

Grado en Estadística

Título: ESTUDIO DE LOS RÉCORDS OLÍMPICOS CON TÉCNICAS DE “ANÁLISIS DE SUPERVIVENCIA”.

Autor: Wilhem Oliver Atao Salazar

Director: Martin Ríos Alcolea

Departamento: Genética, microbiología y estadística

Convocatoria: Enero 2022



UNIVERSITAT DE
BARCELONA



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Facultat de Matemàtiques i Estadística

RESUMEN

El análisis de supervivencia se suele utilizar en diversos estudios clínicos para estudiar el tiempo de un paciente hasta que presente un cierto evento (muerte, contraer una enfermedad. . .). En este trabajo se aplicarán métodos no paramétricos de análisis de supervivencia a un caso muy particular: los récords en carreras que ha habido en los juegos olímpicos. Se planteará desde un enfoque de análisis de supervivencia una serie de preguntas al que se dará respuesta con diversas técnicas que se usarían en el campo de la medicina como la estimación de la función supervivencia.

Según los resultados analizados con los test de Cox-mantel, de Logrank, y de Kruskal-Wallis podemos concluir que en las pruebas de 100m, 200m y 10.000m las mujeres baten los records más rápido que los hombres, mientras que en las otras categorías estudiadas son similares. Este comportamiento distinto en esas categorías indicaría que o bien los records de los hombres y mujeres en esas pruebas evolucionan de manera diferente, o bien son debidos a otros parámetros como el número de atletas total de cada género en la categoría o el desarrollo científico y técnico adaptado a cada género y prueba.

Palabras clave:

Estimación producto-límite, estimación de la función supervivencia, curvas de supervivencia, test de Cox-mantel, test de Logrank, test de Kruskal-Wallis.

ABSTRACT

Survival analysis often is applied in a plenty of clinic studies in order to study the time until a patient presents a certain event, for instance, death, getting a disease, etc.). In this project, non-parametric methods of survival analysis will be applied in a very particular case: Olympic Games running records. Within this survival analysis approach, a cluster of questions will be raised and answered with various techniques, which would be used in medicine such as the estimation of survival functions.

According to the results given by Cox-mantel, Logrank and Kruskal-Wallis tests, it is concluded that in 100m, 200m and 10.000m women beat records faster than men, whereas in the other categories analyzed are similar. This distinct behavior in those categories could point that either men's and women's records evolve differently in those events or they are caused by other parameters as the total amount of athletes by gender in each event or scientific and technic development adapted for each gender and category.

Key words:

Product-limit estimation, estimation of survival functions, survival curve, Cox-mantel test, Logrank test, Kruskal-Wallis test.

CLASSIFICACIÓ AMS:

G2F12, G2G05, G2M99, G2P10, G2B15

Índice

1. Introducción:	3
1.1 Objetivos del trabajo	3
1.2 Metodología y estructura	3
1.3 Recolección de datos	3
2. Planteamiento del trabajo	4
2.1 Planteamiento y definición del caso atlético según los elementos de análisis de supervivencia.	4
2.2. Definiciones de variables.	5
3. Métodos no paramétricos de estimación de las funciones de supervivencia $\hat{S}(t)$	5
3.1 Estimaciones producto límite de la función de supervivencia	5
3.2 Cálculo de las estimaciones de la media($\hat{\mu}$) y la varianza de la media($\widehat{Var}(\hat{\mu})$)	8
4. Test de hipótesis no paramétricos para la comparación entre 2 distribuciones de supervivencia	9
4.2 El test de Cox-Mantel:	9
4.3 El test de Logrank :	10
4.4. Test de Kruskal-Wallis, método para comparar $K \geq 2$ muestras:	12
5. Metodología.	12
5.1 Definición y terminología.	12
5.2 Método de recolección y tratamiento de datos.	13
5.2.1 Punto inicial del estudio	13
6. Análisis estadístico de supervivencia de los resultados de diversas pruebas y presentación.	14
6.1 Carreras de corta distancia:	14
6.1.1 Comparación entre “curvas de supervivencia” según género de cada prueba.	14
6.1.2 “Curvas de supervivencia” entre distintas pruebas según género:	18
6.2 Carreras de media distancia:	19
6.2.1 Comparación entre “curvas de supervivencia” según género de cada prueba.	19
6.2.2 Comparación entre “curvas de supervivencia” de cada prueba según género.	22
6.3 Carreras de larga distancia.	24
6.3.1 Comparación entre “curvas de supervivencia” según género de cada prueba.	24
6.3.2 Comparación entre “curvas de supervivencia” de cada prueba según género.	26
6.4 Discusión de los resultados.	29
7. Conclusiones	31
8. Bibliografía	33
Anexos	34

1. Introducción:

1.1 Objetivos del trabajo

Ya hace más de 2500 años en el antigua Grecia, concretamente en la ciudad de Olimpia se celebran unas competiciones atléticas, entre ellas carreras de distancia, saltos, tiro en arco y demás para honrar a Zeus. Más recientemente se volvieron a celebrar este evento llamado juegos olímpicos en Atenas en 1896, solo para hombres, en el caso de las mujeres empezaron a participar en 1900 pero con algunas **restricciones** y la participación era menor. Esto ha ido cambiando en cada edición cada 4 años hasta este último año(exceptuando las ediciones de 1916, 1940 y 1944 que no se hicieron debido a las 1a y 2a guerra mundial).

Es decir en total han habido 29 ediciones y la participación ha ido en aumento por todo el mundo y las competiciones o pruebas también. Al principio en la 1a edición habían solo 43 competiciones o pruebas y participaron unos 280 participantes de 12 naciones , y desde el 2008 hay alrededor de 300 pruebas, en cada una de las ediciones de 2016 y 2020 participaron alrededor de 11000 deportistas de 200 países. Dicho esto si vemos de forma genérica los resultados de estos 29 ediciones de los juegos olímpicos, podemos ver que en la mayoría de pruebas se han ido mejorando el resultado o récord de dicha prueba.

Por ejemplo, en el caso de los 100 metros lisos de hombres se empezó en el 1a edición con el mejor récord(medalla de oro) con 12 segundos. En la edición de 2012, Usain Bolt obtiene la mejor marca en esta prueba con 9,63 segundos. Ahora prácticamente cualquier velocista no tiene que subir ni de los 11 segundos si aspira participar en los juegos. De forma similar sucede con la maratón. En la 1a edición la mejor marca apenas bajaba de 3 horas(2:58 horas), pero por ejemplo en la edición de 2016 el atleta kenieta Kipchoge gana el evento con 2:08 horas(50 minutos de diferencia en un poco más de un siglo). También corredores de larga distancia del día de hoy saben que para ir a una competición como los juegos no tiene que subir ni de las 3 horas.

Llegados a este punto, cabe preguntarse si la mejora o evolución de estas 2 pruebas a través de las ediciones o años se asemejan o no?

En otras palabras, a lo largo de las ediciones que han habido, **en que prueba la de 100 metros lisos o la maratón se bate más rápido el récord establecido (en cuantas ediciones o años) ? y con otras pruebas de correr cuál se batirá más rápido?**

Pero esto es lo que respecta a los hombres, pero para el caso las mujeres que participaron más adelante y con menos participación que poco a poco se ha ido en aumento. **La evolución de estas ediciones podría asemejarse a la de los hombres? quién está batiendo los récords más rápido las mujeres o los hombres? Cómo influye la diferencia de participación ya se a nivel de inicio de participación en los juegos olímpicos como el número de atletas que participan en ellos a la evolución a lo largo de las ediciones que han habido en estos más de 100 años?**

En este trabajo se intentará aplicar métodos estadísticos (más concretamente con métodos no paramétricos de análisis de supervivencia) para dar respuesta a estas preguntas.

1.2 Metodología y estructura

Se utilizará métodos no paramétricos para calcular las funciones estimadas de supervivencia según las 2 variables de interés: género y tipo de prueba. En concreto se utilizará el método producto límite para estimar las funciones de supervivencia. Luego se aplicará diversos contrastes de hipótesis no paramétricos como el test de **Log-Rank**, el de **Cox-mantel** y **Kruskal-Wallis** para comparar las distribuciones de las funciones de supervivencia estimadas anteriormente.

1.3 Recolección de datos

Los datos se han recopilado principalmente de las siguientes 3 webs:

1. <https://olympics.com/en/olympic-games/rio-2016/results/athletics/100m-women>. Esta web nos da los resultados de los juegos olímpicos usando el filtro que nos permite acotar los ganadores de las

pruebas. Primero se selecciona el año o edición de los juegos, luego se selecciona la prueba y te devuelve la clasificación con sus marcas desde la última posesión hasta la 1a (medalla de oro).

2. http://www.theolympicdatabase.nl/Athletics/100_metres/olympic/medals/47 . Esta web tiene el objetivo de recolectar los resultados atléticos de todos los años a nivel de participantes, ganadores y sus resultados. Lo hace de manera más ordenada y fácil de exportar a un excel por ejemplo que la anterior web. Aunque contiene información solo desde la edición 1896 hasta la edición de los 2008.
3. <https://www.worldathletics.org/records/all-time-toplists/sprints/100-metres/outdoor/women/senior?regionType=world&timing=all&windReading=all&page=1&bestResultsOnly=true&firstDay=1899-12-31&lastDay=2021-03-12>. Esta otra web es más genérica del atletismo. Esta es la web oficial que guarda los resultados de eventos relacionados con atletismo. El enlace dado es uno que nos permite filtrar por intervalo de tiempo los mejores resultados. El inconveniente es que no queda claro el tipo de prueba, solo nos da información del lugar del evento. Pero si se quiere comprobar algún dato sobre la marca de un atleta en un año en concreto en los juegos olímpicos y que las otras 2 webs no la tiene, es muy probable que ese dato se encuentre aquí.

2. Planteamiento del trabajo

2.1 Planteamiento y definición del caso atlético según los elementos de análisis de supervivencia.

El análisis de supervivencia es un conjunto de métodos estadísticos que sirven para analizar un tipo de datos cuya variable de respuesta o de interés está definida como **el tiempo hasta que un evento** de cualquier tipo suceda. Esta parte de la estadística se utiliza en campos de la biología y medicina. El tipo de ejemplo que se sigue es el de un paciente que se le observa desde el inicio del estudio hasta que muere (**evento**). Por eso se suele asociar a este tiempo hasta que el evento ocurra como el **tiempo de supervivencia**, de ahí el nombre de análisis de supervivencia.

De esta forma, lo que tendremos en este tipo de datos, por cada **individuo o paciente** (no tiene porque ser una persona) del estudio que pueda presentar alguna **condición** (alguna enfermedad o adicción en medicina, un tipo de pieza industrial que pueda fallar . . .) hasta que suceda el evento (puede ser la muerte, o la recuperación de una enfermedad o adicción, el fallo de una pieza industrial. . .). Otra característica del análisis de supervivencia es que no siempre podremos saber exactamente el tiempo hasta que el evento ocurra de algunos pacientes, este tipo de observaciones se denominan **datos censurados**. Podríamos diferenciar 3 tipos de datos censurados.

1- Datos censurados por la derecha (*right-censored data*): El tiempo **real** hasta que el evento suceda es igual o mayor que el tiempo que se ha observado en el estudio. (es el más frecuente)

Esto puede ocurrir debido a los siguientes motivos:

- Un paciente no presenta o experimenta el evento antes de que el estudio acabe. Es decir si sabemos que durante el periodo de estudio no lo ha presentado, pero puede que lo presente después de la finalización del mismo.
- Se pierde al paciente durante el estudio o se pierde información del mismo, es decir el momento donde presentará el evento si es que lo hará ya no lo podremos saber.
- Por otros motivos el paciente decide no continuar con el estudio, por lo tanto el momento el cuál presente el evento, no se sabrá. Pero si el periodo observado durante el estudio.

2- Datos censurados por la izquierda (*left-censored data*): El tiempo **real** hasta que el evento suceda es igual o menor que el tiempo que se ha observado en el estudio.

3- Datos censurados por intervalos (*interval-censored data*): Es cuando dado un intervalo temporal antes de que empiece, el paciente no presenta la enfermedad o evento y después de que pase este intervalo temporal se sabe que el paciente presentó el evento. El momento real donde presenta el evento se encuentra en ese intervalo y no lo sabemos.

Ejemplos de estudios supervivencia podrían ser:

- Estudiar el tiempo en remisión (tiempo en el que la enfermedad está bajo control) de pacientes de leucemia. El evento fallida sería cuando la enfermedad ya no está control
- El estudio del tiempo que tardan aquellos presos con libertad condicional en volver ser arrestados. Este arresto es el evento de interés.
- En las aseguranzas de vida, no interesa saber el tiempo hasta la muerte del asegurado.
- En ingeniería, podría interesar evaluar el tiempo hasta que unas piezas industriales fallen

Para concluir podríamos decir que los 5 elementos básicos para definir en un estudio de supervivencia son los siguientes: Los **pacientes o individuos** del estudio, **evento o fallida** de los pacientes, la **condición o tratamiento** de los pacientes, el **tiempo** hasta que suceda el evento y la **censura** si es que hay y de que tipo.

2.2. Definiciones de variables.

Definiremos las siguientes variables y funciones para realizar el estudio:

- T : Es la variable aleatoria tiempo de supervivencia con $T \geq 0$.
- t : Es un valor específico de \mathbf{T} .
- δ : Una variable aleatoria que nos indica el estatus de fallida o censura $\delta = \begin{cases} 1 & \text{si se presenta el evento fallida} \\ 0 & \text{si hay censura} \end{cases}$
- $F(t)$ será la función de distribución de la variable T .

A la hora de modelar en diversas ocasiones según el tipo de datos que se disponga $F(t)$ podría ser conocida o aproximarse a una distribución probabilista conocida. En este caso los métodos paramétricos son los más adecuados. En caso contrario, donde la $F(t)$ es una distribución desconocida o no se tiene suficiente información (ya sea a nivel del tamaño de la muestra o de otro tipo) para conocerla, los métodos no paramétricos serían más adecuados pero en este caso no se dispone mucha información sobre este tipo de estudio.

$S(t)$ será la función de supervivencia que nos da la probabilidad de que nuestro paciente o objeto de estudio presente el evento fallida en un tiempo superior a t , .Es decir tenemos $S(t) = P(Y > t) = 1 - F(t)$ (esta relación nos permitirá trabajar con $S(t)$ en los tests de hipótesis en lugar de $F(t)$). También $S(t)$ tiene una forma contraria $F(t)$, si teóricamente la variable t fuese infinita se sabe que $S(0) = 1$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$. A diferencia de $F(t)$ que empieza en 0 y acaba en 1. Pero en la práctica donde el tiempo del estudio es finito y en general los pacientes también. $\hat{S}(t)$ será una función de salto.

3. Métodos no paramétricos de estimación de las funciones de supervivencia $\hat{S}(t)$

3.1 Estimaciones producto límite de la función de supervivencia

Empezamos con el caso donde todos los individuos se han observado durante el estudio hasta su muerte de tal manera que sabremos exactamente los tiempos de supervivencia. Sean t_1, t_2, \dots, t_n los tiempos exactos de supervivencia de los n individuos del estudio. Una estimación de la función de supervivencia $S(t)$ es la estimación de la proporción de individuos de nuestra muestra que sobreviven más tiempo que t . Es decir:

$$\hat{S}(t) = \frac{\text{Número de individuos de la muestra que han sobrevivido después } t}{\text{El número total de individuos en la muestra}}$$

Primeramente ordenamos los tiempos de supervivencia en orden ascendente:

$$t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq t_{(3)} \leq \dots \leq t_{(n)}$$

Entonces la función de supervivencia para $t_{(i)}$ podrá estimarse como:

$$\hat{S}(t_{(i)}) = \frac{n-i}{n} \quad (1)$$

En caso de empates se utilizará el mayor (i). Es decir, si $n=10$ individuos sin datos censurados y hay empate para los 2 primeros y el 4o, entonces las estimaciones de estos serán $\hat{S}(t_{(1)}) = \hat{S}(t_{(2)}) = \hat{S}(t_{(4)}) = \frac{n-3}{n}$.

Como al principio del estudio cada individuo o paciente está vivo y al final del estudio ningún individuo sobrevive después de $t_{(n)}$. Es decir, tenemos que:

$$\hat{S}(t_{(0)}) = 1 \quad \text{y} \quad \hat{S}(t_{(n)}) = 0 \quad (2)$$

En la práctica, $\hat{S}(t)$ contiene cada tiempo **distinto** de supervivencia. Las ecuaciones (1) y (2) hacen que $\hat{S}(t)$ sean una función escalonada que comienza desde 1 y decrece en saltos de $\frac{1}{n}$ (si no hay empates) hasta 0. Este método solo puede aplicarse en el caso que todos los pacientes o individuos hayan muerto al final del estudio, es decir, cuando hay ausencia de censura.

