Máster en Ciencias Actuariales y Financieras

TRABAJO FINAL DE MÁSTER

Título: Reaseguros basados en la ordenación de riesgos

Autoría: Gabriel Vadillo Romero

Tutoría: Francisco Javier Sarrasí Vizcarra

Curso académico: 2021-2022

UNIVERSITAT DE BARCELONA
Facultat d'Economia i Empresa

Màster de Ciències Actuarials i Financeres

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Barcelona

Trabajo Final de Máster

Máster en Ciencias Actuariales y Financieras

REASEGUROS BASADOS EN LA ORDENACIÓN DE RIESGOS

Autoría: Gabriel Vadillo Romero

Tutoría: Francisco Javier Sarrasí Vizcarra

“El contenido de este documento es de exclusiva responsabilidad del autor, quien declara que no ha incurrido en plagio y que la totalidad de referencias a otros autores han sido expresadas en el texto”

Resumen

El presente trabajo consiste en mostrar al lector que, bajo la compleja matemática teórica que rodea al reaseguro basado en el número de siniestros para calcular la prima a cargo de la cedente y del reasegurador, ésta puede ser resuelta mediante la aplicación del método estadístico de simulación de Montecarlo. Comparamos los resultados entre las fórmulas teóricas y utilizando simulación de Montecarlo. Asimismo, hacemos uso de dicho método para calcular el resto de modalidades clásicas de reaseguro.

Palabras clave: Reaseguro basado en el número de siniestros, Reaseguro, Montecarlo, Prima.

Abstract

The present study aims to show the reader that under the complex theoretical mathematics that surrounds largest claims reinsurance and its variants to calculate the premium in charge of the cedant and the reinsurer, it can be solved by applying the statistical method of Montecarlo simulation. We compare the results obtained with theoretical formulas and Montecarlo simulation. Moreover, we use Montecarlo simulation as well to calculate the rest of reinsurances.

Keywords: Largest Claims Reinsurance, LCR, Reinsurance, Montecarlo, Premium.

Índice

1.- Introducción

Cuando hablamos de reaseguro, encontramos tres modalidades si seguimos el criterio técnico de clasificación: proporcionales, no proporcionales y las basadas en el número de siniestros. Sin embargo, en la práctica, si nos dirigimos al mercado reasegurador, generalmente solo encontraremos las dos primeras modalidades, es decir, las proporcionales y las no proporcionales.

Las modalidades basadas en el número de siniestros se caracterizan por fijar el número de siniestros a cargo de la cedente o del reasegurador. Este tipo de reaseguros, a nivel teórico son moderadamente complejos dada la matemática que los envuelve. No obstante, una de las formas de solucionar esta problemática es aplicando simulación de Montecarlo.

La motivación y objetivos del presente trabajo no es más que la de mostrar que, a pesar de que las modalidades basadas en la ordenación de riesgos presentan una dificultad elevada en las fórmulas del cálculo de la prima a cargo de la cedente y del reasegurador, ésta puede ser resuelta mediante la aplicación del método de Montecarlo, y que dicho cálculo con ese método sea relativamente sencillo.

El trabajo está estructurado de la siguiente manera:

Primeramente, en el apartado 2, introducimos el reaseguro con sus respectivas definiciones, funciones y clasificaciones en función de los distintos criterios.

A continuación, se explica en qué consisten las modalidades clásicas de reaseguro, proporcionales y no proporcionales y las modalidades basadas en el número de siniestros en los apartados 3, 4 y 5.

Posteriormente, en los apartados 6 y 7, introducimos al lector en la problemática que se encuentran las modalidades basadas en la ordenación de riesgos, el desarrollo teórico de las funciones de distribución y los resultados teóricos obtenidos aplicados a las tres variantes de dicha modalidad.

Seguidamente, en el apartado 8, explicamos en qué consiste la simulación de Montecarlo, juntamente con su historia y su respectiva aplicación a la función de distribución del coste y número de siniestros y el cálculo de la prima a cargo del reasegurador y a cargo de la cedente.

Finalmente, en los apartados 9 y 10, aplicamos de forma práctica la simulación de Montecarlo a las modalidades clásicas y a las basadas en el número de siniestros. Simulamos diferentes casuísticas y comentamos los resultados, comparándolos entre las distintas variantes.

2.- Definición, clasificación y funciones del reaseguro

2.1.- Definición del reaseguro

El reaseguro es, tal y como lo define Minzoni (2009), la operación por medio de la cual una institución de seguro toma a su cargo, parcial o totalmente un riesgo cubierto por otra o el remanente de daños que exceda de la suma asegurada por el asegurador directo.

Asimismo, encontramos otras definiciones de reaseguro interesantes en gran medida, las cuales permiten entender y describir en su totalidad las características del reaseguro, como, por ejemplo, la de Albrecher y Cani (2019), los cuales definen el reaseguro como una herramienta clásica para gestionar el riesgo en una compañía aseguradora transmitiéndolo a otras compañías aseguradoras y disminuyendo así la exposición al riesgo del asegurador, por lo tanto, estabilizando el negocio.

De igual manera, la Asociación Nacional de Comisionados de Seguros (NAIC), la cual es la organización constituida por los reguladores de seguros de los 50 estados de EEUU, define el reaseguro como el contrato entre reasegurador y asegurador en el cual éste último (la cedente) transfiere el riesgo a compañías reaseguradoras para que luego éstas asuman toda o parte de una o más pólizas aseguradoras emitidas por la cedente.

Para finalizar la definición de reaseguro, nosotros lo definiremos como el instrumento que usa una compañía aseguradora o incluso reaseguradora para mitigar riesgos o reducir la exposición al mismo cediéndolo a otras compañías aseguradoras a cambio de una prima.

Para saber la primera vez que apareció el reaseguro nos tenemos que remontar en el año 1370, dónde un asegurador llamado Guilano Grillo contrajo con Goffredo Benaira y Martino Saceo para reasegurar un barco que partía des de Génova hacia Brujas (Kopf 1929). Es por ello que podemos apreciar de la importancia del mismo, ya que el mismo ha persistido con el tiempo y a día de hoy es un instrumento muy usado entre las compañías aseguradoras.

2.2.- Clasificación y criterios

El reaseguro puede clasificarse mediante varios criterios de los cuales subrayamos dos de ellos:

- Criterio técnico
- Criterio jurídico

2.2.1.- Criterio técnico

Des del punto de vista del criterio técnico, podemos clasificar el reaseguro en tres variantes:

1. Reaseguro proporcional: en primer lugar, el reaseguro proporcional se particulariza por que la cedente y el reasegurador pactan qué porcentaje de la suma asegurada se responsabilizará cada uno. En esta modalidad encontramos el reaseguro cuota-parte y el reaseguro de excedentes

2. Reaseguro no proporcional: en segundo lugar, las modalidades no proporcionales se distinguen por que la distribución del riesgo se basa en el importe del siniestro o en la siniestralidad (conjunto de siniestros). Dentro del reaseguro no proporcional está el reaseguro de exceso de pérdida o *excess-loss* y el reaseguro de exceso de siniestralidad o *stop-loss*.

3. Reaseguro basado en el número de siniestros: finalmente, la modalidad de reaseguro basada en el número de siniestros se identifica por que el reparto del riesgo se realiza fijando el número de siniestros que asume el reasegurador o la cedente. En esta categoría consideramos el reaseguro de los siniestros más grandes, el reaseguro del exceso de los siniestros más pequeños y el reaseguro del exceso de los siniestros más pequeños hasta un tope de siniestralidad.

El criterio técnico será en el que centraremos nuestro estudio y más concretamente en la tercera modalidad, la que está basada en el número de siniestros.

2.2.2.- Criterio jurídico

En cuanto al criterio jurídico distinguimos entre:

1. Reaseguro obligatorio: en este tipo de reaseguro la compañía de directo se compromete a ceder parte de su cartera y el reasegurador está obligado a aceptarla bajo las condiciones pactadas en el contrato.

2. Reaseguro facultativo: el reaseguro facultativo es aquel que se contrata para cubrir un riesgo individualizado que no queda cubierto dentro las cláusulas del reaseguro obligatorio. Asimismo, se caracteriza por proporcionar a la compañía de directo la no obligatoriedad de ceder y a la compañía reaseguradora la libertad de no aceptar. Este reaseguro destaca por la flexibilidad que proporciona.

3. Reaseguro obligatorio-facultativo: tal y como el nombre indica, es una mixtura entre ambas modalidades y se caracteriza por que habitualmente la cedente posee la libertad para ceder y el reasegurador la obligatoriedad de aceptar. No obstante, también puede ser al revés.

2.3.- Funciones del reaseguro

Apreciamos tres funciones del reaseguro:

- Función técnica
- Función de asesoramiento
- Función financiera

2.3.1- Función técnica

La función técnica es la primera que se aprecia en el reaseguro y viene siendo la más importante, aunque en los últimos años las otras dos han ido ganando peso. Esta se caracteriza por la dispersión y homogeneización de riesgos, el incremento de la capacidad de suscripción de la compañía de directo juntamente con la mejoría de las bases técnicas y la protección contra cúmulos de riesgo.

En cuanto a la dispersión y homogeneización de los riesgos, es quizás la primera característica que observamos cuando hablamos de reaseguro. Cuando hacemos uso de una herramienta como el reaseguro, estaremos transfiriendo (cedente) una cantidad de riesgo a la compañía reaseguradora, por lo que, a su vez, estaremos dispersando riesgos. Esto hace que las consecuencias económicas derivadas de un siniestro queden repartidas entre la compañía aseguradora y la compañía reaseguradora, por lo que habremos dispersado nuestros riesgos como cedente.

Por otro lado, la homogeneización de riesgos también aparece en el momento que la compañía cedente transmite los riesgos que exceden un determinado nivel propuesto por dicha compañía. Esto hace que los riesgos que finalmente posea, estén todos acotados en la misma franja, y por lo tanto la cartera sea más homogénea.

Debido a que la compañía aseguradora pueda ceder los riesgos que ella considere necesarios, podrá adquirir pólizas que posean un riesgo más elevado y, a su vez, ampliar la capacidad de suscripción. Esto hace que la compañía aseguradora pueda asegurar riesgos y por tanto adquirir más cuota de mercado (muy útil en compañías recién creadas). Que la compañía pueda ampliar la capacidad de suscripción provoca que posea mayor cantidad de riesgos suscritos y a su vez que la aproximación del coste medio de siniestro sea más preciso, por lo que, al final las bases técnicas serán más fiables.

Finalmente, añadir que el reaseguro puede proporcionar a la cedente protección contra cúmulos de riesgo, en concreto esto sucede en las modalidades no proporcionales.

2.3.2- Función de asesoramiento

Las compañías reaseguradoras brindan a las compañías aseguradoras que ceden parte o la totalidad de la póliza la posibilidad de asesoramiento técnico y servicios de gestión. Esto les interesa a las compañías aseguradoras ya que las compañías reaseguradoras poseen grandes bases de datos técnicas debido a su experiencia internacional.

2.3.3- Función financiera

Como comentábamos en la función técnica, otras funciones han ido ganando peso con el paso de los años, este es el ejemplo de la función financiera, que con la aparición de la normativa Solvencia II, las entidades aseguradoras deben presentar mayores garantías financieras y éstas se ven beneficiadas por los aspectos que comentaremos a continuación.

En cuanto a las provisiones técnicas y en la modalidad proporcional, la compañía reaseguradora es la responsable de las provisiones técnicas necesarias que le correspondan.

Por otro lado, los depósitos que realizan las compañías reaseguradoras relativos a las provisiones técnicas son depositados previamente, y en contrapartida, reciben un pequeño interés. De esta forma, la compañía aseguradora retiene una parte proporcional de la prima a entregar al reasegurador.

El margen de solvencia es otro aspecto el cual se ve beneficiado con el reaseguro ya que al hacer uso del mismo transferimos posible siniestralidad a la compañía reaseguradora, por lo que es ésta última quien se tiene que hacer cargo de la parte proporcional en cuanto a margen de solvencia. Recordemos que el margen de solvencia es el conjunto de recursos constituidos destinados a hacer frente a situaciones de posible siniestralidad futura, que no puedan estar totalmente previstas mediante el correcto cálculo y adecuada cobertura de las provisiones técnicas normales (Diccionario de Seguros Mapfre).

Otro aspecto en el cual se ve beneficiada la compañía de directo es con las comisiones que recibe por parte de la compañía reaseguradora para recompensar el trabajo comercial realizado. Además, la compañía cedente se ve recompensada también mediante un porcentaje en la participación de beneficios de la compañía reaseguradora si la compañía de directo realiza una correcta elección de riesgos y prescinda de aquellas pólizas que tengan una alta probabilidad de siniestro. Sin embargo, matizar que estos dos últimos aspectos ocurren únicamente en las modalidades proporcionales.

La cláusula de siniestros al contado, es otra característica de la función financiera. Usualmente y cada cierta frecuencia establecida previamente, la compañía reaseguradora realiza el pago por los siniestros que van a cargo de ésta. El período de frecuencia puede ser trimestral, cuatrimestral, semestral o incluso anual. La cláusula de siniestros al contado permite que la compañía aseguradora reciba el pago por parte de la reaseguradora de forma inmediata si el importe es superior a un límite prefijado. Esto permite a la cedente evitar posibles problemas puntuales de tesorería.

Finalmente, así como en la función técnica el reaseguro permitía a la cedente ampliar la capacidad de suscripción, en la función financiera el reaseguro permite el engrandecimiento del negocio sin la necesidad de un correspondiente aumento de capital social.

3.- Modalidades proporcionales

Estas modalidades de reaseguro se caracterizan por que por que la distribución del riesgo entre cedente y reasegurador se basa en la suma asegurada.

3.1.- Reaseguro cuota-parte

El reaseguro cuota-parte es el reaseguro más básico, ya que consiste en ceder a la compañía reaseguradora una parte porcentual de la suma asegurada asociada a una póliza. Cuando se pacta esta modalidad como contrato obligatorio, suele aplicarse a todo un ramo de la cartera. Se caracteriza por aplicar un coeficiente ρ, en tanto por uno, $0 < \rho < 1$, a la suma asegurada S de cada póliza, siendo ρ el coeficiente de retención de la cedente. Dicho porcentaje permite determinar el porcentaje de suma asegurada asociada a una póliza de suma asegurada S que retiene la cedente. Análogamente, $1-\rho$ permite determinar el porcentaje de suma asegurada asociada a una póliza de suma asegurada S. Por ende, los coeficientes ρ y $1-\rho$ indicaran la responsabilidad ante posibles siniestros, la prima, los gastos y la constitución de reservas de ambas partes. Cabe comentar que, en los contratos obligatorios, la capacidad del reasegurador por póliza suele estar limitada por un máximo, es decir, el reasegurador precisará que como máximo se puede hacer cargo de $(1-\rho)\cdot C$, siendo C la capacidad del contrato por póliza y, por lo tanto, el remanente quedará a cargo de la cedente. En este caso, la compañía aseguradora podrá optar por un reaseguro facultativo si desea reasegurar la cantidad remanente.

En consecuencia, tenemos:

- Suma asegurada a cargo de la cedente: $S_c = \rho \cdot S$
- Suma asegurada a cargo del reasegurador: $S_r = (1-\rho)\cdot S$
- Suma asegurada por póliza: $S = S_c + S_r$

- Prima pura que retiene la cedente: $P_c = \rho \cdot P$
- Prima pura que recibe el reasegurador: $P_r = (1-\rho)\cdot P$
- Prima pura asociada a la póliza de suma asegurada S: $P = P_c + P_r$

Siendo x el coste de un siniestro de la cartera de la cedente tenemos:

- Importe del siniestro a cargo de la cedente: $x_c = \rho \cdot x$
- Importe del siniestro a cargo del reasegurador: $x_r = (1-\rho)\cdot x$
- Importe del siniestro asociado a la póliza de suma asegurada S: $x = x_c + x_r$

Las ventajas de este reaseguro es que su cálculo es simple y una variante idónea para las compañías aseguradoras de recién creación. Además, el reasegurador obtiene una cartera equilibrada, en el sentido que está totalmente correlacionada con la cedente y este puede dar comisiones. En contraposición, esta variante impide retener las pólizas pequeñas que son usualmente las más beneficiosas, ya que no puede discriminar por su suma asegurada que pólizas reasegurar. Además, no protege frente cúmulos de riesgo y existe el riesgo de que las primas para el reasegurador no sean suficientes, si la cedente las ha calculado mal. No protege frente al riesgo de un aumento del número de siniestros mayor del esperado.

3.2.- Reaseguro de excedentes

El reaseguro de excedentes se caracteriza por la existencia de un pleno de retención M, el cual se define como la cantidad máxima de suma asegurada que asume la cedente por póliza. El reasegurador se hace cargo para cada póliza del exceso entre la suma asegurada y el pleno de retención si $S > M$, en caso contrario, la compañía de seguros asume íntegramente la suma asegurada de la póliza. Se trata por tanto de un reaseguro donde la cuota de retención k es variable en función de la relación entre la suma asegurada y el pleno de retención. En esta variante, igual que la anterior, la capacidad del reasegurador también suele estar limitada en los contratos obligatorios. En este caso, la capacidad del reasegurador se expresa como un cierto número de plenos.

Por lo que, la cuota de retención k de la cedente y el coeficiente de retención $1-k$ del reasegurador vienen determinados de la siguiente manera:

$$k = \begin{Bmatrix} 1 & si & S \leq M \\ \frac{M}{S} & si & S > M \end{Bmatrix} \qquad 1-k = \begin{Bmatrix} 0 & si & S \leq M \\ 1-\frac{M}{S} & si & S > M \end{Bmatrix}$$

De igual manera, podemos establecer cuál sería la suma asegurada a cargo de la cedente y a cargo del reasegurador:

$$S_c = k \cdot S = \begin{Bmatrix} S & si & S \leq M \\ M & si & S > M \end{Bmatrix} \qquad S_r = (1-k) \cdot S = \begin{Bmatrix} 0 & si & S \leq M \\ S-M & si & S > M \end{Bmatrix}$$

Siendo $S = S_c + S_r$

Asimismo, el reparto de la prima pura entre la cedente y el reasegurador queda de la siguiente manera:

$$P_c = k \cdot P^S = \begin{Bmatrix} P^S & si & S \leq M \\ \frac{M}{S} \cdot P^S & si & S > M \end{Bmatrix} \qquad P_r = (1-k) \cdot P^S = \begin{Bmatrix} 0 & si & S \leq M \\ \frac{S-M}{S} \cdot P^S & si & S > M \end{Bmatrix}$$

Siendo $P^S = P_c^S + P_c^R$,

P^S= prima pura asociada a una póliza con suma asegurada S.

