <- glmformula$model$coefficients[3]
alfa3 <- glmformula$model$coefficients[4]
alfa4 <- glmformula$model$coefficients[5]
alfa5 <- glmformula$model$coefficients[6]
beta1 <- glmformula$model$coefficients[7]
beta2 <- glmformula$model$coefficients[8]
beta3 <- glmformula$model$coefficients[9]
beta4 <- glmformula$model$coefficients[10]
beta5 <- glmformula$model$coefficients[11]

c00 <- exp(intercept);c00
c10 <- exp(intercept)*exp(alfa1);c10
c20 <- exp(intercept)*exp(alfa2);c20
c30 <- exp(intercept)*exp(alfa3);c30
c40 <- exp(intercept)*exp(alfa4);c40
c50 <- exp(intercept)*exp(alfa5);c50
c01 <- exp(intercept)*exp(beta1);c01
c11 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta1);c11
c21 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta1);c21
c31 <- exp(intercept)*exp(alfa3)*exp(beta1);c31
c41 <- exp(intercept)*exp(alfa4)*exp(beta1);c41
c02 <- exp(intercept)*exp(beta2);c02
c12 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta2);c12
c22 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta2);c22
c32 <- exp(intercept)*exp(alfa3)*exp(beta2);c32
c03 <- exp(intercept)*exp(beta3);c03
c13 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta3);c13
c23 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta3);c23
c04 <- exp(intercept)*exp(beta4);c04
c14 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta4);c14
c05 <- exp(intercept)*exp(beta5);c05

e00 <- (noncumFullTriangle[1,1]-c00)^2
e10 <- (noncumFullTriangle[2,1]-c10)^2
e20 <- (noncumFullTriangle[3,1]-c20)^2
e30 <- (noncumFullTriangle[4,1]-c30)^2
e40 <- (noncumFullTriangle[5,1]-c40)^2
e50 <- (noncumFullTriangle[6,1]-c50)^2
e01 <- (noncumFullTriangle[1,2]-c01)^2
e11 <- (noncumFullTriangle[2,2]-c11)^2
e21 <- (noncumFullTriangle[3,2]-c21)^2
e31 <- (noncumFullTriangle[4,2]-c31)^2
e41 <- (noncumFullTriangle[5,2]-c41)^2
e02 <- (noncumFullTriangle[1,3]-c02)^2
e12 <- (noncumFullTriangle[2,3]-c12)^2
e22 <- (noncumFullTriangle[3,3]-c22)^2
```

```
e32 <- (noncumFullTriangle[4,3]-c32)^2
e03 <- (noncumFullTriangle[1,4]-c03)^2
e13 <- (noncumFullTriangle[2,4]-c13)^2
e23 <- (noncumFullTriangle[3,4]-c23)^2
e04 <- (noncumFullTriangle[1,5]-c04)^2
e14 <- (noncumFullTriangle[2,5]-c14)^2
e05 <- (noncumFullTriangle[1,6]-c05)^2

sumerrores <-
sum(e00,e10,e20,e30,e40,e50,e01,e11,e21,e31,e41,e02,e12,e22,e32,e03,e1
3,e23,e04,e14,e05)
ECMDR <- sqrt(sumerrores/21);ECMDR

######################################################################
# 2) Cobertura: Responsabilidad por daños materiales
######################################################################

# Datos
c0 <- c(1853440,2182174,489058,211766,103670,30337)
c1 <- c(1686632,2468739,550092,284535,162179)
c2 <- c(1622188,2083109,502041,261952)
c3 <- c(2156282,2453129,467514)
c4 <- c(2386124,2382182)
c5 <- 3014112

C0 <- cumsum(c0)
C1 <- c(cumsum(c1),NA)
C2 <- c(cumsum(c2),NA,NA)
C3 <- c(cumsum(c3),NA,NA,NA)
C4 <- c(cumsum(c4),NA,NA,NA,NA)
C5 <- c(cumsum(c5),NA,NA,NA,NA,NA)

MMD <- matrix(c(C0,C1,C2,C3,C4,C5),ncol=6)
MMD <- t(MMD); MMD
MMD <- as.triangle(MMD); MMD

