Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Classificació diferenciable de les superfícies compactes

Autor: Paula Sempere Camín

Director: Dr. Ignasi Mundet Riera
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 13 de juny de 2022

Abstract

The classification of compact surfaces was already adressed in the 19th century. Both A. F. Möbius and C. Jordan studied this question by considering two surfaces equivalent if they could be decomposed into infinite small pieces such that contiguous pieces of one surface corresponded to contiguous pieces of the other one.

In addition, B. Riemann introduced the idea of classifying surfaces according to connectivity. Given a surface, he defined connectivity in base of the maximum number of cuts along closed curves or along arcs joining points on the edge that can be made without making the surface disconnected.

The result that determines the classification of compact surfaces is as follows:
Every compact, connected surface is diffeomorphic to a unique type of model surface.

In this paper we will study the concepts and the theory behind the classification of compact surfaces which are needed to be able to give a proof of the result previously announced. We will go over: Morse functions and Morse's lemma, the regular interval theorem, isotopy extensions, isotopies of disks and the construction of model surfaces.

Resum

El problema de la classificació compacta de superfícies ja estava present al segle XIX. Tant A. F. Möbius com C. Jordan van estudiar aquesta qüestió, considerant dues superfícies equivalents si podien ser descomposades en infinites peces petites de tal forma que peces contigües d'una superfície corresponien a peces contigües de l'altra.

Per altra banda, B. Riemann va introduir la idea de classificar les superfícies en funció de la connectivitat. Donada una superfície, va definir la connectivitat en base al màxim número de talls al llarg de corves tancades o arcs unint punts de la vora que es poden realitzar sense que la superfície deixi de ser connexa.

El resultat que determina la classificació de superfícies compactes és el següent:
Tota superfície compacta i connexa és difeomorfa a un únic tipus de superfície model.

En aquest treball estudiarem els conceptes i la teoria que hi ha al darrera de la classificació de superfícies compactes i que són necessaris per a poder-ne donar una demostració: les funcions de Morse i el Lema de Morse, el Teorema de l'interval regular, l'estensió d'isotopies, les isotopies dels discos i la construcció de les superfícies model.

2020 Mathematics Subject Classification. 58A05, 57Q70

Índex

1 Introducció

El projecte

El problema de classificació compacta de superfícies es basa en el resultat que afirma que tota superfície compacta i connexa és difeomorfa a un únic tipus de superfície model.

En aquest treball ens centrarem en constuir la teoria que hi ha darrera d'aquest resultat. No arribarem a provar-lo però si donarem gran part dels continguts i teoremes necessaris per a la seva demostració. Tractarem la teoria de Morse, parlarem d'isotopies i construirem les superfícies model.

Estructura de la Memòria

Comencem el treball presentant tots els resultats necessaris per a demostrar el Teorema de Morse-Sard. Aquest és un teorema clau per als fonaments de la transversalitat i la demostració d'enunciats relatius a aquesta.
El concepte de transversalitat tornarà a estar present en la definició de punts crítics no degenerats. Parlarem d'aquests al presentar les funcions de Morse i obtindrem una representació local d'aquestes funcions per mitjà del lema de Morse. Tots aquests continguts junt amb el Teorema de l'interval regular tenen gran importància per a demostrar teoremes relatius a la classificació de superfícies.

Més endavant tractarem les isotopíes, l'estensió d'aquestes, la unió de varietats diferenciables i veurem que hi ha una única forma d'incrustar (per mitjà d'un embedding) un disc en una varietat connexa. Tots aquests resultats ens seran útils per a, posteriorment, construir el que anomenarem superfícies model.
Acabarem el treball enunciant el resultat que ens permet classificar les superfícies compactes.

2 El teorema de Morse-Sard

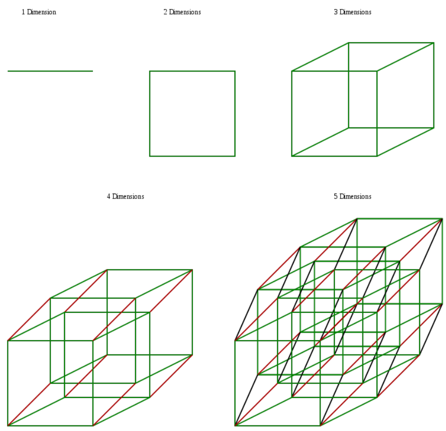
En l'àmbit de la topologia diferencial s'utilitza com a base matemàtica en alguns raonaments el següent resultat obtingut per A. P. Morse i A. Sard: *Sigui f:* $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ C^r*, on* $r >$ *max* $\{0, n - k\}$*, aleshores el conjunt de valors crítics té mesura zero en* $\mathbb{R}^k$.

En aquesta secció donarem els resultats necessaris per a acabar provant el teorema de Morse-Sard. Veurem una demostració només per al cas $r = \infty$.

Definició 2.1. Un n-cub $C \subset \mathbb{R}^n$ de costat $\lambda > 0$ és un producte

$$C = I_1 \times \cdots \times I_n \subset \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$$

d'intervals tancats I_j de longitud λ, tals que $I_j = [a_j, a_j + \lambda] \subset \mathbb{R}$ per a $j \in \{1, \ldots, n\}$.



Exemples de n-cubs per a $n \in \{1, \cdots, 5\}$. Imatge extreta de: https://hmong.es/es/Figura_geométrica

La mesura (o la n-mesura) de C és $\mu(C) = \mu_n(C) = \lambda^n$

Definició 2.2. Direm que un subconjunt $X \subset \mathbb{R}^n$ té mesura zero si per tot ϵ, X es pot recobrir per una família numerable de n-cubs tals que la suma de les seves mesures sigui inferior a ϵ.

La unió numerable de conjunts de mesura zero té mesura zero. Per tant:

Lema 2.3. *$X \subset \mathbb{R}^n$ té mesura zero si tot punt de X té un entorn en X de mesura zero.*

Demostració. Suposem que per tot $x \in X$ existeix un entorn U tal que $x \in U \subset X$, $\mu(U) = 0$.
Al ser U un entorn, per a cada x $\in$ X $\exists \epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \cap X \subset U$
Per tant, tenim que $\forall x \in X$, $\exists \epsilon > 0$ tal que $\mu(B_\epsilon(x) \cap X) = 0$

Veiem que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \epsilon > 0$ si prenem x', ϵ' tals que $|x - x'| < \frac{\epsilon}{3}$, ϵ' $\in (\frac{\epsilon}{3}, \frac{2\epsilon}{3})$, aleshores $x \in B_{\epsilon'}(x') \subseteq B_\epsilon(x)$:

$$x \in B_{\epsilon'}(x') \text{ ja que } |x - x'| < \tfrac{\epsilon}{3} \text{ i } \tfrac{\epsilon}{3} < \epsilon'$$
$$B_{\epsilon'}(x') \subseteq B_{\epsilon}(x) \text{ per la desigualtat triangular: sigui } y \in B_{\epsilon'}(x'), \text{ aleshores } |y - x'| < \epsilon'$$
$$\text{i tenim } |y - x| \leq |y - x'| + |x' - x| < \epsilon' + \tfrac{\epsilon}{3} < \tfrac{2\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

Es poden triar x' $\in \mathbb{Q}^n$, $\epsilon' \in \mathbb{Q}$ de manera que se satisfaci $|x - x'| < \frac{\epsilon}{3}$, ϵ' $\in (\frac{\epsilon}{3}, \frac{2\epsilon}{3})$ i aleshores es té:

$$\forall x \in X,\, \exists x' \in \mathbb{Q}^n,\, \exists \epsilon' \in \mathbb{Q},\, \epsilon' > 0 \text{ tal que } \mu(B_{\epsilon'}(x') \cap X) = 0$$

$x \in B_{\epsilon'}(x') \cap X$ i $\mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}$ és numerable. Per tant, tenim que X es pot expressar com a una unió numerable de conjunts de mesura zero. I per tant, tal i com es volia veure, X té mesura zero. □

Lema 2.4. *Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunt obert i f: $U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una funció C^1. Aleshores si $X \subset U$ té mesura zero, f(X) també.*

Demostració. Tot punt de X pertany a una bola oberta B $\subset U$ tal que $\overline{B} \subset U$, $\|Df(x)\|$ està uniformement acotada en B per una constant k > 0.
Tenim, doncs, $\|Df(x)\| \leq k \; \forall x \in B$, per tant, $|f(x) - f(y)| \leq k\ |x - y| \quad$ per tot $x, y \in B$

Sigui $C \subset B$ un n-cub de costat λ, aleshores tenim que f(C) està contingut en un n-cub de costat inferior a $k\lambda\sqrt{n}$:

$$\text{Hem vist que } |f(x) - f(y)| \leq k\ |x - y| \text{ per a } x, y \in B, \text{ per tant}$$
$$\text{per a tot } x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in C \subset B$$
$$|f(x) - f(y)| \leq k\ \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \leq k\ \sqrt{n\lambda^2} = k\lambda\sqrt{n}$$
$$\text{per ser C un n-cub de costat } \lambda$$

Per tant, si denotem per C' el n-cub de costat inferior a $k\lambda\sqrt{n} = L\lambda$ dins el que està contingut f(C). Tenim $\mu(C') < L^n\mu(C)$
Escribim

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$$

on cada X_j és un subconjunt compacte d'una bola B com les descrites prèviament.
Del fet que X té mesura zero es dedueix que, per tot $\epsilon > 0$, $X_j \subset \bigcup_{i \in I_j} C_i$ on els C_i són n-cubs tals que $\sum_{i \in I_j} \mu(C_i) < \epsilon$.
Aleshores tenim que, per cada j, f(X_j) $\subset f(\bigcup_{i \in I_j} C_i) = \bigcup_{i \in I_j} f(C_i) \subset \bigcup_{i \in I_j} C'_i$ on la suma de les mesures dels n-cubs C'_i és menor que $L^n\epsilon$. D'aquí obtenim que cada f(X_j) té mesura zero. Per tant,

$$f(X) = f(\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f(X_j)$$

f(X) és la unió numerable de conjunts de mesura zero i té mesura zero. □

Definició 2.5. Sigui M una C^∞ varietat diferenciable n-dimensional. Diem que un subconjunt $X \subset M$ té mesura zero si per tota carta (φ, U), el conjunt $\varphi(U \cap X) \subset \mathbb{R}^n$ té mesura zero.

Del Lema 2.4 concluim que això serà cert donat un atles de cartes $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i\in I}$ per al que els conjunts $\varphi_i(U_i \cap X) \subset \mathbb{R}^n$ tinguin mesura zero. És a dir, és suficient veure que això és compleix per a un atles per a que quedi vist que es compleix per a tots, ja que podem aplicar el Lema 2.4 al canvi de cartes.
No hem donat una definció de mesura d'un subconjunt de M, sinó que hem descrit un tipus de subconjunt de M que diem que és de mesura zero.

Sigui X un espai topològic:

Definició 2.6. Un subconjunt $A \subseteq X$ diem que és dens a cap part (o disseminat) en X si l'interior de la clausura d'A és el buit, és a dir, si ($\overline{A}$)°= Ø. També es diu que A és disseminat en X si en tot subconjunt obert B de X tal que B és no buit $A \cap B$ és no dens.

Definició 2.7. Un espai topològic es diu que és σ-compacte si és la unió numerable d'espais compactes.

Definició 2.8. Sigui A $\subseteq X$ un conjunt, diem que és magre (o conjunt de primera categoria) si es pot expressar com la unió numerable de conjunts disseminats.

Definició 2.9. Sigui A $\subseteq X$ un conjunt, diem que A és residual si A^c és conjunt de primera categoria. Equivalentment, A és residual si conté la intersecció numerable d'una familia de conjunts densos i oberts.

Efectivament, si A^c és conjunt de primera categoria i tenim $A^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$ on D_i són conjunts disseminats, aleshores $A^c \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{D_i}$ on $\overline{D_i}$ són també conjunts disseminats.

Tenim doncs, $\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{D_i}^c \subseteq A$, on els $\overline{D_i}^c$ són oberts i també són densos ja que:
Per tot B obert de X, si $\overline{D_i}^c \cap B = \emptyset$, aleshores $B = \emptyset$.
Atès que, si $B \neq \emptyset$, aleshores $\exists x \in$B tal que $x \in \overline{D_i}$. I, per tant, es té que $\overline{D_i} \cap B$ és un obert de $\overline{D_i}$ que conté x. Així doncs, tindríem $x \in (\overline{D_i})^\circ$, però $\overline{D_i}$ és disseminat.

Per a veure l'altra implicació de l'equivalència suposem que A conté la intersecció numerable d'una família de conjunts densos i oberts:
$\bigcap_{i=1}^{\infty} D_i \subseteq A$, on els D_i són oberts i densos, per tant, $A^c \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i^c$ on els D_i^c són tancats.
Escribim $A^c = \bigcup_{i=1}^{\infty}(D_i^c \cap A^c)$ i volem veure que per tot i es compleix que $(D_i^c \cap A^c)$ és disseminat. És a dir, volem veure que ($\overline{(D_i^c \cap A^c)}$)°= Ø:

$$\overline{(D_i^c \cap A^c)} \subseteq \overline{D_i^c} = D_i^c$$
$$\text{Per tant, } (\ \overline{(D_i^c \cap A^c)}\ )^\circ \subseteq (D_i^c)^\circ$$
$$\text{Sabem que els } D_i \text{ són densos i } (D_i^c)^\circ \text{són oberts tals que } D_i \cap (D_i^c)^\circ = \emptyset$$

D'aquí obtenim que $(D_i^c)^\circ = \emptyset$ i, per tant, ($\overline{(D_i^c \cap A^c)}$)°= Ø, que és el que voliem veure.

Teorema 2.10. (Teorema de categories de Baire) *Sigui (M, d) un espai mètric complet. Si A és un conjunt residual, aleshores A és dens en M.*

Demostració. Sabem que A és dens en M si per a tot obert V de M, $A \cap V = \emptyset \Rightarrow V = \emptyset$
Per tant, volem veure que tota bola oberta $B = B(x_0, r_0)$ en M interseca amb A. Podem

assumir $r_0 < \frac{1}{2}$.
Com que A és un conjunt residual, A^c és magre i, per tant, tenim

$$A^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

on cada A_n és disseminat. A_1 és disseminat (en tot subconjunt obert V de M tal que V és no buit $A_1 \cap V$ és no dens). Per tant per a $B = B(x_0, r_0)$, que és un obert de M no buit, tenim que $A_1 \cap B$ és no dens en B.
Així doncs, existeix una bola oberta $B_1(x_1, r_1)$ no buida tal que:

$$\begin{gathered} \overline{B_1} \subset B \\ \overline{B_1} \cap A_1 = \emptyset \\ r_1 < \frac{r_0}{2} \end{gathered}$$

Repetint el mateix procediment aplicat a A_{k+1} conjunt disseminat i a B_k un obert de M no buit tenim que $A_{k+1} \cap B_k$ és no dens en B_k. Per tant, existeix una bola oberta $B_{k+1}(x_{k+1}, r_{k+1})$ no buida tal que:

$$\begin{gathered} \overline{B_{k+1}} \subset B_k \\ \overline{B_{k+1}} \cap A_{k+1} = \emptyset \\ r_{k+1} < \frac{r_k}{2} \end{gathered}$$

El centre de cada bola oberta B_n defineix una successió $\{x_n\}_n$. És una successió de Cauchy ja que $\forall \epsilon > 0$ si prenem $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \epsilon$, aleshores:

$$\forall i, j \geq N \quad d(x_i, x_j) \leq d(x_i, x_N) + d(x_N, x_j) \leq 2 \cdot r_N < 2 \cdot \frac{1}{2^{N+1}} = \frac{1}{2^N} < \epsilon$$

Ja que, per com hem definit les boles obertes, $i, j \geq N$ implica que $x_i, x_j \in B_N(x_N, r_N)$.
Tenim, doncs, que $\{x_n\}_n$ és una successió de Cauchy i com que M és un espai mètric complet, tota successió de Cauchy té límit. Denotem per x el límit de $\{x_n\}_n$.

Tenim que $\forall n \geq 1$ $x \in \overline{B}_n$ ja que: $x_n \in B_n$ per tot n, $\overline{B_{k+1}} \subset B_k$ per tot $k \in \mathbb{N}$ i tota successió convergent en un conjunt tancat convergeix a un valor del conjunt.
Per tant, $x \in \overline{B}_1 \subset B$ i $x \notin A^c$ perquè per definició $A^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ i $\overline{B_{k+1}} \cap A_{k+1} = \emptyset$ per tot $k \in \mathbb{N}$.
Com que $x \notin A^c$, tenim que $x \in (A^c)^c$, és a dir, $x \in A$. Per tant, tenim $x \in B \cap A$ i hem vist que tota bola oberta B en M interseca amb A, que és el que voliem. $\square$

Observació 2.11. Un cub no té mesura zero, per tant, un conjunt de mesura zero a $\mathbb{R}^n$ no pot contenir un cub, així doncs, tindrà interior buit.
Se segueix que un subconjunt tancat de $\mathbb{R}^n$ (o d'una varietat diferenciable M) de mesura zero és disseminat.

Observació 2.12. Més en general, sigui $X \subset M$ subconjunt de mesura zero i σ-compacte, aleshores tenim que M\X és dens.

Això és degut a que, per la σ-compacitat, podem expressar X com a la unió numerable :

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$$

on cada C_i és un conjunt compacte. M és Hausdorff per ser varietat topològica i sabem que tot subconjunt compacte d'un espai de Hausdorff és tancat, per tant els C_i són conjunts tancats. A més, tot C_i té mesura zero per ser X de mesura zero. Tenim doncs que els C_i són subconjunts tancats de mesura zero de M i, per la Observació 2.11, tenim que són disseminats.
Per tant, X és un conjunt magre perquè es pot expressar com a unió numerable de conjunts disseminats i M\X és residual per ser X magre.
Aplicant el Teorema 2.10 a M varietat topològica i M\X conjunt residual, obtenim que M\X és dens.

Proposició 2.13. *Siguin M, N varietats diferenciables tals que dim $M <$ dim N. Sigui f: $M \longrightarrow N$ una funció C^1, aleshores N\f(M) és dens.*

Demostració. Per la Observació 2.12 només ens cal veure que $f(M) \subset N$ té mesura zero ja que tota varietat diferenciable és σ-compacte, per tant f(M) també ho és per ser f continua.

Demostrem el següent resultat: *Sigui $U \subset \mathbb{R}^m$ un subconjunt obert, g: $U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una funció C^1 tal que $m < n$, aleshores $g(U) \subset \mathbb{R}^n$ té mesura zero.*
Considerem la següent composició de funcions C^1:

$$\mathrm{g} \circ \pi\colon U = U \times 0 \subset U \times \mathbb{R}^{n-m} \longrightarrow U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$U \times 0$ té mesura zero en $U \times \mathbb{R}^{n-m} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} = \mathbb{R}^n$ (per tot ϵ podem recobrir $U \times 0$ per una familia numerable de n-cubs tals que la suma de les seves mesures sigui inferior a ϵ)
I, pel Lema 2.4, aplicat a g $\circ\, \pi$ i a l'obert $U \times 0$, tenim que g($\pi(U \times 0)$) = g(U) té mesura zero.

