



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

COMPLEMENT DE SCHUR I IDENTITATS DETERMINANTALS

Autor: Laia Sosa i Solé

Director: Dra. M. Eulàlia Montoro López

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 13 de juny de 2022

Abstract

In the first major block of this paper, the aim is to establish a clear definition of the Schur complement of a non-singular main submatrix of a block matrix, as well as some immediate basic properties that allow us to see their applications in various fields of mathematics, following the scheme proposed in [10].

Subsequently, it is intended to give a formal definition of a determinantal identity after having considered some relevant ones, seen in [4], which derive from the properties already analyzed of the Schur complement, and to then study determinantal identities extension methods with which we shall, given a starting determinant identity, get new ones. Here we highlight Muir's Law of Extensible Minors and the Law of Cayley of the Complementarities. Finally, we will see how virtually all determinantal identities and extension laws are equivalent to each other, as shown in [6], [7] and [5].

Resum

En el primer gran bloc d'aquest treball, l'objectiu és establir una definició clara del complement de Schur d'una submatriu principal no singular d'una matriu per blocs, així com algunes propietats bàsiques immediates que ens permetin veure les seves aplicacions en camps diversos de les matemàtiques, seguint l'esquema proposat a [10].

Posteriorment, es pretén donar una definició formal d'identitat determinantal, després d'haver-ne considerat algunes rellevants, vistes a [4], que es deriven de les propietats ja analitzades del complement de Schur, per, a continuació, estudiar mètodes d'extensió d'identitats determinants amb els quals, donada una identitat determinantal de partida, aconseguir-ne de noves. Aquí destaquem la Llei de Muir dels menors extensibles i la Llei de Cayley dels complementaris. Finalment, veurem com pràcticament totes les identitats determinants i lleis d'extensió són equivalents entre si com es posa de manifest a [6], [7] i [5].

Agraïments

Vull agrair en especial a la meva tutora del treball Eulàlia Montoro pel seu constant acompanyament, dedicació i ajut. T'estic molt agraïda per haver-me proposat aquest tema d'estudi i haver-me assistit en tot el seu desenvolupament.

En segon lloc, vull agrair a la meva família per recolzar-me en aquesta etapa i haver cregut sempre en mi. En particular a la meva mare per haver-me inculcat el seu amor cap a les matemàtiques.

Per últim vull esmentar a les meves amigues i companyes de grau perquè sense elles aquest camí hagués estat molt més complicat.

Índex

0.1	Introducció	1
0.2	Notació	2
1	El complement de Schur	5
1.1	Definició i propietats bàsiques	5
1.2	La propietat del quocient pel complement de Schur	10
2	Manifestacions del complement de Schur	13
2.1	La fórmula d'inèrcia	13
2.1.1	Algorisme de càlcul de la inèrcia	16
2.2	Utilitat en test de positivitat	19
2.3	La restricció d'una forma quadràtica	21
2.4	Connexió amb l'estadística	22
2.5	Aproximants de Padé	25
2.6	Fraccions contínues	28
3	Algunes fórmules determinantal derivades del complement de Schur	31
3.1	Cauchy	31
3.2	Sylvester	32
3.3	Kronecker	34
3.4	Jacobi	35
3.5	Binet, Cauchy i Laplace	37
4	Lleis d'extensió d'identitats determinantal	40
4.1	La llei de Muir dels menors extensibles	40
4.2	La llei de Cayley dels complementaris	44
4.3	Equivalència de lleis d'extensió d'identitats determinantal	46
5	Conclusions	49

0.1 Introducció

Actualment, entenem per complement de Schur qualsevol matriu de la forma $H - GE^{-1}F$, per a matrius E , F , G i H [8]. En podem trobar manifestacions implícites en documents escrits per personatges rellevants del món de les matemàtiques, com poden ser Pierre Simon Laplace o James Joseph Sylvester, a principis del segle XIX. Tanmateix, no va ser fins a l'any 1968 que Emilie Haynsworth va donar nom i una notació al *complement de Schur d'una submatriu quadrada no singular d'una matriu per blocs*, en honor del matemàtic Issai Schur [10].

Aquest concepte va aparèixer per primera vegada en els dos articles *On the Schur complement* i *Determination of the inertia of a partitioned Hermitian matrix* publicats per la mateixa autora el 1968 a les revistes “Basel Mathematical Notes” i “Linear Algebra and its Applications”, respectivament, i ha guanyat acceptació per part de la comunitat matemàtica en els últims anys.

Haynsworth va escollir fer referència a Schur quan va introduir el concepte que tractem arran del lema que apareix a *Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind*, escrit pel matemàtic i publicat l'any 1917 al “Journal für die reine und angewandte Mathematik”, en què s'introdueix la identitat de Schur, resultat que es deriva de forma immediata de la definició del complement de Schur i que posteriorment enunciaré, de forma auxiliar en la demostració del resultat conegut com a *Lema de Schur per determinants* [10].

El Lema de Schur per determinants afirma que donada una matriu

$$A = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix},$$

on E , F , G i H són matrius quadrades de mida $n \times n$ tals que $EG = GE$, aleshores es compleix que el determinant de A és igual al determinant de la matriu $EH - GF$.

Per a demostrar l'anterior, Schur enuncia una relació entre el determinant de la matriu $H - GE^{-1}F$ i els determinants de E i A .

A partir d'aquest moment, les matrius que es poden expressar en la forma esmentada reben la denominació de complement de Schur. S'ha pogut constatar que aquestes juguen un paper important en l'anàlisi numèrica i de matrius [9], l'estadística, i diverses altres àrees de les matemàtiques i les seves aplicacions [10].

Procedim doncs a estudiar la definició del complement de Schur i les propietats se'n deriven per, seguidament, revisar les seves aplicacions en els camps esmentats, que ens permetran obtenir importants identitats determinantal.

Finalment, en un estudi més profund d'aquestes, enunciaré les lleis més rellevants referents a l'extensió d'identitats determinantal i establiré una equivalència entre aquests i d'altres resultats.

0.2 Notació

Abans de començar amb els resultats relatius als temes centrals, el complement de Schur i l'extensió d'identitats determinantal, establim algunes notacions i terminologia que utilitzarem al llarg del treball.

Sigui $\mathbb{F}$ un cos qualsevol.

- $\mathbb{F}^{n \times m}$ denota el conjunt de matrius de n files i m columnes amb coeficients a $\mathbb{F}$.
- Escriurem $A = [a_{ij}]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ per denotar la matriu de mida $n \times m$ amb elements a_{ij} . És a dir

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times m}.$$

- $\det A$ denota el determinant d'una matriu quadrada $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$.
- Donada $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$, es defineix la matriu $B = A[i_1, \dots, i_r | j_1, \dots, j_s] \in \mathbb{F}^{r \times s}$ amb $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_r \leq n$ i $1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_s \leq m$ com la matriu formada per les files $i_1, \dots, i_r$ d' A i les columnes $j_1, \dots, j_s$ d' A .
- $I_k \in \mathbb{F}^{k \times k}$ denota la matriu identitat de mida $k \times k$.
- Donada una matriu $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$, A^T denota la matriu A transposada.
- Donada $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $\text{Adj} A$ denota la matriu d'adjunts d' A ; és a dir la matriu de cofactors d' A transposada:

$$\text{Adj} A = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} & \cdots & (-1)^{1+m} \det \begin{bmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,m-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,m-1} \end{bmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{1+n} \det \begin{bmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,m} \end{bmatrix} & \cdots & (-1)^{n+m} \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,m-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,m-1} \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T$$

- Donada una matriu $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$, $\text{Rang} A$ denota el rang d' A .
- Donada una matriu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times m}$$

El determinant fronterer d' A serà el determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & a_{1,m+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & a_{2,m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & a_{n,m+1} \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,m} & a_{n+1,m+1} \end{vmatrix},$$

és a dir, el determinant d' A afegint una fila i una columna.

- Donada una permutació σ , $\text{sign}\sigma$ denota el signe de σ . És a dir, $\text{sign}\sigma = -1$ si el nombre de trasposicions en què descompon σ és senar, i $\text{sign}\sigma = 1$ en cas contrari.
- Donada una matriu quadrada $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $\text{Spec}(A)$ denota l'espectre d' A , és a dir, el conjunt dels seus valors propis.
- Per una llista d'índexs $(1, \dots, n)$ i una subllista α de $(1, \dots, n)$, α^c denota la subllista de $(1, \dots, n)$

$$\alpha^c = (1, \dots, n) \setminus \alpha.$$

- Donades dues llistes d'índexs $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ i $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s)$, $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{N}$ per $i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, s$; la llista (α, β) denota la llista ordenada d'elements d' $\alpha \cup \beta$.
- Donada una llista d'índexs $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$ per $i = 1, \dots, n$; denotem el cardinal d' α per $\#\alpha$, i té per valor el nombre d'elements de la llista α , és a dir, $\#\alpha = n$.
- Donada una llista d'índexs $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$ per $i = 1, \dots, n$; $\alpha^{(m+)}$ denota la llista $\alpha^{(m+)} = (\alpha_1 + m, \dots, \alpha_n + m)$, amb $m \in \mathbb{N}$.
- Donades dues llistes d'índexs $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ i $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s)$, $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{N}$ per $i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, s$; vectors columna $z_1, \dots, z_{s-r} \in \mathbb{F}^{m \times 1}$ i una matriu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $r \leq s \leq n$.

$A \begin{pmatrix} z_1, \dots, z_{s-r} \\ \alpha, \beta \end{pmatrix}$ denota la matriu

$$\begin{bmatrix} z_{1,\beta_1} & \cdots & z_{1,\beta_s} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{s-r,\beta_1} & \cdots & z_{s-r,\beta_s} \\ a_{\alpha_1,\beta_1} & \cdots & a_{\alpha_1,\beta_s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\alpha_r,\beta_1} & \cdots & a_{\alpha_r,\beta_s} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{s \times r}.$$

- Al llarg de tot el treball les lletres k, l, m, n, r, s i t denoten valors enters que marquen la mida o els índexos de fila o columna d'una matriu.

Capítol 1

El complement de Schur

1.1 Definició i propietats bàsiques

Issai Schur (1875 - 1941) va ser un matemàtic alemany especialitzat en teoria de grups, combinatòria i física teòrica. Schur és considerat un pioner en la teoria de representació. Algunes de les seves contribucions a l'àlgebra lineal i la teoria de matrius són versions d'estimadors per operadors matricials i integrals i per formes bilineals, el producte de matrius de Schur (o Hadamard), els multiplicadors de Schur, la convexitat de Schur, algunes desigualtats entre valors propis i valors singulars d'un operador lineal i la representació triangular de matrius [10].

D'entre els seus resultats més rellevants, destaca el *Lema de Schur per determinants*. La demostració del lema utilitza el complement de Schur que definirem en aquesta secció. Es poden trobar l'enunciat i la seva demostració completa a [10].

Comencem amb dues definicions preliminars que ens ajudaran a establir el concepte de complement de Schur.

A partir d'aquest moment, si no s'especifica el contrari, considerarem $\mathbb{F}$ un cos de característica 0. En general, podem suposar $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Definició 1.1.1. Donada una matriu $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, una submatriu $A[I|J]$ d' A és principal quan el conjunt d'índexs de files, I , i el conjunt d'índexs de columnes, J , és el mateix; $I = J$.

Una submatriu principal d' A és superior si $I = J = (1, \dots, k)$ per algun $k \leq n$. Una submatriu principal d' A és inferior si $I = J = (k, \dots, n)$ per algun $k \leq n$.

Exemple 1.1.2. Per $A \in \mathbb{F}^{6 \times 6}$:

$A[2, 3|2, 3]$ és una submatriu principal d' A ,

$A[1, 2, 3|1, 2, 3]$ és una submatriu principal superior d' A i

$A[2, 3, 4, 5, 6|2, 3, 4, 5, 6]$ és una submatriu principal inferior d' A .

Definició 1.1.3. Donada $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ l'eliminació gaussiana és un algoritme amb el qual, a través d'operacions elementals per files; és a dir:

1. Permutar files
2. Afegir un múltiple d'una fila a una altra
3. Multiplicar una fila per un factor diferent de 0,

es transforma A en una matriu triangular superior

$$A^{(n+1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(n+1)} & a_{12}^{(n+1)} & a_{13}^{(n+1)} & \cdots & a_{1n}^{(n+1)} \\ 0 & a_{22}^{(n+1)} & a_{23}^{(n+1)} & \cdots & a_{2n}^{(n+1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(n+1)} & \cdots & a_{3n}^{(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n+1)} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}$$

en n passes.

En el pas k -èsim de l'eliminació gaussiana, si $a_{kk}^{(k)} \neq 0$, tenim $A^{(k+1)} = [a_{ij}^{(k+1)}]$ on

$$a_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k)} & \text{si } i \leq k \\ 0 & \text{si } i > k, j \leq k \\ a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)} & \text{si } i > k, j > k \end{cases}$$

per $k = 2, \dots, n$.

També podem representar el pas k -èsim de l'eliminació gaussiana com el producte matricial $A^{(k+1)} = M^{(k)} A^{(k)}$ on

$$M^{(k)} = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ M' & I_{n-k} \end{bmatrix}$$

i

$$M' = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\frac{a_{1k}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{a_{2k}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{a_{n-k,k}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{(n-k) \times k}.$$

Observació 1.1.4. Per $k = 2, \dots, n+1$, $\det A = \det A^{(k)}$.

Observació 1.1.5. En el cas de les matrius per blocs, l'eliminació gaussiana s'aplica d'igual manera substituint els elements de la matriu pels blocs corresponents i utilitzant el producte per la matriu inversa en el lloc de les divisions.