P_c^S= prima pura que cobrará la cedente, asociada a una póliza con suma asegurada S.

P_r^S= prima pura que cobrará el reasegurador, asociada una póliza con suma asegurada S.

A su vez, en caso de siniestro de importe x asociado a una póliza de suma asegurada S, el coste del mismo asociado a la cedente y al reasegurador:

$$x_c = k \cdot x = \begin{cases} x \quad si \quad S \leq M \\ \frac{M}{S} \cdot x \quad si \quad S > M \end{cases} \qquad x_r = (1-k) \cdot x = \begin{cases} 0 \quad si \quad S \leq M \\ \frac{S-M}{S} \cdot x \quad si \quad S > M \end{cases}$$

Siendo $x = x_c + x_r$

Esta modalidad destaca por el hecho de poder discriminar qué pólizas reasegurar en función de la relación que hay entre la suma asegurada y el pleno de retención. Paralelamente, la compañía de directo obtiene una cartera más regular, además de que podrá aceptar pólizas con sumas aseguradas más elevadas que en la modalidad cuota parte. En cuanto a los contras, el reasegurador obtiene una cartera más inestable que la modalidad anterior. Asimismo, el reaseguro de excedentes no permite discriminar por siniestros, no protege frente a cúmulos de riesgo y sus costes de administración son más elevados que el cuota-parte.

4.- Modalidades no proporcionales

Las modalidades no proporcionales se definen por que la responsabilidad tanto de la cedente como del reasegurador se distribuye en función de la cuantía del siniestro, en el caso de *excess-loss* o en función de la siniestralidad, en el caso de *stop-loss*. Es por ello que ambas modalidades no se fundamentan en la proporcionalidad ya que la responsabilidad de la cedente y del reasegurador se supedita a la siniestralidad acaecida.

4.1.- Reaseguro de exceso de pérdida o *Excess-Loss*

El reaseguro *Excess-Loss* o XL, se particulariza por que la compañía de reaseguro se hace cargo de los importes de siniestros que superen la prioridad M. En otras palabras, la compañía de directo establecerá una cantidad máxima a asumir por siniestro individual (M) y la compañía reaseguradora se responsabilizará de las cantidades que superen la mencionada capacidad. En este caso y a diferencia de las modalidades anteriores, la prima y la responsabilidad correspondiente a cada parte dependen de hechos futuros. Es por ello que, existen métodos que intentan estimar la siniestralidad futura a partir de la experiencia de siniestralidad de años anteriores como el método del *Burning Cost*. Ésta es una de las técnicas más usadas para tarificar la prima del reasegurador, la cual “se caracteriza por ser un método de tarificación que permite calcular y reajustar de forma regular y paulatina las primas de reaseguro, adaptándolas a las variaciones de siniestralidad prevista en base a la información de la cedente” (Sarrasí, 2003).

Encontramos varias modalidades dentro del reaseguro XL, dónde en cada una de ellas varía según la interpretación que se da al importe de siniestro x (Sarrasí, 2003):

- Exceso de pérdida por póliza: en esta modalidad el importe del siniestro viene dado por las consecuencias económicas que un evento proporciona a una póliza. Por tanto, cuando se contrata bajo esta modalidad, la prioridad y la cobertura se aplican para cada una de las pólizas que queden involucradas en el siniestro.
- Exceso de pérdida por riesgo: en esta variante, el importe del siniestro x se atribuye a las consecuencias económicas ocurridas que un evento proporciona a un riesgo, siendo este último el conjunto de responsabilidades que acumula un reasegurador en una misma situación
- Exceso de pérdida por cúmulos: en esta modalidad, el importe del siniestro x se determina cuando un suceso afecta más de un riesgo.
- Exceso de pérdida por catástrofe: el importe del siniestro x ocurre cuando un suceso de índole catastrófico afecta multitud de riesgos.

La distribución de la responsabilidad dado un siniestro seria la siguiente:

Siendo M la prioridad de la cedente, es decir, el importe máximo que asumirá la cedente por siniestro,

$$x_c = \begin{Bmatrix} x & si & x < M \\ & & \\ M & si & x \geq M \end{Bmatrix} \qquad\qquad x_r = \begin{Bmatrix} 0 & si & x < M \\ & & \\ x - M & si & x \geq M \end{Bmatrix}$$

Definimos x_c como el coste del siniestro a cargo de la cedente y x_r coste del siniestro a cargo del reasegurador. Por tanto, $x = x_c + x_r$.

Cabe mencionar que, en la anterior distribución de responsabilidad dado un siniestro, hemos asumido que el reasegurador se hace cargo de la totalidad del importe, una vez haya superado la prioridad. En la práctica, el reasegurador establece un límite máximo de responsabilidad por siniestro. Por ejemplo, un contrato XL podría ser el siguiente:

Contrato XL/Póliza 200.000 xs 50.000

En este caso, la cedente asumiría un máximo de 50.000 por siniestro, ya que sería la prioridad fijada, y el reasegurador un máximo de 200.000, que se definiría como el *tramo-working*.

En la práctica, se pueden encadenar contratos XL divididos en *tramos-working* donde el siguiente tramo entra en funcionamiento cuando el anterior se acaba (en el caso del ejemplo, cuando un siniestro superase el importe de 250.000), de tal forma que se establece una cadena de contratos XL donde los *tramos-working* pueden ser de distintas compañías reaseguradoras.

El reaseguro XL destaca por ser una protección frente al alcance del importe de los siniestros, sin embargo, no contra la reiteración de los mismos. De igual manera, el reaseguro *excess-loss* en la variante de exceso de pérdida por cúmulos, otorga protección dados cúmulos de riesgo. Además, permite a la cedente obtener una cantidad elevada de primas brutas y conocer un determinado intervalo sobre el coste que le va a suponer los siniestros. En contraposición, en esta modalidad no existe ni el reparto de beneficios ni comisiones.

4.2.- Reaseguro de exceso de siniestralidad o *Stop-loss*

Esta variante es parecida a la anterior, sin embargo, la responsabilidad del reasegurador, no viene dada por el importe de un único siniestro, como en el anterior caso, sino por la totalidad de los siniestros denominada siniestralidad. En otras palabras, el reaseguro *stop-loss* se caracteriza por que el reasegurador se hace cargo del total de la siniestralidad acaecida a partir de una prioridad M y durante un horizonte temporal dado, el cual en todas las modalidades suele ser el año. Definimos M como la cuantía máxima de siniestralidad responsabilidad de la cedente.

A continuación, definiremos la responsabilidad de la cedente y del reasegurador fijando como z la siniestralidad acontecida en un determinado intervalo temporal:

$$z_c = \begin{Bmatrix} z & si & z < M \\ \\ M & si & z \geq M \end{Bmatrix} \qquad\qquad z_r = \begin{Bmatrix} 0 & si & z < M \\ \\ z - M & si & z \geq M \end{Bmatrix}$$

Siendo,

z_c= la siniestralidad a cargo de la cedente y z_r= la siniestralidad a cargo del reasegurador. A su vez, $z = z_c + z_r$

En la práctica la estructura del reaseguro *Stop-loss* también posee una prioridad y un *tramo-working*, sin embargo, en este caso, la prioridad y el *tramo-working* hacen referencia a un conjunto de pólizas. Además, la prioridad y el *tramo-working*, en el caso de *Stop-loss* se expresan como porcentajes mediante dos formas:

- Por una parte, puede establecer la responsabilidad mediante un porcentaje de las primas totales cobradas por la cedente. Esta variante se denomina *Stop-loss ratio*. A modo de ejemplo, un contrato *Stop-loss ratio* sería $25\%\ xs\ 120\%$, donde la cedente asumiría un 120% de las primas totales cobradas, mientras que el reasegurador se haría cargo de un 25%.

- Por otra parte, el reasegurador puede limitarlo en función de las sumas aseguradas de la cartera de la cedente. Esta modalidad se conoce por *Stop-loss rate*. Supongamos un contrato $20\%\ xs\ 75\%$, en este contrato la cedente se hará cargo de una siniestralidad correspondiente al 75% de la suma asegurada, mientras que el reasegurador 20% de la suma asegurada.

Esta modalidad destaca por ser la única que cubre del riesgo total de insolvencia a la compañía cedente, ya que protege a la cedente tanto de la variabilidad del importe de los siniestros como de la variabilidad de la frecuencia de los mismos. A pesar de ello, esta modalidad también tiene sus contras y la más significativa es que es muy costoso.

5.- Modalidades basadas en el número de siniestros

Como hemos mencionado anteriormente las modalidades basadas en el número de siniestros van a ser las cuales vamos a enfatizar el presente trabajo. Primeramente, estudiándolas de forma teórica y posteriormente con un desarrollo práctico para su posterior comparación con otras modalidades.

Las modalidades basadas en el número de siniestros consisten en que la responsabilidad de la cedente o el reasegurador se basan en el número de siniestros. En base a ello, existen diferentes modalidades en cuanto a la cesión de un número determinado de siniestros. No obstante, en el presente estudio estudiaremos las tres variantes más importantes, estas son:

1. Reaseguro de los k siniestros más grandes.
2. Reaseguro del exceso de los k siniestros más pequeños.
3. Reaseguro del exceso de los k siniestros más pequeños, hasta un tope de siniestralidad.

El reaseguro de los k siniestros más grandes fue introducido por Ammeter en el 1964 y, posteriormente, Kremer en la década de los 80 aportó avances significativos al estudio de las funciones de distribución de mencionado reaseguro. A continuación, y a lo largo de los últimos cincuenta años varios autores han proporcionado numerosos trabajos sobre el reaseguro de los grandes siniestros, como por ejemplo Berliner (1972) comparando el reaseguro XL con el reaseguro de los siniestros más grandes o Kremer (1982, 1984 y 1986) exponiendo las bondades de la mencionada modalidad y su respectiva tarificación bajo distintas condiciones. No obstante, estos no han tenido éxito en la práctica del mundo laboral asegurador y una razón generalizada entre los autores es debido a la elevada dificultad en el tratamiento matemático.

Los problemas que se derivan de las funciones de distribución se caracterizan por una complejidad matemática elevada y por ello en la práctica han sido poco usados (Ladoucette y Teugels 2006). Benktander (1978) destaca que las fórmulas provenientes del cálculo de la prima rápidamente se vuelven intrincadas. El mismo autor estableció una comparación entre la prima del reaseguro de exceso de pérdida y el de los grandes siniestros: “la prima neta de riesgo del reaseguro de los grandes siniestros planteada para cubrir los k siniestros más grandes, está limitada por el riesgo de la prima del reaseguro XL más k veces su prioridad, lo que debería ser determinado de tal forma que el número medio de siniestros en el XL fuese equivalente a k”.

Asimismo, Fan *et al.* (2017) precisan que el reaseguro de los grandes siniestros es como mínimo igual de efectivo que el reaseguro de exceso de pérdida a la hora de evitar la ruina de la compañía, siendo ambos comparados en un horizonte temporal finito.

Adicionalmente, mencionar que la tercera variante de las mencionadas anteriormente, es decir, el reaseguro del exceso de los siniestros más pequeños, hasta un tope de siniestralidad fue introducida por Alegre y Sarrasí (1995).

Ammeter en su publicación del 1964 y todos los posteriores autores que tratan la tarificación del reaseguro de grandes siniestros, argumentan que dicha tarificación pasa por ordenar previamente los siniestros con el objetivo de obtener la función de distribución del coste de los siniestros ordenados. Esto deriva en una complejidad matemática elevada ya que deberemos ordenar variables aleatorias en función de su coste (aleatorio también). Este aspecto se aborda en el siguiente apartado.

6.- Introducción al problema y funciones de distribución

6.1.- Introducción al problema

Tal y como hemos comentado anteriormente, existe una problemática previa a tratar a la hora de trabajar con el reaseguro basado en el número de siniestros, la cual analizaremos en el presente apartado y mostraremos una solución a ello para abordarla de forma práctica. Esta problemática surge de la idiosincrasia de la modalidad, ya que está basada en el número de siniestros y estos deberán estar ordenados mediante su cuantía.

A partir de la función de distribución del coste de los siniestros, que supondremos equidistribuidos e independientes, se ordenará la cuantía de los mismos para poder de esta manera obtener la función de distribución de los siniestros ordenados. En este caso cada siniestro ordenado tendrá su función de distribución. A partir de estas funciones de distribución podremos calcular la prima de reaseguro de las modalidades basadas en el número de siniestros

El problema es que las expresiones que permiten obtener las funciones de distribución de los siniestros ordenados y por tanto de la prima de reaseguro son complejas de tratar analíticamente, para solucionar este problema aplicaremos el método de simulación de Monte Carlo.

6.2.- Desarrollo teórico de las funciones de distribución

En el presente apartado procederemos a desarrollar de forma teórica la obtención de las funciones de distribución, las cuales son necesarias para el fin último: la tarificación del reaseguro. Mencionar que dicha obtención se ha basado en Sarrasí (2003).

Para tarificar el reaseguro debemos hallar la función de distribución de probabilidad del coste de los siniestros, siendo éstos ordenados por el importe de su cuantía. En consecuencia, definimos el siguiente proceso de riesgo:

$$(N, X_1, X_2, \dots, X_N)$$

Siendo,

$X_{i\ i=1,\dots,N}$: variable aleatoria del coste del i-ésimo siniestro. Se caracterizan por ser independientes entre sí y equidistribuidas.

N: variable aleatoria número de siniestros

El desarrollo técnico de las funciones de distribución se divide entre:

- N es una variable cierta de importe n
- N es una variable aleatoria.

Esto es debido a que partimos de un modelo donde el número de siniestros ocurridos n es cierto para desarrollar la construcción del modelo donde el número de siniestros N es aleatorio. Por ello, primero desarrollamos y obtenemos la función de distribución del coste de los siniestros, cuando n es conocida, y, a continuación, procedemos a aleatorizar el modelo mediante el teorema de la probabilidad total para, posteriormente, obtener la función de distribución cuando N es aleatoria.

6.2.1- N es una variable cierta

Si asumimos que N es una variable cierta de cuantía n, entonces el proceso de riesgo es:

$$(n, X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Siendo,

$X_{k\ k=1,\ldots,n}$: variable aleatoria del coste del k-ésimo siniestro. Las variables son independientes entre sí y equidistribuidas (Jiang y Tang, 2008), donde la función de distribución:

$$P[X_k \leq t] = F(t) \quad para\, k = 1,2,\ldots,n$$

A continuación, ordenamos las variables aleatorias X_k mediante el importe de su cuantía:

$$X_{n:1} \leq X_{n:2} \leq \cdots \leq X_{n:i} \ldots \leq X_{n:n}$$

donde,

$X_{n:i\ \ i=1,\ldots,n}$ representa la variable aleatoria del coste del i-ésimo siniestro más pequeño entre los *n* ocurridos.

Mediante la función de distribución $P[X_k \leq t] = F(t)$, trataremos de obtener la función de distribución de cada una de las variables aleatorias ordenadas $P[X_{n:i} \leq t]\ \ con\ \ i = 1,..n$. Esta tomará valores diferentes dependiendo del siniestro que contemplemos, de tal forma que $P[X_{n:1} \leq t]\ \geq P[X_{n:2} \leq t] \geq \cdots \geq P[X_{n:n} \leq t]$.

Es por ello que cuando ordenamos la variable aleatoria coste del siniestro, ésta deja de ser equidistribuida. En consecuencia, para obtener el cálculo de $P[X_{n:i} \leq t]$ haremos uso de variables auxiliares dicotómicas $Z_{k\ k=1,2,\ldots,n}$ tales que:

$$Z_k = \begin{Bmatrix} 1\ \ si\ \ X_k\ \leq\ t\ \ con\ \ P[Z_k = 1] =\ P[X_k \leq t] = p \\ 0\ \ si\ \ X_k\ >\ t\ \ con\ \ P[Z_k = 0] =\ P[X_k > t] = 1 - p \end{Bmatrix}$$

Por consiguiente, afirmamos que Z_k se distribuye según una Bernoulli de parámetros *1* y *p*: $Z_k \sim B(1,p)$ y representa el número de siniestros menores o iguales a *t* dado un siniestro, lo cual no tiene sentido de forma individualizada, pero si dada la suma de distintas distribuciones Bernoulli.

De la misma manera que las variables aleatorias X_k son independientes, las variables aleatorias dicotómicas Z_k lo serán, y es por eso que $\sum_{k=1}^{n} Z_k \sim B(n,p)$. Esto significa que la suma de variables aleatorias Bernoulli se distribuye según una Binomial de parámetros *n* y *p*, por tanto,

$$P[\sum_{k=1}^{n} Z_k = i] = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

De modo que $\sum_{k=1}^{n} Z_k$ representará la variable aleatoria número de siniestros menores o iguales a *t*, dados *n* siniestros.

Llegados a este punto, somos capaces de calcular la probabilidad de que el coste del i-ésimo siniestro más pequeño sea menor que t, mediante la probabilidad de que ocurran como mínimo i’’ siniestros de importe menores o iguales que *t* dados *n* siniestros ocurridos, a través de una distribución Binomial de tres parámetros:

$$P[X_{n:i} \leq t] = P\left[\sum_{k=1}^{n} Z_k \geq i\right] = \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = B(n,p,i)$$

A continuación, relacionamos los resultados obtenidos anteriormente de la distribución Binomial con la distribución Beta, ya que esto nos permitirá simplificar los cálculos:

$$\beta(a,b;x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)} \int_0^x y^{a-1}(1-y)^{b-1}dy$$

Obtenemos,

$$B(n,p,i) = \sum_{r=i}^{n} \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} = \beta(i, n-i+1; p)$$

Por lo que,

$$P[X_{n:i} \leq t] = \beta(i, n-i+1; p) = n\binom{n-1}{i-1}\int_0^{F(t)} y^{i-1}(1-y)^{n-i}dy$$

A modo de ejemplo, si *i* toma el valor 1, obtendremos la distribución de probabilidad del siniestro más pequeño, la cual es interpretable también como la probabilidad de cómo mínimo exista uno menor que *t*:

$$P[X_{n:1} \leq t] = n\binom{n-1}{1-1}\int_0^{F(t)} (1-y)^{n-i}dy =$$

$$1-(1-F(t))^n = 1-(1-P(X \leq t))^n = 1-(P(X > t))^n$$

Pongamos el caso de que *i* toma el valor *n*, entonces obtendremos la distribución de probabilidad del siniestro más grande. Es decir, la probabilidad de que dados *n* siniestros, todos sean menores o iguales a *t*:

$$P[X_{n:n} \leq t] = n\binom{n-1}{n-1}\int_0^{F(t)} y^{n-1}dy = F(t)^n = (P(X \leq t))^n$$

A continuación, mostramos dos ejemplos numéricos calculando la probabilidad de que el siniestro más bajo y el más elevado tenga un coste menor a 3000€.