# ------------------------------------------
# Modelo de Mack
# ------------------------------------------

# Aplicación Modelo de Mack
mack <- MackChainLadder(MMD,tail = FALSE, mse.method="Mack");mack
mack$FullTriangle
mack_smmry <- summary(mack)
mack_smmry$ByOrigin
mack$f

# Desacumulamos triángulo
a <- matrix(c(rep(0,dim(MMD)[1]),mack$FullTriangle),
          nrow=dim(MMD)[1],ncol=dim(MMD)[1])
noncumFullTriangle <- mack$FullTriangle-a; noncumFullTriangle

# Obtenemos el vector de pagos futuros
vpf <- rep(0, dim(MMD)[1] - 1)
for (k in 1:dim(MMD)[1] - 1) {
  future<-row(noncumFullTriangle)+col(noncumFullTriangle)-1 ==
dim(MMD)[1]+k
```

```
  vpf[k]<-sum(noncumFullTriangle[future])
}

# Provisión sin rentabilidad
vpf
sum(vpf)

# Provisión como renta: teniendo en cuenta ETTI libre de riesgo con
ajuste por volatilidad
ETI.V <- c(-0.00335,0.00066,0.00276,0.00392,0.00480)
i.renta <- numeric(length(ETI.V))
for (i in 1:length(ETI.V)) {i.renta[i]<-(1+ETI.V[i])^(-i)}; i.renta
prov.renta <- vpf*i.renta; prov.renta
sum(prov.renta)

# CDR
## S3 method for class 'MackChainLadder'
CDR(MackChainLadder(MMD,tail = FALSE, mse.method="Mack"))

# -------------------------------------------
#  Modelo de Mack con cola
# -------------------------------------------

# Aplicación Modelo de Mack con cola
mack<-MackChainLadder(MMD,tail = TRUE, mse.method="Mack");mack
mack$FullTriangle
mack_smmry <- summary(mack)
mack_smmry$ByOrigin
mack$f

# Obtenemos el vector de pagos futuros
c06 <- (mack$FullTriangle[1,7]-mack$FullTriangle[1,6])
c16 <- (mack$FullTriangle[2,7]-mack$FullTriangle[2,6])
c26 <- (mack$FullTriangle[3,7]-mack$FullTriangle[3,6])
c36 <- (mack$FullTriangle[4,7]-mack$FullTriangle[4,6])
c46 <- (mack$FullTriangle[5,7]-mack$FullTriangle[5,6])
c56 <- (mack$FullTriangle[6,7]-mack$FullTriangle[6,6])

vpf_tail <- c(vpf[1]+c06, vpf[2]+c16, vpf[3]+c26, vpf[4]+c36,
vpf[5]+c46, c56)

# Provisión sin rentabilidad
vpf_tail
sum(vpf_tail)

# Provisión como renta: teniendo en cuenta ETTI libre de riesgo con
ajuste por volatilidad
ETI.V2 <- c(-0.00335,0.00066,0.00276,0.00392,0.00480,0.00548)
i.renta2 <- numeric(length(ETI.V2))
for (i in 1:length(ETI.V2)) {i.renta2[i]<-(1+ETI.V2[i])^(-i)};
i.renta2
prov.renta_tail <- vpf_tail*i.renta2; prov.renta_tail
sum(prov.renta_tail)

# -------------------------------------------
#  GLM Normal log link
# -------------------------------------------
```

```
# Aplicación GLM Normal log link
glmformula <- glmReserve(MMD, var.power = 0, link.power = 0,
mse.method ="formula")
glmformula$FullTriangle
glmformula$summary

# Desacumulamos triángulo
a <-
matrix(c(rep(0,dim(MMD)[1]),glmformula$FullTriangle),nrow=dim(MMD)[1],
ncol=dim(MMD)[1]);a
noncumFullTriangle<-glmformula$FullTriangle-a; noncumFullTriangle

