



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques  
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

---

# TEOREMA DE CARLESON

---

Autor: David Armengol i Camps

Director: Dr. Martí Prats Soler

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 24 de gener de 2023

# Índex

<b>1</b>	<b>Introducció</b>	<b>1</b>
1.1	Historia . . . . .	1
1.2	Operadors bàsics . . . . .	3
1.3	Resultats bàsics . . . . .	5
1.4	Notació . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Descomposició</b>	<b>8</b>
2.1	Operador de Carleson . . . . .	8
2.2	Rajoles . . . . .	10
2.3	Les funcions $\varphi_s$ . . . . .	11
2.4	L'operador $Q_\xi$ . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Els lemes centrals</b>	<b>18</b>
3.1	Relació d'ordre $\leq$ . . . . .	19
3.1.1	Arbres . . . . .	19
3.2	Funcions . . . . .	20
3.2.1	Recompte . . . . .	20
3.2.2	Densitat . . . . .	20
3.2.3	Mida . . . . .	21
3.3	Lemes . . . . .	22
3.3.1	Lema de la densitat . . . . .	22
3.3.2	Lema de la mida . . . . .	22
3.3.3	Lema de l'arbre . . . . .	22
3.4	Argument principal . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Lema de la densitat</b>	<b>24</b>
4.1	Lema de la densitat . . . . .	24
4.2	Construcció . . . . .	24
4.3	Demostració . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Lema de la mida</b>	<b>27</b>
5.1	Lema de la mida . . . . .	27
5.2	Construcció . . . . .	27
5.3	Demostració . . . . .	27
5.3.1	Primera fita . . . . .	29
5.3.2	Segona fita . . . . .	29

<b>6</b>	<b>Lema de l'arbre</b>	<b>31</b>
6.1	Lema de l'arbre . . . . .	31
6.2	Demostració . . . . .	31
6.2.1	Primera fita . . . . .	32
6.2.2	Segona fita . . . . .	32
<b>7</b>	<b>Conclusions</b>	<b>35</b>

## Resum

El teorema de Carleson afirma que per totes les funcions de l'espai  $L^2(\mathbb{R})$  és possible recuperar la funció original a partir de la seva transformada de Fourier gairebé per tot punt del domini. Aquest resultat és una generalització d'un de més elemental aplicat a l'espai de funcions de Schwartz que se sol estudiar en els cursos d'anàlisi harmònica. En aquest treball estudiarem i demostrarem aquest fet.

## Motivació

Va ser al llarg del 3r i 4t curs del grau de matemàtiques quan vaig començar a pensar idees pel TFG. Des del primer moment vaig descartar que el tema estigués relacionat amb geometria, ja que és de les temàtiques que m'agraden menys. Per internet vaig aconseguir trobar un llibre que porta per títol “Los principios de la aritmética expuestos según un nuevo método” [Gui79] que és una traducció simultània del llatí al castellà del llibre del matemàtic italià Giuseppe Peano on construeix els nombres naturals i totes les seves operacions de manera axiomàtica per primer cop a la història. El llibre està escrit en una notació creada per ell mateix i vaig pensar que seria interessant comentar el llibre i el context històric tot passant l'escrit a una notació més moderna per tal que pugui arribar a un públic més general. Una altra idea que vaig tenir va ser la d'escollir algunes distribucions de probabilitat més aviat poc utilitzades, estudiar-les matemàticament i veure quines aplicacions tindrien a la vida real. Fins i tot fer algun experiment o estudi estadístic on siguin útils. Cap d'aquestes dues em va arribar a convèncer del tot.

Durant el curs acadèmic 2021/2022 em vaig dedicar a cursar les optatives del grau de matemàtiques. Això em va permetre aprofundir en diversos camps com l'anàlisi, la probabilitat o la topologia. L'assignatura que em va cridar més l'atenció va ser la que tenia per nom anàlisi harmònica i teoria del senyal. Un dels motius va ser que tractava sobre un objecte matemàtic molt famós i a la vegada molt desconegut per mi: la transformada de Fourier. Tenia una aura misteriosa i de summa importància. Un altre motiu era que com a músic sentia intriga per entendre millor això dels harmònics, ja que molta gent en parlava però no s'explicava ben bé el que era. Sabia que era un concepte més aviat matemàtic que es podia aplicar a les ones sonores per tal d'estudiar-les.

L'assignatura em va encantar. Barrejava molts conceptes d'anàlisi real i de teoria de la mesura com les sèries, els límits i els espais  $L^p(\mathbb{R})$ ; i n'introduïa de nous com el de convolució o el de distribució tot fent un sopa d'idees per arribar a teoremes tan importats com el principi d'incertesa de Heisenberg o del que tracta aquest treball: el teorema de Carleson.

## Objectius

Aquest treball té com a objectius anunciar i demostrar el teorema de Carleson. És un resultat profund i amb moltes sotileses. S'intentarà entrar en el màxim detall possible sempre que ho arribi a entendre i no allargui molt el nombre de pàgines.

## Metodologia

Per dur a terme aquest treball utilitzaré principalment dues fonts: els papers escrits pel Dr. Michael Lacey referents al teorema de Carleson i la seva demostració. Els anomenaré d'una manera prou descriptiva: el curt [iCT] i el llarg [Lac]. El curt té com a coautor el Dr. Christoph Thiele. Cada setmana, sempre que sigui possible, realitzaré una tutoria amb el meu professor per resoldre dubtes, per buscar el sentit i la motivació dels resultats i per verificar les demostracions. Per organitzar el treball i el temps faré ús del web <http://www.notion.so>.

# 1 Introducció

## 1.1 Historia

Primerament per situar una mica el treball explicarem molt ràpidament la història de l'anàlisi harmònica agafant de referència el pròleg del llibre "A panorama of Harmonic analysis" [Kra99] i n'anunciarem un seguit de definicions i resultats essencials extrets dels apunts de l'assignatura homònima del meu tutor: el Dr. Martí Prats i Soler [Pra22].

L'anàlisi harmònica és una disciplina matemàtica que sorgeix de l'estudi de l'equació d'ona durant el segle XVIII.

**Definició 1.1** (Equació d'ona). *Definim l'equació diferencial en derivades parcials:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (1.1)$$

Fou de vital importància la seva resolució ja que molts fenòmens físics es basen ella com per exemple la propagació d'ones com podria ser el so, els fluids com l'aigua o la calor. S'utilitza en la resolució d'equacions diferencials en derivades parcials, en física, en enginyeria, en teoria de nombres i en molts altres contextos.