$F(3000) = 0,9$ y $n = 10$ entonces,

$$P[X_{10:1} \leq 3000] = 1 - (1 - 0,9)^{10} = 0,999$$

$$P[X_{10:10} \leq 3000] = 0,9^{10} = 0,349$$

Como podemos observar, lógicamente la probabilidad de que el siniestro de más baja cuantía esté por debajo de 3000 es superior a la probabilidad de que el siniestro de mayor importe esté por debajo de 3000.

6.2.2- N es una variable aleatoria

En el presente apartado, trataremos la *N* como variable aleatoria, lo cual suele ser lo que más se ajusta a la realidad, y es aquí donde empieza la problemática que comentábamos en el apartado anterior. En este caso, cuando la *N* es aleatoria debemos reconsiderar el proceso de riesgo inicial (Kremer, 1982):

$$(N, X_1, X_2, \dots, X_N)$$

Siendo,

$X_{k\ k=1,\dots,N}$: variable aleatoria del coste del k-ésimo siniestro, donde la función de distribución es la siguiente:

$$P[X_k \leq t] = F(t)_{k=1,2,\dots,N}$$

Asimismo, asumiremos que la función de distribución de N es conocida y que, por ello, su función generatriz de momentos es la siguiente:

$$\varphi_N(s) = E[e^{s\cdot N}] = \sum_{n=0}^{\infty} P[N = n]e^{s\cdot n}$$

Mencionamos la función generatriz de momentos dado que unos cálculos más adelante nos ayudará a simplificar las operaciones.

Posteriormente, ordenamos las variables aleatorias X_r en función de su cuantía, tal y como hemos realizado en el subapartado anterior.

$$X_{N:1} \leq X_{N:2} \leq \cdots \leq X_{N:N}$$

En este momento, se pueden plantear dos enfoques distintos, y cuya elección dependerá del tipo de reaseguro que queramos modelizar. En particular, si queremos modelizar un reaseguro de *k* siniestros más grandes, nos interesará el enfoque de ordenación por detrás. Mientras que, si el objetivo es modelizar un reaseguro del exceso de los siniestros más pequeños, la selección óptima para ello será la ordenación por delante.

- Ordenación por detrás. Este enfoque consiste en estimar la función de distribución de los más grandes $P\left[X_{N:N-j} \leq t\right]$ $j = 0,1, \dots$ donde $X_{N:N-j}$ es la variable aleatoria cuantía del siniestro $j+1$-ésimo más grande. Si substituimos $j = 0$, mostraría la función de distribución de la variable aleatoria $X_{N:N}$, que correspondería al siniestro más grande. Para el caso de $j = 1$, obtendríamos la función de distribución de la variable aleatoria segundo siniestro más grande $X_{N:N-1}$.
- Ordenación por delante. Este enfoque es opuesto al anterior. Si estimamos la función de distribución $P\left[X_{N:j} \leq t\right]$ $j = 1,2, \dots$ donde $X_{N:j}$ es la variable aleatoria cuantía del siniestro j-ésimo más pequeño. Así, substituyendo $j = 1$, obtendremos la función de distribución de la variable aleatoria $X_{N:1}$, que corresponderá el siniestro más pequeño. Para el caso de $j = 2$, obtendremos la función de distribución de $X_{N:2}$ que corresponderá a la variable aleatoria del segundo siniestro más pequeño.

6.2.3- Obtención de la función de distribución del coste del siniestro mediante el enfoque ordenación por detrás.

El objetivo es la obtención de la función de distribución del coste del siniestro mediante el enfoque de ordenación por detrás, y para ello debemos definir inicialmente la función transformada de la función generatriz de momentos de N $g(s)$ $(s > 0)$ ya que ésta nos va a facilitar los cálculos:

$$g(s) = \varphi_N(lns) = E[e^{N \cdot lns}] = E[S^N] = \sum_{n=0}^{\infty} P[N = n] \cdot s^n$$

$$= P[N = 0] + \sum_{n=1}^{\infty} P[N = n] \cdot s^n$$

A continuación, calculamos la derivada $j + 1$-ésima:

$$g^{j+1)}(s) = \sum_{n=j+1}^{\infty} P[N = n] \cdot n \cdot (n-1) \dots (n-j) \cdot s^{n-(j+1)}$$

Si aplicamos el teorema de la probabilidad total a la función de distribución $P\left[X_{N:N-j} \le t\right]$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P[N = n] \cdot P\left[X_{n:n-j} \le t\right]$$

Sólo tiene sentido $\forall j \ge n \quad X_{n:n-j} = 0;\ P\left[X_{n:n-j} \le t\right] = 1$, por ello,

$$P\left[X_{N:N-j} \le t\right] = \sum_{n=0}^{j} P[N = n] + \sum_{n=j+1}^{\infty} P[N = n] \cdot P\left[X_{n:n-j} \le t\right] =$$

$$\sum_{n=0}^{j} P[N = n] + \sum_{n=j+1}^{\infty} P[N = n] \cdot n\binom{n-1}{n-(j+1)} \int_0^{F(t)} y^{n-j-1}(1-y)^j\, dy =$$

$$= \sum_{n=0}^{j} P[N = n] + \sum_{n=j+1}^{\infty} P[N = n] n \binom{n-1}{j} \int_0^{F(t)} y^{n-j-1}(1-y)^j\, dy =$$

$$\sum_{n=0}^{j} P[N = n] + \sum_{n=j+1}^{\infty} P[N = n] n \binom{n-1}{j} \int_0^{F(t)} y^{n-j-1}(1-y)^j\, dy =$$

$$\sum_{n=0}^{j} P[N = n] + \frac{1}{j!}\int_0^{F(t)} (1-y)^j \left[\sum_{n=j+1}^{\infty} P[N = n] \cdot n \cdot (n-1) \ldots (n-j) \cdot y^{n-(j+1)}\right] dy$$

Llegamos a la anterior expresión, donde la parte entre corchetes se corresponde con la derivada g -ésima de la función generatriz de momentos.

$$P\left[X_{N:N-j} \le t\right] = \sum_{n=0}^{j} P[N = n] + \frac{1}{j!}\int_0^{F(t)} (1-y)^j\, g^{j+1)}(y)\, dy \qquad j \ge 0$$

A partir de la expresión general obtenemos una expresión operativa sencilla de la función de distribución para el siniestro más grande de entre los que ocurren, es decir, cuando $j = 0$:

Si $j = 0$,

$$P[X_{N:N} \le t] = P[N = 0] + \int_0^{F(t)} g'(y)\ dy = P[N = 0] + g\big(F(t)\big) - g(0) = g\big(F(t)\big)$$

Esto es debido porque

$$g(s) = P[N = 0] + \sum_{n=1}^{\infty} P[N = n] \cdot s^n$$

Como $g(0) = P[N = 0]$, entonces se elimina $g(0)$ y $P[N = 0]$ y nos queda únicamente $g\big(F(t)\big)$.

A modo de ejemplo, si asumimos que *N* sigue una distribución de Poisson con parámetro λ, entonces:

$$g\big(F(t)\big) = e^{\lambda[F(t)-1]}$$

Si ahora particularizamos al caso de que *N* sigue una distribución Binomial con parámetros *n* y *p*, entonces:

$$g\big(F(t)\big) = (1 + p(F(t) - 1))^n$$

6.2.3.1.- Obtención de la fórmula recurrente de la función de distribución $\mathrm{P}\big[\mathrm{X}_{\mathrm{N:N-j}} \le \mathrm{t}\big]$

En la sección actual obtendremos una expresión recurrente de la función de distribución $P\big[X_{N:N-j} \le t\big]$ de tal forma que a partir de ella podremos obtener la función de distribución recurrente de cada variable aleatoria.

A partir de la expresión general obtenida anteriormente,

$$P\big[X_{N:N-j} \le t\big] = \sum_{n=0}^{j} P[N = n] + \frac{1}{j!}\int_0^{F(t)} (1-y)^j \; g^{j+1)}(y)\; dy$$

Si integramos por partes, llegamos a la siguiente expresión:

$$P\big[X_{N:N-j} \le t\big] = \sum_{n=0}^{j} P[N = n] + \frac{1}{j!}[[(1-y)^j g^{j)}(y)]_0^{F(t)} + j\int_0^{F(t)} \big(1-y)^{j-1}\; g^{j)}(y)\; dy\big] =$$

$$\sum_{n=0}^{j-1} P[N = n] + \frac{1}{(j-1)!}\int_0^{F(t)} (1-y)^{j-1} g^{j)}(y) dy + P[N = j] + \frac{1}{j!}[(1 - y)^j g^{j)}(y)]_0^{F(t)} =$$

$$= P\big[X_{N:N-(j-1)} \le t\big] + P[N = j] + \frac{1}{j!}\; [[(1-F(t))^j g^j\big(F(t)\big) - g^{j)}\big(F(t)\big) - g^{j)}(0)]$$

Sabiendo de antemano que $g^{j)}(0) = j!\,P[N = j]$, obtenemos la fórmula recurrente, la cual determina la función de distribución en función de la anterior:

$$= P\left[X_{N:N-j} \leq t\right] = P\left[X_{N:N-(j-1)} \leq t\right] + \frac{1}{j!}\,[[\left(1 - F(t)\right)^{j} g^{j}\left(F(t)\right)] \qquad j \geq 1$$

Una vez obtenida la expresión recurrente, somos capaces de obtener la función de distribución del siniestro que ocupa la posición $N - 1$, a partir de la función de distribución del siniestro que ocupa la posición N (el más grande):

Siendo $j = 1$

$$P[X_{N:N-1} \leq t] = P[X_{N:N} \leq t] + \left(1 - F(t)\right)g'\left(F(t)\right) =$$

$$= g\left(F(t)\right) + \left(1 - F(t)\right)g'(F(t)$$

De este modo, dando valores a la j llegamos a otra expresión general:

$$P\left[X_{N:N-j} \leq t\right] = \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{k!}(1 - F(t))^{k} g^{k)}\left(F(t)\right) \quad j \geq 0$$

Asimismo, podemos obtener una fórmula recurrente asumiendo que N y X siguen una distribución concreta:

Por ejemplo, si $N \sim Poisson(\lambda) = P[N = n] = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^{n}}{n!}$ y $X \sim F(t) = P[X \leq t]$

$$P\left[X_{N:N-j} \leq t\right] = P\left[X_{N:N-(j-1)} \leq t\right] + \frac{1}{j!}[[(1 - F(t))^{j} \lambda^{j} e^{\lambda(F(t)-1)}]$$

Siendo la fórmula general:

$$P\left[X_{N:N-j} \leq t\right] = e^{\lambda(F(t)-1)}[\sum_{k=0}^{j} \frac{[\lambda(1 - F(t))]^{k}}{k!}] \qquad j \geq 0$$

6.2.3.2.- Obtención de la recurrencia en la esperanza $E[X_{N:N-j}]$

Una vez obtenida la fórmula recurrente de la función de distribución, somos capaces de obtener la recurrencia de la esperanza.

Sabiendo que $E\left[X_{N:N-j} \leq t\right] = \int_0^{\infty}[1 - P[X_{N:N-j} \leq t]]\,dt$ y que la fórmula recurrente es

$$P\big[X_{N:N-j} \leq t\big] = P\big[X_{N:N-(j-1)} \leq t\big] + \frac{1}{j!}\;[[\big(1-F(t)\big)^{j} g^{j}\big(F(t)\big)] \qquad j \geq 1$$

Si sustituimos nos queda

$$E\big[X_{N:N-j}\big] = \int_0^{\infty} [1 - P\big[X_{N:N-(j-1)} \leq t\big] - \frac{1}{j!}[(1-F(t))^{j} g^{j)}\big(F(t)\big)]\, dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \Big[1 - P\big[X_{N:N-(j-1)} \leq t\big]\Big]\, dt - \frac{1}{j!}\int_0^{\infty} (1-F(t))^{j} g^{j)}\big(F(t)\big) dt =$$

$$= E\big[X_{N:N-j}\big] = E\big[X_{N:N-(j-1)}\big] - \frac{1}{j!}\int_0^{\infty} (1-F(t))^{j} g^{j)}\big(F(t)\big) dt \qquad j = 1,2,\ldots$$

Definimos la esperanza del siniestro más grande $E[X_{N:N}]$ ya que es necesaria conocerla para utilizar la formula recurrente de la esperanza.

$$E[X_{N:N}] = \int_0^{\infty} [1 - P[\,X_{N:N} \leq t]]dt = \int_0^{\infty} (1 - g\big(F(t)\big) dt$$

Si asumimos que:

$$N \sim Poisson(\lambda) = P[N = n] = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{n}}{n!}$$

$$X \sim Uniforme(0,1) \;\; F(t) = t$$

Aplicamos la fórmula obtenida anteriormente para obtener la fórmula recurrente:

$$= E\big[X_{N:N-j}\big] = E\big[X_{N:N-(j-1)}\big] - \frac{\lambda^{j}}{j!}\int_0^{1} (1-t)^{j} e^{\lambda(t-1)} dt \qquad j \geq 1$$

Asimismo, el valor esperado cuando $j = 0$ (siniestro más grande)

$$E[X_{N:N}] = \int_0^{1} (1 - \big(g(t)\big) dt = \int_0^{1} (1 - e^{\lambda(t-1)}) dt = 1 - [\frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}]$$

Del mismo modo, si $j = 1$, obtendremos el valor esperado del segundo siniestro más grande:

$$E[X_{N:N-1}] = E\big[X_{N:N)}\big] - \lambda \int_0^{1} (1-t)^{j} e^{\lambda(t-1)} dt = 1 + [\frac{\lambda e^{-\lambda} - 2 + 2e^{-\lambda}}{\lambda}]$$

Así, por ejemplo:

Si $\lambda = 5$ $\quad E[X_{N:N}] = 0{,}801347 \quad E[X_{N:N-1}] = 0{,}609433$

Si $\lambda = 3$ $\quad E[X_{N:N}] = 0{,}683262 \quad E[X_{N:N-1}] = 0{,}416312$

Se puede observar como la esperanza del coste del siniestro más grande, es superior a la esperanza del coste del segundo siniestro más grande.

6.2.4- Obtención de la función de distribución del coste del siniestro mediante el enfoque ordenación por delante.

En este caso, el objetivo del presente apartado es obtener la función de distribución del coste del siniestro mediante el enfoque de ordenación por delante, es decir, $P[X_{N:j} \leq t] \quad j = 1, 2 \ldots$. Por lo que, primeramente, aplicamos el teorema de la probabilidad total a la función de distribución anterior:

$$P[X_{N:j} \leq t] = \sum_{0}^{\infty} P[N = n] \cdot P[X_{N:j} \leq t]$$

Sólo tiene sentido $\forall j \geq n \quad X_{n:j} = 0; \; P[X_{n:j} \leq t] = 1$, por ello,

$$P[X_{N:j} \leq t] = \sum_{n=0}^{j-1} P[N = n] + \sum_{n=j}^{\infty} P[N = n] \cdot P[X_{n:j} \leq t] =$$

$$\sum_{n=0}^{j-1} P[N = n] + \sum_{n=j}^{\infty} P[N = n] \cdot n\binom{n-1}{j-1} \int_0^{F(t)} x^{j-1}(1-x)^{n-j}\, dx =$$

$$\sum_{n=0}^{j-1} P[N = n] + \frac{1}{(j-1)!} \int_0^{F(t)} x^{j-1} [\sum_{n=j}^{\infty} P[N = n] n(n-1) \ldots (n-j+1)(1-x)^{n-j}] dx =$$

$$\sum_{n=0}^{j-1} P[N = n] + \frac{1}{(j-1)!} \int_0^{F(t)} x^{j-1} g^{j)}(1-x)\, dx =$$

A continuación, realizamos un cambio de variable para seguir operando:

$1 - x = y$ por lo que $x = 0, \; y = 1$ y $x = F(t), \quad y = 1 - F(t)$

$$P[X_{N:j} \leq t] = \sum_{n=0}^{j-1} P[N = n] + \frac{1}{(j-1)!} \int_1^{1-F(t)} (1-y)^{j-1} g^{j)}(y) d(1-y) =$$

$$= \sum_{n=0}^{j-1} P[N = n] - \frac{1}{(j-1)!} \int_{1}^{1-F(t)} (1-y)^{j-1} g^{j)}(y) d(y) =$$

Finalmente, llegamos a la expresión general:

$$= \sum_{n=0}^{j-1} P[N = n] + \frac{1}{(j-1)!} \int_{1-F(t)}^{1} (1-y)^{j-1} g^{j)}(y) d(y) \qquad j \geq 1$$

A partir de la anterior obtenemos la expresión de la función de distribución del coste del siniestro más pequeño:

$$P[X_{N:1} \leq t] = P[N = 0] + \int_{1-F(t)}^{1} g'(y) dy =$$

$$= P[N = 0] + g(1) - g\big(1 - F(t)\big) = P[N = 0] + 1 - g(1 - F(t))$$

En este caso, si ahora asumimos que,

$N \sim Poisson(\lambda)$, entonces, $P[X_{N:1} \leq t] = e^{-\lambda} + 1 - e^{-\lambda(F(t))}$

6.2.4.1.- Obtención de la fórmula recurrente de la función de distribución $\mathrm{P}\left[\mathrm{X}_{\mathrm{N:j}} \leq \mathrm{t}\right]$

De igual manera que en la ordenación por detrás, para la ordenación por delante obtendremos una expresión recurrente de la función de distribución $P\left[X_{N:j} \leq t\right]$.

