Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

TEOREMA DE GIRSANOV I APLICACIÓ AL MODEL DE BLACK-SCHOLES

Autora: Laura Ovejero Torres

Director: Dr. Josep Vives i Santa Eulàlia
Realitzat a: Departament de Matemàtiques
i Informàtica

Barcelona, 13 de juny de 2022

Abstract

In this work we will explain stochastic integration for brownian motion and martingales, from basic but necessary concepts from stochastic analysis to how it is applied to Girsanov Theorem, which is the main theorem in this project. Moreover, we will briefly develop how stochastic analysis is applied to Black-Scholes financial model, both developing necessary conditions and the mathematic equation for european options.

Resum

Aquest treball explica la integració estocàstica per a moviment brownià i martingales, des de la definició dels conceptes més bàsics necessaris de l'anàlisi estocàstica fins a l'aplicació de la integració estocàstica en l'anomenat teorema de Girsanov, que és el teorema essencial d'aquest projecte. Finalment, es desenvolupa breument l'aplicació de l'anàlisi estocàstica al model financer de Black-Scholes, desenvolupant les condicions necessàries i l'equació matemàtica per a opcions europees.

2020 Mathematics Subject Classification. 60H05, 62P05, 91G15

Agraïments

Primerament vull agrair al meu tutor d'aquest treball, en Josep Vives, la seva dedicació i guia durant la realització d'aquest projecte.

Seguidament, vull agrair als meus pares, Joan i Nuria, per haver-me donat l'oportunitat d'estudiar allò que sempre m'ha apassionat, i per encoratjar-me, recolzar-me i animar-me sempre, però especialment durant aquesta etapa. També a la meva germana Alícia, per ser el meu suport incondicional. Gràcies, sou tot allò que podria desitjar.

També vull agrair a totes aquelles persones que han format part de la meva vida durant els últims cinc anys, especialment als amics de matemàtiques i de matemàtiques i física. Heu fet que aquesta experiència sigui increïble i inoblidable.

Finalment, vull fer una breu menció a la persona que sempre m'ha inspirat i recordat la importància d'aprendre, la meva àvia Emilia. Gracias por apoyarme y enseñarme el valor del saber. El esfuerzo ha merecido la pena.

Índex

1 Introducció

Els humans estem envoltats de fenòmens aleatoris; des de tan simples com quina de les dues cares de la torrada toca el terra quan cau, fins de tan complexes que esdevenen models financers, polítics o socials. Aquests darrers poden descriure's matemàticament mitjançant processos estocàstics que, de la mateixa forma que els fenòmens aleatoris a la vida, poden escriure's de manera trivial o extremadament farragosa.

A la primera part del treball ens centrarem majoritàriament en explicar de forma introductòria l'anàlisi de dos processos estocàstics continus particulars que compleixen certes condicions, anomenats *moviment brownià* i *martingales*. L'objectiu, però, és aconseguir enunciar i demostrar un teorema particular que és d'alta rellevància: el *teorema de Girsanov*. Aquest s'aplica en diferents situacions per tal de simplificar els problemes matemàtics que involucren certs processos estocàstics complexos. En el camí cap a aquest teorema veurem propietats elementals del moviment brownià i de les martingales, les integrals que poden definir-se amb aquestes i la *fórmula d'Itô*, que serà l'equivalent estocàstic de la regla de la cadena, entre d'altres.

Tots aquests conceptes, així com la majoria de teoremes i demostracions d'aquesta primera part, poden trobar-se parcial o íntegrament en els llibres [4], [8] i [9] de la bibliografia, ja que han estat les guies d'aquest treball de tipus bibliogràfic.

Finalment, la segona part del projecte es basarà en descriure un model financer clau en el mercat financer actual que fa ús del teorema de Girsanov: el *model de Black-Scholes*. Un dels autors, Myron Scholes, va rebre el premi Nobel d'economia l'any 1997 per aquest model, que tot i que originàriament no utilitzava el teorema de Girsanov en les demostracions, actualment és una manera comuna de presentar-lo. Per contra, Fischer Black va morir l'any 1995, abans de poder ser premiat.

Primerament posarem breument en context diferents conceptes financers essencials per a seguir el fil del treball, en particular els termes *actius* i *opcions financeres*. Seguidament mostrarem les diferents condicions que es requereixen per enunciar el model, que seran demostrades mitjançant teoremes obtinguts en la primera part del projecte, i finalment trobarem l'equació corresponent, que prediu el preu d'una opció financera europea.

Aquesta segona part s'ha extret a partir de referències de caire divers, ja que he optat per sintetitzar i no explicar profundament el model, però sí procurar enunciar i demostrar els elements i teoremes matemàtics necessaris per explicar amb el màxim rigor les condicions del model. Així doncs, els aspectes financers els podem trobar a les referències [2],[6],[7] i [10], mentre que les demostracions més tècniques de les condicions poden trobar-se en els altres llibres [1], [3] i [5].

1.1 Motivació

Durant la meva etapa com a estudiant de matemàtiques a la Universitat de Barcelona, tot i que en general les diferents branques estudiades m'han interessat i agradat, han sigut la probabilitat i l'estadística les que m'han captat especialment l'atenció. Així doncs, en tenir l'oportunitat de cursar un any acadèmic a la universitat de Warwick, vaig decidir provar a fer diferents assignatures optatives relacionades, entre les quals vaig cursar una assignatura de introducció a l'anàlisi estocàstica. A través d'aquesta vaig descobrir tot un nou curs anàlisi que volia entendre de forma més completa, i d'aquí va sorgir la idea d'encarar el meu treball final de grau cap a aquesta branca.

En particular, vaig veure especialment interessant que molts dels resultats d'aquestes matemàtiques s'apliquessin al món de les finances, que en el meu cas és un futur laboral probable i, per tant, a través del meu tutor, vam aconseguir arribar a un tema que s'ajustés als requisits que personalment tenia per al treball que engloba aquesta etapa com a estudiant de matemàtiques.

2 Procés estocàstic

Comencem donant unes definicions que seran essencials al llarg d'aquest projecte. Els processos estocàstics són els elements que manipularem i dels quals traurem informació rellevant en futures seccions. Aquests defineixen fenòmens aleatoris que evolucionen en el temps, expressats matemàticament com a variables aleatòries.

Definició 2.1. *Sigui* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espai de probabilitat. Una variable aleatòria és una funció real* X *definida en* Ω *tal que per cada subconjunt de Borel* $\mathcal{B}$ *de* $\mathbb{R}$ *el subconjunt* $\{X \in B\} = \{w \in \Omega \mid X(w) \in \mathcal{B}\}$ *de* Ω *es troba a la* σ*-àlgebra* $\mathcal{F}$.

Definició 2.2. *Sigui* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espai de probabilitat. Definim procés estocàstic com una funció mesurable* $X(t, w)$ *definida en l'espai producte* $[0, \infty) \times \Omega$*. En particular:*

a) fixada t*,* $X(t, \cdot)$ *és una variable aleatòria.*

b) fixada w*,* $X(\cdot, w)$ *és una funció mesurable anomenada trajectòria (conjunt de realitzacions temporals amb un índex aleatori).*

Per tal de simplificar la notació considerarem equivalents $X(t, w) \equiv X(t) \equiv X_t$.

En ser un model matemàtic que caracteritza fenòmens aleatoris, en cada realització d'un procés estocàstic determinat es crearà una trajectòria diferent. Aquestes trajectòries poden categoritzar-se depenent de si els possibles valors de les variables aleatòries X_t són de caràcter discret o continu. A més a més, també la variable temporal pot ser del tipus discret o continu, depenent de si les realitzacions aleatòries poden succeir en qualsevol moment temporal o només en determinats instants. Si tant el tipus de variable aleatòria X_t com la variable temporal són discrets, aleshores aquest procés estocàstic l'anomenarem cadena. Per altra banda, si X_t té trajectòries no contínues (hi ha discontinuïtats) però el temps és continu, aleshores s'anomena un procés de salts. Finalment, si tant les trajectòries com el temps són de caràcter continu, aleshores el procés estocàstic s'anomena procés continu.

Fet que la motivació d'aquest treball d'aprofundir en l'anàlisi estocàstica és enunciar i demostrar el teorema de Girsanov per posteriorment veure l'aplicació en el model financer de Black-Scholes, només ens serà necessari treballar amb processos estocàstics continus.

2.1 Moviment brownià

Seguidament definim un tipus de procés estocàstic que serà altament rellevant en futures seccions, anomenat moviment brownià. Aquest procés estocàstic s'iniciarà a 0, seguirà una distribució normal, serà continu quasi segurament i els seus increments seran independents. Comencem proporcionant la definició per a un moviment brownià en una dimensió.

Definició 2.3. *Un moviment brownià estàndard és un procés estocàstic $B(t, w)$ que satisfà les condicions següents:*

1. $P(w; B(0, w) = 0) = 1$.

2. Per cada $0 \leq s < t$, la variable aleatòria $B(t) - B(s)$ segueix una distribució normal amb esperança 0 i variància $t - s$, és a dir,

$$P(a \leq B(t) - B(s) \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} dx.$$

3. Per a qualsevol $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, aleshores les variables aleatòries $B(t_1)$, $B(t_2) - B(t_1), \dots, B(t_n) - B(t_{n-1})$ són independents, és a dir, $B(t, w)$ té increments independents.

4. Les trajectòries de $B(t, w)$ són funcions contínues quasi segurament (q.s.), és a dir,

$$P(w\ ;\ B(\cdot, w) \text{ és contínua}) = 1.$$

Simplificarem la notació mitjançant $B(t, w) \equiv B(t) \equiv B_t = \{B_t,\ \mathcal{F}_t,\ 0 \leq t < \infty\}$. En cas que el moviment brownià comenci en un valor x diferent de 0, aleshores aquest procés l'escriurem com $x + B(t)$, ja que en el nostre treball el moviment brownià serà equivalent al moviment brownià estàndard. A més a més, notem que la propietat 3 de la definició equival a dir que, per qualsevol $0 \leq s < t$, $B(t) - B(s)$ és independent de $\mathcal{F}_s$.
A vegades considerarem el temps en un compacte $[0, T]$ en comptes de prendre qualsevol valor real positiu. Aleshores el brownià s'escriurà $B(t) = \{B_t,\ \mathcal{F}_t,\ 0 \leq t < T\}$.

El moviment brownià multidimensional és un vector de dimensió n de moviments brownians independents entre ells, $B_t = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^n)^\top$ tal que B_t segueix una distribució gaussiana multidimensional.

Una de les propietats que utilitzarem del moviment brownià és la invariància en la translació, on veiem que $B(t) - B(s)$ també és un moviment brownià, enunciat i demostrat a continuació.

Proposició 2.4. *Sigui B(t) un moviment brownià. Per un temps fixat t_0, el procés estocàstic $W(t) = B(t + t_0) - B(t_0)$ també ho és.*

Demostració. Les condicions 1 i 4 són trivials de veure:

$P(w; W(0, w) = 0) = P(w; B(t_0) - B(t_0) = 0) = 1$.

$P(w; W(\cdot, w)$ *és contínua*$) = 1$ ja que és la suma de funcions contínues.

Veiem la segona condició. Per qualsevol instant de temps $s < t$,

$$W(t) - W(s) = B(t + t_0) - B(s + t_0),$$

que per la segona condició de la definició 2.3, té una distribució normal amb esperança 0 i variància $t + t_0 - s - t_0 = t - s$. Finalment, per veure la tercera condició, considerem $t_0 > 0$. Si tenim $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ tal que $B(t_k) - B(t_{k-1})$, per $k = 1, \dots, n$, són variables independents, aleshores amb $0 < t_0 \leq t_1 + t_0 < t_2 + t_0 < \dots < t_n + t_0$ les variables $B(t_k + t_0) - B(t_{k-1} + t_0) = W(t_k) - W(t_{k-1})$, per $k = 1, \dots, n$, també ho són. $\square$

3 Esperança condicionada

Aquesta secció defineix l'esperança condicionada i proporciona diferents propietats que utilitzarem més endavant en diferents demostracions.

Definició 3.1. *Sigui* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espai de probabilitat. L'espai de Banach* $L^p(\Omega, \mathcal{F})$ $1 \leq p < \infty$ *és l'espai de totes les variables aleatòries* X *amb esperança* $\mathbb{E}(|X|^p) < \infty$ *i amb norma* $||X||_p = (\mathbb{E}(|X|^p))^{\frac{1}{p}}$.

En particular, en aquesta secció les variables aleatòries formaran part de $L^1(\Omega, \mathcal{F})$ amb la norma corresponent $||X||_1 = \mathbb{E}(|X|)$. En la secció d'integrabilitat, en canvi, utilitzarem com a espai l'anomenat espai de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{F})$. De fet, haurem de tenir en compte que $L^2(\Omega, \mathcal{F}) \subset L^1(\Omega, \mathcal{F})$.

Definició 3.2. *Sigui* $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F})$. *Sigui* $\mathcal{G}$ *una* σ*-àlgebra tal que* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. *L'esperança condicionada de* X *donat* $\mathcal{G}$ *es defineix com l'única variable aleatòria* Y *(q.s.) que satisfà les següents condicions:*

a) Y *és* $\mathcal{G}$*-mesurable.*

b) $\int_A X dP = \int_A Y dP$ *per tot* $A \in \mathcal{G}$.

Denotem aquesta esperança condicionada com $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$. Podem trobar la demostració d'existència i unicitat al llibre [9] de la bibliografia.

Observació 3.3. Veiem que la segona propietat de la definició d'esperança condicionada implica que, si X és P-integrable, aleshores l'esperança condicionada $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = Y$ respecte a $\mathcal{G}$ també és P-integrable i ambdues tenen el mateix resultat per a $A \in \mathcal{G}$.

Finalment, enunciem algunes propietats.

Proposició 3.4. *Sigui* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espai de probabilitat. Sigui* X *una variable aleatòria a* $L^1(\Omega, \mathcal{F})$ *i sigui* $\mathcal{G}$ *una sub-*σ*-àlgebra de* $\mathcal{F}$.

1. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) = \mathbb{E}(X)$.
2. *Si* X *és* $\mathcal{G}$*-mesurable, aleshores* $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = X$.
3. *Si* X *és independent de* $\mathcal{G}$*, aleshores* $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$.
4. *Si* Y *és* $\mathcal{G}$*-mesurable i* $\mathbb{E}(|XY|) < \infty$*, aleshores* $\mathbb{E}(|XY||\mathcal{G}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$.
5. $\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{G}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ *per tot* $a, b \in \mathbb{R}$ *i* $X, Y \in L^1(\Omega)$.
6. *Si* $\mathcal{H}$ *és una sub-*σ*-àlgebra de* $\mathcal{G}$*, aleshores* $\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{H})$.
7. *(Lema de Fatou) Sigui* $\{X_n\}$*, amb* $X_n \in L^1(\Omega)$ *tal que* $X_n > 0$ $\forall n \geq 1$*, una successió de variables aleatòries. Aleshores*

$$\mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} \inf X_n|\mathcal{G}] \leq \lim_{n\to\infty} \inf \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}].$$

8. *(Desigualtat de Jensen). Sigui* $X \in L^1(\Omega)$ *i suposem* ϕ *una funció convexa a* $\mathbb{R}$ *tal que* $\phi(X) \in L^1(\Omega)$. *Alehsores,*

$$\phi(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) \leq \mathbb{E}(\phi(X)|\mathcal{G}).$$

Les demostracions d'aquestes propietats poden trobar-se a [9].