# Obtenemos el vector de pagos futuros
vpf <- rep(0, dim(MMD)[1] - 1)
for (k in 1:dim(MMD)[1] - 1) {
  future <- row(noncumFullTriangle) + col(noncumFullTriangle) - 1 ==
dim(MMD)[1] + k
  vpf[k] <- sum(noncumFullTriangle[future])
}

# Provisión sin rentabilidad
vpf
sum(vpf)

# Provisión como renta: teniendo en cuenta ETTI libre de riesgo con
ajuste por volatilidad
prov.renta <- vpf*i.renta; prov.renta
sum(prov.renta)

# ECMDR
intercept <- glmformula$model$coefficients[1]
alfa1 <- glmformula$model$coefficients[2]
alfa2 <- glmformula$model$coefficients[3]
alfa3 <- glmformula$model$coefficients[4]
alfa4 <- glmformula$model$coefficients[5]
alfa5 <- glmformula$model$coefficients[6]
beta1 <- glmformula$model$coefficients[7]
beta2 <- glmformula$model$coefficients[8]
beta3 <- glmformula$model$coefficients[9]
beta4 <- glmformula$model$coefficients[10]
beta5 <- glmformula$model$coefficients[11]

c00 <- exp(intercept);c00
c10 <- exp(intercept)*exp(alfa1);c10
c20 <- exp(intercept)*exp(alfa2);c20
c30 <- exp(intercept)*exp(alfa3);c30
c40 <- exp(intercept)*exp(alfa4);c40
c50 <- exp(intercept)*exp(alfa5);c50
c01 <- exp(intercept)*exp(beta1);c01
c11 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta1);c11
c21 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta1);c21
c31 <- exp(intercept)*exp(alfa3)*exp(beta1);c31
c41 <- exp(intercept)*exp(alfa4)*exp(beta1);c41
c02 <- exp(intercept)*exp(beta2);c02
c12 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta2);c12
c22 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta2);c22
```

```
c32 <- exp(intercept)*exp(alfa3)*exp(beta2);c32
c03 <- exp(intercept)*exp(beta3);c03
c13 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta3);c13
c23 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta3);c23
c04 <- exp(intercept)*exp(beta4);c04
c14 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta4);c14
c05 <- exp(intercept)*exp(beta5);c05

e00 <- (noncumFullTriangle[1,1]-c00)^2
e10 <- (noncumFullTriangle[2,1]-c10)^2
e20 <- (noncumFullTriangle[3,1]-c20)^2
e30 <- (noncumFullTriangle[4,1]-c30)^2
e40 <- (noncumFullTriangle[5,1]-c40)^2
e50 <- (noncumFullTriangle[6,1]-c50)^2
e01 <- (noncumFullTriangle[1,2]-c01)^2
e11 <- (noncumFullTriangle[2,2]-c11)^2
e21 <- (noncumFullTriangle[3,2]-c21)^2
e31 <- (noncumFullTriangle[4,2]-c31)^2
e41 <- (noncumFullTriangle[5,2]-c41)^2
e02 <- (noncumFullTriangle[1,3]-c02)^2
e12 <- (noncumFullTriangle[2,3]-c12)^2
e22 <- (noncumFullTriangle[3,3]-c22)^2
e32 <- (noncumFullTriangle[4,3]-c32)^2
e03 <- (noncumFullTriangle[1,4]-c03)^2
e13 <- (noncumFullTriangle[2,4]-c13)^2
e23 <- (noncumFullTriangle[3,4]-c23)^2
e04 <- (noncumFullTriangle[1,5]-c04)^2
e14 <- (noncumFullTriangle[2,5]-c14)^2
e05 <- (noncumFullTriangle[1,6]-c05)^2

sumerrores <-
sum(e00,e10,e20,e30,e40,e50,e01,e11,e21,e31,e41,e02,e12,e22,e32,e03,e1
3,e23,e04,e14,e05)
ECMDR <- sqrt(sumerrores/21);ECMDR

# ------------------------------------------
#  GLM Poisson sobredisperso log link "fórmula"
# ------------------------------------------

# Aplicación GLM Poisson sobredisperso log link con fórmula
glmformula <- glmReserve(MMD, var.power = 1, link.power = 0,
mse.method ="formula")
glmformula$FullTriangle
glmformula$summary