A partir de la expresión general obtenida anteriormente,

$$P\left[X_{N:j} \leq t\right] = \sum_{n=0}^{j-1} P[N = n] + \frac{1}{(j-1)!} \int_{0}^{F(t)} (1-y)^{j-1} \, g^{j)}(y) \, dy$$

Si integramos por partes, llegamos a la siguiente expresión:

$$P\left[X_{N:j} \leq t\right] = \sum_{n=0}^{j-1} P[N = n] + \frac{1}{(j-1)!} [[(1-y)^{j-1} g^{j-1)}(y)]_{1-F(t)}^{1} + \int_{1-F(t)}^{1} \big(1-y)^{j-2} \, g^{j-1)}(y)(j-1) \, dy\big] =$$

$$= \sum_{n=0}^{j-2} P[N = n] + P[N = j-1] + \frac{1}{(j-2)!}\int_{1-F(t)}^{1} 1-y)^{j-2} g^{j-1)}(y)dy$$
$$+ \frac{1}{(j-1)!}[(1-y)^{j-1} g^{j-1)}(y)]_{1-F(t)}^{1} =$$

$$= P\left[X_{N:j-1} \leq t\right] + P[N = j-1] + \frac{1}{(j-1)!}\ [-F(t)^{j-1} g^{j-1}\left(1-F(t)\right)]$$

Finalmente llegamos a la fórmula recurrente, la cual se determina la función de distribución en función de la anterior:

$$= P\left[X_{N:j} \leq t\right] = P\left[X_{N:j-1} \leq t\right] + P[N = j-1] + \frac{F(t)^{j-1} g^{j-1)}(1-F(t))}{(j-1)!} \quad j \geq 2$$

Una vez obtenida la expresión recurrente, podemos obtener la función de distribución del siniestro que ocupa la posición primera, es decir, el más pequeño:

Siendo $j = 2$

$$P[X_{N:2} \leq t] = P[X_{N:1} \leq t] + P[N = 1] - F(t)g'(1-F(t)) =$$
$$= P[N = 0] + 1 - g\left(1-F(t)\right) + P[N = 1] - F(t)g'(1-F(t))$$

De tal manera que dando valores a la j obtenemos otra expresión general:

$$P\left[X_{N:j} \leq t\right] = 1 + \sum_{k=0}^{j-1}[P[N = k] - \frac{1}{k!}F(t)g^{k)}\left(1-F(t)\right)] \quad j \geq 2$$

A continuación, si asumimos que N y X siguen una distribución concreta, obtenemos su fórmula recurrente:

Si $N \sim Poisson(\lambda) = P[N = n] = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^n}{n!}$ y $X \sim F(t) = P[X \leq t]$

$$P\left[X_{N:j} \leq t\right] = P\left[X_{N:j-1} \leq t\right] + \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!}\left[e^{-\lambda} - F(t))^{j-1} e^{-\lambda F(t)}\right]$$

Y para $j = 1$:

$$P[X_{N:1} \leq t] = P[N = 0] + 1 - g\left(1-F(t)\right) = 1 + e^{-\lambda} - e^{-\lambda F(t)}$$

6.2.4.2.- *Obtención de la recurrencia en la esperanza* $E[X_{N:j}]$

Así como en la ordenación por detrás obtuvimos la recurrencia en la esperanza mediante la fórmula recurrente de la función de distribución, en el caso de la ordenación por delante no será distinto.

La esperanza la podemos obtener como $E\left[X_{N:j} \leq t\right] = \int_0^{\infty}[1 - P[X_{N:j} \leq t]]\, dt$ a partir de la fórmula recurrente de la distribución,

$$P\left[X_{N:j} \leq t\right] = P\left[X_{N:j-1} \leq t\right] + P[N = j-1] + \frac{F(t)^{j-1} g^{j-1)}(1 - F(t))}{(j-1)!} \quad j \geq 2$$

Sustituimos en la fórmula de la esperanza, de forma que,

$$E\left[X_{N:j}\right] = \int_0^{\infty}[1 - P\left[X_{N:j-1} \leq t\right] - P[N = j-1] + \frac{F(t)^{j-1} g^{j-1)}(1 - F(t))}{(j-1)!}]dt =$$

$$= \int_0^{\infty}\left[1 - P\left[X_{N:j-1} \leq t\right]\right]dt - \int_0^{\infty}[P[N = j-1] - \frac{F(t)^{j-1} g^{j-1)}(1 - F(t))}{(j-1)!}]dt =$$

Por lo que, finalmente,

$$E\left[X_{N:j}\right] = E\left[X_{N:j-1}\right] - \int_0^{\infty}[P[N = j-1] - \frac{F(t)^{j-1} g^{j-1)}(1 - F(t))}{(j-1)!}]dt \quad j = 2,3, \ldots$$

Asimismo, determinamos la esperanza del siniestro más pequeño $E[X_{N:1}]$, ya que debemos conocerla para posteriormente determinar la esperanza de los siguientes siniestros.

$$E[X_{N:1}] = \int_0^{\infty}[1 - P[X_{N:1} \leq t]]dt = \int_0^{\infty}(g\left(1 - F(t)\right) - P[N = 0])dt$$

A modo de ejemplo, si,

$$N \sim Poisson(\lambda) = P[N = n] = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^n}{n!}$$

$$X \sim Uniforme(0,1) \;\; F(t) = t$$

El valor esperado del siniestro más pequeño, es decir, cuando $j = 1$ es:

$$E[X_{N:1}] = \int_0^1 \left(\left(g\left(1 - F(t)\right) - P[N = 0]\right)\right)dt = \int_0^1 (e^{-\lambda t} - e^{-\lambda})dt = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} - e^{-\lambda}$$

Por lo tanto, la fórmula recurrente a partir del segundo siniestro más pequeño y siguientes seria la siguiente:

$$E\left[X_{N:j}\right] = E\left[X_{N:j-1}\right] - \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!}\int_0^1 (e^{-\lambda} - t^{j-1}e^{-\lambda t})dt \qquad j \geq 2$$

Sustituyendo, si $j = 2$, obtendremos el valor esperado del segundo siniestro más grande:

$$E[X_{N:2}] = E[X_{N:1}] - \lambda\int_0^1 (e^{-\lambda} - t \cdot e^{-\lambda t})dt = \frac{2\left(1 - e^{-\lambda}\right)}{\lambda} - \lambda \cdot e^{-\lambda} - 2e^{-\lambda}$$

A modo de instancia, aplicando el mismo valor para λ que anteriormente para la ordenación por detrás:

Si $\lambda = 5$	$E[X_{N:1}] = 0{,}191914$	$E[X_{N:2}] = 0{,}350139$
Si $\lambda = 3$	$E[X_{N:1}] = 0{,}266950$	$E[X_{N:2}] = 0{,}384539$

Lógicamente, se puede apreciar como la esperanza del coste del siniestro más pequeño es inferior que la esperanza del coste del segundo siniestro más pequeño para ambas lambdas.

7.- Modalidades del reaseguro basadas en el número de siniestros

7.1.-Reaseguro de los k siniestros más grandes

Este reaseguro consiste en que la compañía de directo cede íntegramente los k siniestros más grandes al reasegurador. De tal forma que la cedente reduce la probabilidad de ruina considerablemente, comparándolo con la opción de no optar al reaseguro (Fan *et al.*, 2017). Sin embargo, esta modalidad no previene que los siniestros que estén por debajo de k tengan un importe elevado, y que la compañía no pueda hacer frente a sus obligaciones. En otras palabras, no podemos limitar la pérdida de la cedente a un máximo conocido (Alegre y Sarrasí, 1995).

Para la presente variante, y como hemos comentado anteriormente, se hace uso del enfoque de ordenación por detrás. En consecuencia, la función de distribución del j-ésimo siniestro más grande cedido a la compañía reaseguradora es:

$$F_j(t)^R = P\big[X_{N:N-j} \leq t\big] \quad j = 0,1,\dots,k-1$$

Asimismo, la prima pura de reaseguro, $\Pi^{\,R}$, se obtiene de:

$$\Pi^{\,R} = \sum_{j=0}^{k-1} E[X_{N:N-j}]$$

(Kremer, 1982, Alegre y Sarrasí, 1995, Ladoucette y Teugels 2006)

Es decir, la prima de reaseguro se determina como la suma de las esperanzas del coste de los k siniestros más grandes. Por ende, la prima que debe recibir la cedente $\Pi^{\,C}$, se determinará por diferencia entre la prima pura total Π y $\Pi^{\,R}$:

$$\Pi^C = \Pi - \Pi^{\,R}$$

Sabiendo que la prima pura total viene dada por el producto entre esperanza del número de siniestros, es decir:

Entonces,

$$\Pi^C = E(N) \cdot E(X) - \sum_{j=0}^{k-1} E[X_{N:N-j}]$$

Para ilustrar ambas primas, hemos realizado el siguiente ejemplo:

De igual manera que en los ejemplos anteriores, asumiremos que,

$$N \sim Poisson(\lambda) = P[N = n] = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^n}{n!} \qquad \lambda = 5$$

$$X \sim Uniforme(0,1) \;\; F(t) = t$$

También asumiremos que $k = 2$, es decir, la compañía aseguradora quiere protegerse frente a los dos siniestros con el coste más elevado.

Sabemos que $E(N) = 5$ y que $E(X) = 0{,}5$. Asimismo, tal y como hemos calculado anteriormente, $E[X_{N:N}] = 0{,}801347$ y $E[X_{N:N-1}] = 0{,}609433$.

Por lo que, finalmente,

$$\Pi = E(N) \cdot E(X) = 2{,}5$$

$$\Pi^{\,R} = \sum_{j=0}^{1} E\left[X_{N:N-j}\right] = 1{,}41078$$

$$\Pi^{C} = \Pi - \Pi^{\,R} = 1{,}08922$$

7.2.- Reaseguro del exceso de los k siniestros más pequeños

La presente modalidad consiste en que la compañía cedente retiene los k siniestros más pequeños, de tal forma que reasegura el exceso de los k siniestros más pequeños. Esta modalidad posee la misma desventaja que la anterior: el hecho de que la cedente retenga los k siniestros más pequeños, no afianza que estos sean de un importe financieramente asequible, por lo que no estaremos limitando la pérdida (Alegre y Sarrasí, 1995). Hace uso de la ordenación por delante, por lo que la función de distribución del siniestro j −ésimo más pequeño retenido por a la compañía aseguradora es:

$$F_j(t)^C = P\left[X_{N:j} \leq t\right] \quad j = 1,2,\dots,k$$

En este caso, la fórmula de la prima pura que retiene la cedente es similar a la prima de reaseguro en la modalidad anterior:

$$\Pi^{\,C} = \sum_{j=1}^{k} E[X_{N:j}]$$

(Alegre y Sarrasí, 1995)

En otras palabras, la prima que retiene la cedente se determina como la suma de esperanzas del coste de los k siniestros más pequeños. Análogamente, la prima que irá a cargo del reasegurador será determinada como la diferencia entre Π y $\Pi^{\,C}$:

$$\Pi^{R} = \Pi - \Pi^{\,C}$$

De igual manera, la prima pura total se determina de la siguiente manera:

$$\Pi = E(N) \cdot E(X)$$

Siendo,

$E(N)$: esperanza del número de siniestros

$E(X)$: esperanza del coste de los siniestros

Así pues, la prima pura del reasegurador vendrá dada por:

$$\Pi^R = E(N) \cdot E(X) - \sum_{j=1}^{k} E[X_{N:j}]$$

A modo de ejemplo, asumiremos lo siguiente:

$$N \sim Poisson(\lambda) = P[N = n] = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^n}{n!} \qquad \lambda = 3$$

$$X \sim Uniforme(0{,}1) \;\; F(t) = t$$

En este caso, la cedente quiere retener los dos siniestros más pequeños, y, por tanto, quiere reasegurar el exceso de esos dos siniestros, por lo que $k = 2$. Además, como $\lambda = 3$, $E(N) = 3$, y $E(X) = 0{,}5$. Anteriormente también hemos realizado los cálculos de cada esperanza, siendo estos: $E[X_{N:1}] = 0{,}266950$ $E[X_{N:2}] = 0{,}384539$

En consecuencia,

$$\Pi = E(N) \cdot E(X) = 1{,}5$$

$$\Pi^{\,C} = \sum_{j=1}^{2} E\left[X_{N:j}\right] = 0{,}651489$$

$$\Pi^R = \Pi - \Pi^{\,C} = 0{,}848511$$

7.3.- Reaseguro del exceso de los k siniestros más pequeños, hasta un tope de siniestralidad M.

El presente apartado está basado en el artículo de Alegre y Sarrasí (1995) la cual se caracteriza por ser una mixtura entre la modalidad reaseguro del exceso de los k siniestros más pequeños y la modalidad de *excess-loss*. Este reaseguro consiste en que la cedente retendrá los k siniestros más pequeños, y, además, de entre los siniestros que retiene, estos como máximo tendrán un importe M, siendo M la prioridad y viene definida por el importe máximo que asumirá la cedente por cada siniestro. El exceso de siniestralidad respecto a M, juntamente con el exceso de los k siniestros, serán a cargo del reasegurador.

Por ello, de esta forma estamos corrigiendo una de las desventajas que tenían las dos modalidades anteriores: no era posible limitar la pérdida a un valor conocido. Con esta modalidad, la compañía de directo es conocedora que su pérdida máxima se situará en $k \cdot M$. De la misma manera, estaremos suprimiendo una de las desventajas mencionadas anteriormente sobre la modalidad XL: no protegía frente a la reiteración de siniestros.

La función de distribución del coste del $j-$ésimo siniestro más pequeño retenido por la cedente estará truncada por la prioridad M:

$$F_j(t)^C = \begin{Bmatrix} P[X_{N:j} \leq t] & si & t < M \\ & & \\ 1 \quad si & & t \geq M \end{Bmatrix} \quad j = 1, \dots, k$$

La prima que retiene la cedente tendrá una expresión semejante a la modalidad reaseguro del exceso de los k siniestros más pequeños, no obstante, considerando la función de distribución truncada, es decir:

$$\Pi^{\ C} = \sum_{j=1}^{k} E^M\left[X_{N:j}\right]$$

Siendo $E^M\left[X_{N:j}\right]$ la esperanza del coste del siniestro más pequeño, siendo este último acotado hasta M. Para calcular dicha esperanza, se usa la siguiente fórmula:

$$E^M\left[X_{N:j}\right] = \int_0^M \left(1 - P\left[X_{N:j} \leq t\right]\right) dt$$

Nótese que el límite superior de la integral es M, de tal forma que estaríamos acotando como máximo hasta la prioridad.

En consecuencia, las primas de cada parte quedarían de la siguiente forma:

$$\Pi^R = \Pi - \Pi^{\ C} =$$

$$= E(N) \cdot E(X) - \sum_{j=1}^{k} E^M\left[X_{N:j}\right]$$

Para ilustrar esta modalidad, hemos realizado el siguiente ejemplo asumiendo que:

$$N \sim Poisson(\lambda) = P[N = n] = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^n}{n!} \qquad \lambda = 4$$

$$X \sim Uniforme(0{,}1) \quad F(t) = t$$

En este ejemplo, la cedente quiere hacerse cargo de los dos siniestros más pequeños, por lo que $k = 2$, pero que estos dos siniestros tengan como máximo un importe de M. Sabemos que como $\lambda = 4$, entonces $E(N) = 4$, y también $E(X) = 0{,}5$.

Para obtener la expresión de $E[X^M{}_{N:1}]$ debemos realizar el siguiente cálculo:

$$E[X^M{}_{N:1}] = \int_0^M \Big(\big(g\big(1-F(t)\big) - P[N=0]\big)\Big)dt =$$

$$= \int_0^M (e^{-\lambda t} - e^{-\lambda})dt = -\frac{e^{-\lambda M} - 1}{\lambda} - M \cdot e^{-\lambda}$$

En el caso de $E[X^M{}_{N:2}]$, usando la fórmula recurrente $E\big[X^M{}_{N:j}\big] = E\big[X^M{}_{N:j-1}\big] - \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!}\int_0^M (e^{-\lambda} - t^{j-1}e^{-\lambda t})dt \qquad j \geq 2$

$$E[X^M{}_{N:2}] = E[X^M{}_{N:1}] - \lambda \int_0^M \big(e^{-\lambda} - t \cdot e^{-\lambda t}\big)dt =$$

$$E[X^M{}_{N:2}] = \frac{-2e^{-\lambda M} - \lambda M e^{-\lambda M} + 2}{\lambda} - Me^{-\lambda} - \lambda M e^{-\lambda}$$

Entonces, suponemos que la cedente fija la prioridad $M = 0{,}5$ por lo que,

$$E[X^M{}_{N:1}] = 0{,}207008 \qquad\qquad E[X^M{}_{N:2}] = 0{,}318876$$

En consecuencia,

$$\Pi = E(N) \cdot E(X) = 2$$

$$\Pi^{\,C} = \sum_{j=1}^{2} E^M\big[X_{N:j}\big] = 0{,}525884$$

$$\Pi^R = \Pi - \Pi^{\,C} = 1{,}474116$$

Dados los datos asumidos anteriormente, podemos afirmar que la máxima pérdida que la cedente puede tener es $M \cdot k = 0{,}5 \cdot 2 = 1$

8.- Simulación y simulación de Montecarlo

En el apartado anterior hemos podido apreciar como el cálculo de la prima se determina mediante expresiones complejas y poco operativas, para solventar este problema recurrimos a la simulación de Montecarlo.

La simulación según Yauri (2009) se define como “el proceso de diseñar y desarrollar un modelo computarizado de un sistema o proceso y conducir experimentos con este modelo con el propósito de entender el comportamiento del sistema o evaluar varias estrategias con las cuales se puede operar el sistema”. De forma alternativa, Ortiz (2014) puntualiza la simulación como “un modelo que consiste en la construcción de un programa computacional que permite obtener los valores de las variables de salida para distintos valores de las variables de entrada con el objetivo de obtener conclusiones del sistema que apoyen la toma de decisiones”.

8.1.- Simulación de Montecarlo

El método de Monte Carlo es “un método estadístico (no determinístico) que proporciona soluciones aproximadas a una gran variedad de problemas matemáticos, haciendo factible la realización de experimentos con muestreos de números pseudoaleatorios en una computadora” (Peña, 2001). En otras palabras, la simulación de Montecarlo consiste en combinar conceptos estadísticos para generar números pseudoaleatorios y automatizar cálculos mediante la tecnología computacional (Álvarez, 2011).