4 Martingales

Les martingales són un tipus de processos estocàstics que seran molt útils en les properes seccions. Com veurem en la secció d'integració estocàstica, les martingales podran escriure's com una integral d'Itô, que serà integrable.

Primerament afegim unes definicions prèvies.

Definició 4.1. *Una filtració, $\{F_t\}$ a $[0,T]$ és una família de σ-àlgebres $\{\mathcal{F}_t | t \in [0,T]\}$. Si per cada t, la variable aleatòria considerada X_t del procés estocàstic $X(t,w)$ és $\mathcal{F}_t$-mesurable, aleshores diem que el procés es troba adaptat a la filtració.*

Seguidament definim el concepte de martingala respecte una filtració.

Definició 4.2. *Sigui X_t un procés estocàstic adaptat a una filtració $\{\mathcal{F}_t\}$ i per a tot $t \in [0,T]$ $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$. X_t és una martingala respecte $\{\mathcal{F}_t\}$ si per qualsevol $s \leq t, amb\ s,t \in [0,T]$*

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s \quad \textit{quasi segurament.}$$

Considerarem que la filtració està definida com $\{\mathcal{F}_t\} = \sigma\{X_s; s \leq t\}$ en cas que aquesta no s'esmenti d'altra manera. A més a més, trobem la definició de *submartingala* i *supermartingala* considerant la definició anterior amb $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s$ i $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \leq X_s$, respectivament.

Per acabar aquest apartat, veiem quina és la relació entre el moviment brownià i el concepte de martingala.

Proposició 4.3. *El moviment brownià $B(t,w)$ és una martingala.*

Demostració. Considerem la filtració $\{\mathcal{F}_t\} = \sigma\{B(s); s \leq t\}$. Aleshores, per cada $s \leq t$, aplicant la propietat 5 de la proposició 3.4,

$$\mathbb{E}(B(t)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B(t) - B(s) + B(s)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B(t) - B(s)|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(B(s)|\mathcal{F}_s).$$

Com que $B(s)$ és $\mathcal{F}_s$-mesurable, per la propietat 2 de la proposició 3.4

$$\mathbb{E}(B(s)|\mathcal{F}_s) = B(s).$$

Per altra banda, per la propietat 3 de la definició del moviment brownià (2.3), $B(t)-B(s)$ és independent de $\mathcal{F}_s$ i, per tant, per la propietat 3 de la proposició 3.4,

$$\mathbb{E}(B(t) - B(s)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B(t) - B(s)) = 0,$$

ja que $B(t) - B(s)$ segueix una distribució normal amb esperança zero (propietat 2 de la definició 2.3).

Per tant, queda demostrat que $\mathbb{E}(B(t)|\mathcal{F}_s) = B(s)$, i per tant és una martingala.

□

4.1 Instant d'aturada

Una propietat interessant és saber si pot determinar-se el moment en què succeeix per primera vegada un esdeveniment i, en tal cas, quin és aquest moment. Aquesta propietat es mesurarà a través dels instants d'aturada. En avaluar el fenomen en l'instant d'aturada, aquest haurà de contenir la informació relacionada amb l'esdeveniment buscat.

Seguidament definim formalment l'instant d'aturada. Sigui T una variable aleatòria $\mathcal{F}$-mesurable amb valors $T \in [0, \infty]$, anomenada temps aleatori.

Definició 4.4. *Sigui $(\Omega, \mathcal{F})$ un espai mesurable. Un temps aleatori T és un instant d'aturada respecte de la filtració $\{\mathcal{F}_t\}$ si $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ per tot $t \geq 0$.*

Aquest concepte serà altament rellevant en les integracions estocàstiques a causa de la falta de integrabilitat dels processos estocàstics $X(t)$ que només satisfan $\int_a^b |X(t)|^2 dt < \infty$. Cal també mencionar que, de cara a la construcció de les martingales locals, denotarem $t \wedge T := \min\{t, T\}$. A continuació veiem un exemple d'instant d'aturada que utilitzarem posteriorment.

Exemple 4.5. Sigui $T_n = \sup\{\tau; \int_a^\tau |f(s,w)|^2 ds \leq n\}$. Per a cada $t \in (a, b]$,

$$\begin{aligned}\{w; T_n(w) < t\} &= \big\{w; \sup\{\tau; \int_a^\tau |f(s,w)|^2 ds \leq n\} < t\big\} \\ &= \bigcap_{a<\tau<t} \{w; \int_a^\tau |f(s,w)|^2 ds \leq n\} = \Big(\bigcup_{a<\tau<t} \{w; \int_a^\tau |f(s,w)|^2 ds > n\}\Big)^c \in \mathcal{F}_t\end{aligned}$$

per ser una σ-àlgebra. Per tant, és un instant d'aturada.

4.2 Descomposició de Doob Meyer

Algunes submartingales poden descomposar-se com la suma d'una martingala i un procés creixent. Tal i com veurem a continuació, les submartingales X que sota certes condicions són uniformement integrables poden descomposar-se. A més a més, existirà un procés integrable creixent Y tal que $X - Y$ serà una martingala. Per a processos continus, es té la següent definició.

Definició 4.6. *Sigui $Y = \{Y_t; 0 \leq t < \infty\}$ un procés adaptat a la filtració $\{\mathcal{F}_t\}$. Aleshores diem que és creixent si*

(a) el procés s'inicia a 0, és a dir, $Y(0, w) = 0$.

(b) la funció $t \to Y(t, w)$ és no decreixent i contínua per la dreta.

(c) l'esperança de Y_t és finita per tot $t \geq 0$.

A més a més, direm que és integrable si l'esperança del procés a $Y_\infty = \lim_{x\to\infty} Y_t$ és finita ($\mathbb{E}(Y_\infty) < \infty$).

Seguidament definim la classe dels instants d'aturada T d'una filtració $\{\mathcal{F}_t\}$ tal que compleixen $P(T \leq a) = 1$ per un cert nombre real $a > 0$ com $\mathcal{T}_a$. Si un procés continu per la dreta compleix que la família $\{X_T\}_{T\in\mathcal{T}_a}$ és uniformement integrable, aleshores aquest procés és de la classe D_a. També cal tenir en compte que dos processos són indistingibles si la probabilitat que siguin iguals per a cada valor temporal és 1, és a dir:

$$P(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 1.$$

Teorema 4.7. ***Descomposició de Doob Meyer***. *Sigui $X(t) = \{X_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ una submartingala contínua per la dreta. Si aquesta és de classe D_a, aleshores és la suma d'una martingala contínua per la dreta $M(t) = \{M_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ i d'un procés estocàstic creixent $A = \{A_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$, és a dir, $X_t = M_t + A_t$. Aquesta descomposició és única llevat de indistingibilitat.*

La demostració d'aquest teorema la podem trobar en el llibre [8] de la bibliografia.

Observació 4.8. En la descomposició d'una submartingala com $X_t = M_t + A_t$, veiem que $X_t - A_t$ és una martingala.

Anomenarem compensador al procés creixent que es troba en la descomposició. En el cas d'una martingala $X(t)$, la submartingala $X(t)^2$ -demostrarem que ho és en la següent secció- es descomposarà com la suma d'una martingala $M(t)$ i un procés creixent que denotarem explícitament com $A(t) = \langle X\rangle_t$.

Exemple 4.9. En el cas d'un moviment brownià $B(t)$, el compensador de $B(t)^2$ és $\langle B(t)\rangle = t$, ja que seguidament veurem que $M_t = B(t)^2 - t$ és una martingala i $A(t) = t$ és un procés creixent. Juntament formen la descomposició Doob Meyer de la submartingala $B(t)^2 = (B(t)^2 - t) + t$. Veiem que M_t és una martingala.

$$\mathbb{E}(B(t)^2 - t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B(t)^2|\mathcal{F}_s) - t.$$

Per altra banda, per la definició de moviment brownià 2.3, $B(t) - B(s)$ és independent de la filtració $\mathcal{F}_s$ i segueix una distribució gaussiana amb esperança 0. Aplicant la propietat 3 de la proposició 3.4, trobem que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(B(t)^2|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}((B(t) - B(s) + B(s))^2|\mathcal{F}_s)\\
&= \mathbb{E}((B(t) - B(s))^2|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(B(s)^2|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(2(B(t) - B(s))B(s)|\mathcal{F}_s)\\
&= (t - s) + B(s)^2 + 0
\end{aligned}$$

i, per tant, $\mathbb{E}(B(t)^2 - t|\mathcal{F}_s) = B(s)^2 - s$, demostrant que és una martingala.

5 Integrals estocàstiques

En aquesta secció ens disposem a definir la integral respecte un procés estocàstic. Aquest capítol segueix la mateixa idea de construcció de les diferents integrals que les dels capítols 2, 4 i 5 del llibre [9] de la bibliografia.

En primer lloc estudiarem l'anomenada integral de Wiener, del tipus $\int_a^b f(t)dB(t,w)$, formada per una funció que només depèn del temps. A continuació, canviarem la funció determinista per un procés estocàstic adaptat que compleix certes restriccions, i trobarem l'anomenada integral d'Itô, i finalment definirem un cas encara més general. Finalment, donarem la idea de la construcció de la integral respecte una martingala.
Les martingales utilitzades seran de quadrat integrable, propietat definida seguidament.

Definició 5.1. *Sigui $X = \{X_t, \mathcal{F}_t, 0 \leq t < \infty\}$ una martingala contínua. Aleshores X és de quadrat integrable si $\mathbb{E}(X_t^2) < \infty$ per a cada $t \geq 0$.*

A més a més, X^2 és una submartingala. És un exemple de la següent proposició amb funció $f(x) = x^2$.

Proposició 5.2. *Sigui $X(t,w)$ una martingala adaptada a la filtració $\{\mathcal{F}_t\}$. Sigui f una funció convexa tal que $\mathbb{E}(f(X_t)) < \infty$ per a tot $t \geq 0$. Aleshores $f(X_t)$ és una submartingala.*

Demostració. A partir de la desigualtat de Jensen (propietat 8 de la proposició 3.4) tenim, per $s < t$,

$$\mathbb{E}[f(X_t)|\mathcal{F}_s] \geq f(\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s]) \geq f(X_s)$$

i per tant es demostra que és una submartingala. □

5.1 Integral de Wiener

Definim la integral del tipus $\int_a^b f(t)dB(t,w)$. Primerament suposarem que la funció f està definida a trossos, amb $a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b$, és a dir,

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{(t_{i-1}, t_i]}.$$

Aleshores definim $I(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i[B(t_i) - B(t_{i-1})]$, que és una variable aleatòria per la proposició 2.4. A més a més, I compleix la propietat de linealitat: per qualsevol $a, b \in \mathbb{R}$ i funcions definides a trossos f, g, $I(af + bg) = aI(f) + bI(g)$:

Demostració.

$$\begin{aligned} I(af + bg) &= \sum_{i=1}^{n} (a \cdot a_i + b \cdot b_i)[B(t_i) - B(t_{i-1})] \\ &= a \sum_{i=1}^{n} a_i[B(t_i) - B(t_{i-1})] + b \sum_{i=1}^{n} b_i[B(t_i) - B(t_{i-1})] = aI(f) + bI(g). \end{aligned}$$

□

En particular, $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F})$, espai de Hilbert amb el producte intern definit com $\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}(XY)$. Escollint una successió de funcions definides a trossos $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ que convergeixi a f en $L^2([a,b])$, acabarem defininint la integral com el límit de $I(f_n)$.

Lema 5.3. *Sigui f una funció definida a trossos. Aleshores la variable aleatòria $I(f)$ segueix una distribució gaussiana amb esperança 0 i variància $\mathbb{E}(I(f)^2) = \int_a^b f(t)^2 dt$.*

Demostració. Sigui $I(f) = \sum_{i=1}^n a_i[B(t_i) - B(t_{i-1})]$, on $B(t,w) - B(s,w)$ és un moviment brownià (per la proposició 2.4) que segueix una distribució gaussiana. La suma de variables gaussianes independents entre elles - per tenir el brownià increments independents- també forma una variable gaussiana d'esperança 0.

Per trobar la variància:

$$\mathbb{E}(I(f)^2) = \mathbb{E}\big[(\sum_{i=1}^n a_i(B(t_i) - B(t_{i-1})))^2\big] = \mathbb{E}\big[\sum_{i,j=1}^n a_i a_j(B(t_i) - B(t_{i-1}))(B(t_j) - B(t_{j-1}))\big].$$

A través de la definició del moviment brownià trobem que, per $i = j$, la variància és

$$\mathbb{E}([B(t_i) - B(t_{i-1})]^2) = t_i - t_{i-1},$$

i per $i \neq j$, aleshores per la independència d'increments trobem que

$$\mathbb{E}([B(t_i) - B(t_{i-1})][B(t_j) - B(t_{j-1})]) = 0.$$

Per tant,

$$\mathbb{E}(I(f)^2) = \sum_{i=1}^n a_i^2(t_i - t_{i-1}) = \int_a^b f(t)^2 dt$$

per la definició d'integral de Riemann. □

A través del lema que acabem de demostrar (5.3) veiem que la successió $\{I(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ és de Cauchy.

$$\mathbb{E}[|I(f_n - f_m)|^2] = \int_a^b (f_n(t) - f_m(t))^2 dt \to 0$$

quan $n \to \infty, m \to \infty$. Per tant, la successió $I(f_n)$ convergeix en $L^2(\Omega)$. Definim $I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n)$.

Definició 5.4. *Sigui $f \in L^2[a,b]$. Definim $I(f)$ com la integral de Wiener de f. Aquesta tindrà la notació:*

$$I(f)(w) = \Big(\int_a^b f(t)dB(t)\Big)(w) \equiv \int_a^b f(t)dB(t,w), \textit{ per tot } w \in \Omega \textit{ quasi segurament.}$$

Només falta veure que $I(f)$ està ben definida, és a dir, que el límit de la successió és independent de la successió triada. Com que aquesta integral és un cas particular de la integral d'Itô, demostrant en la propera secció que està ben definida implicarà que també ho estarà la integral de Wiener.

Proposició 5.5. *Per cada $f \in L^2[a,b]$, la respectiva integral de Wiener és una variable aleatòria que segueix una distribució gaussiana amb esperança 0 i variància $||f||^2 = \int_a^b f(t)^2 dt$.*

Proposició 5.6. *Sigui $f \in L^2[a,b]$. Aleshores el procés estocàstic $M_t = \int_a^b f(s)dB(s)$, $a \leq t \leq b$, és una martingala respecte a la filtració $\{\mathcal{F}_t\} = \sigma\{B(s); s \leq t\}$.*

Veurem el cas general d'aquest lema en el lema 5.12.

5.2 Integral d'Itô

Definim la integral del tipus $\int_a^b X(t,w)dB(t,w)$, on l'integrand $X(t,w)$ és un procés estocàstic que pertany a $L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$, definit a continuació. Aquesta és l'anomenada integral d'Itô. Abans, però, fixem un moviment brownià $B(t)$ i una filtració $\{\mathcal{F}_t; a \leq t \leq b\}$ tal que per cada temps t, $B(t)$ és $\mathcal{F}_t$-mesurable i per qualsevol $0 \leq s \leq t$, $B(t) - B(s)$ és independent de $\mathcal{F}_s$.