# Desacumulamos triángulo
a <-
matrix(c(rep(0,dim(MMD)[1]),glmformula$FullTriangle),nrow=dim(MMD)[1],
ncol=dim(MMD)[1]);a
noncumFullTriangle<-glmformula$FullTriangle-a; noncumFullTriangle

# Obtenemos el vector de pagos futuros
vpf <- rep(0, dim(MMD)[1] - 1)
for (k in 1:dim(MMD)[1] - 1) {
  future <- row(noncumFullTriangle) + col(noncumFullTriangle) - 1 ==
dim(MMD)[1] + k
  vpf[k] <- sum(noncumFullTriangle[future])
```

```
}

# Provisión sin rentabilidad
vpf
sum(vpf)

# Provisión como renta: teniendo en cuenta ETTI libre de riesgo con
ajuste por volatilidad
prov.renta <- vpf*i.renta; prov.renta
sum(prov.renta)

# ECMDR
intercept <- glmformula$model$coefficients[1]
alfa1 <- glmformula$model$coefficients[2]
alfa2 <- glmformula$model$coefficients[3]
alfa3 <- glmformula$model$coefficients[4]
alfa4 <- glmformula$model$coefficients[5]
alfa5 <- glmformula$model$coefficients[6]
beta1 <- glmformula$model$coefficients[7]
beta2 <- glmformula$model$coefficients[8]
beta3 <- glmformula$model$coefficients[9]
beta4 <- glmformula$model$coefficients[10]
beta5 <- glmformula$model$coefficients[11]

c00 <- exp(intercept);c00
c10 <- exp(intercept)*exp(alfa1);c10
c20 <- exp(intercept)*exp(alfa2);c20
c30 <- exp(intercept)*exp(alfa3);c30
c40 <- exp(intercept)*exp(alfa4);c40
c50 <- exp(intercept)*exp(alfa5);c50
c01 <- exp(intercept)*exp(beta1);c01
c11 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta1);c11
c21 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta1);c21
c31 <- exp(intercept)*exp(alfa3)*exp(beta1);c31
c41 <- exp(intercept)*exp(alfa4)*exp(beta1);c41
c02 <- exp(intercept)*exp(beta2);c02
c12 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta2);c12
c22 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta2);c22
c32 <- exp(intercept)*exp(alfa3)*exp(beta2);c32
c03 <- exp(intercept)*exp(beta3);c03
c13 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta3);c13
c23 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta3);c23
c04 <- exp(intercept)*exp(beta4);c04
c14 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta4);c14
c05 <- exp(intercept)*exp(beta5);c05

e00 <- (noncumFullTriangle[1,1]-c00)^2
e10 <- (noncumFullTriangle[2,1]-c10)^2
e20 <- (noncumFullTriangle[3,1]-c20)^2
e30 <- (noncumFullTriangle[4,1]-c30)^2
e40 <- (noncumFullTriangle[5,1]-c40)^2
e50 <- (noncumFullTriangle[6,1]-c50)^2
e01 <- (noncumFullTriangle[1,2]-c01)^2
e11 <- (noncumFullTriangle[2,2]-c11)^2
e21 <- (noncumFullTriangle[3,2]-c21)^2
e31 <- (noncumFullTriangle[4,2]-c31)^2
e41 <- (noncumFullTriangle[5,2]-c41)^2
```

```
e02 <- (noncumFullTriangle[1,3]-c02)^2
e12 <- (noncumFullTriangle[2,3]-c12)^2
e22 <- (noncumFullTriangle[3,3]-c22)^2
e32 <- (noncumFullTriangle[4,3]-c32)^2
e03 <- (noncumFullTriangle[1,4]-c03)^2
e13 <- (noncumFullTriangle[2,4]-c13)^2
e23 <- (noncumFullTriangle[3,4]-c23)^2
e04 <- (noncumFullTriangle[1,5]-c04)^2
e14 <- (noncumFullTriangle[2,5]-c14)^2
e05 <- (noncumFullTriangle[1,6]-c05)^2

sumerrores <-
sum(e00,e10,e20,e30,e40,e50,e01,e11,e21,e31,e41,e02,e12,e22,e32,e03,e1
3,e23,e04,e14,e05)
ECMDR <- sqrt(sumerrores/21);ECMDR