El matemàtic suís Daniel Bernoulli va demostrar utilitzant el mètode de separació de variables que existeixen infinites solucions de l'equació d'ona de la forma:

$$\varphi_t(x, t) = \sin(jx) \cos(jt). \quad (1.2)$$

La pregunta que sorgeix a continuació és si la superposició arbitrària d'aquestes solucions també resol el problema, és a dir, són les expressions

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sin(jx) \cos(jt) \quad (1.3)$$

solucions de l'equació d'ona? És amb aquesta pregunta que nasqué l'anàlisi harmònica.

El matemàtic francès Joseph Fourier és el principal exponent de l'anàlisi harmònica i molts resultats i objectes matemàtics porten el seu nom. Les sèries de Fourier van ser introduïdes per ell a principis del segle XIX. A continuació en parlarem un mica.

Totes les funcions seran funcions reals  $2\pi$  periòdiques. La idea és aproximar funcions periòdiques com a suma de sin i cos seguint la idea d'aproximar funcions per polinomis que va estudiar el matemàtic britànic Brook Taylor.

**Definició 1.2.** *Un polinomi trigonomètric d'ordre  $M$  és una funció  $f$  del tipus:*

$$f(\theta) = \sum_{n=-M}^M a_n e^{in\theta} \quad (1.4)$$

on  $a_n \in \mathbb{C}$ .

Recordem la fórmula d'Euler que relaciona la funció exponencial amb les funcions trigonomètriques. Per tot nombre real  $x \in \mathbb{R}$  es compleix que:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x). \quad (1.5)$$

Aleshores un polinomi trigonomètric no deixa de ser una combinació lineal del conjunt de funcions  $\{\sin(n\theta) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\cos(n\theta) \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

**Lema 1.3.** *Per tot polinomi trigonomètric podem recuperar els coeficients de la següent manera:*

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta. \quad (1.6)$$

A partir d'aquest principi Fourier ho va generalitzar per funcions periòdiques qualssevol.

**Definició 1.4.** *Definim l'enèsim coeficient de Fourier per tot enter  $n \in \mathbb{Z}$  de la següent manera:*

$$\widehat{f}(n) = a_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta. \quad (1.7)$$

D'aquesta definició sorgeix infinitat de qüestions com les següents.

- Donada una funció qualsevol  $f$  com podem trobar els seus coeficients  $a_n$ ?
- Donada la successió de coeficients com podem reconstruir la funció original?
- Si la sèrie de Fourier convergeix ho fa puntualment, uniformement, en norma...? Quina és la velocitat de convergència?
- Si la sèrie de Fourier convergeix a una funció límit és aquesta la mateixa funció original?
- Quines funcions es poden representar mitjançant les sèries de Fourier. N'hi ha prou en què sigui contínua, diferenciable o integrable?
- Quina informació ens donen els coeficients de la funció original?

Podem trobar fórmules i raonaments similars per funcions periòdiques de període  $L$ . Ara la pregunta és si té sentit representar funcions arbitràries no necessàriament periòdiques com a suma de sin i cos. Resulta que sí, podem fer un pas al límit passant del cas discret al cas continu convertint d'aquesta manera la suma en un integral i arribant a la següent definició.

**Definició 1.5** (Transformada de Fourier). *Per tota funció integrable  $f \in L^1(\mathbb{R})$  definim:*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx. \quad (1.8)$$

**Definició 1.6** (Transformada de Fourier inversa). *Per tota funció integrable  $f \in L^1(\mathbb{R})$  definim:*

$$\check{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi i \xi x} dx. \quad (1.9)$$

**Definició 1.7** (Funcions de Schwartz). *Són les funcions infinitament diferenciables i decaïment ràpid:*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall k, j \in \mathbb{N}, \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ |x|^k |f^{(j)}(x)| \right\} < \infty \right\}. \quad (1.10)$$

**Lema 1.8.** *Les funcions de Schwartz són denses a l'espai  $L^2(\mathbb{R})$ .*

**Definició 1.9** (Convulució). *Per tot parell de funcions de Schwartz  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  definim la següent operació:*

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dy. \quad (1.11)$$

## 1.2 Operadors bàsics

Introduïm els operadors associats a la translació, la modulació i la dilatació de la recta real.

**Definició 1.10** (Operador de translació). *Per tota funció real  $f$  i per tota constant  $y \in \mathbb{R}$  definim el següent operador:*

$$\text{Tr}_y f(x) := f(x-y). \quad (1.12)$$

**Definició 1.11** (Operador de modulació). *Per tota funció real  $f$  i per tota constant  $\xi \in \mathbb{R}$  definim el següent operador:*

$$\text{Mod}_\xi f(x) := f(x)e^{2\pi i \xi x}. \quad (1.13)$$

**Definició 1.12** (Operador de dilatació). *Per tota funció real  $f$  i per totes constants  $\lambda, p \in \mathbb{R}$  amb  $1 \leq p \leq \infty$  definim el següent operador:*

$$\text{Dil}_\lambda^p f(x) := \lambda^{-\frac{1}{p}} f\left(\frac{x}{\lambda}\right). \quad (1.14)$$

**Lema 1.13.** *Els operadors que acabem de definir preserven la norma dels espais  $L^p(\mathbb{R})$ .*

*Demostració.* Utilitzant els canvis de variable usuals ho demostrarem.

$$\begin{aligned} \|\text{Tr}_y f\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^p dx \stackrel{(x-y=z)}{=} \int_{\mathbb{R}} |f(z)|^p dz = \|f\|_p^p \\ \|\text{Mod}_\xi f\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}} |f(x)e^{2\pi i \xi x}|^p dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx = \|f\|_p^p \\ \|\text{Dil}_\lambda^p f\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}} \left| \lambda^{-\frac{1}{p}} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right|^p dx \stackrel{\left(\frac{x}{\lambda}=y\right)}{=} \int_{\mathbb{R}} |f(y)|^p dx = \|f\|_p^p \end{aligned}$$

□

**Observació 1.14.** La constant  $\lambda^{-\frac{1}{p}}$  de l'operador de dilatació té com a propòsit que es compleixi aquest fet.

Veiem també com es comporten amb la transformada de Fourier.