Definició 5.7. *L'espai $L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$ denota l'espai de tots els processos estocàstics $X(t,w)$ on $a \leq t \leq b$ i $w \in \Omega$, tal que satisfan les següents condicions:*

(a) $X(t,w)$ és un procés adaptat a la filtració $\{\mathcal{F}_t\}$.

(b) $\int_a^b \mathbb{E}(|X(t,w)|^2)dt < \infty$.

Comencem, amb la mateixa idea del cas anterior, amb un procés estocàstic definit a trossos $X(t,w) \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$:

$$X(t,w) = \sum_{i=0}^{n} A_{i-1} \mathbb{1}_{(t_{i-1},t_i]}(t),$$

on A_{i-1} és una varaible aleatòria $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-mesurable i de quadrat integrable ($\mathbb{E}(A^2_{i-1}) < \infty$). Aleshores definim

$$I(X) = \sum_{i=1}^{n} A_{i-1}(B(t_i) - B(t_{i-1})).$$

Com en el cas de l'apartat anterior, verifica la propietat de linealitat per qualsevol $a, b \in \mathbb{R}$ i qualssevol procéssos estocàstics definits a trossos $X, Y \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$:

Demostració.

$$\begin{aligned} I(aX + bY) &= \sum_{i=0}^{n} (a \cdot A_{i-1} + b \cdot B_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1})) \\ &= a \cdot \sum_{i=1}^{n} A_{i-1}(B(t_i) - B(t_{i-1})) + b \cdot \sum_{i=1}^{n} B_{i-1}(B(t_i) - B(t_{i-1})) = aI(X) + bI(Y). \end{aligned}$$

□

Seguidament, enunciem els següents lemes per tal de demostrar el cas general.

Lema 5.8. *Sigui* $I(X) = \sum_{i=1}^{n} A_{i-1}(B(t_i) - B(t_{i-1}))$. *Aleshores veiem que* $\mathbb{E}(I(X)) = 0$ *i* $\mathbb{E}(|I(X)|^2) = \int_a^b \mathbb{E}(|X(t)|^2)dt$.

Demostració. Utilitzant les propietats 1, 4 i 3, respectivament, de la proposició 3.4, tenim

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[A_{i-1}(B(t_i) - B(t_{i-1}))] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[A_{i-1}(B(t_i) - B(t_{i-1}))|\mathcal{F}_{t_{i-1}}]] \\ &= \mathbb{E}[A_{i-1}\mathbb{E}[(B(t_i) - B(t_{i-1}))|\mathcal{F}_{t_{i-1}}]] \\ &= \mathbb{E}[A_{i-1}\mathbb{E}[(B(t_i) - B(t_{i-1}))]] = \mathbb{E}[0] = 0\end{aligned}$$

per ser 0 l'esperança de $B(t_i) - B(t_{i-1})$. Aleshores trobem que $\mathbb{E}(I(X)) = 0$. Seguidament, veiem que

$$|I(X)|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} A_{i-1}A_{j-1}(B(t_i) - B(t_{i-1}))(B(t_j) - B(t_{j-1})).$$

Separem els casos $i = j$ i $i \neq j$. Utilitzant les propietats 1, 4 i 3 de la proposició 3.4, respectivament, i sense pèrdua de generalitat considerant $t_i < t_j$, trobem

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[A_{i-1}A_{j-1}(B(t_i) - B(t_{i-1}))(B(t_j) - B(t_{j-1}))\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[A_{i-1}A_{j-1}(B(t_i) - B(t_{i-1}))(B(t_j) - B(t_{j-1}))|\mathcal{F}_{t_{j-1}}]\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big[A_{i-1}A_{j-1}(B(t_i) - B(t_{i-1}))\mathbb{E}[(B(t_j) - B(t_{j-1}))|\mathcal{F}_{t_{j-1}}]\Big] \\ &= E\Big[A_{i-1}A_{j-1}(B(t_i) - B(t_{i-1}))\mathbb{E}[(B(t_j) - B(t_{j-1}))\Big] = E[0] = 0\end{aligned}$$

per ser 0 l'esperança de $B(t_j) - B(t_{j-1})$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[A_{i-1}^2(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2\Big] &= \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[A_{i-1}^2(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2|\mathcal{F}_{t_{i-1}}]\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big[A_{i-1}^2\mathbb{E}[(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2|\mathcal{F}_{t_{i-1}}]\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big[A_{i-1}^2(t_i - t_{i-1})\Big] = (t_i - t_{i-1})\mathbb{E}(A_{i-1}^2).\end{aligned}$$

Per tant, demostrem que $\mathbb{E}(|I(X)|^2) = \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})\mathbb{E}(A_{i-1}^2) = \int_a^b \mathbb{E}(|X(t)|^2)dt$. □

Lema 5.9. *Sigui* $X \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$. *Aleshores existeix una successió de processos estocàstics definits a trossos* $\{X_n(t); n \geq 1\}$ *a* $L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$ *tal que*

$$\lim_{x \to \infty} \int_a^b \mathbb{E}(|X(t) - X(t_n)|^2)dt = 0.$$

La demostració podem trobar-la a [9].

Aplicant el lema anteriorment enunciat, trobem una successió $\{X_n(t); n \geq 1\}$ de processos estocàstics adaptats que satisfan el límit anterior. Així doncs, definint per a cada n $I(X_n)$, pel lema 5.8,

$$\mathbb{E}(|I(X_n) - I(X_m)|^2) = \int_a^b \mathbb{E}(|X_n(t) - X_m(t)|^2)dt$$

que, portant-lo al límit, pel lema 5.9 convergeix a 0 quan $n, m \to \infty$. Així doncs, demostrem que la successió $\{I(X_n)\}$ és de Cauchy, i per tant convergent en $L^2(\Omega)$. Finalment, definim la integral en el cas general.

Definició 5.10. *El límit $I(X) = \lim_{n\to\infty} I(X_n)$ és l'anomenada integral d'Itô de X, i es denota per $\int_a^b X(t,w)dB(t,w)$.*

Finalment, cal veure que aquesta integral està ben definida, és a dir, que el límit no depèn de la successió triada. Suposem $\{X_n\}$ i $\{Y_m\}$ dues successions de processos estocàstics definits a trossos que convergeixen a $X(t,w) \in L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$. Utilitzant la linearitat de I i la desigualtat $(x-y)^2 \le 2(x^2+y^2)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|I(X_n) - I(Y_m)|^2] = \mathbb{E}[|I(X_n - Y_m)|^2] &= \int_a^b (X_n(t) - Y_m(t))^2 dt \\ &= \int_a^b (X_n(t) - X(t) + X(t) - Y_m(t))^2 dt \\ &\le 2\int_a^b (X_n(t) - X(t))^2 + (Y_m(t) - X(t))^2 dt \to 0\end{aligned}$$

quan $n \to \infty, m \to \infty$ pel lema 5.9. Aleshores $\lim_{n\to\infty} I(X_n) = \lim_{m\to\infty} I(Y_m)$ i per tant la integral $I(X_t)$ està ben definida.

Teorema 5.11. *Sigui $f \in L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$. Aleshores la integral d'Itô*

$$I(f) = \int_a^b X(t,w)dB(t,w)$$

és una variable aleatòria amb $\mathbb{E}(I(X)) = 0$ i $\mathbb{E}(|I(X)|^2) = \int_a^b \mathbb{E}(|X(t)|^2)dt$.

En particular, la integral d'Itô per a processos estocàstics $X(t,w)$ que no depenen de w passen a ser funcions deterministes i, conseqüentment, arribem a la integral de Wiener explicada a l'apartat anterior. Així doncs, aquesta última és un cas particular de la integral d'Itô. Conseqüentment, el següent teorema, que demostra que les martingales poden escriure's com una integral d'Itô, és la versió general de la proposició 5.6.

Teorema 5.12. *Sigui $X \in L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$. Aleshores el procés estocàstic definit per*

$$M_t = \int_a^t X(s)dB(s), \quad a \le t \le b,$$

és una martingala respecte la filtració $\{\mathcal{F}_t; a \le t \le b\}$.

Demostració. Primerament definim el procés X a trossos:

$$X(t,w) = \sum_{i=1}^n A_{i-1} 1_{(t_{i-1},t_i]}$$

per a $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$, on $A_{i-1} \in L^2(\Omega)$ és $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-mesurable . Aleshores, per veure que M_t és una martingala cal veure que, per qualsevol $a \le s < t \le b$,

$$\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s.$$

Per altra banda, per la definició de M_t,

$$M_t = \int_a^t X(s)dB(s) = M_s + \int_s^t X(s)dB(s), \quad \text{(q.s.)}$$

i per tant només cal veure que $\mathbb{E}(\int_s^t X(u)dB(u)) = 0$ quasi segurament. Per la integral d'Itô definida anteriorment,

$$\int_s^t X(u)dB(u) = \sum_{i=1}^{n} A_{i-1}(B(t_i) - B(t_{i-1}))$$

i aleshores, per qualsevol terme $i = 1, ..., n$ veiem que, per les propietats 4 i 6 de la proposició 3.4,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[A_{i-1}(B(t_i) - B(t_{i-1}))|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[A_{i-1}(B(t_i) - B(t_{i-1}))|\mathcal{F}_{t_{i-1}}]|\mathcal{F}_s\big] \\ &= \mathbb{E}\big[A_{i-1}\mathbb{E}[B(t_i) - B(t_{i-1})|\mathcal{F}_{t_{i-1}}]|\mathcal{F}_s\big] = 0 \end{aligned}$$

ja que, com que $B(t_i) - B(t_{i-1})$ és un moviment brownià, aleshores té increments independents ($\mathbb{E}[B(t_i) - B(t_{i-1})|\mathcal{F}_{t_{i-1}}] = 0$). Per tant veiem que és una martingala.

Ara demostrem el cas general, on $X \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$. Per fer-ho, veurem que

$$\mathbb{E}[X_t - X_s|\mathcal{F}_s] = 0.$$

A partir del lema 5.9, definim una successió de processos estocàstics $\{X_n\}$ de manera que $X_n \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$ i

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \mathbb{E}[|X(u) - X_n(u)|^2]du = 0.$$

Com que tots els processos de la successió estan definits a trossos, aleshores pel prèviament demostrat sabem que tots els $M_n(t) = \int_a^t X_n(u)dB(u)$ són martingales. Seguidament veiem que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M(t) - M(s)|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[M(t) - M_n(t) + M_n(t) - M_n(s) + M_n(s) - M(s)|\mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[M(t) - M_n(t)|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[M_n(t) - M_n(s)|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[M_n(s) - M(s)|\mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[M(t) - M_n(t)|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[M_n(s) - M(s)|\mathcal{F}_s] \end{aligned}$$

en ja saber que $M_n(t)$ és una martingala. Per la desigualtat de Jensen, propietat 8 de la proposició 3.4,

$$|\mathbb{E}[M(t) - M_n(t)|\mathcal{F}_s]|^2 \le \mathbb{E}[|M(t) - M_n(t)|^2|\mathcal{F}_s]$$

i la propietat 1 del teorema 3.4,

$$\mathbb{E}[|\mathbb{E}[M(t) - M_n(t)|\mathcal{F}_s]|^2] \le \mathbb{E}[\mathbb{E}[|M(t) - M_n(t)|^2|\mathcal{F}_s]] = \mathbb{E}[|M(t) - M_n(t)|^2]$$

que sabem que pel teorema 5.11 pot escriure's

$$\mathbb{E}[|M(t) - M_n(t)|^2] = \int_a^t \mathbb{E}[|X(u) - X_n(u)|]^2du \to 0 \implies \mathbb{E}[|\mathbb{E}[M(t) - M_n(t)|\mathcal{F}_s]|^2] \to 0$$

quan $n \to \infty$. Per tant, té convergència L^2. Per la desigualtat de Txebitxev,

$$P[|M_n(t) - M(t)| > \epsilon] \le \frac{\mathbb{E}[|M_n(t) - M(t)|^2]}{\epsilon^2}$$

veiem que la successió convergeix en probabilitat. Per tant, existeix una subsuccessió que convergeix quasi segurament. Escollint la successió $\{M_n\}$ com aquesta subsuccessió veiem que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(M_n(t)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(M(t)|\mathcal{F}_s).$$

Per tant, $E[M(t) - M_n(t)|\mathcal{F}_s]] \to 0$ quan $n \to \infty$, i operant de la mateixa manera $E[M(s) - M_n(s)|\mathcal{F}_s]] \to 0$, demostrant

$$\mathbb{E}[M(t) - M(s)|\mathcal{F}_s] = 0 \implies \mathbb{E}[M(t)|\mathcal{F}_s] = M(s).$$

□

Teorema 5.13. *Sigui $X \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$. Aleshores el procés estocàstic definit per $M_t = \int_a^b X(s)dB(s), a \leq t \leq b$, és continu, és a dir, les trajectòries són funcions contínues a $[a,b]$ quasi segurament.*

5.3 Integrals estocàstiques generals

En aquest apartat veurem, mitjançant un contraexemple, que per a processos estocàstics $X(t,w)$ que pertanyin a l'espai on es compleix $\int_a^b |X(t)|^2 dt < \infty$, que definirem a continuació, la integral d'Itô que podem definir en general no és integrable.

Definició 5.14. *L'espai $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a,b])$ és un espai on els processos estocàstics $X(t,w)$ que hi pertanyen compleixen:*

(a) $X(t,w)$ és un procés estocàstic adaptat a la filtració $\{\mathcal{F}_t\}$.

(b) $\int_a^b |X(t)|^2 dt < \infty$ quasi segurament.

La segona condició fa referència al fet que les trajectòries es troben dins l'espai de Hilbert $L^2[a,b]$ quasi segurament.

Observació 5.15. Veient que, pel teorema de Fubini,

$$\mathbb{E}\Big(\int_a^b |X(t)|^2 dt\Big) = \int_a^b \mathbb{E}(|X(t)|^2)dt < \infty,$$

aleshores implica que la integral $\int_a^b |X(t)|^2 dt < \infty$ quasi segurament, i per tant

$$L^2_{ad}([a,b] \times \Omega) \subset \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a,b]).$$

En altres paraules, $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a,b])$ conté processos estocàstics que no es trobaven en l'espai utilitzat en l'apartat anterior. La principal diferència que trobem és la falta d'integrabilitat d'alguns processos que formen part del nou espai, tal i com podem veure en el següent cas.

Exemple 5.16. Sigui el procés estocàstic considerat $X(t) = e^{\frac{1}{2}B(t)^2}$, on $B(t)$ és un moviment brownià seguint una distribució normal d'esperança 0 i variància t.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X(t)|^2) &= \mathbb{E}(e^{B(t)^2}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{y^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{y^2 - \frac{y^2}{2t}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{2t-1}{2t}y^2} dy.\end{aligned}$$

Per a $2t - 1 < 0 \implies t < \frac{1}{2}$,

$$\mathbb{E}(|X(t)|^2) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}},$$

altrament,

$$\mathbb{E}(|X(t)|^2) = \infty,$$

i per tant la integral d'Itô del procés estocàstic $X(t)$ no està definida per a $t > \frac{1}{2}$.