# -----------------------------------------
#  GLM Poisson sobredisperso log link "bootstrap"
# -----------------------------------------

# Aplicación GLM Poisson sobredisperso log link con bootstrsap
set.seed(1111)
glmbootstrap <- glmReserve(MMD,mse.method = "bootstrap"); glmbootstrap
glmbootstrap$FullTriangle

# Desacumulamos triángulo
a <-
matrix(c(rep(0,dim(MMD)[1]),glmbootstrap$FullTriangle),nrow=dim(MMD)[1
],ncol=dim(MMD)[1]);a
noncumFullTriangle <- glmbootstrap$FullTriangle-a; noncumFullTriangle

# Obtenemos el vector de pagos futuros
vpf <- rep(0, dim(MMD)[1] - 1)
for (k in 1:dim(MMD)[1] - 1) {
  future <- row(noncumFullTriangle) + col(noncumFullTriangle) - 1 ==
dim(MMD)[1] + k
  vpf[k] <- sum(noncumFullTriangle[future])
}

# Provisión sin rentabilidad
vpf
sum(vpf)

# Provisión como renta: teniendo en cuenta ETTI libre de riesgo con
ajuste por volatilidad
prov.renta <- vpf*i.renta; prov.renta
sum(prov.renta)

#CDR
## S3 method for class 'BOOTSTRAP'
CDR(BootChainLadder(MMD,R=1000,process.distr = c("od.pois")))

# -----------------------------------------
#  GLM Gamma log link "fórmula"
# -----------------------------------------

# Aplicación GLM Gamma log link con fórmula
```

```
glmformula <- glmReserve(MMD, var.power = 2, link.power = 0,
mse.method ="formula")
glmformula$FullTriangle
glmformula$summary

# Desacumulamos triángulo
a <-
matrix(c(rep(0,dim(MMD)[1]),glmformula$FullTriangle),nrow=dim(MMD)[1],
ncol=dim(MMD)[1]);a
noncumFullTriangle<-glmformula$FullTriangle-a; noncumFullTriangle

# Obtenemos el vector de pagos futuros
vpf <- rep(0, dim(MMD)[1] - 1)
for (k in 1:dim(MMD)[1] - 1) {
  future <- row(noncumFullTriangle) + col(noncumFullTriangle) - 1 ==
dim(MMD)[1] + k
  vpf[k] <- sum(noncumFullTriangle[future])
}

# Provisión sin rentabilidad
vpf
sum(vpf)

# Provisión como renta: teniendo en cuenta ETTI libre de riesgo con
ajuste por volatilidad
prov.renta <- vpf*i.renta; prov.renta
sum(prov.renta)

# ECMDR
intercept <- glmformula$model$coefficients[1]
alfa1 <- glmformula$model$coefficients[2]
alfa2 <- glmformula$model$coefficients[3]
alfa3 <- glmformula$model$coefficients[4]
alfa4 <- glmformula$model$coefficients[5]
alfa5 <- glmformula$model$coefficients[6]
beta1 <- glmformula$model$coefficients[7]
beta2 <- glmformula$model$coefficients[8]
beta3 <- glmformula$model$coefficients[9]
beta4 <- glmformula$model$coefficients[10]
beta5 <- glmformula$model$coefficients[11]

c00 <- exp(intercept);c00
c10 <- exp(intercept)*exp(alfa1);c10
c20 <- exp(intercept)*exp(alfa2);c20
c30 <- exp(intercept)*exp(alfa3);c30
c40 <- exp(intercept)*exp(alfa4);c40
c50 <- exp(intercept)*exp(alfa5);c50
c01 <- exp(intercept)*exp(beta1);c01
c11 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta1);c11
c21 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta1);c21
c31 <- exp(intercept)*exp(alfa3)*exp(beta1);c31
c41 <- exp(intercept)*exp(alfa4)*exp(beta1);c41
c02 <- exp(intercept)*exp(beta2);c02
c12 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta2);c12
c22 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta2);c22
c32 <- exp(intercept)*exp(alfa3)*exp(beta2);c32
c03 <- exp(intercept)*exp(beta3);c03
```