Aplicant aquest resultat a $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$, per a qualsevol (φ, U_i) i (ψ, V_j) cartes de M i N respectivament, tenim:

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \ \varphi(U_i) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow U_i \longrightarrow f(U_i) \subset V_j \longrightarrow \psi(f(U_i)) \subset \psi(V_j) \subset \mathbb{R}^n$$

on m = dim M < dim N = n i $\varphi(U_i) \subset \mathbb{R}^m$ és obert. Per tant, $\psi(f(U_i)) \subset \mathbb{R}^n$ té mesura zero. I, per definició de subconjunt de mesura zero d'una varietat diferenciable, tenim que els subconjunts f(U_i) $\subset N$ tenen mesura zero.
A més, $M = \bigcup_{i \in I} U_i$, per tant f(M)= $\bigcup_{i \in I} f(U_i)$. Així tenim que f(M) és unió numerable de conjunts de mesura zero i, per tant, té mesura zero tal i com volíem veure. □

Recordem que $p \in M$ és un punt crític d'una funció f: $M \longrightarrow N$ de classe C^1 si $d_p f : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$ és una funció no exhaustiva, equivalentment si:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(p) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p) \end{pmatrix}$$

que és la matriu de l'aplicació lineal d_pf, té $rang \neq n$.
Denotarem per $\sum_f$ el conjunt de punts crítics d'una funció f. N$\backslash f(\sum_f)$ serà el conjunt de valors regulars de f ja que $q \in N$ és un valor regular de f si $f^{-1}(q) \neq \emptyset$ i per a tot $p \in f^{-1}(q)$ l'aplicació $d_pf : T_pM \longrightarrow T_qN$ és exhaustiva.

Teorema 2.14. (Teorema de Morse-Sard) *Siguin M, N varietats diferenciables de dimensions m i n respectivament i sigui f: $M \longrightarrow N$ una funció C^r. Si es compleix $r > max\ \{o, m-n\}$, aleshores f($\sum_f$) té mesura zero en N.*

El conjunt de valors regulars de f serà residual i, per tant, pel Teorema 2.10 serà un conjunt dens en N

Tenim que el conjunt de valors regulars de f és residual perquè podem expressar f($\sum_f$) com la unió numerable de les imatges dels punts crítics de f. De la Observació 2.11 i del fet que f($\sum_f$) té mesura zero en N obtenim que les imatges dels punts crítics són conjunts disseminats. Per tant, f($\sum_f$) és un conjunt magre i el conjunt de valors regulars de f residual.

Provarem el teorema només per al cas d'una funció C^∞.

Demostració. És suficient provar-ho per al cas local, per tant, considerem una funció f: $W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ on $W \subset \mathbb{R}^m$ és un subconjunt obert.

- Si $m < n$ aleshores podem aplicar el resultat que hem provat a la demostració de la Proposició 2.13:
  Sigui $U \subset \mathbb{R}^m$ un subconjunt obert, g: $U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una funció C^1 tal que $m < n$, aleshores $g(U) \subset \mathbb{R}^n$ té mesura zero.
  Així doncs, obtenim que f(W) té mesura zero i, per tant, f($\sum_f$) $\subset f(W)$ també.
- Suposem d'ara en endavant $m \geq n$ i provarem que f($\sum_f$) té mesura zero en N.

Denotem per operador diferencial d'ordre 1 a una funció $C^\infty(W, \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(W, \mathbb{R})$ tal que $g \in C^\infty(W, \mathbb{R})$ va a parar a $\dfrac{\partial g}{\partial x_k}$ per a algun $k \in \{1, \cdots, m\}$. On $C^\infty(W, \mathbb{R})$ denota les funcions de classe C^∞ que tenen com a conjunt de sortida W i com a conjunt d'arribada $\mathbb{R}$. La composició de ν operadors diferencials d'ordre 1 és un operador diferencial d'orde ν.

Tenim la funció f: $W \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ i escriurem $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x))$.

Definim els següents subconjunts de $\sum_f$ (els punts crítics de f):

- $\sum^1$ serà el conjunt de punts $p \in \sum_f$ tals que $\Delta f_i(p) = 0$ per a tots els operadors diferencials Δ d'ordre inferior o igual a $\frac{m}{n}$ i per a tot $i \in \{1, \cdots, n\}$.
- $\sum^2$ serà el conjunt de punts $p \in \sum_f$ tals que $\Delta f_i(p) \neq 0$ per a algun operador diferencial Δ d'ordre superior o igual a 2 i per a algun $i \in \{1, \cdots, n\}$.
- $\sum^3$ serà el conjunt de punts $p \in \sum_f$ tals que $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \neq 0$ per a algun $j \in \{1, \cdots, m\}$ i algun $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Podem expressar el conjunt de punts crítics de f com la unió d'aquests tres subconjunts: $\sum_f = \sum^1 \bigcup \sum^2 \bigcup \sum^3$.

Provarem que f($\sum_f$) té mesura zero en N per inducció en m:

- Per al cas inicial m = 1, com que $m \geq n$, tenim n = 1. I en aquest cas $\sum_f = \sum^1$. Per tant, només ens cal veure que f($\sum^1$) = 0.

Veurem, més en general, que f($\sum^1$) = 0 per a tot m, n tals que $m \geq n$:

Sigui ν el mínim enter tal que $\nu > \frac{m}{n}$. Mostrem que per a tot punt p de $\sum^1$ existeix un entorn de p en W tal que per a tot punt q que pertany a aquest entorn es compleix: $|f(p) - f(q)| \ \leq \ B\ |p-q|^{\nu}$, per a $B \geq 0$.

Sigui $p \in \sum^1 \subset W$, al ser W un subconjunt obert de $\mathbb{R}^m$ tenim que existeix $\epsilon > 0$ tal que $p \in \overline{B_\epsilon(p)} \subset W$ i prenem $q \in \overline{B_\epsilon(p)}$. Tenim $p = (p_1, \cdots, p_m)$, $q = (q_1, \cdots, q_m)$.

Considerem el conjunt $I = \{t \in \mathbb{R}\ |p + t(q-p) \in \overline{B_\epsilon(p)}\}$ i, per a qualsevol $i \in \{1, \cdots, n\}$, la funció C^∞ $g_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g_i(t) = f_i(p + t(q-p))$. Denotem $v = q - p$ i tenim $v = (v_1, \cdots, v_m)$.
Per ser $p \in \sum^1$ i ν el mínim enter tal que $\nu > \frac{m}{n}$ tenim:

$$\forall k \leq \nu - 1, \forall j_1, \cdots, j_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ tals que } j_1 + \cdots + j_m \leq k$$
$$\frac{\partial^{j_1+\cdots+j_m}}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_m^{j_m}} f_i(p) = 0$$

Tenim $g_i'(0) = \sum_{j=1}^m \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} v_j$ (p)

$g_i''(0) = \sum_{j,l} \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_l} v_j \cdot v_l$ (p)

$\vdots$

$g_i^{(k)}(0) = \sum_{j_1, \cdots, j_m} \dfrac{\partial^k f_i}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_m^{j_m}} \prod_{r=1}^m v_r^{j_r}$ (p) $\quad j_1, \cdots, j_m$ tals que $\sum_{r=1}^m j_r = k$

Per tant, $g_i^{(k)}(0) = 0$ per tot $k \leq \nu - 1$

$g_i(1) = f_i(p + v) = f_i(q)$

Per tant, $|f_i(p) - f_i(q)| = |g_i(1) - g_i(0)| = \left| \dfrac{g_i^{(\nu)}(\xi)}{\nu!} \right|$ per a $\xi \in (0,1)$. Usant a la segona igualtat el desenvolupament de Taylor de g_i en 0.

Sabem que $q \in \overline{B_\epsilon(p)}$, per tant $p + \xi(q-p) \in \overline{B_\epsilon(p)}$ ja que $|p + \xi(q-p) - p| \leq |q - p| < \epsilon$
On a la primera desigualtat hem usat el fet que $\xi \in (0,1)$.

$$\left| \frac{g_i^{(\nu)}(\xi)}{\nu!} \right| = \left| \frac{\sum_{j_1, \cdots, j_m} \frac{\partial^\nu f_i}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_m^{j_m}} \prod_{r=1}^m v_r^{j_r} \ (p + \xi(q-p))}{\nu!} \right| \quad j_1, \cdots, j_m \ \textit{tals que} \ \sum_{r=1}^m j_r = \nu$$

Tenim $|v_r| = |q_r - p_r| \leq \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + \cdots + (q_n - p_n)^2} = |q - p|$, per tant, $| \prod_{r=1}^m v_r^{j_r} | \leq |q-p|^\nu$ per ser $\sum_{r=1}^m j_r = \nu$.

Havíem vist $p + \xi(q-p) \in \overline{B_\epsilon(p)}$ que és un compacte, per tant, $\left| \dfrac{\partial^\nu f_i}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_m^{j_m}} (p + \xi(q-p)) \right|$ està acotat per a qualsevol $j_1, \cdots, j_m$ tals que $\sum_{r=1}^m j_r = \nu$.

Per tant, existeix $B_i \geq 0$ tal que $\left| \dfrac{\sum_{j_1, \cdots, j_m} \frac{\partial^\nu f_i}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_m^{j_m}} (p + \xi(q-p))}{\nu!} \right| \leq B_i$

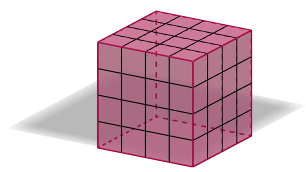
per la desigualtat triangular i el comentari previ.

Així doncs, tenim que per a tot $i \in \{1, \cdots, n\}$ $|f_i(p) - f_i(q)| = \left| \dfrac{g_i^{(\nu)}(\xi)}{\nu!} \right| \leq B_i |q-p|^\nu$.

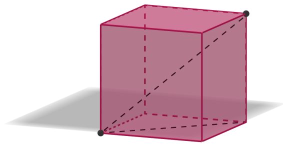
$$\text{Aleshores,} \quad |f(q) - f(p)| = \sqrt{(f_1(q) - f_1(p))^2 + \cdots + (f_n(q) - f_n(p))^2}$$
$$. \qquad \leq \sqrt{n} \ max_{i \in \{1, \cdots, n\}} |f_i(q) - f_i(p)|$$

Per tant, si denotem $B = \sqrt{n} \ max_{i \in \{1, \cdots, n\}} B_i$ on $B \geq 0$ tenim que per a tot $p \in \sum^1$ existeix un entorn en W tal que per a tot punt q de l'entorn es compleix:
$|f(p) - f(q)| \leq B \ |p - q|^\nu$, per a $B \geq 0$.

Per a $p \in \sum^1$ prenem un entorn U com el mencionat prèviament que sigui un cub. Així doncs, només ens cal provar que $f(U \cap \sum^1)$ té mesura zero per a veure que $f(\sum^1)$ també té mesura zero (ja que el podrem expressar com a unió numerable de conjunts de mesura zero).
Sigui λ la longitud del costat de U i sigui s un natural prou gran, dividim U en s^m cubs de costat $\dfrac{\lambda}{s}$.



Denotem els cubs que interseQuen amb $\sum^1$ per C_k per a $k \in \{1, \cdots, t\}$ amb $t \leq s^m$.
Cada C_k està contingut a una bola de radi $\sqrt{m}\ \dfrac{\lambda}{s}$ centrada a un punt de $U \cap \sum^1 \neq \emptyset$.
Prenem radi r= $\sqrt{m}\ \dfrac{\lambda}{s}$ perquè aquesta és la distància a la que es troben els dos punts més allunyats del cub.
Per exemple, per a m = 2, qualsevol parell de vèrtexs oposats seran els punts més allunyats entre si i tenim que la distància entre ells serà $d^2 = \left(\dfrac{\lambda}{s}\right)^2 + \left(\dfrac{\lambda}{s}\right)^2 = 2\left(\dfrac{\lambda}{s}\right)^2$ Per tant, $d = \sqrt{2}\ \dfrac{\lambda}{s}$.
En el cas m=3, tenim que la distància màxima entre dos punts del cub serà $d^2 = \left(\sqrt{2}\ \dfrac{\lambda}{s}\right)^2 + \left(\dfrac{\lambda}{s}\right)^2 = 3\left(\dfrac{\lambda}{s}\right)^2$ Per tant, $d = \sqrt{3}\ \dfrac{\lambda}{s}$.



Del fet que, per a tot $k \in \{1, \cdots, t\}$, C_k està contingut a una bola de radi $\sqrt{m}\ \dfrac{\lambda}{s}$ centrada a un punt $c \in U \cap \sum^1$ i de la desigualtat $|f(p) - f(q)| \leq B\ |p-q|^\nu$ per a tot $p \in U \cap \sum^1$ i $q \in U$ es dedueix:
f(C_k) està contingut en un cub $C'_k \subset \mathbb{R}^n$ de costat inferior o igual a $2B\left(\sqrt{m}\ \dfrac{\lambda}{s}\right)^\nu = A\left(\dfrac{\lambda}{s}\right)^\nu$

Ja que per a tot $q_1, q_2 \in C_k \subset U$ tenim $|f(q_1) - f(q_2)| \leq |f(q_1) - f(c)| + |f(c) - f(q_2)| \leq B|q_1 - c|^\nu + B|c - q_2|^\nu \leq 2B\left(\sqrt{m}\ \dfrac{\lambda}{s}\right)^\nu$.
Anomenem $\sigma(s)$ a la suma de les n-mesures dels cubs C'_k, sabem que $k \in \{1, \cdots, t\}$ per a $t \leq s^m$ i tenim:
$\sigma(s) \leq s^m\ A^n \left(\dfrac{\lambda}{s}\right)^{n\nu} = s^{m-n\nu} A^n \lambda^{n\nu}$, on hem triat ν tal que $\nu > \dfrac{m}{n}$, per tant, $m - n\nu < 0$

Així doncs, tenim que $\sigma(s)$ tendeix a 0 a mida que s augmenta. I d'aquí s'obté que f($U \cap \sum^1$) té mesura zero ja que:
$\mu(f(U \cap \sum^1)) = \mu(f(\cup_k C_k)) = \mu(\cup_k f(C_k)) = \sum_k \mu(f(C_k)) \leq \sum_k \mu(C'_k) = \sigma(s)$.

Per tant, queda vist que f($\sum^1$) té mesura zero i, a més, queda provat el cas inicial de la inducció sobre m.

- Hipòtesi d'inducció: considerem ara $m > 1$ i suposem que el teorema de Morse-Sard es compleix per a qualsevol funció C^∞ $P \longrightarrow Q$ on $dimP < m$, dim Q = n. Demostrarem el cas inductiu per a donar per finalitzada la demostració.

Veiem que f($\sum^2 \setminus \sum^3$) té mesura zero:
Per la definició que hem donat de $\sum^2$ i $\sum^3$ tenim que per a cada $p \in \sum^2 \setminus \sum^3$ existirà

algún operador diferencial θ d'ordre 1 tal que:

$$\begin{aligned} \theta f_i(p) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_j}\theta f_i(p) &\neq 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

per a algun $i \in \{1, \cdots, n\}$, $j \in \{1, \cdots, m\}$. Fixats θ, i, j denotem per X el conjunt de tots els punts que compleixen (2.1). Si veiem que f(X) té mesura zero, quedarà demostrat que f($\sum^2 \setminus \sum^3$) té mesura zero ja que serà unió numerable de conjunts de mesura zero.

Suposem $X \neq \emptyset$ ja que sinó és clar que f(X) té mesura zero. Aleshores tenim que $0 \in \mathbb{R}$ és un valor regular de la funció θf_i: $W \longrightarrow \mathbb{R}$ que serà de classe C^∞ per ser-ho f_i. Efectivament, 0 és valor regular de θf_i ja que: $\theta f_i^{-1}(0) \neq \emptyset$ per ser X no buit i, a més, per a tot $p \in \theta f_i^{-1}(0)$ tenim que $d_p\theta f_i$ és exhaustiva.
L'exhaustivitat de $d_p\theta f_i$ es veu perquè $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\theta f_i(p), \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m}\theta f_i(p)\right)$ té rang 1 ja que existeix $j \in \{1, \cdots, m\}$ tal que $\frac{\partial}{\partial x_j}\theta f_i(p) \neq 0$.
Aleshores, pel Teorema del valor regular aplicat a la funció diferenciable (C^∞) θf_i: $W \longrightarrow \mathbb{R}$ i a $0 \in \mathbb{R}$ valor regular de θf_i, tenim que X $= \theta f_i^{-1}(0)$ és una C^∞ subvarietat diferenciable de W de dimensió $dim(W) - dim(\mathbb{R}) = m - 1$.
Clarament, $\sum_f \cap X \subset \sum_{f|X}$ on $f|X$: $X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ i per hipòtesi d'inducció sabem que f($\sum_{f|X}$) té mesura zero.
$X \subset \sum_f$, per tant, $\sum_f \cap X = X$ i tenim que f(X) té mesura zero per estar contingut en un conjunt de mesura zero. Per tant, hem vist el que volíem i queda provat que f($\sum^2 \setminus \sum^3$) té mesura zero.

Veurem, per últim, que f($\sum^3$) té mesura zero:
Aleshores tindrem que f($\sum_f$) $= f(\sum^1 \cup \sum^2 \cup \sum^3) = f(\sum^1 \cup (\sum^2 \setminus \sum^3) \cup \sum^3) = f(\sum^1) \cup f(\sum^2 \setminus \sum^3) \cup f(\sum^3)$. Per tant, f($\sum_f$) serà reunió de tres conjunts de mesura zero i tindrà mesura zero, de forma que quedarà probat el cas inductiu.

Per definició de $\sum^3$ sabem que tot punt $p \in \sum^3$ tindrà un entorn obert $U \subset W$ en el que per a algun $i \in \{1, \cdots, n\}$, $j \in \{1, \cdots, m\}$ $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \neq 0$.
Anem a veure que es pot triar U tal que existeix un conjunt obert $A \times B \subset \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$ i un C^∞ difeomorfisme h: $A \times B \longrightarrow U$ tal que el diagrama següent commuta:

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "h"] \arrow[d] & U \arrow[d, "f_i"] \\ B \arrow[r, "i"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Per a f_i: $U \subset W \longrightarrow \mathbb{R}$, i la inclusió.
Del fet que $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \neq 0$ per a algun i, j es dedueix que $\nabla f_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f_i}{\partial x_m}\right) \neq 0$.
Reordenem les coordenades en $\mathbb{R}^m$, si cal, de forma que puguem suposar que $\frac{\partial f_i}{\partial x_1} \neq 0$.
Considerem l'hiperplà $Z \equiv \mathbb{R}^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$ tal que $Z = \{x_1 = 0\}$ i tenim que $\nabla f_i \notin Z$.

Sigui π: $\mathbb{R}^m \longrightarrow Z$ la projecció ortogonal definim una funció $F = \pi \times f_i$: $U \longrightarrow Z \times \mathbb{R}$

tal que $F(x_1, \cdots, x_m) = (x_2, \cdots, x_m, f_i(x_1, \cdots, x_m))$. F és diferenciable ($C^\infty$) per ser-ho f_i i tenim:

$$DF = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \neq 0 & \frac{\partial f_i}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

Per al punt $p \in \sum^3$ per al que hem considerat l'entorn U tenim:
det D$(\pi \times f_i)$(p) $= \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \neq 0$, per tant, la matriu D$(\pi \times f_i)$(p) = DF(p) és invertible.
Podem aplicar, doncs, el Teorema de la funció inversa a la funció $F : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$ de classe C^∞ i a $p \in U$ tal que DF(p) és invertible. Aleshores obtenim que F és localment invertible a p i la inversa local serà també C^∞, és a dir: existeix $V \subset \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$ un entorn de F(p) i una funció C^∞ $G : V \longrightarrow U$ tals que $V = F(U)$, $G(V) = U$. Per tant, tenim que $G \circ F = id_U$ i $F \circ G = id_V$.
Considerem el conjunt obert $A \times B := V \subset \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$, aleshores $U = G(A \times B)$ i tenim un C^∞ difeomorfisme h:=G tal que h: $A \times B \longrightarrow U$.