En concreto, la simulación de Montecarlo, genera múltiples simulaciones de resultados con la variabilidad de elementos individuales, de tal forma que, para cada simulación del evento, el valor es elegido de forma aleatoria, dentro de un rango de valores posibles y de acuerdo con la probabilidad de ocurrencia, para posteriormente ser combinados y concluir una distribución de resultados posibles (Álvarez, 2011). Cabe mencionar que cuantas más simulaciones se realicen, el error de aproximación será menor, pero, a su vez, la simulación será más exigente a nivel computacional. La ley de los grandes números asegura que la estimación convergerá al valor exacto a medida que el número de simulaciones aumente (Ortiz, 2016). Nosotros utilizaremos el método de Montecarlo para simular la función de distribución del número y del coste de los siniestros

8.2.- Historia de la simulación de Montecarlo

La historia del método de Montecarlo se remonta en el año 1944, aunque anteriormente ya existían métodos basados en los mismos fundamentos (Soto, 2005). En ese momento, se conocía Montecarlo, barrio del principado de Mónaco, por su famoso casino y por ser “la capital del juego del azar” (Soto, 2005). Sin embargo, el uso del método de Montecarlo surge de una investigación para el desarrollo de la bomba atómica en la segunda guerra mundial. “Los científicos Von Neumann y Ulam perfeccionaron la técnica y la aplicaron a problemas de cálculo de difusión de neutrones en un material” (el método de Montecarlo y el programa de cómputo mcnpx, s.f).

Posteriormente, y aproximadamente en la década del 1970, los desarrollos tecnológicos y el avance en la complejidad computacional aportan precisión y mayores usos del método de Montecarlo (Soto, 2005).

Más adelante, se observan varias investigaciones haciendo uso de la técnica, como, por ejemplo, Dyer (1989) para estimar el volumen de un *convex body* en el espacio Euclidiano multidimensional, o Broder (1986) y Jerrum y Sinclair (1988) para estimar la persistencia de una matriz, el número de *matching* perfectos en un grafo bipartito (Soto, 2005).

8.3.- Simulación de la función de distribución del número de siniestros por el método de Montecarlo

Definimos la función de distribución de la variable aleatoria discreta número de siniestros N como $P_N(n) = P(N = n) \quad n = 0, 1, 2, \ldots$ y siendo $F_N(n) = P[N \leq n]$. Sea u un numero generado de una distribución uniforme 0 y 1, diremos que s es un valor simulado de la variable aleatoria N asociado a u si y solo si $P[N \leq s - 1] < u < P[N \leq s]$ (Ortiz, 2014)

Si repetimos el proceso $NSIM$ (número de simulaciones) veces, tendremos tantas realizaciones n^i, con $i = 1, \ldots, NSIM$ de la variable aleatoria N como simulaciones hagamos, de tal forma que,

$$u^1 \to s^1 = n^1$$

$$u^2 \to s^2 = n^2$$

$$u^{NSIM} \to s^{NSIM} = n^{NSIM}$$

8.4.- Simulación de la función de distribución coste de los siniestros por el método de Montecarlo

En este caso definimos la función de distribución de la variable aleatoria continua coste de los siniestros X, como $F_X(t) = F(t) = P[X \leq t]$ dónde $t \geq 0$. De igual manera que en el caso anterior, si u es un número generado de una distribución uniforme 0 y 1, diremos que s es un valor simulado de la variable aleatoria X asociado a u si y solo si $F(s) = P[X \leq s] = u \to s = F^{-1}(u)$.

Análogamente, repitiendo el proceso $NSIM$ veces, poseeremos tantas realizaciones x^i, con $i = 1, \ldots, NSIM$ de la variable aleatoria X como simulaciones hagamos, así pues,

$$u^1 \to s^1 = x^1$$

$$u^2 \to s^2 = x^2$$

$$u^{NSIM} \to s^{NSIM} = x^{NSIM}$$

9.- Cálculo de la prima de reaseguro y cedente con simulación de Montecarlo

El objetivo con la simulación de Montecarlo es modelizar el número de siniestros y el coste para así poder determinar la prima de reaseguro y de cedente. A partir de la función de distribución simulada número de siniestros N, para la simulación l-ésima obtendremos un valor determinado de n^l siendo $l = 1, 2, \dots,$ NSIM. Para cada n^l y a partir de la función de distribución simulada del coste, simularemos un vector x^l que recoja el coste obtenido por simulación de cada uno de las n^l siniestros simulados, de tal forma que:

$$n^l \to x^l = (x_1^l, x_2^l, \dots, x_{n^l}^l)$$

A continuación, los ordenaremos por su cuantía,

$$x_{ord}^l = (x_{1:n^l}^l, x_{2:n^l}^l, \dots, x_{n^l:n^l}^l)$$

Finalmente, una vez tenemos el vector x_{ord}^l que recoge el coste asociado a la simulación l-ésima de cada uno de los n^l de siniestros ordenados, seremos capaces de definir la prima del reaseguro $P^{R.l}$, la prima de la cedente $P^{C.l}$ y la prima total P^l, asociada a la simulación l-ésima. Siendo: $P^l = P^{R.l} + P^{C.l}$

Más concretamente, para las tres modalidades de reaseguros basados en el número de siniestros tenemos:

- Reaseguro de los k siniestros más grandes:

$$P^{R.l} = \sum_{i=0}^{k-1} x_{n^l-i:n^l}^l \qquad k = 1,2, \dots$$

$$P^{C.l} = \sum_{i=1}^{n^l} x_{i:n^l}^l - \sum_{i=0}^{k-1} x_{n^l-i:n^l}^l = P^l - P^{R.l} \qquad k = 1,2, \dots$$

En el caso del reaseguro de los k siniestros más grandes, la compañía reaseguradora se hará cargo de los k siniestros más grandes, por lo tanto, al estar ordenados, la prima de reaseguro consistirá simplemente en sumar el coste los k siniestros más grandes. Mientras que la prima de la cedente consistirá en la diferencia entre el coste de todos y el coste de los k siniestros más grandes (prima del reasegurador)

- Reaseguro del exceso de los k siniestros más pequeños:

$$P^{R.l} = \sum_{i=1}^{n^l} x_{i:n^l}^l - \sum_{i=1}^{k} x_{i:n^l}^l$$

$$P^{C.l} = \sum_{i=1}^{k} x_{i:n^l}^l$$

En el caso del reaseguro del exceso de los k siniestros más pequeños, para determinar la prima del reaseguro asociada a la simulación l-ésima sumamos el coste de todos los siniestros y le restamos la suma de los k siniestros que asume la cedente. Mientras que la prima de la cedente únicamente sería la suma del coste de los k siniestros más pequeños.

- Reaseguro del exceso de los k siniestros más pequeños, hasta un tope de siniestralidad M.

$$P^{R.l} = \sum_{i=1}^{k} (x_{i:n^l}^l - M)^+ + \sum_{i=k+1}^{n^l} x_{i:n^l}^l$$

Siendo,

$$(x_{i:n^l}^l - M)^+ = \begin{Bmatrix} x_{i:n^l}^l - M & si & x_{i:n^l}^l - M > 0 \\ \\ 0 & si & x_{i:n^l}^l - M \leq 0 \end{Bmatrix}$$

$$P^{C.l} = P^l - P^{R.l} = \sum_{i=1}^{k} (x_{i:n^l}^l)^M$$

Siendo,

$$(x_{i:n^l}^l)^M = \begin{Bmatrix} x_{i:n^l}^l & si & M - x_{i:n^l}^l > 0 \\ \\ M & si & M - x_{i:n^l}^l \leq 0 \end{Bmatrix}$$

Por tanto, la prima de reaseguro para el caso actual consistirá en la suma del coste de los k siniestros más pequeños menos la prioridad M (siempre y cuando esta última operación sea positiva) más el exceso de los k siniestros.

En el caso de la prima de la cedente, la prima se basará en la suma del coste de los k siniestros más pequeños, siempre y cuando el coste para cada uno de los k siniestros más pequeños sea menor a la prioridad M.

El hecho de poder simular los siniestros, nos permite calcular también las primas de reaseguro y de la cedente del resto de modalidades. Es decir, la simulación de Montecarlo puede ser aplicada para cualquier modalidad de reaseguro, ya sea proporcional, no proporcional o, como hemos visto anteriormente, basada en el número de siniestros. Por ello, seguidamente lo mostramos para las modalidades Cuota-Parte, *Excess-Loss* y *Stop-Loss*. Destacar que no es necesario que los siniestros estén ordenados mediante su coste, aunque el resultado es el mismo.

De igual forma que anteriormente, a partir del vector que recoge el coste obtenido por cada simulación n^l de siniestros, definimos $P^{R.l}$ y $P^{C.l}$ para cada modalidad:

- Reaseguro Cuota-Parte:

$$P^{C.l} = \rho \cdot \sum_{i=1}^{n^l} x_{i:n^l}^l$$

$$P^{C.l} = (1-\rho) \cdot \sum_{i=1}^{n^l} x_{i:n^l}^l$$

Siendo $\rho,$ con $0 < \rho < 1$, el coeficiente de retención de la cedente en tanto por uno.

En el caso del reaseguro cuota-parte, para determinar la prima del reaseguro asociada a la simulación l-ésima simplemente multiplicamos por $(1-\rho)$ el coste de todos los siniestros. Mientras que la prima de la cedente lo multiplicamos por el coeficiente de retención ρ.

- Reaseguro de exceso de pérdida o *Excess-Loss*

$$P^{R.l} = \sum_{i=1}^{n^l} (x_{i:n^l}^l - M)^+$$

Siendo,

$$(x_{i:n^l}^l - M)^+ = \begin{cases} x_{i:n^l}^l - M & si \quad x_{i:n^l}^l - M > 0 \\ 0 & si \quad x_{i:n^l}^l - M \leq 0 \end{cases}$$

$$P^{C.l} = \sum_{i=1}^{n^l} (x_{i:n^l}^l)^M$$

Siendo,

$$(x_{i:n^l}^l)^M = \begin{cases} x_{i:n^l}^l & si \quad M - x_{i:n^l}^l > 0 \\ M & si \quad M - x_{i:n^l}^l \leq 0 \end{cases}$$

Para el caso del reaseguro de exceso de pérdida o *Excess-Loss*, la prima de reaseguro vendrá determinada por la suma del exceso del coste del siniestro $x_{i:n^l}^l$ respecto a la prioridad M. En caso de que no haya exceso y la operación $(x_{i:n^l}^l - M)^+$ sea negativa, la prima de reaseguro asociada a esa simulación l-ésima será 0. De la misma manera, la prima de la cedente vendrá determinada por la suma del coste de los siniestros, siempre y cuando cada siniestro no sea mayor a la prioridad M.

- Reaseguro de exceso de siniestralidad o *Stop-Loss*

$$P^{R.l} = ((\sum_{i=1}^{nl} x_{i:n^l}^l) - M)^+$$

Siendo,

$$((\sum_{i=1}^{nl} x_{i:n^l}^l) - M)^+ = \begin{cases} (\sum_{i=1}^{nl} x_{i:n^l}^l) - M & si \quad (\sum_{i=1}^{nl} x_{i:n^l}^l) - M > 0 \\ 0 & si \quad (\sum_{i=1}^{nl} x_{i:n^l}^l) - M \leq 0 \end{cases}$$

$$P^{C.l} = (\sum_{i=1}^{nl} x_{i:n^l}^l)^M$$

Siendo,

$$(\sum_{i=1}^{nl} x_{i:n^l}^l)^M = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n^l} x_{i:n^l}^l & si \quad M - \sum_{i=1}^{n^l} x_{i:n^l}^l > 0 \\ M & si \quad M - \sum_{i=1}^{n^l} x_{i:n^l}^l \leq 0 \end{cases}$$

La prima de reaseguro consistirá en la diferencia entre la siniestralidad y la prioridad, siempre y cuando esta operación resulte ser positiva, de lo contrario será 0. Por otro lado, la prima de la cedente vendrá dada por la suma de siniestralidad, cuando ésta no sea superior a la prioridad. En caso de que sí sea superior, la prima de la cedente será únicamente la prioridad M.

Una vez definida la prima de reaseguro y la prima de la cedente asociada a la simulación l-ésima, realizaremos el mismo proceso $NSIM$ simulaciones obteniendo de esta manera $NSIM$ realizaciones equiprobables de las variables aleatorias prima de reaseguro $\widetilde{P^R}$ y prima de la cedente $\widetilde{P^C}$. A partir de las realizaciones se podrá obtener las funciones de distribución de las variables aleatorias $\widetilde{P^R}$ y $\widetilde{P^C}$. Una vez conocidas estas funciones de distribución determinaremos la prima de la cedente y la prima de reaseguro mediante los diferentes criterios de cálculo de primas.

La función de distribución simulada de la variable aleatoria prima de reaseguro $\widetilde{P^R}$, se recoge en la siguiente tabla:

Simulación de la función de distribución de la variable aleatoria prima de reaseguro $\widetilde{P^R}$

	p^R	$P[\widetilde{P^R} = p^R]$
n^1	$P^{R.1}$	$1/NSIM$
n^2	$P^{R.2}$	$1/NSIM$
n^l	$P^{R.l}$	$1/NSIM$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n^{NSIM}	$P^{R.NSIM}$	$1/NSIM$

Fuente: Elaboración propia

Análogamente, la función de distribución simulada de la variable aleatoria prima de la cedente $\widetilde{P^C}$,

Simulación de la función de distribución de la variable aleatoria prima de la cedente $\widetilde{P^C}$

	p^C	$P[\widetilde{P^C} = p^C]$
n^1	$P^{C.1}$	$1/NSIM$
n^2	$P^{C.2}$	$1/NSIM$
n^l	$P^{C.l}$	$1/NSIM$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n^{NSIM}	$P^{C.NSIM}$	$1/NSIM$

Fuente: Elaboración propia

Se puede apreciar como a partir de $NSIM$ simulaciones obtenemos $NSIM$ realizaciones equiprobables, $P^{R.1}$, $P^{R.2}, P^{R.l}, P^{R.NSIM}$ de la variable aleatoria $\widetilde{P^R}$ con probabilidad $\frac{1}{NSIM}$. De la misma manera, también obtenemos $NSIM$ realizaciones equiprobables, $P^{C.1}$, $P^{C.2}, P^{C.l}, P^{C.NSIM}$ de la variable aleatoria $\widetilde{P^C}$ con probabilidad $\frac{1}{NSIM}$.

Como hemos mencionado anteriormente, existen diferentes criterios para el cálculo de la prima. A continuación, contemplaremos los siguientes criterios (Boj *et al.*, 2020):

Sea S la variable aleatoria coste total de la cartera, δ el recargo de seguridad y P la prima de la operación:

- Principio de equivalencia o de la prima pura: $P = E[S]$

Si $S = \widetilde{P^R}$ o $S = \widetilde{P^C}$ entonces,

$$P^R = E\left[\widetilde{P^R}\right]$$

$$P^C = E\left[\widetilde{P^C}\right]$$

- Principio del valor esperado: $P = E[S] + \delta \cdot E[S]$

Si $S = \widetilde{P^R}$ o $S = \widetilde{P^C}$ entonces,

$$P^R = E\left[\widetilde{P^R}\right] + \delta \cdot E[\widetilde{P^R}]$$

$$P^C = E\left[\widetilde{P^C}\right] + \delta \cdot E[\widetilde{P^C}]$$

- Principio de la varianza: $P = E[S] + \delta \cdot V[S]$

Si $S = \widetilde{P^R}$ o $S = \widetilde{P^C}$ entonces,

$$P^R = E\left[\widetilde{P^R}\right] + \delta \cdot V[\widetilde{P^R}]$$

$$P^C = E\left[\widetilde{P^C}\right] + \delta \cdot V[\widetilde{P^C}]$$

- Principio de la desviación típica $P = E[S] + \delta \cdot \sqrt{V[S]}$

Si $S = \widetilde{P^R}$ o $S = \widetilde{P^C}$ entonces,

$$P^R = E\left[\widetilde{P^R}\right] + \delta \cdot \sqrt{V\left[\widetilde{P^R}\right]}$$

$$P^C = E\left[\widetilde{P^C}\right] + \delta \cdot \sqrt{V\left[\widetilde{P^C}\right]}$$

- Principio del percentil $P = VaR_S(\alpha)$

Si $S = \widetilde{P^R}$ o $S = \widetilde{P^C}$ entonces,

$$P^R = VaR_{\widetilde{P^R}}(\alpha)$$

$$P^C = VaR_{\widetilde{P^C}}(\alpha)$$

Siendo α el nivel de confianza, este se puede asociar a la probabilidad de solvencia de la compañía si la operación se financiase estrictamente con las primas cobradas.

10.- Aplicación numérica.

En el presente apartado procederemos a la comparación de primas a cargo de la compañía aseguradora y de reaseguro y otros datos relevantes de la modelización de estas, además de la prima de reaseguro mediante distintos criterios. Para la elaboración de la simulación partimos de que la distribución del número de siniestros ocurridos y del coste de los mismos son conocidas. Asimismo, hemos usado el software de programación "R", cuyo "*script"* adjuntaremos en el anexo.

Asumiendo que la ocurrencia de los siniestros sigue una distribución Poisson y que el coste de éstos sigue una distribución Exponencial llevamos a cabo el cálculo de la prima de reaseguro y de la cedente, primeramente, para las modalidades basadas en el número de siniestros.