Un cas molt senzill on apareix el complement de Schur és el següent:

Considerem un sistema d'equacions lineals $Az = 0$, on A és la matriu per blocs

$$A = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n},$$

amb $E = A[1, \dots, k | 1, \dots, k] \in \mathbb{F}^{k \times k}$ submatriu principal superior d' A invertible, $F \in \mathbb{F}^{k \times (n-k)}$, $G \in \mathbb{F}^{(n-k) \times k}$, $H \in \mathbb{F}^{(n-k) \times (n-k)}$ i $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times 1}$. El sistema pot ser reescrit com

$$\begin{cases} Ex + Fy = 0 \\ Gx + Hy = 0 \end{cases}$$

i si apliquem un pas d'eliminació gaussiana,

$$\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ -GE^{-1} & I_{n-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ 0 & H' \end{bmatrix}, \quad (1.1.1)$$

on $H' = -GE^{-1}F + I_{n-k}H$, aconseguim l'expressió

$$H'y = 0$$

a partir de

$$Az = 0.$$

Exemple 1.1.6. Sigui $A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ \hline 3 & 4 & 5 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Prenent $k = 2$, tenim $E = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \in$

$\mathbb{R}^{2 \times 2}$, $F = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$, $G = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ i $H = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ i volem resoldre el sistema lineal

$$Az = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aquest pot ser escrit com

$$\begin{cases} Ex + Fy = 0 \\ Gx + Hy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} [y] = 0 \\ \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} [y] = 0 \end{cases}.$$

Si apliquem un pas d'eliminació gaussiana a la matriu A

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{11}{7} & -\frac{5}{7} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{7} \end{bmatrix},$$

podem reescriure el sistema:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} [y] = 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{8}{7} \end{bmatrix} [y] = 0 \end{cases}.$$

De manera que $H' [y] = [0]$ i trobem la solució final resolent

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}.$$

Definició 1.1.7. ([4]) Donada una matriu $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ i sigui $E \in \mathbb{F}^{k \times k}$ una submatriu principal superior d' A no singular, el complement de Schur A/E de E en A és la matriu:

$$A/E := H' = H - GE^{-1}F \in \mathbb{F}^{(n-k) \times (n-k)}.$$

De la mateixa manera, considerem un sistema no homogeni

$$\begin{cases} Ex + Fy = u \\ Gx + Hy = v. \end{cases} \quad (1.1.2)$$

Com que hem suposat que E és invertible, podem resoldre el sistema (1.1.2) per x i v en funció d' u i y . Fent-ho, obtenim

$$x = E^{-1}u - E^{-1}Fy,$$

$$v = GE^{-1}u + (H - GE^{-1}F)y.$$

I la matriu coeficient de y en la segona igualtat torna a ser A/E .

Observació 1.1.8. ([4]) Notem que l'eliminació gaussiana (1.1.1) només ha afegit combinacions lineals de les primeres k files d' A a la resta de files. Així doncs, se segueix que el determinant de tota submatriu de mida $(k+s) \times (k+s)$ d' A que contingui E com a submatriu principal de mida $k \times k$ no canvia després d'aplicar (1.1.1).

Observació 1.1.9. A partir d'aquest moment, donada una matriu

$$A = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}$$

considerarem, exceptuant algun cas concret, el complement de Schur d'una submatriu principal superior E en A , però cal remarcar que el complement de Schur es pot calcular per qualsevol submatriu principal d' A . De fet, seguint la notació per blocs anterior, podem definir els complements de Schur

$$A/F = G - HF^{-1}E \in \mathbb{F}^{(n-k) \times (n-k)},$$

$$A/G = F - EG^{-1}H \in \mathbb{F}^{(n-k) \times (n-k)}$$

i

$$A/H = E - FH^{-1}G \in \mathbb{F}^{(n-k) \times (n-k)}$$

a través de les eliminacions

$$\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ -HF^{-1} & I_{n-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} I_k & -EG^{-1} \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$$

i

$$\begin{bmatrix} I_k & -FH^{-1} \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix},$$

quan F , G i H són submatrius principals de mida $k \times k$ d' A , respectivament [3].

Observació 1.1.10. ([10]) Donada $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ si α és una subllista d'índexos de $(1, \dots, n)$ ordenada de forma creixent, aleshores $A[\alpha|\alpha]$ és una submatriu principal d' A . L'expressió general del complement de Schur d' $A[\alpha|\alpha]$ en A és

$$A/A[\alpha|\alpha] = A[\alpha^c|\alpha^c] - A[\alpha^c|\alpha]A^{-1}[\alpha|\alpha]A[\alpha|\alpha^c].$$

Reprement la matriu inicial A per blocs, amb $E = A[1, \dots, k|1, \dots, k]$, passem a veure un dels resultats més rellevants referents al complement de Schur.

Teorema 1.1.11 ([4]) (Identitat de Schur).

$$\det A = \det E \cdot \det A/E.$$

Demostració. A partir de (1.1.1) i de l'Observació 1.1.8, deduïm que

$$\det A = \det E \cdot \det H' = \det E \cdot \det A/E. \quad \blacksquare$$

Corol·lari 1.1.12. ([4]) El complement de Schur A/E és invertible si, i només si, A ho és.

Demostració. Utilitzant la Identitat de Schur,

$$\det A/E = \frac{\det A}{\det E}.$$

Hem suposat E invertible, per tant, A/E serà invertible si, i només si, A és invertible. $\blacksquare$

Emprant els resultats anteriors podem donar una expressió general dels elements de $H' = A/E$.

Proposició 1.1.13. ([4]) Considerem el complement de Schur de E en A

$$H' = A/E = \begin{bmatrix} h'_{k+1,k+1} & \cdots & h'_{k+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h'_{n,k+1} & \cdots & h'_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{(n-k) \times (n-k)},$$

llavors

$$h'_{ij} = \frac{\det A[1, \dots, k, i|1, \dots, k, j]}{\det A[1, \dots, k|1, \dots, k]} = \frac{\det A[1, \dots, k, i|1, \dots, k, j]}{\det E},$$

per $k+1 \leq i, j \leq n$.

Demostració. Donats $k+1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n$ i $k+1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq n$, considerem

$$B = H'[i_1, \dots, i_s|j_1, \dots, j_s],$$

llavors, per l'Observació 1.1.8, tenim que:

$$\det A[1, \dots, k, i_1, \dots, i_s|1, \dots, k, j_1, \dots, j_s] = \det \begin{bmatrix} E & * \\ 0 & B \end{bmatrix} = (\det E)(\det B).$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \det B &= \det H'[i_1, \dots, i_s|j_1, \dots, j_s] = \frac{\det A[1, \dots, k, i_1, \dots, i_s|1, \dots, k, j_1, \dots, j_s]}{\det E} \\ &= \frac{\det A[1, \dots, k, i_1, \dots, i_s|1, \dots, k, j_1, \dots, j_s]}{\det A[1, \dots, k|1, \dots, k]}, \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

i aleshores

$$h'_{ij} = \frac{\det A[1, \dots, k, i|1, \dots, k, j]}{\det A[1, \dots, k|1, \dots, k]} = \frac{\det A[1, \dots, k, i|1, \dots, k, j]}{\det E}, \quad (1.1.4)$$

per $k+1 \leq i, j \leq n$. $\blacksquare$

1.2 La propietat del quocient pel complement de Schur

L'any 1969 Jonathan Crabtree i Haynsworth, ja esmentada, van enunciar i demostrar una fórmula fraccionària pel complement de Schur el 1969 a l'article *An identity for the Schur complement of a matrix* de la revista científica "Proceedings of the American Mathematical Society". Posteriorment, Alexander Ostrowski en va donar una prova alternativa a *A new proof of Haynsworth's quotient formula for Schur complements* publicat a "Linear Algebra and its Applications", l'any 1971.

Teorema 1.2.1 ([4]) (Propietat del quocient). *Sigui*

$$A = \left[\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array} \right] = \begin{bmatrix} K & L & F_1 \\ M & N & F_2 \\ G_1 & G_2 & H \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n},$$

on $E \in \mathbb{F}^{k \times k}$, $K \in \mathbb{F}^{t \times t}$ i $N \in \mathbb{F}^{(k-t) \times (k-t)}$. Aleshores es compleix que

$$A/E = (A/K)/(E/K).$$

Demostració. *Suposem que E i K són invertibles. Reduïm M a la matriu zero mitjançant eliminació gaussiana obtenint*

$$\begin{bmatrix} K & L & F_1 \\ 0 & E/K & F_2^* \\ G_1 & G_2 & H \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}.$$

Fent ara el mateix per a la matriu G_1

$$\begin{bmatrix} K & L & F_1 \\ 0 & E/K & F_2^* \\ 0 & G_2^* & H^* \end{bmatrix}.$$

Per la unicitat del complement de Schur, tenim que

$$A/K = \begin{bmatrix} E/K & F_2^* \\ G_2^* & H^* \end{bmatrix}.$$

Si acabem l'eliminació gaussiana anterior, obtenim que

$$\begin{bmatrix} K & L & F_1 \\ 0 & E/K & F_2^* \\ 0 & 0 & H' \end{bmatrix},$$

i utilitzant, novament, la unicitat del complement de Schur i que $H' = A/E$, tenim a partir de l'anterior, $A/E = (A/K)/(E/K)$. ■

Exemple 1.2.2. Sigui $A = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 7 & 7 \\ \hline -5 & -1 & 3 \end{array} \right]$ ($k = 2$), amb $E = A[1, 2|1, 2] = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$,

$F = A[1, 2|3] = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}$, $G = A[3|1, 2] = \begin{bmatrix} -5 & -1 \end{bmatrix}$ i $H = A[3|3] = [3]$. Llavors

$$A/E = 3 - \begin{bmatrix} -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix} = 3 - \begin{bmatrix} -16 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix} = 3 - 79 = -76.$$

Alternativament, calculem A/K i E/K i apliquem la propietat del quocient.

$$A/K = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} [2]^{-1} [4 \quad -1] = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3/2 \\ -5/2 \end{bmatrix} [4 \quad -1] =$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 17 \\ 9 & -2 \end{bmatrix}$$

i

$$E/K = 1.$$

Així, $A/E = (A/K)/(E/K)$, és a dir,

$$A/E = \frac{1}{2} - 9 \cdot 1^{-1} \cdot \frac{17}{2} = \frac{1 - 153}{2} = \frac{-152}{2} = -76,$$

com volíem veure.

Capítol 2

Manifestacions del complement de Schur

En aquest capítol revisem algunes de les aplicacions concretes que tenen el complement de Schur i les seves propietats en diferents àmbits de les matemàtiques.

2.1 La fórmula d'inèrcia

En primer lloc, veiem la seva utilitat a l'àlgebra lineal i la teoria de matrius. El complement de Schur facilita el càlcul de la inèrcia d'una matriu i permet desenvolupar-ne un algorisme de càlcul recursiu.

Definició 2.1.1. ([8]) *Sigui $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simètrica, la inèrcia d' A és la tripleta*

$$InA = [\pi(A), \nu(A), \delta(A)], \quad (2.1.1)$$

on $\pi(A)$ és la positivitats d' A , $\nu(A)$ la negativitat d' A i $\delta(A)$ la nul·litat d' A , és a dir, el nombre de valors propis positius, el nombre de valors propis negatius i és el nombre de valors propis nuls d' A , respectivament.

Els conceptes anteriors es relacionen amb el rang d' A i la signatura d' A , $\sigma(A)$, a través de les igualtats

$$RangA = \pi(A) + \nu(A), \quad \sigma(A) = \pi(A) - \nu(A).$$

Observació 2.1.2. ([8])

- Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és invertible, aleshores $InA = InA^{-1}$.
- Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ són similars, $A \sim B$; és a dir, tal que existeix una matriu invertible $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ complint $A = S^{-1}BS$, aleshores $InA = InB$.
- Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ són congruents, és a dir, tal que existeix una matriu invertible $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ complint $A = S^tBS$, aleshores $InA = InB$.

Proposició 2.1.3. ([8]) *Sigui $A = \begin{bmatrix} E & F \\ F^T & H \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertible, aleshores*

$$InA = InE + In(A/E)$$

Demostració. *Aplicant un pas d'eliminació gaussiana per blocs a A , obtenim la matriu*

$$A' = \begin{bmatrix} E & F \\ 0 & A/E \end{bmatrix}.$$

In $A = \text{In } A'$ per l'Observació 2.1.2, i, clarament, $\text{In } A = \text{In } E + \text{In } (A/E)$, ja que el conjunt de valors propis d' A' serà la unió dels conjunts de valors propis d' E i de valors propis d' A/E . ■

La fórmula d'inèrcia anterior va ser demostrada el 1968 per Haynsworth a l'article *Determination of the inertia of a partitioned Hermitian matrix* a "Linear Algebra and its Applications". A més, el mateix any, juntament amb Ostrowski a la publicació *On the inertia of some classes of partitioned matrices* també de la revista "Linear Algebra and its Applications" van demostrar una fórmula especial d'inèrcia per matrius de la forma

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F^T & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

on E és simètrica i $F \in \mathbb{R}^{k \times k}$ invertible.

Atribueixen a Carlson i Schneider la deducció la següent propietat, que apareix a l'article *Inertia theorems for matrices: the positive semidefinite case* publicat l'any 1963 al "Journal of Mathematical Analysis and Applications".

Teorema 2.1.4. ([8]) *Donada una matriu de la forma*

$$A = \begin{bmatrix} E & F \\ F^T & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

on $E \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$ és simètrica i $F \in \mathbb{R}^{k \times k}$ invertible, aleshores $\text{In } A = (k, k, 0)$.

Per a demostrar el teorema i altres resultats de les seccions que segueixen, cal definir el terme *reordenament principal* i veure alguna de les seves propietats.

Definició 2.1.5. *Donada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriu de permutació, aleshores la matriu PAP^T és un reordenament principal de A ; és a dir, la matriu que s'obté de la permutació simultània de files i columnes de A .*

Proposició 2.1.6. *Sigui $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i $A' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ un reordenament principal de A . Aleshores*

$$\det A = \det A'.$$

Demostració. *Sigui $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriu de permutació. Sigui*

$$A'' = PA.$$

Aleshores A'' és la matriu A amb m files permutades. Si ara calculem $A''P^T$, aconseguim

$$A' = A''P^T = PAP^T,$$

on A' és la matriu A'' amb m columnes permutades.

Així doncs,

$$\det A' = (-1)^m \cdot \det A'' = (-1)^m \cdot ((-1)^m \cdot \det A) = (-1)^{m+m} \cdot \det A = (-1)^{2m} \cdot \det A = \det A. \quad \blacksquare$$

Vist aquest concepte, podem passar a demostrar el teorema.