Lo que nos interesará saber para el estudio es la probabilidad de sobrevivir k años (≥ 2) o más desde el principio del estudio. Para ello podemos verlo considerando el caso inicial de $k=2$ años. La probabilidad de sobrevivir dos años o más es igual a la probabilidad de sobrevivir el primer año y luego sobrevivir un año más. Podemos escribirlo como:

$$S(2) = P(\text{sobrevivir el primer año y luego sobrevivir un año más}) =$$

$$S(2) = P(\text{sobrevivir 2 años dado que el paciente ya ha sobrevivido el primer año}) \times P(\text{sobrevivir el primer año}) \quad (3)$$

La estimación Kaplan-Meier de $S(2)$ estima la anterior ecuación (3) como:

$$S(2) = (\text{Proporción de pacientes que han sobrevivido 2 años dado que sobrevivieron por un año}) \times (\text{proporción de pacientes que sobrevivieron por un año}) \quad (4)$$

Generalizando esta regla de las ecuaciones (3) y 4 para k obtenemos que

$$\hat{S}(k) = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_k \quad (5)$$

donde

- P_1 : Denota la proporción de pacientes que sobreviven al menos un año después del inicio del estudio.
- P_2 : Denota la proporción de pacientes que sobreviven el segundo año después de que hayan sobrevivido un año desde el inicio del estudio.
- P_3 : Denota la proporción de pacientes que sobreviven el tercer año después de que hayan sobrevivido dos años desde el inicio del estudio.
- ...
- P_k : Denota la proporción de pacientes que sobreviven el k año después de que hayan sobrevivido $k-1$ años desde el inicio del estudio

Entonces, la estimación PL (Producto límite) de la probabilidad de sobrevivir cualquier número de k años desde el inicio del estudio es el producto de la misma estimación que el año previo $k-1$ y la tasa de supervivencia observado de ese año k que sería la P_k . Las estimaciones PL son estimaciones máximo versemblantes.

En la práctica, podemos calcular las estimaciones producto límite construyendo una tabla con las siguientes columnas:

- La 1a columna (*remission time*) contiene los tiempos de supervivencia de todas las observaciones ya sean censuradas o no. Si un dato censurado tiene el mismo valor que uno no censurado. El no censurado aparecerá primero.

- La 2a columna contiene la posición i de la 1a columna. (*rank*)
- La 3a columna indica las observaciones r no censuradas es decir aquellos datos donde se han presentado el evento fallida en el estudio. Sea $r = i$.
- Para cada observación $t_{(i)}$ no censurada, calcularemos $\frac{n-r}{n-r+1}$ en la 4a columna, la proporción de pacientes que sobreviven hasta y después de $t_{(i)}$. Es decir $\frac{n-r}{n-r+1}$
- La 5a columna contiene todas las $\hat{S}(t)$ que es el producto de todos los valores $\frac{n-r}{n-r+1}$. Si hay datos no censurados que empatan se escogerá el que tengo una $\hat{S}(t)$ menor.

Sean n el número total de individuos o pacientes con tiempos de supervivencia **censurados o no**. Re-ordenamos los n tiempos de supervivencia en orden creciente como se hizo anteriormente $t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq t_{(3)} \leq \dots \leq t_{(n)}$. Entonces podemos estimar $S(t)$ cómo:

$$\hat{S}(t) = \prod_{t_{(r)} \leq t} \frac{n-r}{n-r+1} \quad (6)$$

Donde r indica los enteros positivos tales que $t_{(r)} \leq t$ con $t_{(r)}$ es un tiempo de supervivencia no censurado. Si no hay datos censurados como será el caso de estudio, entonces $r = 1, 2, \dots, n$ enteros consecutivos.

Consideramos el ejemplo de Freireich et al., Blood, 1963 [5]. Tenemos dos grupos de 21 de pacientes leucemia cada uno. El primero grupo ha recibido un cierto tratamiento y el segundo un placebo con los siguientes tiempo de supervivencia expresados en días.

Grupo 1 (tratamiento): 6,6,6,7,10,13,16,22,23,6+,9+,10+,11+,17+,19+,20+,25+,32+,32+,34+,35+ (+ indica censura)

Grupo 2 (placebo): 1,1,2,2,3,4,4,5,5,8,8,8,11,11,12,12,15,17,22,23.

Tiempo de fallida (t)	posición (i)	r	$\frac{n-r}{n-r+1}$	$\hat{S}_1(t)$
6	1	1	0.9523810	0.9523810
6	2	1	0.9500000	0.9047619
6	3	1	0.9473684	0.8571429
6	4	0	0.0000000	0.0000000
7	5	1	0.9411765	0.8067227
9	6	0	0.0000000	0.0000000
10	7	1	0.9333333	0.7529412
10	8	0	0.0000000	0.0000000
11	9	0	0.0000000	0.0000000
13	10	1	0.9166667	0.6901961
16	11	1	0.9090909	0.6274510
17	12	0	0.0000000	0.0000000
19	13	0	0.0000000	0.0000000
20	14	0	0.0000000	0.0000000
22	15	1	0.8571429	0.5378151
23	16	1	0.8333333	0.4481793
25	17	0	0.0000000	0.0000000
32	18	0	0.0000000	0.0000000
32	19	0	0.0000000	0.0000000
34	20	0	0.0000000	0.0000000
35	21	0	0.0000000	0.0000000

Podemos deducir que el valor de $\hat{S}(t)$ cuando $t = t_{(i)}$ se obtiene a partir de $\hat{S}(t_{(i-1)})$, Es decir:

$$\hat{S}(t_{(i)}) = \hat{S}(t_{(i-1)}) \frac{n-i}{n-i+1} \quad (7)$$

Donde $t_{(i)}$ y $t_{(i-1)}$ son observaciones no censuradas. Como por ejemplo, $\hat{S}(5) = \hat{S}(3) \frac{21-5}{21-5+1} = 0.8571429 \times 0.9411765 = 0.8067227$. Si no hay datos censurados hasta t , la ecuación (6) se puede expresar como:

$$\hat{S}(t) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \cdots \times \frac{n-r+1}{n-r} \times \frac{n-r}{n-r+1} \quad (8)$$

Donde r es el valor tal que $t_{(r)} \leq t$. Si simplificamos la ecuación (8) obtenemos un resultado equivalente a la ecuación (1):

$$\hat{S}(t) = \frac{n-r}{n}$$

Un ejemplo sería la tabla con el grupo 2 del placebo ya que no tiene ningún dato censurado:

Tiempo de fallida (t)	posición (i)	r	$\frac{n-r}{n-r+1}$	$\hat{S}_2(t)$
1	1	1	0.9523810	0.9523810
1	2	1	0.9500000	0.9047619
2	3	1	0.9473684	0.8571429
2	4	1	0.9444444	0.8095238
3	5	1	0.9411765	0.7619048
4	6	1	0.9375000	0.7142857
4	7	1	0.9333333	0.6666667
5	8	1	0.9285714	0.6190476
5	9	1	0.9230769	0.5714286
8	10	1	0.9166667	0.5238095
8	11	1	0.9090909	0.4761905
8	12	1	0.9000000	0.4285714
8	13	1	0.8888889	0.3809524
11	14	1	0.8750000	0.3333333
11	15	1	0.8571429	0.2857143
12	16	1	0.8333333	0.2380952
12	17	1	0.8000000	0.1904762
15	18	1	0.7500000	0.1428571
17	19	1	0.6666667	0.0952381
22	20	1	0.5000000	0.0476190
23	21	1	0.0000000	0.0000000

La varianza de la estimación producto límite $\hat{S}(t)$ se puede aproximar a:

$$Var[\hat{S}(t)] = [\hat{S}(t)]^2 \sum_{r|t_{(r)} \leq t} \frac{1}{(n-r)(n-r+1)}$$

dónde r indica las observaciones que NO son censuradas y luego el error estándar será $\sqrt{Var[\hat{S}(t)]}$. Si no hubieran observaciones censuradas, la expresión anterior se podría expresar como:

$$Var[\hat{S}(t)] = [\hat{S}(t)]^2 \sum_{i=1}^t \frac{1}{(n-i)(n-i+1)} \quad (9)$$

3.2 Cálculo de las estimaciones de la media ($\hat{\mu}$) y la varianza de la media ($\widehat{Var}(\hat{\mu})$)

Si tenemos m datos no censurados como en este caso, y tenemos ordenados los tiempos de fallida $t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq t_{(3)} \leq \dots \leq t_{(n)}$. Entonces podemos expresar la media como:

$$\hat{u} = t^{(1)} + \sum_{i=1}^{m-1} \hat{S}(t^{(i)})(t^{(i+1)} - t^{(i)}) \quad (10)$$

Para la varianza estimada de la media

$$\widehat{Var}(\hat{\mu}) = \sum_{r|t_r \leq t} \frac{A_r}{(n-r)(n-r+1)} \quad (11)$$

donde A_r es la área debajo de la curva de $\hat{S}(t)$ hacia la derecha de $t_{(r)}$. En términos de m datos no censurados tendremos:

$$A_r = \sum_{k=r}^{m-1} \hat{S}(t^{(r)})(t^{(r+1)} - t^{(r)})$$

4. Test de hipótesis no paramétricos para la comparación entre 2 distribuciones de supervivencia

Sean n_1 y n_2 son el número de individuos que reciben el tratamiento 1 y 2, respectivamente. Sean x_1, \dots, x_{r_1} las r_1 observaciones que han fallado y $x'_{r_1+1}, \dots, x'_{n_1}$ las $n_1 - r_1$ observaciones censuradas en el grupo 1 (1r tratamiento). Análogamente, tenemos y_1, \dots, y_{r_2} las r_2 observaciones que han fallado y $y'_{r_2+1}, \dots, y'_{n_2}$ las $n_2 - r_2$ observaciones censuradas en el grupo 2 (2n tratamiento).

Suponemos que las observaciones en el grupo 1 son muestras que provienen de una distribución probabilista con función de supervivencia $S_1(t)$ y las observaciones en el grupo 2 son muestras que provienen de una distribución probabilista con función de supervivencia $S_2(t)$. De esta manera podemos considerar las siguientes hipótesis:

- H_0 : $S_1(t) = S_2(t)$ Los tratamientos 1 y 2 son idénticamente efectivos
- H_1 : $S_1(t) \neq S_2(t)$ El tratamiento 1 es más efectivo que el 2
- H_2 : $S_1(t) < S_2(t)$ El tratamiento 2 es más efectivo que el 1
- H_3 : $S_1(t) > S_2(t)$ Los tratamientos 1 y 2 no son idénticamente efectivos

Si consideramos la relación que hay entre la función de distribución y la de supervivencia donde $F(t) = 1 - S(t)$

- H_0 : $F_1(t) = F_2(t)$
- H_1 : $F_1(t) \neq F_2(t)$
- H_2 : $F_1(t) < F_2(t)$
- H_3 : $F_1(t) > F_2(t)$

4.2 El test de Cox-Mantel:

[6]

Sean $t_{(1)} < \dots < t_{(k)}$ los **distintos** tiempos de falla en los dos grupos juntos y sean r_1 y r_2 el número de pacientes que han presentado el evento de falla del grupo 1 y 2 respectivamente. Denotamos $m_{(i)}$ el número de tiempos de falla iguales a $t_{(i)}$. De tal manera que se cumple

$$\sum_{i=1}^k m_{(i)} = r_1 + r_2$$

Sea el tiempo de riesgo $R(t)$ (*risk time*) como la cantidad de individuos o pacientes cuyos tiempos de falla se encuentran en algún momento después que t . Entonces, definimos

$$U = r_2 - \sum_{i=1}^k m_{(i)} A_{(i)}$$

$$I = \sum_{i=1}^k \frac{m_{(i)}(r_{(i)} - m_{(i)})}{r_{(i)} - 1} A_{(i)}(1 - A_{(i)})$$

Donde $r_{(i)}$ es el número de observaciones censuradas o no en $R(t_{(i)})$ y $A_{(i)}$ es la proporción de $r_{(i)}$ que pertenece al grupo 2. Bajo la hipótesis nula H_0 el estadístico del test $C = \frac{U}{\sqrt{I}}$ se distribuye como una normal estándar. Consideramos el ejemplo de los pacientes de leucemia y supongamos que las hipótesis a contrastar son las siguientes:

$$H_0 : F_1 = F_2 \quad (\text{o } S_1 = S_2, \text{ el tratamiento y el placebo son igual de eficientes})$$

$$H_1 : F_1 < F_2 \quad (\text{o } S_1 > S_2, \text{ el tratamiento es más efectivo que el placebo})$$

Podemos construir la siguiente tabla para facilitar el cálculo del estadístico C .

$t_{(i)}$	$m_{(i)}$	$R_1(t_{(i)})$	$R_2(t_{(i)})$	$r_{(i)}$	$A_{(i)}$
1	2	21	21	42	0.50
2	2	21	19	40	0.48
3	1	21	17	38	0.45
4	2	21	16	37	0.43
5	2	21	14	35	0.40
6	3	21	12	33	0.36
7	1	17	12	29	0.41
8	4	16	12	28	0.43
10	1	15	8	23	0.35
11	2	13	8	21	0.38
12	2	12	6	18	0.33
13	1	12	4	16	0.25
15	1	11	4	15	0.27
16	1	11	3	14	0.21
17	1	10	3	13	0.23
22	2	7	2	9	0.22
23	2	6	1	7	0.14

Los valores $U = 10.25$ y $I = 6.26$. El estadístico del test $C = \frac{U}{\sqrt{I}} = 4.1$ que es más grande que el valor $Z_{0,05} = 1.64$. De esta forma tenemos suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula. En este caso el tratamiento 6-MP suministrado en el 1r grupo, es más efectivo que el placebo suministrado en el 2o grupo.

4.3 El test de Logrank :

[4]

Las funciones *scores* son funciones logarítmicas de las funciones de supervivencia. Usando la misma notación que en el test de Cox-mantel tenemos $-e(t_{(i)}) = -\sum_{j \leq t_{(i)}} \frac{m_{(j)}}{r_{(j)}}$ que es una estimación de la función logarítmica de la función de supervivencia en $t_{(i)}$. Los valores *scores* son

$$w_i = \begin{cases} 1 - e(t_{(i)}) & \text{para una observación no censurada } t_{(i)} \\ -e(t_{(i)}) & \text{para una observación censurada } t_{(i)} \end{cases} \quad \text{El test de Logrank se basa en el estadístico } L = \frac{S}{\sqrt{V}}$$

donde S es la suma de las *scores* de uno de los 2 grupos y V es la varianza permutacional que viene dado por la siguiente expresión.

$$V = n_1 n_2 \sum_{i=1}^{n_1+n_2} \frac{w_i^2}{(n_1+n_2)(n_1+n_2+1)}$$

o también utilizando notación usada en el método de Cox-Mantel podemos expresar la V de la siguiente forma

$$V = \left\{ \sum_{j=1}^k \frac{m_{(j)}(r_{(j)} - m_{(j)})}{m_{(j)}} \right\} \frac{n_1 n_2}{(n_1+n_2)(n_1+n_2+1)}$$

Si el estadístico S es la suma de las w_i del 2o grupo, entonces es el mismo estadístico U del test Cox-Mantel. Bajo la hipótesis nula el estadístico L se distribuye asintóticamente a una normal estándar. Consideremos el mismo ejemplo de leucemia, las hipótesis a contrastar serán las mismas que en el test de Cox-Mantel.

$$\begin{aligned} H_0 : F_1 = F_2 & \quad (\text{o } S_1 = S_2, \text{ el tratamiento y el placebo son igual de eficientes}) \\ H_1 : F_1 < F_2 & \quad (\text{o } S_1 > S_2, \text{ el tratamiento es más efectivo que el placebo}) \end{aligned}$$

t_i	$m_{(i)}$	$r_{(i)}$	$\frac{m_{(i)}}{r_{(i)}}$	$e(t_{(i)})$	w_i
1.0	2	42	0.0476190	0.0476190	0.9523810
2.0	2	40	0.0500000	0.0976190	0.9023810
3.0	1	38	0.0263158	0.1239348	0.8760652
4.0	2	37	0.0540541	0.1779889	0.8220111
5.0	2	35	0.0571429	0.2351317	0.7648683
6.0	3	33	0.0909091	0.3260408	0.6739592
6.1	NA	NA	NA	NA	-0.3260408
7.0	1	29	0.0344828	0.3605236	0.6394764
8.0	4	28	0.1428571	0.5033807	0.4966193
9.1	NA	NA	NA	NA	-0.5033807
10.0	1	23	0.0434783	0.5468590	0.4531410
10.1	NA	NA	NA	NA	-0.5468590
11.0	2	21	0.0952381	0.6420971	0.3579029
11.1	NA	NA	NA	NA	-0.6420971
12.0	2	18	0.1111111	0.7532082	0.2467918
13.0	1	16	0.0625000	0.8157082	0.1842918
15.0	1	15	0.0666667	0.8823749	0.1176251
16.0	1	14	0.0714286	0.9538034	0.0461966
17.0	1	13	0.0769231	1.0307265	-0.0307265
17.1	NA	NA	NA	NA	-1.0307265
19.1	NA	NA	NA	NA	NA
20.1	NA	NA	NA	NA	NA
22.0	2	9	0.2222222	1.2529487	-0.2529487
23.0	2	7	0.2857143	1.5386630	-0.5386630
25.1	NA	NA	NA	NA	-1.5386630
32.1	NA	NA	NA	NA	NA
32.1	NA	NA	NA	NA	NA
34.1	NA	NA	NA	NA	NA
35.1	NA	NA	NA	NA	NA

Esta tabla nos proporciona los distintos tiempos de supervivencia ya sean observaciones censuradas o no (los censurados están marcados con un .1) en la primera columna t . Esta tabla facilitará el cálculo del estadístico $L = 3.9$, el cuál es mayor que $Z_{0,05} = 1.64$. Por lo tanto la hipótesis nula es rechazada con un nivel de significación de $\alpha = 0.05$. El tratamiento 6-MP es más efectivo que el placebo.