**Lema 1.15.** *Per totes  $y, \xi, \lambda, p \in \mathbb{R}$  amb  $1 \leq p \leq \infty$  es compleix el següent.*

$$\widehat{\text{Tr}_y} = \text{Mod}_{-y} \quad (1.15)$$

$$\widehat{\text{Mod}_\xi} = \text{Tr}_\xi \quad (1.16)$$

$$\widehat{\text{Dil}_\lambda^p} = \text{Dil}_{\frac{1}{\lambda}}^{p'} \quad (1.17)$$

*Recordem que  $p'$  denota el conjugat de  $p$ , és a dir,  $p' = \frac{p}{p-1}$ .*



*Demostració.* També es demostra usant els canvis de variable usuals.

$$\begin{aligned}\widehat{\text{Tr}}_y f(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \text{Tr}_y f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) e^{-2\pi i \xi x} dx \stackrel{(x-y=z)}{=} \int_{\mathbb{R}} f(z) e^{-2\pi i \xi(z+y)} dz = \\ &= e^{-2\pi i \xi y} \int_{\mathbb{R}} f(z) e^{-2\pi i \xi z} dz = \text{Mod}_{-y} \widehat{f}(\xi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\text{Mod}}_{\xi} f(\zeta) &= \int_{\mathbb{R}} \text{Mod}_{\xi} f(x) e^{-2\pi i \zeta x} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi i \xi x} e^{-2\pi i \zeta x} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i (\zeta - \xi)x} dx = \\ &= \widehat{f}(\zeta - \xi) = \text{Tr}_{\xi} \widehat{f}(\zeta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\text{Dil}}_{\lambda}^p f(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \text{Dil}_{\lambda}^p f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{\mathbb{R}} \lambda^{-\frac{1}{p}} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) e^{-2\pi i \xi x} dx \stackrel{\left(\frac{x}{\lambda}=y\right)}{=} \int_{\mathbb{R}} \lambda^{1-\frac{1}{p}} f(y) e^{-2\pi i \xi \lambda y} dy = \\ &= \lambda^{1-\frac{1}{p}} \widehat{f}(\lambda \xi) = \text{Dil}_{\frac{1}{\lambda}}^p \widehat{f}(\xi)\end{aligned}$$

□

Aquests operadors tenen les següents propietats essencials que farem servir durant tota la demostració.

Compondre un operador de translació amb un altre operador de translació resulta amb l'operador de translació amb les constants sumades. El mateix passa pels operadors de modulació. En canvi pels operadors de dilatació les constants queden multiplicades. Les composicions creuades commuten de certa manera. Ho veiem a continuació.

**Lema 1.16.** *Per tots nombres reals  $y, z, \xi, \zeta, \lambda, \mu, p, \in \mathbb{R}$  on  $\lambda, \mu > 0$  i  $1 \leq p \leq \infty$  es compleix la següent taula de composicions.*

Taula 1: Composicions d'operadors

$\circ$	$\text{Tr}_z$	$\text{Mod}_{\zeta}$	$\text{Dil}_{\mu}^p$
$\text{Tr}_y$	$\text{Tr}_{y+z}$	$e^{-2\pi i \zeta y} \text{Mod}_{\zeta} \circ \text{Tr}_y$	$\text{Dil}_{\mu}^p \circ \text{Tr}_{\frac{y}{\mu}}$
$\text{Mod}_{\xi}$	$e^{2\pi i \xi y} \text{Tr}_z \circ \text{Mod}_{\xi}$	$\text{Mod}_{\xi+\zeta}$	$\text{Dil}_{\mu}^p \circ \text{Mod}_{\xi \mu}$
$\text{Dil}_{\lambda}^p$	$\text{Tr}_{\lambda z} \circ \text{Dil}_{\lambda}^p$	$\text{Mod}_{\frac{\zeta}{\lambda}} \circ \text{Dil}_{\lambda}^p$	$\text{Dil}_{\lambda \mu}^p$

En demostrem alguna. Totes es demostren d'una manera senzilla aplicant les definicions i les regles de composició de funcions.

*Demostració.*

$$\text{Tr}_y \text{Tr}_z f(x) = \text{Tr}_y f(x-z) = f(x-z-y) = f(x-(y+z)) = \text{Tr}_{y+z} f(x).$$

$$\text{Tr}_y \text{Dil}_{\mu}^p f(x) = \text{Tr}_y \mu^{-\frac{1}{p}} f\left(\frac{x}{\mu}\right) = \mu^{-\frac{1}{p}} f\left(\frac{x-y}{\mu}\right) = \text{Dil}_{\mu}^p f\left(x - \frac{y}{\mu}\right) = \text{Dil}_{\mu}^p \text{Tr}_{\frac{y}{\mu}} f(x).$$

$$\begin{aligned}\text{Mod}_\xi \text{Dil}_\mu^p f(x) &= \text{Mod}_\xi \mu^{-\frac{1}{p}} f\left(\frac{x}{\mu}\right) = \mu^{-\frac{1}{p}} f\left(\frac{x}{\mu}\right) e^{2\pi i \xi x} = \text{Dil}_\mu^p f(x) e^{2\pi i \xi \mu x} = \\ &= \text{Dil}_\mu^p \text{Mod}_{\xi \mu} f(x).\end{aligned}$$

□

Aquests operadors també presenten un bon comportament amb el producte escalar.

**Lema 1.17.** *Per totes  $y, \xi, \lambda, p \in \mathbb{R}$  amb  $1 \leq p \leq \infty$  es compleix el següent.*

$$\langle \text{Tr}_y f, g \rangle = \langle f, \text{Tr}_{-y} g \rangle \quad (1.18)$$

$$\langle \text{Mod}_\xi f, g \rangle = \langle f, \text{Mod}_{-\xi} g \rangle \quad (1.19)$$

$$\langle \text{Dil}_\lambda^p f, g \rangle = \langle f, \text{Dil}_{\frac{1}{\lambda}}^{p'} g \rangle \quad (1.20)$$

*Demostració.* Fent servir les definicions del producte escalar i dels operadors i els canvis de variable usuals podem demostrar-ho.

$$\begin{aligned}\langle \text{Tr}_y f, g \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \text{Tr}_y f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \overline{g(x)} dx \stackrel{(x-y=z)}{=} \int_{\mathbb{R}} f(z) \overline{g(z+y)} dz = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(z) \overline{\text{Tr}_{-y} g(z)} dz = \langle f, \text{Tr}_{-y} g \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \text{Mod}_\xi f, g \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \text{Mod}_\xi f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi i \xi x} \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x) e^{-2\pi i \xi x}} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\text{Mod}_{-\xi} g(x)} dx = \langle f, \text{Mod}_{-\xi} g \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \text{Dil}_\lambda^p f, g \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \text{Dil}_\lambda^p f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \lambda^{-\frac{1}{p}} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \overline{g(x)} dx \stackrel{(\frac{x}{\lambda}=y)}{=} \int_{\mathbb{R}} \lambda^{1-\frac{1}{p}} f(y) \overline{g(\lambda y)} dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \overline{\lambda^{1-\frac{1}{p}} g(\lambda y)} dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) \overline{\text{Dil}_{\frac{1}{\lambda}}^{p'} g(y)} dy = \langle f, \text{Dil}_{\frac{1}{\lambda}}^{p'} g \rangle\end{aligned}$$

□

### 1.3 Resultats bàsics

**Definició 1.18** (Aproximació de la identitat). *Una aproximació de la identitat en  $\mathbb{R}$  és una família de funcions integrables  $\{K_t\}_{t \in A} \subset L^1(\mathbb{R})$ , on  $A$  és un conjunt d'índexs juntament amb un punt d'acumulació  $t_0 \in \overline{A}$  amb les següents propietats:*

1. *Les funcions  $K_t$  tenen integral unitària:*

$$\int_{\mathbb{R}} K_t(x) dx = 1. \quad (1.21)$$

2. *Les funcions  $K_t$  tenen massa uniformament afitada, és a dir, existeix una constant  $C \in \mathbb{R}$  tal que per tot  $t \in A$  compleix:*

$$\int_{\mathbb{R}} |K_t(x)| dx \leq C. \quad (1.22)$$

3. La massa de  $K_t$  es concentra a prop de  $x = 0$  a mida que el paràmetre s'acosta a  $t_0$ , és a dir, per tot  $\delta > 0$  es compleix:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_{|x| > \delta} |K_t(x)| dx = 0. \quad (1.23)$$

Aleshores podem anunciar el següent teorema.