Només ens queda veure que el diagrama commuta:

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "h:=G"] \arrow[d] & U \arrow[d, "f_i"] \\ B \arrow[r, "i"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Sabem que $F \circ G = id_V$, per tant, per a $(a, b) \in A \times B$, $F(G(a, b)) = (a, b)$. Alhora, per definició de F, tenim $F(G(a, b)) = (\pi(G(a, b)), f_i(G(a, b)))$. Igualant les segones coordenades obtenim $f_i(G(a, b)) = b$ i així queda vist el que volíem.

Per tant, per a $(x, t) \in A \times B$, tenim $f_i(x, t) \equiv t$.
Sabem que $\frac{\partial f_i}{\partial x_1} \neq 0$ i reordenem les coordenades a $\mathbb{R}^n$ de forma que $f_i = f_n$.

Identifiquem U amb $A \times B$ via el difeomorfisme h, aleshores tenim:

$$f|U : A \times B \subset \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$$
$$f(x, t) = (u_t(x), t)$$

Per a tot $t \in B$, $u_t : A \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ és una funció C^∞ on, per a $x \in A$, $u_t(x) := (f_1(x, t), \cdots, f_{n-1}(x, t))$.

És fàcil veure que (x, t) serà un punt crític de f, si i només si, x és un punt crític de u_t ja que:

$$Df = \begin{pmatrix} \boxed{\quad Du_t \quad} & \vdots \\ 0\ 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per tant, Df té rang n, si i només si, Du_t té rang n-1.
Així doncs, $\sum_f \cap (A \times B) = \cup_{t \in B} \sum_{u_t} \times t$. Recordem que havíem identificat $A \times B$ amb U via h.
Com que A té dimensió $m-1$ podem aplicar la hipòtesis d'inducció i obtenim $\mu_{n-1}(u_t(\sum_{u_t})) = 0$, on μ_{n-1} denota la mesura de Lebesgue a $\mathbb{R}^{n-1}$.
Pel Teorema de Fubini tenim:

$$\begin{aligned} \mu_n(\cup_{t \in B} f(\textstyle\sum_{u_t} \times t)) &= \mu_n \left(\int_B f(\textstyle\sum_{u_t}, 1)\ dt \right) = \mu_n \left(\int_B u_t(\textstyle\sum_{u_t}) \times 1\ dt \right) \\ &= \int_B\ \mu_{n-1}(u_t(\textstyle\sum_{u_t}))\ dt = \int_B 0\ dt = 0 \end{aligned}$$

Per tant, obtenim: $\mu_n(f(\sum_f \cap (A \times B))) = \mu_n(f(\cup_{t \in B} \sum_{u_t} \times t)) = \mu_n(\cup_{t \in B} f(\sum_{u_t} \times t)) = 0$ i havíem identificat U amb $A \times B$ via h, per tant, obtenim que f($\sum^3 \cap U$) té mesura 0 per a U entorn d'un punt $p \in \sum^3$ qualsevol.
Per tant, f($\sum^3$) tindrà mesura zero per ser la unió numerable de conjunts de mesura zero i així queda vist que f($\sum_f$) té mesura zero al cas inductiu. Per tant, queda provat el teorema. $\square$

Del Teorema 2.14 es poden deduir certes afirmacions:
Sigui f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció C^1. Si y és un valor regular de f, aleshores tenim que la recta $\mathbb{R} \times y \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ és transversal a la gràfica d'f. El Teorema 2.14 implica que la "majoria"(un conjunt dens) de rectes horitzontals seran transversals a la gràfica d'f.
Si considerem f: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció C^2. En aquest cas, pel Teorema 2.14, obtenim que la majoria de plans horitzontals $\mathbb{R}^2 \times z \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ són transversals a la gràfica d'f.

3 Teoria de Morse

En aquesta secció definirem el que s'anomenen funcions de Morse i analitzarem els seus conjunts de nivell. Demostrarem el Lema de Morse i veurem que a cada punt crític d'aquestes funcions es pot construir una carta que fa que la funció de Morse tingui l'aspecte d'una forma quadràtica no degenerada. L'índex d'aquesta forma s'anomena l'índex del punt crític.
Més endavant, tractarem amb equacions diferencials i estudiarem els conjunts $f^{-1}[a,b]$ que no contenen punts crítics, per a f: $M \longrightarrow [a,b]$. Sota certes restriccions, demostrarem que $f^{-1}[a,b] \approx f^{-1}(a) \times [a,b]$.

3.1 Funcions de Morse

Suposem M una varietat diferenciable de dimensió m.

Definició 3.1. Sigui M, $p \in M$, diem que $D : \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ és un operador diferencial en el punt p (o una p-derivació) si es verifiquen les següents dues condicions:

- D és $\mathbb{R}$-lineal.
- D(f · g) = D(f) · g(p) + f(p) · D(g).

on $\mathcal{F}(M) = \{f : M \longrightarrow \mathbb{R} \text{ diferenciables}\}$.
Definim l'espai tangent a M en p, que denotarem per T_pM, com el conjunt de tots els operadors diferencials en el punt p.

Definició 3.2. Siguin M, N varietats diferenciables, $F : M \longrightarrow N$ una aplicació diferenciable i $p \in M$. Definim l'aplicació diferencial de F en el punt p, que denotarem per d_pF, com:

$$\begin{aligned} d_pF : T_pM &\longrightarrow T_{F(p)}N \\ v &\longmapsto d_pF(v) \end{aligned}$$

On tenim que:

$$\begin{aligned} d_pF(v) : \mathcal{F}(N) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g &\longmapsto v(g \circ F) \end{aligned}$$

Tenim $g \circ F : M \longrightarrow N \longrightarrow \mathbb{R}$, per tant, $g \circ F$ pertany a $\mathcal{F}(M)$ per ser composició d'aplicacions diferenciables, i v($g \circ F$)$\in \mathbb{R}$.
L'aplicació diferencial de F en p està ben definida perquè $d_pF(v)$ és una F(p)-derivació en N i, per tant, pertany a $T_{F(p)}N$. Això és degut a que v és una p-derivació en M.
Per a $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, f, g $\in \mathcal{F}(N)$:

- $d_pF(v)$ és $\mathbb{R}$-lineal: $d_pF(v)(\lambda f + \mu g) = v((\lambda f + \mu g) \circ F) = v(\lambda \cdot (f \circ F) + \mu \cdot (g \circ F)) = \lambda \cdot v(f \circ F) + \mu \cdot v(g \circ F) = \lambda \cdot d_pF(v)(f) + \mu \cdot d_pF(v)(g)$.
- $d_pF(v)(f \cdot g) = v((f \cdot g) \circ F) = v((f \circ F) \cdot (g \circ F)) = v(f \circ F) \cdot (g \circ F)(p) + (f \circ F)(p) \cdot v(g \circ F) = d_pF(v)(f) \cdot g(F(p)) + f(F(p)) \cdot d_pF(v)(g)$.

Definició 3.3. El fibrat tangent serà el conjunt donat per la unió de tots els espais tangents a M. Ho denotem com: $TM = \cup_{x \in M} T_xM$.

Definició 3.4. El fibrat cotangent T^*M es defineix de forma similar al fibrat tangent però usant els espais duals $(T_xM)^* = L(T_xM,\ \mathbb{R})$. Així tenim $T^*M = \cup_{x\in M}(T_xM)^*$.

Els espais tangents de $\mathbb{R}^n$ queden identificats amb $\mathbb{R}^n$ via l'isomorfisme:

$$\begin{aligned} T_p\mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \left(\lambda_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1|p},\ \cdots, \lambda_n \cdot \frac{\partial}{\partial x_n|p}\right) &\longmapsto (\lambda_1,\ \cdots, \lambda_n) \end{aligned}$$

on $x_1,\ \cdots, x_n$ són coordenades locals a $\mathbb{R}^n$ i $\dfrac{\partial}{\partial x_1|p},\ \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x_n|p}$ una base de $T_p\mathbb{R}^n$.

Definició 3.5. Si (φ, U) és una carta en M, una carta natural en T^*M és una funció:

$$\begin{aligned} T^*U &\longrightarrow \varphi(U) \times (\mathbb{R}^m)^* \\ \lambda \in (T_xM)^* &\longmapsto (\varphi(x), \lambda \circ d_x\varphi^{-1}) \end{aligned}$$

on $x \in U$, $d_x\varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \cong T_x\mathbb{R}^m \longrightarrow T_xU \subset T_xM$ i $\lambda \in L(T_xM,\ \mathbb{R})$, per tant, queda clar que $\lambda \circ d_x\varphi^{-1} \in (\mathbb{R}^m)^*$.

Sigui $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció C^{r+1}, per a $1 \leq r \leq \omega$ (on f C^ω vol dir que f és una funció real analítica: es pot expressar localment com una sèrie de potències convergent). Aleshores per a tot $x \in M$ la funció $d_xf : T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ pertany a $(T_xM)^*$.
Tenim les funcions:

$$\begin{aligned} p : T^*M \longrightarrow M &\quad \text{la projecció, que envia } (T_xM)^* \text{ a x.} \\ Df : M \longrightarrow T^*M &\quad \text{que envia x a } Df(x) := d_xf. \end{aligned}$$

Df és una C^r secció de T^*M. On una secció d'un fibrat vectorial (en aquest cas T^*M) és una funció continua $s : X \longrightarrow T^*M$, per a X espai topològic, tal que $p \circ s = Id$.
Tenim la següent representació local de Df (en funció d'una carta en M (φ, U) i la corresponent carta natural en T^*M):

$$\varphi(U) \longrightarrow U \longrightarrow T^*U \longrightarrow \varphi(U) \times (\mathbb{R}^m)^*$$

$Df(q) \in \{q\} \times (\mathbb{R}^m)^* \subset \varphi(U) \times (\mathbb{R}^m)^*$. Podem considerar $Df(q) \in (\mathbb{R}^m)^*$ i tenim:

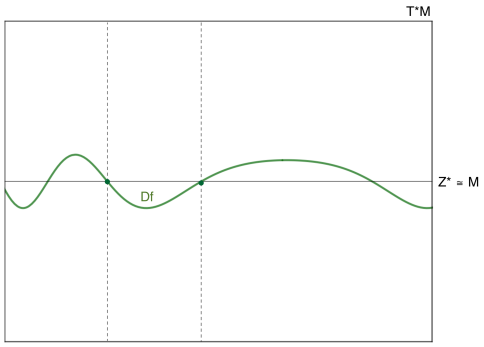
$$V \subset \mathbb{R}^m \xrightarrow{Df} (\mathbb{R}^m)^*$$

És una funció d'un conjunt obert d'$\mathbb{R}^m$ a $(\mathbb{R}^m)^*$ que envia x a $Dg(x)$ per a g una representació local de f. Per tant, Df generalitza el diferencial de funcions a $\mathbb{R}^m$.

Observació 3.6. Un punt crític p de f és un zero de Df. Això és degut a que p és punt crític de Df si i només si d_pf no és exhaustiva, si i només si $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(p),\ \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial x_m}(p)\right)$ té rang inferior a 1, si i només si $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$ per a tot $i \in \{1,\ \cdots, m\}$.
Per tant, $Df(p) = d_pf$, és el zero de l'espai vectorial $(T_pM)^*$. El conjunt de punts crítics de f és l'antiimatge per Df del conjunt dels zeros $Z^* \subset T^*M$, que anomenarem espai cotangent.

Observació 3.7. Per cada punt $p \in M$ hi ha un zero de l'espai $(T_pM)^*$, per tant, es pot identificar Z^* amb M i tenim $Z^* \approx M$, $dim\ Z^* = m$.
$Z^* \subset T^*M$ i $T^*M = \{(p, \omega) : p \in M, \omega \in (T_pM)^*\}$ és una varietat 2m-dimensional. Això és degut a que $(T_pM)^*$ té dimensió m per ser el dual de T_pM i tenir aquest dimensió m. Per tant, la codimensió de Z^* és $m = dim\ M$.

Definició 3.8. Un punt crític x de f és no degenerat si Df és transversal a Z^* en x.



Definició 3.9. Direm que f: $M \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció de Morse si tots els seus punts crítics són no degenerats.

En aquest cas, el conjunt de punts crítics de f serà un conjunt tancat i discret de M. Serà un conjunt discret perquè els punts crítics no degenerats són aïllats, per a tot punt crític existeix un entorn que el conté a ell i no a la resta.

Observació 3.10. Per mitjà de coordenades locals podem suposar $M = \mathbb{R}^m$, sigui $x \in \mathbb{R}^m$ un punt crític d'una funció $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$. Aleshores x és no degenerat quan x és un punt regular de Df: $\mathbb{R}^m \longrightarrow (\mathbb{R}^m)^*$ (és a dir, quan $D(Df)(x) \neq 0$ ja que els punts crítics d'una funció g són els zeros de Dg). El fet que x sigui punt regular de Df és degut al fet que Df és transversal a Z^* en x.

Observació 3.11. Sigui $U \subset \mathbb{R}^m$ un conjunt obert, g: $U \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció C^2. Un punt crític de g, $p \in U$, és no degenerat si, i només si, la funció lineal $D(Dg)(p) : \mathbb{R}^m \longrightarrow (\mathbb{R}^m)^*$ és bijectiva.
Efectivament, p no degenerat implica que p és un punt regular de Dg: $U \longrightarrow (\mathbb{R}^m)^*$ i, per tant, D(Dg)(p) $= d_pDg$ serà exhaustiva. A més, per a D(Dg)(p), l'espai de sortida té la mateixa dimensió que l'espai d'arribada i sabem que per a una aplicació lineal $h : V \longrightarrow W$, dim(Ker h) + dim(Im h) = dim V.
Per tant, tenim dim(Ker D(Dg)(p)) = 0 i queda vist que la funció és exhaustiva i injectiva i, per tant, bijectiva.
Per altra banda, si D(Dg)(p) $= d_pDg$ és bijectiva, en concret és exhaustiva, per tant p és un punt regular de Dg i per la Observació 3.10 p és no degenerat.

Identifiquem $L(\mathbb{R}^m, (\mathbb{R}^m)^*)$ amb l'espai de formes bilineals $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Observació 3.12. El requisit que $D(Dg)(p) : \mathbb{R}^m \longrightarrow (\mathbb{R}^m)^*$ sigui bijectiva és equivalent a la condició que la forma bilineal simètrica $D^2g(p) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sigui no degenerada. Això és degut a que, donada f: $V \times V \longrightarrow K$ una forma bilineal en l'espai vectorial V, aquesta serà degenerada quan la funció:

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow V^* \\ v &\longmapsto (x \longmapsto f(x,v)) \end{aligned}$$

no sigui un isomorfisme.

Observació 3.13. En termes de coordenades, el fet que $D^2g(p)$ sigui no degenerada és equivalent a que la matriu Hessiana nxn:

$$\left[\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \, \partial x_j}(p)\right]$$

tingui rang n. Això es deu a que, per a una forma bilineal en un espai vectorial de dimensió finita, tenim que la forma és degenerada si i només si el determinant de la matriu associada és 0. Per tant, si $D^2g(p)$ és una forma no degenerada aleshores la matriu Hessiana nxn té determinant diferent de 0 i, en conseqüència, rang n.

L'Observació 3.13 ens proporciona un criteri en coordenades locals per a determinar quan els punts crítics d'una funció $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ són no degenerats.

Sigui $p \in U \subset \mathbb{R}^m$ un punt crític de la funció $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$, la forma Hessiana de g al punt p és la forma quadràtica H_pg associada a la forma bilineal $D^2g(p)$, per tant:

$$H_pg(y) = D^2g(p)(y,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \, \partial x_j}(p) y_i y_j$$

Observació 3.14. La forma H_pg és invariant per difeomorfismes:
Sigui un obert $V \subset \mathbb{R}^m$ i suposem h: $V \longrightarrow U$ un C^2 difeomorfisme. Denotem $q = h^{-1}(p)$ tal que q és un punt crític de $g \circ h : V \longrightarrow \mathbb{R}$. Aleshores el següent diagrama commuta:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m \arrow[r, "H_q(gh)"] \arrow[d, "Dh(q)"', "\wr"] & \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^m \arrow[ur, "H_pg"'] & \end{tikzcd}$$

Ja que, per a $y \in \mathbb{R}^m$, $H_q(g \circ h)(y) = D^2g \circ h(q)\ (y,y) = (D(Dg \circ h(q))\ (y)(y) = D(Dg(h(q)) \circ Dh(q))\ (y)(y) = D^2g(p) \circ Dh(q)\ (y)(y) = H_pg(Dh(q))(y)$.
Per tant, queda vist que H_pg és invariant via difeomorfisme.

Considerem ara una funció $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ C^2 i per a cada punt crític x de f definim la forma quadràtica Hessiana $H_xf : M_x \longrightarrow \mathbb{R}$ com la composició:

$$H_xf : \ M_x \xrightarrow{D\varphi(x)} \mathbb{R}^m \xrightarrow{H_{\varphi(x)}(f\varphi^{-1})} \mathbb{R}$$

on (φ, U) és una carta en M tal que $x \in U$. Per la Observació 3.14 (la invariància per difeomorfisme de les formes Hessianes de funcions en $\mathbb{R}^m$) obtenim que H_xf està ben

definida independentment de la carta φ que triem.
Això és degut a que tota carta és homeomorfisme i, a més, a un atles diferenciable tot parell de cartes són compatibles dos a dos. És a dir, per a $(\varphi, U), (\psi, V)$ cartes en M tal que $U \cap V \neq \emptyset$ tenim que l'aplicació:

$$\psi(U \cap V) \xrightarrow{\psi^{-1}} U \cap V \xrightarrow{\varphi} \varphi(U \cap V)$$

és diferenciable i la seva inversa també.
Per tant, si apliquem la Observació 3.14 al difeomorfisme h= $\varphi \circ \psi^{-1}$ i a g= $f \circ \varphi^{-1}, p = \varphi(x)$ obtenim que $H_{\psi(x)}(f \circ \psi^{-1}) = H_{\varphi(x)}(f \circ \varphi^{-1}) \circ D\varphi \circ \psi^{-1}(\psi(x))$, equivalentment, $H_{\psi(x)}(f \circ \psi^{-1}) = H_{\varphi(x)}(f \circ \varphi^{-1}) \circ \left(D\varphi(x) \cdot \dfrac{1}{D\psi(x)} \right)$.
És a dir, $H_{\psi(x)}(f \circ \psi^{-1}) \circ D\psi(x) = H_{\varphi(x)}(f \circ \varphi^{-1}) \circ D\varphi(x)$ i queda vist que $H_x f$ està ben definida.

Observació 3.15. Fem notar que x és un punt crític no degenerat de f si i només si $H_x f$ és una forma quadràtica no degenerada (el rang de la matriu que defineix la forma no és menor que la dimensió de l'espai vectorial sobre el que està definida). Per tant, obtenim un criteri alternatiu per a determinar si un punt crític es no degenerat:
Un punt crític d'una funció C^2 a valors reals és no degenerat si i només si la forma quadràtica Hessiana associada és no degenerada.

Definició 3.16. Sigui Q una forma quadràtica no degenerada en un espai vectorial E. Diem que Q és definida negativa en un subespai $F \subset E$ si $Q(x) < 0$ per a tot $x \in F$ tal que x és no nul.

Definició 3.17. Anomenarem índex de Q, i ho denotarem Ind Q, a la major dimensió que pot arribar a tenir un subespai tal que Q sigui definida negativa en aquest.

Si Q(x) s'expressa com $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j$ per a A= $[a_{ij}]$ una matriu simètrica mxm i per a alguna tria de coordenades lineals en E (l'espai vectorial en el que està definida la forma Q). Aleshores l'índex de Q indica el número de valors propis negatius de la matriu A, comptats amb multiplicitat.

Definició 3.18. Sigui $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció i $p \in M$ un punt crític no degenerat de f. Anomenem índex de p a l'índex de la forma Hessiana de f en p i ho denotarem per Ind(p) o $Ind_f(p)$.