```
c13 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta3);c13
c23 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta3);c23
c04 <- exp(intercept)*exp(beta4);c04
c14 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta4);c14
c05 <- exp(intercept)*exp(beta5);c05

e00 <- (noncumFullTriangle[1,1]-c00)^2
e10 <- (noncumFullTriangle[2,1]-c10)^2
e20 <- (noncumFullTriangle[3,1]-c20)^2
e30 <- (noncumFullTriangle[4,1]-c30)^2
e40 <- (noncumFullTriangle[5,1]-c40)^2
e50 <- (noncumFullTriangle[6,1]-c50)^2
e01 <- (noncumFullTriangle[1,2]-c01)^2
e11 <- (noncumFullTriangle[2,2]-c11)^2
e21 <- (noncumFullTriangle[3,2]-c21)^2
e31 <- (noncumFullTriangle[4,2]-c31)^2
e41 <- (noncumFullTriangle[5,2]-c41)^2
e02 <- (noncumFullTriangle[1,3]-c02)^2
e12 <- (noncumFullTriangle[2,3]-c12)^2
e22 <- (noncumFullTriangle[3,3]-c22)^2
e32 <- (noncumFullTriangle[4,3]-c32)^2
e03 <- (noncumFullTriangle[1,4]-c03)^2
e13 <- (noncumFullTriangle[2,4]-c13)^2
e23 <- (noncumFullTriangle[3,4]-c23)^2
e04 <- (noncumFullTriangle[1,5]-c04)^2
e14 <- (noncumFullTriangle[2,5]-c14)^2
e05 <- (noncumFullTriangle[1,6]-c05)^2

sumerrores <-
sum(e00,e10,e20,e30,e40,e50,e01,e11,e21,e31,e41,e02,e12,e22,e32,e03,e1
3,e23,e04,e14,e05)
ECMDR <- sqrt(sumerrores/21);ECMDR

# ------------------------------------------
#  GLM Gamma log link "bootstrap"
# ------------------------------------------

# Aplicación GLM Gamma log link con bootstrap
set.seed(1111)
glmbootstrap <- glmReserve(MMD,var.power = 2,mse.method =
"bootstrap"); glmbootstrap
glmbootstrap$FullTriangle

# Desacumulamos triángulo
a <-
matrix(c(rep(0,dim(MMD)[1]),glmbootstrap$FullTriangle),nrow=dim(MMD)[1
],ncol=dim(MMD)[1]);a
noncumFullTriangle<-glmbootstrap$FullTriangle-a; noncumFullTriangle

# Obtenemos el vector de pagos futuros
vpf <- rep(0, dim(MMD)[1] - 1)
for (k in 1:dim(MMD)[1] - 1) {
  future <- row(noncumFullTriangle) + col(noncumFullTriangle) - 1 ==
dim(MMD)[1] + k
  vpf[k] <- sum(noncumFullTriangle[future])
}
```

```
# Provisión sin rentabilidad
vpf
sum(vpf)

# Provisión como renta: teniendo en cuenta ETTI libre de riesgo con
ajuste por volatilidad
prov.renta <- vpf*i.renta; prov.renta
sum(prov.renta)

#CDR
## S3 method for class 'BOOTSTRAP'
CDR(BootChainLadder(MMD,R=1000,process.distr = c("gamma")))

# ------------------------------------------
#  GLM Gaussiana Inversa log link
# ------------------------------------------

# Aplicación GLM Gaussiana Inversa log link
glmformula <- glmReserve(MMD, var.power = 3, link.power = 0,
mse.method ="formula")
glmformula$FullTriangle
glmformula$summary

# Desacumulamos triángulo
a <-
matrix(c(rep(0,dim(MMD)[1]),glmformula$FullTriangle),nrow=dim(MMD)[1],
ncol=dim(MMD)[1]);a
noncumFullTriangle <- glmformula$FullTriangle-a; noncumFullTriangle