**Teorema 1.19** (Teorema de l'aproximació a la identitat). *Sigui  $\{K_t\}_{t \in A}$  una aproximació de la identitat quan  $t \rightarrow t_0$ . Si  $f, K_t \in L^1(\mathbb{R})$  i  $x$  és un punt de continuïtat de  $f$ , aleshores la convolució  $f * K_t$  convergeix puntualment en  $x$  a  $f$  quan  $t \rightarrow t_0$ . Si, a més a més,  $f$  és uniformament contínua, aleshores la convolució  $f * K_t$  convergeix uniformament a  $f$  quan  $t \rightarrow t_0$ , és a dir,*

$$\lim_{\substack{t \in A \\ t \rightarrow t_0}} \|f * K_t - f\|_\infty = 0. \quad (1.24)$$

**Proposició 1.20** (Identitat de Plancherel). *Tota funció de Schwartz  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  compleix que:*

$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2. \quad (1.25)$$

**Definició 1.21** (Campanes de Gauss). *Per tota  $x \in \mathbb{R}$  definim:*

$$G(x) := e^{-\pi x^2}. \quad (1.26)$$

*Aquesta funció permet obtenir l'aproximació a la identitat següent per  $t > 0$ :*

$$G_t(x) := \text{Dil}_t^1 G(x) = t^{-1} e^{-\pi \frac{x^2}{t^2}}. \quad (1.27)$$

**Lema 1.22** (Fórmula de la multiplicació). *Per totes funcions de Schwartz  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  es compleix el següent:*

$$\int_{\mathbb{R}} f(\xi) \widehat{g}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\zeta) g(\zeta) d\zeta. \quad (1.28)$$

*Demostració.* Utilitzant el teorema de Fubini tenim:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \widehat{g}(\xi) d\xi &= \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \int_{\mathbb{R}} g(\zeta) e^{-2\pi i \zeta \xi} d\zeta d\xi = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi) g(\zeta) e^{-2\pi i \zeta \xi} d\zeta d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi) g(\zeta) e^{-2\pi i \zeta \xi} d\xi d\zeta = \int_{\mathbb{R}} g(\zeta) \int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{-2\pi i \zeta \xi} d\xi d\zeta \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(\zeta) \widehat{f}(\zeta) d\zeta = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\zeta) g(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

□

**Teorema 1.23** (Teorema de la inversió de Fourier). *Sigui  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Aleshores per tota  $x \in \mathbb{R}$  es compleix que:*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi \quad (1.29)$$

*o equivalentment:*

$$f(x) = \widetilde{\widehat{f}}(x) = \widehat{\widetilde{f}}(x). \quad (1.30)$$

*Demostració.* Definim la funció  $g$  a partir de la seva transformada de Fourier:

$$\widehat{g}(s) := t^{-1} e^{-\pi \frac{(x-s)^2}{t^2}} = G_t(x-s) = G_t(s-x) = \text{Tr}_x \text{Dil}_t^1 G(s). \quad (1.31)$$

Aleshores aplicant el lema 1.15 a la inversa obtenim la funció original:

$$g(\zeta) = \text{Mod}_x \text{Dil}_{\frac{1}{t}}^\infty G(\zeta) = e^{2\pi i x \zeta} e^{-\pi(t\zeta)^2}. \quad (1.32)$$

Tot això ens permet fer el següent raonament:

$$\begin{aligned} f(x) &\stackrel{1.19}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f(s) G_t(x-s) ds \stackrel{1.22}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\zeta) e^{2\pi i x \zeta} e^{-\pi(t\zeta)^2} d\zeta = \\ &\stackrel{TC D}{=} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\zeta) e^{2\pi i x \zeta} \lim_{t \rightarrow 0} e^{-\pi(t\zeta)^2} d\zeta = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\zeta) e^{2\pi i x \zeta} d\zeta. \end{aligned}$$

Hem fet servir els següents teoremes en ordre: teorema de l'aproximació a la identitat, fórmula de la multiplicació i teorema de la convergència dominada. □

Hem definit la transformada de Fourier per funcions integrables. Com que la classe de Schwartz és densa dins l'espai  $L^2(\mathbb{R})$  i la transformada de Fourier preserva la norma  $L^2$  de les funcions de Schwartz podem estendre la definició de la transformada de Fourier a l'espai  $L^2(\mathbb{R})$  per densitat.

**Lema 1.24.** *La transformada de Fourier és un operador unitari de l'espai  $L^2(\mathbb{R})$ . Per tot parell de funcions de quadrat integrable  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  es compleix que:*

$$\langle f, g \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle. \quad (1.33)$$

També serà cert el teorema de la inversió de Fourier a l'espai  $L^2(\mathbb{R})$ ? Això és el que tracta el teorema de Carleson.

## 1.4 Notació

Al llarg d'aquest treball utilitzarem la següent notació.

- Per totes  $A, B \in \mathbb{R}$ :

$$A \lesssim B \iff \exists K \in \mathbb{R}, A \leq KB \quad (1.34)$$

- La funció indicador del conjunt  $A \subset \mathbb{R}$  es denota per  $\mathbf{1}_A$ .
- Per tot operador  $T$  de  $L^p(\mathbb{R})$  a  $L^p(\mathbb{R})$ ,  $\|T\|_p$  denota la seva norma.
- Per tot interval  $J$  i per tota constant  $c \in \mathbb{R}$  positiva  $cJ$  denota l'interval amb el mateix centre que  $J$  i de mida  $c|J|$ .
- Per tot interval  $J$ ,  $c(J)$  serà el seu centre.

## 2 Descomposició

Anunciarem el teorema de Carleson, l'operador del qual depèn i el descompondrem de tal manera que sigui més manejable.