Calen enunciar diferents lemes abans de definir la integral general:

Lema 5.17. *Sigui $X(t,w) \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a,b])$. Aleshores existeix una successió $\{X_n\}$ en $L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$ tal que*

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b |X_n(t) - X(t)|^2 dt = 0$$

quasi segurament. En particular, també en probabilitat.

Demostració. Considerem el temps d'aturada $T_n = \sup\{t; \int_a^t |f(s,w)|^2 ds \leq n\}$, vist a l'exemple 4.5. Definim una successió de processos estocàstics $\{X_n(t,w)\}$, on

$$X_n(t,w) = \begin{cases} X(t,w) & \text{si } \int_a^t |X(s,w)|^2 ds \leq n \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

i veiem que

$$\begin{aligned} \int_a^b |X_n(t,w)|^2 dt &= \int_a^{T_n} |X_n(t,w)|^2 dt + \int_{T_n}^b |X_n(t,w)|^2 dt \\ &= \int_a^{T_n} |X(t,w)|^2 dt \quad \text{(q.s.)}. \end{aligned}$$

Conseqüentment, $\int_a^b |X_n(t,w)|^2 dt \leq n$ quasi segurament, fent que $\int_a^b \mathbb{E}(|X_n(t,w)|^2) dt \leq n$ i, per tant, $X_n \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$.

Ara fixem w. Per algun n trobarem $\int_a^b |X(t,w)|^2 dt < n$. Per la definició de $X_n(t,w)$ obtindrem $X_n(t,w) = X(t,w)$ per tot $t \in [a,b]$, que implica

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b |X_n(t,w) - X(t,w)|^2 dt = 0.$$

Com que $X(t,w) \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a,b])$ aleshores $\int_a^b |X(t,w)|^2 dt < \infty$ $w \in \Omega$ quasi segurament, i per tant el límit es compleix quasi segurament. Finalment, convergència quasi segura implica convergència en probabilitat.

□

Lema 5.18. *Sigui $X(t,w)$ un procés estocàstic a $L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$. Aleshores, per a constants ϵ, C, es compleix la següent desigualtat:*

$$P\Big(|\int_a^b X(t) dB(t)| > \epsilon\Big) \leq \frac{C}{\epsilon^2} + P\Big(\int_a^b |X(t)|^2 dt > C\Big)$$

La demostració d'aquest lema pot trobar-se al llibre [9] de la bibliografia.

Lema 5.19. *Sigui $X(t,w) \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a,b])$. Aleshores existeix una successió $\{X_n\}$ de processos estocàstics definits a trossos en $L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |X_n(t) - X(t)|^2 dt = 0$$

en probabilitat.

La demostració d'aquest lema pot trobar-se al llibre [9] de la bibliografia.

Seguidament, podem definir la integral $\int_a^b X(t)dB(t)$ per $X(t,w) \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a,b])$. Utilitzant el lema 5.19 obtenim una successió de processos estocàstics definits a trossos $\{X_n\}$ pertanyent a $L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$ tal que $\lim_{n\to\infty}\int_a^b |X_n(t)-X(t)|^2 dt = 0$. Seguidament, definim per a cada n

$$I(X_n) = \int_a^b X_n(t)dB(t).$$

Apliquem el lema 5.18 per al procés $X(t) = X_n(t) - X_m(t)$ i les constants $\epsilon > 0, C = \epsilon^3/2$ i obtenim

$$\begin{aligned}
&P\Big(|\int_a^b (X_n(t) - X_m(t))dB(t)| > \epsilon\Big) \\
&\qquad = P\Big(|I(X_n) - I(X_m)| > \epsilon\Big) \leq \frac{\epsilon}{2} + P\Big(\int_a^b |X_n(t) - X_m(t)|^2 dt > \frac{\epsilon^3}{2}\Big) \\
&\qquad = \frac{\epsilon}{2} + P\Big(\int_a^b |X_n(t) - X(t) + X(t) - X_m(t)|^2 dt > \frac{\epsilon^3}{2}\Big) \\
&\qquad \leq \frac{\epsilon}{2} + P\Big(\int_a^b (|X_n(t) - X(t)|^2 + |X_m(t) - X(t)|^2) dt > \frac{\epsilon^3}{4}\Big) \\
&\qquad \leq \frac{\epsilon}{2} + P\Big(\int_a^b |X_n(t) - X(t)|^2 dt > \frac{\epsilon^3}{8}\Big) + P\Big(\int_a^b |X_m(t) - X(t)|^2 dt > \frac{\epsilon^3}{8}\Big)
\end{aligned}$$

on hem utilitzat la propietat $|x+y|^2 \leq 2(|x|^2 + |y|^2)$. Aleshores, quan $n, m \to \infty$, pel teorema 5.19

$$\begin{aligned}
&P\Big(\int_a^b |X_n(t) - X_m(t)|^2 dt > \frac{\epsilon^3}{2}\Big) \\
&\qquad \leq P\Big(\int_a^b |X_n(t) - X(t)|^2 dt > \frac{\epsilon^3}{8}\Big) + P\Big(\int_a^b |X_m(t) - X(t)|^2 dt > \frac{\epsilon^3}{8}\Big) \to 0
\end{aligned}$$

En particular, per a un valor ϵ existirà algun valor N tal que $\forall n, m \geq N$

$$P\Big(\int_a^b |X_n(t) - X_m(t)|^2 dt > \frac{\epsilon^3}{2}\Big) < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow P\Big(|I(X_n) - I(X_m)| > \epsilon\Big) < \epsilon$$

i per tant se satisfà la condició de Cauchy en probabilitat i, conseqüentment, també la convergència en probabilitat $I(X_n) \to I(X)$ quan $n \to \infty$.

Definició 5.20. *Definim la integral estocàstica d'un procés estocàstic* $X(t,w) \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a,b])$ *com*

$$\int_a^b X(t)dB(t) = \lim_{n\to\infty} I(X_n(t)) \quad \textit{en probabilitat.}$$

Finalment, només falta veure que està ben definida. Cal veure que el límit no depèn de la successió triada, que es veu seguint el mateix procediment que en el cas de la integral d'Itô però amb la convergència dels límits en probabilitat.

En l'espai considerat, $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a,b])$, no tots els processos tenen esperança finita, de manera que el concepte de martingala no aplicarà en general. Per trobar un concepte semblant al de martingala utilitzarem els abans definits instants d'aturada per trobar, sota certes condicions, els moments dels processos sota els quals sí que es compleix la definició de martingala sota una filtració particular. El procés que contingui uns certs instants d'aturada monòtonament creixents amb els quals sigui martingala s'anomerà martingala local, definit a continuació.

Definició 5.21. *Sigui* $X(t,w)$ *un procés estocàstic adaptat a la filtració* $\{\mathcal{F}_t\}$*, amb* $a \leq t \leq b$*. Definim* $X(t,w)$ *com a martingala local respecte a la filtració* $\{\mathcal{F}_t\}$ *si existeix una successió d'instants d'aturada* $\{T_n\}, n \geq 1$ *tal que*

(a) quan $n \to \infty$*,* $\{T_n\}$ *és monòtonament creixent quasi segurament cap a* b*.*

(b) per cada n*,* $X_{t\wedge T_n}$ *és una martingala respecte a* $\{\mathcal{F}_t; a \leq t \leq b\}$*.*

Observació 5.22. Podem veure que una martingala és una martingala local per a un únic instant d'aturada $T = b$.

Teorema 5.23. *Sigui* $X(t,w) \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a,b])$*. Aleshores el procés estocàstic*

$$M_t = \int_a^t X(s,w)dB(s), \qquad a \leq t \leq b$$

és una martingala local respecte a la filtració $\{\mathcal{F}_t; a \leq t \leq b\}$*.*

Demostració. Sigui $X(t,w) \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a,b])$ i definim la integral $M_t = \int_a^t X(s,w)dB(s)$ per a $a \leq t \leq b$. Aleshores pel lema 5.17 podem definir una successió $\{X_n\}$ en $L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$. La definim com

$$X_n(t,w) = \begin{cases} X(t,w) & \text{si } \int_a^t |X(t,w)|^2 ds \leq n \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Definim $T_n = \sup\left\{t; \int_a^t |X(t,w)|^2 ds \leq n\right\}$, que és un instant d'aturada, vist a l'exemple 4.5. Aleshores, per com hem definit el procés $X_n(t,w)$, podem escriure

$$X(t,w)1_{[a,t\wedge T_n]}(s) = X_n(t,w)1_{[a,t]}(s),$$

i, per tant,

$$\int_a^{t\wedge T_n} X(s,w)dB(s) = \int_a^t X_n(s,w)dB(s) \quad \text{quasi segurament.}$$

Com que $X_n \in L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$, pel teorema 5.12 ambdues integrals són martingales.

Finalment, veiem que la successió $\{T_n\}$ és monòtonament creixent cap a b quasi segurament quan $n\to\infty$. Per tant, $X(t,w)$ és una martingala local. □

Finalment enunciem la relació entre les martingales locals, les supermartingales i les martingales en les següents proposicions.

Proposició 5.24. *Una martingala local no negativa i contínua és una supermartingala.*

Demostració. Sigui $X(t)$ una martingala local. Aleshores existeix una successió d'instants d'aturada $\{T_n\}$ tal que $X(t)=X(t\wedge T_n)$ són martingales, és a dir,

$$\mathbb{E}[X(t\wedge T_n)|\mathcal{F}_s] = X(s\wedge T_n).$$

Per n suficientment gran $T_n\to T$, és a dir $T_n\wedge T\to T$ i, per tant,

$$\lim_{n\to\infty}\inf(X(t\wedge T_n)) = X(t) \text{ i } \lim_{n\to\infty}\inf(X(s\wedge T_n)) = X(s) \text{ quasi segurament.}$$

Per la propietat 7 de la proposició 3.4,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(t)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty}\inf(X(t\wedge T_n))|\mathcal{F}_s] &\le \lim_{n\to\infty}\inf\mathbb{E}[X(t\wedge T_n)|\mathcal{F}_s]\\ &= \lim_{n\to\infty}\inf(X(s\wedge T_n)) = X(s)\end{aligned}$$

mostrant que $X(t)$ és una supermartingala.

□

Proposició 5.25. *Qualsevol martingala local acotada és una martingala.*

Demostració. Sigui $X(t)$ una martingala local acotada a [0,T]. Aleshores existeix una successió d'instants d'aturada $\{T_n\}$ monòtonament creixent (q.s.) cap a T tal que $X_{t\wedge T_n}$ és una martingala. En particular, per a $A\in\mathcal{F}_t$ i $s<t\le T$,

$$\mathbb{E}[X(T_n\wedge t)\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X(T_n\wedge s)\mathbb{1}_A].$$

Com que $T_n\to T$, aleshores per n suficientment gran tenim $t\wedge T_n = t$ i

$$X(T_n\wedge t) = X(t), \quad X(T_n\wedge s) = X(s) \quad \text{(q.s.)}.$$

Per hipòtesi X(t) és acotat, per tant existeix una constant determinista C tal que

$$|X(T_n\wedge t)| \le C,$$

fet que garenteix la convergència dominada i, per tant, també garenteix la convergència de les esperances

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X(T_n\wedge t)\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}_A], \quad \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X(T_n\wedge s)\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X(s)\mathbb{1}_A].$$

Per tant,

$$\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X(s)\mathbb{1}_A] \implies \mathbb{E}[X(t)|\mathcal{F}_s] = X(s)$$

per la definició d'esperança condicionada (3.2).

□

5.4 Integrals estocàstiques respecte martingales

El cas de la integració respecte martingales és una generalització de la integral d'Itô. Per a aquestes integrals cal endinsar-se en el concepte de processos previsibles, que requereix unes matemàtiques més avançades i que no parlarem en aquest treball. Així doncs, simplement indicarem l'esquema que construeix la integral respecte martingales.

En aquest cas, l'espai considerat l'anomenem $L^2_{pred}([a,b]\times\Omega)$, que és on pertanyen els processos estocàstics previsibles $X(t,w)$ que satisfan $\mathbb{E}(\int_a^b |X(t,w)|^2 d\langle M\rangle_t < \infty)$. Seguint un procediment semblant al de l'apartat anterior, a través de definir

$$I(X(t,w)) = \sum_{i=1}^{n} A_{i-1}(M(t_i) - M(t_{i-1})),$$

i de trobar una successió de processos estocàstics definits a trossos $\{X_n\}$ que pertanyin a l'espai $L^2_{pred}([a,b]\times\Omega)$ tal que $I(X_n)$ convergeixi a $I(X)$, podem definir la integral

$$I(X) = \lim_{n\to\infty} I(X_n) = \int_a^b X(t,w)dM(t).$$

Pot veure's que la integral per martingales d'un procés de $L^2_{pred}([a,b]\times\Omega)$ també és una martingala.

Teorema 5.26. *Sigui $X(t,w)\in L^2_{pred}([a,b]\times\Omega)$. Aleshores el procés estocàstic*

$$M_t = \int_a^t X(s)dM(s)$$

és una martingala i es compleix $\mathbb{E}(|M_t|^2) = \mathbb{E}(\int_a^t |X(s)|^2 d\langle M\rangle_s)$.

La demostració d'aquest teorema la podem trobar al llibre [4] de la bibliografia.

En el cas de la integral d'Itô, com que $\langle B(t)\rangle = t$, -vist a l'exemple 4.9-, veiem que és un cas particular de la integració respecte martingales.

6 Fórmula d'Itô

Un cop definides les integrals anteriors, ens disposem a demostrar una eina clau en el càlcul d'Itô: l'equivalent a l'anomenada regla de la cadena. En aquest cas serà anomenada com a fórmula d'Itô. Aquesta fórmula té un gran ventall d'aplicacions, entre les quals es troba el teorema de Girsanov.

Comencem donant el resultat per a una dimensió i per a la integral estocàstica general. Veurem com s'expandeix al cas multidimensional i, finalment, per al cas de la integració de martingales.

Primerament cal tenir en compte que la fórmula d'Itô composa dues funcions: el procés estocàstic $X(t,w)$ i una funció $F(t,x)$. A més a més, en aquest resultat trobem dos tipus d'integrals diferents, la integral de Riemann i la integral d'Itô. Així doncs, és interessant definir un tipus concret de procés estocàstic que contingui les dues intergals, anomenat procés d'Itô. Comencem donant la fórmula per un cas particular del procés d'Itô: un moviment brownià $B(t)$. En el cas d'una funció F de classe $\mathcal{C}^2$, la fórmula d'Itô pot escriure's com:

Teorema 6.1. *Sigui F una funció de classe $\mathcal{C}^2$. Aleshores*

$$F(B(t)) - F(B(a)) = \int_a^t F'(B(s))dB(s) + \frac{1}{2}\int_a^t F''(B(s))ds,$$

on la primera integral és l'anteriorment vista integral d'Itô i la segona és una integral de Riemann per a cada trajectòria del brownià $B(s)$.

Aquest és un cas particular al que enunciem i demostrem a continuació.