Demostració (del Teorema 2.1.4). *Utilitzarem inducció sobre k :*

- Per $k = 1$, $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix}$. Si calculem el seu polinomi característic $P_c(x)$, obtenim:

$$P_c(x) = \det \begin{bmatrix} a_1 - x & a_2 \\ a_2 & -x \end{bmatrix} = -x \cdot (a_1 - x) - a_2^2 = x^2 - xa_1 - a_2^2 =$$

$$\left(x - \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_2^2}}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4a_2^2}}{2}\right).$$

Així doncs, els valors propis d' A són

$$\lambda_1 = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4a_2^2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_2^2}}{2}$$

Notem que

$$a_1 < |a_1| = \sqrt{a_1^2} < \sqrt{a_1^2 + 4a_2^2},$$

de manera que $\lambda_1 < 0$ i $\lambda_2 > 0$. Per tant, $\text{In}A = (1, 1, 0) = (k, k, 0)$.

- Suposem certa la propietat fins a $k - 1$.

- Sigui

$$A = \begin{bmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1k} & f_{11} & \cdots & f_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{k1} & \cdots & e_{kk} & f_{k1} & \cdots & f_{kk} \\ f_{11} & \cdots & f_{k1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1k} & \cdots & f_{kk} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F^T & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

amb $F \in \mathbb{R}^{k \times k}$. Sigui $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ la submatriu principal d' A de la forma

$$B = \begin{bmatrix} e_{rr} & f_{rs} \\ f_{rs} & 0 \end{bmatrix}, \quad f_{rs} \neq 0,$$

per alguns $1 \leq r, s \leq n$

Fent algun reordenament principal podem traslladar-la a la cantonada superior d' A . Passem a calcular el complement de Schur de B en A , A/B . Pel bloc de zeros en A , quan apliquem l'eliminació gaussiana, obtenim que la matriu A/B és de la forma

$$A/B = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{B}' & 0 \end{bmatrix},$$

amb $\tilde{A}$ simètrica i $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{(k-1) \times (k-1)}$ no singular.

Per hipòtesi d'inducció, $\text{In}(A/B) = (k-1, k-1, 0)$ i $\text{In}B = (1, 1, 0)$, de manera que

$$\text{In}A = (k-1+1, k-1+1, 0) = (k, k, 0),$$

com volíem demostrar. ■

2.1.1 Algorisme de càlcul de la inèrcia

A continuació detallem un algorisme de càlcul de la inèrcia d'una matriu real simètrica utilitzant el complement de Schur i les seves propietats. Aquest ha estat extret de [8].

Notem que una matriu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simètrica compleix exactament una de les següents propietats:

1. $a_{ii} \neq 0$ per algun $i \in \{1, \dots, n\}$.

En aquest cas, podem garantir $a_{11} \neq 0$ fent algun reordenament principal si és necessari. Aleshores,

$$In(a_{11}) = \begin{cases} (1, 0, 0), & \text{si } a_{11} > 0 \\ (0, 1, 0), & \text{si } a_{11} < 0 \end{cases} \quad (2.1.2)$$

El complement de Schur de a_{11} en A està ben definit i és simètric [8].

2. $a_{ii} = 0$, per tot $i \in \{1, \dots, n\}$, $A \neq 0$.

Ara, podem garantir $a_{21} \neq 0$ fent algun canvi reordenament principal si és necessari, i, aleshores,

$$In \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} = In \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{12} & 0 \end{bmatrix} = (1, 1, 0). \quad (2.1.3)$$

El complement de Schur de $\begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}$ en A està ben definit i és simètric [8].

3. $A = 0$. Per aquest darrer cas,

$$InA = (0, 0, n).$$

L'algorisme següent es basa a aplicar successivament el mateix procediment als complements de Schur obtinguts als casos 1. i 2..

Abans de continuar, caldrà establir algunes convencions:

Sigui $\emptyset$ la matriu buida. Aleshores,

$$In\emptyset = (0, 0, 0).$$

Sigui $A^{(k)}$ el k -èsim complement de Schur calculat i sigui A_k el k -èsim bloc respecte al qual calculem el k -èsim complement de Schur. Assumim:

$$A/\emptyset = A, \quad A/A = \emptyset, \quad A^{(0)} = A, \quad A_0 = \emptyset.$$

D'altra banda, per la notació anterior, és trivial veure que

$$InA = InA_0 + InA^{(0)}.$$

L'algorisme de càlcul de la inèrcia consistirà a aplicar els passos següents a la matriu $A^{(k)} \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$, començant amb $k = 0$.

Pas 0. D'entrada, tenim

$$InA = \sum_{i=0}^k InA_i + InA^{(k)},$$

és a dir, la suma de les inèrcies dels blocs respecte als quals calculem els successius complements de Schur i del k -èsim complement de Schur.

Si la matriu $A^{(k)}$ compleix la propietat i , cal anar al *Pas* i , $i = 1, 2, 3$.

Pas 1. Podem suposar $a_{11}^{(k)} \neq 0$. Sigui

$$A_{k+1} = a_{11}^{(k)}, \quad A^{(k+1)} = A^{(k)} / A_{k+1}.$$

Podem obtenir InA_{k+1} amb l'expressió (2.1.2) i aleshores,

$$InA = \sum_{i=0}^{k+1} InA_i + InA^{(k+1)}.$$

Si $A^{(k+1)} = \emptyset$, aturem el procediment. En cas contrari, tornem al *Pas* 0 substituint k per $k + 1$.

Pas 2. Podem suposar $a_{12}^{(k)} = a_{21}^{(k)} \neq 0$. Sigui

$$A_{k+1} = \emptyset, \quad A_{k+2} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12}^{(k)} \\ a_{21}^{(k)} & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^{(k+1)} = A^{(k)} / A_{k+1} = A^{(k)}, \quad A^{(k+2)} = A^{(k+1)} / A_{k+2}.$$

Podem obtenir InA_{k+2} amb l'expressió (2.1.3) i aleshores,

$$InA = \sum_{i=0}^{k+2} InA_i + InA^{(k+2)}.$$

Si $A^{(k+2)} = \emptyset$, aturem el procediment. En cas contrari, tornem al *Pas* 0 substituint k per $k + 2$.

Pas 3. En aquest cas, $M^{(k)} = 0$. $M^{(k)} \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$, amb

$$InA^{(k)} = (0, 0, n - k)$$

i, per tant,

$$InA = \sum_{i=0}^k InA_i + (0, 0, n - k).$$

Arribats a aquest punt, ja haurem trobat la inèrcia d' A .

Exemple 2.1.7. Sigui $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Utilitzem l'algorisme anterior per a calcular la seva inèrcia. Notem que $diagA = 0$ i $A \neq 0$. Per tant, ens trobem davant el cas inicial 2..

Com que $a_{21} = a_{12} \neq 0$, no cal fer cap reordenament principal i tenim

$$A_1 = \emptyset, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^{(1)} = A, \quad A^{(2)} = A/A_2.$$

El complement de Schur de A_2 en A serà

$$A^{(1)} = A/A_1 = 0 - \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 - 2 = -2.$$

Utilitzant l'expressió (2.1.3),

$$InA_2 = (1, 1, 0)$$

i aleshores,

$$InA = \sum_{i=0}^2 InA_i + InA^{(2)} = InA_0 + InA_1 + InA_2 + InA^{(2)} = (0, 0, 0) + (0, 0, 0) + (1, 1, 0) + InA^{(2)}.$$

Com que $A^{(2)} \neq \emptyset$, tornem al *Pas 0* substituint 0 per 2. Ara, $A^{(2)} = -2$ satisfà el cas 1..

Evidentment, $a_{11}^{(2)} = -2 \neq 0$. Sigui

$$A_3 = -2, \quad A^{(3)} = A^{(2)}/A_3 = \emptyset.$$

Aplicant l'expressió (2.1.2), obtenim

$$InA_3 = (0, 1, 0),$$

ja que $a_{11} = -2 < 0$ i

$$InA = \sum_{i=0}^3 InA_i + InA^{(3)} = InA_0 + InA_1 + InA_2 + InA_3 + InA^{(3)} =$$

$$(0, 0, 0) + (0, 0, 0) + (1, 1, 0) + (0, 1, 0) + (0, 0, 0) = (1, 2, 0).$$

Com que $A^{(3)} = \emptyset$, aturem el procediment. Finalment,

$$InA = (1, 2, 0).$$

Si, alternativament, calculem el polinomi característic d' A , $P_c(x)$, obtenim:

$$P_c(x) = \det \begin{bmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{bmatrix} = -x^3 + 3x + 2 = -(x+1) \cdot (x+1) \cdot (x-2).$$

De manera que, A té un valor propi positiu i dos valors propis negatius; és a dir, la seva inèrcia és

$$InA = (1, 2, 0),$$

com volíem veure.

2.2 Utilitat en test de positivitat

Seguint amb la teoria de matrius, el complement de Schur, juntament amb la propietat del quocient (Teorema 1.2.1), pot ser utilitzat per a determinar si els menors principals superiors d'una matriu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ són tots no nuls i d'un signe concret, per exemple, tots positius. L'algorisme següent ha estat extret de [8].

Suposem $a_{11} > 0$ i escrivim

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

definim

$$A^{(1)} = A/a_{11} = [a_{ij}^{(1)}] \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)},$$

el complement de Schur de a_{11} en A , on

$$a_{11}^{(1)} = a_{22} - \frac{a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11}},$$

i

$$a_{11}^{(1)} = \det(a_{11}^{(1)}) = \frac{\det A[1, 2|1, 2]}{\det A[1|1]}.$$

En general, si el procés no s'interromp pel descobriment d'una matriu principal superior de valor nul, després de $k < n$ passes,

$$a_{11}^{(k)} = \det(a_{11}^{(k)}) = \frac{\det A^{(k-1)}[1, \dots, k+1|1, \dots, k+1]}{\det A^{(k-1)}[1, \dots, k|1, \dots, k]}.$$

En cadascuna de les passes anteriors, els elements de la matriu $A^{(k)}$, complement de Schur de $a_{11}^{(k-1)}$ en $A^{(k-1)}$, es poden obtenir a partir de la fórmula

$$a_{ij}^{(k)} = a_{i+1, j+1}^{(k-1)} - \frac{a_{i+1, 1}^{(k-1)} \cdot a_{1, j+1}^{(k-1)}}{a_{1, 1}^{(k-1)}}.$$

Definició 2.2.1. Una matriu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simètrica és definida positiva si, i només si, els seus menors principals superiors són tots positius.

El procediment exposat anteriorment és útil per determinar si una matriu és definida positiva; ho serà si cada $a_{11}^{(k)} > 0$, per $k = 1, \dots, n-1$.

Exemple 2.2.2. Sigui $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Apliquem el procediment que acabem de descriure:

$$a_{11} = 3 > 0 \quad \text{i} \quad A^{(1)} = \begin{bmatrix} 6 - \frac{-2 \cdot 2}{3} & 4 - \frac{2 \cdot 1}{3} \\ 1 - \frac{1 \cdot (-2)}{3} & 2 - \frac{1 \cdot 1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{22}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$a_{11}^{(1)} = \frac{22}{3} > 0 \quad \text{i} \quad A^{(2)} = \frac{5}{3} - \frac{\frac{10}{3} \cdot \frac{5}{3}}{\frac{22}{3}} = \frac{10}{11}$$

$$a_{11}^{(2)} = \frac{10}{11} > 0.$$

Com que $a_{11}^{(k)} > 0$, per $k = 1, 2, 3$, A és definida positiva.

Si ho comprovem amb un altre mètode, mirant el signe del determinant de cada submatriu principal superior d' A , per exemple, obtenim el mateix resultat. Vegem-ho:

$$\det(3) = 3 > 0,$$

$$\det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = 22 > 0,$$

$$\det \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 20 > 0,$$

A és definida positiva, com volíem veure.

Aquest mètode també es pot utilitzar per veure si una matriu quadrada (no necessàriament simètrica) compleix la propietat de Minkowski.

Definició 2.2.3. Una matriu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ compleix la propietat de Minkowski si tots els seus elements no diagonals són no positius i A és definida positiva.

És fàcil comprovar que els elements no diagonals siguin negatius o nuls, i podem evitar comprovar la positivitat de cada menor principal comprovant-la només pels menors principals superiors, és a dir, només cal confirmar que la matriu és definida positiva. L'anterior va ser demostrat l'any 1962 a l'article *On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors* del "Czechoslovak Mathematical Journal" pels autors Fiedler (1926 - 2015) i Pták (1925 - 1999), dos matemàtics txecs especialitzats en àlgebra i anàlisi funcional, respectivament. En aquest últim pas, apliquem la tècnica anterior per a verificar la positivitat de la matriu.

Exemple 2.2.4. Sigui $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. És clar que els elements no diagonals d' A són no positius. Comprovem que la matriu és definida positiva amb l'algorisme anterior:

$$a_{11} = 2 > 0 \quad \text{i} \quad A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 - \frac{-1 \cdot (-1)}{2} & -1 - \frac{-1 \cdot (-1)}{2} \\ -1 - \frac{-1 \cdot (-1)}{2} & 3 - \frac{-1 \cdot (-1)}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix},$$

$$a_{11}^{(1)} = \frac{3}{2} > 0 \quad \text{i} \quad A^{(2)} = \frac{5}{2} - \frac{-\frac{3}{2} \cdot (-\frac{3}{2})}{\frac{3}{2}} = 1,$$

$$a_{11}^{(2)} = 1 > 0.$$

Per tant, A és definida positiva i tots els elements no diagonals són negatius: compleix la propietat de Minkowski.

2.3 La restricció d'una forma quadràtica

Una interpretació alternativa del complement de Schur és com a matriu d'una forma quadràtica restringida al nucli d'una matriu.

Teorema 2.3.1. *Donada la forma quadràtica $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en n variables*

$$Q(z) = z^T A z = z^T \begin{bmatrix} E & F \\ F^T & H \end{bmatrix} z$$

on $z \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $E \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $F \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$ i $\det E \neq 0$, si Q està restringida a

$$L := \text{Ker}[E, F] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid Ex + Fy = 0\},$$

aleshores la matriu de $Q_L = Q|_L$, Q restringida al subespai L , és A/E .