El programa nos solicita que indiquemos una serie de datos para la simulación, los cuales serán iguales para todas las modalidades, a fin de realizar una comparación, siendo estos los siguientes:

- Coste medio de los siniestros: $E(X) = 10$
- Número medio de siniestros: $E(N) = 10$
- Número de simulaciones a realizar: $NSIM = 1.000.000$
- El recargo de seguridad para los distintos criterios: $\delta = 0{,}02$

Los datos restantes pertenecen a la idiosincrasia de cada modalidad, por lo que los indicaremos a continuación.

a) Reaseguro de los k siniestros más grandes:

- Número de siniestros más grandes que cubre el reasegurador: $k = 3$

Resultados:

	Min.	Max.	Desviación	Varianza
Valores sin reaseguro	0	452,63	44,73	2000,77
Valores con reaseguro de la cedente	0	287,65	27,00	729,21
Valores con reaseguro del reasegurador	0	233,63	23,55	554,62

PRIMAS CON DISTINTOS CRITERIOS	**REASEGURO**	**CEDENTE**
Prima basada en el principio de equivalencia	61,37	38,59
Probabilidad que acumula la prima en la función de distribución	54%	57%
Prima basada en el principio del valor esperado	62,60	39,36
Prima basada en el principio de la varianza	72,47	53,17
Prima basada en el principio de la desviación	61,85	39,13
Prima basada en el principio del percentil α = 0,90	92,45	75,15

Tabla 1. Fuente: elaboración propia

En primer lugar, destacar como la prima sin reaseguro, es decir, la prima basada en el principio de equivalencia toma el valor de 99,96 u.m. Una vez calculamos los valores la cedente, obtenemos una prima de 38,59 u.m., análogamente, de 61,37 u.m para el reasegurador. Destacar como la suma de ambas proporciona el resultado de la prima sin reaseguro.

A su vez, el valor obtenido a través del principio de equivalencia es equivalente a la prima basada en el principio del percentil con un $\alpha = 54\%$, siendo la prima pura de 61,37 u.m. Si aplicamos un recargo del 2% en la esperanza, sería de 62,60 u.m. En el caso en que aplicásemos el recargo en la varianza obtenemos una prima de 72,47, y en la desviación de 61,85 u.m. Finalmente, si la compañía reaseguradora quiere protegerse y obtener una probabilidad de solvencia del 90%, ésta deberá ser de 92,47 u.m. Aclarar que tanto en este último resultado, como en el de la probabilidad que acumula a la izquierda de la función de distribución asumimos que en la cartera no hay reservas de solvencia.

Por otro lado, la probabilidad que acumula la prima basada en el principio de equivalencia de la cedente en la función de distribución es del 54%. A su vez, enfatizar el salto de prima de la cedente que se produce con el principio de la varianza, la cual se sitúa en 53,17 u.m. Finalmente, la prima basada en el principio de percentil, siendo $\alpha = 0{,}9$ es de 75,15 u.m.

b) Reaseguro del exceso de los k siniestros más pequeños:

- Número de siniestros más pequeños que retiene la cedente: $k = 5$

	Min.	Max.	Desviación	Varianza
Valores sin reaseguro	0	418,12	44,71	1998,98
Valores con reaseguro de la cedente	0	187,89	13,99	195,78
Valores con reaseguro del reasegurador	0	410,68	47,83	2287,91

PRIMAS CON DISTINTOS CRITERIOS	**REASEGURO**	**CEDENTE**

Prima basada en el principio de equivalencia	79,26	20,65
Probabilidad que acumula la prima en la función de distribución	54%	62%
Prima basada en el principio del valor esperado	80,85	21,06
Prima basada en el principio de la varianza	125,02	24,57
Prima basada en el principio de la desviación	80,22	20,93
Prima basada en el principio del percentil α = 0,90	142,67	38,08

Tabla 2. Fuente: elaboración propia

Para el reaseguro del exceso de los 5 siniestros más pequeños destacar como la varianza de la cedente es significativamente menor a la varianza del reasegurador o a la varianza sin reaseguro, lo cual denota una cierta protección hacia la cedente, ya que la variabilidad de los costes de los 5 siniestros más pequeños respecto a la prima, es muy inferior a la variabilidad del reasegurador y la variabilidad sin reaseguro.

En cuanto a las primas con distintos criterios para el reasegurador, apreciamos como la probabilidad que acumula la prima de reaseguro en la función de distribución es del 54%, lo cual coincide con el reaseguro del apartado anterior. Remarcar como la prima basada en el principio de la varianza, 142,67 u.m. es bastante elevada respecto a la del principio de equivalencia 79,26 u.m debido a la variabilidad elevada de costes de siniestro que posee el reasegurador, 2287,91.

Para la cedente, observamos reducida diferencia entre la prima basada en el principio de equivalencia, 20,65 u.m., y la prima basada en el principio de la varianza 24,57 u.m., dado lo mencionado anteriormente.

c) Reaseguro del exceso de los k siniestros más pequeños, hasta un tope de siniestralidad M:

- Número de siniestros más pequeños que retiene la cedente: $k = 5$ y la prioridad $M = 10$

	Min.	Max.	Desviación	Varianza
Valores sin reaseguro	0	429,83	44,71	1998,98
Valores con reaseguro de la cedente	0	50	9,32	86,79
Valores con reaseguro del reasegurador	0	415,77	46,03	2118,97
PRIMAS CON DISTINTOS CRITERIOS			**REASEGURO**	**CEDENTE**
Prima basada en el principio de equivalencia			81,50	18,48
Probabilidad que acumula la prima en la función de distribución			56%	55%
Prima basada en el principio del valor esperado			83,13	18,85
Prima basada en el principio de la varianza			123,88	20,22
Prima basada en el principio de la desviación			82,42	18,67
Prima basada en el principio del percentil α = 0,90			142,13	31,91

Tabla 3. Fuente: elaboración propia

En el caso actual, la cedente únicamente se hará cargo de los 5 siniestros más pequeños, y, como máximo 10 u.m. de cada uno de ellos. Por lo tanto, primeramente, ya percibimos que la prima de la cedente será ligeramente inferior al caso anterior. Los resultados muestran que la prima a cargo de la cedente debe ser de 18,85 u.m., mientras que la del reasegurador de 81,50 u.m. Lógicamente, la función de distribución del coste de la cedente no posee una desviación muy elevada, ya que únicamente se hará cargo de cinco siniestros. En cambio, la desviación de la función de distribución del reasegurador, triplica la de la cedente.

En cuanto a los valores de las primas de reaseguro con los distintos criterios obtenemos que la prima obtenida con el principio de equivalencia es equivalente a la prima basada en el principio del percentil con un $\alpha = 56\%$. Como hemos comentado, la desviación es moderadamente elevada respecto a la de la cedente, lo que incide en que la varianza también, es por ello que la prima de reaseguro basada en el principio de la varianza sea superior respecto a la del principio de equivalencia, concretamente de 123,88 u.m. De igual manera, la prima de reaseguro basada en el principio del percentil 0,9 sería de 142,13 u.m. En comparación a las primas de la modalidad anterior son ligeramente superiores debido a la introducción de la prioridad.

Por otro lado, en cuanto a los valores de las primas de la cedente, destacar como estas son ligeramente inferiores a las de la modalidad anterior, nuevamente debido a la prioridad

d) Reaseguro Cuota-Parte

- La cuota de retención ρ de la cedente 50%

	Min.	Max.	Desviación	Varianza
Valores sin reaseguro	0	424,56	44,67	1995,41
Valores con reaseguro de la cedente	0	212,28	22,34	498,93
Valores con reaseguro del reasegurador	0	212,28	22,34	498,93

PRIMAS CON DISTINTOS CRITERIOS	**REASEGURO**	**CEDENTE**
Prima basada en el principio de equivalencia	49,98	49,98
Probabilidad que acumula la prima en la función de distribución	54%	54%
Prima basada en el principio del valor esperado	50,98	50,98
Prima basada en el principio de la varianza	59,95	59,95
Prima basada en el principio de la desviación	50,42	50,42
Prima basada en el principio del percentil α = 0,90	79,83	79,83

Tabla 4. Fuente: elaboración propia

En el reaseguro Cuota-Parte apreciamos como el coeficiente ρ marcará el porcentaje de prima sin reaseguro que irá destinada a la cedente y al reasegurador. Por ello, apreciamos todos los estadísticos descriptivos idénticos tanto para la función de distribución de la cedente como la del reasegurador, ya que $\rho = 0{,}5$. Esto es debido a que el coste de todos los siniestros será costeado al 50% por cada compañía, lo que materializa que ambas funciones de distribución del coste sean idénticas y de la misma manera las primas.

e) Reaseguro de exceso de pérdida o Excess-Loss

- La prioridad M de la cedente = 10

	Min.	Max.	Desviación	Varianza
Valores sin reaseguro	0	488,71	44,71	1998,98
Valores con reaseguro de la cedente	0	210,30	22,97	527,42
Valores con reaseguro del reasegurador	0	320,94	27,11	735,19

PRIMAS CON DISTINTOS CRITERIOS	**REASEGURO**	**CEDENTE**
Prima basada en el principio de equivalencia	36,77	63,19
Probabilidad que acumula la prima en la función de distribución	56%	53%
Prima basada en el principio del valor esperado	37,51	64,45
Prima basada en el principio de la varianza	51,47	73,74
Prima basada en el principio de la desviación	37,31	63,65
Prima basada en el principio del percentil α = 0,90	73,58	93,54

Tabla 5. Fuente: elaboración propia

En el reaseguro *Excess-Loss*, con una prioridad $M = 10$, obtenemos que la prima a cargo de la cedente es de 63,19 u.m., mientras que la del reasegurador es de 36,77 u.m. Es lógico que la cedente obtenga una prima bastante más elevada respecto al reasegurador, ya que el coste medio es de 10 u.m. y la cedente se hará cargo de todos aquellos siniestros que tengan un coste menor o igual a 10 u.m. y, de los que sean superiores a 10 u.m., se responsabilizará de la prioridad.

La prima de reaseguro obtenida con el principio de equivalencia acumula una la probabilidad a la izquierda de la función de distribución del 56%. Igualmente, la prima de reaseguro basada en el principio de la desviación es de 37,31 u.m., la cual no es muy superior a la del principio de equivalencia dado que la desviación es de 22,97. Finalmente, la prima que aportaría una probabilidad de solvencia del 90% al reasegurador teniendo en cuenta únicamente la prima es de 73,58 u.m.

Por otro lado, la prima de la cedente basada en el principio de la desviación es 63,65 u.m., y la prima basada en el principio del percentil 93,54 u.m.

f) Reaseguro de exceso de siniestralidad o Stop-Loss

- La prioridad M de la cedente = 100

	Min.	Max.	Desviación	Varianza
Valores sin reaseguro	0	434,82	44,74	2001,67
Valores con reaseguro de la cedente	0	100	22,54	508,24
Valores con reaseguro del reasegurador	0	334,82	29,40	864,45

PRIMAS CON DISTINTOS CRITERIOS	**REASEGURO**	**CEDENTE**

Prima basada en el principio de equivalencia	17,69	82,26
Probabilidad que acumula la prima en la función de distribución	67%	40%
Prima basada en el principio del valor esperado	18,08	83,90
Prima basada en el principio de la varianza	35,01	92,42
Prima basada en el principio de la desviación	18,31	82,71
Prima basada en el principio del percentil α = 0,90	59,85	100,00

Tabla 6. Fuente: elaboración propia

En este caso, la cedente no quiere asumir una siniestralidad mayor a la prima por el principio de equivalencia sin reaseguro (100). Con estos datos, la prima de la cedente será de 82,26 u.m., mientras que la del reasegurador 17,69 u.m.

Destacar, de igual manera que en el caso anterior que la probabilidad que acumula la prima de reaseguro calculada mediante el principio de equivalencia en la función de distribución es del 67%. Comentar, a su vez, que la prima de reaseguro basada en el principio de valor esperado es de 17,69 u.m. Finalmente, la prima de reaseguro basada en el principio del percentil $\alpha = 0{,}90$ es de 59,85 u.m.

En cuanto a las primas de la cedente con los diferentes criterios, primeramente, observamos que la prima obtenida como media acumula una la probabilidad a la izquierda de la función de distribución del 40%, lo cual es atípico comparado con las anteriores modalidades. Asimismo, comentar que la prima basada en el principio del percentil, siendo $\alpha = 0{,}90$, coincide con la prioridad de la cedente, es decir, 100 u.m.

Finalmente, a modo de comprobación llevamos a cabo mediante la simulación de Montecarlo para los ejemplos realizados previamente en la teoría con las fórmulas y asumiendo que:

$N \sim Poisson(\lambda)$ y $X \sim Uniforme(0{,}1)$ y para 1.000.000 de simulaciones.

Reaseguro de los k siniestros más grandes					
Hipótesis		**Prima con fórmulas teóricas**		**Prima con simulación Montecarlo**	
E(N)	5	**Sin reaseguro**	2,500	**Sin reaseguro**	2,500
E(X)	0,5	**Cedente**	1,089	**Cedente**	1,090
k	2	**Reasegurador**	1,419	**Reasegurador**	1,411

Reaseguro del exceso de los k siniestros más pequeños					
Hipótesis		**Prima con fórmulas teóricas**		**Prima con simulación Montecarlo**	
E(N)	3	**Sin reaseguro**	1,500	**Sin reaseguro**	1,498
E(X)	0,5	**Cedente**	0,651	**Cedente**	0,652
k	2	**Reasegurador**	0,849	**Reasegurador**	0,847

Reaseguro del exceso de los k siniestros más pequeños, hasta un tope de siniestralidad M					
Hipótesis		**Prima con fórmulas teóricas**		**Prima con simulación Montecarlo**	
E(N)	4	**Sin reaseguro**	2,000	**Sin reaseguro**	1,999
E(X)	0,5	**Cedente**	0,526	**Cedente**	0,526
k	2	**Reasegurador**	1,474	**Reasegurador**	1,472
Prioridad	0,5				

Tabla 7. Fuente: elaboración propia

11.- Conclusiones

En primer lugar, recalcar que las expresiones matemáticas que permiten calcular la prima de la cedente y del reasegurador en las modalidades basadas en el número de siniestros son complejas a nivel teórico, ya que éstas dependen de las funciones de distribución de los siniestros ordenados. De tal forma, que los resultados numéricos obtenidos con éstas son gracias a hipótesis simples y sencillas. Sería prácticamente inviable llevar a cabo de forma teórica el cálculo numérico de la prima de la cedente y del reaseguro para las hipótesis aplicadas en la parte práctica del presente trabajo. Por ello, se plantea el método de Montecarlo, como una alternativa a las fórmulas teóricas basadas en la ordenación de siniestros, para calcular la prima de la cedente y del reasegurador.

El método de Montecarlo, caracterizado por ser un método estadístico capaz de realizar simulaciones de números pseudoaleatorios, ha resultado ser una solución adecuada a la dificultad matemática. Hemos probado como obtenemos el mismo resultado para las primas calculadas mediante las fórmulas matemáticas aportadas en estudios previos y para las primas calculadas usando el método de Montecarlo.

Asimismo, hemos empleado dicho método para calcular las modalidades clásicas de reaseguro y poder comparar los resultados. Resulta interesante apreciar como la prima calculada mediante distintos criterios puede variar dependiendo de los datos que facilites al programa de R y experimentar con las diferentes casuísticas y escenarios, por ello hemos adjuntado los diferentes scripts en el anexo.

En el presente trabajo hemos asumido que el coste de los siniestros sigue una distribución Exponencial y que el número de los siniestros sigue una Poisson, no obstante, para futuras líneas de investigación otras funciones de distribución pueden ser asumidas para el coste y la ocurrencia de siniestros. De la misma manera, otras variables como el coste medio de los siniestros, el número medio de siniestros, el recargo de seguridad y otras pueden tomar distintos valores y, a su vez, apreciar las primas resultantes de estos cambios. Adicionalmente, mediante el criterio del percentil y siendo α el nivel de confianza, podemos afirmar que el nivel de confianza es la probabilidad de solvencia si la compañía no posee reservas, por tanto, otra futura línea de investigación sería asumir que la compañía aseguradora o reaseguradora contase con reservas en su cartera.

Finalmente mencionar que, en el mercado reasegurador, el desconocimiento de estas modalidades de reaseguro ha hecho que las compañías aseguradoras no las utilicen. Sin embargo, son modalidades que se deberían potenciar, en particular la modalidad de reaseguro del exceso de los k siniestros más pequeños, hasta un tope de siniestralidad M, ya que ésta es muy acertada en cuanto a la protección que ofrece a la cedente, ya que limita la pérdida máxima a $k \cdot M$ y protege frente a la reiteración de los siniestros, que es una desventaja del reaseguro XL.

12.- Bibliografía

Alegre, A. y Sarrasí, F.J. (1995). Modalidades alternativas de Reaseguro Basadas en la Ordenación de riesgos. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles.* Tercera época, número 1.

Albrecher, H. y Cani, A. (2019). On randomized reinsurance contracts. *Insurance: Mathematics and Economics,* 67-78.

Ammeter, H. (1964). The rating of “Largest Claim” reinsurance covers. *Quarterly letter from Algemeene Reinsurance Companies Jubilee,* Número 2, 79-109

Álvarez, H.R. (2011). Introducción a la Simulación. Universidad Tecnológica de Panamá. https://www.academia.utp.ac.pa/sites/default/files/docente/51/documento_completo.pdf

Benktander, G. (1978). Largest claims reinsurance (LCR). A quick method to calculate LCR-Risk rates from Excess of Loss risk rates. *Astin Bulletin,* 54-58.

Berliner, B. (1972). Correlations between excess-of-loss reinsurance covers and reinsurance of the n largest claims. *Astin Bulletin,* 260-275.

Boj, E., Claramunt, M.M. y Costa, T. (2020). Tarificación y provisiones. Tercera edición. Colección de publicaciones del departamento de matemática económica, financiera y actuarial. Universidad de Barcelona. http://diposit.ub.edu/dspace/handle/2445/149241.

El método de Monte Carlo y el programa de cómputo MCNPX (s.f.). Universidad Nacional Autónoma de México. http://www.ptolomeo.unam.mx:8080/jspui/bitstream/132.248.52.100/720/5/A5.pdf

Fan, Y., Griffin, P., Maller, R., Szimayer, A. y Wang, T. (2017). The Effects of Largest claim and Excess of Loss Reinsurance on a Company’s Ruin Time and Valuation. *MDPI.*

Fundación Mapfre (s.f) Margen de solvencia (solvency margin). Diccionario de Seguros. https://www.fundacionmapfre.org/publicaciones/diccionario-mapfre-seguros/margen-de-solvencia/

Jiang, J. y Tang, Q. (2008). Reinsurance under the LCR and ECOMOR treaties with emphasis on light-tailed claims. *Insurance: Mathematics and Economics,* Volúmen 43, 431-436.

Kopf, E. W. (1929). The Origins and Development of Reinsurance. *Casualty Actuarial Society,* 16-33.

Kremer, E. (1982). Rating of largest claims and ECOMOR reinsurance treaties for large portfolios. *Astin Bulletin.* Volúmen 3.