En el cas que la funció sigui del tipus $F(t,x)$, és a dir, explícita en el temps, aleshores la fórmula l'enunciem seguidament. Serà un procés estocàstic de trajectòries contínues i adaptat a la filtració $\{\mathcal{F}_t\}$. Prèviament enunciem uns teoremes que seran necessaris per a la demostració.

Teorema 6.2. *Sigui $B(t)$ un moviment brownià. Sigui $\{\Delta_n, n\in\mathbb{N}\}$ una successió de particions $\Delta_n = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$ de $[a,b]$ tal que $\lim_{n\to\infty}\max\{|t_i - t_{i-1}|, i = 1,...,n\} = \lim_{n\to\infty}||\Delta_n|| = 0$. Aleshores*

$$\sum_{i=1}^n (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 \to b - a \quad \textit{en probabilitat.}$$

La demostració podem trobar-la a [9].

Teorema 6.3. *Sigui $B(t)$ un moviment brownià i Y un procés estocàstic continu i adaptat. Sigui $\{\Delta_n, n\in\mathbb{N}\}$ una successió de particions de $[a,b]$ tal que $\lim_{n\to\infty}\max\{|t_i - t_{i-1}|, i = 1,...,n\} = \lim_{n\to\infty}||\Delta_n|| = 0$. Aleshores*

$$\sum_{i=1}^n Y(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 \to \int_a^b Y(s)ds \quad \textit{en probabilitat}$$

quan $n\to\infty$.

La demostració podem trobar-la a [4].

Teorema 6.4. *Sigui f un procés estocàstic que satisfà les condicions esmentades a l'inici. Aleshores $f \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a,b])$ i*

$$\lim_{||\Delta_n||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1})) = \int_a^b f(t)dB(t) \quad \textit{en probabilitat},$$

on $\Delta_n = \{a = t_0, t_1, ..., t_n = b\}$ és una partició finita de $[a,b]$ i $||\Delta_n|| = \max(t_i - t_{i-1})$ amb $i = 1, ..., n$.

La demostració la trobem a [9].

Teorema 6.5. ***Fórmula d'Itô***. *Sigui $F(t,x)$ una funció contínua amb derivades parcials definides $\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$. Aleshores:*

$$F(t, B_t) - F(a, B_a) = \int_a^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, B_s)dB_s + \int_a^t \Big(\frac{\partial F}{\partial t}(s, B_s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, B_s)\Big)ds.$$

Demostració. Sigui $F(t,x)$ una funció contínua amb derivades parcials definides $\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$. Definint la funció a trossos, per a funcions sobre la partició $\{\Delta_n, n \in \mathbb{N}\}$, on $\Delta_n = \{a = t_0, t_1, ..., t_n = t\}$ i $\lim_{n\to\infty} \max\{|t_i - t_{i-1}|, i = 1, ..., n\} = \lim_{n\to\infty} ||\Delta_n|| = 0$. Per tal de simplificar la notació, no afegirem el superíndex n als temps de les diferents funcions de partició. Així doncs, caldrà recordar que $t_i = t_i^n$.

$$F(t, B_t) - F(t_a, B_a) = \sum_{i=1}^{n} \big[F(t_i, B_{t_i}) - F(t_{i-1}, B_{t_i}) + F(t_{i-1}, B_{t_i}) - F(t_{i-1}, B_{t_{i-1}})\big].$$

Utilitzem l'expansió de Taylor multivariant,

$$\begin{aligned} F(t, B_t) - F(t_a, B_a) = \sum_{i=1}^{n} \Big[& \frac{\partial F}{\partial t}(t_{i-1}, B_{t_{i-1}})(t_i - t_{i-1}) \\ & + \big(\frac{\partial F}{\partial t}(\tau_{i-1}, B_{t_i}) - \frac{\partial F}{\partial t}(t_{i-1}, B_{t_{i-1}})\big)(t_i - t_{i-1}) \\ & + \frac{\partial F}{\partial x}(t_{i-1}, B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t_{i-1}, B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \\ & + \big(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t_{i-1}, B_{\eta_{i-1}}) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t_{i-1}, B_{t_{i-1}})\big)(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \Big] \end{aligned}$$

per dos valors aleatoris $\tau, \eta \in [t_i, t_{i-1}]$.

Com que, per w fixat, les funcions derivades parcials

$$(t_i, t_j) \to \frac{\partial F}{\partial t}(t_i, B(t_j)) \quad \text{i} \quad (t_i, t_j) \to \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t_i, B(t_j))$$

són uniformement contínues, aleshores veiem que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{i-1} \big(\frac{\partial F}{\partial t}(\tau_{i-1}, B_{t_i}) - \frac{\partial F}{\partial t}(t_{i-1}, B_{t_{i-1}})\big) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{i-1} \Big(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t_{i-1}, B_{\eta_{i-1}}) - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t_{i-1}, B_{t_{i-1}}))\Big) = 0.$$

En ser uniformement contínues, en particular són contínues. Per tant, trobem que, quan $n \to \infty$, el sumatori esdevé una integral de Riemann,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial t}(t_{i-1}, B_{t_{i-1}})(t_i - t_{i-1}) \to \int_a^t \frac{\partial F}{\partial t}(s, B_s)ds \quad \text{quasi segurament.}$$

Pel teorema 6.2, veiem que

$$\sum_{i=1}^{n}(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 \to t - a \quad \text{en probabilitat}$$

quan $n \to \infty$. Per tant, juntament amb la condició anterior del límit superior, trobem que

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t_{i-1}, B_{\eta_{i-1}}) - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t_{i-1}, B_{t_{i-1}})\Big)(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \to 0 \quad \text{en probabilitat}$$

quan $n \to \infty$. Per altra banda, considerant $B(t)$ acotat, pel teorema 6.3 i considerant $Y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, B(t))$ un procés acotat i continu,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t_{i-1}, B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \to \int_a^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, B_s)ds \quad \text{en probabilitat}$$

quan $n \to \infty$. Veiem que, si $\tau_n = \inf\{t \geq 0 : B(t) > n\}$, aleshores $B(t \wedge \tau_n)$ és un procés acotat, i per tant la convergència anterior es compleix per aquest moviment brownià. Aleshores, per $n \to \infty$, també se seguirà complint.

Finalment, pel teorema 6.4, com que la funció $\frac{F(t,B(t))}{\partial x}$ és un procés estocàstic continu i adaptat a la filtració $\{\mathcal{F}_t\}$, aleshores

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x}(t_{i-1}, B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \to \int_a^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, B_s)dB(s) \quad \text{en probabilitat}$$

quan $n \to \infty$.

Aplicant el mateix argument que en demostracions anteriors, com hem demostrat la convergència en probabilitat, aleshores existeix una subsuccessió que convergeix quasi segurament. Escollint aquesta com a successió trobem la demostració per a convergència quasi segura. □

Ens disposem a mostrar la fórmula d'Itô per a processos estocàstics d'Itô en la forma general, que definirem a continuació. Agafant com a referència la definició 5.14, l'espai $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^1[a,b])$ és aquell que conté els processos estocàstics $X(t,w)$ que compleixen $\int_a^b |X(t,w)| < \infty$.

Definició 6.6. *El procés d'Itô és un tipus de procés estocàstic definit com*

$$X_t = X_a + \int_a^t f(s)dB(s) + \int_a^t g(s)ds, \qquad a \leq t \leq b$$

on X_a és $\mathcal{F}_a$-mesurable, $f \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a,b])$ i $g \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^1[a,b])$.

Malgrat que les trajectòries no són diferenciables, i per tant estríctament parlant no podem tenir una diferencial estocàstica, sí que podem definir i manipular la notació

$$dX_t = f(t)dB(t) + g(t)dt$$

que serà d'utilitat per a futures demostracions.

Teorema 6.7. *Sigui X_t un procés d'Itô -com a la definició 6.6-. Sigui $F(t,x)$ una funció contínua amb derivades parcials definides $\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$. Aleshores el procés $F(t, X_t)$ també és d'Itô i és de la forma*

$$\begin{aligned} F(t,X_t) - F(a,X_a) = &\int_a^t \frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)f(s)dB_s \\ &+ \int_a^t \Big(\frac{\partial F}{\partial t}(s,X_s) + \frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)g(s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s,X_s)f(s)^2\Big)ds. \end{aligned}$$

En termes diferencials pot escriure's com:

$$dF(t,X_t) = \frac{\partial F}{\partial x}(t,X_t)f(s)dB_t + \Big(\frac{\partial F}{\partial t}(t,X_t) + \frac{\partial F}{\partial x}(t,X_t)g(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,X_t)f(t)^2\Big)dt.$$

Aquesta equació podem trobar-la a través de la manipulació de l'equació diferencial. Primerament fem el desenvolupament de Taylor per a $F(t, X_t)$,

$$F(t,X_t) = F(0,X_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(t,X_t)X_t + \frac{\partial F}{\partial t}(t,X_t)t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,X_t)(X_t)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t,X_t)t^2 + \cdots$$

de manera que, en forma diferencial,

$$dF(t,X_t) = \frac{\partial F}{\partial x}(t,X_t)dX_t + \frac{\partial F}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,X_t)(dX_t)^2$$

ja que la taula d'Itô indica que $dtdt = dtdX(t) = dX(t)dt = 0$. Tenint en compte que $dX_t = f(t)dB(t) + g(t)dt$, aleshores

$$(dX_t)^2 = f(t)^2 dt$$

i, substituïnt,

$$\begin{aligned} dF(t,X_t) &= \frac{\partial F}{\partial x}(t,X_t)(f(t)dB(t) + g(t)dt) + \frac{\partial F}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,X_t)f(t)^2dt \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}(t,X_t)f(t)dB_t + \Big(\frac{\partial F}{\partial t}(t,X_t) + \frac{\partial F}{\partial x}(t,X_t)g(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,X_t)f(t)^2\Big)dt. \end{aligned}$$

En el cas multidimensional, cal considerar primerament un procés d'Itô multidimensional.

A partir d'un moviment brownià n-dimensional $B(t) = (B(t)^1, ..., B(t)^n)$, on cada $B(t)^i$ és un moviment brownià independent, definim un procés d'Itô de dimensió m com el vector $X_t = (X_t^1, ..., X_t^m)$, amb funcions $f_{ji} \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a,b])$ i $g^j \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^1[a,b])$, i cada component com

$$X_t^j = X_a^j + \sum_{i=1}^n \int_a^t f_{ji}(s)dB(s)^i + \int_a^t g(s)^j ds, \qquad a \le t \le b$$

Aleshores la fórmula d'Itô m-dimensional és

$$
\begin{aligned}
F(t, X_t) - F(a, X_a) &= F(t, X_t^1, ..., X_t^m) - F(a, X_a^1, ..., X_a^m) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \int_a^t \frac{\partial F}{\partial x_j}(s, X_s^1, ..., X_s^m) f_{ji}(s) dB_s^i + \int_a^t \Big(\frac{\partial F}{\partial t}(s, X_s^1, ..., X_s^m) \\
&+ \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial x_j}(s, X_s^1, ..., X_s^m) g(s)^j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j,k=1}^{m} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial d x_k}(s, X_s^1, ..., X_s^m) f(s)^{ik} f(s)^{jk} \Big) ds \\
&= \int_a^t \Big(\frac{\partial F}{\partial t}(s, X_s^1, ..., X_s^m) ds + \sum_{j=1}^{m} \int_a^t \frac{\partial F}{\partial x_j}(s, X_s^1, ..., X_s^m) dX_s^j \\
&+ \sum_{j,k=1}^{m} \int_a^t \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_k}(s, X_s^1, ..., X_s^m) dX_s^j dX_s^k
\end{aligned}
$$

on cal tenir en compte la taula d'Itô:

$$dB(t)^i dB(t)^j = \delta_{ij} dt, dtdt = 0, dtB(t)^j = B(t)^i dt = 0.$$

Finalment, enunciem la fórmula d'Itô per a martingales.

Teorema 6.8. *Sigui M_t una martingala contínua i de quadrat integrable amb $\langle M \rangle_t$ com a compensador. Sigui $F(t, x)$ una funció contínua amb derivades parcials definides $\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$. Aleshores*

$$F(t, M_t) - F(a, M_a) = \int_a^t \frac{\partial F}{\partial t}(s, M_s) ds + \int_a^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, M_s) dM_s + \int_a^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, M_s) d\langle M \rangle_s.$$

7 Processos exponencials

En aquesta secció definim els processos estocàstics exponencials, que seran clau en el teorema de Girsanov explicat a la secció següent.

Definició 7.1. *Sigui $X(t,w) \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[0,T])$. El procés estocàstic exponencial es defineix com*

$$Z(X) = exp\Big[\int_0^t X(s)dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^t |X(s)|^2 ds\Big], \qquad 0 \leq t \leq T$$

Utilitzant la fórmula d'Itô del teorema 6.5 amb funcions $F(t,x) = e^x, f(s) = X(s)$ i $g(s) = -\frac{1}{2}X(s)^2$ i considerant $a = 0$ veiem que

$$\begin{aligned} e^{X_t} &= e^0 + \int_0^t e^{X_s}X(s)dB(s) + \int_0^t (-\frac{1}{2}e^{X_s}X(s)^2 + \frac{1}{2}e^{X_s}X(s)^2)ds \\ &= 1 + \int_0^t X(s)e^{X_s}dB(s). \end{aligned}$$

Tenint en compte que, amb aquestes condicions, el procés d'Itô definit a 6.6 és

$$X_t = \int_0^t X(s)dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^t X(s)^2 ds \implies e^{X_t} = Z_t(X),$$

aleshores concluïm que

$$Z_t(X) = 1 + \int_0^t X(s)Z_s(X)dB(s).$$

Com que $Z_t(X)$ és també un procés d'Itô, aleshores $X(t)Z_s(X) \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[0,T])$ i pel lema 5.23 podem veure que el procés exponencial és una martingala local.

En el cas del teorema de Girsanov necessitarem que el procés exponencial sigui una martingala, que sota certa condició ho podrem demostrar. Aquesta rep el nom de condició de Novikov. En realitat, amb una condició més restrictiva pot demostrar-se la propietat de martingala, però aquesta, en general, serà més difícil de comprovar.

Teorema 7.2. *Sigui $X(t,w) \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[0,T])$ tal que el procés exponencial $Z_t(X)$ satisfà la condició $\mathbb{E}(Z_t(X)) = 1 \ \forall t \in [0,T]$. Aleshores $Z_t(X)$ per a $0 \leq t \leq T$ és una martingala.*

Demostració. Primerament definim una nova mesura de probabilitat $dQ = Z_T(X)dP$, ja que $Q(\Omega) = \int_\Omega Z_T(X)dP = \mathbb{E}_P(Z_T(X)) = 1$ per hipòtesi del teorema. Seguidament, per a una filtració $\{\mathcal{F}_t\}$ definim Q_t com la restricció de de la nova mesura de probabilitat respecte la filtració $\{\mathcal{F}_t\}$ de manera que $dQ_t = Z_t(X)dP$.