Demostració. *Podem escriure*

$$Q(z) = P(x, y) = x^T E x + 2x^T F y + y^T H y, \quad (2.3.1)$$

amb $x \in \mathbb{R}^{k \times 1}$ i $y \in \mathbb{R}^{(n-k) \times 1}$. Per representar Q_L , utilitzem l'expressió que defineix L i posem x en funció d' y :

$$x = -E^{-1} F y. \quad (2.3.2)$$

Combinant les expressions (2.3.1) i (2.3.2), tenim

$$Q_L(y) = y^T F^T E^{-1} E E^{-1} F y - 2y^T F^T E^{-1} F y + y^T H y = y^T (H - F^T E^{-1} F) y,$$

i la matriu simètrica de coeficients de Q_L és A/E . A més, utilitzant l'expressió (2.3.2), podem escollir

$$\begin{bmatrix} -E^{-1} F \\ I_{(n-k)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

com a base de L . ■

De manera similar al que acabem de veure, també podem associar el complement de Schur a la restricció d'una forma quadràtica a un nucli donat de forma externa.

Teorema 2.3.2. *Donada la forma quadràtica $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en n variables*

$$Q(z) = z^T A z = z^T \begin{bmatrix} E & F \\ F^T & H \end{bmatrix} z$$

on $z \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $E \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $F \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$ i $\det E \neq 0$, i una matriu $N \in \mathbb{R}^{r \times n}$ amb $\text{Rang} N = r$, si Q està restringida a

$$L := \{z \in \mathbb{R}^{1 \times n} \mid Nz = 0\}$$

aleshores la matriu de $Q_L = Q|_L$, Q restringida al subespai L , és B/G , on

$$B = \begin{bmatrix} 0 & C & D \\ C^T & E & F \\ D^T & F^T & H \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+t) \times (n+k)} \quad i \quad G = \begin{bmatrix} 0 & C \\ C^T & E \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1},$$

per matrius $C \in \mathbb{F}^{t \times k}$ i $D \in \mathbb{F}^{t \times (n-k)}$ simètriques i no singulars.

Demostració. Com que $\text{Rang} N = r$, podem suposar que les seves files r primeres files són linealment independents. Prenem $C \in \mathbb{F}^{t \times k}$ i $D \in \mathbb{F}^{t \times (n-k)}$ matrius simètriques i no singulars tals que

$$Nz = Cx + Dy = 0 \quad (2.3.3)$$

i considerem la matriu fronterera simètrica

$$B = \begin{bmatrix} 0 & C & D \\ C^T & E & F \\ D^T & F^T & H \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+k) \times (n+k)} \in \mathbb{R}^{(n+t) \times (n+t)}.$$

Com que C és no singular, també ho és

$$G = \begin{bmatrix} 0 & C \\ C^T & E \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}.$$

Per tant, G és una submatriu principal superior no singular de B i el seu complement de Schur, $B/G \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$, està ben definit. De fet, en termes de la base

$$\begin{bmatrix} -C^{-1}D \\ I_{(n-k)} \end{bmatrix},$$

per L , la forma quadràtica Q_L té matriu de coeficients B/G . Vegem-ho.

Podem expressar Q com $Q(z) = P(x, y) = x^T E x + 2x^T F y + y^T H y$. I ara, l'equació (2.3.3) ens dona $x = -C^{-1}Dy$, que, substituïnt en l'expressió de Q , dona

$$\begin{aligned} Q_L(z) &= y^T D^T (C^{-1})^T E C^{-1} D y - 2y^T D^T (C^{-1})^T F y + y^T H y = \\ &= y^T [H - 2D^T (C^{-1})^T F + D^T (C^{-1})^T E C^{-1} D] y. \end{aligned}$$

D'altra banda,

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} (C^T)^{-1} E C^{-1} & (C^T)^{-1} \\ C^{-1} & 0 \end{bmatrix},$$

i, per definició,

$$\begin{aligned} B/G &= H - [D^T \quad F^T] \begin{bmatrix} (C^T)^{-1} E C^{-1} & (C^T)^{-1} \\ C^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^T \\ F^T \end{bmatrix} = \\ &= H - D^T (C^{-1})^T F - F^T C^{-1} D^T + D^T (C^{-1})^T E C^{-1} D. \end{aligned}$$

Per tant, la forma quadràtica associada a B/G és Q_L . ■

2.4 Connexió amb l'estadística

El complement de Schur també apareix a l'estadística en el càlcul de densitats marginals en una distribució normal multivariable.

Donada una matriu $A = \begin{bmatrix} E & F \\ F^T & H \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simètrica definida positiva, amb $n = n_1 + n_2$, $E \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $F \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ i $H \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, i un vector $\bar{z} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, aleshores la funció de densitat de la distribució normal n -variable amb vector de mitjanes $\bar{z}$ i matriu de covariància A és

$$f(z) = \left(\frac{\det A^{-1}}{(2\pi)^n} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(z-\bar{z})^T A^{-1}(z-\bar{z})}.$$

Considerem ara

$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad \text{i} \quad \bar{z} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1},$$

on $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^{n_1 \times 1}$ i $y, \bar{y} \in \mathbb{R}^{n_2 \times 1}$.

Lema 2.4.1. ([8]) *La distribució de x condicionada a y ,*

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f(y)},$$

segueix una distribució normal multivariable de dimensió n_1 amb vector de mitjanes

$$\bar{x} + FH^{-1}(y - \bar{y})$$

i matriu de covariàncies

$$A/H = H - F^T E^{-1} F \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}.$$

En aquest punt ja ha aparegut el complement de Schur. Ara, usant les seves propietats i el lema anterior, tenim:

Proposició 2.4.2. ([8]) *La densitat de la distribució marginal de y és*

$$f(y) = \left(\frac{\det H^{-1}}{(2\pi)^{n_2}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(y - \bar{y})^T H^{-1}(y - \bar{y})}.$$

Demostració. *D'acord amb l'expressió de la distribució de x condicionada a y ,*

$$f(y) = \frac{f(x|y)}{f(x, y)}.$$

És fàcil calcular l'expressió de la matriu de covariàncies, ja que, si apliquem la identitat de Schur

$$\frac{\det A^{-1}}{\det H^{-1}} = \det(A/H)^{-1},$$

obtenim

$$\begin{aligned} f(x|y) &= \left(\frac{\det A/H^{-1}}{(2\pi)^{n_1}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(x - \bar{x} - FH^{-1}(y - \bar{y}))^T A/H^{-1}(x - \bar{x} - FH^{-1}(y - \bar{y}))} = \\ &= \left(\frac{\det H}{\det A(2\pi)^{n_1}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(x - \bar{x} - FH^{-1}(y - \bar{y}))^T A/H^{-1}(x - \bar{x} - FH^{-1}(y - \bar{y}))}. \end{aligned}$$

De manera que

$$\begin{aligned} f(y) = \frac{f(x, y)}{f(x|y)} &= \frac{\left(\frac{\det A^{-1}}{(2\pi)^n} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(z - \bar{z})^T A^{-1}(z - \bar{z})}}{\left(\frac{\det H}{\det A(2\pi)^{n_1}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(x - \bar{x} - FH^{-1}(y - \bar{y}))^T A/H^{-1}(x - \bar{x} - FH^{-1}(y - \bar{y}))}} = \\ &= \left(\frac{1}{\det H(2\pi)^{n_2}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}[(z - \bar{z})^T A^{-1}(z - \bar{z}) + (x - \bar{x} - FH^{-1}(y - \bar{y}))^T A/H^{-1}(x - \bar{x} - FH^{-1}(y - \bar{y}))]}. \end{aligned}$$

El factor no exponencial ja és el que esperàvem. Queda per veure que

$$(z - \bar{z})^T A^{-1} (z - \bar{z}) - (x - \bar{x} - FH^{-1}(y - \bar{y}))^T A / H^{-1} (x - \bar{x} - FH^{-1}(y - \bar{y})) = \\ (y - \bar{y})^T H^{-1} (y - \bar{y}),$$

o, equivalentment, posant $H' = H - F^T E^{-1} F$, i reordenant els termes

$$(z - \bar{z})^T A^{-1} (z - \bar{z}) - (y - \bar{y})^T H^{-1} (y - \bar{y}) = \\ (x - \bar{x} - FH^{-1}(y - \bar{y}))^T (H - F^T E^{-1} F)^{-1} (x - \bar{x} - FH^{-1}(y - \bar{y})). \quad (2.4.1)$$

Notem ara que la matriu A és definida positiva i, per tant, A i totes les seves submatrius principals són invertibles. Aleshores, podem aplicar la fórmula per a A^{-1} que demostrarem més endavant a la secció 3.4.:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} E^{-1} + E^{-1} F (H')^{-1} F^T E^{-1} & -E^{-1} F (H')^{-1} \\ -(H')^{-1} F^T E^{-1} & (H')^{-1} \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} (E - FH^{-1} F^T)^{-1} & -E^{-1} F (H - F^T E^{-1} F)^{-1} \\ -H^{-1} F^T (E - FH^{-1} F^T)^{-1} & (H - F^T E^{-1} F)^{-1} \end{bmatrix},$$

on la segona expressió s'obté substituint H' per $H - F^T E^{-1} F$, novament.

Si, a més, definim $u = x - \bar{x}$ i $v = y - \bar{y}$, la part esquerra de la igualtat (2.4.1) queda

$$(z - \bar{z})^T A^{-1} (z - \bar{z}) - (y - \bar{y})^T H^{-1} (y - \bar{y}) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} E & F \\ F^T & H \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - v^T H^{-1} v = \\ u^T (E - FH^{-1} F^T)^{-1} u - 2u^T E^{-1} F (H - F^T E^{-1} F)^{-1} v + v^T (H - F^T E^{-1} F)^{-1} v - v^T H^{-1} v. \quad (2.4.2)$$

A més, l'expressió (2.4.2) es pot reescriure com

$$(u - FH^{-1} v)^T (E - FH^{-1} F^T)^{-1} (u - FH^{-1} v),$$

ja que, per la simetria de S ,

$$(u - FH^{-1} v)^T (E - FH^{-1} F^T)^{-1} (u - FH^{-1} v) = \\ u^T (E - FH^{-1} F^T)^{-1} u - 2u^T (E - FH^{-1} F^T)^{-1} FH^{-1} v + v^T H^{-1} F^T (E - FH^{-1} F^T)^{-1} FH^{-1} v = \\ u^T (E - FH^{-1} F^T)^{-1} u - 2u^T H^{-1} F (E - FH^{-1} F^T)^{-1} v + v^T H^{-1} F^T (E - FH^{-1} F^T)^{-1} FH^{-1} v,$$

i els primers dos sumands d'aquesta última expressió i de (2.4.2), ja coincideixen.

Només queda veure que

$$v^T H^{-1} F^T (E - FH^{-1} F^T)^{-1} FH^{-1} v = v^T (H - F^T E^{-1} F)^{-1} v - v^T H^{-1} v,$$

o, equivalentment, que

$$H^{-1} F^T (E - FH^{-1} F^T)^{-1} FH^{-1} = (H - F^T E^{-1} F)^{-1} - H^{-1}.$$

Novament, com que S és simètrica,

$$H^{-1} F^T (E - FH^{-1} F^T)^{-1} FH^{-1} = H^{-1} F^T E^{-1} F (H - F^T E^{-1} F)^{-1}$$

i resulta fàcil veure que

$$H^{-1}F^TE^{-1}F(H - F^TE^{-1}F)^{-1} = (H - F^TE^{-1}F)^{-1} - H^{-1},$$

si tenim en compte que

$$(H - F^TE^{-1}F)(H - F^TE^{-1}F)^{-1} = I_{n_2}.$$

Per tant, l'equació 2.4.1 es compleix [8] i obtenim

$$f(y) = \left(\frac{\det H^{-1}}{(2\pi)^{n_2}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(y-\bar{y})^T H^{-1}(y-\bar{y})}. \blacksquare$$

En aquest context, també podem considerar una interpretació interessant de la propietat del quocient (Teorema 1.2.1).

Donada la distribució normal multivariant

$$f(x, y, z) = \left(\frac{\det S^{-1}}{(2\pi)^n} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}((x, y, z)^T - (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})^T) S^{-1} ((x, y, z) - (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}))}.$$

del vector $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, amb vector de mitjanes $\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ i matriu de covariàncies

$S = \begin{bmatrix} E & F & G \\ F^T & H & I \\ G^T & I^T & J \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, on $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^{n_1 \times 1}$, $y, \bar{y} \in \mathbb{R}^{n_2 \times 1}$ i $z, \bar{z} \in \mathbb{R}^{n_3 \times 1}$, amb $n_1 + n_2 + n_3 = n$; aleshores la distribució

$$f(y, z) = \left(\frac{\det S^{-1}}{(2\pi)^n} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}((y, z)^T - (\bar{y}, \bar{z})^T) S^{-1} ((y, z) - (\bar{y}, \bar{z}))}.$$

de $\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_2+n_3) \times 1}$ té vector de mitjanes $\begin{bmatrix} \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_2+n_3) \times 1}$ i matriu de covariàncies

$$T = \begin{bmatrix} H & I \\ I^T & J \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_2+n_3) \times (n_2+n_3)}.$$

Finalment, la distribució de x condicionat a y i z

$$f(x | \begin{bmatrix} y & z \end{bmatrix})$$

té matriu de covariàncies $S/T \in \mathbb{R}^{(n_2+n_3) \times (n_2+n_3)}$. La propietat del quocient

$$S/T = (S/J)/(T/J)$$

ens diu que $\left(x \mid \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \right)$ i $\left[\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid z \right) \mid (y|z) \right]$ segueixen la mateixa distribució.

2.5 Aproximants de Padé

L'aproximant de Padé és un tipus particular d'aproximació racional d'una funció. La sèrie de potències de l'aproximant coincideix amb la sèrie de potències de la funció que es vol

aproximar fins a l'ordre escollit. Quan l'aproximant de Padé existeix, és únic. La tècnica va ser desenvolupada per Henri Padé l'any 1890.

L'avantatge d'utilitzar els aproximants de Padé és que proporcionen un mètode ràpidament convergent (més que el desenvolupament de Taylor equivalent, per exemple) d'avaluar el valor d'una funció en un punt particular o de trobar una corba que esbossi el comportament d'una funció en una regió concreta.

Definició 2.5.1. *Sigui $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$ una sèrie formal de potències. La fracció racional*

$$[p/q]_f(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_px^p}{1 + b_1x + \dots + b_qx^q}$$

és un aproximant de Padé de f si $a_pb_q \neq 0$ i la seva expansió en sèrie de potències coincideix amb $f(x)$ fins al grau $p + q$, incloent-lo.