# Obtenemos el vector de pagos futuros
vpf <- rep(0, dim(MMD)[1] - 1)
for (k in 1:dim(MMD)[1] - 1) {
  future <- row(noncumFullTriangle) + col(noncumFullTriangle) - 1 ==
dim(MMD)[1] + k
  vpf[k] <- sum(noncumFullTriangle[future])
}

# Provisión sin rentabilidad
vpf
sum(vpf)

# Provisión como renta: teniendo en cuenta ETTI libre de riesgo con
ajuste por volatilidad
prov.renta <- vpf*i.renta; prov.renta
sum(prov.renta)

# ECMDR
intercept <- glmformula$model$coefficients[1]
alfa1 <- glmformula$model$coefficients[2]
alfa2 <- glmformula$model$coefficients[3]
alfa3 <- glmformula$model$coefficients[4]
alfa4 <- glmformula$model$coefficients[5]
alfa5 <- glmformula$model$coefficients[6]
beta1 <- glmformula$model$coefficients[7]
beta2 <- glmformula$model$coefficients[8]
beta3 <- glmformula$model$coefficients[9]
beta4 <- glmformula$model$coefficients[10]
```

```
beta5 <- glmformula$model$coefficients[11]

c00 <- exp(intercept);c00
c10 <- exp(intercept)*exp(alfa1);c10
c20 <- exp(intercept)*exp(alfa2);c20
c30 <- exp(intercept)*exp(alfa3);c30
c40 <- exp(intercept)*exp(alfa4);c40
c50 <- exp(intercept)*exp(alfa5);c50
c01 <- exp(intercept)*exp(beta1);c01
c11 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta1);c11
c21 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta1);c21
c31 <- exp(intercept)*exp(alfa3)*exp(beta1);c31
c41 <- exp(intercept)*exp(alfa4)*exp(beta1);c41
c02 <- exp(intercept)*exp(beta2);c02
c12 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta2);c12
c22 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta2);c22
c32 <- exp(intercept)*exp(alfa3)*exp(beta2);c32
c03 <- exp(intercept)*exp(beta3);c03
c13 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta3);c13
c23 <- exp(intercept)*exp(alfa2)*exp(beta3);c23
c04 <- exp(intercept)*exp(beta4);c04
c14 <- exp(intercept)*exp(alfa1)*exp(beta4);c14
c05 <- exp(intercept)*exp(beta5);c05

e00 <- (noncumFullTriangle[1,1]-c00)^2
e10 <- (noncumFullTriangle[2,1]-c10)^2
e20 <- (noncumFullTriangle[3,1]-c20)^2
e30 <- (noncumFullTriangle[4,1]-c30)^2
e40 <- (noncumFullTriangle[5,1]-c40)^2
e50 <- (noncumFullTriangle[6,1]-c50)^2
e01 <- (noncumFullTriangle[1,2]-c01)^2
e11 <- (noncumFullTriangle[2,2]-c11)^2
e21 <- (noncumFullTriangle[3,2]-c21)^2
e31 <- (noncumFullTriangle[4,2]-c31)^2
e41 <- (noncumFullTriangle[5,2]-c41)^2
e02 <- (noncumFullTriangle[1,3]-c02)^2
e12 <- (noncumFullTriangle[2,3]-c12)^2
e22 <- (noncumFullTriangle[3,3]-c22)^2
e32 <- (noncumFullTriangle[4,3]-c32)^2
e03 <- (noncumFullTriangle[1,4]-c03)^2
e13 <- (noncumFullTriangle[2,4]-c13)^2
e23 <- (noncumFullTriangle[3,4]-c23)^2
e04 <- (noncumFullTriangle[1,5]-c04)^2
e14 <- (noncumFullTriangle[2,5]-c14)^2
e05 <- (noncumFullTriangle[1,6]-c05)^2

sumerrores <-
sum(e00,e10,e20,e30,e40,e50,e01,e11,e21,e31,e41,e02,e12,e22,e32,e03,e1
3,e23,e04,e14,e05)
ECMDR <- sqrt(sumerrores/21);ECMDR
```