Per a qualsevol $s \leq t$ considerem la σ-àlgebra $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$. Aleshores, per la definició d'esperança condicionada 3.2 trobem que, per qualsevol $A \in \mathcal{F}_s$,

$$\int_A \mathbb{E}[Z_t(X)|\mathcal{F}_s]dP = \int_A Z_t(X)dP = \int_A dQ_t = Q(A).$$

Per altra banda,

$$\int_A Z_s(X)dP = \int_A dQ_s = Q(A).$$

Ambdues equacions impliquen $\int_A \mathbb{E}[Z_t(X)|\mathcal{F}_s]dP = \int_A Z_s(X)dP$. Conseqüentment, veiem que $\mathbb{E}[Z_t(X)|\mathcal{F}_s] = Z_s(X)$. D'aquesta manera, queda demostrat que $Z_t(X)$ és una martingala.

□

Proposició 7.3. *Sigui $Z_t(X)$ un procés estocàstic exponencial amb $X(t,w) \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[0,T])$. Si $\mathbb{E}\Big(\frac{1}{2}\int_0^T |X(t)|^2 dt\Big) < \infty$, aleshores $\mathbb{E}(Z_t(X)) = 1$.*

La demostració podem trobar-la a [8]. La primera condició és l'anomenada condició de Novikov, menys restrictiva que la segona però més fàcil de veure.

Definim un procés exponencial multidimensional. Trobem que per un moviment brownià n-dimensional $B(t) = (B_t^1, B_t^2, ..., B_t^n)$, un procés estocàstic n-dimensional $X(t) = (X_t^1, X_t^2, ..., X_t^n)$ tal que $X_t^i \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[0,T])$ $\forall i = 1, ..., n$ i, conseqüentment, tota integral estocàstica general per al procés X_t^i està ben definida, es defineix

$$Z_t(X(t)) = \exp\Big[\sum_{i=1}^n \int_0^t X(s)^i dB(s)^i - \frac{1}{2}\int_0^t |X(s)^i|^2 ds\Big], \qquad 0 \le t \le T$$

De la mateixa manera que en el cas unidimensional, aplicant la fórmula d'Itô per a $F(t,x) = e^x$, $f(s)^j = X(s)^j$ i $g(s)^j = -\frac{1}{2}(X(s)^j)^2$, trobem:

$$\begin{aligned} e^{X_t} &= e^0 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_0^t e^{X_s^j} X(s)^j dB(s)^i + \sum_{j=1}^m \int_0^t (-\frac{1}{2}e^{X_s^j}(X(s)^j)^2 + \sum_{j=1}^m \frac{1}{2}e^{X_s^j}(X(s)^j)^2)ds \\ &= 1 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_0^t X(s)^j e^{X_s^j} dB(s)^i. \end{aligned}$$

que en el cas que $m = n$, aleshores

$$Z_t(X(t)) = 1 + \sum_{i=1}^n \int_0^t X(s)^i Z_s(X) dB(s)^i.$$

8 Teorema de Girsanov

Finalment, arribem al teorema de Girsanov. La idea principal d'aquest teorema és trobar processos estocàstics $Y(t,x)$ tal que $B(t,x) - Y(t,x)$ sigui també un moviment brownià respecte alguna mesura de probabilitat. D'aquesta manera, donat un problema amb mesura relativament difícil de treballar, podrem fer un canvi de variable i mesura per tal que el nou procés sigui més fàcil de manipular.

Primerament, podem veure que processos estocàstics definits en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, si satisfan certes condicions, poden esdevenir moviment brownià respecte l'espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$. El teorema que ho demostra és la caracterització de Lévy. Comencem definint la variació creuada abans d'enunciar-lo en una dimensió.

Definició 8.1. *La variació creuada d'un procés estocàstic n-dimensional* $(X_t^1, ..., X_t^n)$ *es defineix com*

$$\langle X_t^i, X_t^j \rangle = \frac{1}{4}[\langle X_t^i + X_t^j \rangle - \langle X_t^i - X_t^j \rangle], \quad 0 \leq t < \infty$$

on $X_t^i \cdot X_t^j - \langle X_t^i, X_t^j \rangle$ *és una martingala. Aquests elements del vector seran ortogonals si* $\langle X_t^i, X_t^j \rangle = 0$.

Teorema 8.2. ***Teorema de caracterització de Lévy.*** *Sigui* M_t *un procés estocàstic definit respecte la filtració* $\{\mathcal{F}_t\}$ *i mesura de probabilitat P. Aleshores* M_t *és un moviment brownià respecte una mesura de probabilitat Q si* M_t *és una martingala contínua respecte Q amb* $Q(M_0 = 0) = 1$ *i el compensador és* $\langle M \rangle_t = t$ *quasi segurament per a cada t.*

En el cas multidimensional, si $X_t = (X_t^1, ..., X_t^n)$ és un procés estocàstic n-dimensional tal que X_t^i és una martingala relativa a la filtració $\{\mathcal{F}_t\}$ i la mesura de probabilitat Q i tal que la variació creuada satisfà $\langle X_t^k, X_t^j \rangle = \delta_{kj} t$ on $1 \leq k, j \leq n$, aleshores X_t és un moviment brownià de dimensió n.

A continuació mostrem uns lemes que seran necessaris per a la demostració del teorema de Girsanov. Recordem que P és una mesura de probabilitat definida en una σ-àlgebra $\mathcal{F}$ i definint $\mathbb{E}_P$ l'esperança respecte P. Recordem també que $L^1(P)$ denota l'espai de variables aleatòries integrables respecte la mesura de probabilitat P.

Lema 8.3. *Sigui* $Y \in L^1(P)$ *no negativa i integrable tal que defineix una nova mesura de probabilitat* $dQ = Y dP$. *Sigui* $\mathbb{E}_Q$ *l'esperança respecte a la mesura de probabilitat* Q. *Aleshores, per qualsevol* σ*-àlgebra* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ *i variable aleatòria* $X \in L^1(Q)$, *tenim*

$$\mathbb{E}_Q[X|\mathcal{G}] = \frac{\mathbb{E}_P[XY|\mathcal{G}]}{\mathbb{E}_P[Y|\mathcal{G}]}, \qquad \textit{(q.s.) per la mesura de probabilitat } Q$$

Demostració. Per la relació entre les mesures, la definició de probabilitat condicionada 3.2 i la propietat 4 de la proposició 3.4, veiem que, per qualsevol $G \in \mathcal{G}$

$$\int_G \mathbb{E}_Q[X|\mathcal{G}]dQ = \int_G \mathbb{E}_Q[X|\mathcal{G}]Y dP = \int_G \mathbb{E}_P[\mathbb{E}_Q[X|\mathcal{G}]Y|\mathcal{G}]dP = \int_G \mathbb{E}_Q[X|\mathcal{G}] \cdot \mathbb{E}_P[Y|\mathcal{G}]dP.$$

Com que $X \in L^1(P)$ i $Y \in L^1(Q)$, on P, Q són probabilitats definides sobre els conjunts de la σ-àlgebra $\mathcal{F}$, aleshores les esperances condicionades estan ben definides. Falta veure que també ho està XY:

$$\mathbb{E}_P|XY| = \int_\Omega |XY|dP = \int_\Omega |X|YdP = \int_\Omega |X|dQ < \infty,$$

(en ser Y no negativa, aplicant la relació entre les mesures i la condició necessària perquè $X \in L^1(Q)$), per tant està ben definida l'esperança condicionada $\mathbb{E}_P[|XY||\mathcal{G}]$. Per la definició d'esperança condicionada 3.2,

$$\int_G \mathbb{E}_P[XY|\mathcal{G}]dP = \int_G XYdP = \int_G XdQ = \int_G \mathbb{E}_Q[X|\mathcal{G}]dQ.$$

Per tant, igualant les dues equacions trobem $\int_G \mathbb{E}_Q[X|\mathcal{G}] \cdot \mathbb{E}_P[Y|\mathcal{G}]dP = \int_G \mathbb{E}_P[XY|\mathcal{G}]dP$ i per tant implica que

$$\mathbb{E}_Q[X|\mathcal{G}] = \frac{\mathbb{E}_P[XY|\mathcal{G}]}{\mathbb{E}_P[Y|\mathcal{G}]}.$$

□

Seguidament, abans d'enunciar i demostrar el teorema de Girsanov, introduïm un lema necessari. En la secció 7, de processos exponencials, hem demostrat que per qualsevol procés estocàstic $X(t,w) \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[0,T])$ aleshores el procés exponencial $Z_t(X)$ és una P-martingala. Per altra banda, definim una nova mesura de probabilitat Q a $(\Omega, \mathcal{F})$ donada per $dQ = Z_T(X)dP$, o de manera integral $Q(A) = \int_A Z_T(X)dP \ \forall A \in \mathcal{F}$.

Lema 8.4. *Sigui $X(t,w) \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[0,T])$ tal que el procés estocàstic $Z_t(X)$ satisfà $E(Z_t(X)) = 1 \ \forall t \in [0,T]$. Aleshores un procés estocàstic $Y(t), 0 \le t \le T$ adaptat a la filtració $\{\mathcal{F}_t\}$ és una Q-martingala si i només si $Y(t)Z_t(X)$ és una P-martingala.*

Demostració. Suposem $Y(t)X(t)$ és una P-martingala. A més a més, en complir-se les hipòtesis del teorema 7.2, veiem que $Z_t(X)$ és una P-martingala.

Sigui Q la nova mesura de probabilitat definida com $dQ = Z_T(X)dP$. Tal i com hem vist a la demostració del lema anterior (8.3), la restricció de Q a la filtració $\{\mathcal{F}_t\}$ és

$$dQ_t = Z_t(X)dP, \quad 0 \le t \le T.$$

Per tant, en temes d'integrabilitat, $Y(t)dQ = Y(t)Z_t(X(t))dP$; Y és Q-integrable si i només si $YZ_t(X)$ és P-integrable. En complir-se les condicions del lema 8.3, l'apliquem per una filtració $\{\mathcal{F}_s\}$, $s \le t$:

$$\mathbb{E}_Q[Y|\mathcal{F}_s] = \frac{\mathbb{E}_P[YZ_T(X)|\mathcal{F}_s]}{\mathbb{E}_P[Z_T(X)|\mathcal{F}_s]}.$$

Utilitzant les propietats 4 i 6 de la proposició 3.4 i el fet que $Z_t(X)$ i $Y(t)Z_t(X)$ són P-martingala, trobem que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_P[Y(t)Z_T(X)|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}_P[\mathbb{E}_P[Y(t)Z_T(X)|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}_P[Y(t)\mathbb{E}_P[Z_T(X)|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}_P[Y(t)Z_t(X)|\mathcal{F}_s] = Y(s)Z_s(X).\end{aligned}$$

Per tant,
$$\mathbb{E}_Q[Y(t)|\mathcal{F}_s] = \frac{\mathbb{E}_P[YZ_T(X)|\mathcal{F}_s]}{\mathbb{E}_P[Z_T(X)|\mathcal{F}_s]} = \frac{Y(s)Z_s(X)}{Z_s(X)} = Y(s)$$
on queda demostrat que $Y(t)$ és una Q-martingala.

Ara suposem que $Y(t)$ és una Q-martingala. Sigui $s \leq t$. Tal i com acabem de veure, $\mathbb{E}_P[Y(t)Z_T(X)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}_P[Y(t)Z_t(X)|\mathcal{F}_s]$. A més a més, en complir-se les condicions d'integrabilitat del lema 8.1 (vist en el cas anterior), trobem que

$$\mathbb{E}_P[Y(t)Z_T(X)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}_Q[Y(t)|\mathcal{F}_s] \cdot \mathbb{E}_P[Z_T(X)|\mathcal{F}_s] = Y(s)Z_s(X)$$
per ser $Y(s)$ una Q-martingala i $Z_T(X)$ una P-martingala. $\square$

Teorema 8.5. *Teorema de Girsanov.* *Sigui $X(t,w) \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[0,T])$ tal que el procés estocàstic $Z_t(X)$ satisfà $\mathbb{E}(Z_t(X)) = 1$ $\forall t \in [0,T]$. Aleshores el procés estocàstic*
$$W(t) = B(t) - \int_0^t X(s)ds,$$
és un moviment brownià respecte la nova mesura de probabilitat $dQ = Z_T(X)dP$.

Demostració. Considerem la filtració $\{\mathcal{F}_t\} = \sigma(B(s); 0 \leq t \leq T)$. Tal i com hem vist a la secció de processos exponencials, $Z_t(X)$ pot escriure's com $Z_t(X) = 1 + \int_0^t X(s)Z_s(X)dB(s)$, o simbòlicament de forma diferencial $dZ_t(X) = X(t)Z_t(X)dB(t)$. Aleshores, aplicant altra vegada la fórmula d'Itô per al procés $W(t)Z_t(X)$ en $a = 0$ obtenim que
$$W(t)Z_t(X) = \int_0^t Z_s(X)dW(s) + \int_0^t W(s)dZ_s(X) + \int_0^t dW(s)dZ_s(X).$$
Si substituïm les formes diferencial $dZ_t(X)$ i $dW(t) = dB(t) - X(t)dt$,
$$\begin{aligned} W(t)Z_t(X) &= \int_0^t Z_s(X)(dB(s) - X(s)ds) + \int_0^t W(s)X(s)Z_s(X)dB(s) \\ &+ \int_0^t (dB(s) - X(s)ds)X(t)Z_s(X)dB(t) = \int_0^t Z_s(X)(dB(s) - X(s)ds) \\ &+ \int_0^t W(s)X(s)Z_s(X)dB(s) + \int_0^t X(s)Z_s(X)ds \\ &= \int_0^t [1 + X(s)W(s)]Z_s(X)dB(s) \end{aligned}$$
on hem utilitzat la taula d'Itô, $dB(t)dB(t) = dt, dtdB(t) = 0$. $W(t)Z_t(X)$ és també un procés d'Itô, i per tant $[1 + X(s)W(s)]Z_s(X) \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[0,T])$. Aleshores, pel teorema 5.23 $W(t)Z_t(X)$ és una P-martingala local. En particular, en ser acotada a [0,T], pel teorema 5.25 és una martingala. Aleshores, pel lema 8.4 $W(t)$ és una Q-martingala. Seguidament, repetim el procediment per a $W(t)^2 - t$.
$$d((W^2(t) - t)Z_t(X)) = d(W^2(t) - t)Z_t(X) + (W^2(t) - t)dZ_t(X) + d(W^2(t) - t)dZ_t(X).$$
Tenint en compte la taula d'Itô trobem que
$$d(W^2(t) - t) = d(W^2(t)) - dt = 2WdW + dWdW - dt = 2WdW = 2W(dB(t) - Xdt)$$

i, per tant,

$$
\begin{aligned}
&d((W^2(t)-t)Z_t(X)) \\
&\quad = 2W(t)Z_t(X)dB(t) - 2W(t)X(t)Z_t(X)dt + (W^2(t)-t)X(t)Z_t(X)dB(t) \\
&\quad + 2W(t)X(t)Z_t(X)dB(t)dB(t) - 2W(t)X(t)^2 Z_t(X)dtdB(t) \\
&\quad = (2W(t) + (W^2(t)-t)X(t))Z_t(X)dB(t).
\end{aligned}
$$

En forma integral,

$$
(W^2(t)-t)Z_t(X) = \int_0^t (2W(s) + (W^2(s)-s)X(s))Z_s(X)dB(s),
$$

que també és un procés d'Itô i, pel teorema 5.23 una P-martingala local. Pel mateix argument que anteriorment (proposició 5.25), és una martingala. Aleshores, utilitzant el lema 8.4, com que $(W_t^2 - t)Z_t(X)$ és una P-martingala, aleshores $W_t^2 - t$ és una Q-martingala. Així doncs, W_t^2 pot descomposar-se com $W_t^2 = (W_t^2 - t) + t$, que en ser la suma d'una martingala i un procés creixent, veiem que s'identifica amb la descomposició de Doob Meyer (teorema 4.7). En particular, el compensador és $\langle W \rangle_t = t$. Aleshores, pel teorema de caracterització de Levy, 8.2, $W(t)$ és un moviment brownià respecte a la mesura de probabilitat Q.