Kremer, E. (1984). An asymptotic formula for the net premium of some reinsurance treaties. *Scandinavian Actuarial Journal,* 11-22.

Kremer, E. (1986). Finite formulas for the general reinsurance treaty based on ordered claims. *Insurance: Mathematics and Economics,* 233-238.

Kremer, E. (1986). Simple formulas for the premiums of the LCR and ECOMOR treaties under exponential claims sizes. *Blätter DGVFM,* 237-243.

Ladoucette, S. y Teugels, J. (2006). Reinsurance of large claims. *Journal of computational and applied mathematics,* Volúmen 186 163-190.

Minzoni, A. (2009). *Reaseguro.* Tercera edición. Facultad de Ciencias, UNAM. México.

National Association of Insurance Commissioners (NAIC, 2022). Reinsurance. https://content.naic.org/cipr-topics/reinsurance.

Ortiz, L. (2016). Lecture notes in Quantitative Finance. Universidad de Barcelona.

Ortiz, M.T. (2014). Estadística computacional. Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM). https://tereom.github.io/est-computacional-2019/

Peña, D. (2001). *Fundamentos de Estadística.* Editorial: Allianza. Madrid.

Sarrasí, F.J. (2003). *Matemática del Reaseguro.* Colección de publicaciones del departamento de matemática económica, financiera y actuarial. Universidad de Barcelona.

Soto, J.E. (2005). Simulación Método Monte Carlo. Investigación Operativa I. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. https://pdfcoffee.com/qdownload/metodo-montecarlo-3-pdf-free.html

Yauri, Y. (2009). Introducción al método de simulación de Monte Carlo. Métodos cuantitativos para los negocios. Universidad Autónoma de Nayarit. https://uplamcdn.files.wordpress.com/2009/04/libro-cap-08.pdf

13.- Anexo

Script reaseguro de los *k* siniestros más grandes

```
# SIMULA LA PRIMA DE REASEGURO DE LOS K SINIESROS MAS GRANDES CON N
POISSON Y X EXPONENCIAL

simulación<-function(){

 c<-0

 ct<-0

 print(" A continuación se pedirán una serie de datos. Se debe pulsar dos veces intro para continuar")

 print("Introducir el coste medio")

 cm<-scan()

 print("Introducir el número medio de siniestros")

 n<-scan()

 print("Introducir el número de simulaciones que se desea realizar")

 ns<-scan()

 print("Introducir el recargo de seguridad para el criterio de valor esperado en tanto por uno")

 delta<-scan()

 sin<- rpois(ns, n)

 #print(sin)

 #espn<-mean(n)

 print("Introducir el número de siniestro mas grandes que cubre el reasegurador")

 k<-scan()

 vrea<-numeric(length(ns))

 v<-numeric(length(ns))

 vced<-numeric(length(ns))

  for (i in 1:ns){

     print(i)

    if(sin[i] == 0){

      c<-0

    } else{

    c<- rexp(sin[i],1/cm)      #en el caso de uniforme: c<- runif(sin[i])
```

```
   }
  # print(c)
   c<- sort(c)
  #  print(c)

# Calculo de la sinietralidad sin reaseguro  dada la simulación simulación  i -esima v[i]
   v[i]<-sum(c)
 #   print(v[i])
# Calculo de la siniestralidad a cargo del reasegurador  dada la simulación simulación  i -esima vrea[i]
      if(length(c)-(k-1) < 1){
           A<-1
       } else {
         A<-length(c)-(k-1)
       }
       crea<-c[seq(A,length(c))]
   #    print(crea)
       vrea[i]<-sum(crea)
   #    print(vrea[i])

# Calculo de la siniestralidad a cargo de la cedente  dada la simulación simulación  i -esima vced[i]
       vced[i]<-v[i]-vrea[i]
    #   print(vced[i])
 }

 print("################### REASEGURO DE LOS K SINIETROS MAS GRANDES: POISSON -
EXPONENCIAL###################################")
print("NUMERO DE SIMULACIONES:")
 print(ns)
print("NUMERO DE SINIESTROS MAS GRANDES A CAGO DEL REASEGURADOR:")

 print(k)
```

```
print("COSTE MEDIO DE SINIETROS:")
 print(cm)
print("NUMERO MEDIO DE SINIESTROS:")
 print(n)
print("PRIMA TOTAL SIN SIMULACIÓN:")
  PT<-n*cm
  print(PT)
print("####################valores sin reaseguro#################################")
  print(summary(v))
  desvtotal<-sd(v)
  print("Desviación de la prima total(sin reaseguro)")
  print(desvtotal)
  print("Error en el proceso de simulación")
  error<- PT-mean(v)
  print(error)
  print("####################valores con reaseguro
(cedente)#################################")
  print(summary(vced))
  desvced<-sd(vced)
  print("Desviación de la prima de la cedente")
  print(desvced)
  print("Varianza de la prima de la cedente")
  print(desvced^2)
  print("####################valores con reaseguro
(reaseguro)#################################")
   print(summary(vrea))
  desvrea<-sd(vrea)
  print("Desviación de la prima de Reaseguro")
  print(desvrea)
  print("Varianza de la prima de Reaseguro")
  print(desvrea^2)
```

```
VAR<-quantile(vrea, 0.5)

print(VAR)

VAR<-quantile(vrea, 0.525)

print(VAR)

VAR<-quantile(vrea, 0.53)

print(VAR)

VAR<-quantile(vrea, 0.55)

print(VAR)

VAR<-quantile(vrea, 0.75)

print(VAR)

VAR<-quantile(vrea, 0.995)

print(VAR)

esp<-mean(vrea)

print("prima reaseguro basado en el principio de equivalencia");print(esp);print("prima cedente");print(mean(vced))

print("prima reaseguro basado en el principio del valor esperado");print(esp+delta*esp)

print("prima reaseguro basado en el principio de la varianza");print(esp+delta*desvrea^2)

print("prima reaseguro basado en el principio de la desviación");print(esp+delta*desvrea)

print("prima reaseguro basado en el principio del percentil");print(quantile(vrea, 0.9))

lambda<-VAR/(sum(vrea)/ns)-1

print("Recargo de seguridad que garantiza una probabilidad de solvencia del 99,5%")

print(lambda)

print("datos referentes a la cedente")

VAR<-quantile(vced, 0.5)

print(VAR)

VAR<-quantile(vced, 0.525)

print(VAR)

VAR<-quantile(vced, 0.53)

print(VAR)

VAR<-quantile(vced, 0.55)

print(VAR)
```

```
  VAR<-quantile(vced, 0.58)
  print(VAR)
  VAR<-quantile(vced, 0.60)
  print(VAR)
  VAR<-quantile(vced, 0.62)
  print(VAR)
  VAR<-quantile(vced, 0.65)
  print(VAR)
  VAR<-quantile(vced, 0.70)
  print(VAR)
  VAR<-quantile(vced, 0.725)
  print(VAR)
  VAR<-quantile(vced, 0.75)
  print(VAR)
  VAR<-quantile(vced, 0.995)
  print(VAR)
  esp2<-mean(vced)
  print("prima cedente basado en el principio de equivalencia");print(esp2)
  print("prima cedente basado en el principio del valor esperado");print(esp2+delta*esp2)
  print("prima cedente basado en el principio de la varianza");print(esp2+delta*desvced^2)
  print("prima cedente basado en el principio de la desviación");print(esp2+delta*desvced)
  print("prima cedente basado en el principio del percentil");print(quantile(vced, 0.9))
  }
#Para ejecutar la función simulación se ha de escribir  "simulación()", se sombrea  y se aprieta ctr+intro
simulación()
```

Reaseguro del exceso de los *k* siniestros más pequeños

```
# SIMULA LA PRIMA DE REASEGURO DEL EXCESO DE LOS K SINIESTROS MÁS PEQUEÑOS
CON N POISSON Y X EXPONENCIAL
```

```
simulación<-function(){
 c<-0
 ct<-0
 print(" A continuación se pedirán una serie de datos. Se debe pulsar dos veces intro para continuar")
 print("Introducir el coste medio")
 cm<-scan()
 print("Introducir el número medio de siniestros")
 n<-scan()
 print("Introducir el número de simulaciones que se desea realizar")
 ns<-scan()
 print("Introducir el recargo de seguridad para el criterio de valor esperado en tanto por uno")
 delta<-scan()
 sin<- rpois(ns, n)
 #print(sin)
 #espn<-mean(n)
 print("Introducir el número de siniestro más pequeños que retiene la cedente")
 k<-scan()
 vrea<-numeric(length(ns))
 v<-numeric(length(ns))
 vced<-numeric(length(ns))
 for (i in 1:ns){
  print(i)
  if(sin[i] == 0){
   c<-0
  } else{
   c<- rexp(sin[i],1/cm)      #en el caso de uniforme: c<- runif(sin[i])
  }
  # print(c)
  c<- sort(c)
  #  print(c)
```

```
  # Calculo de la sinietralidad sin reaseguro  dada la simulación simulación  i -esima v[i]
  v[i]<-sum(c)
  #   print(v[i])
  # Calculo de la siniestralidad a cargo de la cedente  dada la  simulación  i -esima vced[i]
  cced<-c[seq(1,k)]; cced[is.na(cced)]<-0
  #      print(cced)
  vced[i]<-sum(cced)
  #    print(cced[i])

  # Calculo de la siniestralidad a cargo del reasegurador  dada la simulación simulación  i -esima vrea[i]
  vrea[i]<-v[i]-vced[i]
  #   print(vced[i])
 }
 print("#################### REASEGURO DEL EXCESO DE LOS K SINIESTROS MÁS PEQUEÑOS: POISSON - EXPONENCIAL##################################")
 print("NUMERO DE SIMULACIONES:")
 print(ns)
 print("NUMERO DE SINIESTROS MAS PEQUEÑOS A CARGO DE LA CEDENTE:")
 print(k)
 print("COSTE MEDIO DE SINIETROS:")
 print(cm)
 print("NUMERO MEDIO DE SINIESTROS:")
 print(n)
 print("PRIMA TOTAL SIN SIMULACIÓN:")
 PT<-n*cm
 print(PT)


 print("###################valores sin reaseguro################################")
```

```
print(summary(v))

desvtotal<-sd(v)

print("Desviación de la prima total(sin reaseguro)")

print(desvtotal)

print("Error en el proceso de simulación")

error<- PT-mean(v)

print(error)

print("###################valores con reaseguro (cedente)################################")

print(summary(vced))

desvced<-sd(vced)

print("Desviación de la prima de la cedente")

print(desvced)

print("Varianza de la prima de la cedente")

print(desvced^2)

print("###################valores con reaseguro (reaseguro)################################")

print(summary(vrea))

desvrea<-sd(vrea)

print("Desviación de la prima de Reaseguro")

print(desvrea)

print("Varianza de la prima de Reaseguro")

print(desvrea^2)

VAR<-quantile(vrea, 0.5)

print(VAR)

VAR<-quantile(vrea, 0.525)

print(VAR)

VAR<-quantile(vrea, 0.53)

print(VAR)

VAR<-quantile(vrea, 0.55)

print(VAR)
```

```
VAR<-quantile(vrea, 0.75)
print(VAR)
VAR<-quantile(vrea, 0.995)
print(VAR)
esp<-mean(vrea)
print("prima reaseguro basado en el principio de equivalencia");print(esp);print("prima cedente");print(mean(vced))
print("prima reaseguro basado en el principio del valor esperado");print(esp+delta*esp)
print("prima reaseguro basado en el principio de la varianza");print(esp+delta*desvrea^2)
print("prima reaseguro basado en el principio de la desviación");print(esp+delta*desvrea)
print("prima reaseguro basado en el principio del percentil");print(quantile(vrea, 0.9))
lambda<-VAR/(sum(vrea)/ns)-1
print("Recargo de seguridad que garantiza una probabilidad de solvencia del 99,5%")
print(lambda)
print("datos referentes a la cedente")
VAR<-quantile(vced, 0.5)
print(VAR)
VAR<-quantile(vced, 0.525)
print(VAR)
VAR<-quantile(vced, 0.53)
print(VAR)
VAR<-quantile(vced, 0.55)
print(VAR)
VAR<-quantile(vced, 0.58)
print(VAR)
VAR<-quantile(vced, 0.60)
print(VAR)
VAR<-quantile(vced, 0.62)
print(VAR)
VAR<-quantile(vced, 0.65)
print(VAR)
```

```
  VAR<-quantile(vced, 0.70)
  print(VAR)
  VAR<-quantile(vced, 0.725)
  print(VAR)
  VAR<-quantile(vced, 0.75)
  print(VAR)
  VAR<-quantile(vced, 0.995)
  print(VAR)
  esp2<-mean(vced)
  print("prima cedente basado en el principio de equivalencia");print(esp2)
  print("prima cedente basado en el principio del valor esperado");print(esp2+delta*esp2)
  print("prima cedente basado en el principio de la varianza");print(esp2+delta*desvced^2)
  print("prima cedente basado en el principio de la desviación");print(esp2+delta*desvced)
  print("prima cedente basado en el principio del percentil");print(quantile(vced, 0.9))
}
#Para ejecutar la función simulación se ha de escribir  "simulación()", se sombrea  y se aprieta ctr+intro
simulación()
```

Reaseguro del exceso de los *k* siniestros más pequeños, hasta un tope de siniestralidad *M*

```
# SIMULA LA PRIMA DE REASEGURO DE LOS K SINIESROS MAS PEQUEÑOS HASTA PRIORIDAD CON N POISSON Y X EXPONENCIAL
simulación<-function(){
  c<-0
  ct<-0
  print(" A continuación se pedirán una serie de datos. Se debe pulsar dos veces intro para continuar")
  print("Introducir el coste medio")
  cm<-scan()
  print("Introducir el número medio de siniestros")
  n<-scan()
```

```
print("Introducir el número de simulaciones que se desea realizar")
ns<-scan()
print("Introducir el recargo de seguridad para el criterio de valor esperado en tanto por uno")
delta<-scan()
sin<- rpois(ns, n)
#print(sin)
#espn<-mean(n)
print("Introducir el número de siniestros más pequeños que cubre la cedente")
k<-scan()
print("Introducir la prioridad")
M<-scan()
vrea<-numeric(length(ns))
v<-numeric(length(ns))
vced<-numeric(length(ns))
for (i in 1:ns){
  print(i)
  if(sin[i] == 0){
    c<-0
  } else{
    c<- rexp(sin[i],1/cm)       #en el caso de uniforme: c<- runif(sin[i])
  }
  # print(c)
  c<- sort(c)
  #  print(c)

  # Calculo de la sinietralidad sin reaseguro  dada la simulación simulación  i -esima v[i]
  v[i]<-sum(c)
  #   print(v[i])
  # Calculo de la siniestralidad a cargo de la cedente dada la simulación simulación  i -esima vced[i]
```

```
  #reaseguro del exceso de los k más pequeños
  if(length(c)-(k) < 0){
    A<-length(c)
  } else {
    A<-k
  }
  cced<-c[seq(1,A)]
  #print(cced)
  #vector de la cedente teniendo en cuenta la prioridad M
  for (j in 1:A){
    if(cced[j] > M){
      cced[j] <- M
    }
  }
  #print(cced)
  vced[i]<-sum(cced)
  #   print(vced[i])

  # Calculo de la siniestralidad a cargo del reasegurador  dada la simulación simulación  i -esima vrea[i]
  vrea[i]<-v[i]-vced[i]
  #   print(vrea[i])
  }

 print("#################### REASEGURO DE LOS K SINIETROS MAS PEQUEÑOS HASTA PRIORIDAD: POISSON - EXPONENCIAL###################################")
 print("NUMERO DE SIMULACIONES:")
 print(ns)
 print("NUMERO DE SINIESTROS MAS GRANDES A CAGO DEL REASEGURADOR:")
 print(k)

 print("COSTE MEDIO DE SINIESTROS:")
```

```
print(cm)

print("NUMERO MEDIO DE SINIESTROS:")

print(n)

print("PRIMA TOTAL SIN SIMULACIÓN:")

PT<-n*cm

print(PT)

print("####################valores sin reaseguro#################################")

print(summary(v))

desvtotal<-sd(v)

print("Desviación de la prima total(sin reaseguro)")

print(desvtotal)

print("Error en el proceso de simulación")

error<- PT-mean(v)

print(error)

print("####################valores con reaseguro
(cedente)#################################")

print(summary(vced))

desvced<-sd(vced)

print("Desviación de la prima de la cedente")

print(desvced)

print("Varianza de la prima de la cedente")

print(desvced^2)

print("####################valores con reaseguro
(reaseguro)#################################")

print(summary(vrea))

desvrea<-sd(vrea)

print("Desviación de la prima de Reaseguro")

print(desvrea)

print("Varianza de la prima de Reaseguro")

print(desvrea^2)

VAR<-quantile(vrea, 0.5)
```

```
print(VAR)
VAR<-quantile(vrea, 0.525)
print(VAR)
VAR<-quantile(vrea, 0.53)
print(VAR)
VAR<-quantile(vrea, 0.55)
print(VAR)
VAR<-quantile(vrea, 0.57)
print(VAR)
VAR<-quantile(vrea, 0.59)
print(VAR)
VAR<-quantile(vrea, 0.61)
print(VAR)
VAR<-quantile(vrea, 0.63)
print(VAR)
VAR<-quantile(vrea, 0.65)
print(VAR)
VAR<-quantile(vrea, 0.67)
print(VAR)
VAR<-quantile(vrea, 0.69)
print(VAR)
VAR<-quantile(vrea, 0.75)
print(VAR)
VAR<-quantile(vrea, 0.995)
print(VAR)
esp<-mean(vrea)
print("prima reaseguro basado en el principio de equivalencia");print(esp);print("prima cedente");print(mean(vced))
print("prima reaseguro basado en el principio del valor esperado");print(esp+delta*esp)
print("prima reaseguro basado en el principio de la varianza");print(esp+delta*desvrea^2)
print("prima reaseguro basado en el principio de la desviación");print(esp+delta*desvrea)
```

```
print("prima reaseguro basado en el principio del percentil");print(quantile(vrea, 0.9))

lambda<-VAR/(sum(vrea)/ns)-1

print("Recargo de seguridad que garantiza una probabilidad de solvencia del 99,5%")

print(lambda)

print("datos referentes a la cedente")

VAR<-quantile(vced, 0.5)

print(VAR)

VAR<-quantile(vced, 0.525)

print(VAR)

VAR<-quantile(vced, 0.53)

print(VAR)

VAR<-quantile(vced, 0.55)

print(VAR)

VAR<-quantile(vced, 0.58)

print(VAR)

VAR<-quantile(vced, 0.60)

print(VAR)

VAR<-quantile(vced, 0.62)

print(VAR)

VAR<-quantile(vced, 0.65)

print(VAR)

VAR<-quantile(vced, 0.70)

print(VAR)

VAR<-quantile(vced, 0.725)

print(VAR)

VAR<-quantile(vced, 0.75)

print(VAR)

VAR<-quantile(vced, 0.995)

print(VAR)

esp2<-mean(vced)
```

```
  print("prima cedente basado en el principio de equivalencia");print(esp2)
  print("prima cedente basado en el principio del valor esperado");print(esp2+delta*esp2)
  print("prima cedente basado en el principio de la varianza");print(esp2+delta*desvced^2)
  print("prima cedente basado en el principio de la desviación");print(esp2+delta*desvced)
  print("prima cedente basado en el principio del percentil");print(quantile(vced, 0.9))
}
#Para ejecutar la función simulación se ha de escribir  "simulación()", se sombrea  y se aprieta ctr+intro
simulación()
```