4.4. Test de Kruskal-Wallis, método para comparar $K \geq 2$ muestras:

Este test se utilizará para comparar más de 2 distribuciones de supervivencia de nuestro estudio

Sea N el número total de observaciones que hay en las K muestras y n_j el número de observaciones que habrá en la muestra j -ésima, con $j = 1, \dots, K$. De esta forma t_{ij} será el tiempo hasta la falla i -ésimo en la muestra j -ésima. La hipótesis nula a evaluar será la siguiente

H_0 : Las K muestras provienen de la misma población (los tratamientos son igualmente efectivos)

Primeramente se ordenan los t_{ij} y les asignamos un rango r_{ij} a cada uno de ellos, de manera que definimos:

$$\begin{aligned} R_j &= \sum_{i=1}^{n_j} r_{ij} && \text{(Suma de los rangos en la muestra } j = 1, \dots, K) \\ \bar{R}_j &= \frac{R_j}{n_j} && \text{(La media de los rangos en la muestra } j = 1, \dots, K) \\ \bar{R} &= \frac{N+1}{2} && \text{(La media de los todos los rangos } r_{ij}) \end{aligned}$$

Luego definimos el estadístico H de Kruskal-Wallis será:

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^K n_j (\bar{R}_j - \bar{R})^2 = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^K \frac{R_j^2}{n_j} - 3(N+1)$$

Bajo la hipótesis nula este estadístico H tiene asintóticamente una distribución chi-cuadrado con $K - 1$ grados de libertad.

Si hay empates, tendremos que dividir por $1 - \frac{1}{N^3 - N} \sum_{j=i}^g T_j$, donde g es el número de

$$H = \frac{\frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^K \frac{R_j^2}{n_j} - 3(N+1)}{1 - \frac{1}{N^3 - N} \sum_{j=i}^g T_j}$$

Acabamos de ver que si la hipótesis nula H_0 de que los K muestras provienen de la misma población es rechazada, luego nos cabe preguntar que muestras en concreto proceden de diferentes poblaciones. Para decidir que tratamientos difieren de otros se escogerá de 2 en 2 entre los K grupos de tratamientos. Se habrán de comparar las combinaciones de los K grupos escogidos de 2 en 2, es decir un total de $\binom{K}{2} = \frac{K(K-1)}{2}$ decisiones que tomar. Las hipótesis nulas serán:

H_0 : Las muestras i y j provienen de la misma población $\forall i = 1, \dots, K - 1$ y $\forall j = 1, \dots, K - 1$ con $i < j$.

Para cada uno de los $\frac{K(K-1)}{2}$ contrastes a realizar, podemos emplear los 2 tests vistos anteriormente tanto el de Cox-mantel como el de logrank.

5. Metodología.

5.1 Definición y terminología.

Como vimos en el apartado del **2. planteamiento**, ahora definiremos los siguientes conceptos para poder aplicar los métodos vistos **3. y 4.**:

1. Evento fallida: El evento, la falla o muerte será cuando un récord se haya batido, en el caso de las pruebas de velocidad será cuando en alguna edición de los juegos olímpicos algún atleta haya hecho la prueba en menos tiempo o igual que el anterior récord. En el caso de las pruebas de saltos de altura o de longitud la falla será cuando algún atleta haya hecho la prueba con mayor o igual distancia o altura.

2. Tiempo: Podríamos decir que el tiempo lo medimos en años. Pero sabemos que los juegos se celebran cada 4 años, así que realmente todos los tiempos hasta el evento serán múltiples de 4. Es decir, el nombre de ediciones, ciclos de cada 4 años que pasan hasta que se haya batido el récord establecido sería la unidad de tiempo que nos interesará evaluar.

3. Pacientes: Al tener en cuenta el evento de fallida, los pacientes en este caso no son los atletas, sino las competiciones o **ediciones de los juegos olímpicos donde se haya batido el récord** en ese deporte o prueba. Además se puede dar el caso y se ha dado que el oro y la plata de una competición hayan superado el récord mundial establecido en su momento, pero solo nos interesa el tiempo que ha tardado(en años) en batirse el récord tanto si lo batieron 1 o 2 atletas.

4. Censura: Al considerar como pacientes las competiciones donde se haya hecho un nuevo récord, no cabe la posibilidad de que no sepamos que pasa en cada una de estas competiciones. Si se bate, esa edición de los juegos será como un paciente en el estudio. Sino, no podemos considerarlo censurado porque en esa edición esta claro que no paso el evento ni pasará. Por lo tanto sabemos que no habrá censura y que todas las competiciones(pacientes) a evaluar en este estudio han pasado el evento de batir el récord(fallida o muerte del paciente).

5. Los tratamientos: En este estudio nos interesará saber si hay diferencias entre el tiempo que tarda un récord mundial(el tiempo de supervivencia) sin batirse entre las mujeres y los hombres. Si las mujeres tardarán menos tiempo en batirlo que los hombres y viceversa. Es decir, un tipo de *tratamiento* sería el género. El otro tipo de *tratamiento* sería el tipo de prueba. Nos interesaría comparar entre pruebas similares para ver si el tiempo de supervivencia es parecido o no. Por ejemplo compararíamos las pruebas entre 100, 200 y 400 lisos, si queremos saber cuál de estas pruebas de distancia corta es la que tarda menos tiempo en batir un récord por ejemplo.

5.2 Método de recolección y tratamiento de datos.

Las pruebas que estudiaremos las dividiremos en 3 bloques de la siguiente forma:

1. Pruebas de corta distancia: 100, 200 y 400 metros lisos.
2. Pruebas de media distancia: 800 y 1500 metros.
3. Pruebas de larga distancia(carreras de fondo): 5km y maratón.

Primeramente se ha recolectado los resultados de todas las ediciones de 1896 hasta la última de 2020(celebrada el 2021), que nos da un total de 29 ediciones. Se escogerán las mejores marcas es decir los medallistas de oro de cada edición. Y luego seleccionaremos aquellas ediciones donde se haya batido el récord establecido anteriormente, así que el 1r dato será el récord inicial y de ahí se irá modificando con el tiempo. De esta manera las muestras con las que trabajaremos serán de la siguiente forma:

5.2.1 Punto inicial del estudio

Las mujeres comenzaron a participar en los segundos juegos de 1900 y en solo 5 deportes o pruebas. Pero en los deportes que trataremos en el trabajo. En todos ellos las mujeres comenzaron a participar en juegos posteriores a los hombres. Por ejemplo el caso de los 100 metros y 400 metros la participación de los hombres en estas ya comenzó en los primeros juegos del 1896, pero las mujeres no comenzaron a participar hasta los juegos de 1928 y 1964, respectivamente. Por lo tanto hay que tener esto en cuenta a la hora de elaborar el punto temporal de partida del estudio. Se puede plantear de 3 maneras:

1. Considerar el punto inicial del estudio como el año en que comenzó hacerse ese deporte o prueba. De esta manera en todas las curvas de supervivencia habrá un hueco temporal para las mujeres que comenzaron a participar posteriormente en las siguientes ediciones. Entonces el primer dato en el caso de las mujeres(el 1r salto en el gráfico de la curva de supervivencia) tardará mucho más que el de los hombres, pero no porque hayan tardado en batirlo sino porque no hubo competiciones anteriormente, por lo tanto no hay pacientes(competiciones donde se haya batido récord.)

Cuadro 1: 100 metros lisos hombres

Mark	Date	Competitor	Nat	City
12.00	1896	Thomas Burke	USA	Athens
11.00	1900	Francis Jarvis	USA	Paris
11.00	1904	Archie Hahn	USA	St. Louis
10.80	1908	Reggie Walker	RSA	London
10.80	1912	Ralph Craig	USA	Stockholm
10.80	1920	Charles Paddock	USA	Antwerp
10.60	1924	Harold Abrahams	NA	Paris
10.30	1932	Eddie Tolan	USA	Los Angeles
10.30	1936	Jesse Owens	USA	Berlin
10.30	1948	Hassison Dillard	USA	London
10.20	1960	Armin Hary	GER	Rome
10.00	1964	Robert Hayes	USA	Tokyo
9.90	1968	James Ray Hines	USA	Mexico City
9.84	1996	Donovan Bailey	CAN	Atlanta
9.69	2008	Usain Bolt	JAM	Beijing
9.63	2012	Usain Bolt	JAM	London

2. Considerando el punto inicial del estudio cuando comenzaron las mujeres, en este caso no tendremos en cuenta las competiciones anteriores donde hayan participado solo los hombres y las competiciones donde se haya batido el récord. Además puede dar el caso que no coincidan temporalmente, es decir que en una prueba, la última edición donde los hombres hayan batido el récord sea anterior a la primera edición donde las mujeres batieron el récord.
3. La última posibilidad a tener en cuenta, es que el punto temporal inicial no sea relevante. Es decir, lo que interesa es el inicio de cada uno independientemente de que edición hayan empezado, ya sea en la edición del 1896 o en la de 1928.

En este trabajo se escogió la 3a opción. Lo ideal sería que tanto hombres y mujeres en cada una de las pruebas a estudiar hubieran comenzado a participar en los juegos al mismo tiempo. Por eso en este estudio no se tendrá en cuenta el tiempo en años como tal. Es decir, a la hora de interpretar las curvas de supervivencia el tiempo(en años) se puede medir como el número de competiciones o ciclos de 4 años que han pasado hasta que hay una donde se establezca un nuevo récord.

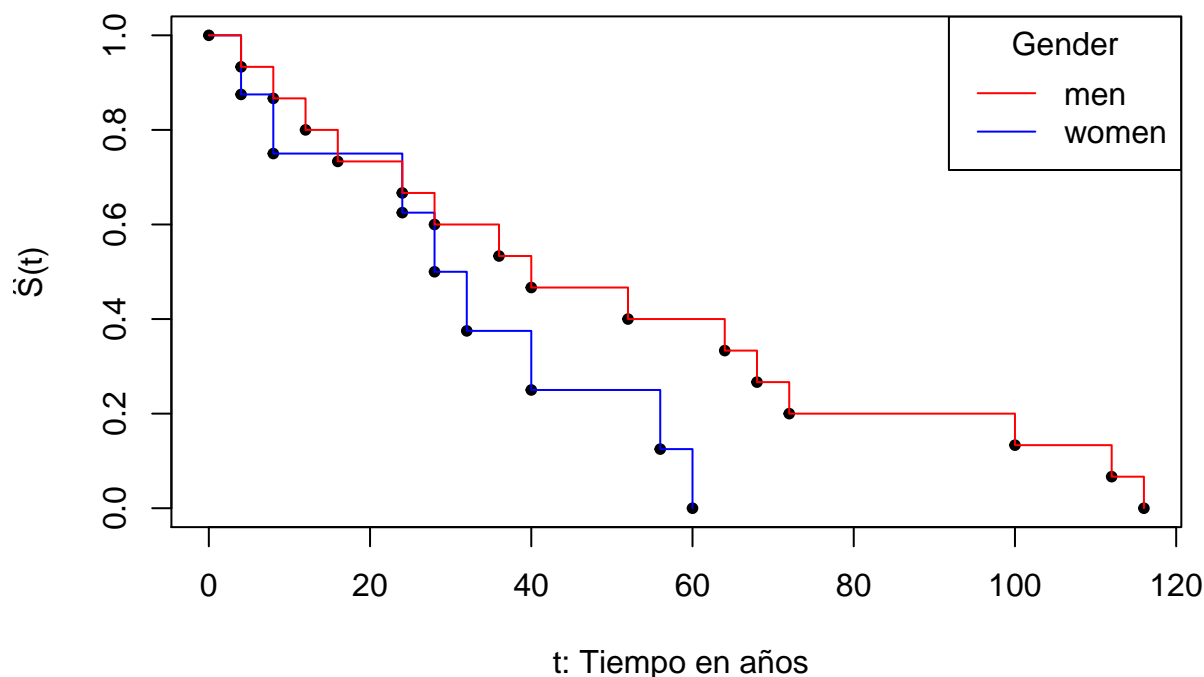
6. Análisis estadístico de supervivencia de los resultados de diversas pruebas y presentación.

6.1 Carreras de corta distancia:

6.1.1 Comparación entre “curvas de supervivencia” según género de cada prueba.

Prueba de 100m:

Funciones estimadas de supervivencia de 100m



En el cuadrado de la derecha están calculadas las estimaciones producto límite $\hat{S}_{100m,H}(t)$ (estimación de la función de supervivencia de la prueba de los 100m lisos de hombres) y $\hat{S}_{100m,M}(t)$ (estimación de la función de supervivencia de la prueba de los 100m lisos de mujeres) sus error estándar. Primeramente se observa que hay más *pacientes*(15) en el caso(*tratamiento*) de los hombres que en el de las mujeres(8). Por definición de la estimación producto límite de $S(t)$, las $\hat{S}(t)$ se pueden interpretar como la proporción de pacientes que hayan sobrevivido más tiempo que t . Es decir, de la prueba de los 100 metros lisos de mujeres, $\hat{S}_{100m,M}$ es la proporción de ediciones donde se batió récord que quedan que sucedan después de t años que empezó el estudio(desde la primera participación en este caso 1928).

Por ejemplo, $\hat{S}_{100m,H}(t_2) = \hat{S}_{100m,H}(8) 0.75$ será la proporción de ediciones donde se batió récord que quedan después de 8 años(2 ediciones) desde su inicio en 1896.

Por lo que hace la gráfica de las curvas de supervivencia vemos efectivamente que los pacientes en el caso de los mujeres presentan la falla de forma más similar hasta llegar a $t = 30$ años. A partir de ahí empieza a presentar la *fallida* antes las mujeres que los hombres. Las 2 muestras con sus respectivas $\hat{S}(t)$, provienen de la misma distribución?. Dicho de otra forma tanto para los hombres como para las mujeres en la prueba de los 100m lisos las ediciones donde batirán récord tendrán una función de supervivencia similar?. Planteamos el siguiente

t	i	$\hat{S}(t)$	Error estándar de $\hat{S}(t)$	sexo
4	1	0.9333333	0.0644061	men
8	2	0.8666667	0.0877707	men
12	3	0.8000000	0.1032796	men
16	4	0.7333333	0.1141798	men
24	5	0.6666667	0.1217161	men
28	6	0.6000000	0.1264911	men
36	7	0.5333333	0.1288122	men
40	8	0.4666667	0.1288122	men
52	9	0.4000000	0.1264911	men
64	10	0.3333333	0.1217161	men
68	11	0.2666667	0.1141798	men
72	12	0.2000000	0.1032796	men
100	13	0.1333333	0.0877707	men
112	14	0.0666667	0.0644061	men
116	15	0.0000000	NaN	men
4	1	0.8750000	0.1169268	women
8	2	0.7500000	0.1530931	women
24	3	0.6250000	0.1711633	women
28	4	0.5000000	0.1767767	women
32	5	0.3750000	0.1711633	women
40	6	0.2500000	0.1530931	women
56	7	0.1250000	0.1169268	women
60	8	0.0000000	NaN	women

contraste de hipótesis para resolver estas preguntas.

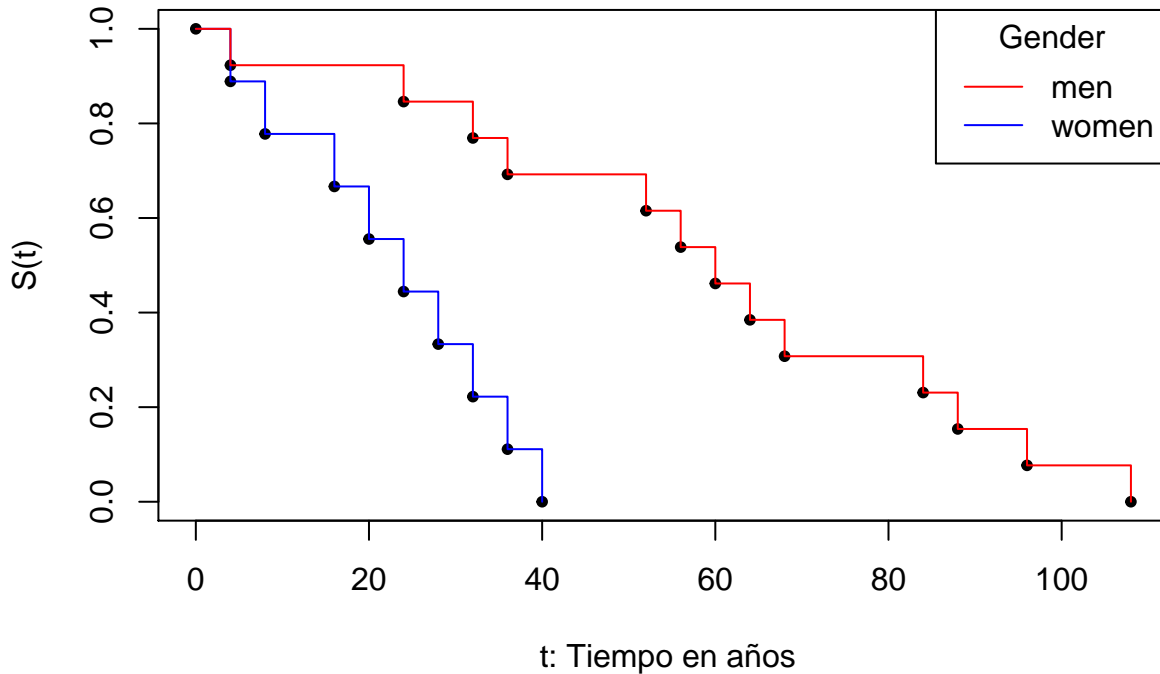
$$H_0 : S_{100m,H}(t) = S_{100m,M}(t)$$

$$H_1 : S_{100m,H}(t) > S_{100m,M}(t)$$

Si calculamos los estadísticos $C=1.58$ y $H= 1.38$ de las pruebas Cox-mantel y el de logrank, respectivamente vemos que ambos son inferiores al estadístico de discrepancia $z_\alpha = 1,64$, por lo tanto no tenemos suficiente información para rechazar la hipótesis nula de que las 2 muestras provengan de la misma población. Es decir para la prueba de 100m tanto para las mujeres y los hombres no podemos asegurar que la proporción de las ediciones donde se haya batido récord, se distribuyen diferente a lo largo de las ediciones que han habido y han participado.