$\square$

En el cas multidimensional considerem un vector de dimensió n per a definir el procés estocàstic $X(t) = (X_t^1, X_t^2, ..., X_t^n)$ tal que $X_t^i \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, [0,T])$ $\forall i = 1, ..., n$, i considerem també un moviment brownià n-dimensional $B(t) = (B_t^1, B_t^2, ..., B_t^n)$. Aleshores, el procés $W(t) = (W_t^1, W_t^2, ..., W_t^n)$ definit per

$$
W(t)^i = B(t)^i - \int_0^t X_s^i ds, \quad \forall i = 1, ..., n
$$

és un moviment brownià n-dimensional a $(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$.

9 Mercat financer

En aquesta segona part del projecte veurem com s'aplica l'anàlisi estocàstica que hem discutit en anteriors seccions dins d'un model financer en particular: el model de Black-Scholes. Primerament, però, definim una sèrie de conceptes financers relacionats per entendre posteriorment el model.

Definició 9.1. *El mercat financer és un espai on s'avaluen els preus i s'intercanvien actius financers, que seran definits a continuació, entre agents econòmics.*

Aquest mercat es regeix per la llei de l'oferta i la demanda, ja que un agent financer no podrà comprar o vendre un actiu si no n'hi ha un altre que estigui disposat a acceptar l'intercanvi. Alhora, el valor de l'actiu augmentarà si més agents econòmics hi estan interessats, i baixarà en cas contrari.

Definició 9.2. *Un instrument financer és un contracte entre dues parts amb el qual es pot especular i liquidar.*

Definició 9.3. *L'actiu financer és un instrument financer -no és tangible- que permet al comprador el dret a rebre ingressos per part del venedor. El comprador aconsegueix rentabilitat amb els diners que hi inverteix, mentre que el venedor es financia.*

Matemàticament s'escriuran com a processos estocàstics $\{\mathcal{F}_t\}$ adaptats a l'espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i de quadrat integrable.

Un tipus d'actiu és el derivat financer, on el valor d'aquest es basa en el valor d'un actiu de referència, anomenat actiu subjacent, que està completament determinat en un temps T pel preu de mercat en aquest instant.

Definició 9.4. *L'opció financera és un derivat financer que fixa un contracte de compra o venda d'un actiu subjacent. El comprador té el dret, però no l'obligació, de comprar o vendre aquest actiu prèviament acordat a un preu determinat.*

L'opció de compra/venda d'aquest actiu subjacent ve inclosa amb el pagament, per part del comprador, d'una quantitat acordada en el moment de l'adquisició. En aquest cas, el comprador només realitzarà l'acció en cas que se'n beneficii. Per contra, el venedor haurà de complir forçosament la decisió del comprador. Existeixen dos tipus d'opcions: les opcions europees només permeten realitzar l'opció de compra/venda al final del contracte, mentre que les opcions americanes ho permeten fer en qualsevol instant entre l'inici i el final del contracte.

Definició 9.5. *Una cartera de valors és un conjunt d'actius financers on un agent econòmic ha invertit. El valor de la cartera és la suma del valor de tots els actius.*

La quantitat de cada actiu de la cartera es determinarà matemàticament com un conjunt de processos estocàstics també $\{\mathcal{F}_t\}$ adaptats. Aquest conjunt l'anomenarem estratègia financera.

Dins del model de mercat, els actius poden ser sense risc o amb risc. Aquest concepte indica la incertesa sobre l'evolució del valor de l'actiu en temps futur, fent que el rendiment de l'actiu pugui ser diferent a l'esperat. Ambdós tipus d'actius poden descriure's amb una equació diferencial de variables aleatòries.

Definició 9.6. *Un actiu financer sense risc és un actiu sense volatilitat o extremadament petita, i per tant el seu valor no varia gaire amb el pas del temps. Pot descriure's com* $dA(t) = rA(t)dt$*, amb* $A(0) = 1$ *per conveniència i* $r > 0$*, que és la taxa lliure de risc.*

Veiem que A en realitat és una funció determinista, però ens serà útil futurament escriure-la com a equació diferencial estocàsstica.

Definició 9.7. *L'actiu amb risc és aquell que té un nivell de volatilitat significativa, i per tant el valor fluctua amb el temps. Es representa mitjançant el procés d'Itô de la forma* $dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t)$*, amb* $S(0)$ *determinat, on* $\mu \in \mathbb{R}$ *és la tendència i* $\sigma > 0$ *la volatilitat de* S*.*

9.1 Opció de compra i de venda europea

En aquest subapartat descrivim breument i de forma simple quin és el mecanisme de compra i venda d'una opció europea. Tal i com veurem detalladament en la següent secció, $S(t)^1$ determinarà el valor d'un actiu amb risc. Primerament definim el preu strike o d'exercici.

Definició 9.8. *El preu strike o d'exercici d'una opció és un preu fix* K *al què el propietari de l'opció compra o ven l'actiu subjacent. Generalment s'estableix d'acord amb el preu de mercat de l'actiu subjacent.*

Qualsevol opció tindrà un preu d'exercici determinat, K. Si analizem el funcionament de l'opció de compra europea, ens trobem amb una trajectòria de la forma

$$X(t, S(t)^1) = \max(0, S(t)^1 - K),$$

on $S(t)^1$ és la variable aleatòria de l'actiu de risc i K el preu d'exercici. En el moment en què el contracte expira, de temps T,

$$X(T, S(T)^1) = \max(0, S(T)^1 - K).$$

Si $S(T)^1 > K$ aleshores el comprador pot comprar l'actiu a un preu K i immediatament vendre'l a un preu $S(T)^1$, obtenint beneficis. En cas contrari, el comprador no obtindria cap benefici, i per tant no exercirà el dret. En cas que l'opció sigui de venda, aleshores la funció és de la forma

$$X(t, S(t)^1) = \max(0, K - S(t)^1),$$

obtenint benefici en l'expiració del contracte en el cas que $K > S(T)^1$.

Per altra banda, volem determinar quin és el preu just de compra o venda d'una opció durant el període del contracte. Aquest és d'interès ja que, un cop comprada l'opció al temps inicial $t = 0$, el propietari de l'opció pot revendre-la a un altre inversor o agent econòmic i transferir l'opció de compra/venda de l'actiu. D'aquesta manera, el mercat financer especula amb les opcions abans que s'acabi el temps de contracte. Aquests valors es determinaran a partir de les equacions del model de Black-Scholes.

10 Model de Black-Scholes

El model de Black-Scholes és un model matemàtic basat en una equació utilitzada en la matemàtica financera. Aquest estima el valor teòric de les opcions financeres basant-se en altres instruments financers i tenint en compte factors de risc. En resum, calcula el preu adequat de les opcions. Aquest model, desenvolupat per Fisher Black i Myron Scholes, va ser amb què Scholes va rebre el premi Nobel d'economia l'any 1997. Inicialment va idear-se per a trobar el preu adequat per a opcions financeres europees, que són les que utilitzarem en aquest projecte. Per tal de trobar la fórmula, cal abans considerar certes hipòtesis:

a) No hi ha costos de transacció d'actius ni impostos.

b) La taxa d'interès sense risc, que anomenarem r, és constant.

c) La volatilitat, que anomenarem σ, és constant.

d) No hi ha oportunitats d'arbitratge.

10.1 Condició d'autofinançament

Per tal d'explicar el model d'una forma simple, només considerem dos actius financers, un sense risc, que per 9.6 pot escriure's com el procés

$$dS(t)^0 = rS(t)^0 dt, \quad \text{amb } S(0)^0 = 1$$

i un altre amb risc, que per 9.7 és de la forma

$$dS(t)^1 = \mu S(t)^1 dt + \sigma S(t)^1 dB(t), \quad \text{amb } S(0)^1 > 0,$$

on r, μ, σ són constants amb $r > 0, \sigma > 0$ i $B(t)$ és un moviment brownià.

A continuació definim una estratègia financera mitjançant una parella de processos (x_t, y_t) adaptats a la filtració $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$. Aquests processos són les quantitats d'actius de risc i sense risc, respectivament en la cartera de valors en el temps t, i el valor d'aquest últim es defineix com

$$V(t) = x(t)S(t)^1 + y(t)S(t)^0.$$

En el nostre cas volem que el valor de la cartera de valors només depengui del valor dels actius, és a dir, volem que es mantingui el capital durant tot el període (per tant, ni se n'injecta ni se'n treu).

Definició 10.1. *Una estratègia està autofinançada si*

a) $\int_0^T |y(t)|dt < \infty$ *i* $\int_0^T (x(t))^2 dt < \infty$ *quasi segurament.*

b) $V(t) = V(0) + \int_0^T x(s)dS(s)^1 + \int_0^T y(s)dS(s)^0.$

A partir de la segona propietat de la definició 10.1,

$$dV(t) = x(t)dS(t)^1 + y(t)dS(t)^0.$$

Per altra banda, utilitzant la fórmula d'Itô 6.5,

$$\begin{aligned}
dV(t) &= d(x(t)S(t)^1 + y(t)S(t)^0) \\
&= d(x(t)S(t)^1) + d(y(t)S(t)^0) \\
&= d(x(t))S(t)^1 + x(t)d(S(t)^1) + d(x(t))d(S(t)^1) \\
&+ d(y(t))S(t)^0 + y(t)d(S(t)^0) + d(y(t))d(S(t)^0) \\
&= d(x(t))S(t)^1 + x(t)d(S(t)^1) + d(y(t))S(t)^0 + y(t)d(S(t)^0).
\end{aligned}$$

Si igualem les dues equacions trobem que la quantitat d'actius sense i amb risc són constants, ja que

$$S(t)^1 dx_t + S(t)^0 dy_t = 0.$$

Per tant, podem veure que per tal que el valor de la cartera de valors només depengui del valor dels actius, cal que l'estratègia estigui autofinançada.

10.2 Valor descomptat

A continuació definim els actius amb preu descomptat. El descompte vindrà donat per la diferència entre el preu amb valor de la moneda al futur i en l'actualitat. Dit d'altra manera, el valor descomptat dona el preu futur amb el valor de la moneda actual. L'objectiu serà veure que és aquest procés és una martingala.

Definició 10.2. *Els actius amb preu descomptat són aquells actius de la forma*

$$\widehat{S}(t) = e^{-rt} S(t)^1,$$

on $S(t)^1$ és l'actiu amb risc i r la taxa lliure de risc.

En termes diferencials veiem que $d\widehat{S}(t) = d(e^{-rt}S(t)^1)$, i utilitzant la diferencial de l'actiu amb risc i la fórmula d'Itô 6.5, veiem que

$$\begin{aligned}
d\widehat{S}(t) &= e^{-rt} dS(t)^1 - re^{-rt} S(t)^1 dt - re^{-rt} dt dS(t)^1 \\
&= e^{-rt} \mu S(t)^1 dt + \sigma S(t)^1 e^{-rt} dB(t) - re^{-rt} S(t)^1 dt \\
&= e^{-rt} S(t)^1 [(\mu - r)dt + \sigma dB(t)] = \widehat{S}(t)[(\mu - r)dt + \sigma dB(t)]
\end{aligned}$$

on hem utilitzat la taula d'Itô, $dtdt = 0, dtdB(t) = 0$.

Definim un procés estocàstic $Z_t(X)$ tal que $dZ_t(X) = -(\mu - r)\sigma^{-1} Z_t(X) dB(t)$ amb $Z_0(X) = 1$ i $\mathbb{E}(Z_t(X)) = 1$. Tal i com vam veure a la secció 7, aquesta expressió equival a un procés estocàstic exponencial. D'acord amb el teorema de Girsanov, 8.5, el procés estocàstic $W(t) = B(t) + (\mu - r)\sigma^{-1} t$ és un moviment brownià respecte la mesura de probabilitat Q, $dQ = Z_T(X)dP$, on Q i P són mesures de probabilitat equivalents. Aleshores, substituïnt el P-moviment brownià $B(t)$ per l'acabat de trobar,

$$d\widehat{S}(t) = \widehat{S}(t)[(\mu - r)dt + \sigma dB(t)] = \widehat{S}(t)[(\mu - r)dt + \sigma dW(t) - (\mu - r)dt] = \widehat{S}(t)\sigma dW(t).$$

En particular, veiem altra vegada que l'expressió de $\widehat{S}(t)$ correspon a un procés exponencial, vist a la secció 7. A través de la condició de Novikov veiem que $\mathbb{E}(\widehat{S}(t)) = 1$ (proposició 7.3) i, conseqüentment, pel teorema 7.2 veiem que $\widehat{S}(t)$ és una Q-martingala.

Pel que fa a l'actiu amb risc, veiem que pot escriure's en termes del moviment brownià respecte Q,

$$\begin{aligned} dS(t)^1 &= \mu S(t)^1 dt + \sigma S(t)^1 dB(t) \\ &= \mu S(t)^1 dt + \sigma S(t)^1 dW(t) - (\mu - r) S(t)^1 dt \\ &= \sigma S(t)^1 dW(t) + r S(t)^1_t dt. \end{aligned}$$

Aquesta equació diferencial té com a solució $S(t)^1 = S(0)^1 e^{rt - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B_t}$, tal i com podem veure demostrat en els llibres [2] i [3].

Anomenarem la mesura Q com la mesura neutral de risc. Aquest tipus de mesura té la particularitat que sota la probabilitat Q l'actiu amb risc no conté tendència μ, sinó que retorna el mateix benefici d'inversió que l'actiu sense risc, r, i a més a més els corresponents actius amb preu descomptat són martingales.

De la mateixa manera, podem definir el valor descomptat de la cartera:

$$\widehat{V}(t) = e^{-rt} V(t).$$

Seguidament podem veure que quan treballem amb valors descomptats, l'actiu sense risc és irrellevant.

Proposició 10.3. *Una cartera de valors és autofinançada si i només si* $d\widehat{V}(t) = x(t) d\widehat{S}(t)^1$.