Exemple 2.5.2. Podem expressar la funció $f(x) = e^x$ com la sèrie de potències

$$e^x = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots$$

Alguns aproximants de Padé de $f(x)$ són

$$[0/0]_f(x) = 1$$

$$[0/1]_f(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$[1/1]_f(x) = \frac{2+x}{2-x}.$$

En aquest cas, el complement de Schur facilita el càlcul explícit dels aproximants de Padé d'una funció concreta.

Observació 2.5.3. ([3]) D'acord amb la fórmula exposada per Jacobi l'any 1846 [3], $[p/q]$ es pot escriure com el quocient de dos determinants:

$$[p/q] = \frac{\det A}{\det W}$$

on

$$A = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{p-q} c_i t^i & c_{p-q+1} & \dots & c_p \\ -x^{p-q+1} c_{p-q+1} & c_{p-q+1} - x c_{p-q+2} & \dots & c_p - x c_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x^{p-q+1} c_p & c_p - x c_{p+1} & \dots & c_{p+q-1} - x c_{p+q} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{(q+1) \times (q+1)}$$

i

$$W = \begin{bmatrix} c_{p-q+1} - x c_{p-q+2} & \dots & c_p - x c_{p+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_p - x c_{p+1} & \dots & c_{p+q-1} - x c_{p+q} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{q \times q},$$

on els sumatoris se substitueixen per un 0 si $p < q$.

Observació 2.5.4. En la forma anterior de $[p/q]$, W és una submatriu principal inferior d' A .

Observació 2.5.5. Aplicant la identitat de Schur a l'Observació 2.5.3 és fàcil veure que

$$[p/q] = \det A/W.$$

Teorema 2.5.6 ([3])(Fórmula compacta de Nuttall per aproximants de Padé). *Donada una funció $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$, el seu aproximant de Padé $[p/q]_f(x)$ es pot expressar com*

$$[p/q]_f(x) = \sum_{i=0}^{p-q} c_i x^i + x^{p-q+1} c^T W^{-1} c,$$

on $c = (c_{p-q+1}, \dots, c_p)^T$.

Demostració. Recordem que podem calcular el complement de Schur per a qualsevol matriu principal d' A , no necessàriament superior.

Prenem A/W i aplicant la definició del complement de Schur i utilitzant l'Observació 2.5.5, obtenim

$$\begin{aligned} [p/q]_f(x) = \det A/W &= \det \left(\sum_{i=0}^{p-q} c_i x^i - c^T W^{-1} (-x^{p-q+1}) c \right) = \det \left(\sum_{i=0}^{p-q} c_i x^i + x^{p-q+1} c^T W^{-1} c \right) = \\ &= \det \left(\sum_{i=0}^{p-q} c_i x^i + x^{p-q+1} c^T W^{-1} c \right), \end{aligned}$$

per $c = (c_{p-q+1}, \dots, c_p)^T$.

Exemple 2.5.7. Recuperem l'Exemple (2.5.2) i intentem arribar a les mateixes expressions utilitzant la fórmula anterior.

Per a $[0/0]_f(x)$ tenim:

$$A_{0,0} = [c_0 t^0] = [1] \quad \text{i} \quad W_{0,0} = [\emptyset].$$

Fent servir les convencions exposades a la secció 2.1.1., $A/\emptyset = A$, per tant

$$[0/0]_f(x) = A_{0,0}/W_{0,0} = A_{0,0} = 1.$$

Seguim amb $[0/1]_f(x)$, on ara

$$A_{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & c_0 \\ -x^0 & c_0 - xc_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1-x \end{bmatrix}$$

i

$$W_{0,1} = [c_0 - xc_1] = [1-x].$$

Així,

$$[0/1]_f(x) = A_{0,1}/W_{0,1} = 0 - 1 \cdot \frac{1}{1-x} \cdot (-1) = \frac{1}{1-x}.$$

Finalment, per $[1/1]_f(x)$ tenim

$$A_{1,1} = \begin{bmatrix} c_0 t^0 & c_1 \\ -x^1 c_1 & c_1 - xc_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -x & 1 - \frac{x}{2} \end{bmatrix}$$

i

$$W_{1,1} = [c_1 - xc_2] = [1 - \frac{x}{2}].$$

Per tant, obtenim

$$2[1/1]_f(x) = A_{1,1}/W_{1,1} = 1 - 1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} \cdot (-x) = \frac{2+x}{2-x},$$

i les tres expressions són les que esperàvem.

2.6 Fraccions contínues

Quan representem nombres reals amb el sistema numèric decimal podem trobar-nos que alguns nombres racionals no tenen representació finita. Les fraccions contínues resolten aquest i altres problemes de la notació decimal i permeten representar de forma “mate-màticament pura” els nombres reals.

Les primeres aparicions de fraccions contínues daten del segle I, tot i que la seva arribada a Europa no va ser fins el segle XVI.

Definició 2.6.1. Una fracció contínua és una expressió de la forma

$$C = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots}},$$

on $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ i $a_i > 0$ per $1 \leq i \leq n$.

Exemple 2.6.2. L'expressió

$$C = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{2}{2 + \frac{3}{3 + \dots}}},$$

on $a_i = b_i = i$ per $i = 1, 2, \dots$, és una fracció contínua.

Definició 2.6.3. Sigui $1 \leq k \leq n$. El k -èsim convergent d'una fracció contínua $C = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots}}$, és la fracció contínua finita

$$C_k = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{b_{k-1}}{a_{k-1} + \frac{a_k}{b_k}}}}.$$

Exemple 2.6.4. El cinquè convergent de la fracció contínua de l'Exemple (2.6.2) és

$$C_5 = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \frac{a_4}{b_4 + \frac{a_5}{b_5}}}}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{2}{2 + \frac{3}{3 + \frac{4}{4 + \frac{5}{5}}}}}.$$

Si calculem les sumes fraccionàries, obtenim $C_5 = \frac{53}{91}$.

Aquí utilitzarem el complement de Schur per a obtenir una expressió més compacta del n -èsim convergent d'una fracció contínua.

Proposició 2.6.5. ([3]) Considerem la fracció contínua

$$C = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots}}.$$

Sigui C_n el n -èsim convergent. Podem expressar-lo com el quocient de dues expressions en funció dels coeficients a_i i b_i $1 \leq i \leq n$ de la següent manera:

$$C_n = \frac{\det A_n}{\det B_n},$$

on

$$A_n = \begin{bmatrix} b_0 & -1 & & & \\ a_1 & b_1 & -1 & & 0 \\ & a_2 & b_2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & & a_{n-1} & b_{n-1} & -1 \\ & & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$$

i

$$B_n = \begin{bmatrix} b_1 & -1 & & & \\ a_2 & b_2 & -1 & & 0 \\ & a_3 & b_3 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & & a_{n-1} & b_{n-1} & -1 \\ & & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Demostració. *Aplicant la identitat de Schur, podem veure que*

$$\begin{aligned} \det A_n &= \det A_{n-1} \cdot \det(A_n/A_{n-1}) = \det A_{n-1} \cdot \det(b_n - (0, \dots, 0, a_n)A_{n-1}^{-1}(0, \dots, 0, -1)) = \\ &= \det A_{n-1} \cdot (b_n + a_n A_{n-2}/A_{n-1}) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \det B_n &= \det B_{n-1} \cdot \det(B_n/B_{n-1}) = \det B_{n-1} \cdot \det(b_n - (0, \dots, 0, a_n)B_{n-1}^{-1}(0, \dots, 0, -1)) = \\ &= (\det B_{n-1})(b_n + a_n B_{n-2}/B_{n-1}). \end{aligned}$$

Aquestes expressions són precisament les fórmules de recurrència que defineixen les convergents successives d'una fracció contínua [3]. ■

Exemple 2.6.6. Provem de trobar el tercer convergent de la fracció contínua de l'Exemple (2.6.2)

$$C_3 = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3}}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{2}{2 + \frac{3}{3}}} = \frac{3}{5}$$

utilitzant les fórmules de la proposició anterior.

En aquest cas tindrem

$$A_3 = \begin{bmatrix} b_0 & -1 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & -1 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & -1 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

i

$$B_3 = \begin{bmatrix} b_1 & -1 & 0 \\ a_2 & b_2 & -1 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Aleshores,

$$\det A_3 = 9, \quad \det B_3 = 15$$

i

$$\frac{\det A_3}{\det B_3} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5},$$

com volíem veure.

Capítol 3

Algunes fórmules determinants derivades del complement de Schur

En aquest capítol presentarem algunes identitats determinants importants atribuïdes als matemàtics que apareixen als títols. En el tercer capítol en donarem una definició formal.

El desenvolupament és autocontingut a excepció de dos resultats: l'eliminació gaussiana i l'afirmació que tot determinant accepta l'expansió de Laplace. Totes les fórmules i resultats són conseqüència de les propietats del complement de Schur.

3.1 Cauchy

Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857), d'origen francès, va ser un dels matemàtics més prolífics amb prop de 800 publicacions. El seu estudi destaca sobretot en l'anàlisi matemàtica, la teoria de grups i la mecànica dels medis continus. Cauchy va enunciar el següent teorema considerant un cas particular de la Identitat de Schur.

Teorema 3.1.1 ([4]) (Expansió de Cauchy de $\det A$). *Sigui $k = n - 1$, de manera que $E \in \mathbb{F}^{(n-1) \times (n-1)}$, $H = [a_{nn}] \in \mathbb{F}^{1 \times 1}$, $F \in \mathbb{F}^{1 \times n}$ i $G \in \mathbb{F}^{n \times 1}$. Llavors*

$$\det A = a_{nn} \det E - G(\text{Adj} E)F.$$

Demostració. *Aplicant el Teorema 1.1.11 i la Definició 1.1.7 tenim que,*

$$\det A = \det E \cdot (a_{nn} - GE^{-1}F) = a_{nn} \det E - G(\det E)E^{-1}F = a_{nn} \det E - G(\text{Adj} E)F. \quad \blacksquare$$

Exemple 3.1.2. Sigui

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -1 & 7 \\ 4 & -5 & 8 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{4 \times 4}$$

Considerem la partició d' A següent ($k = 2$):

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 4 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ \hline 1 & 6 & -1 & 7 \\ 4 & -5 & 8 & 1 \end{array} \right].$$

Aplicant l'eliminació gaussiana de (1.1.1) amb $n = 4$, $k = 2$, obtenim

$$\begin{bmatrix} E & F \\ 0 & H' \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{59}{3} & 26 \\ 0 & 0 & \frac{31}{2} & -10 \end{array} \right].$$

Aleshores,

$$\det A = \det E \cdot \det A/E = \det \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} -\frac{59}{3} & 26 \\ \frac{31}{2} & -10 \end{bmatrix} = 6 \frac{-619}{3} = -1238.$$

D'altra banda, és fàcil comprovar que

$$h'_{ij} = \frac{\det A[1, 2, i|1, 2, j]}{\det A[1, 2|1, 2]} = \frac{\det A[1, 2, i|1, 2, j]}{\det E}$$

per $3 \leq i, j \leq 4$. Vegem-ne algun cas concret:

$$h'_{44} = \frac{\det A[1, 2, 4|1, 2, 4]}{\det A[1, 2|1, 2]} = \frac{\det A[1, 2, 4|1, 2, 4]}{\det E} = \frac{-60}{6} = -10.$$

Si ara, en canvi, considerem la partició d' A següent ($k = 3$):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -1 & 7 \\ 4 & -5 & 8 & 1 \end{array} \right],$$

aleshores també podem obtenir el determinant d' A com:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{nn} \det E - G(\text{Adj} E)F = 1 \cdot (-118) - \begin{bmatrix} 4 & -5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -30 & 4 & -10 \\ 8 & -5 & -17 \\ 18 & -26 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} = \\ &= -118 - \begin{bmatrix} -16 & -167 & 93 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} = -118 - 1120 = -1238, \end{aligned}$$

que és el mateix valor que hem obtingut anteriorment.

3.2 Sylvester

James Joseph Sylvester (1814 – 1897) va ser un matemàtic anglès que va fer importants contribucions a la teoria de matrius i als determinants, entre d'altres. La Identitat de Sylvester per a determinants, publicada l'any 1851, s'enuncia a continuació i és útil per avaluar certs tipus de determinants.

Teorema 3.2.1 ([4]) (Identitat de Sylvester per a determinants fronterers). *Sigui*

$$C = [c_{ij}] = [\det A[1, \dots, k, i|1, \dots, k, j]] \in \mathbb{F}^{(n-k) \times (n-k)}, \quad k+1 \leq i, j \leq n,$$

aleshores

$$\det C = \det([\det A[1, \dots, k, i|1, \dots, k, j]]) = (\det A[1, \dots, k|1, \dots, k])^{n-k-1} \det A$$

Demostració. *Aplicant la Proposició 1.1.13, obtenim que*

$$\det A[1, \dots, k, i | 1, \dots, k, j] = (\det E) h'_{ij} = (\det A[1, \dots, k | 1, \dots, k]) h'_{ij}, \quad k+1 \leq i, j \leq n,$$

és a dir,

$$C = [\det A[1, \dots, k, i | 1, \dots, k, j]] = (\det A[1, \dots, k | 1, \dots, k]) [h'_{ij}] = \det E \cdot A/E, \quad k+1 \leq i, j \leq n, .$$

I, per tant,

$$\begin{aligned} \det C &= \det(\det E \cdot A/E) = (\det E)^{n-k} \cdot \det A/E = (\det E)^{n-k} \cdot \frac{\det A}{\det E} = (\det E)^{n-k-1} \cdot \det A = \\ &= (\det A[1, \dots, k | 1, \dots, k])^{n-k-1} \cdot \det A. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exemple 3.2.2. Recuperant l'Exemple 3.1.2, tenim que

$$c_{ij} = \det A[1, 2, i | 1, 2, j]$$

per $3 \leq i, j \leq 4$. Per tant:

$$c_{33} = \det A[1, 2, 3 | 1, 2, 3] = \det \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 6 & -1 \end{bmatrix} = -118,$$

$$c_{34} = \det A[1, 2, 3 | 1, 2, 4] = \det \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix} = 156,$$

$$c_{43} = \det A[1, 2, 4 | 1, 2, 3] = \det \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 8 \end{bmatrix} = 93,$$

$$c_{44} = \det A[1, 2, 4 | 1, 2, 4] = \det \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 4 & -5 & 1 \end{bmatrix} = -60$$

i

$$C = \begin{bmatrix} -118 & 156 \\ 93 & -60 \end{bmatrix}$$

i aleshores

$$\det A = \frac{\det C}{\det E} = \frac{\det \begin{bmatrix} -118 & 156 \\ 93 & -60 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}} = \frac{-7428}{6} = -1238,$$

novament.