Prueba de 200m:

Funciones estimadas de supervivencia de 200m



Se observa en el gráfico que desde el inicio la distancia entre las curvas se han ido alejando hasta el final del estudio. A diferencia que la prueba de los 100 metros, esta de 200, se ve más claramente como la proporción de los juegos donde se hecho récord se va manteniendo (es decir *sobreviven* más tiempo) más tiempo que en el caso de los hombres que en el de las mujeres.

De la misma forma que en los 100 metros lisos. Se realizará el siguiente contraste para ver si hay diferencias significativas entre las 2 curvas.

$$H_0 : S_{200m,H}(t) = S_{200m,M}(t)$$

$$H_1 : S_{200m,H}(t) > S_{200m,M}(t)$$

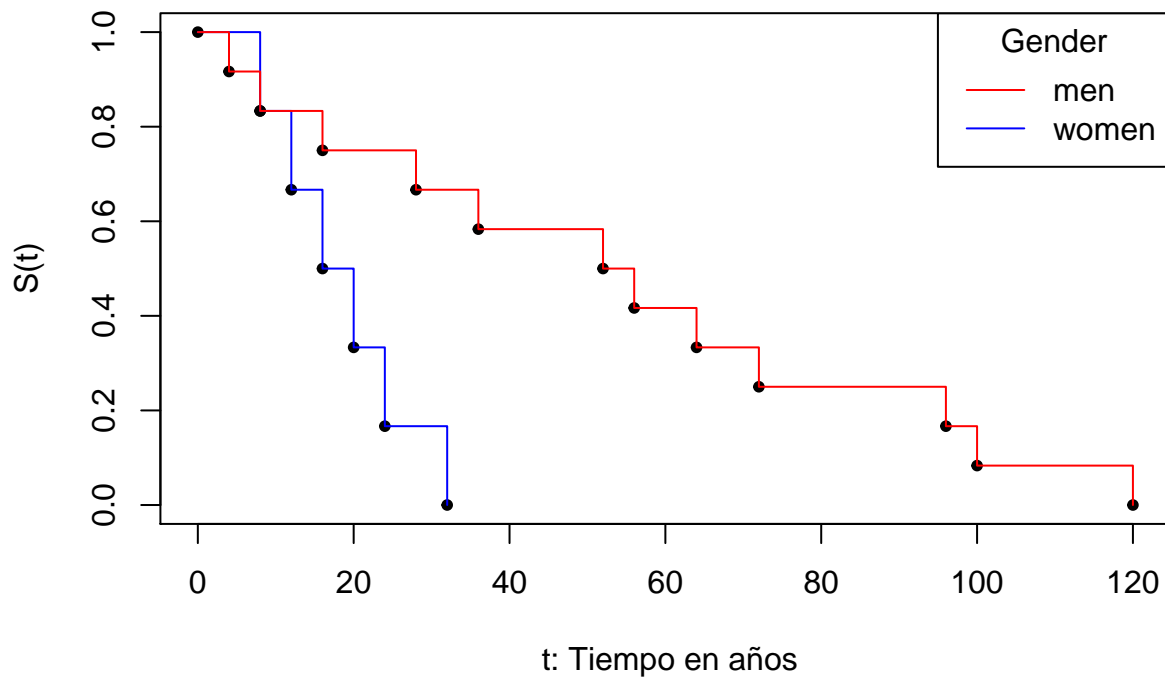
Los estadísticos de las pruebas de Cox-mantel $C = 3.47$ y el estadístico de la prueba logrank $H = 2.53$ son más grandes

t	i	$\hat{S}(t)$	Error estándar de $\hat{S}(t)$	sexo
4	1	0.9230769	0.0739053	men
24	2	0.8461538	0.1000683	men
32	3	0.7692308	0.1168545	men
36	4	0.6923077	0.1280077	men
52	5	0.6153846	0.1349320	men
56	6	0.5384615	0.1382642	men
60	7	0.4615385	0.1382642	men
64	8	0.3846154	0.1349320	men
68	9	0.3076923	0.1280077	men
84	10	0.2307692	0.1168545	men
88	11	0.1538462	0.1000683	men
96	12	0.0769231	0.0739053	men
108	13	0.0000000	NaN	men
4	1	0.8888889	0.1047566	women
8	2	0.7777778	0.1385799	women
16	3	0.6666667	0.1571348	women
20	4	0.5555556	0.1656347	women
24	5	0.4444444	0.1656347	women
28	6	0.3333333	0.1571348	women
32	7	0.2222222	0.1385799	women
36	8	0.1111111	0.1047566	women
40	9	0.0000000	NaN	women

que $Z_\alpha = 1.64$ con un nivel de significación de $\alpha=0.05$. Por lo tanto tenemos suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula y aceptar la H_1 . En lenguaje clínico, se diría que el 1r tratamiento (el caso de los hombres $S_{200m,H}(t)$) es más **efectivo** que el 2o tratamiento (el caso de las mujeres). Aquí el ser más **efectivo** se refiere a que los pacientes del estudio con el 1r tratamiento ($S_{200m,H}$) sobreviven más que los pacientes con el 2o tratamiento. En el caso que nos atiende, se puede interpretar que en la prueba de los 200 metros lisos los hombres han mantenido **durante más tiempo** la proporción de ediciones donde se estableció un nuevo récord (*pacientes*) que quedaban por suceder a lo largo de los juegos olímpicos celebrados. Dicho de otra manera, las mujeres en esta prueba han mantenido **durante menos tiempo** la proporción de ediciones donde se batió récord.

Prueba de 400m:

Funciones estimadas de supervivencia de 400m



Observando este nuevo gráfico es bastante parecido al de la prueba anterior de 200 metros lisos, desde el inicio la distancia entre las curvas se han ido alejando hasta el final del estudio. Se ve claramente como la proporción de los juegos donde se hecho récord se va manteniendo (es decir *sobreviven* más tiempo) más tiempo que en el caso de los hombres que en el de las mujeres. Se hará el siguiente test de hipótesis para comprobar si hay diferencias significativas entre las 2 muestras

$$H_0 : S_{400m,H}(t) = S_{400m,M}(t)$$

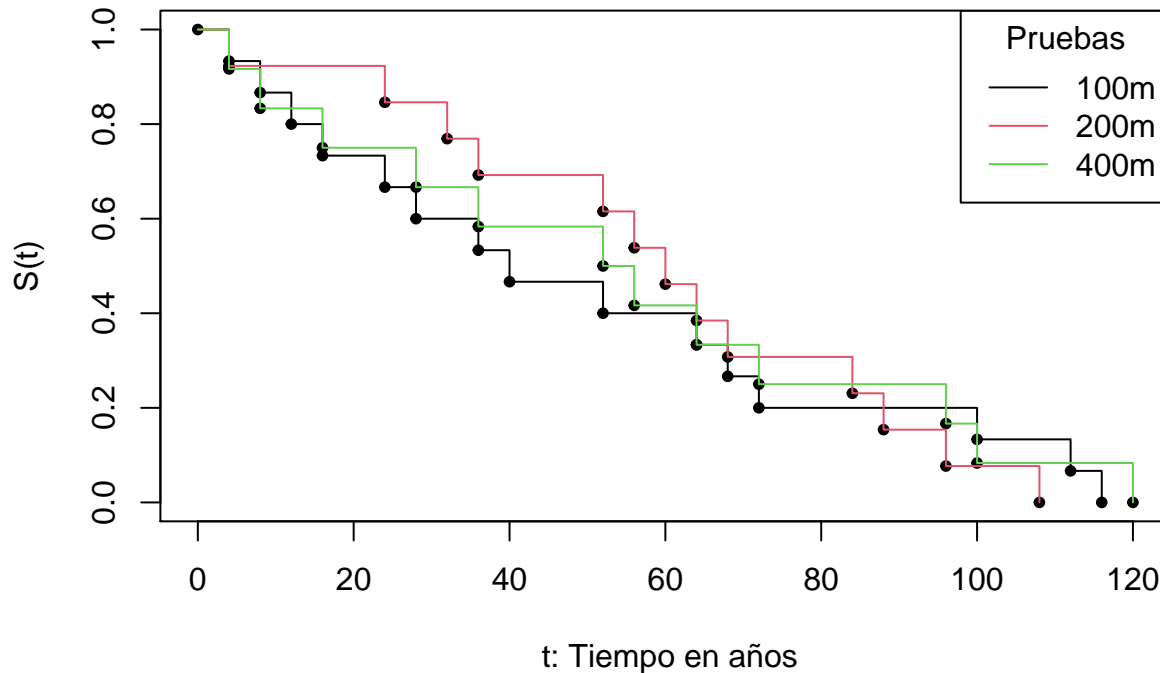
$$H_1 : S_{400m,H}(t) > S_{400m,M}(t)$$

Los estadísticos de las pruebas de Cox-mantel $C = 2.56$ y el estadístico de la prueba logrank $H = 1.86$ son más grandes que $Z_{\alpha=0,05} = 1.64$. Tenemos suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula y aceptar que el 1r tratamiento (hombres) es más efectivo que el 2o tratamiento (mujeres). Como en el caso anterior, hay que recordar que el ser **efectivo**, significa que se mantiene durante más tiempo la proporción de ediciones donde se batió récord a lo largo de las ediciones que hubieron.

6.1.2 “Curvas de supervivencia” entre distintas pruebas según género:

En el caso de hombres

Estimación de $S(t)$ de las pruebas de corta distancia



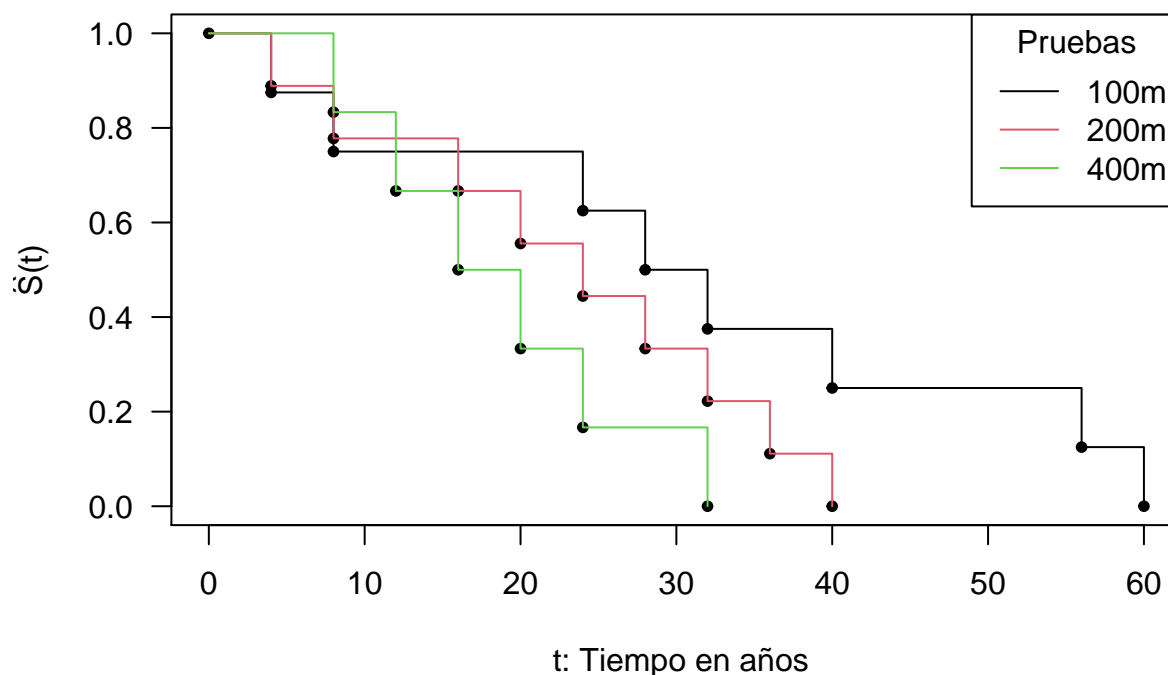
Mirando la gráfica y las 3 funciones estimadas de supervivencia, vemos que no hay mucha diferencia a lo largo del período de estudio, parecen la misma curva. Para comprobarlo aplicamos el test de Kruskal-Wallis para ver si hay diferencias significativas entre el tipo de pruebas. Hay que contrastar las siguientes hipótesis.

$$H_0 : S_{100m,H}(t) = S_{200m,H}(t) = S_{400m,H}(t) \quad (\text{Las muestras provienen de la misma población})$$
$$H_1 : S_{i,H}(t) \neq S_{j,H}(t) \quad \text{para algún } i, j \in \{ "100m", "200m", "400m" \}$$

El estadístico del test $H = 0.503$ y el pvalor de la prueba $= 0.778 > \alpha = 0,05$. Entonces no tenemos pruebas suficientes para rechazar las hipótesis nula y no hay diferencias significativas como se pensaba observando el gráfico. Por lo tanto en las pruebas de corta distancia de 100 metros lisos, 200 metros lisos y 400 metros liso en el caso de los hombres se tiene evidencia suficiente para concluir las 3 muestras provienen de la misma población. Es decir, las 3 pruebas de hombres de corta distancia son igual de efectivas a la hora de mantener, a lo largo del tiempo de observación, la proporción de ediciones donde se batió récord.

En el caso de las mujeres

Estimación de $S(t)$ de las pruebas de corta distancia



En este caso hay una situación similar que en el anterior apartado. Hasta un poco más de la mitad del período de estudio las 3 curvas no se tienen mucha diferencia, a partir de ahí vemos que se van alejando hasta el final. Vemos al final que el último récord, es decir la última edición que se obtuvo la mejor marca registrada en esa prueba. Se consigue antes con la prueba de 400 metros lisos que en la de 200 y esta a su vez antes que la de 100. Tendríamos que aplicar el test de Kruskal-Wallis para ver si hay diferencias significativas entre el tipo de pruebas. Hay que contrastar las siguientes hipótesis.

$$H_0 : S_{100m,M}(t) = S_{200m,M}(t) = S_{400m,M}(t) \quad (\text{Las muestras provienen de la misma población})$$

$$H_1 : S_{i,M}(t) \neq S_{j,M}(t) \quad \text{para algún } i, j \in \{ "100m", "200m", "400m" \}$$

el pvalor dela prueba es 0.39 que es mayor que $\alpha = 0.05$ nivel de significación. Entonces, no tenemos evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula. Dicho de otra forma, las 3 pruebas de corta distancia en el caso de las mujeres son igual de efectivas a la hora de mantener, a lo largo del tiempo de observación (todas las competiciones que se hizo esta prueba en los juegos olímpicos), la proporción de ediciones donde se batió récord.

6.2 Carreras de media distancia:

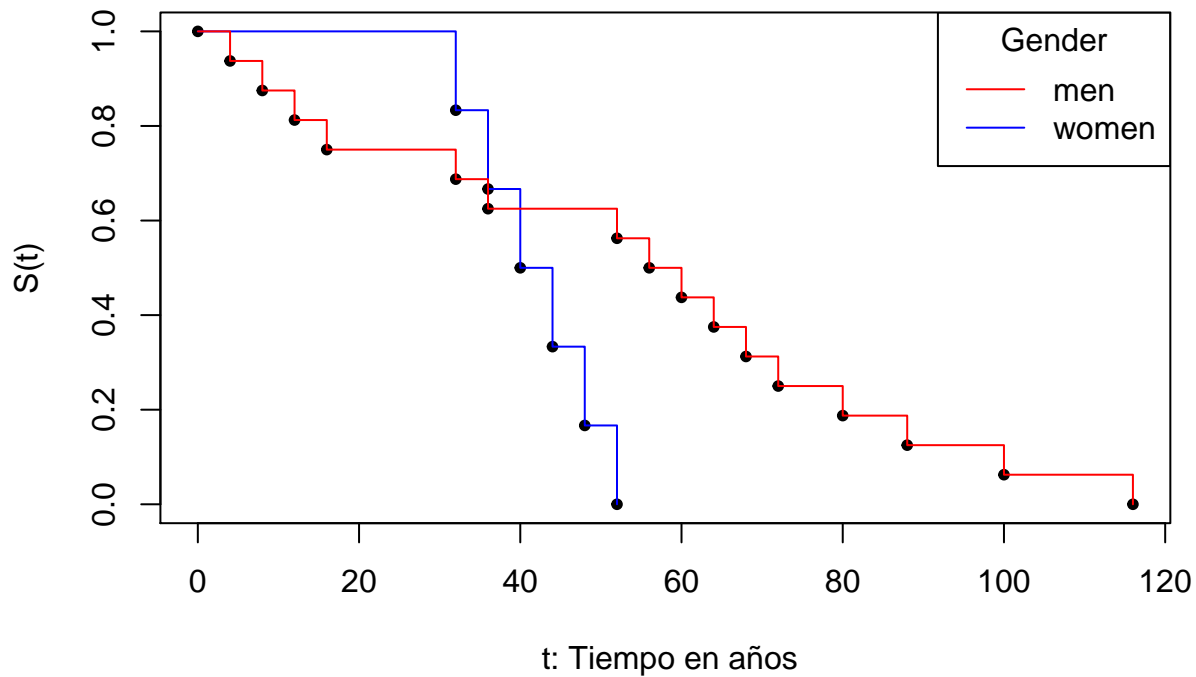
6.2.1 Comparación entre “curvas de supervivencia” según género de cada prueba.