Reaseguro cuota-parte

```
# SIMULA LA PRIMA DE REASEGURO CUOTA-PARTE CON N POISSON Y X EXPONENCIAL
simulación<-function(){
  c<-0
  ct<-0
  print(" A continuación se pedirán una serie de datos. Se debe pulsar dos veces intro para continuar")
  print("Introducir el coste medio")
  cm<-scan()
  print("Introducir el número medio de siniestros")
  n<-scan()
  print("Introducir el número de simulaciones que se desea realizar")
  ns<-scan()
  print("Introducir el recargo de seguridad para el criterio de valor esperado en tanto por uno")
  delta<-scan()
  sin<- rpois(ns, n)
  #print(sin)
  #espn<-mean(n)
  print("Introducir la cuota de retencion k de la cedente en tanto por uno")
  k<-scan()


  vrea<-numeric(length(ns))
```

```
v<-numeric(length(ns))
vced<-numeric(length(ns))
for (i in 1:ns){
  print(i)
  if(sin[i] == 0){
    c<-0
  } else{
    c<- rexp(sin[i],1/cm)      #en el caso de uniforme: c<- runif(sin[i])
  }
  # Calculo de la sinietralidad sin reaseguro  dada la simulación simulación  i -esima v[i]
  v[i]<-sum(c)

  # Calculo de la siniestralidad a cargo del reasegurador  dada la simulación simulación  i -esima vrea[i]
  crea<-(1-k)*c
  #    print(crea)
  vrea[i]<-sum(crea)
  #    print(vrea[i])

  # Calculo de la siniestralidad a cargo de la cedente  dada la simulación simulación  i -esima vced[i]
  vced[i]<-v[i]-vrea[i]
  #   print(vced[i])
}

print("#################### REASEGURO DE LOS K SINIETROS MAS GRANDES: POISSON -
EXPONENCIAL###################################")
print("NUMERO DE SIMULACIONES:")
print(ns)
print("CUOTA DE RETENCIÓN K DE LA CEDENTE:")
print(k)

print("COSTE MEDIO DE SINIETROS:")
```

```
print(cm)

print("NUMERO MEDIO DE SINIESTROS:")

print(n)

print("PRIMA TOTAL SIN SIMULACIÓN:")

PT<-n*cm

print(PT)

print("####################valores sin reaseguro#################################")

print(summary(v))

desvtotal<-sd(v)

print("Desviación de la prima total(sin reaseguro)")

print(desvtotal)

print("Error en el proceso de simulación")

error<- PT-mean(v)

print(error)

print("####################valores con reaseguro
(cedente)#################################")

print(summary(vced))

desvced<-sd(vced)

print("Desviación de la prima de la cedente")

print(desvced)

print("Varianza de la prima de la cedente")

print(desvced^2)

print("####################valores con reaseguro
(reaseguro)#################################")

print(summary(vrea))

desvrea<-sd(vrea)

print("Desviación de la prima de Reaseguro")

print(desvrea)

print("Varianza de la prima de Reaseguro")

print(desvrea^2)

VAR<-quantile(vrea, 0.5)
```

```
print(VAR)
VAR<-quantile(vrea, 0.525)
print(VAR)
VAR<-quantile(vrea, 0.53)
print(VAR)
VAR<-quantile(vrea, 0.55)
print(VAR)
VAR<-quantile(vrea, 0.75)
print(VAR)
VAR<-quantile(vrea, 0.995)
print(VAR)
esp<-mean(vrea)
print("prima reaseguro basado en el principio de equivalencia");print(esp);print("prima cedente");print(mean(vced))
print("prima reaseguro basado en el principio del valor esperado");print(esp+delta*esp)
print("prima reaseguro basado en el principio de la varianza");print(esp+delta*desvrea^2)
print("prima reaseguro basado en el principio de la desviación");print(esp+delta*desvrea)
print("prima reaseguro basado en el principio del percentil");print(quantile(vrea, 0.9))
lambda<-VAR/(sum(vrea)/ns)-1
print("Recargo de seguridad que garantiza una probabilidad de solvencia del 99,5%")
print(lambda)
print("datos referentes a la cedente")
VAR<-quantile(vced, 0.5)
print(VAR)
VAR<-quantile(vced, 0.525)
print(VAR)
VAR<-quantile(vced, 0.53)
print(VAR)
VAR<-quantile(vced, 0.55)
print(VAR)
VAR<-quantile(vced, 0.58)
```

```
  print(VAR)
  VAR<-quantile(vced, 0.60)
  print(VAR)
  VAR<-quantile(vced, 0.62)
  print(VAR)
  VAR<-quantile(vced, 0.65)
  print(VAR)
  VAR<-quantile(vced, 0.70)
  print(VAR)
  VAR<-quantile(vced, 0.725)
  print(VAR)
  VAR<-quantile(vced, 0.75)
  print(VAR)
  VAR<-quantile(vced, 0.995)
  print(VAR)
  esp2<-mean(vced)
  print("prima cedente basado en el principio de equivalencia");print(esp2)
  print("prima cedente basado en el principio del valor esperado");print(esp2+delta*esp2)
  print("prima cedente basado en el principio de la varianza");print(esp2+delta*desvced^2)
  print("prima cedente basado en el principio de la desviación");print(esp2+delta*desvced)
  print("prima cedente basado en el principio del percentil");print(quantile(vced, 0.9))
}
#Para ejecutar la función simulación se ha de escribir  "simulación()", se sombrea  y se aprieta ctr+intro
simulación()
```

Reaseguro de exceso de pérdida o *Excess-Loss*

```
# SIMULA LA PRIMA DE REASEGURO EXCESS-LOSS CON N POISSON Y X EXPONENCIAL
simulación<-function(){
  c<-0
  ct<-0
```

```
print(" A continuación se pedirán una serie de datos. Se debe pulsar dos veces intro para continuar")
print("Introducir el coste medio")
cm<-scan()
print("Introducir el número medio de siniestros")
n<-scan()
print("Introducir el número de simulaciones que se desea realizar")
ns<-scan()
print("Introducir el recargo de seguridad para el criterio de valor esperado en tanto por uno")
delta<-scan()
sin<- rpois(ns, n)
#print(sin)
#espn<-mean(n)
print("Introducir la prioridad de la cedente M")
M<-scan()
vrea<-numeric(length(ns))
v<-numeric(length(ns))
vced<-numeric(length(ns))
for (i in 1:ns){
 print(i)
 if(sin[i] == 0){
   c<-0
 } else{
   c<- rexp(sin[i],1/cm)      #en el caso de uniforme: c<- runif(sin[i])
 }


 # Calculo de la sinietralidad sin reaseguro  dada la simulación simulación  i -esima v[i]
 v[i]<-sum(c)



 # Calculo de la siniestralidad a cargo del reasegurador  dada la simulación simulación  i -esima vrea[i]
```

```
  crea<-c-M
  crea[crea<0]<-0
  vrea[i]<-sum(crea)
  #    print(vrea[i])

  # Calculo de la siniestralidad a cargo de la cedente  dada la simulación simulación  i -esima vced[i]
  vced[i]<-v[i]-vrea[i]
  #   print(vced[i])
 }

 print("################### REASEGURO DE LOS K SINIETROS MAS GRANDES: POISSON - EXPONENCIAL###################################")
 print("NUMERO DE SIMULACIONES:")
 print(ns)
 print("CANTIDAD MÁXIMA POR SINIESTRO QUE ASUME LA CEDENTE (M)")
 print(M)
 print("COSTE MEDIO DE SINIETROS:")
 print(cm)
 print("NUMERO MEDIO DE SINIESTROS:")
 print(n)
 print("PRIMA TOTAL SIN SIMULACIÓN:")
 PT<-n*cm
 print(PT)
 print("###################valores sin reaseguro################################")
 print(summary(v))
 desvtotal<-sd(v)
 print("Desviación de la prima total(sin reaseguro)")
 print(desvtotal)
 print("Error en el proceso de simulación")

 error<- PT-mean(v)
```

```
  print(error)

  print("###################valores con reaseguro (cedente)#################################")

  print(summary(vced))

  desvced<-sd(vced)

  print("Desviación de la prima de la cedente")

  print(desvced)

  print("Varianza de la prima de la cedente")

  print(desvced^2)

  print("###################valores con reaseguro (reaseguro)#################################")

  print(summary(vrea))

  desvrea<-sd(vrea)

  print("Desviación de la prima de Reaseguro")

  print(desvrea)

  print("Varianza de la prima de Reaseguro")

  print(desvrea^2)

  VAR<-quantile(vrea, 0.5)

  print(VAR)

  VAR<-quantile(vrea, 0.525)

  print(VAR)

  VAR<-quantile(vrea, 0.53)

  print(VAR)

  VAR<-quantile(vrea, 0.55)

  print(VAR)

  VAR<-quantile(vrea, 0.58)

  print(VAR)

  VAR<-quantile(vrea, 0.60)

  print(VAR)

  VAR<-quantile(vrea, 0.62)

  print(VAR)
```

```
VAR<-quantile(vrea, 0.65)
print(VAR)
VAR<-quantile(vrea, 0.75)
print(VAR)
VAR<-quantile(vrea, 0.995)
print(VAR)
esp<-mean(vrea)
print("prima reaseguro basado en el principio de equivalencia");print(esp);print("prima cedente");print(mean(vced))
print("prima reaseguro basado en el principio del valor esperado");print(esp+delta*esp)
print("prima reaseguro basado en el principio de la varianza");print(esp+delta*desvrea^2)
print("prima reaseguro basado en el principio de la desviación");print(esp+delta*desvrea)
print("prima reaseguro basado en el principio del percentil");print(quantile(vrea, 0.9))
lambda<-VAR/(sum(vrea)/ns)-1
print("Recargo de seguridad que garantiza una probabilidad de solvencia del 99,5%")
print(lambda)
print("datos referentes a la cedente")
VAR<-quantile(vced, 0.5)
print(VAR)
VAR<-quantile(vced, 0.525)
print(VAR)
VAR<-quantile(vced, 0.53)
print(VAR)
VAR<-quantile(vced, 0.55)
print(VAR)
VAR<-quantile(vced, 0.58)
print(VAR)
VAR<-quantile(vced, 0.60)
print(VAR)
VAR<-quantile(vced, 0.62)
print(VAR)
```

```
  VAR<-quantile(vced, 0.65)
  print(VAR)
  VAR<-quantile(vced, 0.70)
  print(VAR)
  VAR<-quantile(vced, 0.725)
  print(VAR)
  VAR<-quantile(vced, 0.75)
  print(VAR)
  VAR<-quantile(vced, 0.995)
  print(VAR)
  esp2<-mean(vced)
  print("prima cedente basado en el principio de equivalencia");print(esp2)
  print("prima cedente basado en el principio del valor esperado");print(esp2+delta*esp2)
  print("prima cedente basado en el principio de la varianza");print(esp2+delta*desvced^2)
  print("prima cedente basado en el principio de la desviación");print(esp2+delta*desvced)
  print("prima cedente basado en el principio del percentil");print(quantile(vced, 0.9))
}
#Para ejecutar la función simulación se ha de escribir  "simulación()", se sombrea  y se aprieta ctr+intro
simulación()
```

Reaseguro de exceso de siniestralidad o *Stop-Loss*

```
# SIMULA LA PRIMA DE REASEGURO STOP-LOSS CON N POISSON Y X EXPONENCIAL
simulación<-function(){
  c<-0
  ct<-0
  print(" A continuación se pedirán una serie de datos. Se debe pulsar dos veces intro para continuar")
  print("Introducir el coste medio")
  cm<-scan()
  print("Introducir el número medio de siniestros")
  n<-scan()
```

```
print("Introducir el número de simulaciones que se desea realizar")
ns<-scan()
print("Introducir el recargo de seguridad para el criterio de valor esperado en tanto por uno")
delta<-scan()
sin<- rpois(ns, n)
#print(sin)
#espn<-mean(n)
print("Introducir la prioridad de la cedente M")
M<-scan()
vrea<-numeric(length(ns))
v<-numeric(length(ns))
vced<-numeric(length(ns))
for (i in 1:ns){
 print(i)
 if(sin[i] == 0){
   c<-0
  } else{
   c<- rexp(sin[i],1/cm)      #en el caso de uniforme: c<- runif(sin[i])
  }

 # Calculo de la sinietralidad sin reaseguro  dada la simulación simulación  i -esima v[i]
 v[i]<-sum(c)

 # Calculo de la siniestralidad a cargo del reasegurador  dada la simulación simulación  i -esima vrea[i]
 crea<-v[i]-M
 crea[crea<0]<-0
 vrea[i]<-sum(crea)

 #    print(vrea[i])
```

```
   # Calculo de la siniestralidad a cargo de la cedente  dada la simulación simulación  i -esima vced[i]

   vced[i]<-v[i]-vrea[i]

   #   print(vced[i])

  }


  print("#################### REASEGURO STOP LOSS: POISSON -
EXPONENCIAL###################################")

  print("NUMERO DE SIMULACIONES:")

  print(ns)

  print("SINIESTRALIDAD QUE ASUME LA CEDENTE (M)")

  print(M)

  print("COSTE MEDIO DE SINIETROS:")

  print(cm)

  print("NUMERO MEDIO DE SINIESTROS:")

  print(n)

  print("PRIMA TOTAL SIN SIMULACIÓN:")

  PT<-n*cm

  print(PT)

  print("####################valores sin reaseguro#################################")

  print(summary(v))

  desvtotal<-sd(v)

  print("Desviación de la prima total(sin reaseguro)")

  print(desvtotal)

  print("Error en el proceso de simulación")

  error<- PT-mean(v)

  print(error)

  print("####################valores con reaseguro
(cedente)#################################")

  print(summary(vced))

  desvced<-sd(vced)

  print("Desviación de la prima de la cedente")
```

```
print(desvced)
print("Varianza de la prima de la cedente")
print(desvced^2)
print("####################valores con reaseguro
(reaseguro)##################################")
print(summary(vrea))
desvrea<-sd(vrea)
print("Desviación de la prima de Reaseguro")
print(desvrea)
print("Varianza de la prima de Reaseguro")
print(desvrea^2)
VAR<-quantile(vrea, 0.5)
print(VAR)
VAR<-quantile(vrea, 0.525)
print(VAR)
VAR<-quantile(vrea, 0.53)
print(VAR)
VAR<-quantile(vrea, 0.55)
print(VAR)
VAR<-quantile(vrea, 0.58)
print(VAR)
VAR<-quantile(vrea, 0.60)
print(VAR)
VAR<-quantile(vrea, 0.62)
print(VAR)
VAR<-quantile(vrea, 0.65)
print(VAR)
VAR<-quantile(vrea, 0.70)
print(VAR)
VAR<-quantile(vrea, 0.725)
print(VAR)
```

```
VAR<-quantile(vrea, 0.75)

print(VAR)

VAR<-quantile(vrea, 0.995)

print(VAR)

esp<-mean(vrea)

print("prima reaseguro basado en el principio de equivalencia");print(esp);print("prima cedente");print(mean(vced))

print("prima reaseguro basado en el principio del valor esperado");print(esp+delta*esp)

print("prima reaseguro basado en el principio de la varianza");print(esp+delta*desvrea^2)

print("prima reaseguro basado en el principio de la desviación");print(esp+delta*desvrea)

print("prima reaseguro basado en el principio del percentil");print(quantile(vrea, 0.9))

lambda<-VAR/(sum(vrea)/ns)-1

print("Recargo de seguridad que garantiza una probabilidad de solvencia del 99,5%")

print(lambda)

print("datos referentes a la cedente")

VAR<-quantile(vced, 0.42)

print(VAR)

VAR<-quantile(vced, 0.44)

print(VAR)

VAR<-quantile(vced, 0.46)

print(VAR)

VAR<-quantile(vced, 0.48)

print(VAR)

VAR<-quantile(vced, 0.5)

print(VAR)

VAR<-quantile(vced, 0.525)

print(VAR)

VAR<-quantile(vced, 0.53)

print(VAR)

VAR<-quantile(vced, 0.55)

print(VAR)
```

```
  VAR<-quantile(vced, 0.58)
  print(VAR)
  VAR<-quantile(vced, 0.60)
  print(VAR)
  VAR<-quantile(vced, 0.62)
  print(VAR)
  VAR<-quantile(vced, 0.65)
  print(VAR)
  VAR<-quantile(vced, 0.70)
  print(VAR)
  VAR<-quantile(vced, 0.725)
  print(VAR)
  VAR<-quantile(vced, 0.75)
  print(VAR)
  VAR<-quantile(vced, 0.995)
  print(VAR)
  esp2<-mean(vced)
  print("prima cedente basado en el principio de equivalencia");print(esp2)
  print("prima cedente basado en el principio del valor esperado");print(esp2+delta*esp2)
  print("prima cedente basado en el principio de la varianza");print(esp2+delta*desvced^2)
  print("prima cedente basado en el principio de la desviación");print(esp2+delta*desvced)
  print("prima cedente basado en el principio del percentil");print(quantile(vced, 0.9))
}
#Para ejecutar la función simulación se ha de escribir  "simulación()", se sombrea  y se aprieta ctr+intro
simulación()
```