3.3 Kronecker

Un cas particular de la Identitat de Sylvester és la identitat desenvolupada per Leopold Kronecker (1823 - 1891), un matemàtic alemany que va estudiar els camps de la teoria de nombres, l'àlgebra i la lògica.

Teorema 3.3.1 ([4]) (Identitat de Kronecker per a determinants fronterers). *Sigui*

$$B = [b_{ij}] = \left[\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{kj} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & 0 \end{bmatrix} \right] \in \mathbb{F}^{(n-k) \times (n-k)},$$

$$k+1 \leq i, j \leq n.$$

Aleshores tota submatriu $(k+1) \times (k+1)$ de B té determinant nul, és a dir

$$\det B[i_i, \dots, i_{k+1} | j_1, \dots, j_{k+1}] = 0, \quad k+1 \leq i_1 < \cdots < i_{k+1} \leq n, \quad k+1 \leq j_1 < \cdots < j_{k+1} \leq n$$

Demostració. *Suposem $n = 2k + 1$. $A = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$. Si prenem $H = 0 \in \mathbb{F}^{(k+1) \times (k+1)}$, llavors $C = [\det A[1, \dots, k, i | 1, \dots, k, j]] = B$, on C és la matriu definida al Teorema 3.2.1. A més, com que les $k + 1$ últimes files d' A tenen, com a màxim, k elements no nuls cadascuna, es compleix $\text{Rang}(A) \leq 2k = n - 1 < n$, de manera que*

$$0 = \det A = \frac{\det C}{(\det E)^{n-k-1}} = \frac{\det B}{(\det E)^{n-k-1}} \Rightarrow \det B = \det C = 0.$$

Com que $B \in \mathbb{F}^{(k+1) \times (k+1)}$, l'única submatriu de B de mida $(k+1) \times (k+1)$ és, en efecte, B , per tant $\det B = 0$.

Alternativament, usant la Proposició 1.1.13 (i prenent encara $H = 0 \in \mathbb{F}^{(k+1) \times (k+1)}$), tenim que

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{kj} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & 0 \end{bmatrix} = \frac{\det A[1, \dots, k, i | 1, \dots, k, j]}{\det E} \det E =$$

$$\frac{\det A[1, \dots, k, i | 1, \dots, k, j]}{\det A[1, \dots, k | 1, \dots, k]} \det E = h'_{ij},$$

$$k+1 \leq i, j \leq n.$$

De manera que

$$B = \det E \cdot (A/E - 0) = \det E \cdot (A/E - H) =$$

$$\det E \cdot (H - GE^{-1}F - H) = \det E \cdot (-GE^{-1}F).$$

Per tant,

$$\text{Rang}(B) \leq \min\{\text{Rang}(G), \text{Rang}(E^{-1}), \text{Rang}(F)\} \leq k \leq k+1.$$

Com que $B[i_i, \dots, i_{k+1} | j_1, \dots, j_{k+1}] \in \mathbb{F}^{(k+1) \times (k+1)}$,

$$\text{Rang}(B[i_i, \dots, i_{k+1} | j_1, \dots, j_{k+1}]) \leq \text{Rang}(B) \leq k.$$

i tenim que $\det B[i_i, \dots, i_{k+1} | j_1, \dots, j_{k+1}] = 0$. ■

Exemple 3.3.2. Tornant a l'Exemple 3.1.2, prenem ara $k = 1$,

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} E & F \\ \hline G & H \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cccc} 4 & -2 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 0 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -1 & 7 \\ 4 & -5 & 8 & 1 \end{array} \right] \in \mathbb{F}^{4 \times 4}.$$

Llavors,

$$B = \left[\begin{array}{ccc} \det \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \\ \det \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \det \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -6 \\ 2 & -1 & -2 \\ 8 & -4 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{3 \times 3}.$$

Efectivament, el determinant de qualsevol submatriu 2×2 és nul:

$$\det B[1, 2|1, 2] = \det \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = -6 - (-6) = 0,$$

$$\det B[1, 3|2, 3] = \det \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -4 & -8 \end{bmatrix} = 24 - 24 = 0$$

o

$$\det B[2, 3|2, 3] = \det \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -4 & -8 \end{bmatrix} = 8 - 8 = 0.$$

3.4 Jacobi

Carl Gustav Jakob Jacobi (1804 - 1851) va ser un matemàtic alemany i va fer contribucions principalment en els camps de les funcions el·líptiques, l'àlgebra, la teoria de nombres i les equacions diferencials. La Identitat de Jacobi, tractada a continuació, permet, donada una matriu A , el càlcul de determinants de submatrius d' A^{-1} a partir d' A .

Teorema 3.4.1 ([4]) (Identitat de Jacobi). *Sigui $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ una matriu invertible. Aleshores:*

$$\det A^{-1}[j'_{k+1}, \dots, j'_n | i'_{k+1}, \dots, i'_n] = \frac{(-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k}}{\det A} \det A[i_1, \dots, i_k | j_1, \dots, j_k] \quad (\text{primera versió}) \quad (3.4.1)$$

i

$$\det(\text{Adj} A[j'_{k+1}, \dots, j'_n | i'_{k+1}, \dots, i'_n]) = (-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k} (\det A)^{n-k-1} \cdot \det A[i_1, \dots, i_k | j_1, \dots, j_k] \quad (\text{segona versió}) \quad (3.4.2)$$

on $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ i $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$, $1 \leq i'_{k+1} < \dots < i'_n \leq n$ i $1 \leq j'_{k+1} < \dots < j'_n \leq n$ són tals que $\{i_1, \dots, i_k, i'_{k+1}, \dots, i'_n\} = \{j_1, \dots, j_k, j'_{k+1}, \dots, j'_n\} = \{1, \dots, n\}$.

Demostració. Continuem aplicant de l'eliminació gaussiana de (1.1.1):

$$\begin{bmatrix} E^{-1} & -E^{-1}F(H')^{-1} \\ 0 & (H')^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ -GE^{-1} & I_{n-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} E^{-1} & -E^{-1}F(H')^{-1} \\ 0 & (H')^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ 0 & H' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} = I_n.$$

I obtenim que:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{bmatrix} E^{-1} & -E^{-1}F(H')^{-1} \\ 0 & (H')^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ -GE^{-1} & I_{n-k} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} E^{-1} + E^{-1}F(H')^{-1}GE^{-1} & -E^{-1}F(H')^{-1} \\ -(H')^{-1}GE^{-1} & (H')^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Com que $H' = A/E$, podem deduir de (3.4.3) que $(H')^{-1}$ és la submatriu de A^{-1} que és "complementària a E ". És a dir la submatriu principal inferior d' A de mida $(n-k) \times (n-k)$. Aplicant novament $\det A = \det E \cdot \det A/E$, obtenim:

$$\begin{aligned} \det(H')^{-1} &= \det A^{-1}[k+1, \dots, n | k+1, \dots, n] = \det(A/E)^{-1} = \frac{1}{\det A/E} = \frac{\det E}{\det A} = \\ &= \frac{\det A[1, \dots, k | 1, \dots, k]}{\det A}. \quad (\text{primera versió}) \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

També

$$\begin{aligned} \det(\text{Adj} A[k+1, \dots, n | k+1, \dots, n]) &= \det((H')^{-1}) \cdot (\det A)^{n-k} = \frac{1}{(\det H')} \cdot (\det A)^{n-k} = \\ &= \frac{\det A[1, \dots, k | 1, \dots, k]}{\det A} \cdot (\det A)^{n-k} = \det A[1, \dots, k | 1, \dots, k] \cdot (\det A)^{n-k-1}. \quad (\text{segona versió}) \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Considerem $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ i $Q \in \mathbb{F}^{n \times n}$ matrius de permutació tals que

$$PAQ = \begin{bmatrix} A[i_1, \dots, i_k | j_1, \dots, j_k] & * \\ * & A[i'_{k+1}, \dots, i'_n | j'_{k+1}, \dots, j'_n] \end{bmatrix},$$

llavors

$$\begin{aligned} \det(PAQ) &= (-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k} \det A \\ (PAQ)[1, \dots, k | 1, \dots, k] &= A[i_1, \dots, i_k | j_1, \dots, j_k], \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} (PAQ)^{-1}[k+1, \dots, n | k+1, \dots, n] &= (Q^{-1}A^{-1}P^{-1})[k+1, \dots, n | k+1, \dots, n] = \\ &= A^{-1}[j'_{k+1}, \dots, j'_n | i'_{k+1}, \dots, i'_n]. \end{aligned}$$

Substituïm A per PAQ en (3.4.4) i en (3.4.5) i obtenim les expressions. ■

Corol·lari 3.4.2 (Identitat de Jacobi II). *Sigui*

$$A = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}$$

una matriu invertible amb

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}.$$

Aleshores:

$$\det Z \cdot \det A = \det E.$$

Exemple 3.4.3. Sigui

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{3 \times 3}$$

Calculem A^{-1} a partir de la fórmula

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{Adj} A) = \frac{1}{-26} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -16 \\ 2 & -16 & 20 \\ -3 & -15 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{26} & \frac{-5}{26} & \frac{8}{13} \\ \frac{-1}{13} & \frac{8}{13} & \frac{-10}{13} \\ \frac{3}{26} & \frac{15}{26} & \frac{-11}{13} \end{bmatrix}.$$

Aleshores,

$$\det A^{-1}[1, 2|1, 3] = \det \begin{bmatrix} \frac{-1}{26} & \frac{8}{13} \\ \frac{-1}{13} & \frac{-10}{13} \end{bmatrix} = \frac{1}{13}$$

i, usant la primera identitat de Jacobi:

$$\det A^{-1}[1, 2|1, 3] = \frac{(-1)^{2+3}}{-26} \cdot \det A[2|3] = \frac{-1}{-26} 2 = \frac{1}{13}.$$

D'altra banda, utilitzant la matriu d'adjunts d' A calculada anteriorment,

$$\det(\text{Adj} A[1, 2|2, 3]) = \det \begin{bmatrix} 5 & -16 \\ -16 & 20 \end{bmatrix} = -156,$$

i fent servir la segona identitat de Jacobi,

$$\det(\text{Adj} A[1, 2|2, 3]) = (-1)^{1+3} (-26)^{3-1-1} \det A[1|3] = 1(-26)^1 6 = -156.$$

3.5 Binet, Cauchy i Laplace

Jacques Philippe Marie Binet (1786 - 1856) va ser un matemàtic i astrònom francès. Va fer aportacions als camps de la teoria de nombres i de l'àlgebra de matrius.

La Fórmula de Binet i Cauchy per a determinants que es desenvolupa a continuació s'aplica per a calcular el determinant del producte de dues matrius rectangulars. Generalitza el resultat que el determinant d'un producte de matrius quadrades és el producte dels determinants.

Teorema 3.5.1 ([4]) (Fórmula de Binet i Cauchy per a determinants). *Sigui $F \in \mathbb{F}^{k \times l}$, $G \in \mathbb{F}^{l \times k}$, $n = k + l$. Aleshores*

$$\det(GF) = \sum_{i_1 < \dots < i_l \leq k} \det G[1, \dots, l|i_1, \dots, i_l] \cdot \det F[i_1, \dots, i_l|1, \dots, l].$$

Demostració. *Sigui*

$$A = \begin{bmatrix} -I_k & F \\ G & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{(k+l) \times (k+l)}.$$

El complement de Schur de $-I_k$ en A és

$$A/(-I_k) = 0 - G(I_k)^{-1}F = -GF$$

i utilitzant com a conseqüència de la identitat de Schur, tenim que

$$\det A = \det(-I_k)[\det A/(-I_k)] = (-1)^{l+k} \det(GF).$$

Aplicant l'extensió de Laplace per determinants

$$\det A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}),$$

obtenim la fórmula desitjada. ■

Exemple 3.5.2. Prenem $k = 3$, $l = 2$ i definim $A = \left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 5 \\ \hline 6 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] =$
 $\begin{bmatrix} -I_k & F \\ G & 0 \end{bmatrix}$ de mida $n \times n$ amb $n = l + k$. Per tant, $F = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{3 \times 3}$ i $G =$
 $\begin{bmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{2 \times 3}$. Aleshores, d'una banda tenim que

$$GF = \begin{bmatrix} 10 & -25 \\ 10 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{2 \times 2}$$

i

$$\det(GF) = 170.$$

Alternativament, utilitzant la fórmula de Binet i Cauchy, obtenim

$$\begin{aligned} \det(GF) &= \det G[1, 2|1, 2] \cdot \det F[1, 2|1, 2] + \det G[1, 2|1, 3] \cdot \det F[1, 3|1, 2] \\ &\quad + \det G[1, 2|2, 3] \cdot \det F[2, 3|1, 2] = \det \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \\ &\quad \det \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = 170. \end{aligned}$$

Capítol 4

Lleis d'extensió d'identitats determinantal

Entenem per mètodes d'extensió d'identitats determinantal aquells que ens permeten ampliar algunes identitats determinantal per aconseguir-ne així de noves, més complexes però equivalents a les originals.

En aquest capítol estudiarem dos d'aquests mètodes que enuncien com, donada una identitat determinantal, obtenir-ne una altra: la Llei de Muir dels menors extensibles i la Llei de Cayley dels complementaris, les dues lleis primàries de formació d'identitats determinantal.

La primera va ser enunciada per Muir l'any 1883 i estableix que cada identitat polinomial en els menors d'una matriu pot ser associada a una altra identitat polinomial obtinguda augmentant les llistes d'índexs de files i columnes amb dues llistes d'índexs fixades (una per les files i una altra per les columnes, respectivament) [7].

La segona llei data del 1881, s'atribueix a Cayley i conclou que a partir de qualsevol identitat polinomial en alguns menors d'una matriu es pot construir una altra identitat polinomial, obtinguda substituint cada menor de l'equació original pel seu menor complementari [7].