Pruebas de 800m:

Cuadro 2: Resumen de resultados de las pruebas de corta distancia

Tipo de prueba	En que caso $S(t)$ es más efectivo en hombres o mujeres?	En el caso de mujeres, qué pruebas provienen de la misma población?	En el caso de hombres, qué pruebas provienen de la misma población?
100 metros lisos	Los 2 son igual de efectivos	Las 3 provienen de la misma población	Las 3 provienen de la misma población
200 metros lisos	En el caso de los hombres	Las 3 provienen de la misma población	Las 3 provienen de la misma población
400 metros lisos	En el caso de los hombres	Las 3 provienen de la misma población	Las 3 provienen de la misma población

Funciones estimadas de supervivencia de 800m



En el gráfico se observa que en los primeros 30 años $\hat{S}_{800m,M}(t) > \hat{S}_{800m,H}(t)$. Luego $\hat{S}_{800m,M}(t)$ decrece rápidamente y $\hat{S}_{800m,H}(t)$ parece que sigue manteniendo la misma pendiente.

Hacemos los test de Cox-mantel y el de logrank para ver si hay diferencias estadísticamente significativas entre las funciones estimadas de supervivencia en el caso de los hombres y las mujeres. El contraste de hipótesis sería el siguiente.

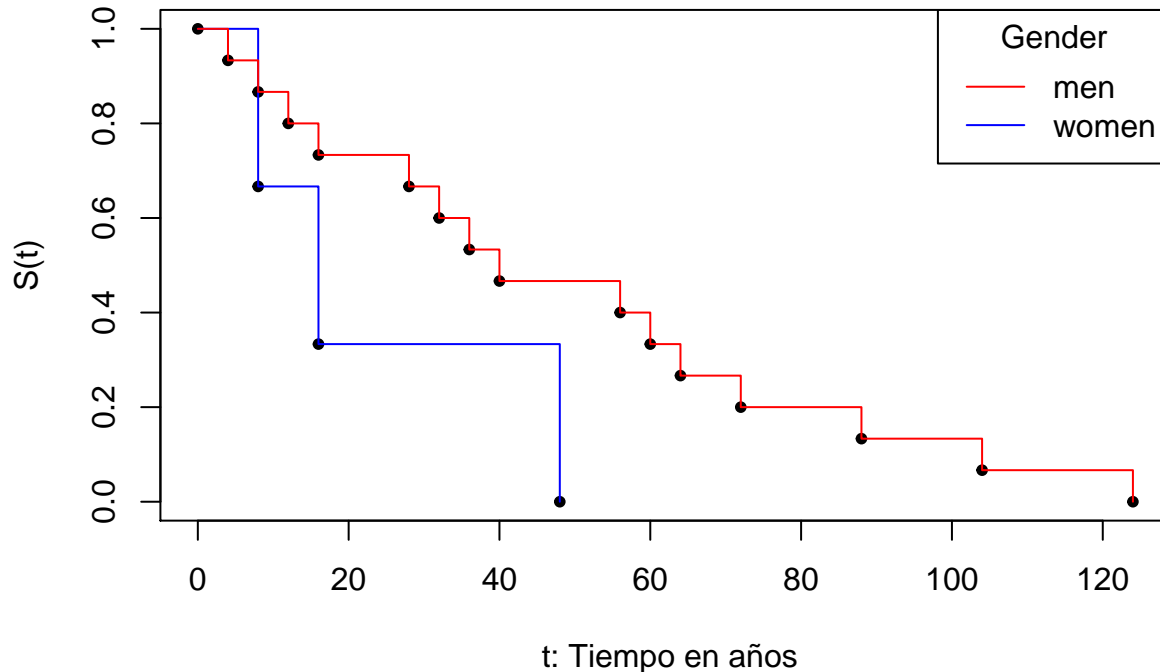
$$\begin{aligned} H_0 &: S_{800m,H}(t) = S_{800m,M}(t) \\ H_1 &: S_{800m,H}(t) > S_{800m,M}(t) \end{aligned}$$

Cuyos estadísticos son $C = 1.75$ (Cox-Mantel) y $L = 1.38$ (logrank). Con un nivel de significación $\alpha = 0.05$, el valor de discrepancia bajo H_0 será $Z_\alpha = 1.64$. Vemos que $\begin{cases} C > Z_{0,05} \\ L < Z_{0,05} \end{cases}$, aunque L no es mucho más grande. Hemos considerado como hipótesis alternativa $H_1 : S_{800m,H}(t) > S_{800m,M}(t)$, visto el resultado de los 2 estadísticos C y L , que nos podrían llevar a conclusiones distintas, comprobemos el contraste

con la hipótesis alternativa bilateral $H'_1 : S_{800m,H}(t) \neq S_{800m,M}(t)$. Se sabe que bajo la hipótesis nula $C \sim N(0, 1)$ y $L \sim N(0, 1)$, ahora el valor de discrepancia será $Z_{\alpha/2} = 1.96$. Entonces $|C| < Z_{\alpha/2}$ y por lo tanto no podemos rechazar la hipótesis nula. Es decir no hay diferencias estadísticamente significativas entre $S_{800m,H}(t)$ y $S_{800m,M}(t)$. La proporción de juegos donde se batió récord se mantiene de forma similar tanto en hombres como en mujeres a lo largo del periodo de estudio (“son igual de efectivos”).

Pruebas de 1500m:

Funciones estimadas de supervivencia de 1500m



En esta prueba de 1500m se ve que la diferencia del tamaño de la muestra entre los 2 grupos es más grande que en todas las pruebas que se han visto. Vemos que $\hat{S}_{1500m,M}(t)$ decrece a cae más rápido que $\hat{S}_{1500m,H}(t)$, pero se comprobará con las pruebas de Cox-mantel y el de logrank si hay diferencias significativas entre el caso de los hombres y las mujeres.

$$H_0 : S_{1500m,H}(t) = S_{1500m,M}(t)$$

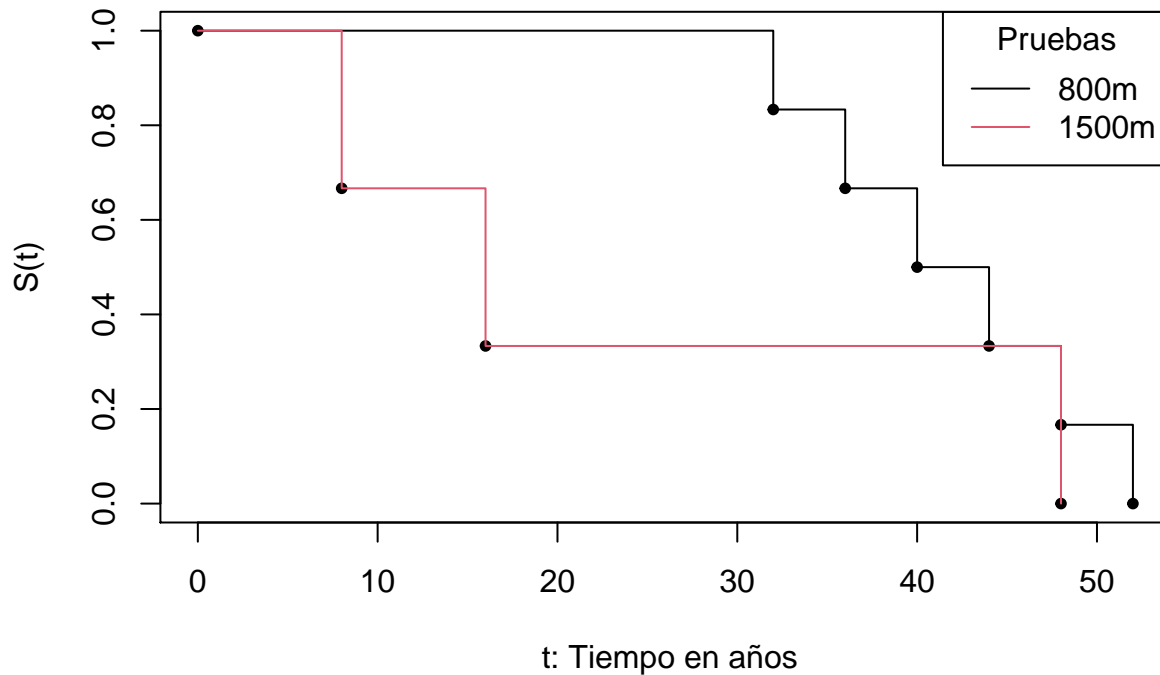
$$H_1 : S_{1500m,H}(t) > S_{1500m,M}(t)$$

Los estadísticos $C = 1.41$ y $L = 1.07$, los dos son menores que el valor de discrepancia Z_α con nivel de significación $\alpha = 0,05$. No podemos rechazar H_0 y en ambos casos son igual de *efectivos* en esta prueba. Es decir la proporción de juegos donde se batió récord se mantiene de forma similar tanto en hombres como en mujeres a lo largo del período de estudio.

6.2.2 Comparación entre “curvas de supervivencia” de cada prueba según género.

En el caso de mujeres:

Curvas de supervivencia de 800 y 1500 metros mujeres



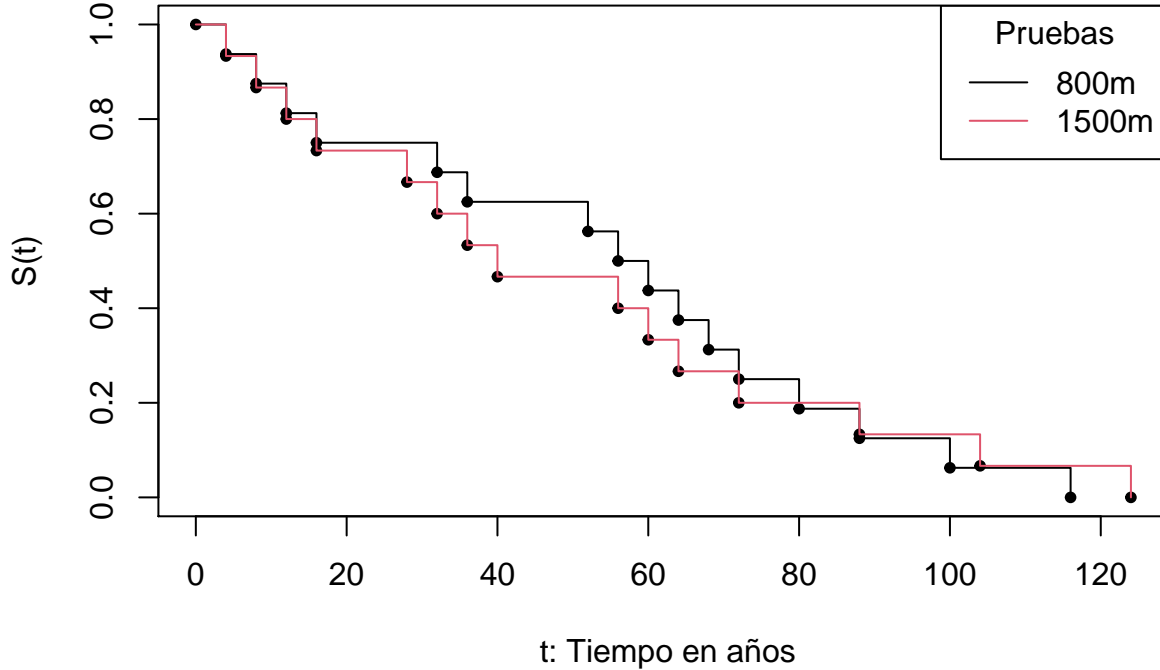
Hay pocos datos en ambas muestras, pareciera que la de 800m termina antes que la de 1500m. En este caso al evaluar 2 muestras, podemos usar las pruebas de Cox-mantel y logrank como se hizo anteriormente. El contraste de hipótesis sería el siguiente:

$$H_0 : S_{800m,M}(t) = S_{1500m,M}(t)$$
$$H_1 : S_{800,M}(t) \neq S_{1500m,M}(t)$$

Con el test de Kruskal-Wallis obtenemos un pvalor de la prueba de $0.24 > 0.05$ y no tenemos suficientes evidencia estadística para rechazar H_0 . Por lo tanto en la prueba femenina de los 1500m y la de 800m, la proporción de ediciones donde se batió récord se mantiene de la misma manera a lo largo del período de estudio en ambas pruebas. Si se hubiera aplicado los test de Cox-Mantel o el de logrank se concluiría lo mismo.

En el caso de los hombres:

Estimación de $S(t)$ en las pruebas de media distancia



A diferencia del anterior gráfico, en este hay más datos y a primera vista parece que las 2 $\hat{S}(t)$ son muy parecidas, habrá que comprobarlo. Como en el caso femenino al evaluar 2 muestras, podemos usar también las pruebas de Cox-mantel y logrank como hemos hecho anteriormente y se llegaría a la misma conclusión. El contraste de hipótesis sería el siguiente:

$$H_0 : S_{800m,H}(t) = S_{1500m,H}(t)$$

$$H_1 : S_{800,H}(t) \neq S_{15000m,H}(t)$$

el pvalor dela prueba es $0.778 > \alpha = 0,05$. Efectivamente no hay evidencia estadística para rechazar H_0 , las 2 muestras provienen de la misma población. Es decir, en la prueba masculina de 800m y la 1500m, la proporción de ediciones donde se batió récord se mantiene de la misma manera a lo largo del período de estudio en ambas pruebas.

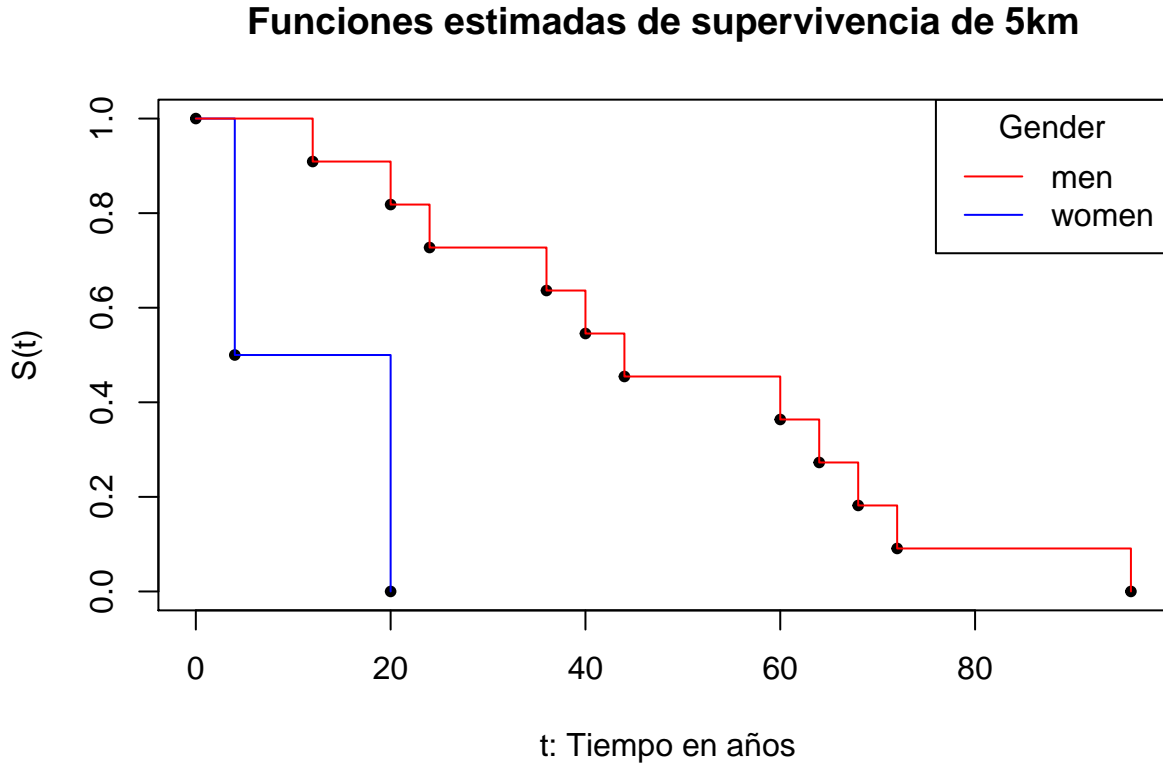
Cuadro 3: Resumen de resultados de las pruebas de media distancia