### 2.1 Operador de Carleson

**Definició 2.1** (Operador de Carleson). *Per tota funció de quadrat integrable  $f \in L^2(\mathbb{R})$  i per tota  $x \in \mathbb{R}$  definim:*

$$\mathcal{C}f(x) := \sup_{a \in \mathbb{R}} \left| \int_{-\infty}^a \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \right|. \quad (2.1)$$

**Lema 2.2.** *L'operador de Carleson és absolutament homogeni i subadditiu, és a dir, per totes funcions de quadrat integrable  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  i per tota  $\lambda \in \mathbb{R}$  es compleix:*

$$\mathcal{C}(\lambda f) = |\lambda| \mathcal{C}f, \quad (2.2)$$

$$\mathcal{C}(f + g) \leq \mathcal{C}f + \mathcal{C}g. \quad (2.3)$$

*Demostració.* Per la linealitat de la transformada de Fourier i de la integral i com que les costants surten fora del suprem:

$$\mathcal{C}(\lambda f)(x) = \sup_{a \in \mathbb{R}} \left| \int_{-\infty}^a \widehat{\lambda f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \right| = |\lambda| \sup_{a \in \mathbb{R}} \left| \int_{-\infty}^a \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \right| = |\lambda| \mathcal{C}f(x).$$

Per les propietats que acabem de mencionar i per la desigualtat triangular:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(f + g)(x) &= \sup_{a \in \mathbb{R}} \left| \int_{-\infty}^a \widehat{f + g}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \right| \leq \\ &\leq \sup_{a \in \mathbb{R}} \left| \int_{-\infty}^a \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \right| + \sup_{a \in \mathbb{R}} \left| \int_{-\infty}^a \widehat{g}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \right| = \mathcal{C}f(x) + \mathcal{C}g(x). \end{aligned}$$

□

**Teorema 2.3** (Teorema de Carleson). *Per tota funció de quadrat integrable  $f \in L^2(\mathbb{R})$  es compleix la següent igualtat gairebé per tot punt del domini  $x \in \mathbb{R}$ :*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi. \quad (2.4)$$

**Proposició 2.4** (Fita de Carleson). *L'operador de Carleson és un operador 2 feble, és a dir, per tota funció de quadrat integrable  $f \in L^2(\mathbb{R})$  i per tota  $\lambda \in \mathbb{R}$  amb  $\lambda > 0$  es compleix:*

$$|\{ \mathcal{C}f(x) > \lambda \}| \lesssim \frac{\|f\|_2^2}{\lambda^2}. \quad (2.5)$$

Si suposem que la fita de Carleson és certa podem demostrar el teorema de Carleson de la següent manera.

*Demostració.* Per cada  $f \in L^2(\mathbb{R})$  volem demostrar que:

$$L_f(x) := \limsup_{a \rightarrow \infty} \left| f(x) - \int_{-\infty}^a \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \right| = 0 \quad \text{g.p.t. } x \in \mathbb{R} \quad (2.6)$$

N'hi ha prou en veure que per tota  $\epsilon > 0$ ,  $|\{L_f > \epsilon\}| \lesssim \epsilon$  ja que aleshores es compleix que  $|\{L_f > \epsilon\}| = 0$ . Fixem una funció infinitament diferenciable i de suport compacte  $g$  tal que  $\|f - g\|_2 \leq \epsilon^3$ . Això ho podem fer per la densitat d'aquestes funcions en l'espai  $L^2(\mathbb{R})$ .

Es compleix la desigualtat següent:

$$L_f \leq \mathcal{C}(f - g) + |f - g|. \quad (2.7)$$

Ho demostrem. El teorema de la inversió de la transformada de Fourier val per  $g$  al ser de Schwartz. Sumant i restant aquesta funció i per la desigualtat triangular obtenim que:

$$\begin{aligned} L_f(x) &= \limsup_{a \rightarrow \infty} \left| f(x) - g(x) + g(x) - \int_{-\infty}^a \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \right| \leq \\ &\leq |f(x) - g(x)| + \limsup_{a \rightarrow \infty} \left| \int_{-\infty}^a \widehat{f - g}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \right|. \end{aligned}$$

I com que el lim sup sempre és més petit que el sup tenim la desigualtat desitjada.

Finalment per la fita (2.5), la desigualtat que acabem de veure i el fet que  $|f + g| \geq 0$  tenim:

$$|\{L_f > \epsilon\}| \leq |\{\mathcal{C}(f - g) + |f + g| > \epsilon\}| \leq |\{\mathcal{C}(f - g) > \epsilon\}| \stackrel{(2.5)}{\lesssim} \frac{\|f - g\|_2}{\epsilon^2} \lesssim \frac{\epsilon^3}{\epsilon^2} = \epsilon,$$

que és exactament el que volíem demostrar.  $\square$

Aleshores tota la feina estarà en demostrar la proposició 2.4, és a dir, veure que l'operador de Carleson és un operador 2 feble.

L'operador de Carleson presenta un bon comportament amb els operadors definits a 1.10, 1.11 i 1.12: commuta amb els operadors de translació i dilatació i és invariant amb els operadors de modulació.

**Proposició 2.5.** *Per tota  $y, \xi, \lambda \in \mathbb{R}$  amb  $\lambda > 0$  es compleix que:*

$$\text{Tr}_y \circ \mathcal{C} = \mathcal{C} \circ \text{Tr}_y, \quad (2.8)$$

$$\text{Dil}_\lambda^2 \circ \mathcal{C} = \mathcal{C} \circ \text{Dil}_\lambda^2, \quad (2.9)$$

$$\mathcal{C} \circ \text{Mod}_\xi = \mathcal{C}. \quad (2.10)$$

*Demostració.* Utilitzant simplement les definicions obtenim (2.8):

$$\begin{aligned} (\text{Tr}_y \circ \mathcal{C})f(x) &= \text{Tr}_y \left( \sup_{a \in \mathbb{R}} \left| \int_{-\infty}^a \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \right| \right) = \sup_{a \in \mathbb{R}} \left| \int_{-\infty}^a \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i (x-y)\xi} d\xi \right| = \\ &= \mathcal{C}f(x - y) = (\mathcal{C} \circ \text{Tr}_y)f(x). \end{aligned}$$

Per veure (2.9) utilitzem que l'operador  $\mathcal{C}$  és absolutament homogeni:

$$(\text{Dil}_\lambda^2 \circ \mathcal{C})f(x) = \lambda^{-\frac{1}{2}} \mathcal{C}f\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \mathcal{C}\left(\lambda^{-\frac{1}{2}} f\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right) = (\mathcal{C} \circ \text{Dil}_\lambda^2)f(x).$$

Finalment per veure (2.9) utilitzem el canvi de variable ( $\zeta - \xi = \chi$ ):

$$\begin{aligned} (\mathcal{C} \circ \text{Mod}_\xi)f(x) &= \sup_{a \in \mathbb{R}} \left| \int_{-\infty}^a \widehat{\text{Mod}_\xi f}(\zeta) e^{2\pi i x \zeta} d\zeta \right| = \sup_{a \in \mathbb{R}} \left| \int_{-\infty}^a \widehat{f}(\zeta - \xi) e^{2\pi i x \zeta} d\zeta \right| = \\ &= \sup_{a \in \mathbb{R}} \left| \int_{-\infty}^{a-\xi} \widehat{f}(\chi) e^{2\pi i x(\chi+\xi)} d\chi \right| = \mathcal{C}f(x). \end{aligned}$$

□

El nostre mètode d'anàlisi haurà d'exhibir les mateixes propietats.