A partir de l'índex podrem obtenir informació sobre com es comporta f localment a prop de p.
Si suposem $M = \mathbb{R}^m$ i $p = 0$, aleshores el desenvolupament de Taylor de segon ordre de f en p és de la forma $f(x) = f(0) + Df(0)(x-0) + \dfrac{1}{2} H_0 f(x-0) + R(x-0)$.
$f(x) = f(0) + \dfrac{1}{2} H_0 f(x) + R(x)$ ja que els punts crítics de f són els zeros de Df i identifiquem $D^2 f(p)$ amb $H_0 f$. A més, $\lim_{x \to 0} \dfrac{R(x-0)}{|x-0|^2} = 0$, per tant, f serà aproximadament una constant més la meitat del valor de la forma Hessiana de f en 0.

Descomposem $\mathbb{R}^m$ en forma de suma directa $E_- \oplus E_+$ tal que en el subespai E_- $H_0 f$ és definida negativa i E_+ és el subespai dels punts on la forma és definida positiva.

$$dimE_- = indH_0f = k$$
$$dimE_+ = m - k$$

Ja que sabem que per a la suma directa de dos subespais U, W d'un espai vectorial V es verifica $dim(U \oplus W) = dim(U) + dim(W)$.
Aleshores, siguin $x \in \mathbb{R}^m$ i $t \in \mathbb{R}\backslash 0$ prou petits, $\dfrac{f(tx) - f(0)}{t}$ és una funció de t decreixent per a $x \in E_-$ i creixent per a $x \in E_+$. Ho veiem:

Fem notar que per a x, t prou petits podem suposar R(tx) = 0 i que $H_0f(tx) = t^2H_0f(x)$.

- Sigui $x \in E_-$: Sabem que $H_0f(x) \leq 0$ per definició del subespai E_-. Si tenim $t_1, t_2 \in \mathbb{R} \setminus 0$ tals que $t_1 \leq t_2$, aleshores $t_2H_0f(x) \leq t_1H_0f(x)$ i, per tant:

$$\frac{f(t_1x) - f(0)}{t_1} = \frac{f(0) + \frac{1}{2}H_0f(t_1x) - f(0)}{t_1} = \frac{H_0f(t_1x)}{2t_1} = \frac{t_1^2H_0f(x)}{2t_1} =$$
$$\frac{t_1H_0f(x)}{2} \geq \frac{t_2H_0f(x)}{2} = \frac{H_0f(t_2x)}{2t_2} = \frac{f(0) + \frac{1}{2}H_0f(t_2x) - f(0)}{t_2} = \frac{f(t_2x) - f(0)}{t_2}$$

  Així queda vist que $\dfrac{f(tx) - f(0)}{t}$ és una funció de t decreixent.

- Sigui $x \in E_+$: Sabem que $H_0f(x) \geq 0$ per definició del subespai E_+. Si tenim $t_1, t_2 \in \mathbb{R} \setminus 0$ tals que $t_1 \leq t_2$, aleshores $t_1H_0f(x) \leq t_2H_0f(x)$ i es veu el resultat de forma anàloga al cas E_-.

Observació 3.19. Per a $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció de Morse i p un punt crític de f, p és un mínim local de f si i només si Ind(p)=0 i p és un màxim local si i només si Ind(p) = dim M.
Anem a veure que això és cert per al cas en que p és un mínim local. Si Ind(p) = $dimE_- = 0$, tenim que $dimE_+ = dimM$ i, per tant, $E_+ = M$. Així doncs, per a tot $x \in M$ $H_0f(x) \geq 0$.

$$\frac{f(p + tx) - f(p)}{t} = \frac{f(p) + \frac{1}{2}H_0f(p + tx - p) - f(p)}{t} = \frac{H_0f(tx)}{2t}$$

Per tant $f(p+tx) - f(p) = \dfrac{t^2H_0f(x)}{2} \geq 0$ i tenim $f(p+tx) \geq f(p)$ per a $x \in M$ i $t \in \mathbb{R} \setminus 0$ prou petits (així podem suposar R(tx)=0). Per tant, p serà un mínim local.
Si p és un mínim local tenim que $f(p) \leq f(tx + p)$ per a un $x \in M$ qualsevol i $t \in \mathbb{R} \setminus 0$ prou petit. Aleshores $f(p) \leq f(p) + \dfrac{H_pf((tx + p) - p)}{2} = f(p) + \dfrac{t^2H_pf(x)}{2}$ i d'aquí es dedueix $H_pf(x) \geq 0$ per a un $x \in M$ qualsevol.
I, per tant $dimE_+ = dimM$ i $dimE_- = 0$. El cas en que p és màxim local és anàleg.

Provarem el lema de Morse, un resultat que ens dona una relació més forta entre una funció de Morse f i la seva forma quadràtica Hessiana a un punt crític p: *f té una representació local en p tal que f equival a* $f(p) + \frac{1}{2}H_pf$.
Abans de demostrar aquest enunciat veurem un lema previ sobre diagonalització de matrius simètriques:

Lema 3.20. *Sigui $A = diag\{a_1, \cdots, a_n\}$ una matriu diagonal nxn amb entrades que prenen els valors 1 o -1. Aleshores existeix un entorn N a l'espai vectorial de matrius simètriques nxn i una funció C^ω (funció analítica) $P : N \longrightarrow GL(n,\mathbb{R})$ tals que:*
P(A) = Id i si P(B)=Q, aleshores $Q^TBQ = A$.

$GL(n,\mathbb{R})$ denota el conjunt de les matrius invertibles de mida nxn a coeficients reals.

Demostració. Considerem B=$[b_{ij}]$ una matriu simètrica nxn suficientment pròxima a A com per a que b_{11} sigui no nul i tingui el mateix signe que a_{11}. Triarem l'entorn N de forma que les matrius que hi pertanyin compleixin aquestes condicions.
Considerem el canvi de coordenades lineals a $\mathbb{R}^n$ $x = Ty$ que ve donat per la matriu:

$$T = T(B) = \frac{1}{\sqrt{|b_{11}|}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-b_{12}}{b_{11}} & \cdots & \frac{-b_{1n}}{b_{11}} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Aleshores, la matriu T^TBT és de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Si considerem B suficientment pròxima a A aleshores tenim que la matriu simètrica $(n-1)$x$(n-1)$ B_1 serà prou propera a $A_1 = diag\{a_2, \cdots, a_n\}$ com per a poder considerar B_1 invertible (B_1 pertany a un entorn N_1 de A_1). Per tant, $T^TBT \in GL(n,\mathbb{R})$, on T i B_1 són funcions de B C^ω.
Veiem per inducció sobre n que existeix una funció P amb les propietats que es mencionen a l'enunciat. Volem veure que per a B (una matriu en un entorn N de A que hem considerat de forma arbitrària) si P(B)=Q, aleshores Q^TBQ = A i que P(A) = Id:

- Per al cas n=1 considerem la funció que envia la matriu $\begin{pmatrix} b \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|b|}} \end{pmatrix}$.
- Suposem que l'enunciat es verifica per a $n-1$: existeix una funció $P_1 : N_1 \longrightarrow GL(n-1,\mathbb{R})$ tal que per a $P_1(B_1) = Q_1$ tenim $Q_1^TB_1Q_1 = A_1$ i $P_1(A_1) = Id_{n-1}$, on P_1 és una funció analítica de B_1.
  Definim P(B) = Q on Q = T(B) S per a

  $$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1(B_1) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

  per a tot B en un entorn N de A. $P(B) \in GL(n,\mathbb{R})$ ja que S és invertible per ser $Q_1 \in GL(n-1,\mathbb{R})$ i T ho és per ser matriu triangular superior amb els coeficients de la diagonal no nuls. A més, P és una funció analítica de B per ser-ho T, P_1 i B_1.

Aleshores tenim que $Q^T BQ = A$ ja que $Q^T BQ = (TS)^T B(TS) = S^T T^T BTS=$
$$S^T \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q_1^T B_1 Q_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = A.$$

$$P(A) = T(A) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1(A_1) & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Id_{n-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{|a_{11}|}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{0}{a_{11}} & \cdots & \frac{0}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, P(A) = Id i ha quedat provat el que volíem.

□

Lema 3.21. (Lema de Morse) *Sigui $p \in M$ un punt crític no degenerat d'índex k d'una funció $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ C^{r+2} on $1 \leq r \leq \omega$. Aleshores existeix una C^r carta (φ, U) en p tal que:*
$$f \circ \varphi^{-1}(u_1, \cdots, u_m) = f(p) - \sum_{i=1}^{k} u_i^2 + \sum_{i=k+1}^{m} u_i^2$$

Demostració. Suposarem que M és un conjunt obert i convex de $\mathbb{R}^m$, que $p = 0 \in \mathbb{R}^m$ i $f(0) = 0 \in \mathbb{R}$.
Via un canvi de coordenades lineals podem assumir que la matriu $A = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right]$ és una matriu diagonal amb les primeres k entrades iguals a -1 i la resta que valen 1. Això es possible pel procès d'ortogonalització de Gram-Schmidt que, donat un conjunt finit de m vectors linealment independents, produeix un conjunt de m vectors ortogonals que genera el mateix subespai. A més, per a tota matriu B a valors reals i simètrica $Spec(B) \subset \mathbb{R}$ i tot valor propi real d'una matriu ortogonal és 1 o -1.
També sabem que Df(0)=0 per haver assumit p=0 i perquè sabem que els punts crítics de f són els zeros de Df per l'Observació 3.6.

Existeix una funció de clase C^r:
$$\begin{aligned} M &\longrightarrow \{\text{ matrius simètriques de tamany nxn }\} \\ x &\longmapsto B_x = [b_{ij}(x)] \end{aligned}$$

tal que $f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m b_{ij}(x) x_i x_j$ i $B_0 = A$. Aquest fet es dedueix del Teorema Fonamental del Càlcul aplicat dos cops, ho veiem:
Sigui $y \in M$
$f(y) = f(y) - f(0) = \int_0^1 Df(ty)y\, dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(ty) y_j\, dt = \sum_{j=1}^m \left[\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(ty)\, dt\right] y_j =$
$\sum_{j=1}^m \left[\int_0^1 \int_0^1 D\frac{\partial f}{\partial x_j}(tys) y\, ds\, dt\right] y_j = \sum_{j=1}^m \left[\int_0^1 \int_0^1 \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(tys) y_i\, ds\, dt\right] y_j =$
$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \left[\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(tys)\, ds\, dt\right] y_i y_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m b_{ij}(y) y_i y_j$

On, a la segona igualtat hem utilitzat el fet que M és convex i que $p = 0 \in M$ i $y \in M$

per a poder integrar al llarg de l'interval (0,1) i a la cinquena igualtat hem usat el fet que Df(0)=0 i per tant $\frac{\partial f}{\partial x_j}(0) = 0$ per a tot j.

Efectivament, tenim $B_0 = A$ ja que, per com hem definit B_x, tenim $B_0 = \left[\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(0)\ ds\ dt\right] = \left[\int_0^1 \int_0^1 a_{ij}\ ds\ dt\right] = [a_{ij}] = A$.

Tenim A $= B_0$ una matriu diagonal amb entrades 1 o -1 i, aplicant el Lema 3.20, obtenim una funció $P : N \longrightarrow GL(m, \mathbb{R})$ tal que si $P(B_x) = Q_x$, aleshores $Q_x^T B_x Q_x = A$ per a N un entorn de $A = B_0$ i $x \in M$. A més, $P(B_0) = Q_0 = Id$ i podem aplicar P a B_x per ser B_x matrius simètriques.
Considerem una funció C^r $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ on $U \subset M$ és un entorn prou petit de 0 de forma que per a $x \in U$, B_x pertany a l'entorn N de $A = B_0$ i puguem aplicar P. Definim φ de forma que $\varphi(x) = Q_x^{-1} x$.
Tenim que $D\varphi(0) = Id$, efectivament, $D\varphi(x) = DQ_x^{-1} \cdot x + Q_x^{-1}$ i $D\varphi(0) = Q_0^{-1} = Id^{-1} = Id$. Per tant, aplicant el Teorema de la Funció Inversa a φ obtenim que aquesta funció és localment invertible en 0 i amb inversa C^r, per tant, serà localment un homeomorfisme i podem suposar que (φ, U) és una C^r carta.

Veurem que aquesta carta en 0 compleix $f \circ \varphi^{-1}(u_1, \cdots, u_m) = f(p) - \sum_{i=1}^k u_i^2 + \sum_{i=k+1}^m u_i^2$ i haurem acabat la demostració.
Denotem $y = \varphi(x)$. Hem vist previament que $f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m b_{ij}(x) x_i x_j = x^T B_x x$. Per tant, $f(x) = x^T B_x x = \varphi^{-1}(y)^T B_x \varphi^{-1}(y) = (Q_x y)^T B_x (Q_x y) = y^T (Q_x^T B_x Q_x) y = y^T A y = \sum_{i=1}^m a_{ii} y_i^2$.
On A és una matriu diagonal amb les k primeres entrades de la diagonal igual a -1 i la resta 1 i f(0)=0, així tenim:
$f \circ \varphi^{-1}(y) = f(0) - \sum_{i=1}^k y_i^2 + \sum_{i=k+1}^m y_i^2$ □

Aleshores tenim una descripció local per a tota funció de Morse $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$.

- Si $a \in M$ és un punt regular aleshores, pel Teorema de la Funció Implícita, existeixen coordenades properes a a tals que $f(x_1\ \cdots, x_m) = x_1$.
- Si $a \in M$ és un punt crític aleshores existeixen coordenades properes a a tals que $f(x_1\ \cdots, x_m) = f(a) - x_1^2 - \cdots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots + x_m^2$. On l'índex k ve únicament determinat pel punt crític a.

3.2 Equacions diferencials i superfícies regulars de nivell

Comencem parlant d'equacions diferencials i recordant alguns fets sobre aquestes:
Sigui $W \subset \mathbb{R}^m$ un conjunt obert i $g : W \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una funció C^r per a $1 \leq r \leq \omega$ interpretada com un camp vectorial en W (a cada punt de W li assignem un vector). Aleshores g satisfà localment una condició de Lipschitz (per a tot $x \in W$ existeix un entorn U i existeix $K > 0$ una constant tal que $\|g(x_1) - g(x_2)\| \leq K \cdot \|x_1 - x_2\|$ per a tot $x_1, x_2 \in U$).
Del fet que W és obert, g és continua i localment Lipschitz, aplicant el Teorema de Picard-Lindelöf, obtenim (en un interval tancat I que conté el 0) la existència i unicitat

de solucions del problema de valor incial:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= g(\varphi(t)) \\ \varphi(0) &= x \end{aligned} \tag{3.1}$$

per a tot $x \in W$, on la solució serà diferenciable C^{r+1} per ser g C^r.
Per tant, per a tot $x \in W$ existeixen un interval obert $J \subset I \subset \mathbb{R}$ que conté el 0 i una funció C^{r+1} $\varphi : (J, 0) \longrightarrow (W, x)$ que satisfà (3.1). Les segones coordenades de l'espai de sortida i arribada indiquen que $\varphi(0) = x$.

Si $\varphi_1 : J_1 \longrightarrow W$ és una altra solució de (3.1), aleshores en $J \cap J_1$ tenim $\varphi = \varphi_1$, per tant, encaixen per a formar una solució en $J \cup J_1$.
D'aquest fet obtenim que J i φ són únics si es pren J maximal (pel Teorema d'existència i unicitat de solucions improrrogables (o maximals)). I pel teorema també sabem que l'interval maximal de definició de la solució serà obert.
Plantejat el problema del valor inicial (3.1), anomenarem a l'interval maximal J(x) i a la corresponent solució $\varphi^x : J(x) \longrightarrow W$ la denotem per $\varphi^x(t), \varphi_t(x)$ o $\varphi(t, x)$ equivalentment.

Definició 3.22. Les solucions φ^x (i de vegades també els conjunts $\varphi^x(J(x))$) s'anomenen corbes solució, trajectories o línies de flux del camp vectorial g.

Observació 3.23. La funció $x \longmapsto J(x)$ que assigna a punts de W l'interval maximal per a la solució del problema de valor inicial (3.1) és semicontinua inferiorment. És a dir, sigui $x \in W$, aleshores existeix un entorn de x tal que si $\alpha \in J(x)$ es compleix també $\alpha \in J(y)$ per a tot y en aquest entorn de x.
D'aquest fet s'obté que el conjunt $\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times W : t \in J(x)\}$ és obert en $\mathbb{R} \times W$. Ja que per a tot punt $(\alpha, x) \in \Omega$ existeix un entorn U tal que $(\alpha, x) \in U \subset \Omega$ (tot punt és interior).
Efectivament, podem prendre $U = J(x) \times V$ on, per la semicontinuitat inferior de la funció que hem presentat abans, podem suposar V un obert que conté x tal que per a tot $y \in V$ si $\alpha \in J(x)$, aleshores $\alpha \in J(y)$. Per tant, $J(x) \subset J(V)$ i $U = J(x) \times V \subset \Omega$.

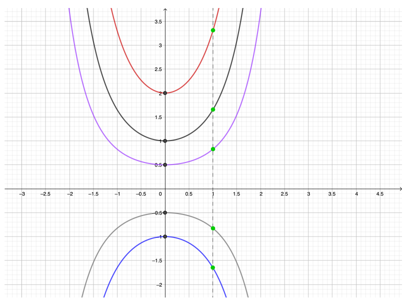
Definició 3.24. Anomenem flux generat per g a la funció C^r:

$$\begin{aligned} \varphi : \Omega &\longrightarrow W \\ (t, x) &\longmapsto \varphi_t(x) \end{aligned}$$

Observació 3.25. Per a cada $t \in \mathbb{R}$ definim el conjunt $W_t = \{x \in W : t \in J(x)\}$. Aquest conjunt és obert en W per ser la funció $x \longmapsto J(x)$ de la Observació 3.23 semicontinua inferiorment. Definim una funció C^r:

$$\begin{aligned} \varphi_t : W_t &\longrightarrow W \\ x &\longmapsto \varphi_t(x) \end{aligned}$$

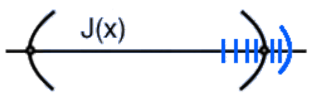
Es compleix $\varphi_t(W_t) = W_{-t}$



On, a la imatge que hem posat d'exemple es veuen algunes línies de flux del camp vectorial $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(\varphi(t)) = t\varphi(t)$.

Deixant l'exemple de banda, també se satisfà $\varphi_{-t} = \varphi_t^{-1}$. Tenim, a més, les relacions $\varphi_s(\varphi_t(x)) = \varphi_{s+t}(x)$ vàlides en el sentit que si una està definida l'altra també i són iguals. Efectivament si $s \in J(\varphi_t(x))$ per a $t \in J(x)$, aleshores $s + t \in J(x)$ i viceversa.

Observació 3.26. Sigui $P \subset W$ un compacte. Aleshores, per a tot $x \in W$ el conjunt $\{t \in J(x) : \varphi_t(x) \in P\}$ és un conjunt tancat no només en J(x) sinó en $\mathbb{R}$.
És tancat en J(x) per ser l'antiimatge d'un tancat ($P \subset W \subset \mathbb{R}^m$ compacte) per una funció continua $\varphi^x : J(x) \longrightarrow W$.
A més, és tancat en $\mathbb{R}$ per ser J(x) interval maximal ja que si $\{t : \varphi_t(x) \in P\}$ no fos tancat a $\mathbb{R}$, J(x) no seria maximal: tindríem a una successió de punts $\{t_i\}_{\{i \in I\}}$ que compleixen $\varphi_{t_i}(x) \in P$ tals que $\lim_{r\to\infty} t_r = b$ per a b $\notin \{t : \varphi_t(x) \in P\}$ per ser aquest conjunt no tancat en $\mathbb{R}$. Però, com que sí que és tancat en J(x), tindríem que existeixen t_i que no pertanyen a J(x) (ja que sinó tindríem que no és tancat per successions) i, per tant, J(x) es podria allargar i no seria maximal.