També revisarem les possibles equivalències entre aquestes i altres lleis d'extensió d'identitats determinantal.

4.1 La llei de Muir dels menors extensibles

Thomas Muir (1844 – 1934) va ser un matemàtic escocès reconegut per les seves aportacions en el camp dels determinants. Abans d'enunciar la seva llei referent a l'extensió d'identitats determinantal ens caldrà donar una definició rigorosa d'*identitat determinantal*.

Considerem una matriu $A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{m \times m}$ els elements de la qual són indeterminades que commuten dos a dos de $\mathbb{F}$. Suposem que les files i columnes d' A estan indexades pels valors $k + 1, \dots, n = k + m$ per algun enter $k \geq 0$.

Definició 4.1.1. ([4]) Donada una matriu $A \in \mathbb{F}^{m \times m}$, un terme d'una identitat determi-

nantal d'A és un producte $T(A)$ (possiblement buit) de la forma

$$T(A) = \det A[\alpha^{(1)}|\beta^{(1)}] \cdots \det A[\alpha^{(p)}|\beta^{(p)}]$$

on $\alpha^{(i)}$ i $\beta^{(i)}$ són subllistes de la llista $(k+1, \dots, n)$ de la mateixa llargada, ordenades de manera natural per cada $i = 1, \dots, p$.

Exemple 4.1.2. Sigui

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ x_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{3 \times 3},$$

un terme d'una identitat determinantal podria ser

$$T(A) = \det A[1, 2|1, 2] \cdot \det A[1, 3|1, 2] \cdot \det A[2, 3|1, 3] = \\ \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Així doncs, un terme és un producte de menors d'A, possiblement de diferents ordres.

Definició 4.1.3. ([6]) Una identitat determinantal de mida $m \times m$ d'A $\in \mathbb{F}^{m \times m}$ és una equació polinòmica de la forma

$$\sum_{q=1}^t c_q T_q(A) = \sum_{q=1}^t c_q \prod_{r=1}^{p_q} \det A[\alpha_q^{(r)}|\beta_q^{(r)}] = 0,$$

on cada $T_q(A)$ és un terme d'A, $c_q \in \mathbb{F}$ i $p_q \in \mathbb{N}$ per $q = 1, \dots, t$.

La identitat determinantal serà homogènia si $p_1 = p_2 = \dots = p_t$.

Observació 4.1.4. ([4]) Podem escriure una identitat determinantal de mida $m \times m$ en termes d' a_{ij} per $k+1 \leq i, j \leq n$, substituint cada factor $\det A[\alpha_q^{(i)}|\beta_q^{(i)}]$ per la seva expressió en funció dels elements d'A.

Exemple 4.1.5. La identitat de Sylvester, donada $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, dona l'expressió

$$(\det A[1, \dots, k|1, \dots, k])^{n-k-1} \cdot \det A = \det C$$

on

$$C = [c_{ij}] = [\det A[1, \dots, k, i|1, \dots, k, j]] \in \mathbb{F}^{(n-k) \times (n-k)}, \quad k+1 \leq i, j \leq n,$$

és una identitat determinantal de mida $n \times n$. Substituint C per la seva expressió en funció dels elements d'A que conté, obtenim

$$(\det A[1, \dots, k|1, \dots, k])^{n-k-1} \cdot \det A[1, \dots, n|1, \dots, n] = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=k+1}^n \det A[1, \dots, k, i|1, \dots, k, \sigma(i)],$$

la identitat determinantal en termes de $x_{i\sigma(i)}$ per $k+1 \leq i, \sigma(i) \leq n$, on $\mathcal{S}$ és el conjunt de permutacions de $\{k+1, \dots, n\}$.

Observació 4.1.6. ([4]) Alternativament, podem obtenir l'expressió de l'Exemple 4.1.5 de la manera següent:

Per la fórmula de Leibniz pel càlcul de determinants

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)},$$

tenim que

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n A[i|\sigma(i)],$$

on $\mathcal{S}_n$ és el conjunt de permutacions de $\{1, \dots, n\}$.

L'apliquem a $A[k+1, \dots, n|k+1, \dots, n]$, obtenint:

$$\det A[k+1, \dots, n|k+1, \dots, n] = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=k+1}^n A[i|\sigma(i)].$$

D'altra banda, si definim

$$\det A[\emptyset|\emptyset] = 1,$$

podem recuperar la igualtat anterior com

$$f_1 \det A[k+1, \dots, n|k+1, \dots, n] = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} \text{sign}(\sigma) f_\sigma \prod_{i=k+1}^n A[i|\sigma(i)], \quad (4.1.1)$$

on $f_q = \prod_{\mu=1}^t \prod_{\mu \neq q} \prod_{\nu=1}^{p_\mu} \det[\emptyset|\emptyset]$. Notem que $\mathcal{S}$ conté $(n-k)!$ elements, de manera que el nombre total de sumands de la igualtat és $t = (n-k)! + 1$. A més, el terme de la dreta conté un únic factor determinantal, i la resta de termes en tenen $n-k$, de manera que $p_1 = 1$ i $p_i = n-k$ per $i = 2, \dots, t$. Per tant,

$$f_1 = \prod_{\nu=1}^{n-k} \det[\emptyset|\emptyset] \prod_{\nu=1}^{n-k} \det[\emptyset|\emptyset] \cdots \prod_{\nu=1}^{n-k} \det[\emptyset|\emptyset] = \det[\emptyset|\emptyset]^{(n-k)(n-k)!}$$

i

$$f_\sigma = \prod_{\nu=1}^1 \det[\emptyset|\emptyset] \prod_{\nu=1}^{n-k} \det[\emptyset|\emptyset] \cdots \prod_{\nu=1}^{n-k} \det[\emptyset|\emptyset] = \det[\emptyset|\emptyset]^{(n-k)[(n-k)!-1]+1}$$

Aleshores, la igualtat (4.1.1) queda

$$\begin{aligned} & (\det[\emptyset|\emptyset])^{(n-k)(n-k)!} \cdot \det A[k+1, \dots, n|k+1, \dots, n] = \\ & (\det[\emptyset|\emptyset])^{(n-k)[(n-k)!-1]+1} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=k+1}^n A[i|\sigma(i)] \end{aligned}$$

Notem que $(n-k) \cdot [(n-k)! - 1] + 1 = (n-k) \cdot (n-k)! - (n-k) + 1$, de manera que podem simplificar els exponents de $\det[\emptyset|\emptyset]$ a banda i banda de la igualtat per aconseguir

$$(\det[\emptyset|\emptyset])^{n-k-1} \cdot \det A[k+1, \dots, n|k+1, \dots, n] = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=k+1}^n A[i|\sigma(i)].$$

Finalment, aconseguim la identitat desitjada afegint la seqüència $(1, \dots, k)$ a cada terme de (4.1.1):

$$(\det A[1, \dots, k|1, \dots, k])^{n-k-1} \cdot \det A[1, \dots, n|1, \dots, n] = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=k+1}^n A[1, \dots, k, i|1, \dots, k, \sigma(i)].$$

Observació 4.1.7. Si com a l'Observació (4.1.6) utilitzem $\det A[\emptyset|\emptyset] = 1$, per $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, podem considerar que tota identitat determinantal és homogènia, afegint a cada terme el nombre de factors $\det[\emptyset|\emptyset]$ necessaris.

És precisament el mètode que acabem d'usar per aconseguir identitats determinants de mida $n \times n$ a partir d'identitats determinants de mida $m \times m$, $m = n - k$, el que anomenem *extensió* i pot generalitzar-se de la següent forma.

Proposició 4.1.8. ([4]) Si

$$\sum_{q=1}^t c_q T_q(A) = 0, \quad (4.1.2)$$

és una identitat determinantal de mida $m \times m$, aleshores per tota matriu $B = [b_{ij}]$ de mida $m \times m$ amb elements d'un cos $\mathbb{F}'$ extensió de $\mathbb{F}$ es compleix

$$\sum_{q=1}^t c_q T_q(B) = 0.$$

Demostració. L'aplicació $a_{ij} \rightarrow b_{ij}$, $k+1 \leq i, j \leq n$ induïx un homeomorfisme de l'anell $\mathbb{F}[a_{k+1,k+1}, a_{k+1,k+2}, \dots, a_{nn}]$ en el cos $\mathbb{F}'$. ■

El 1883, Muir va enunciar la seva llei referida a l'extensió d'identitats determinants.

Teorema 4.1.9 ([4]) (Llei de Muir dels menors extensibles). Donada una identitat determinantal de mida $m \times m$

$$\sum_{q=1}^t c_q T_q(B) = \sum_{q=1}^t c_q \prod_{r=1}^{p_q} \det B[\alpha_q^{(r)} | \beta_q^{(r)}] = 0$$

aleshores existeix una identitat determinantal de mida $n \times n$

$$\sum_{q=1}^t c_q \cdot f_q \prod_{r=1}^{p_q} \det A[\gamma, \alpha_q^{(r)} | \gamma, \beta_q^{(r)}] = 0,$$

on $\gamma = (1, \dots, k)$ i $f_q = \prod_{\mu=1}^t \prod_{\mu \neq q}^{p_\mu} \det A[\gamma | \gamma]$.

Demostració. Sigui $A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{n \times n}$ una matriu els elements de la qual són indeterminades que commuten dos a dos de $\mathbb{F}$. Si apliquem (4.1.2) a la matriu $B = H' = A/E$, complement de Schur de $E = A[1, \dots, k | 1, \dots, k]$ en A , obtenim la identitat determinantal

$$\sum_{q=1}^t c_q T_q(B) = \sum_{q=1}^t c_q T_q(A/E) = 0$$

de mida $m \times m$. Definim $g = \prod_{\mu=1}^t \prod_{\nu=1}^{p_\mu} \det E$ per $q = 1, \dots, t$ i podem multiplicar cada terme q pel factor g , obtenint un nou terme $\tilde{T}_q = g \cdot T_q$.

Si, a més, substituïm cada menor de H' per la seva expressió a (1.1.3), obtenim la identitat determinantal de mida $n \times n$

$$\sum_{q=1}^t c_q \tilde{T}_q(A) = 0 \quad (4.1.3)$$

on

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_q(A) &= g \cdot T_q(A/E) = \\
&= \prod_{\mu=1}^t \prod_{\nu=1}^{p_\mu} \det E \cdot \det A/E[\alpha_q^{(1)}|\beta_q^{(1)}] \cdots \det A/E[\alpha_q^{(p_q)}|\beta_q^{(p_q)}] = \\
&= \prod_{\mu=1}^t \prod_{\nu=1}^{p_\mu} \det E \cdot \frac{\det A[1, \dots, k, \alpha_q^{(1)}|1, \dots, k, \beta_q^{(1)}]}{\det E} \cdots \frac{\det A[1, \dots, k, \alpha_q^{(p_q)}|1, \dots, k, \beta_q^{(p_q)}]}{\det E} = \\
&= \prod_{\mu=1}^t \prod_{\nu=1}^{p_\mu} \det E \cdot \frac{\det A[1, \dots, k, \alpha_q^{(1)}|1, \dots, k, \beta_q^{(1)}] \cdots \det A[1, \dots, k, \alpha_q^{(p_q)}|1, \dots, k, \beta_q^{(p_q)}]}{\det E^{p_q}} = \\
&= \prod_{\mu=1}^t \prod_{\mu \neq q}^{p_\mu} \det E \cdot \det A[1, \dots, k, \alpha_q^{(1)}|1, \dots, k, \beta_q^{(1)}] \cdots \det A[1, \dots, k, \alpha_q^{(p_q)}|1, \dots, k, \beta_q^{(p_q)}].
\end{aligned}$$

Prenent $\gamma = (1, \dots, k)$ i definint $f_q = \prod_{\mu=1}^t \prod_{\mu \neq q}^{p_\mu} \det E$ obtenim, precisament,

$$\tilde{T}_q(A) = f_q \cdot \prod_{r=1}^{p_q} \det A[\gamma, \alpha_q^{(r)}|\gamma, \beta_q^{(r)}]$$

En l'expressió anterior, cada menor de $\tilde{T}_q(A)$ és l'extensió del menor corresponent a $T_q(A/E)$. Així doncs, (4.1.3) és l'extensió de

$$\sum_{q=1}^t c_q T_q(A/E) = 0,$$

obtinguda substituint cada terme $T_q(A/E)$ per

$$\tilde{T}_q(A) = f_q \cdot \det A[\gamma, \alpha_q^{(1)}|\gamma, \beta_q^{(1)}] \cdots \det A[\gamma, \alpha_q^{(p_q)}|\gamma, \beta_q^{(p_q)}]. \quad \blacksquare$$

4.2 La llei de Cayley dels complementaris

Arthur Cayley (1821 – 1895) va ser un matemàtic anglès el treball del qual es va centrar sobretot en l'àlgebra. Abans d'enunciar la seva Llei dels complementaris és necessari definir *identitat determinantal complementària*.

Definició 4.2.1. ([4]) Donada una identitat determinantal

$$\sum_{q=1}^t c_q T_q(A) = \sum_{q=1}^t c_q \prod_{r=1}^{p_q} \det A[\alpha_q^{(r)}|\beta_q^{(r)}] = 0,$$

la seva identitat complementària és

$$\sum_{q=1}^t c'_q T'_q(A) = \sum_{q=1}^t c'_q \prod_{r=1}^{p_q} \det A[(\alpha_q^{(r)})^c | (\beta_q^{(r)})^c] = 0.$$

Va ser també Muir qui va enunciar la següent *Llei dels complementaris* el 1881, però n'atribueix l'autoria a Cayley. De fet, el propi Muir afirma que la seva Llei dels menors extensibles és derivable de la Llei de Cayley com a corol·lari [7].

Teorema 4.2.2 (Llei de Cayley dels complementaris). ([4]) *Donada una identitat determinantal en $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$*

$$\sum_{q=1}^t c_q T_q(A) = \sum_{q=1}^t c_q \prod_{r=1}^{p_q} \det A[\alpha_q^{(r)} | \beta_q^{(r)}] = 0,$$

aleshores la seva identitat complementària

$$\sum_{q=1}^t c_q \prod_{r=1}^{p_q} \det A[(\alpha_q^{(r)})^c | (\beta_q^{(r)})^c] = 0$$

també és una identitat determinantal.