Tipo de prueba	En que caso $S(t)$ es más efectivo en hombres o mujeres?	En el caso de mujeres, qué pruebas provienen de la misma población?	En el caso de hombres, qué pruebas provienen de la misma población?
800 metros	Los 2 son igual de efectivos	Las 2 pruebas	Las 2 pruebas
1500 metros	Los 2 son igual de efectivos	Las 2 pruebas	Las 2 pruebas

6.3 Carreras de larga distancia.

6.3.1 Comparación entre “curvas de supervivencia” según género de cada prueba.

Pruebas de 5km:



Observando esta gráfica vemos que hay una diferencia del tamaño de la muestra entre las 2 muestras, tan solo hay 2 datos en el caso femenino y se ve claramente que $\hat{S}(t)$ en el caso masculino tarda más en llegar a 0, es decir que todos los pacientes mueran al final del estudio. Esto también se debe a que en esta prueba en el caso de las mujeres la 1a participación fue recientemente en el 1996, de todas las pruebas que se evaluarán esta es la que más tarde empezaron a participar las mujeres. Aun así si queremos ver diferencias significativas entre las 2 $\hat{S}(t)$, el contraste de hipótesis a evaluar sería el siguiente:

$$H_0 : S_{5km,H}(t) = S_{5km,M}(t)$$

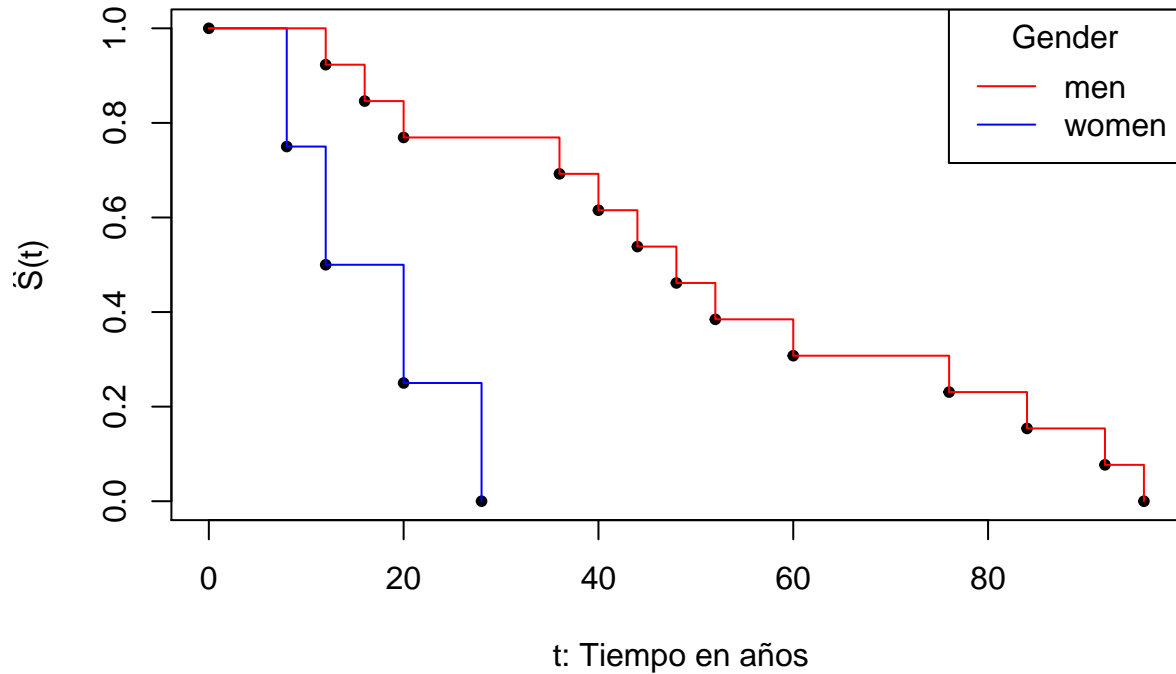
$$H_1 : S_{5km,H}(t) > S_{5km,M}(t)$$

Calculamos los estadísticos de $C = (\text{Cox_Mantel})$ 2.65 y $L = (\text{Logrank})$ 1.36. Tenemos que $\begin{cases} C > Z_\alpha \\ L < Z_\alpha \end{cases}$, lo que nos podría llevar a conclusiones diferentes. Como en la prueba de 800m si en lugar de contrastar con H_1 , se hiciera con $H'_1 : S_{5km,H}(t) \neq S_{5km,M}(t)$, tendríamos el valor de discrepancia $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ bajo la hipótesis nula.

Pero aun así no cambiaría la conclusión anterior $\begin{cases} |C| = 2,65 > 1,96 = Z_{\alpha/2} \\ |L| = 1,36 < 1,96 = Z_{\alpha/2} \end{cases}$. No hay una decisión clara aunque si se hubiera hecho el test de Kruskal Wallis la conclusión sería la misma que con el de logrank. No hay evidencia suficiente para rechazar H_0 . Podríamos concluir que en ambos casos de mujeres y hombres en esta prueba son igual de efectivos. Es decir en los 2 casos la proporción de ediciones que batió récord se mantienen de forma similar a lo largo del periodo de estudio.

Pruebas de 10km:

Funciones estimadas de supervivencia de 10km



Mirando la gráfica, vemos que en el caso femenino $\hat{S}(t)$ decrece más rápido que en el caso masculino, aunque hay menos observaciones también. Se comprobará si hay diferencias significativas entre ambas funciones estimadas de supervivencia con el siguiente constaste :

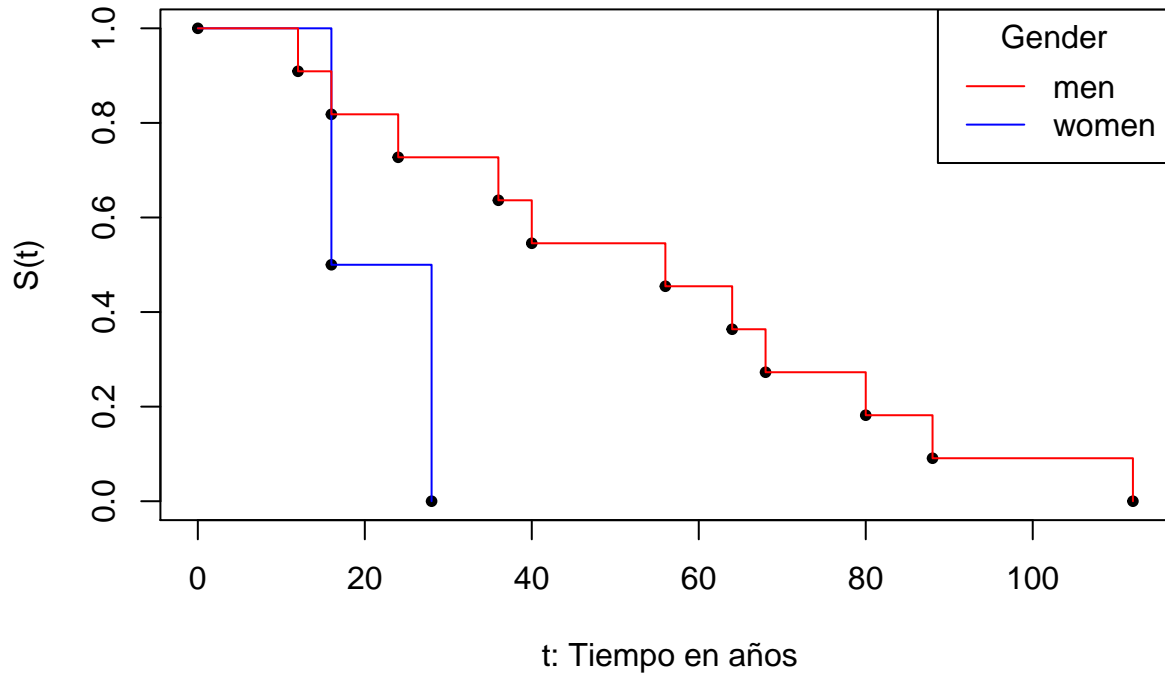
$$H_0 : S_{10km,H}(t) = S_{10km,M}(t)$$

$$H_1 : S_{10km,H}(t) > S_{10km,M}(t)$$

Calculamos los estadísticos de $C = 2.99$ y $L = 1.79$ que ambos son mayores que el valor de discrepancia $Z_\alpha = 1.64$ con un nivel de significación $\alpha = 0,05$. Por lo tanto tenemos evidencia estadística para rechazar H_0 y aceptar la hipótesis $H_1 : S_{10km,H}(t) > S_{10km,M}(t)$. El caso masculino en esta prueba de 10 kilómetros es más efectivo que el femenino. La proporción de ediciones donde se estableció un nuevo récord, se mantiene durante más tiempo en el caso masculino (“sobrevive más”).

Pruebas de maratón:

Funciones estimadas de supervivencia de maratón



Observando la gráfica, la función estimada de supervivencia en el caso de las mujeres $\hat{S}_{maraton,M}(t)$ decrece más rápido o “sobrevive menos” que en el caso de los hombres. Pero en esta prueba como en la prueba de 5 kilómetros tenemos un tamaño de la muestra muy diferente, hay muy pocos datos en el caso femenino hay que comprobar si hay diferencias estadísticamente significativas, el contraste de hipótesis sería el siguiente:

$$H_0 : S_{maraton,H}(t) = S_{maraton,M}(t)$$

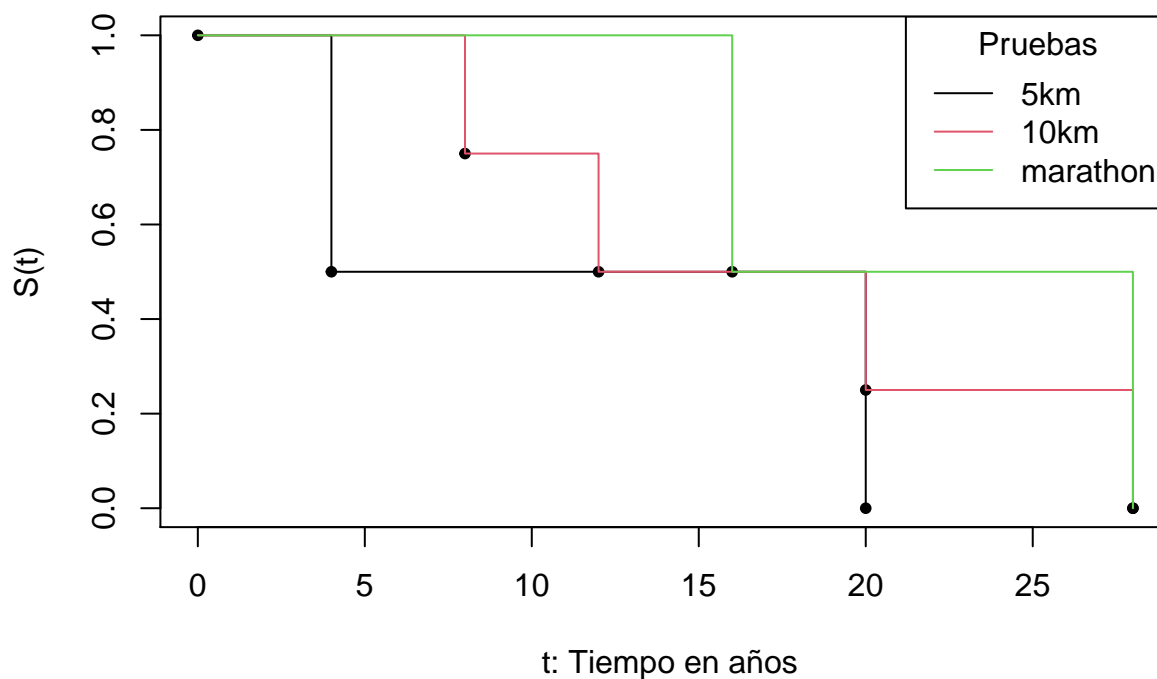
$$H_1 : S_{maraton,H}(t) > S_{maraton,M}(t)$$

Calculamos los estadísticos de $C = 1.72$ y $L = 1.12$. El estadístico de Cox-Mantel C es mayor que el valor de discrepancia $Z_\alpha = 1.64$ y el estadístico de logrank L es menor. Si en lugar de la $H_1 : S_{maraton,H}(t) > S_{maraton,M}(t)$ se hiciera el contraste con la hipótesis bilateral $H'_1 : S_{maraton,H}(t) \neq S_{maraton,M}(t)$ tendríamos que comparar $|C|$ y $|L|$ con $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$. Entonces los 2 estadísticos son inferiores a este valor y no tenemos suficiente evidencia para rechazar H_0 . En la prueba de la maratón tanto en el caso de los hombres y las mujeres mantienen de forma similar la proporción de competiciones donde se batió récord durante el periodo de estudio.

6.3.2 Comparación entre “curvas de supervivencia” de cada prueba según género.

En el caso de las mujeres:

Estimación de $S(t)$ de las pruebas de larga distancia



Cómo se ha visto por las anteriores comparaciones, en las pruebas de larga distancia, se dispone de menos datos en el caso femenino. Viendo la gráfica no podemos decir mucho si provienen de la misma población, es decir que son igual de “efectivas”. Utilizando la prueba de Kruskal-Wallis, las hipótesis a contrastar serían las siguientes:

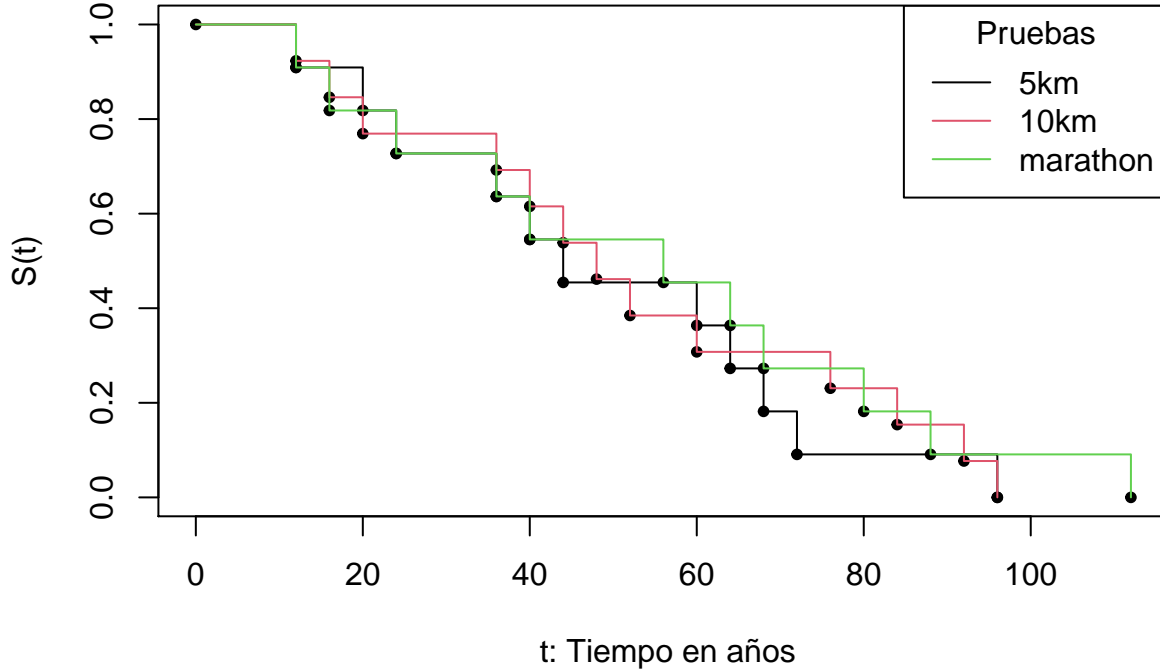
$$H_0 : S_{5km,W}(t) = S_{10km,W}(t) = S_{maratón,W}(t) \quad (\text{Las muestras provienen de la misma población})$$

$$H_1 : S_{i,W}(t) \neq S_{j,W}(t) \quad \text{para algún } i, j \in \{“5km”, “10km”, “maratón”\}$$

El pvalor de la prueba es 0.587 que es superior a $\alpha = 0.05$ no tenemos evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula y las 3 pruebas provienen de la misma población. Es decir la proporción de ediciones donde se batió récord se mantiene de la misma manera en todas las pruebas de larga distancia durante el período de estudio en el caso de las mujeres.

En el caso de los hombres:

Estimación de $S(t)$ de las pruebas de larga distancia



Las hipótesis a contrastar serían las siguientes:

$$H_0 : S_{5km,H}(t) = S_{10km,H}(t) = S_{maratón,H}(t) \quad (\text{Las muestras provienen de la misma población})$$

$$H_1 : S_{i,H}(t) \neq S_{j,H}(t) \quad \text{para algún } i, j \in \{ "5km", "10km", "maratón" \}$$

El pvalor de la prueba es 0.952 que es $\alpha = 0.05$ no tenemos evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula y las 3 pruebas provienen de la misma población. Es decir la proporción de ediciones donde se batió récord se mantiene de la misma manera en todas las pruebas de larga distancia durante el periodo de estudio en el caso de las mujeres.