Del fet que $\{t \in J(x) : \varphi_t(x) \in P\}$ és tancat en $\mathbb{R}$ deduïm que per a $x \in P$ tal que $\varphi_t(x) \in P$ per a tot $t \in J(x) \cap \mathbb{R}^+$, aleshores $\mathbb{R}^+ \subset J(x)$.
Això es deu a que $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}\backslash(-\infty, 0)$ és tancat en $\mathbb{R}$ i, per tant, $\{t \in J(x) : \varphi_t(x) \in P\} \cap \mathbb{R}^+$ $= \{t \in J(x) \cap \mathbb{R}^+ : \varphi_t(x) \in P\} = J(x) \cap \mathbb{R}^+$ és tancat en $\mathbb{R}$. La darrera igualtat la tenim per la hipòtesi que $\varphi_t(x) \in P$ per a tot $t \in J(x) \cap \mathbb{R}^+$.
Per tant, $J(x) \cap \mathbb{R}^+$ és tancat i J(x) obert i es conclou que $\mathbb{R}^+ \subset J(x)$.
Anàlogament s'obté el mateix resultat per a $\mathbb{R}^-$. Obtenim, en particular, que si la trajectoria de x té clausura compacte en W, aleshores J(x)= $\mathbb{R}$.

Sigui X un C^r camp vectorial en una varietat diferenciable M de dimensió m:

$$\begin{aligned} X : M &\longrightarrow TM \\ x &\longmapsto T_xM \end{aligned}$$

- Assumim primer que ∂M = $\emptyset$.

Definició 3.27. Una corba integral (o corba solució) de X és una funció diferenciable tal que:

$$\begin{aligned} &\eta : J \longrightarrow M \\ &\eta'(t) = X(\eta(t)) \text{ per a tot } t \in J \subset \mathbb{R} \text{ un interval.} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Observació 3.28. Si (ψ, U) és una carta en M (de classe C^∞ o C^ω si X és C^ω també) tal que $\eta(J) \subset U$ i denotem $W = \psi(U) \subset \mathbb{R}^m$, aleshores la composició:

$$f : W \xrightarrow{\psi^{-1}} U \xrightarrow{X} TU \xrightarrow{D\psi} \mathbb{R}^m$$

és un camp vectorial de classe C^r en W.

Observació 3.29. La funció $\varphi = \psi \circ \eta : J \longrightarrow W$ satisfà l'equació diferencial:

$$\varphi'(t) = f(\varphi(t)) \tag{3.3}$$

ja que $\varphi'(t) = D\psi(\eta'(t)) = D\psi(X(\eta(t))) = (D\psi \circ X)(\psi^{-1} \circ \psi(\eta(t))) = (D\psi \circ X \circ \psi^{-1})(\psi(\eta(t))) = f(\psi(\eta(t))) = f(\varphi(t))$.
On la segona igualtat ve donada per (3.2). Per tant, al composar per ψ transformem η una corba integral de X en una solució de (3.3) sota la hipòtesis que la imatge de la corba integral està continguda en un obert coordenat: $\eta(J) \subset U$.

Tots els resultats que havíem vist per a camps vectorials en conjunts oberts de $\mathbb{R}^m$ s'extenen a camps vectorials en M:
Per a cada $x \in M$, existeix un interval maximal obert J(x)$\subset \mathbb{R}$ que conté el 0 i una corba integral (o trajectòria o línia de flux) de X:

$$\eta^x : (J(x), 0) \longrightarrow (M, x)$$

Es denota de forma equivalent $\eta^x(t) = \eta(t, x) = \eta_t(x)$.

Observació 3.30. El conjunt $\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times M : t \in J(x)\}$ és un obert en $\mathbb{R} \times M$. Aquest fet es veu utilitzant arguments similars als de l'Observació 3.23.

Definició 3.31. Anomenem flux de X a la funció de classe C^r:

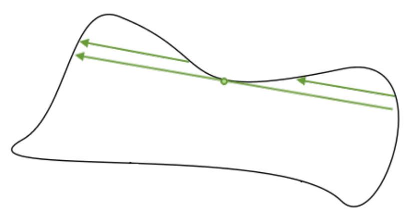
$$\begin{aligned} \eta : \Omega &\longrightarrow M \\ (t, x) &\longmapsto \eta_t(x) \end{aligned}$$

Observació 3.32. Els resultats sobre subconjunts compactes obtinguts a l'Observació 3.26 també seran vàlids per a subconjunts compactes de M. Així doncs, obtenim com a cas particular que, si M és compacte sense vora, aleshores $\Omega = \mathbb{R} \times M$.
Això es deu a que per a tot $x \in M$, la trajectoria $\eta^x(J(x))$ de X té clausura compacte en M per ser $\overline{\eta^x(J(x))}$ un tancat contingut en el compacte M.

- Considerem ara camps vectorials en varietats diferenciables amb vora i, per tant, tals que $\partial M \neq \emptyset$.

Es poden usar els resultats anteriors si primer incrustem M via un embedding com a una subvarietat diferenciable tancada d'una varietat diferenciable sense vora N de dimensió m. Posteriorment, s'estén X a un C^r camp vectorial de N.
On, per varietat tancada, entenem una varietat compacte i sense vora.

Observació 3.33. Si X és tangent a ∂M, és a dir, $X(\partial M) \subset T(\partial M)$, tot es manté com abans.
En canvi, si X no és tangent a ∂M, els intervals J(x) no tots seran oberts.



Si $x \in \partial M$, $X(x) \neq 0$ i X(x) apunta cap a M (respectivament cap a fora de M) aleshores J(x) conté 0 com a extrem esquerra de l'interval (respectivament extrem dret).
Per tot $y \in M$, si J(y) conté l'extrem b, aleshores $\eta(b, y) \in \partial M$.

Observació 3.34. El conjunt $\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times M : t \in J(x)\}$ definit com abans, ara no té perquè ser obert en $\mathbb{R} \times M$.

Es diu que el flux $\eta : \Omega \longrightarrow M$ és C^r en el sentit que s'estén a una funció C^r $\Omega' \longrightarrow N$ per a $\Omega' \subset \mathbb{R} \times N$ un obert.

Observació 3.35. Si la trajectòria de $x \in M$ té clausura compacte, aleshores J(x) és un interval tancat. Això es deu a que tot subespai compacte d'un espai de Hausdorff és tancat i η^x és continua.
Si, a més de ser compacte, la trajectòria està continguda en $M \setminus \partial M$, aleshores J(x) = $\mathbb{R}$.

Definició 3.36. El camp vectorial X s'anomena completament integrable si, per a tot $x \in M$, J(x) = $\mathbb{R}$.

Observació 3.37. Una condició necessària per a que X sigui un camp completament integrable és que X sigui tangent a ∂M. Això és degut a que si X no és tangent a ∂M sabem que no tots els intervals J(x) per a $x \in M$ seran oberts, però $\mathbb{R}$ és obert.
Una condició suficient és que X sigui tangent a ∂M i, a més, cada trajectòria tingui clausura compacte. Això es dedueix de la Observació 3.33 i la Observació 3.35, tenim que els J(x) seran oberts i alhora tancats continguts en $\mathbb{R}$ i que contenen el 0. Per tant, J(x) = $\mathbb{R}$.

Construirem un camp vectorial transversal a les superfícies regulars de nivell d'una funció $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r+1} (per a $r \geq 1$).

Definició 3.38. Una mètrica Riemanniana g en M és una família de mètriques (aplicacions $\mathbb{R}$-bilineals, simètriques i definides positives) $g = \{g_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}\}_{p \in M}$ tals que es compleix que per a tot obert coordenat U de M les funcions:

$$\begin{aligned} g_{i,j}^U : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto g_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i|p}, \frac{\partial}{\partial x_j|p}\right) \end{aligned}$$

són diferenciables. Les funcions $g_{i,j}^U$ s'anomenen components locals de la mètrica g en l'obert U. Podrem expressar localment la mètrica Riemanniana com:

$$g = \sum_{i,j} g_{i,j} dx_i * dx_j$$

on, per a $p \in U$, $d_px_1, \cdots, d_px_m$ són una base de $(T_pM)^*$ i, i tenim les aplicacions:

$$\begin{aligned} d_px_i * d_px_j : T_pM \times T_pM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longmapsto d_px_i(v) \cdot d_px_j(w) \end{aligned}$$

Tenim que $\{d_px_i * d_px_j\}_{i,j}$ són una base del conjunt de formes bilineals $T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ i denotem per $dx_i * dx_j$ a la família de formes $\{d_px_i * d_px_j\}_p$.

Suposem que hem dotat a la varietat M d'una mètrica Riemanniana C^∞. Sigui $x \in M$, denotem al producte intern en T_xM per $\langle$X,Y$\rangle$ i a la norma corresponent l'anomenem $|X|$ = $\langle$X,X$\rangle^{\frac{1}{2}}$.

Definició 3.39. Per a cada aplicació lineal $\lambda : T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ existeix un únic vector tangent $X_\lambda \in T_xM$ tal que $\lambda(Y) = \langle X_\lambda, \mathrm{Y}\rangle$ per a tot $Y \in T_xM$. Anomenem a X_λ el vector dual a λ.

Observació 3.40. La funció $(T_xM)^* \longrightarrow T_xM$ que envia $\lambda \longmapsto X_\lambda$ és un isomorfisme lineal.
La inversa és la funció $T_xM \longrightarrow (T_xM)^*$ que envia $X \in T_xM$ a l'aplicació lineal:

$$\begin{aligned} \lambda_X : T_xM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ Y &\longmapsto \langle X, Y\rangle \end{aligned}$$

Definició 3.41. Sigui $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció C^{r+1}, per a cada $x \in M$ definim el vector grad f(x) $\in T_xM$ com el vector dual a $d_xf : T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$.
D'aquesta forma queda definit el camp vectorial gradient de classe C^r:

$$\begin{aligned} \text{grad f} : M &\longrightarrow TM \\ x &\longmapsto \text{grad f}(x) \in T_xM \end{aligned}$$

El camp vectorial gradient dependrà de la mètrica Riemanniana.

Exemple 3.42. Si M és un obert en $\mathbb{R}^m$ i la mètrica ve donada pel producte intern estàndard de $\mathbb{R}^m$, aleshores: grad f(x) $= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x)\right)$.

Observació 3.43. El camp gradient s'anul·la en x, grad f(x) = 0 si, i només si, x és un punt crític de f. Efectivament, grad f(x) = 0 si, i només si, $Df(x) = d_xf = 0$ ja que, per ser el gradient el vector dual a d_xf, tenim:

$$\begin{aligned} d_xf : T_xM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ Y &\longmapsto \langle \text{grad f(x)}, Y\rangle = 0 \ \text{ per a tot } Y \in T_xM. \end{aligned}$$

I de la Observació 3.6 se segueix l'afirmació.

Definició 3.44. Anomenem línies de gradient a les corbes solució del camp vectorial gradient, és a dir, a les funcions $\eta : J \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ tals que $\eta' = \text{grad f}(\eta)$.

Observació 3.45. La funció f és no decreixent al llarg de línies de gradient. Per a $\eta(t)$ solució de l'equació diferencial $\eta' = \text{grad f}(\eta)$:
$\frac{d}{dt}f(\eta(t)) = d_{\eta(t)}f\ \eta'(t) = \langle \text{grad f}(\eta(t)), \eta'(t)\rangle = \langle \text{grad f}(\eta(t)), \text{grad f}(\eta(t))\rangle = |\text{grad f}(\eta(t))|^2$
≥ 0.
A més, f és estrictament creixent al llarg de qualsevol línia de gradient que no sigui un punt crític de f per a cap $t \in \mathbb{R}$. Això es deu a la Observació 3.43 i al fet que grad f$(\eta(t)) \neq 0$ si, i només si, $|\text{grad f}(\eta(t))|^2 \neq 0$.

Per a acabar la secció, donarem un resultat que permet trobar difeomorfismes entre les superfícies de nivell d'una funció.

Teorema 3.46. (Teorema de l'interval regular) *Sigui f: $M \longrightarrow [a, b] \subset \mathbb{R}$ una funció de classe C^{r+1} ($1 \leq r \leq \omega$) en una varietat diferenciable amb vora. Suposem* *que f no té punts crítics i f(∂M) $\subset$ {a,b}. Aleshores existeix un C^r difeomorfisme F : $f{-}1(a) \times [a,b] \longrightarrow M$ tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(a) \times [a,b] \arrow[r, "F"] \arrow[d] & M \arrow[dl, "f"] \\ {[a,b]} & \end{tikzcd}$$

commuta. En particular, totes les superfícies de nivell de f són difeomorfes.

Demostració. Dotem a M d'una mètrica Riemanniana. Considerem el C^r camp vectorial en M:

$$X : M \longrightarrow TM$$
$$x \longmapsto X(x) = \frac{\text{grad f}(x)}{|\text{grad f}(x)|^2}$$

On $X(x) \in T_xM$ per ser grad f(x)$\in T_xM$. Observem que no tenim problemes al dividir per $|\text{grad f}(x)|^2$ ja que, al no tenir f punts crítics, per la Observació 3.43 obtenim que el camp gradient no s'anul·la.
El camp X tindrà les mateixes trajectòries que el camp grad f però amb diferent parameterització.
Sigui $\eta : [t_0, t_1] \longrightarrow M$ una corba solució de X. Sabem que l'interval J en el que està definida η és tancat perquè M és una varietat compacte i, per tant, $\overline{\eta(J)}$ és també compacte per ser un tancat contingut en M. Aleshores si apliquem la Observació 3.35 obtenim que J és tancat.
Si considerem la funció:

$$f \circ \eta : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto f(\eta(t))$$

Comprovem que la seva derivada és idènticament 1:

$$\frac{d}{dt} f(\eta(t)) = d_{\eta(t)} f \ \eta'(t) = \langle \text{grad f}(\eta(t)), \eta'(t) \rangle = \langle \text{grad f}(\eta(t)), X(\eta(t)) \rangle$$
$$= \langle \text{grad f}(\eta(t)), \frac{\text{grad f}(\eta(t))}{|\text{grad f}(\eta(t))|^2} \rangle = \frac{|\text{grad f}(\eta(t))|^2}{|\text{grad f}(\eta(t))|^2} = 1$$

Pel Teorema Fonamental del Càlcul, això significa que $f(\eta(t_1)) - f(\eta(t_0)) = t_1 - t_0$.

Sigui $x \in f^{-1}(s)$ per a $s \in [a,b]$, J(x) serà un interval tancat pel mateix argument prèviament utilitzat fent servir la Observació 3.43 i el fet que M és compacte. A més, del fet que $f(\eta(t_1)) - f(\eta(t_0)) = t_1 - t_0$ obtenim J(x) $= [a - s, b - s]$.

Tenim que $f^{-1}(a)$ serà unió de components de la vora de M degut a que, per les hipòtesis de l'enunciat, sabem que f(∂M) $\subset \{a, b\}$ i sabem que f no té punts crítics. Per la Observació 3.45 obtenim que f serà estrictament creixent al llarg de tota corba solució, així doncs, tot $m \in M$ tal que $f(m) = a$ és de la vora.
Definim la funció:

$$F : f^{-1}(a) \times [a,b] \longrightarrow M$$
$$(x,t) \longmapsto F(x,t) = \eta(t-a, x)$$

Del fet que, per no tenir punts crítics i per la Observació 3.45, f és estrictament creixent al llarg de línies de gradient deduïm que f també serà estrictament creixent al llarg de trajectòries de X. Així doncs, $f \circ F$ és injectiva per ser $f \circ F(x,t) = f(\eta(t-a,x))$ i d'aquí obtenim que F és injectiva també.
F és una immersió perquè les línies de gradient són transversals a les superfícies de nivell. En un punt regular grad f(x) és transversal a $f^{-1}(f(x))$.
Així doncs hem vist que F és un embedding, si veiem que és exhaustiva quedarà vist que és un difeomorfisme i haurem acabat la demostració.
F és exhaustiva perquè hem vist que per a $x \in f^{-1}(a)$ l'interval maximal de definició de la corba integral η^x de X serà J(x) = $[0, b-a]$ i la imatge de F inclou les trajectòries $\eta^x([0, b-a])$. $\square$

4 Isotopies

En aquesta secció introduirem el concepte d'isotopia i demostrarem teoremes d'estensió d'isotopies i algunes aplicacions i variacions d'aquests. Aplicarem aquests resultats a l'estudi de l'estructura diferenciable de la unió al llarg de components de la vora de dos varietats diferenciables.
També veurem el cas concret d'isotopies d'embeddings de discos i provarem que hi ha una única forma d'incrustar per mitjà d'un embedding un disc en una varietat diferenciable connexa tret d'isotopia i orientació.
Assumirem que totes les funcions són de classe C^∞.

4.1 Estensió d'isotopies

Definició 4.1. Siguin V, M dues varietats diferenciables. Anomenem isotopia de V a M a una funció $F : V \times I \longrightarrow M$ tal que per a tot $t \in I$ l'aplicació:

$$\begin{aligned} F_t : V &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto F(x,t) \end{aligned}$$

és un embedding. Una isotopia és una familia d'embeddings que depenen d'un paràmetre.

Definició 4.2. Anomenem rastre d'una isotopia F a l'embedding:

$$\begin{aligned} \hat{F} : V \times I &\longrightarrow M \times I \\ (x,t) &\longmapsto (F(x,t),t) \end{aligned}$$

$\hat{F}$ preserva la coordenada t.

Definició 4.3. Si $F : V \times I \longrightarrow M$ és una isotopia, aleshores diem que els embeddings F_0 i F_1 són isotòpics. També direm que F és una isotopia d'F_0.
Per tant, dos embeddings f, g: $V \hookrightarrow M$ direm que són isotòpics si un es pot deformar en l'altre a través d'embeddings.

Definició 4.4. Si V és una subvarietat de M i F_0 és la inclusió, aleshores diem que F és una isotopia de V en M.

Definició 4.5. Quan V=M, cada F_t és un difeomorfisme i $F_0 = Id_M$ aleshores anomenem a F difeotopia o isotopia ambient.
Siguin f, g dos embeddings tals que $F_1 \circ f = g$, aleshores diem que són isotòpics ambientalment.

Observació 4.6. Hi ha una connexió important entre difeotopies de M i camps vectorials en $M \times I$.
Sigui $\hat{F} : M \times I \longrightarrow M \times I$ el rastre d'una difeotopia F, $\hat{F}$ és un difeomorfisme que preserva la coordenada t. Cada punt de $M \times I$ pertany, aleshores, a un únic arc $\hat{F}(x \times I)$ per a algun $x \in M$ ja que si no fos únic $\hat{F}$ no seria injectiva.
Els vectors tangents a aquests arcs formen un camp vectorial X_F en $M \times I$ que no s'anul·la. Es pot enviar al camp vectorial constant unitat en I per mitjà de la projecció $M \times I \longrightarrow I$.
Aleshores existeix una aplicació $H : M \times I \longrightarrow TM$ tal que $X_F(y,t) = (H(y,t), 1) \in$

$T_yM \times \mathbb{R} = T_{(y,t)}(M \times I)$.
La isotopia F és el flux Φ de X_F aplicat a $M \times 0$:

$$\begin{array}{ccc} M & = & M \times 0 \\ \downarrow{\scriptstyle F_t} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_t} \\ M & = & M \times t \end{array}$$

Per ser X_F format pels vectors tangents a $\hat{F}(x \times I)$ per a $x \in M$.