**Definició 2.6** (Operador  $P_-$ ). *Per tota funció de quadrat integrable  $f \in L^2(\mathbb{R})$  i per tota  $x \in \mathbb{R}$  definim el següent operador:*

$$P_-f(x) := \int_{-\infty}^0 \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi. \quad (2.11)$$

**Proposició 2.7.** *El operadors  $\mathcal{C}$  i  $P_-$  estan relacionats de la següent manera:*

$$\mathcal{C}f = \sup_{a \in \mathbb{R}} |P_-(\text{Mod}_a f)|. \quad (2.12)$$

*Demostració.* Utilitzant el canvi de variable  $\xi - a = y$ :

$$\begin{aligned} \sup_{a \in \mathbb{R}} |P_-(\text{Mod}_a f)(x)| &= \sup_{a \in \mathbb{R}} \left| \int_{-\infty}^0 \widehat{\text{Mod}_a f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \right| = \sup_{a \in \mathbb{R}} \left| \int_{-\infty}^0 \widehat{f}(\xi - a) e^{2\pi i x \xi} d\xi \right| = \\ &= \sup_{a \in \mathbb{R}} \left| \int_{-\infty}^{-a} \widehat{f}(y) e^{2\pi i x(y+a)} dy \right| = \mathcal{C}f(x). \end{aligned}$$

□

**Proposició 2.8.** *Llevat d'una constant  $P_-$  és l'únic operador fitat a  $L^2(\mathbb{R})$  que commuta amb els operadors de translació i de dilatació i el seu nucli són exactament les funcions tals que la seva transformada de Fourier té suport sobre l'interval  $[0, \infty)$ .*

L'objectiu és arribar a linearitzar l'operador  $P_-$ .

## 2.2 Rajoles

Dins la recta real definirem els intervals diàdics. Aquests ens permetran partir el pla i ens ajudaran a descomposar l'operador de Carleson.

**Definició 2.9** (Intervals diàdics). *Definim el següent conjunt d'intervals:*

$$\mathcal{D} := \{[j2^k, (j+1)2^k) \mid j, k \in \mathbb{Z}\}. \quad (2.13)$$

**Observacions 2.10.** La mesura d'un interval diàdic sempre és una potència de 2. Són invariants per dilatacions de potències de 2, és a dir, per tot  $I \in \mathcal{D}$  i per tot  $k \in \mathbb{Z}$  es compleix que  $2^k I = \{2^k x \mid x \in I\} \in \mathcal{D}$  on l'operació és la multiplicació de conjunts. Cada interval diàdic està contingut en un altre interval diàdic que té el doble de llargària. Dos intervals diàdics o són disjunts o un està contingut dins l'altre. Cada interval diàdic és la unió de les seves meitats esquerra i dreta que tenen la meitat de llargària i que també són intervals diàdics.

**Definició 2.11.** Per tot interval diàdic  $\omega \in \mathcal{D}$  definim la mitja part dreta i la mitja part esquerra:

$$\omega_+ := \omega \cap [c(\omega), \infty), \quad (2.14)$$

$$\omega_- := \omega \cap (-\infty, c(\omega)). \quad (2.15)$$

**Observació 2.12.** Aquests intervals segueixen sent diàdics.

**Definició 2.13.** Un rectangle és un element del conjunt  $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ .

**Definició 2.14.** Una rajola és un rectangle d'àrea 1. El conjunt de totes les rajoles el denotem per  $\mathcal{T}$ .

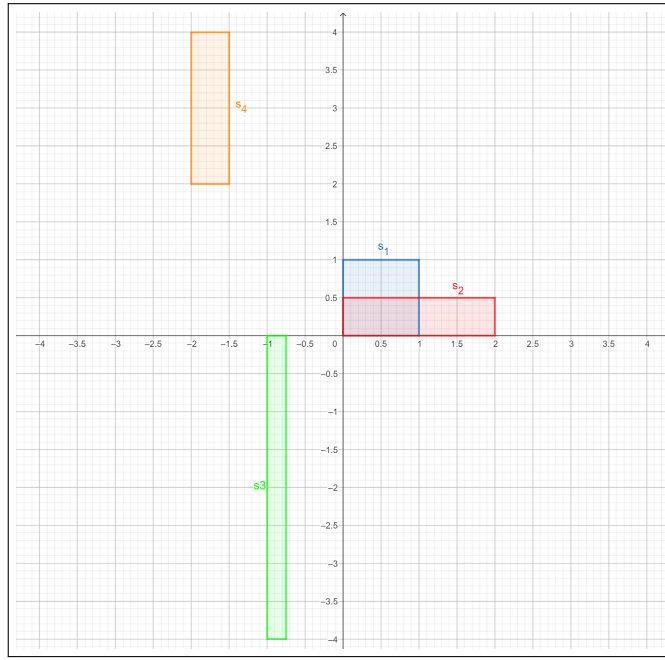


Figura 1: Exemples de rajoles

### 2.3 Les funcions $\varphi_s$

Fixem una funció de Schwartz  $\varphi$  tal que  $\widehat{\varphi}$  és real, no negativa, suportada sobre l'interval  $[-0.1, 0.1]$ , amb imatge continguda dins l'interval  $[0, 1]$  i igual a 1 sobre l'interval  $[-0.09, 0.09]$ . Per tant tenim que  $\mathbf{1}_{[-0.09, 0.09]} \leq \widehat{\varphi} \leq \mathbf{1}_{[-0.1, 0.1]}$ . Això és possible gràcies al lema d'Urysohn.

**Definició 2.15** (Funcions  $\varphi_s$ ). Per cada rajola  $s$  de  $\mathcal{T}$  definim:

$$\varphi_s := \text{Mod}_{c(\omega_{s-})} \text{Tr}_{c(I_s)} \text{Dil}_{|I_s|}^2 \varphi. \quad (2.16)$$

**Observacions 2.16.** La funció  $\varphi_s$  és essencialment la mateixa funció que  $\varphi$ . Ha sigut adaptada a la rajola  $s$  i sempre és recuperable fent les transformacions inverses.