Demostració. ($\Rightarrow$) Suposem que la cartera (x_t, y_t) és autofinançada. Aleshores

$$dV(t) = x(t) dS(t)^1 + y(t) dS(t)^0.$$

Per la fórmula d'Itô (6.5), i afegint la definicició de $V(t)$ veiem que

$$\begin{aligned} d\widehat{V}(t) &= d(e^{-rt} V(t)) \\ &= -re^{-rt} V(t) dt + e^{-rt} dV(t) - re^{-rt} dV(t) dt \\ &= -re^{-rt} V(t) dt + e^{-rt} dV(t) \\ &= -re^{-rt} (x_t S(t)^1 + y_t S(t)^0) dt + e^{-rt} (x_t dS(t)^1 + y_t dS(t)^0) \\ &= -re^{-rt} x_t S(t)^1 dt - re^{-rt} y_t S(t)^0 dt + e^{-rt} x_t dS(t)^1 + e^{-rt} y_t dS(t)^0. \end{aligned}$$

Tenint en compte que $dS(t)^0 = rS(t)^0 dt$, trobem termes que es cancel·len,

$$\begin{aligned} d\widehat{V}(t) &= -re^{-rt} x_t S(t)^1 dt - re^{-rt} y_t S(t)^0 dt + e^{-rt} x_t dS(t)^1 + e^{-rt} y_t r S(t)^0 dt \\ &= -re^{-rt} x_t S(t)^1 dt + e^{-rt} x_t dS(t)^1. \end{aligned}$$

Tal i com hem observat prèviament en aquesta secció $d(e^{-rt} S(t)^1) = e^{-rt} dS(t)^1 - re^{-rt} S(t)^1 dt$ i per tant $d\widehat{V}(t) = x(t) d\widehat{S}(t)^1$.

($\Leftarrow$) Sigui $d\widehat{V}(t) = x(t) d\widehat{S}(t)^1$. Per altra banda, tenim

$$dV(t) = d(e^{rt}\widehat{V}(t)) = re^{rt}\widehat{V}(t)dt + e^{rt} d\widehat{V}(t) + re^{rt} d\widehat{V}(t) dt = re^{rt}\widehat{V}(t)dt + e^{rt} d\widehat{V}(t)$$

on s'ha anul·lat un terme per $re^{rt}d\widehat{V}(t)dt = re^{rt}d\widehat{S}(t)dt = re^{rt}\sigma dW(t)dt$ i $dW(t)dt = 0$. Afegint la hipòtesi a l'equació i substituïnt trobem que

$$\begin{aligned}
dV(t) &= rV(t)dt + e^{rt}x(t)d\widehat{S}(t) \\
&= rx(t)S(t)^1dt + ry(t)S(t)^0dt + e^{rt}x(t)(e^{-rt}dS(t)^1 - re^{-rt}S(t)^1dt) \\
&= y(t)dS(t)^0 + x(t)dS(t)^1
\end{aligned}$$

i per tant demostrem que (x_t, y_t) és una cartera de valors autofinançada.

□

10.3 Principi de no arbitratge

Donem una sèrie de definicions que hauran de complir els processos per tal de poder formular el model de Black-Scholes.

Definició 10.4. *Una estratègia $\phi = (x_t, y_t)$ per $t \in [0, T]$ és admissible si és autofinançada i el valor descomptat de la cartera de valors corresponent és, per a tot t, no negatiu, tal que* $\sup(\widehat{V}(t))$ *és de quadrat integrable en la mesura de probabilitat Q.*

Definició 10.5. *Una opció és replicable si el valor monetari en el moment d'expiració del contracte és el mateix que el d'una estratègia admissible.*

En altres paraules, l'opció és replicable si $V(T) = X$, és a dir, al final del contracte el valor de la cartera i de la funció d'opció de compra s'igualen.

Teorema 10.6. *Qualsevol opció definida per una variable aleatòria $\mathcal{F}_t$-mesurable X, no negativa i de quadrat integrable en la mesura de probabilitat neutral de risc Q, en el model de Black-Scholes és replicable, i per cada temps t qualsevol estratègia (x_t, y_t) replicable amb cartera $(S(t)^1, S(t)^0)$ obté el valor $V(t) = \mathbb{E}_Q(e^{-r(T-t)}X|\mathcal{F}_t)$.*

La demostració d'aquest teorema pot trobar-se a [10]. Aquest teorema defineix el model com a complet.

Definició 10.7. *Una estratègia admissible $\phi = (x_t, y_t)$ d'una cartera de valors $(S(t)^1, S(t)^0)$ és amb arbitratge si el corresponent valor $V(t)$ compleix*

$$V(0) = 0, \quad P(V(T) \geq 0) = 1, \quad P(V(T) > 0) > 0.$$

Aquest terme explica el possible fet que un agent econòmic, sense invertir inicialment, sigui capaç d'obtenir beneficis sense possibilitat de tenir pèrdues. Aquest cas no es contempla en el model de Black-Scholes, i per tant direm que l'estratègia del model és de no arbitratge. Per demostrar sota quines condicions l'estratègia és de no arbitratge, abans cal veure que $\widehat{V}(t)$ és una martingala.

Lema 10.8. *Sigui ϕ una estratègia autofinançada i admissible. Aleshores el corresponent valor descomptat de la cartera $\widehat{V}(t)$ és una supermartingala sota la mesura neutral de risc Q.*

Demostració. Per la proposició 10.3, com que per hipòtesi ϕ és una estratègia admissible, aleshores

$$d\widehat{V}(t) = x(t)d\widehat{S}(t)^1 = x(t)\widehat{S}(t)^1\sigma dW(t).$$

Com que $\widehat{S}(t)^1$ és una martingala, aleshores $x(t)\widehat{S}(t)^1\sigma \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[0,bT])$ i per tant, pel teorema 5.23, és una martingala local en Q, no negativa (per ser el valor $V(t) \geq 0$). Aleshores, pel teorema 5.24, $\widehat{V}(t)$ és una supermartingala. □

Teorema 10.9. *Sigui $\mathcal{P}$ el conjunt de mesures neutrals de risc d'un model de mercat financer en l'espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F})$. Si $\mathcal{P} \neq \emptyset$, aleshores no hi ha oportunitats d'arbitratge.*

Demostració. Sigui $Q \in \mathcal{P}$ una mesura neutral de risc. Aleshores, el valor descomptat de la cartera de valors de l'estratègia ϕ, $\widehat{V}(t)$ amb $t \in [0,T]$, és una supermartingala pel lema 10.8, és a dir,

$$\mathbb{E}_Q[\widehat{V}(t)|\mathcal{F}_s] \leq \widehat{V}(s) \quad \forall s \leq t \in [0,T].$$

Seguidament veiem si es compleixen les condicions per ser oportunitat d'arbitratge. Primerament considerem la propietat d'iniciar-se el valor de la cartera a 0,

$$V(0) = 0 \implies \widehat{V}(0) = 0 \implies \mathbb{E}_Q(\widehat{V}(t)|\mathcal{F}_0) \leq 0 \quad \forall t \in [0,T]$$

però, com que $V(t) \geq 0 \quad \forall t$, aleshores forçosament

$$\mathbb{E}_Q[\widehat{V}(t)|\mathcal{F}_0] = E_Q[\widehat{V}(t)] = 0 \quad \forall t \in [0,T]$$

$$\implies \mathbb{E}_Q(\widehat{V}(T)) = 0.$$

Seguidament, tenint en compte que les mesures Q i P són equivalents,

$$P(V(T) \geq 0) = 1 \implies Q(V(T) \geq 0) = Q(V(T) = 0) + Q(V(T) > 0) = 1$$

Recordant que $V(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0,T]$, en cas que $Q(V(T) > 0) > 0$ implicaria que $\mathbb{E}_Q(V(T)) > 0$, i conseqüentment pel valor descomptat $E_Q(\widehat{V}(T)) > 0$, que entra en contradicció amb la condició anterior, per tant,

$$Q(V(T) > 0) = 0 \implies P(V(T) > 0) = 0$$

i demostrem que no es poden complir les tres condicions d'arbitratge alhora.

□

10.4 Equació

Donem una proposició necessària per a posteriorment desenvolupar i trobar l'equació del model de Black-Scholes.

Proposició 10.10. *Siguin X i Y dues variables aleatòries en dos espais de probabilitat $(\Omega_1, \mathcal{F})$ i $(\Omega_2, \mathcal{G})$, respectivament. Sigui X $\mathcal{B}$-mesurable i Y independent de $\mathcal{B}$. Aleshores, per qualsevol funció de Borel no negativa ϕ a $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$, la funció del tipus*

$$\varphi(x) = \mathbb{E}(\phi(x, Y))$$

amb $x \in \Omega_1$ és una funció de Borel en $(\Omega_1, \mathcal{F})$ i

$$\mathbb{E}(\phi(X, Y)|\mathcal{B}) = \varphi(X)$$

amb probabilitat 1.

La demostració la trobem a [10].

En el cas d'una opció europea, que està definida per $X(t, S(t)^1) = \max(0, S(t)^1 - K)$ en cas de compra i $X(t, S(t)^1) = \max(0, K - S(t)^1)$ en cas de venda, tal i com hem definit a la secció 9.1, veiem que és una variable aleatòria $\mathcal{F}_t$-mesurable i no negativa en qualsevol dels dos casos. A més a més, com que $S(t)^1$ és és de quadrat integrable, aleshores X també ho és.

Tenint en compte la solució de l'equació diferencial $dS(t)^1 = \sigma S(t)^1 dW(t) + rS(t)^1_t dt$ entre t i T i que l'opció pot escriure's de la forma $X = f(S_T)$ on $f(x) = \max(x - K, 0)$, alehsores trobem que

$$V(t) = \mathbb{E}_Q(e^{-r(T-t)} f(S_T)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_Q(e^{-r(T-t)} f(S_t e^{r(T-t)+\sigma(W_T - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)})|\mathcal{F}_t).$$

Veiem que, pel teorema 2.4, $W_T - W_t$ és un moviment brownià i, per tant, $W_T - W_t$ és independent de $\mathcal{F}_t$. Per altra banda, $S(t)^1$ és $\mathcal{F}_t$-mesurable. Per tant, pel teorema 11.10, on $X = S(t)^1$ i $Y = W_T - W_t$, veiem que $V(t) = F(t, S(t)^1)$. Alehsores trobem ambdues igualtats:

$$\begin{aligned} F(t, S(t)^1) &= \mathbb{E}_Q(e^{-r(T-t)} f(S^1_t e^{r(T-t)+\sigma(W_T - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)})|\mathcal{F}_t) \quad \text{(q.s.)} \\ F(t, x) &= \mathbb{E}_Q(e^{-r(T-t)} f(x e^{r(T-t)+\sigma(W_T - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)})). \end{aligned}$$

En el cas de l'opció europea, on $f(x) = \max(x - K, 0)$, trobem que la funció és de la forma

$$F(t, x) = \mathbb{E}_Q\big[e^{-r(T-t)} \max(x e^{r(T-t)+\sigma(W_T - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} - K, 0)\big].$$

Aleshores, tornant a l'espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on P i Q es relacionen mitjançant $dQ = e^{-r(T-t)} dP$,

$$F(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \max\big(x e^{r(T-t)+\sigma(W_T - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} - K, 0\big) e^{-r(T-t)} dQ.$$

En ser $W_T - W_t$ un moviment brownià d'esperança 0 i variança $T - t$, podem trobar una nou procés que segueixi una distribució gaussiana estàndard, que serà de la forma

$$y = \frac{W_T - W_t}{\sqrt{T - t}},$$

i substituïnt trobem

$$F(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r(T-t)} \max(xe^{r(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} - K, 0))\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy.$$

En ser la funció $f(x)$ un màxim, aquesta només contribuirà si

$$xe^{r(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} - K > 0,$$

que operant trobem

$$r(T-t) + \sigma y\sqrt{T-t} - \frac{\sigma^2}{2}(T-t) > \log\frac{K}{x} \implies y > \frac{\log\frac{K}{x} - (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$\implies y \leq \frac{\log\frac{x}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} := d_1,$$

i per tant la integral queda de la forma

$$F(t,x) = \int_{-\infty}^{d_1} e^{-r(T-t)}(xe^{r(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} - K)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$
$$= \int_{-\infty}^{d_1} e^{-r(T-t)}xe^{r(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy - \int_{-\infty}^{d_1} e^{-r(T-t)}K\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy.$$

Tenint en compte que $\frac{1}{2}(\sigma^2(T-t)+2\sigma\sqrt{T-t}+y^2) = (\sigma\sqrt{T-t}+y)^2)$ i definint la funció de distribució de la distribució gaussiana estàndard com $N(d_1)$,

$$F(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_1} xe^{\frac{1}{2}(\sigma\sqrt{T-t}+y)^2}dy - e^{-r(T-t)}KN(d_1).$$

Finalment, fem un nou canvi de variables per obtenir la integració d'una funció de distribució gaussiana estàndard: $z = \sigma\sqrt{T-t}+y$, i busquem el nou límit superior d'integració

$$y = z - \sigma\sqrt{T-t} \leq \frac{\log\frac{x}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \implies z \leq \frac{\log\frac{x}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} := d_2,$$

i, per tant, l'equació final per a una opció de compra europea és de la forma

$$F(t,x) = xN(d_2) - Ke^{-r(T-t)}N(d_1).$$

De forma similar podem trobar l'equació per al cas d'una opció de venda europea, on $f(x) = \max(K-x, 0)$, i per tant

$$F(t,x) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_1) - xN(-d_2).$$

11 Conclusions

Després de llegir tot el treball podem afirmar que hem aconseguit explicar una base prou rigorosa i mantingut el fil per les diferents seccions per tal d'arribar a enunciar i demostrar el teorema de Girsanov, que és el teorema a partir del qual gira aquest projecte. Tot i que només és explicat a través de les nocions de martingales i moviment brownià, aquest és suficient per ser utilitzat en l'aplicació financera en què vam decidir aprofundir, el model de Black-Scholes.

Pel que fa a aquest model financer, hem pogut presentar-lo d'una forma rigorosa per al cas d'opcions europees, on hem explicat les bases del model a través de teoremes i demostracions i hem desenvolupat les equacions diferencials estocàstiques fins a arribar a l'equació principal de Black-Scholes.

Així doncs, considero que hem complert amb els objectius d'aquest treball, així com també amb els objectius personals envers aquest últim projecte matemàtic, que acaba amb una etapa plena d'estudi, intensitat, esforç i recompensa.

Referències

[1] Bingham, Nicholas H.; Kiesel, Rüdinger. *Risk-Neutral Valuation: Pricing and Hedging of Financial Derivatives.* 2ª ed. London: Springer, 2004.

[2] Capiński, Marek; Kopp, Ekkehard. *The Black-Scholes Model.* Cambridge: Cambridge University Press, 2012.

[3] Capiński, Marek; Kopp, Ekkehard; Traple, Janusz. *Stochastic Calculus for Finance.* Cambridge: Cambridge University Press, 2012.

[4] Chung, K.L.; Williams, R.J. *Introduction to Stochastic Integration.* 2ª ed. Boston: Birkhäuser, 1990.

[5] Dana, Rose-Anne; Jeanblanc, Monique. *Financial Markets in Continuous Time.* trad. Anna Kennedy. New York: Springer, 2007.

[6] Economipedia. `<<https://economipedia.com/definiciones>>`

[7] Hirsa, Ali; Neftci, Salih N. *An Introduction to Mathematics of Financial Derivatives.* 3ª ed. Oxford: Elseiver, 2014.

[8] Karatzas, Ioannis; Schreve, Steven E. *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* 2ª ed. New York: Springer, 1998.

[9] Kuo, Hui-Hsiung. *Introduction to Stochastic Integration.* New York: Springer, 2006.

[10] Lamberton, Damien; Lapeyre, Bernard. *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance.* 2ª ed. London: Chapman & Hall/CRC, 2008.