La part horitzontal H del camp vectorial X_F és un cas particular de camp vectorial dependent del temps. On, per camp vectorial dependent del temps, ens referim a una funció $G : M \times I \longrightarrow TM$ tal que $G(x,t) \in T_xM$ i $G(\partial M \times I) \subset T(\partial M)$.
No tot G, camp vectorial dependent del temps, ve donat per una difeotopia F. Això es deu a que pot ser que el flux de X (el corresponent camp vectorial en $M \times I$) no estigui definit per a tot $t \in I$.

Definició 4.7. Direm que un camp vectorial dependent del temps, $G : M \times I, \longrightarrow TM$ té velocitat acotada si M té una mètrica Riemanniana completa tal que per a tot $(x,t) \in M \times I$ es compleix $|G(x,t)| < K$ per a alguna constant $K > 0$.

Veurem ara resultats que ens donaran informació sobre les condicions sota les quals els camps vectorials dependents del temps generen isotopies:

Teorema 4.8. *Sigui G un camp vectorial en M dependent del temps tal que té velocitat acotada. Aleshores G genera una difeotopia de M, és a dir, hi ha una única difeotopia $F : M \times I \longrightarrow M$ tal que:*

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = G(F(x,t),t).$$

Demostració. Sigui $X : M \times I \longrightarrow T(M \times I)$ el camp vectorial tal que $X(x,t) = (G(x,t),1)$. La projecció en I d'una corba solució de X és una corba de la forma $y \longmapsto y+t$, això es deu a que tenim:

$$\begin{tikzcd} (a,b) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "\tilde{\gamma}"'] & M \times I \arrow[d] \\ & I = [0,1] \end{tikzcd}$$

On $\tilde{\gamma}$ és la composició de la corba solució amb la projecció i $\tilde{\gamma}' \equiv 1 \Longleftrightarrow \tilde{\gamma}(y) = y + t$.
Per tant, tenim que les corbes integrals estaran definides en intervals de llargada menor o igual que 1.
La condició que G tingui velocitat acotada implica que M té una mètrica Riemanniana completa en la que totes les corbes solució tenen llargada finita. Ja que, tindrem que per a aquesta mètrica existeix una constant $K > 0$ tal que per tot $(x,t) \in M \times I$, $|G(x,t)| < k$.
I per a $\bar{\gamma}$ la projecció en M d'una corba solució γ tenim $\bar{\gamma}' = G(\gamma)$, per tant, $|\bar{\gamma}'| < k$.
A més, per la completitud de la mètrica obtenim que cada corba solució va a parar a un conjunt compacte. Això es deu a que un espai mètric és compacte si, i només si, és complet i totalment acotat.
Per tant, per la Observació 3.35 obtenim que les corbes solució estan definides en intervals finits i tancats, els extrems dels quals van a parar a $M \times 0$ i $M \times 1$.
Se segueix que, per a $x \in M$ existeix una corba solució de X:

$$t \longmapsto (F(x,t),t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Per ser una corba solució de X tenim que es compleix $X(F(x,t),t) = (G(F(x,t),t),1) = \left(\frac{\partial F}{\partial t}(x,t), \frac{\partial}{\partial t}t\right)$ i, per tant, $\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = G(F(x,t),t)$.
F defineix una difeotopia i la unicitat d'F se segueix de la unicitat de solucions per a equacions diferencials de funcions Lipschitz. □

Definició 4.9. Anomenarem suport de $G : M \times I \longrightarrow TM$ (un camp vectorial dependent del temps) a la clausura del conjunt $\{ x \in M : G(x,t) \neq 0$ per a algun $t \in I\}$.
Denotem al suport de G per Supp G $\subset M$.

Observació 4.10. Si Supp G és compacte, aleshores G té velocitat acotada. Això es deu a que si $x \notin$ Supp G aleshores $G(x,t) = 0$ per a tot $t \in I$ i, per tant, per a tota constant $K > 0$ i tot $t \in I$, $|G(x,t)| < K$. Per altra banda, si $x \in$ Supp G tenim que Supp G $\times I$ és compacte per ser producte cartesià de compactes i G(Supp G $\times I$) també ho serà per ser G continua. Per tant G té velocitat acotada.

D'aquesta observació obtenim el següent teorema com a conseqüència immediata del Teorema 4.8:

Teorema 4.11. *Un camp vectorial dependent del temps que té suport compacte genera una isotopia. En particular, tot camp vectorial dependent del temps en una varietat compacte genera una isotopia.*

L'última afirmació ve donada pel fet que Supp G serà un tancat contingut en M, una varietat compacte.

Definició 4.12. Definim el suport Supp F $\subset V$ d'una isotopia $F : V \times I \longrightarrow M$ com la clausura del conjunt $\{ x \in V : F(x,t) \neq F(x,0)$ per a algun $t \in I$ $\}$.

Provarem un parell de resultats sobre estensió d'isotopies:

Teorema 4.13. *Sigui $U \subset M$ un conjunt obert i $A \subset U$ un conjunt compacte. Sigui F: $U \times I \longrightarrow M$ una isotopia de U tal que $\hat{F}(U \times I) \subset M \times I$ és obert. Aleshores existeix una difeotopia de M amb suport compacte tal que coincideix amb F en un entorn de $A \times I$.*

Demostració. Considerem els vectors tangents a les corbes: $\hat{F} : x \times I \longrightarrow M \times I$ per a x tal que $x \in U$.
Aquests defineixen un camp vectorial X en $\hat{F}(U \times I)$ de la forma $X(y,t) = (H(y,t),1)$, per a $H : \hat{F}(U \times I) \longrightarrow TM$ tal que $H(y,t) \in T_yM$.
Per mitjà d'una partició de la unitat construim un camp vectorial dependent del temps $G : M \times I \longrightarrow TM$ tal que aquest coincideix amb H en un entorn de $A \times I$.
Si veiem que G té velocitat acotada, aleshores podrem aplicar el Teorema 4.8 a G i obtindrem una difeotopia de M, que serà la generada per G. Efectivament, per ser A compacte, obtenim que $A \times I$ també ho és per ser el producte cartesià de dos compactes i podrem fer que G tingui suport compacte (ja que l'única condició que hem imposat al construir G és que coincideixi amb H en $A \times I$). Aleshores, de la Observació 4.10 i del fet que Supp G és compacte es dedueix que G té velocitat acotada.
Aleshores la difeotopia F_0 que obtenim pel Teorema 4.8 compleix:

$$\frac{\partial F_0}{\partial t}(x,t) = G(F_0(x,t),t) \qquad (4.1)$$

i, del fet que G coincideix amb H en un entorn de $A \times I$ obtenim que F_0 coincideix amb F també en un entorn de $A \times I$. Del fet que Supp G és compacte i de (4.1) es dedueix que Supp F_0 també ho és i, per tant, tenim el que volíem provar. $\square$

Teorema 4.14. *Sigui $V \subset M$ una subvarietat compacte i $F : V \times I \longrightarrow M$ una isotopia de V. Si es compleix $F(V \times I) \subset \partial M$ o bé $F(V \times I) \subset M \setminus \partial M$, aleshores F estén a una difeotopia de M amb suport compacte.*

Demostració. Considerem els vectors tangents a les corbes $\hat{F} : x \times I \longrightarrow M \times I$ per a $x \in V$ i el camp vectorial X en $\hat{F}(V \times I)$ que aquests vectors defineixen.
Per mitjà d'un entorn tubular de $\hat{F}(V \times I)$ i una partició de la unitat, podem estendre la part horitzontal de X a un camp vectorial Y en un entorn de $\hat{F}(V \times I)$ en $M \times I$.

Les hipotesis que hem acceptat per a F: $F(V \times I) \subset \partial M$ o bé $F(V \times I) \subset M \setminus \partial M$ ens permeten assumir que $Y(x,t)$ és tangent a $(\partial M) \times I$ si es dóna $x \in \partial M$.
Si restringim a un entorn més petit, la part horitzontal de Y es pot estendre a un camp vectorial G en M dependent del temps i tal que té suport compacte. El fet que puguem fer que Supp G sigui compacte es deu a que V és una subvarietat compacte, per tant, $V \times I$ també serà compacte i el camp vectorial és una funció continua.
A més, G complirà la condició dels camps vectorials dependents del temps: $G(\partial M \times I) \subset T(\partial M)$.
Aplicant la Observació 4.10 i el Teorema 4.8 obtenim la difeotopia generada per G que tindrà suport compacte per tenir G suport compacte i és una estensió de F per la forma en que hem definit G. Així doncs, queda provat el teorema. $\square$

Donem un altre resultat sobre estensions d'isotopies que es deriva del Teorema 4.14:

Teorema 4.15. *Sigui $V \subset N$ una subvarietat compacte. Siguin $f_0, f_1 : V \hookrightarrow M \setminus \partial M$ dos embeddings que són isotòpics en $M \setminus \partial M$. Aleshores, si f_0 estèn a un embedding $N \longrightarrow M$, f_1 també.*

Demostració. Sabem que $f_0, f_1 : V \hookrightarrow M \setminus \partial M$ són isotòpics en $M \setminus \partial M$. Per tant, existeix una isotopia $F : V \times I \longrightarrow M \setminus \partial M$ tal que $F_t : V \longrightarrow M \setminus \partial M$ són embeddings i $F_0 = f_0$, $F_1 = f_1$.
D'aquest fet es conclou que existeix una isotopia de la inclusió $f_0(V) \subset M \setminus \partial M$ a $f_1 \circ f_0^{-1} : f_0(V) \hookrightarrow M \setminus \partial M$.
Efectivament, podem considerar la funció $G : f_0(V) \times I \longrightarrow M \setminus \partial M$ tal que $G_t = F_t \circ f_0^{-1}$.
Per cada $t \in [0,1]$, G_t serà un embedding per ser-ho F_t i f_0 i tindrem $G_0 = f_0 \circ f_0^{-1} = Id$, $G_1 = f_1 \circ f_0^{-1}$.
Per ser $V \subset N$ compacte i f_0 una funció continua obtenim que $f_0(V) \subset M$ és un compacte i podem aplicar el Teorema 4.14 a la isotopia G. Obtenim que G estèn a una difeotopia H de M amb suport compacte.
Per tant, $H_1 : M \longrightarrow M$ és una difeotopia tal que $H_1 | f_0(V) = f_1 \circ f_0^{-1}$ o, equivalentment, $H_1 \circ f_0 = f_1$. Així doncs, sigui $g : N \hookrightarrow M$ un embedding que és estensió de f_0, $H_1 \circ g : N \hookrightarrow M$ és un embedding que és estensió de f_1 i queda provat el teorema. $\square$

Definició 4.16. Sigui $V \subset M$ una subvarietat diem que una isotopia $F : V \times I \longrightarrow M$ té velocitat acotada si M té una mètrica Riemanniana completa tal que els vectors tangents a les corbes $t \longmapsto F(x,t)$ tenen llargada acotada.

La hipòtesi de compacitat en el Teorema 4.13 es pot substituir per la condició de velocitat acotada de la isotopia, que és més feble.

Teorema 4.17. *Sigui $A \subset M$ un conjunt tancat i $U \subset M$ un entorn obert de A. Sigui $F : U \times I \longrightarrow M$ una isotopia de U amb velocitat acotada tal que $\hat{F}(U \times I)$ és obert en $M \times I$. Aleshores, existeix una difeotopia G de M que té velocitat acotada i tal que coincideix amb F en un entorn de $A \times I$ i Supp $G \subset F(U \times I)$.*

Demostració. Procedirem de forma semblant a la demostració del Teorema 4.13.
Considerem els vectors tangents a les corbes: $\hat{F} : x \times I \longrightarrow M \times I$ per a x tal que $x \in U$. Aquests defineixen un camp vectorial X en $\hat{F}(U \times I)$ de la forma $X(y,t) = (H_0(y,t), 1)$, per a $H_0 : \hat{F}(U \times I) \longrightarrow TM$ tal que $H_0(y,t) \in T_yM$.
A més, tindrem que tot vector $H_0(y,t)$ té llargada acotada per ser F una isotopia amb velocitat acotada i d'aquí obtenim que existeix una constant $K > 0$ tal que $|H_0(y,t)| < K$ per a tot $(y,t) \in \hat{F}(U \times I)$. Per tant, H_0 tindrà velocitat acotada.
Per mitjà d'una partició de la unitat construim un camp vectorial dependent del temps $H_1 : M \times I \longrightarrow TM$ tal que aquest coincideix amb H_0 en un entorn de $A \times I$.
Podem assumir que H_1 té velocitat acotada per ser H_0 de velocitat acotada i només haver assumit en la construcció de H_1 que aquest coincideix en un entorn de $A \times I$ amb H_0.
Aleshores podrem aplicar el Teorema 4.8 a H_1 i obtenim la difeotopia G generada per H_1 que és la que buscavem.
Efectivament, G té velocitat acotada per ser H_1 un camp vectorial dependent del temps amb velocitat acotada i G coincideix amb F en un entorn de $A \times I$ per coincidir H_1 amb H_0 en un entorn de $A \times I$. A més, al construir H_1 podem fer-ho de tal forma que Supp$H_1 \subset$ U i, per tant, Supp G $\subset F(U \times I)$. □

Definició 4.18. Siguin M una varietat amb vora i A una subvarietat de M. Direm que A és una subvarietat ordenada de M si compleix que:
La vora de A és un subconjunt de la vora de M, és a dir, $\partial A \subset \partial M$.
A està cobert per cartes (φ, U) en M tals que $A \cap U = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^m)$ on m és la dimensió de A.

Definició 4.19. Sigui $M \subset V$ una subvarietat diferenciable. Un entorn tubular d'una varietat M és una parella (f, ξ) on $\xi = (p, E, M)$ és un fibrat vectorial sobre M (p una funció continua tal que $p : E \longrightarrow B$) i $f : E \longrightarrow V$ és un embedding tal que:
· $f|M = Id_M$, on M s'identifica amb la secció zero de E.
· f(E) és un entorn obert de M en V.
Generalment ens referim a l'entorn obert $W = f(E)$ com a entorn tubular de M.

Definició 4.20. Anomenem Y-germen a una classe d'equivalència de funcions definides en entorns de Y. Sent dues funcions equivalents si coincideixen en algun entorn de Y.

Com a corol·lari del Teorema 4.17 obtenim el Teorema de l'entorn tubular ambient:

Teorema 4.21. *Sigui $A \subset M$ una subvarietat ordenada tancada i $U \subset M$ un entorn de A. Aleshores l'A-germen de qualsevol isotopia d'entorns tubulars de A estén a una difeotopia de M tenint suport en U.*

Demostració. Una isotopia d'entorns tubulars d'A deixa A fixat punt a punt, per tant, en un entorn d'A la isotopia té velocitat acotada. Així doncs, el resultat surt d'aplicar el Teorema 4.17. □

Definició 4.22. Sigui M una varietat diferenciable, anomenem collar en M a un embedding $f : \partial M \times [0, \infty) \longrightarrow M$ tal que f(x,0) = x.

Tenim un teorema anàleg al Teorema 4.20 per a collars en ∂M:

Teorema 4.23. *Per a tot $i \in \{0, 1\}$ considerem W_i una varietat diferenciable sense vora de dimensió m tal que és la unió de dos subvarietats tancades M_i, N_i de dimensió m que compleixen $M_i \cap N_i = \partial M_i = \partial N_i = V_i$.*
Sigui $h : W_0 \longrightarrow W_1$ un homeomorfisme que envia M_0 i N_0 difeomorficament a M_1 i N_1 respectivament. Aleshores, existeix un difeomorfisme $f : W_0 \approx W_1$ tal que $f(M_0) = M_1$, $f(N_0) = N_1$ i $f|V_0 = h|V_0$.
A més, f es pot triar de forma que coincideixi amb h fora d'un entorn Q de V_0.

Demostració. Triem un entorn tubular τ_i per a V_i en W_i. Aquest ens defineix un collar $\tau_i|M_i$ en V_i dins M_i i un altre collar $\tau_i|N_i$ en V_i dins N_i.
Tenim un altre collar h($\tau_0|M_0$) en V_1 dins M_1 que serà el collar induït de $\tau_0|M_0$ per $h|M_0$.
Tenim $V_0 \subset M_0$ una subvarietat tancada i aplicant el Teorema 4.21 obtenim que podem construir una isotopia que va de $h|M_0 : M_0 \longrightarrow M_1$ a un nou difeomorfisme $f' : M_0 \longrightarrow M_1$ tal que $f' = h$ en V_0 i en $M_0 \setminus Q$ per a Q un entorn de V_0. El difeomorfisme f' compleix que $f'(\tau_0|M_0)$ té el mateix $V_1 - germen$ que $\tau_1|M_1$.
Anàlogament podem construir una isotopia que va de $h|N_0 : N_0 \longrightarrow N1$ a un difeomorfisme $f'' : N_0 \longrightarrow N_1$ tal que $f'' = h$ en V_0 i en $N_0 \setminus Q$ on Q és un entorn de V_0. El collar $f''(\tau_0|N_0)$ té el mateix $V_1 - germen$ que $\tau_1|N_1$.
Aleshores, la funció $f' \cup f'' : W_0 \longrightarrow W_1$ és el difeomorfisme que buscavem. Efectivament, tant f' com f" són iguals a h en V_0, per tant $f' \cup f''|V_0 = h|V_0$. A més, $f'(M_0) = M_1$ i $f''(N_0) = N_1$, per tant $(f' \cup f'')(M_0) = M_1$ i $(f' \cup f'')(N_0) = N_1$. □

Observació 4.24. Prenent collars de forma més precisa es podria arribar a obtenir f = h en M_0.

4.2 Unió de varietats diferenciables

Suposem que P i Q són varietats diferenciables de dimensió m amb vora tals que existeix un difeomorfisme $f : \partial Q \longrightarrow \partial P$.
L'espai $W = P \cup_f Q$ és una varietat topològica a la que podem dotar d'una estructura diferenciable que estengui les estructures diferenciables en P i Q.
Veurem que totes aquestes possibles estructures diferenciables en W són difeomorfes.
Identifiquem P i Q amb les seves imatges en W i anomenem $V = \partial P = \partial Q$. Per mitjà de collars en V dins P i Q:

$$\begin{aligned} f_P : V \times [0, \infty) &\hookrightarrow P \\ (x, 0) &\longmapsto x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f_Q : V \times [0, \infty) &\hookrightarrow Q \\ (x, 0) &\longmapsto x \end{aligned}$$

podem construir un homeomorfisme d'un entorn de V ($U \subset W$) en $V \times \mathbb{R}$ que envia $x \in V$ a (x,0) i que envia $U \cap P$ i $U \cap Q$ difeomorficament a $V \times [0, \infty)$ i $V \times (-\infty, 0]$ respectivament.
Dotem a U de l'estructura diferenciable induïda per l'homeomorfisme: sigui $h : U \longrightarrow V \times \mathbb{R}$ l'homeomorfisme, per a cada carta $(\varphi, \hat{V})$ en $V \times \mathbb{R}$ definim la carta $(\varphi \circ h, h^{-1}(\hat{V}))$.
La estructura diferenciable en W la obtenim de les de P, Q i U.
Al definir l'estructura diferenciable en W hem pres vàries decisions, per exemple, hem

triat els collars en V dins P i Q. Donem un resultat que mostra que W dotat d'una estructura diferenciable és únic llevat de difeomorfisme:

Teorema 4.25. *Sigui $f : \partial Q \longrightarrow \partial P$ un difeomorfisme. Siguin α, β dos estructures diferenciables en $W = P \cup_f Q$ que indueixen la estructura original en P i Q. Aleshores existeix un difeomorfisme $h : W_\alpha \longrightarrow W_\beta$ tal que $h|V = Id_V$.*

Demostració. El teorema és una reformulació del Teorema 4.23.
Apliquem el Teorema 4.23 a $W_0 = W_\alpha = P_\alpha \cup_f Q_\alpha$ i $W_1 = W_\beta = P_\beta \cup_f Q_\beta$ dos varietats diferenciables de dimensió m sense vora. □

Observació 4.26. El Teorema 4.25 no ens dóna una estructura diferenciable canònica en $P \cup_f Q$ sinó una única classe d'estructures diferenciables via difeomorfisme.
Treballarem amb $P \cup_f Q$ com si fos una varietat diferenciable ben definida.