Cuadro 4: Resumen de resultados de las pruebas de larga distancia

Tipo de prueba	En que caso $S(t)$ es más efectivo en hombres o mujeres?	En el caso de mujeres, qué pruebas provienen de la misma población?	En el caso de hombres, qué pruebas provienen de la misma población?
5000 metros	Los 2 son igual de efectivos	Las 2 pruebas	Las 2 pruebas
10000 metros	En el caso de los hombres	Las 2 pruebas	Las 2 pruebas
maratón	Los 2 son igual de efectivos	Las 2 pruebas	Las 2 pruebas

6.4 Discusión de los resultados.

Si se juntan todas las tablas resumen de los 3 tipos de pruebas de corta, media y larga distancia tendremos lo siguiente:

Cuadro 5: Resumen de resultados de las pruebas de larga distancia

Tipo de prueba	En que caso $S(t)$ es más efectivo en hombres o mujeres?	En el caso de mujeres, qué pruebas provienen de la misma población?	En el caso de hombres, qué pruebas provienen de la misma población?
Corta distancia			
100 metros	Los 2 son igual de efectivos	Las 3 provienen de la misma población	Las 3 provienen de la misma población
200 metros	En el caso de los hombres	Las 3 provienen de la misma población	Las 3 provienen de la misma población
400 metros	En el caso de los hombres	Las 3 provienen de la misma población	Las 3 provienen de la misma población
Media distancia			
800 metros	Los 2 son igual de efectivos	Las 2 provienen de la misma población	Las 2 provienen de la misma población
1500 metros	Los 2 son igual de efectivos	Las 2 provienen de la misma población	Las 2 provienen de la misma población
Larga distancia			
5000 metros	Los 2 son igual de efectivos	Las 3 provienen de la misma población	Las 3 provienen de la misma población
10000 metros	En el caso de los hombres	Las 3 provienen de la misma población	Las 3 provienen de la misma población
maratón	Los 2 son igual de efectivos	Las 3 provienen de la misma población	Las 3 provienen de la misma población

Respecto a la comparación entre pruebas según género Tanto en el caso femenino como el masculino no hay diferencias significativas en la pruebas de corta, media y larga distancia. Por otro lado, si se hace la prueba de Kruskal Wallis para todas las 8 pruebas tanto en hombres y en mujeres, no hay evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula. Por ejemplo en el caso masculino las hipótesis a contrastar serían estas:

$$H_0 : S_{100m,H}(t) = \dots = S_{maratón,H}(t) \quad (\text{Las muestras provienen de la misma población})$$

$$H_1 : S_{i,H}(t) \neq S_{j,H}(t) \quad \text{para algún } i, j \in \{ "100m", "200m", "400m", "800m", "1500m", "5km", "10km", "maratón" \}$$

Y su p-valor $0.9928987 > \alpha = 0.05$, en este caso no hay duda que todas las 8 muestras provienen de la misma población. Análogamente en el caso femenino el p-valor de la prueba es 0.07919 que es superior a $\alpha = 0.05$, aunque no por mucho. No están claro. puede ser debido a que las últimas pruebas de larga distancia hay muy pocas observaciones o pacientes en comparación con las de corta y media distancia. A pesar de que a la hora de representar las funciones estimadas de supervivencia, pareciera indicar que las muestras provienen de diferentes poblaciones.

Respecto a la comparación según género de cada prueba Las únicas pruebas en las cuáles hay diferencias entre género son las de 200 metros y 400 metros lisos y la de 10 kilómetros. Es decir en estas pruebas hay evidencia estadística suficientes para concluir que las muestras provienen de diferente población. En estos caso se rechazo H_0 y se acepto la $H_1 : \hat{S}_H(t) > \hat{S}_M(t)$. Por lo tanto, en estas pruebas el caso masculino los pacientes sobreviven más que en el caso femenino. Nuevamente hay que notar la diferencia del tamaño de la muestra. Si vemos, la *tabla 6* que nos indica el número de pacientes en el estudio y el 1r año de participación, efectivamente hay menos tiempo es decir menos ediciones donde participaron las mujeres. Es decir no sabemos cuantos pacientes más, hubieran sido si la participación de las mujeres fuese antes que las que fueron. Hay que recordar que los pacientes son las ediciones donde se batió récord durante el período de

Cuadro 6: 1r participación y cantidad de observaciones

Pruebas	1r año de participación masculino	Último año donde se batió récord masculino	1r año de participación femenino	Último año donde se batió récord femenino	Número de pacientes en el caso masculino	Número de pacientes en el caso femenino
100 metros	1896	2012	1928	1988	15	8
200 metros	1900	2008	1948	1988	13	9
400 metros	1896	2016	1964	1996	12	6
800 metros	1896	2012	1928	1980	16	6
1500metros	1896	2020	1972	2020	15	3
5000 metros	1912	2008	1996	2016	11	2
10000 metros	1912	2008	1988	2016	13	4
maratón	1896	2008	1984	2012	11	2

estudio. El período de estudio como se dijo en el capítulo 5 de metodología son todos los juegos olímpicos que han habido hasta la edición 2021.

7. Conclusiones

Interpretación de la “efectividad”:

Se ha hablado sobre en que caso, el femenino o masculino es más *efectivo* (el sexo es el “tratamiento”) sobre los *pacientes*. La hipótesis que sería quería comprobar (la alternativa) ha sido en todas las pruebas $H_1 : \hat{S}_H(t) > \hat{S}_M(t)$ debido a qué en todas las gráficas se podía intuir que así sería, es decir que $\hat{S}_M(t)$ en general durante el período de estudio ha sido inferior a $\hat{S}_H(t)$. Aunque no hay que olvidar que el tamaño de la muestra de cada grupo según género, es distinto. De hecho se observa cuando más larga sea la distancia de la prueba menos observaciones hay (ediciones que se batieron récord) sobretodo en el caso de las mujeres.

Si se tratará de un estudio clínico donde los pacientes tienen una enfermedad y nos interesa saber que tratamiento suministrar para retener o controlar dicha enfermedad con el objetivo de que no vuelva a presentar dicha enfermedad o que tarden más en hacerlo. El que un tratamiento sea más efectivo que otro significa que los pacientes con el mejor tratamiento tardarán más tiempo en presentar el evento (volver a contraer la enfermedad). En este trabajo el evento de interés es que se establezca un nuevo récord, **con el objetivo de saber que pruebas y en que género se bate más rápido**, es decir que en menos ediciones o ciclos de 4 años se llegue antes a una marca que será la más difícil de batir en muchos años. En contraste con el ejemplo clínico, lo que interesa no es que los pacientes sobrevivan más sino al contrario.

Respuestas:

Según los resultados obtenidos se puede ver que en el caso de las mujeres y más en concreto las carreras de corta distancia han sido más efectivas, o sea que los pacientes (las ediciones donde se batió el récord) fueron menos y todos presentaron el evento antes que en el caso de los hombres. **Se podría concluir que en el caso de las pruebas de 200, 400 y 10000 metros las mujeres han batido récords antes que los hombres.** Esta sería una respuesta a las preguntas iniciales del trabajo, a la **de quién batió los récords más rápido las mujeres o los hombres.** Respecto a la pregunta: **en que prueba la de 100 metros lisos o la maratón se bate más rápido el récord establecido (en cuantas ediciones o años) ?**. Se ha buscado responder mediante los métodos no paramétricos si las diferentes funciones de $S(t)$ se distribuyen de forma similar, efectivamente se ha visto que sí en resultados del *apartado 6* en ambos casos femenino y masculino por separado.

Inconvenientes y posibles avances

Cómo se comentó en el *apartado 5.2.1*, el que las mujeres hayan participado después que los hombres a veces incluso con una diferencia de casi un siglo (la prueba de 10000 metros) hace más complicado el planteamiento. No obstante aunque se haya considerado el tiempo “irrelevante” en el período de estudio que son todas las ediciones que se han hecho, esta diferencia temporal puede afectar a los resultados. El hecho de que en las pruebas de 100m, 200m y 10000m las mujeres hayan estado más rápidas en batir récord, parte de la suposición que hombres y mujeres comenzaron en las “mismas condiciones”. Es decir este supuesto no tiene en cuenta diversos factores:

- La 1a son las técnicas atléticas desarrolladas durante el tiempo que no participaron las mujeres. Es decir, puede pasar que la incorporación no haya sido de la misma manera. Es decir con el desarrollo de la tecnología y nuevas técnicas en cada tipo de prueba, puede ser que las mujeres hayan comenzado en comparación a como comenzaron los hombres con más preparación a este tipo de pruebas. Este puede causar 2 situaciones, que se batan más récords o que se batan menos récords.
- La 2a es la participación atlética por sexo de cada prueba en cada edición. Lo que interesa saber es que por cada país participante en los juegos, *cuántos atletas han participado durante los 4 años anteriores que aspiran ir a los juegos olímpicos* y este por cada prueba y si es hombre o mujer. Claro conseguir estos datos es prácticamente imposible y en las webs que se ha usado en el trabajo [2], [1] y [3] se dispone de esta información pero incompleta y un tanto desorganizada. Por lo general hay menos atletas femeninas. Solo hay que ver en la página de “world athletics” en [3]. Por ejemplo si seleccionamos por filtro los últimos 10 años desde 2010 hasta 2021 en la categoría de los 100m. Nos devuelve el ranking de todos los atletas (solo se repiten una vez) con sus mejores marcas en *cualquier* competición internacional atlética durante el periodo de 2010 y 2021. Si se quisiera plantear un modelo para predecir cuando podría ser la

siguiente edición donde se estableciera un nuevo récord, tendríamos que recolectar diversas variables explicativas, como por ejemplo la participación total durante un periodo como se mencionaba antes. Siguiendo con el ejemplo en el caso de los 100 metros lisos durante el periodo de 2010-2021, hubieron alrededor 2000 atletas femeninas en el ranking de cualquier competición internacional atlética incluido los juegos olímpicos. En el caso masculino en las mismas pruebas y intervalo de tiempo, hubieron alrededor 4200 atletas. Es decir más del doble y en los últimos 10 años, con la base de que la participación a nivel mundial se ha ido igualando entre hombres y mujeres a lo largo de los años.

El análisis más detallado de estos factores podrían ser objeto de estudio de futuros trabajos y planteamientos.

8. Bibliografia

- [1] The olympic database 112 year olympic games conveniently arranged. <http://www.theolympicdatabase.nl/home>.
- [2] Olympic games. <https://olympics.com/en/olympic-games/rio-2016/results/athletics>.
- [3] World athletics. <https://www.worldathletics.org/records/all-time-toplists/sprints/200-metres/outdoor/women/senior?regionType=world&timing=electronic&windReading=regular&page=1&bestResultsOnly=true&firstDay=1899-12-30&lastDay=2021-03-12>.
- [4] John Wenyu Wang Elisa T. Lee. *Statistical methods for survival data analysis*. Wiley series in probability and statistics, 3 edition, 2012.
- [5] David G. Kleinbaum. *Survival Analysis, a self-learning text*. Statistics for Biology and Health, Springer, 3 edition, 2012.
- [6] John Kloke and Joseph W. McKean. *Nonparametric statistical methods using R*. Wiley series in probability and statistics, 1 edition, 2014.
- [7] Hao Zhu. Create awesome latex table with knitr::kable and kableextra. https://cran.r-project.org/web/packages/kableExtra/vignettes/awesome_table_in_pdf.pdf.

Anexos

Medallistas de oro de todas las pruebas, estas tablas se han hecho con [7]

Cuadro 7: 100 metros lisos mujeres

Mark	Date	Competitor	Nat	City
12.20	1928	Elizabeth Robinson	USA	Amsterdam
11.90	1932	Stanislawa Walasiewicz	POL	Los Angeles
11.50	1936	Helen Herring	USA	Berlin
11.90	1948	Fanny Blankers-Koen	NED	London
11.50	1952	Marjorie Jackson	AUS	Helsinki
11.50	1956	Betty Cuthbert	AUS	Melbourne
11.00	1960	Wilma Rudolph	USA	Rome
11.40	1964	Wyomia Tyus	USA	Tokyo
11.00	1968	Wyomia Tyus	USA	Mexico City
11.07	1972	Renate Stecher	GDR	Munich
11.08	1976	Annegret Richter	FRG	Montreal
11.06	1980	Lyudmila Kondratyeva	URS	Moscow
10.97	1984	Evelyn Ashford	USA	Los Angeles
10.54	1988	Florence GRIFFITH-JOYNER	USA	Seoul
10.82	1992	Yolanda Gail	USA	Barcelona
10.94	1996	Yolanda Gail	USA	Atlanta
11.12	2000	Aikaterini Thanou	GRE	Sydney
10.93	2004	Yuliya Nestsiarenka	BLR	Athens
10.78	2008	Shelly-Ann Fraser-Pryce	JAM	Beijing
10.75	2012	Shelly-Ann Fraser-Pryce	JAM	London
10.71	2016	Elaine Thompson	JAM	Rio
10.61	2020	Elaine Thompson	JAM	Tokyo

Cuadro 8: 100 metros lisos hombres

Mark	Date	Competitor	Nat	City
12.00	1896	Thomas Burke	USA	Athens
11.00	1900	Francis Jarvis	USA	Paris
11.00	1904	Archie Hahn	USA	St. Louis
10.80	1908	Reggie Walker	RSA	London
10.80	1912	Ralph Craig	USA	Stockholm
10.80	1920	Charles Paddock	USA	Antwerp
10.60	1924	Harold Abrahams	NA	Paris
10.80	1928	Percy Williams	CAN	Amsterdam
10.30	1932	Eddie Tolan	USA	Los Angeles
10.30	1936	Jesse Owens	USA	Berlin
10.30	1948	Hassison Dillard	USA	London
10.40	1952	Lindy Remigino	USA	Helsinki
10.50	1956	Bobby Morrow	USA	Melbourne
10.20	1960	Armin Hary	GER	Rome
10.00	1964	Robert Hayes	USA	Tokyo
9.90	1968	James Ray Hines	USA	Mexico City
10.14	1972	Valeriy Borzov	URS	Munich
10.06	1976	Hasely Crawford	TTO	Montreal
10.25	1980	Allan Wells	GBR	Moscow
9.99	1984	Carl Lewis	USA	Los Angeles
9.92	1988	Carl Lewis	USA	Seoul
9.96	1992	Linford Christie	GBR	Barcelona
9.84	1996	Donovan Bailey	CAN	Atlanta
9.87	2000	Maurice Greene	USA	Sydney
9.85	2004	Justin Gatlin	USA	Athens
9.69	2008	Usain Bolt	JAM	Beijing
9.63	2012	Usain Bolt	JAM	London
9.81	2016	Usain Bolt	JAM	Rio
9.80	2020	Lamont Marcell Jacobs	ITA	Tokyo

Cuadro 9: 200 metros lisos mujeres

Mark	Date	Competitor	Nat	City
24.40	1948	Fanny Blankers-Koen	NED	London
23.70	1952	Marjorie Jackson	AUS	Helsinki
23.40	1956	Betty Cuthbert	AUS	Melbourne
24.00	1960	Wilma Rudolph	USA	Rome
23.00	1964	Edith Marie	USA	Tokyo
22.50	1968	Irena Szewinska	POL	Mexico City
22.40	1972	Renate Stecher	GDR	Munich
22.37	1976	Bärbel ECKERT-WÖCKEL	GDR	Montreal
22.03	1980	Bärbel ECKERT-WÖCKEL	GDR	Moscow
21.81	1984	Valerie Ann Brisco-Hooks	USA	Los Angeles
21.34	1988	Florence GRIFFITH-JOYNER	USA	Seoul
21.81	1992	Gwen Torrence	USA	Barcelona
22.12	1996	Marie-Jose Perec	FRA	Atlanta
22.27	2000	Pauline Elaine Davis	BAH	Sydney
22.05	2004	Veronica Campbell-Brown	JAM	Athens
21.74	2008	Veronica Campbell-Brown	JAM	Beijing
21.88	2012	Allyson Feliz	USA	London
21.78	2016	Elaine Thompson	JAM	Rio
21.53	2020	Elaine Thompson	JAM	Tokyo

Cuadro 10: 200 metros lisos hombres

Mark	Date	Competitor	Nat	City
22.20	1900	Walter B. John	USA	Paris
21.60	1904	Archie Hahn	USA	St. Louis
22.60	1908	Robert Kerr	USA	London
21.70	1912	Ralph Craig	USA	Stockholm
22.00	1920	Allen Woodring	USA	Antwerp
21.60	1924	Jackson Scholz	USA	Paris
21.80	1928	Percy Williams	CAN	Amsterdam
21.20	1932	Eddie Tolan	USA	Los Angeles
20.70	1936	Jesse Owens	USA	Berlin
21.10	1948	Melvin Emery Patton	USA	London
20.70	1952	Andrew William	USA	Helsinki
20.60	1956	Bobby Morrow	USA	Melbourne
20.50	1960	Livio Berruti	ITA	Rome
20.30	1964	Henry Carr	USA	Tokyo
19.80	1968	Thomas C. Smith	USA	Mexico City
20.00	1972	Valeriy Borzov	URS	Munich
20.23	1976	Donald Quarrie	JAM	Montreal
20.19	1980	Pietro Mennea	ITA	Moscow
19.80	1984	Carl Lewis	USA	Los Angeles
19.75	1988	Joseph Nathaniel	USA	Seoul
20.01	1992	Michael Marsh	USA	Barcelona
19.32	1996	Michael Johnson	USA	Atlanta
20.09	2000	Kostas Kenteris	GRE	Sydney
19.79	2004	Shawn Crawford	USA	Athens
19.30	2008	Usain Bolt	JAM	Beijing
19.32	2012	Usain Bolt	JAM	London
19.78	2016	Usain Bolt	JAM	Rio
19.62	2020	Andre De Grasse	CAN	Tokyo