La funció  $\varphi_s$  la podem expressar de la següent manera:

$$\varphi_s(x) = |I_s|^{-\frac{1}{2}} \varphi \left( \frac{x - c(I_s)}{|I_s|} \right) e^{2\pi i c(\omega_{s-})x}. \quad (2.17)$$



Tindrà com a transformada de Fourier la següent expressió:

$$\widehat{\varphi}_s = \text{Tr}_{c(\omega_{s-})} \text{Mod}_{-c(I_s)} \text{Dil}_{\frac{1}{|I_s|}}^2 \widehat{\varphi}, \quad (2.18)$$

que també la podem expressar d'aquesta manera:

$$\widehat{\varphi}_s(x) = |I_s|^{\frac{1}{2}} \widehat{\varphi}(|I_s|(x - c(\omega_{s-}))) e^{-2\pi i c(I_s)(x - c(\omega_{s-}))}. \quad (2.19)$$

**Lema 2.17.** *La funció  $\varphi_s$  té transformada de Fourier suportada sobre l'interval diàdic  $\omega_{s-}$ .*

*Demostració.* N'hi ha prou en fitar  $\widehat{\varphi}_s$  per l'indicador i entrar l'argument dins l'interval:

$$\begin{aligned} |\widehat{\varphi}_s(x)| &= |I_s|^{\frac{1}{2}} \widehat{\varphi}(|I_s|(x - c(\omega_{s-}))) \leq \mathbf{1}_{[-0.1, 0.1]}(|I_s|(x - c(\omega_{s-}))) = \\ &= \mathbf{1}_{[c(\omega_{s-}) - 0.1|I_s|, c(\omega_{s-}) + 0.1|I_s|]}(x) \leq \mathbf{1}_{\omega_{s-}}(x). \end{aligned}$$

□

Calculem la seva norma. Les modulacions i les translacions no afecten a la norma de l'espai  $L^1(\mathbb{R})$ . Fent el canvi de variable  $y = \frac{x}{|I_s|}$  tenim que:

$$\|\varphi_s\|_1 = \left\| \text{Mod}_{c(\omega_{s-})} \text{Tr}_{c(I_s)} \text{Dil}_{|I_s|}^2 \varphi \right\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |I_s|^{-\frac{1}{2}} \left| \varphi\left(\frac{x}{|I_s|}\right) \right| dx = |I_s|^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_1. \quad (2.20)$$

**Lema 2.18.** *Les funcions  $\varphi_s$  estan altament localitzades en la variable temporal al voltant de l'interval  $I_s$ . Per tant estan essencialment suportades en el pla de temps-freqüència sobre el rectangle  $I_s \times \omega_{s-}$ .*

*Demostració.* Utilitzant el canvi de variable  $y = \frac{x - c(I_s)}{|I_s|}$  veiem que:

$$\int_{I_s} |\varphi_s(x)| dx = \int_{c(I_s) - \frac{|I_s|}{2}}^{c(I_s) + \frac{|I_s|}{2}} |I_s|^{-\frac{1}{2}} \left| \varphi\left(\frac{x - c(I_s)}{|I_s|}\right) \right| dx = |I_s|^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\varphi(y)| dy \quad (2.21)$$

Juntament amb la norma que acabem de calcular arribem a que:

$$\frac{\int_{I_s} |\varphi_s(x)| dx}{\int_{\mathbb{R}} |\varphi_s(x)| dx} = \frac{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\varphi(y)| dy}{\|\varphi\|_1} = K. \quad (2.22)$$

Aleshores podem dir que les funcions  $\varphi_s$  tenen sempre la mateixa massa sobre l'interval  $I_s$ . □

**Observació 2.19.** Recordem que és impossible que tota la massa d'un funció  $\varphi_s$  estigües suportada sobre la seva rajola  $s$  ja que això entraria en contradicció amb el principi d'incertesa de Heisenberg.

El conjunt de funcions  $\{\varphi_s \mid s \in \mathcal{T}\}$  té un conjunt d'invariàncies amb la translació, la modulació i la dilatació que imiten les de l'operador de Carleson.

**Lema 2.20.** *Per tot enter  $k \in \mathbb{Z}$  i per tota rajola  $s \in \mathcal{T}$  es compleix el següent:*

$$\mathrm{Tr}_{k|I_s|} \varphi_s = e^{-2\pi i k |I_s| c(\omega_{s-})} \varphi_{s_k} \quad \text{on } s_k = ((I_s + k|I_s|) \times \omega_s), \quad (2.23)$$

$$\mathrm{Mod}_{k|\omega_s|} \varphi_s = \varphi_{s_k} \quad \text{on } s_k = (I_s \times (\omega_s + k|\omega_s|)), \quad (2.24)$$

$$\mathrm{Dil}_{2^k}^2 \varphi_s = \varphi_{s_k} \quad \text{on } s_k = (2^k I_s \times 2^{-k} \omega_s). \quad (2.25)$$

*Demostració.* Ho demostrarem tot per les definicions i per la taula 1.

Com que  $k|I_s| + c(I_s) = c(I_s + k|I_s|)$  i  $|I_s| = |I_s + k|I_s||$  tenim que:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_{k|I_s|} \varphi_s &= \mathrm{Tr}_{k|I_s|} \mathrm{Mod}_{c(\omega_{s-})} \mathrm{Tr}_{c(I_s)} \mathrm{Dil}_{|I_s|}^2 \varphi = \\ &= e^{-2\pi i c(\omega_{s-}) k |I_s|} \mathrm{Mod}_{c(\omega_{s-})} \mathrm{Tr}_{k|I_s| + c(I_s)} \mathrm{Dil}_{|I_s|}^2 \varphi = e^{-2\pi i c(\omega_{s-}) k |I_s|} \varphi_{s_k}. \end{aligned}$$

Com que  $k|\omega_s| + c(\omega_{s-}) = c((\omega_s + k|\omega_s|)_-)$  tenim que:

$$\mathrm{Mod}_{k|\omega_s|} \varphi_s = \mathrm{Mod}_{k|\omega_s|} \mathrm{Mod}_{c(\omega_{s-})} \mathrm{Tr}_{c(I_s)} \mathrm{Dil}_{|I_s|}^2 \varphi = \mathrm{Mod}_{c((\omega_s + k|\omega_s|)_-)} \mathrm{Tr}_{c(I_s)} \mathrm{Dil}_{|I_s|}^2 \varphi = \varphi_{s_k}.$$

Finalment com que  $\frac{c(\omega_{s-})}{2^k} = c((2^{-k} \omega_s)_-)$  i  $2^k c(I_s) = c(2^k I_s)$  tenim que:

$$\mathrm{Dil}_{2^k}^2 \varphi_s = \mathrm{Dil}_{2^k}^2 \mathrm{Mod}_{c(\omega_{s-})} \mathrm{Tr}_{c(I_s)} \mathrm{Dil}_{|I_s|}^2 \varphi = \mathrm{Mod}_{c((2^{-k} \omega_s)_-)} \mathrm{Tr}_{c(2^k I_s)} \mathrm{Dil}_{|2^k I_s|}^2 \varphi = \varphi_{s_k}.$$

□

## 2.4 L'operador $Q_\xi$

L'objectiu que tenim a continuació és trobar una descomposició de l'operador  $P_-$  en funció de les rajoles que acabem d'introduir. Per això definim els següents operadors.