Presentem un criteri per a determinar difeomorfismes per a la unió de dues varietats diferenciables:

Teorema 4.27. *Siguin $f_0 : \partial Q_0 \longrightarrow \partial P$ i $f_1 : \partial Q_1 \longrightarrow \partial P$ dos difeomorfismes. Suposem que el difeomorfisme $f_1^{-1} \circ f_0 : \partial Q_0 \longrightarrow \partial Q_1$ estén a un difeomorfisme $h : Q_0 \longrightarrow Q_1$. Aleshores $P \cup_{f_0} Q_0 \approx P \cup_{f_1} Q_1$.*

Demostració. Definim una funció $\psi : P \cup_{f_0} Q_0 \longrightarrow P \cup_{f_1} Q_1$ de forma que: $\psi|P = Id_P$, $\psi|Q_0 = h$, tenim que ψ està ben definida.
Aleshores podem aplicar el Teorema 4.23 per a $W_0 = P \cup_{f_0} Q_0$, $W_1 = P \cup_{f_1} Q_1$.
Tenim $V_0 = P \cap Q_0 = \partial P = \partial Q_0$, $V_1 = P \cap Q_1 = \partial P = \partial Q_1$ i ψ un homeomorfisme per ser-ho h i la identitat.
Del Teorema 4.23 i la Observació 4.24 obtenim el difeomorfisme $P \cup_{f_0} Q_0 \approx P \cup_{f_1} Q_1$. □

Tenim el següent cas particular:

Teorema 4.28. *Siguin f, g: $\partial Q \longrightarrow \partial P$ difeomorfismes isotòpics. Aleshores $P \cup_f Q \approx P \cup_g Q$.*

Demostració. Tenim una isotopia entre f i g que denotem per $F : \partial Q \times I \longrightarrow \partial P$ tal que $F_0 = g$ i $F_1 = f$.
Aleshores, $g^{-1} \circ F : \partial Q \times I \longrightarrow \partial Q$ compleix que $(g^{-1} \circ F)_t$ són embeddings per a tot $t \in I$ per ser-ho g^{-1} i F_t. A més, $(g^{-1} \circ F)_0 = g^{-1} \circ g = Id_{\ \partial Q}$ i $(g^{-1} \circ F)_1 = g^{-1} \circ f$.
Per tant, tenim que $g^{-1} \circ f$ és isotòpic a la identitat en ∂Q.
Aquesta isotopia es pot estendre a un collar en ∂Q que anomenem $h : \partial Q \times [0, \infty) \longrightarrow \partial Q$ tal que $h(x, 0) = x$.
A més, es pot estendre h a un difeomorfisme de Q que és la identitat fora del collar.
Ara, tenim f, g: $\partial Q \longrightarrow \partial P$ difeomorfismes, $g^{-1} \circ f : \partial Q \longrightarrow \partial Q$ també un difeomorfisme que estén a un difeomorfisme de Q. Per, tant, podem aplicar el Teorema 4.27 i obtenim $P \cup_f Q \approx P \cup_g Q$, que és el que volíem veure. □

4.3 Isotopies dels discos

Definició 4.29. Sigui V un espai vectorial de dimensió finita $n > 0$. Anomenem orientació de V a una classe d'equivalència de bases $[e_1, \ \cdots, e_n]$. Si $dimV > 0$, només hi ha dues

orientacions, una d'elles la denotem per ω i l'altra per $-\omega$.
Sigui $L : V \longrightarrow W$ un isomorfisme d'espais vectorials i $\omega = [e_1, \ \cdots, e_n]$ una orientació de V, aleshores $L(\omega) = [L(e_1), \ \cdots, L(e_n)]$ és la orientació induïda en W.

Definició 4.30. Un espai vectorial orientat és un parell (V, ω) on ω és una orientació de V. Donats (V, ω) i (V', ω') dos espais vectorials orientats, diem que un isomorfisme $L : V \longrightarrow V'$ preserva orientació si $L(\omega) = \omega'$. En cas contrari, diem que L inverteix l'orientació.
Si L preserva orientació, aleshores el determinant de la matriu associada a l'aplicació lineal L serà positiu.

Definició 4.31. Sigui $\xi = (p, B, E)$ un fibrat vectorial on $p : E \longrightarrow B$ és una funció continua. Anomenem orientació de ξ a una família $\omega = \{\omega_x\}_{x \in B}$ tal que ω_x és una orientació de la fibra $E_x = p^{-1}(x)$ (que té una estructura d'espai vectorial) i ω_x compleix que ξ té un atles ϕ tal que:
Si $\varphi : \xi|U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ està en ϕ, aleshores $\varphi_x : (E_x, \omega_x) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \omega^n)$ preserva orientació.
On, donat $U \subset B$, denotem per $\xi|U$ el fibrat vectorial $(p|p^{-1}(U), p^{-1}(U), U)$ i tenim:

$$\varphi_x : \ p^{-1}(x) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n$$

Si ξ té una orientació ω direm que ξ és orientable i el parell (ξ, ω) és un fibrat vectorial orientat.

Definició 4.32. Sigui M una varietat diferenciable aleshores direm que M és orientable si TM és un fibrat vectorial orientable.
Una orientació de M és una orientació de TM i anomenarem varietat diferenciable orientable a la parella (M, ω) per a ω una orientació de M.

Observació 4.33. Si M és una varietat diferenciable connexa i orientable aleshores té exactament dues orientacions: $\omega, -\omega$.

Observació 4.34. Podem donar una definició alternativa de varietat diferenciable orientable: M és orientable si té un atles en el que els canvis de coordenades tenen el determinant del Jacobià positiu en tot punt.

Definició 4.35. Siguin (M, ω), (N, θ) varietats diferenciables orientables. Sigui f: $M \longrightarrow N$ un difeomorfisme, direm que preserva orientació si $Tf : (TM, \omega) \longrightarrow (TN, \theta)$ preserva orientació i en aquest cas escribim $f(\omega) = \theta$. Per altra banda, direm que f inverteix la orientació si Tf inverteix la orientació.

Presentem un resultat que afirma que, tret d'orientació, només hi ha una única forma d'incrustar via embedding un disc en una varietat diferenciable connexa.

Definició 4.36. Anomenem k-disc al conjunt $D^k = \{x \in \mathbb{R}^k : |x| \leq 1\}$.

Teorema 4.37. *Sigui M una varietat diferenciable connexa de dimensió m i f,g: $D^k \hookrightarrow M$ embeddings del k-disc per a $0 \leq k \leq m$. Si $k = m$ i M és orientable assumim que, tant g com f, els dos preserven o inverteixen orientació. Aleshores f i g són isotopics.*
Si $f(D^k) \cup g(D^k) \subset M \setminus \partial M$, una isotopia entre f i g es pot dur a terme per una difeotopia de M amb suport compacte.

Un cop demostrat el teorema, l'última afirmació ve donada pel Teorema 4.14.

Demostració. Usarem el fet que la isotopia és una relació d'equivalència en el conjunt d'embeddings: reflexiva, simètrica i transitiva.

- Primer suposem $\partial M = \emptyset$. Tenim que M és una varietat connexa i sabem que una varietat topològica és connexa si, i només si, és connexa per camins. D'aquí obtenim que els embeddings $f|0, g|0 : 0 \longrightarrow M$ són isotòpics ja que podem definir una isotopia:

$$F : 0 \times I \longrightarrow M$$
$$(0,t) \longmapsto tf(0) + (1-t)g(0)$$

  On $tf(0) + (1-t)g(0) \in M$ per a tot $t \in I$ per ser M connexa per camins.
  Podem aplicar el Teorema 4.14 ja que tenim $0 \subset D^k$ una subvarietat compacta i una isotopia tal que la imatge està continguda en $M \setminus \partial M$ per ser $\partial M = \emptyset$. Obtenim, doncs, que la isotopia estén a una difeotopia i, per tant, $f|0$ *i* $g|0$ són isotòpics ambientalment. Així podem assumir $f(0) = g(0)$.

  Sigui (φ, U) una carta en M al punt f(0) tal que $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ i $\varphi(f(0)) = 0$. Aleshores podem enviar f i g a embeddings en U de forma radial via una isotopia:

$$x \longmapsto f((1-t+t\epsilon)x) \qquad \text{per a } x \in D^k, \ \ 0 \leq t \leq 1 \ \text{ i } \epsilon > 0 \text{ prou petita.}$$

  Per tant, assumim $f(D^k) \cup g(D^k) \subset U$. Serà suficient veure que $\varphi \circ f, \ \varphi \circ g : D^k \longrightarrow \mathbb{R}^m$ són isotòpics, ja que composant la isotopia per φ^{-1} obtindrem una isotopia de f i g.
  Observem, a més, que per a tot k podem assumir que $\varphi \circ f, \ \varphi \circ g$ són lineals. Això es deu a que tot embedding $h : D^k \longrightarrow \mathbb{R}^m$ és isotòpic a un de lineal per mitjà de la isotopia:

$$D^k \times I \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$(x,t) \longmapsto \begin{cases} t^{-1}h(tx) & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ Dh(0)x & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

  - Si k = m, aleshores podem assumir que f i g, com a embeddings en una varietat orientable U, preserven ambdós la orientació o la inverteixen. Si M és orientable aquest fet se segueix de les hipòtesis. Si M no és orientable aleshores, en cas que f i g no compleixin que els dos preserven o inverteixen orientació, podem reemplaçar f per un embedding obtingut isotopant f al voltant d'un llaç que inverteix orientació amb punt base f(0).
    Volem veure que $\varphi \circ f, \ \varphi \circ g$ són isotòpics. Podem assumir que els dos embeddings preserven orientació triant adequadament la carta φ, a més de suposar que els dos són lineals.
    Tenim, doncs, que els determinants dels dos embeddings són positius (per haver suposat que preserven orientació).
    Denotem per GL(m) el grup format pels isomorfismes de l'espai $\mathbb{R}^m$ en si mateix. GL(m) té dos components connexes: els isomorfismes amb determinant positiu, i els que tenen determinant inferior a 0. Aleshores, tenim que $\varphi \circ f, \ \varphi \circ g$ són restricció de funcions que pertanyen a la mateixa component connexa de GL(m).
    Un camí C^∞ en GL(m) ens proporciona la isotopia que busquem i aquest camí existeix per pertànyer $\varphi \circ f, \ \varphi \circ g$ a la mateixa component connexa.

– Si $k < m$ podem estendre $\varphi \circ f$, $\varphi \circ g$ a automorfismes lineals de $\mathbb{R}^m$ amb determinants positius.
Aleshores, pel mateix argument que en el cas anterior, un camí en GL(m) ens proporciona la isotopia que busquem.

Així finalitza la demostració per al cas $\partial M = \emptyset$.

- Si $\partial M \neq \emptyset$ aleshores isotopem f i g en funcions amb conjunt d'arribada $M \setminus \partial M$. Això es pot fer per mitjà d'una isotopia de funcions de M en $M \setminus \partial M$, la podem obtenir usant collars.
  Aleshores tenim funcions $D^k \longrightarrow M \setminus \partial M$ i procedim com al cas $\partial M = \emptyset$.

$\square$

Tractarem ara amb embeddings de discos que tenen imatge disjunta. El següent resultat que presentem per a parelles d'embeddings es pot generalitzar a qualsevol número d'aquests.

Teorema 4.38. *Sigui M una varietat diferenciable connexa de dimensió m sense vora. Suposem que $f_i, g_i : D^m \longrightarrow M$ per a $i \in \{1, 2\}$ són embeddings tals que:*

$$f_1(D^m) \cap f_2(D^m) = \emptyset = g_1(D^m) \cap g_2(D^m).$$

Si M és orientable suposem que, tant f_i com g_i, ambdós preserven la orientació o els dos la inverteixen. Aleshores existeix un difeomorfisme $H : M \longrightarrow M$ que és difeotopic a la identitat tal que $H \circ f_i = g_i$ per a tot $i \in \{1, 2\}$.

Demostració. Aplicant el Teorema 4.37 als embeddings f_1, g_1 obtenim que són isotòpics i, per ser $f_1(D^m) \cup f_2(D^m) \subset M = M \setminus \partial M$ (ja que M és varietat sense vora), sabem aleshores que aquesta isotopia pot ser duta a terme per una difeotopia de M: són isotòpics ambientalment.
Per tant, existeix un difeomorfisme H_1 de M (difeotòpic a la identitat en M) tal que $H_1 \circ f_1 = g_1$.
$H_1 \circ f_2$ serà un embedding per ser H_2 difeomorfisme i f_2 embedding. Tenim, doncs, els embeddings:

$$H_1 \circ f_2, g_2 : D^m \hookrightarrow M \setminus g_1(D^m)$$

per ser $g_1(D^m) \cap g_2(D^m) = \emptyset$ i $H_1(f_2(D^m)) \cap g_1(D^m) = H_1(f_2(D^m)) \cap H_1(f_1(D^m)) \subset H_1(f_1(D^m) \cap f_2(D^m)) = \emptyset$.
Aplicant el Teorema 4.37 de nou a $H_1 \circ f_2$ i a g_2 obtenim que aquests embeddings són isotòpics i, com que $M \setminus g_1(D^m) \subset M \setminus \partial M$, aleshores existeix un difeomorfisme de $M \setminus g_1(D^m)$ tal que $H_2 \circ H_1 \circ f_2 = g_2$.
A més, H_2 és isotòpic a la identitat per una difeotopia en $M \setminus g_1(D^m)$ amb suport compacte. Podem estendre aquesta difeotopia a tot M deixant $g_1(D^m)$ fixat, per tant, H_2 es pot estendre a un difeomorfisme de M que és difeotòpic a Id_M.
Tenim $H_2 \circ g_1 = g_1$ per haver assumit que la difeotopia deixava fixe $g_1(D^m)$. Per tant, si prenem $H = H_2 \circ H_1$ tenim el difeomorfisme que buscavem : $H \circ f_1 = H_2 \circ H_1 \circ f_1 = H_2 \circ g_1 = g_1$ i $H \circ f_2 = H_2 \circ H_1 \circ f_2 = g_2$. $\square$

Definició 4.39. Sigui $\gamma : I = [0, 1] \longrightarrow S^1$ un camí tancat (és a dir, $\gamma(0) = \gamma(1)$), anomenem elevació de γ a una aplicació $\tilde{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $e \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. On e denota l'aplicació:

$$\begin{aligned} e : \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto e^{2\pi i t} = cos(2\pi t) + isin(2\pi t) \end{aligned}$$

La diferència $\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)$ és un nombre sencer, independent de l'elevació triada, que s'anomena el grau de γ.
Hi ha un isomorfisme de grups entre $\pi_1(S^1, 1)$ i $(\mathbb{Z}, +)$:

$$\begin{aligned} gr : \pi_1(S^1, 1) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ [\gamma] &\longmapsto gr(\gamma) \end{aligned}$$

On $\pi_1(S^1, 1)$ denota el conjunt quocient dels llaços $\alpha : I \longrightarrow S^1$ tal que $\alpha(0) = \alpha(1)$ per la relació d'homotopia de camins. Anomenem a gr l'aplicació grau.

Definició 4.40. Donada $f : S^1 \longrightarrow S^1$ continua, es defineix el grau de f per gr(f) := $gr(f \circ e)$, per a $e : I \longrightarrow S^1$.

Considerem ara les difeotopies del cercle:

Teorema 4.41. *Tot difeomorfisme de S^1 és isotòpic a la identitat o a la conjugació complexa. Per tant, cada difeomorfisme de S^1 estén a un difeomorfisme de D^2.*

Un cop provat l'enunciat, l'última frase ve donada pels teoremes d'estensió d'isotopia.

Demostració. Sigui $f : S^1 \longrightarrow S^1$ un difeomorfisme observem que gr(f) només pot ser 1 o -1. Això es deu a que gr($f \circ g$) $= gr(f) \cdot gr(g)$ i, per ser f difeomorfisme podem considerar la seva inversa i tindrem gr(f) $\cdot$ gr(f^{-1}) = 1.

- Suposem gr(f)=1. Per mitjà d'una isotopia podem assumir que f és la identitat en algun interval obert $J \subset S^1$. Considerem un altre interval obert $J' \subset S^1$ tal que $J \cup J' = S^1$.
  Podem identificar J' amb un interval obert de nombres reals. Aleshores tenim la següent isotopia de f a la identitat:

  $$f_t(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in J \\ tx + (1-t)f(x) & \text{si } x \in J' \end{cases}$$

  Efectivament, $f_0 = f$ per haver pres J tal que f(x) = x en J i $f_1 = Id_{S^1}$.

- Suposem gr(f)=-1. Sigui $\delta : S^1 \longrightarrow S^1$ la conjugació complexa, aleshores $gr(f \circ \delta)$ = 1. Pel cas anterior, tenim que existeix una isotopia g_t tal que $f \circ \delta$ és isotòpic a la identitat.
  Per tant, si considerem $g_t \circ \delta$ tenim una isotopia de f a δ, tenint en compte que $\delta \circ \delta = Id_{S^1}$.

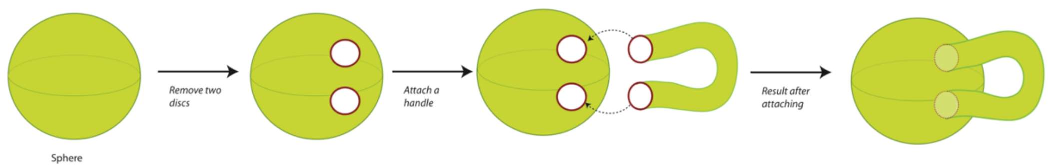
Per tant, hem vist que f és isotòpic a la identitat o bé a la conjugació complexa. □

5 Superfícies model

En aquesta secció construirem i analitzarem el que anomenem superfícies models. En aquestes es basarà la classificació de superfícies compactes de forma que tindrem el següent resultat:
Tota superfície connexa i compacta M és difeomorfa a una obtinguda a partir de S^2 extraient un número ν de 2-discos i unint-ne g cilindres (en el cas que M sigui orientable) o g cintes de Möbius (si M és no orientable).
Al nombre g, únicament determinat per M, l'anomenarem gènere de M. A més, dos superfícies compactes i connexes seran difeomorfes si, i només si, tenen el mateix gènere, número de components de la vora i la mateixa orientabilitat.

Donada una superfície M i un embedding $f : S^0 \times D^2 \hookrightarrow M \setminus \partial M$ presentem una forma de construir una nova varietat M'. La imatge de f serà un parell de discos disjunts en M. Si extreiem l'interior d'aquests discos i unim un cilindre $D^1 \times S^1$ per mitjà de $f|S^0 \times S^1$ obtenim una nova superfície:

$$M' = [M \setminus Int\ f(S^0 \times D^2)] \cup_f D^1 \times S^1$$



Mostrem una imatge del procés per mitjà del qual s'adjunta una nansa a l'esfera. Imatge extreta de: https://picturethismaths.wordpress.com/2016/10/15/defining-topology-through-interviews-interview-two-with-carmen-rovi/

Dotem a M' d'una estructura diferenciable que indueix en $M \setminus Int\ f(S^0 \times D^2)$ i en $D^1 \times S^1$ les estructures originals. Pel Teorema 4.25, sabem que aquesta estructura és única tret de difeomorfisme.
Suposarem que M' és una varietat diferenciable ben definida i la denotarem per M[f]. Direm que M' s'obté de M adjuntant una nansa, o per cirurgia en f.