Cuadro 11: 400 metros mujeres

Mark	Date	Competitor	Nat	City
52.0	1964	Betty Cuthbert	Australia (AUS)	Tokyo
52.03	1968	Colette Besson	France (FRA)	Mexico City
51.08	1972	Monika Zehrt	East Germany (GDR)	Munich
49.28	1976	Irena Szewinska	Poland (POL)	Montreal
48.88	1980	Marita Koch	East Germany (GDR)	Moscow
48.83	1984	Valerie Brisco-Hooks	United States (USA)	Los Angeles
48.65	1988	Olha Bryzhina	Soviet Union (URS)	Seoul
48.83	1992	Marie-José Pérec	FRA	Barcelona
48.25	1996	Marie-José Pérec	France (FRA)	Atlanta
49.11	2000	Cathy Freeman	AUS	Sydney
49.41	2004	Tonique Williams-Darling	BAH	Athens
49.62	2008	Christine Ohuruogu	GBR	Beijing
49.55	2012	Sanya Richards-Ross	USA	London
49.44	2016	Shaunae Miller	BAH	Rio
48.36	2020	Shaunae Miller	BAH	Tokyo

Cuadro 12: 400 metros hombres

Mark	Date	Competitor	Nat	City
54.20	1896	Thomas Burke	USA	Athens
49.40	1900	Maxey Long	USA	Paris
49.20	1904	Harry Hillman	USA	St. Louis
50.00	1908	Wyndham Halswelle	GBR	London
48.20	1912	Charles Decker	USA	Stockholm
49.60	1920	Bevil Gordon D'urban Rudd	RSA	Antwerp
47.60	1924	Eric Henry Liddell	GBR	Paris
47.80	1928	Raymond James Barbuti	USA	Amsterdam
46.20	1932	William Arthur Carr	USA	Los Angeles
46.50	1936	Archibald Franklin Williams	USA	Berlin
46.20	1948	Arthur Wint	JAM	London
45.90	1952	Vincent George Rhoden	JAM	Helsinki
46.70	1956	Charles Lamont	USA	Melbourne
44.90	1960	Otis Crandall Davis	USA	Rome
45.10	1964	Mike Larrabee	USA	Tokyo
43.80	1968	Lee Edward	USA	Mexico City
44.66	1972	Vincent Edward	USA	Munich
44.26	1976	Alberto Juantorena	CUB	Montreal
44.60	1980	Viktor Markin	URS	Moscow
44.27	1984	Alonzo C. Babers	USA	Los Angeles
43.87	1988	Steve Lewis	USA	Seoul
43.50	1992	Quincy Watts	USA	Barcelona
43.49	1996	Michael Johnson	USA	Atlanta
43.84	2000	Michael Johnson	USA	Sydney
44.00	2004	Jeremy Wariner	USA	Athens
43.75	2008	Lashawn Merritt	USA	Beijing
43.94	2012	Kirani James	GRN	London
43.03	2016	Wayde Van Niekerk	RSA	Rio
43.85	2020	Steven GARDINER	CAN	Tokyo

Cuadro 13: 800 metros mujeres

Mark	Date	Competitor	Nat	City
2:16.80	1928	Karoline Lina Radke	GER	Amsterdam
2:04.30	1960	Liudmyla Lysenko	URS	Rome
2:01.10	1964	Ann Elizabeth Packer	GBR	Tokyo
2:00.90	1968	Madeline Manning	USA	Mexico City
1:58.55	1972	Hildegard Falck-Janze	FRG	Munich
1:54.94	1976	Tatiana Kazankina	URS	Montreal
1:53.50	1980	Nadezhda Olizarenko	URS	Moscow
1:57.60	1984	Doina Besliu-Melinte	ROU	Los Angeles
1:56.10	1988	Sigrun Grau	GDR	Seoul
1:55.54	1992	Ellen Van Langen	NED	Barcelona
1:57.73	1996	Svetlana Masterkova	RUS	Atlanta
1:56.15	2000	Maria Mutola	MOZ	Sydney
1:56.38	2004	Kelly Holmes	GBR	Athens
1:54.87	2008	Pamela Jelimo	KEN	Beijing
1:57.23	2012	Caster Semenya	RSA	London
1:55.28	2016	Caster Semenya	RSA	Rio

Cuadro 14: 800 metros hombres

Mark	Date	Competitor	Nat	City
2:11.00	1896	Edwin Flack	AUS	Athens
2:01.20	1900	Alfred Tysoe	GBR	Paris
1:56.00	1904	Jim Lightbody	USA	St. Louis
1:52.80	1908	Melvin Sheppard	USA	London
1:51.90	1912	Ted Meredith	USA	Stockholm
1:53.40	1920	Albert Hill	GBR	Antwerp
1:52.40	1924	Douglas Gordon Lowe	GBR	Paris
1:51.80	1928	Douglas Gordon Lowe	GBR	Amsterdam
1:49.70	1932	Thomas Hampson	GBR	Los Angeles
1:52.90	1936	Jhon Youie Woodruff	USA	Berlin
1:49.20	1948	Malvin Groston Whitfield	USA	London
1:49.20	1952	Malvin Groston Whitfield	USA	Helsinki
1:47.70	1956	Thomas William Courtney	USA	Melbourne
1:46.30	1960	Peter Snell	NZL	Rome
1:45.10	1964	Peter Snell	NZL	Tokyo
1:44.30	1968	Ralph Doubell	AUS	Mexico City
1:45.86	1972	Dave Wottle	USA	Munich
1:43.50	1976	Alberto Juantorena	CUB	Montreal
1:45.40	1980	Steve Ovett	GBR	Moscow
1:43.00	1984	Joaquim Cruz	BRA	Los Angeles
1:43.45	1988	Paul Ereng	KEN	Seoul
1:43.66	1992	William Tanui	KEN	Barcelona
1:42.58	1996	Vebjorn Rodal	NOR	Atlanta
1:45.08	2000	Nils Schumann	GER	Sydney
1:44.45	2004	Yury Borzakovsky	RUS	Athens
1:44.65	2008	Wilfred Bungei	KEN	Beijing
1:40.91	2012	David Rudisha	KEN	London
1:42.15	2016	David Rudisha	KEN	Rio

Cuadro 15: 1500 metros mujeres

Mark	Date	Competitor	Nat	City
4:01.38	1972	Lyudmila Bragina	URS	Munich
4:05.48	1976	Tatiana Kazankina	URS	Montreal
3:56.60	1980	Tatiana Kazankina	URS	Moscow
4:03.25	1984	Gabriella Dorio	ITA	Los Angeles
3:53.96	1988	Paula Ivan	ROU	Seoul
3:55.30	1992	Hassiba Boulmerka	ALG	Barcelona
4:00.83	1996	Svetlana Masterkova	RUS	Atlanta
4:05.10	2000	Nouria Merah-Benida	ALG	Sydney
3:57.90	2004	Kelly Holmes	GBR	Athens
4:00.23	2008	Nancy Jebet Langat	KEN	Beijing
4:10.74	2012	Maryam Yusuf Jamal	BRN	London
4:08.92	2016	Faith Chepngetich Kipyegon	KEN	Rio
3:53.11	2020	Faith Chepngetich Kipyegon	KEN	Tokyo

Cuadro 16: 1500 metros hombres

Mark	Date	Competitor	Nat	City
4:33.20	1896	Edwin Flack	AUS	Athens
4:06.20	1900	Charles Bennett	GBR	Paris
4:05.40	1904	Jim Lightbody	USA	St. Louis
4:03.40	1908	Melvin Sheppard	USA	London
3:56.80	1912	Arnold Jackson	GBR	Stockholm
4:01.80	1920	Albert Hill	GBR	Antwerp
3:53.60	1924	Paavo Nurmi	FIN	Paris
3:53.20	1928	Harri Edvin Larva	FIN	Amsterdam
3:51.20	1932	Luigi Beccali	ITA	Los Angeles
3:47.80	1936	John Lovelock	NZL	Berlin
3:49.80	1948	Henry Eriksson	SWE	London
3:45.20	1952	Joseph Barthel	LUX	Helsinki
3:41.20	1956	Ronald Michael Delany	IRL	Melbourne
3:35.60	1960	Herbert Elliott	AUS	Rome
3:38.10	1964	Peter Snell	NZL	Tokyo
3:34.90	1968	Kipchoge Keino	KEN	Mexico City
3:36.33	1972	Pekka Vasala	FIN	Munich
3:39.17	1976	John Walker	NZL	Montreal
3:38.40	1980	Sebastian Coe	GBR	Moscow
3:32.53	1984	Sebastian Coe	GBR	Los Angeles
3:35.96	1988	Peter Rono	KEN	Seoul
3:40.12	1992	Fermin Cacho Ruiz	ESP	Barcelona
3:35.78	1996	Nourredine Morceli	ALG	Atlanta
3:32.07	2000	Noah Kiprono Ngenyi	KEN	Sydney
3:34.18	2004	Hicham El Guerrouj	MAR	Athens
3:33.11	2008	Asbel Kiprop	KEN	Beijing
3:34.08	2012	Taoufik Makhloufi	ALG	London
3:50.00	2016	Matthew Centrowitz	USA	Rio
3:28.32	2020	J.Ingebrigtsen	NOR	Tokyo

Cuadro 17: 5000 metros mujeres

Mark	Date	Competitor	Nat	City
14:59.88	1996	Junxia Wang	CHN	Atlanta
14:40.79	2000	Gabriela Szabo	ROU	Sydney
14:45.65	2004	Meseret Defar	ETH	Athens
15:41.40	2008	Tirunesh Dibaba	ETH	Beijing
15:04.25	2012	Meseret Defar	ETH	London
14:26.17	2016	Vivian Jepkemoi Cheruiyot	KEN	Rio

Cuadro 18: 5000 metros hombres

Mark	Date	Competitor	Nat	City
14:36.60	1912	Hannes Kolehmainen	FIN	Stockholm
14:55.60	1920	Joseph Guillemot	FRA	Antwerp
14:31.20	1924	Paavo Nurmi	FIN	Paris
14:38.00	1928	Ville Ritola	FIN	Amsterdam
14:30.00	1932	Lauri Aleksanteri Lehtinen	FIN	Los Angeles
14:22.20	1936	Gunnar Höckert	FIN	Berlin
14:17.60	1948	Gaston Etienne Reiff	BEL	London
14:06.60	1952	Emil Zatopek	TCH	Helsinki
13:39.60	1956	Vladimir Kuts	URS	Melbourne
13:43.40	1960	Murray Gordon Halberg	NZL	Rome
13:48.80	1964	Robert Keyser Schul	USA	Tokyo
14:05.00	1968	Mohamed Gammoudi	TUN	Mexico City
13:26.42	1972	Lasse Viren	FIN	Munich
13:24.76	1976	Lasse Viren	FIN	Montreal
13:21.00	1980	Miruts Yifter	ETH	Moscow
13:05.59	1984	Said Aouita	MAR	Los Angeles
13:11.70	1988	John Ngugi	KEN	Seoul
13:12.52	1992	Dieter Baumann	GER	Barcelona
13:07.96	1996	Venuste Niyongabo	BDI	Atlanta
13:35.49	2000	Millon Wolde	ETH	Sydney
13:14.39	2004	Hicham El Guerrouj	MAR	Athens
12:57.82	2008	Kenenisa	ETH	Beijing
13:41.66	2012	Mohamed Farah	GBR	London
13:03.30	2016	Mohamed Farah	GBR	Rio
12:58.15	2020	J.Cheptegi	UGA	Tokyo

Cuadro 19: 10000 metros mujeres

Mark	Date	Competitor	Nat	City
31:05.21	1988	Olga Bondarenko	URRS	Seoul
31:06.02	1992	Derartu Tulu	ETH	Barcelona
31:01.63	1996	Fernanda Ribeiro	POR	Atlanta
30:17.49	2000	Derartu Tulu	ETH	Sydney
30:24.36	2004	Xing Huina	CH	Athens
29:54.66	2008	Tirunesh Dibaba	ETH	Beijing
30:20.75	2012	Tirunesh Dibaba	ETH	London
29:17.45	2016	Almaz Ayana	ETH	Rio
29:55.32	2020	Sifan Hassan	NED	Tokyo

Cuadro 20: 10000 metros hombres

Mark	Date	Competitor	Nat	City
31:21.80	1912	Hannes Kolehmain...	FIN	Stockholm
31:45.80	1920	Paavo Nurmi	FIN	Antwerp
30:23.20	1924	Ville Ritola	FIN	Paris
30:18.80	1928	Paavo Nurmi	FIN	Amsterdam
30:11.40	1932	Janusz Kusocinsk...	POL	Los Angeles
30:15.40	1936	Ilmari Salminen	FIN	Berlin
29:59.60	1948	Emil Zátopek	CZE	London
29:17.00	1952	Emil Zátopek	CZE	Helsinki
28:45.60	1956	Vladimir Kuts	SU	Melbourne
28:32.20	1960	Pyotr Bolotnikov	SU	Rome
28:24.40	1964	William Mills	US	Tokyo
29:27.40	1968	Naftali Temu	KEN	Mexico City
27:38.40	1972	Lasse Viren	FIN	Munich
27:40.40	1976	Lasse Viren	FIN	Montreal
27:42.70	1980	Miruts Yifter	ETH	Moscow
27:47.54	1984	Alberto Cova	ITA	Los Angeles
27:21.44	1988	Brahim Boutaib	MOR	Seoul
27:46.70	1992	Khalid Skah	MOR	Barcelona
27:07.34	1996	Haile Gebreselas...	ETH	Atlanta
27:18.20	2000	Haile Gebreselas...	ETH	Sydney
27:05.10	2004	Kenenisa Bekele	ETH	Athens
27:01.17	2008	Kenenisa Bekele	ETH	Beijing
27:30.42	2012	Mohamed Farah	GBR	London
27:05.17	2016	Mohamed Farah	GBR	Rio
27:43.22	2020	Selemon Barega	ETH	Tokyo

Cuadro 21: Maratón metros mujeres

Mark	Date	Competitor	Nat	City
2:24:52.00	1984	Joan Benoit	USA	Los Angeles
2:25:40.00	1988	Rosa Mota	POR	Seoul
2:32:41.00	1992	Valentina Yegorova	EUN	Barcelona
2:26:05.00	1996	Fatuma Roba	ETH	Atlanta
2:23:14.00	2000	Naoko Takahashi	JPN	Sydney
2:26:20.00	2004	Mizuki Noguchi	JPN	Athens
2:26:44.00	2008	Constantina Tomescu	ROU	Beijing
2:23:07.00	2012	Tiki Gelana	ETH	London
2:24:04.00	2016	Jemima Jelagat Sumgong	KEN	Rio

Cuadro 22: Maratón metros hombres

Mark	Date	Competitor	Nat	City
2:58:50.00	1896	Spyridon Louis	GRE	Athens
2:59:45.00	1900	Michel Theato	LUX	Paris
3:28:53.00	1904	Tom Hicks	USA	St. Louis
2:55:18.40	1908	John Joseph Hayes	USA	London
2:36:54.80	1912	Ken Mcarthur	RSA	Stockholm
2:32:35.80	1920	Hannes Kolehmainen	FIN	Antwerp
2:41:22.60	1924	Albin Oskar Stenroos	FIN	Paris
2:32:57.00	1928	Boughera El Ouafi	FRA	Amsterdam
2:31:36.00	1932	Juan Carlos Zabala	ARG	Los Angeles
2:29:19.20	1936	Kitei Son	JPN	Berlin
2:34:51.60	1948	Delfo Cabrera	ARG	London
2:23:03.20	1952	Emil Zatopek	TCH	Helsinki
2:25:00.00	1956	Alain Mimoun	FRA	Melbourne
2:15:16.20	1960	Abebe Bikila	ETH	Rome
2:12:11.20	1964	Abebe Bikila	ETH	Tokyo
2:20:26.40	1968	Mamo Wolde	ETH	Mexico City
2:12:19.80	1972	Frank Charles Shorter	USA	Munich
2:09:55.00	1976	Waldemar Cierpinski	GDR	Montreal
2:11:03.00	1980	Waldemar Cierpinski	GDR	Moscow
2:09:21.00	1984	Carlos Lopes	POR	Los Angeles
2:10:32.00	1988	Gelindo Bordin	ITA	Seoul
2:13:23.00	1992	Young-Cho Hwang	KOR	Barcelona
2:12:36.00	1996	Josia Thugwane	RSA	Atlanta
2:10:11.00	2000	Gezahegne Abera	ETH	Sydney
2:10:55.00	2004	Stefano Baldini	ITA	Athens
2:06:32.00	2008	Samuel Wanjiru	KEN	Beijing
2:08:01.00	2012	Stephen Kiprotich	UGA	London
2:08:44.00	2016	Eliud Kipchoge	KEN	Rio