Demostració. Si

$$\sum_{q=1}^t c_q T_q(A) = 0,$$

és una identitat determinantal en $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, apliquem l'expressió (4.1.2) a $B = \text{Adj} A$ i obtenim

$$\sum_{q=1}^t c'_q T'_q(\text{Adj} A) = \sum_{q=1}^t c_q \prod_{r=1}^{p_q} \det \text{Adj} A[\alpha_q^{(r)} | \beta_q^{(r)}] = 0,$$

una nova identitat determinantal en $\text{Adj} A$.

Aplicant ara la segona versió de la Identitat de Jacobi a cada terme de la identitat, aquests queden:

$$T'_q(A) = \prod_{r=1}^{p_q} [(-1)^{(\alpha_q^{(r)})_1 + \dots + (\alpha_q^{(r)})_k + (\beta_q^{(r)})_1 + \dots + (\beta_q^{(r)})_k} \cdot (\det A)^{n-k-1} \cdot \det A[(\alpha_q^{(r)})^c | (\beta_q^{(r)})^c]]$$

per cada $q = 1, \dots, t$. De manera que obtenim una nova identitat determinantal en A

$$\sum_{q=1}^t c'_q T'_q(A) = 0,$$

amb

$$c'_q = (-1)^{(\alpha_q^{(r)})_1 + \dots + (\alpha_q^{(r)})_k + (\beta_q^{(r)})_1 + \dots + (\beta_q^{(r)})_k} \cdot (\det A)^{n-k-1}$$

i

$$T'_q(A) = \det A[(\alpha_q^{(r)})^c | (\beta_q^{(r)})^c],$$

i és la identitat complementària a la inicial. ■

Exemple 4.2.3. Sigui $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. La identitat complementària de la identitat

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n \det A[i | \sigma(i)]$$

és

$$(-1)^{n+n} (\det A)^{n-0-1} \det A[\emptyset | \emptyset] = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n (-1)^{i+\sigma(i)} \det A[i^c | \sigma(i)^c].$$

4.3 Equivalència de lleis d'extensió d'identitats determinants

A banda d'aquestes dues lleis d'extensió d'identitats determinants de Muir i Cayley, potser les més rellevants, n'hi ha d'altres. A continuació n'enunciem tres més i donem la referència d'una quarta, les estudiades per André Pierro de Camargo, matemàtic brasiler, en els seus articles [6], [7] i [5].

El primer teorema que revisarem va ser enunciat per Günter Mühlbach, matemàtic alemany, l'any 1990 i pot ser considerat una generalització de la Llei de Muir dels menors extensibles.

Teorema 4.3.1 ([6]) (Principi d'extensió de Mühlbach). *Siguin*

$$\sum_{q=1}^t c_q T_q(A) = \sum_{q=1}^t c_q \prod_{r=1}^{p_q} \det A[\alpha_q^{(r)} | \beta_q^{(r)}] = 0,$$

una identitat determinantal d' $A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{(n-m) \times (n-m)}$, $g(q, k) = \min_{q=1, \dots, t, k=1, \dots, p_q} \{\beta_q^{(r)}\}$ i $H_1 = (1, \dots, m)$.

Si existeixen llistes d'índexs $H_2, \dots, H_{n-m}$ i vectors $z_{b,1}, z_{b,2}, \dots, z_{b,\tau_b} \in \mathbb{C}^n$, on $\tau_b = \#H_b - n$, tals que

$$m = \#H_b \quad i \quad H_b \subseteq (1, \dots, m + b - 1) \quad b = 1, \dots, n - m$$

i es compleix que

$$H_b \subset H_{g(\nu,k)} \bigcup \beta_\nu^{(s)(m+)},$$

quan $b \in \beta_\nu^s$, aleshores existeix una identitat determinantal de mida $n \times n$

$$\sum_{q=1}^t c_q \cdot f_q \prod_{r=1}^{p_q} \det A[(1, \dots, m) \bigcup \alpha_q^{(k)(m+)}, H_{g(q,k)} \bigcup \beta_q^{(k)(m+)}] = 0,$$

on $f_q = \prod_{\mu=1, \mu \neq q}^t \prod_{\nu=1}^{p_\mu} \det A[(1, \dots, m) \bigcup H_{g(\mu,\nu)}]$ per $q = 1, \dots, t$.

El següent teorema és denominat *CEP* als articles referenciats, nosaltres l'anomenarem Principi d'extensió de Camargo. Es tracta d'una generalització del Principi d'extensió de Mühlbach anterior que incorpora la possibilitat que les llistes d'índexs de files i columnes (dels menors de la matriu al voltant de la qual formem la identitat determinantal) tinguin llargades diferents.

Teorema 4.3.2 ([7]) (Principi d'extensió de Camargo). *Siguin*

$$\sum_{q=1}^t c_q T_q(A) = \sum_{q=1}^t c_q \prod_{r=1}^{p_q} \det A[\alpha_q^{(r)} | \beta_q^{(r)}] = 0,$$

una identitat determinantal d' $A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{(n-m) \times (n-m)}$, $g(q, k) = \min_{q=1, \dots, t, k=1, \dots, p_q} \{\beta_q^{(r)}\}$ i $H_1 = (1, \dots, m)$.

Si existeixen llistes d'índexs $H_2, \dots, H_{n-m}$ i vectors $z_{b,1}, z_{b,2}, \dots, z_{b,\tau_b} \in \mathbb{C}^n$, on $\tau_b = \#H_b - n$, tals que

$$m \leq \#H_b \quad i \quad H_b \subseteq (1, \dots, m + b - 1) \quad b = 1, \dots, n - m,$$

es compleix que

$$H_b \subset H_{g(\nu,k)} \bigcup \beta_\nu^{(s)(m+)},$$

i

$$(z_{g(\nu,s),1}, z_{g(\nu,s),2}, \dots, z_{g(\nu,s),\tau_{g(\nu,s)}}) \subset (z_{b,1}, z_{b,2}, \dots, z_{b,\tau_b})$$

quan $b \in \beta_\nu^s$, aleshores existeix una identitat determinantal de mida $n \times n$

$$\sum_{q=1}^t c_q \cdot f_q \prod_{r=1}^{p_q} \det A \left(\begin{array}{c} z_{g(q,k),1}, \dots, z_{g(q,k),\tau_{g(q,k)}} \\ (1, \dots, m) \cup \alpha_q^{(k)(m+)}, H_{g(q,k)} \cup \beta_q^{(k)(m+)} \end{array} \right) = 0,$$

$$\text{on } f_q = \prod_{\mu=1, \mu \neq q}^t \prod_{\nu=1}^{p_\mu} \det A \left[\begin{array}{c} z_{g(\mu,\nu),1}, \dots, z_{g(\mu,\nu),\tau_{g(\mu,\nu)}} \\ (1, \dots, m) \cup H_{g(\mu,\nu)} \end{array} \right] \text{ per } q = 1, \dots, t.$$

Seguidament, enunciem la Identitat de Mühlbach-Gasca-(López-Carmona)-Ramírez, un tercer resultat extret de la generalització, novament, dels dos anteriors.

Teorema 4.3.3 ([6]) (Identitat de Mühlbach-Gasca-(López-Carmona)-Ramírez). *Sigui A una matriu de mida $n \times n$, m un enter tal que $m < n$ i $H_j = (j_1, \dots, j_m)$ llistes d'índexs amb $j_1 < j_2 < \dots < j_m < m + j$ i*

$$d_{i,j} = \det A[1, \dots, m, m+i | H_j, m+j], \quad i, j = 1, \dots, n-m.$$

Aleshores es compleix

$$\det(d_{i,j}) = \det A \prod_{j=2}^{n-m} \det A[1, \dots, m | H_j].$$

Finalment, considerem un últim resultat obtingut per Mühlbach, ja esmentat, i Bernhard Beckermann, un matemàtic francès, a partir de la generalització de la Identitat de Sylvester per a determinants fronterers; el Teorema (3.2.1) [2]. L'anomenarem Identitat de Beckermann-Mühlbach i es pot trobar completa a l'article [5].

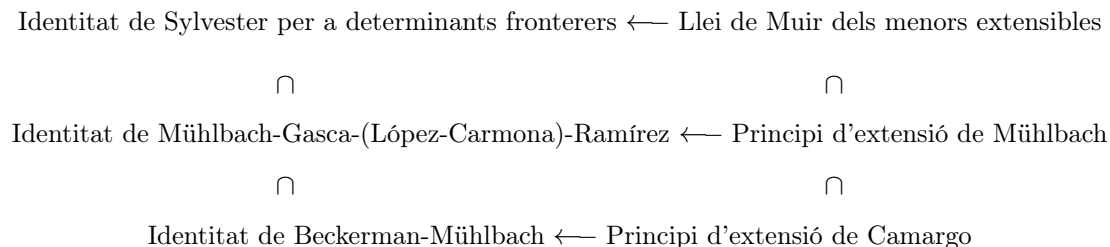
Si a més de la Identitat de Sylvester per a determinants fronterers recuperem també el Teorema (3.4.1) (la Identitat de Jacobi), obtenim el següent resultat, que es demostra a [6], [7] i [5].

Teorema 4.3.4. ([6]) *Els següents enunciats són equivalents:*

- *Llei de Muir dels menors extensibles*
- *Llei de Cayley dels complementaris*
- *Principi d'extensió de Mühlbach*
- *Principi d'extensió de Camargo*
- *Identitat de Mühlbach-Gasca-(López-Carmona)-Ramírez*
- *Identitat de Beckerman-Mühlbach*
- *Identitat de Sylvester per a determinants fronterers*

- *Identitat de Jacobi*

Observació 4.3.5. ([5]) Als articles esmentats es demostren les primeres sis equivalències provant les implicacions i inclusions que es presenten al següent esquema:



Per tant, les sis lleis d'extensió i les dues identitats determinantal esmentades (de Sylvester per a determinants fronterers i de Jacobi) són enunciats equivalents.

De fet, l'any 1993 a l'article *On identities satisfied by minors of a matrix* publicat a “Advanced mathematics” per Bernard Leclerc, matemàtic francès, es demostra que pràcticament totes les identitats determinantal conegudes són casos particulars d'una identitat determinantal general enunciada per Herbert Turnbull, matemàtic anglès, el 1909 [6].

Capítol 5

Conclusions

Si repassem les pàgines anteriors, podem concloure que la rellevància del complement de Schur ha quedat patent. Hem pogut veure que es tracta d'una eina present en molts àmbits molt diversos de les matemàtiques que simplifica, de manera considerable, algorismes, proves i fórmules, encara que la seva utilització de forma conscient i explícita sigui relativament moderna.

Les diferents fórmules i identitats determinantal proposades per Richard Brualdi i Hans Schneider a [4] han quedat provades i exemplificades, així com relacionades amb els continguts del primer capítol.

Finalment, hem pogut veure amb certa profunditat la Llei de Muir dels menors extensibles i la Llei de Cayley dels complementaris, les dues lleis d'extensió d'identitats determinantal més rellevants, i les seves demostracions, aplicacions i implicacions en l'equivalència d'identitats determinantal exposada a les últimes línies del treball, que les relaciona amb altres lleis d'extensió.

Alguns fronts no han quedat prou resolts com seria la demostració explícita d'aquesta equivalència d'identitats determinantal, el Teorema 4.3.4, a causa de la limitació d'extensió i durada del treball. Per a aprofundir en aquesta secció, recomano la lectura de [6], [7] i [5], on es proven les implicacions que es mostren a l'esquema de l'Observació 4.3.5.

En un pla més personal, considero que la realització d'aquest treball ha suposat el tancament de la meua etapa universitària, no només de forma literal sinó també en el sentit més metafòric, que m'ha donat la possibilitat de posar en pràctica i revalorar els coneixements que he adquirit en els últims quatre anys. M'ha permès prendre consciència de la meua capacitat per llegir, entendre i, fins i tot en alguns casos, ampliar articles acadèmics complexos que tracten conceptes que no havia vist anteriorment.

No només m'ha possibilitat estudiar un dels meus camps preferits de les matemàtiques, sinó que, a més, ha estat una forma de reconciliar-me amb aquelles parts del grau que en algun moment no em van motivar, però que van dotar-me de la constància i força de voluntat que m'han permès enfrontar-me al repte que ha suposat el Treball de fi de grau.

Bibliografia

- [1] Aitken, A. C. *Determinants and Matrices*. 3a ed. Londres: Oliver and Boyd, 1944.
- [2] Beckermann, B.; Mühlbach, G. A general determinantal identity of Sylvester type and some applications. A *Linear algebra and its applications*. Alemanha: Elsevier, 1994. Vol. 197-198, p. 93-112.
- [3] Brezinski, C. Other manifestations of the Schur complement. A: *Linear algebra and its applications*. França: Elsevier, 1988. Vol. 111, p. 231-247.
- [4] Brualdi, R. A.; Schneider, H. Determinantal identities: Gauss, Schur, Sylvester, Kronecker, Jacobi, Binet, Laplace, Muir, and Cayley. A: *Linear algebra and its applications*. Wisconsin, EEUU: Elsevier, 1983. Vol. 52-53, p. 769-791.
- [5] Camargo, A. A generalization of Mühlbach's extension principle for determinantal identities. A *Linear and Multilinear Algebra*. Brasil: 2013. Vol. 61.
- [6] Camargo, A.; Alves, F. Can Sylvester's determinantal identity, equivalently Muir's law of extensible minors be generalized?. A: *Linear algebra and its applications*. Brasil: Elsevier, 2015. Vol. 482, p. 70-83.
- [7] Camargo, A. On some determinantal identities formation laws. A: *Linear and Multilinear Algebra*. Brasil: 2014. Vol. 63, p. 1760.
- [8] Cottle, R. W. Manifestations of the Schur complement. A: *Linear algebra and its applications*. California, EEUU: Elsevier, 1974. Vol. 8, núm. 3, p. 189-211.
- [9] Dym, H; Katsnelson, V. Contributions of Issai Schur to analysis. A *arXiv* [en línea]. Israel: 2007. [consulta: 2 de juny de 2022]. Disponible a <<https://arxiv.org/abs/0706.1868>>
- [10] Zhang, F. *The Schur complement and its applications*. Brezinsky, C. (ed.). EEUU: Springer, 2015. Numerical methods and algorithms, 4. ISBN 0387242716.