Teorema 5.1. *Sigui M una superfície i siguin $f_0, f_1 : S^0 \times D^2 \hookrightarrow M \setminus \partial M$ dos embeddings que són isotòpics. Aleshores $M[f_0] \approx M[f_1]$.*

Demostració. Per ser f_0, f_1 isotòpics, podem aplicar el Teorema 4.14 a aquesta isotopia de f_0 a f_1 que té imatge continguda en $M \setminus \partial M$. Per tant, obtenim que existeix un difeomorfisme de M $\varphi : M \longrightarrow M$ tal que $\varphi \circ f_0 = f_1$.

Per a $i \in \{0, 1\}$ denotem: $Q_i := M \setminus Int\ f_i(S^0 \times D^2)$ i $g_i = f_i^{-1}|\partial Q_i : \partial Q_i \longrightarrow S^0 \times S^1$ difeomorfismes. Aleshores tenim:

$$M[f_0] = (D^1 \times S^1) \cup_{g_0} Q_0$$
$$M[f_1] = (D^1 \times S^1) \cup_{g_1} Q_1$$

El difeomorfisme $g_1^{-1} \circ g_0 : \partial Q_0 \longrightarrow \partial Q_1$ s'estén al difeomorfisme $\varphi : Q_0 \longrightarrow Q_1$. Això es deu a que teniem $\varphi \circ f_0 = f_1$, per tant $\varphi = f_1 \circ f_0^{-1}$ i obtenim:

$$\varphi|\partial Q_0 : \quad \partial Q_0 \xrightarrow{f_0^{-1}|\partial Q_0 \; = g_0} S^0 \times S^1 \xrightarrow{f_1|S^0\times S^1 \; = g_1^{-1}} \partial Q_1$$

Aleshores, pel Teorema 4.27 aplicat a g_0, g_1 obtenim que:

$$(D^1 \times S^1) \cup_{g_0} Q_0 \approx (D^1 \times S^1) \cup_{g_1} Q_1.$$

Queda vist $M[f_0] \approx M[f_1]$, tal i com volíem. □

Corol·lari 5.2. *Sigui M una superfície connexa. Si M és no orientable, aleshores totes les superfícies obtingudes adjuntant una nansa a M són difeomorfes.*

Demostració. Si obtenim que tot parell d'embeddings $f, g : S^0 \times D^2 \longrightarrow M \setminus \partial M$ són isotòpics, aleshores, pel Teorema 5.1 haurem acabat la demostració.
Sabem que les imatges de f i g en M seran cadascuna un parell de discos disjunts en M. Considerem $f_1, f_2 : D^2 \longrightarrow M \setminus \partial M$ on $f_1 = f|\ (\{-1\} \times D^2)$ i $f_2 = f|\ (\{1\} \times D^2)$. I procedim de la mateixa forma per a $g_1, g_2 : D^2 \longrightarrow M \setminus \partial M$.

Tenim que $f_1(D^2) \cap f_2(D^2) = \emptyset = g_1(D^2) \cap g_2(D^2)$, per tant, podem aplicar el Teorema 4.38 i obtenim que existeix un difeomorfisme $H : M \setminus \partial M \longrightarrow M \setminus \partial M$ tal que $H \circ f_i = g_i$ per a $i \in \{1, 2\}$. A més, H és difeotòpic a la identitat en $M \setminus \partial M$ i, composant aquesta difeotopia amb f, obtenim la isotopia d'embeddings que buscavem. □

Observació 5.3. Dotem a $S^0 \times D^2$ de la orientació tal que $\{1\}{\times}D^2$ rep l'orientació estàndar de D^2 i {-1}$\times D^2$ l'orientació oposada.
Aquesta orientació de $S^0 \times D^2$ indueix una orientació en $S^0 \times S^1$ que és la mateixa orientació que rep com a $\partial(D^1 \times S^1)$ quan dotem a S^1 i a D^1 de les seves orientacions estandard.

Definició 5.4. Siguin M una superfície i $f : S^0 \times D^2 \longrightarrow M$ un embedding. Direm que f és un embedding orientable si M pot ser orientada tal que f preservi orientació. En cas contrari, direm que f és no orientable.

Definició 5.5. Una varietat diferenciable connexa s'anomena reversible si és orientable i admet un difeomorfisme que inverteix orientació.

Teorema 5.6. *Sigui M una varietat diferenciable connexa i $f, g : S^0 \times D^2 \longrightarrow M \setminus \partial M$ dos embeddings. Aleshores tenim $M[f] \approx M[g]$ en els següents casos:*
a) M és no orientable.
b) M està orientat de tal forma que, f i g, els dos preserven la orientació o els dos la inverteixen.
c) M és reversible i tant f com g són orientables.

Demostració. a) Aquest resultat ja ha estat provat al Corol·lari 5.2.

b) Podem aplicar el Teorema 4.27 a f i g de forma que considerem $f_1, f_2 : D^2 \longrightarrow M \setminus \partial M$ tals que $f_1 = f|\ (\{-1\} \times D^2)$ i $f_2 = f|\ (\{1\} \times D^2)$ i fem el mateix per a definir g_1, g_2.
Aleshores, pel teorema mencionat, obtenim un difeomorfisme $H : M \setminus \partial M \longrightarrow M \setminus \partial M$ tal

que $H \circ f_i = g_i$ per a $i \in \{1, 2\}$. H és difeotòpic a la identitat, aleshores podem construir una isotopia entre f i g composant H amb f i pel Teorema 5.1 obtenim $M[f] \approx M[g]$.

c) És suficient considerar el cas en què M està orientat de tal forma que f preserva orientació i g la inverteix ja que en els altres casos el resultat ve donat per l'apartat b). Per ser M reversible, existeix $h : M \longrightarrow M$ que inverteix orientació. Aleshores obtenim aplicant l'apartat b) que $M[h \circ g] \approx M[f]$ i, per tant, si veiem $M[h \circ g] \approx M[g]$ haurem acabat la demostració.
Considerem $\rho : S^0 \times D^2 \longrightarrow S^0 \times D^2$ el difeomorfisme que inverteix la orientació enviant (x,y) a $\rho(x, y) = (-x, y)$. Aleshores, també per l'apartat b), tenim $M[h \circ g] \approx M[g \circ \rho]$.
A més, tenim $g \circ \rho,\ g : S^0 \times D^2 \longrightarrow M \setminus \partial M$ tals que podem aplicar el Teorema 4.27 als difeomorfismes $g \mid S^0 \times S^1,\ g \circ \rho \mid S^0 \times S^1$ degut a que $\rho \mid S^0 \times S^1$ estén a un difeomorfisme de $D^1 \times S^1$.
Observem que Int $g \circ \rho(S^0 \times D^2) = \mathrm{Int} g(S^0 \times D^2)$, per tant, M $\setminus$ Int $g \circ \rho(S^0 \times D^2) = M \setminus \mathrm{Int} g(S^0 \times D^2)$.
Del Teorema 4.27 obtenim $M[g \circ \rho] \approx M[g]$ i, com que teníem també $M[h \circ g] \approx M[g \circ \rho]$, aleshores $M[h \circ g] \approx M[g]$ que és el que volíem. □

Teorema 5.7. *Sigui M una superfície reversible i $f : S^0 \times D^2 \longrightarrow M \setminus \partial M$ un embedding orientable. Aleshores, M[f] és reversible.*

Demostració. Considerem $h : M \longrightarrow M$ un difeomorfisme que inverteix la orientació (sabem que existeix per ser M reversible). Prenem $\rho : S^0 \times D^2 \longrightarrow S^0 \times D^2$ un difeomorfisme que inverteix orientació tal que $\rho \mid S^0 \times S^1$ estén a un difeomorfisme $\bar{\rho}$ de $D^1 \times S^1$ (un exemple de funció ρ d'aquesta forma seria $\rho(x, y) = (-x, y)$).
Podem usar el Teorema 4.38 per a les aplicacions $h \circ f$ i $f \circ \rho : S^0 \times D^2 \longrightarrow M \setminus \partial M$ (les dues inverteixen o preserven la orientació). Aleshores obtenim un difeomorfisme H tal que $H \circ h \circ f = f \circ \rho$ i H és difeotòpic a la identitat. Considerem g = $H \circ h$, aleshores tenim que g: $M \longrightarrow M$ és un difeomorfisme que compleix $g \circ h^{-1} \circ h \circ f = f \circ \rho$, és a dir, $g \circ f = f \circ \rho$ i existeix una difeotopia que va de h a g.
Observem que g inverteix l'orientació, per ser $g \circ f = f \circ \rho$ i ser ρ un difeomorfisme que inverteix orientació.
Per a provar que M[f] és reversible volem veure que admet un difeomorfisme que inverteix orientació:
Considerem la funció $\varphi : M[f] \longrightarrow M[f]$ que és $\bar{\rho}$ en $D^1 \times S^1$ i g en $M \setminus$ Int $f(S^0 \times D^2)$. Tenim que φ és un homeomorfisme que inverteix la orientació per ser $\bar{\rho}$ i g tals que inverteixen l'orientació.
Pel Teorema 4.25, de φ podem obtenir un difeomorfisme que inverteix la orientació.
A més, M[f] és orientable per ser f orientable. Ja que, del fet que f és orientable obtenim que M és orientable, en concret $M \setminus$ Int $f(S^0 \times D^2)$ serà orientable. Per altra banda, $D^1 \times S^1$ també és orientable, per exemple, tenim l'orientació que ve donada per considerar en D^1 i S^1 les orientacions estàndard. Per tant, M[f] = $M \setminus$ Int $f(S^0 \times D^2) \cup_f (D^1 \times S^1)$ serà orientable.
Així doncs, queda vist que M[f] és reversible. □

Ara definim una classe important de superfícies:

Definició 5.8. Considerem $p \geq 0$ un enter. Diem que una superfície orientable M és de gènere p si M es pot obtenir a partir de S^2 adjuntant nanses p vegades.

Equivalentment, existeix una seqüència de superfícies orientables $M_0, \cdots, M_p$ i embeddings orientables $f_i : S^0 \times D^2 \longrightarrow M_{i-1}$, per a $i \in \{1, \cdots, p\}$ (si $p > 0$) tals que:

$$M_0 \approx S^2 \ , \qquad M_i \approx M_{i-1}[f_i] \ , \qquad M := M_p$$

Observació 5.9. En la seqüència que hem definit, cada M_i té gènere i.

Observació 5.10. Tota superfície orientable de gènere g té característica d'Euler 2-2g, per tant, M := M_p té característica d'Euler 2-2p. Així doncs, superfícies orientables de diferent gènere no són difeomorfes ja que una condició necessària és que tinguin la mateixa característica d'Euler.
Per altra banda, per inducció sobre p i aplicant el Teorema 5.6 c) i el Teorema 5.7 obtenim que dos superfícies orientables del mateix gènere són difeomorfes.

Considerem dues superfícies connexes M i N disjuntes i sense vora. Sigui $f : S^0 \times D^2 \longrightarrow M \cup N$ un embedding tal que $f(\{1\} \times D^2) \subset M$ i $f(\{-1\} \times D^2) \subset N$, aleshores denotem $W = (M \cup N)[f]$.
Si una de les superfícies M o N és no orientable o bé reversible aleshores, pel Teorema 5.6, la definició de W és independent de f tret de difeomorfisme. Podem assumir que W és una varietat diferenciable ben definida a la que anomenarem suma connexa de M i N i la denotem per W = M # N.

Observació 5.11. També es pot interpretar M # N com la varietat obtinguda en unir $M \setminus \text{Int } B$ i $N \setminus \text{Int } D$ via un difeomorfisme $h : \partial B \longrightarrow \partial D$ tal que $B \subset M$ i $D \subset N$ són discos. És a dir, M # N = $M \setminus \text{Int } B \cup_h N \setminus \text{Int } D$.

Aquesta definició que hem donat de la suma connexa de dues superfícies connexes s'estén de manera anàloga a varietats de dimensió superior.

Definició 5.12. Denotem per P el pla projectiu. Anomenarem superfície no orientable de gènere p a qualsevol superfície difeomorfa a la suma connexa de p còpies disjuntes de P.

Observació 5.13. Una superfície d'aquest tipus és no orientable. Això és degut a que, per la definició que hem donat de suma connexa, M_1 # M_2 és orientable si, i només si, M_1 i M_2 són orientables i, en aquest cas, P no és orientable.

Definició 5.14. Anomenem cinta de Möbius a l'espai quocient de $S^1 \times [-1, 1]$ per la relació (x,y) $\sim$ (-x,-y). A aquesta superfície la denotem per C.

Observació 5.15. La cinta de Möbius és no orientable i observem que $\partial C \approx S^1$. Anomenem també cinta de Möbius a tota superfície difeomorfa a C.

Observació 5.16. El pla projectiu P s'obté unint D^2 i C al llarg de les seves vores.

Sigui M una superfície sense vora qualsevol, aleshores obtenim:

$$\text{M \# P} \approx (M \setminus \text{Int D}) \cup_f C$$

on $D \subset M$ és un disc i $f : \partial C \longrightarrow \partial D$ és un difeomorfisme. Aquest resultat es deriva de l'Observació 5.16.

Definició 5.17. Anomenem crosscap a la imatge de C en M # P.

Observació 5.18. Una superfície no orientable de gènere $p \geq 1$ també es pot interpretar com una esfera a la que s'han adjuntat p crosscaps. Això es deu a que, tal i com hem explicat a l'Observació 5.16, P s'obté unint D^2 i C al llarg de les seves vores i això és equivalent a $(S^2 \setminus \text{Int D}) \cup_f C$ per a $D \subset S^2$ un disc i f: $\partial C \longrightarrow \partial D$ un difeomorfisme.

Observació 5.19. La característica d'Euler d'una superfície no orientable de gènere p és 2-p.

Definició 5.20. Podem obtenir models de superfícies amb vora per mitjà de l'extracció de l'interior de $k > 0$ discos disjunts d'una superfície orientable o no orientable de gènere g. A la varietat obtinguda se l'anomena $\partial-$superfície de gènere g i k components a la vora.

Observació 5.21. Per isotopia de discos, tot parell de $\partial-$superfícies que s'han obtingut extraient l'interior de $k > 0$ discos disjunts d'una varietat M són difeomorfes.

Definició 5.22. Denotem per superfície model a una superfície o $\partial-$ superfície de gènere g orientable o no orientable.

Amb tots els conceptes treballats fins ara, finalitzem el treball presentant el resultat en què es basa la classificació diferenciable de superfícies compactes:
Tota superfície compacta i connexa és difeomorfa a un únic tipus de superfície model.

6 Conclusions

Hem començat el treball construint els coneixements necessaris per a demostrar el Teorema de Morse-Sard. S'han vist algunes de les implicacions d'aquest, com per exemple que, per a $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció de classe C^1, un conjunt dens de rectes horitzontals seran transversals a la gràfica de f.
El Teorema de Morse-Sard és important per als fonaments de la transversalitat. Per exemple, d'aquest teorema se'n deriva el Teorema de Transversalitat que afirma que:
Siguin M, N varietats diferenciables i $A \subset N$ una subvarietat. Sigui r tal que $1 \leq r \leq \infty$, aleshores el conjunt de funcions de $C^r(M, N)$ que són transversals a A en M és dens en $C^r(M, N)$.
La transversalitat es torna a mencionar més endavant, quan tractem en la següent secció el concepte de punt crític no degenerat i donem diferents definicions equivalents. Veiem que x és un punt crític no degenerat de $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ si Df és transversal a Z^* en x. Tenim, doncs, $Df : M \longrightarrow T^*M$ una funció que serà transversal a $Z^* \subset T^*M$ en $x \in M$ si aquest és punt crític no degenerat i podem observar les connexions que aquest fet manté amb els resultats derivats del Teorema de Morse-Sard en l'àmbit de la transversalitat.

Al llarg de la memòria també tractem la teoria de Morse, definim les funcions de Morse, demostrem el lema de Morse i, endinsant-nos en les equacions diferencials, provem el Teorema de l'interval regular. Tots aquests resultats i conceptes són clau per a la classificació de superfícies. Això es degut a que, tots aquests coneixements són necessaris en la demostració d'un teorema que afirma que: per a tota funció de Morse $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ amb 3 punts crítics de tipus 0,0,1 i M una superfície compacta i connexa, aleshores $M \approx D^2$. Tenir una caracterització del disc és de gran utilitat.

En aquesta memòria hem anat presentant part de la teoria en la que es basa la classificació de superfícies. Hem parlat d'isotopies, de l'estensió d'aquestes i de casos concrets d'isotopies de discos, resultats que després ens han estat útils per a determinar difeomorfismes entre superfícies que hem obtingut adjuntant nanses a d'altres.
Així, s'ha finalitzat la memòria presentant les superfícies model i enunciant el resultat en el que es basa la classificació diferenciable de superfícies compactes:
Tota superfície compacta i connexa és difeomorfa a un únic tipus de superfície model.

Aquest treball consta de gran part de les bases i fonaments que sostenen la classifiació de superfícies tot i no estar-hi present la demostració del teorema que caracteritza el disc (el teorema estableix sota quines condicions per a una funció de Morse en una superfície M tenim $M \approx D^2$) ni les proves dels últims resultats que ens permeten arribar a la classificació final.

Alguns dels coneixements bàsics que hem fet servir han estat treballats en l'assignatura de Topologia i geometria global de superfícies, tot i que també es mencionen equacions diferencials i conceptes de càlcul diferencial. Altres coneixements els hem anat adquirint durant el desenvolupament del projecte.

Referències

[1] ETAYO, Fernando. *Topología Diferencial*. Universitat Autònoma de Barcelona. (Consulta: 4 d'abril de 2022).
https://mat.uab.cat/ret/sites/default/files/material/apuntes_libros/FEtayo.pdf

[2] FISCHER, Arthur E. *Riemannian Submersions and the Regular Interval Theorem of Morse Theory*. University of California, Santa Cruz. 1996. (Consulta: 5 de juny de 2022).
https://www.researchgate.net/publication/227145058_1996_Riemannian_Submersions_and_the_Regular_Interval_Theorem_of_Morse_Theory

[3] HIRSCH, Morris W. *Differential topology*. Virginia: Springer-Verlag New York Inc., 1997. ISBN 3-540-90148-5.

[4] JIMÉNEZ, Daniel. *Espacios Compactos*. Universidad de Valparaíso. (Consulta: 19 de maig de 2022).
https://matematica.uv.cl/djimenez/archivo/texto322-5.pdf

[5] LAFUENTE, Javier. *Variedades dieferenciables*. Universidad Complutense de Madrid, 2014. (Consulta: 27 de maig de 2022)
http://www.mat.ucm.es/~jlafuent/own/Manuales/Variedades/vd.pdf

[6] LITEANU, Alana. *Baire Category Theorem*. 2014. (Consulta: 27 de febrer de 2022).
https://sites.math.washington.edu/~morrow/336_14/papers/alana.pdf

[7] SAMBARINO, Andrés. "Secciones de fibrados y topología de la fibra". Dins: Coloquio Oleis. 15 d'abril de 2010. (Consulta: 25 de maig de 2022).
https://coloquiooleis.wordpress.com/2010/04/15/secciones-de-fibrados-y-topologia-de-la-fibra/

[8] SOKAL, Alan. The Baire Category Theorem and its Consequences. Dins: MATHS3103: Functional Analysis, Spring 2013. University College London. (Consulta: 27 de febrer de 2022).
https://www.ucl.ac.uk/~ucahad0/3103_handout_7.pdf

[9] WENDL, Chris. Bundles. Dins: Lecture Notes on Bundles and Connections. 2008, capítol 2. (Consulta: 3 d'abril de 2022).
https://www.mathematik.hu-berlin.de/~wendl/pub/connections_chapter2_2.pdf