**Definició 2.21.** *Per tota funció de quadrat integrable  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , per tota  $\xi \in \mathbb{R}$  i per tota  $k \in \mathbb{Z}$  definim:*

$$Q_\xi f := \sum_{s \in \mathcal{T}} \mathbf{1}_{\omega_{s+}}(\xi) \langle f, \varphi_s \rangle \varphi_s \quad (2.26)$$

$$Q_{\xi,k} := \sum_{\substack{s \in \mathcal{T} \\ |I_s| \leq 2^k}} \mathbf{1}_{\omega_{s+}}(\xi) \langle f, \varphi_s \rangle \varphi_s. \quad (2.27)$$

**Proposició 2.22.** *Per tota  $\xi \in \mathbb{R}$  l'operador  $Q_\xi$  és un operador fitat a  $L^2(\mathbb{R})$  amb norma independent de  $\xi$ . El seu nucli conté les funcions que tenen transformada de Fourier suportada sobre l'interval  $[\xi, \infty)$  i és semidefinit positiu. A més a més per cada enter  $k$ :*

$$Q_\xi = \mathrm{Dil}_{2^{-k}}^2 Q_{\xi 2^{-k}} \mathrm{Dil}_{2^k}^2 \quad (2.28)$$

$$Q_{\xi,k} \mathrm{Tr}_{2^k} = \mathrm{Tr}_{2^k} Q_{\xi,k}. \quad (2.29)$$

Donat  $n \in \mathbb{Z}$  sigui  $\omega(n)$  l'únic interval diàdic de longitud  $2^n$  tal que  $\xi \in \omega(n)$ . Observem que conservem l'ordre:  $\forall n, m \in \mathbb{Z} \quad n < k \implies \omega(n) \subset \omega(m)$ . Sigui  $\mathcal{T}(n) = \{s \in \mathcal{T} \mid \omega_s = \omega(n)\}$  Ens interessarem pels  $n$  tal que  $\xi \in \omega(n)_+$  i en definim el seu conjunt  $N$ .

**Definició 2.23.** *Definim l'operador banda:*

$$Q_{(n)} f = \sum_{s \in \mathcal{T}(n)} \langle f, \varphi_s \rangle \varphi_s. \quad (2.30)$$

**Observació 2.24.** Aquests operadors són ortogonals.

**Lema 2.25.** Per tot parell de rajoles  $s, s' \in \mathcal{T}$  es compleix la següent fita:

$$|\langle \varphi_s, \varphi_{s'} \rangle| \lesssim \text{dist}(I_s, I_{s'})^{-4}. \quad (2.31)$$

**Observació 2.26.** Això prové del fet que les funcions  $\varphi_s$  són de Schwartz.

**Lema 2.27.** Per tota funció  $f \in L^2(\mathbb{R})$  i per tota rajola  $s \in \mathcal{T}$  tenim la següent fita:

$$|\langle f, \varphi_s \rangle|^2 \lesssim \|\varphi_s\|_1 \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 |\varphi_s(x)| dx. \quad (2.32)$$

*Demostració.* Per la desigualtat de Cauchy-Schwarz tenim:

$$\begin{aligned} |\langle f, \varphi_s \rangle|^2 &\leq \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x) \varphi_s(x)| dx \right)^2 = \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)| |\varphi_s(x)|^{\frac{1}{2}} |\varphi_s(x)|^{\frac{1}{2}} dx \right)^2 \leq \\ &\leq \left( \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 |\varphi_s(x)| dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}} |\varphi_s(x)| dx \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 = \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 |\varphi_s(x)| dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}} |\varphi_s(x)| dx \right) \end{aligned}$$

□

**Lema 2.28.** Per tota  $\xi \in \mathbb{R}$  l'operador  $Q_\xi$  és un operador fitat a  $L^2(\mathbb{R})$  amb norma independent de  $\xi$ .

*Demostració.* Utilitzat les propietats de producte escalar i la desigualtat de Cauchy-Schwarz juntament amb el lema 2.25 obtenim que:

$$\begin{aligned} \|Q(n)f\|_2^2 &= \langle Q(n)f, Q(n)f \rangle = \left\langle \sum_{s \in \mathcal{T}(n)} \langle f, \varphi_s \rangle \varphi_s, \sum_{s' \in \mathcal{T}(n)} \langle f, \varphi_{s'} \rangle \varphi_{s'} \right\rangle \leq \\ &\leq \sum_{s \in \mathcal{T}(n)} \sum_{s' \in \mathcal{T}(n)} |\langle f, \varphi_s \rangle \langle \varphi_s, \varphi_{s'} \rangle \langle \varphi_{s'}, f \rangle| \lesssim \sum_{s \in \mathcal{T}(n)} \sum_{s' \in \mathcal{T}(n)} |\langle f, \varphi_s \rangle \langle f, \varphi_{s'} \rangle| \lesssim \\ &\lesssim \sup_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{s \in \mathcal{T}(n)} |\langle f, \varphi_s \rangle \langle f, \varphi_{(I_s+m) \times \omega(n)} \rangle| \lesssim \\ &\lesssim \sup_{m \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{s \in \mathcal{T}(n)} |\langle f, \varphi_s \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{s \in \mathcal{T}(n)} |\langle f, \varphi_{(I_s+m) \times \omega(n)} \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{s \in \mathcal{T}(n)} |\langle f, \varphi_s \rangle|^2. \end{aligned}$$

Podem continuar usant els lemes 2.27 i 1.24:

$$\begin{aligned} \|Q_\xi f\|_2^2 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \|Q(n)f\|_2^2 \lesssim \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{s \in \mathcal{T}(n)} |\langle f, \varphi_s \rangle|^2 \leq \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{s \in \mathcal{T}(n)} \min \left( |I_s|^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_1 \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 |\varphi(x)| dx, |\omega_s|^{\frac{1}{2}} \|\widehat{\varphi}\|_1 \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(x)|^2 |\widehat{\varphi}(x)| dx \right) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \min \left( 2^{\frac{n}{2}} \|\varphi\|_1 \|f\|_2^2 \sup_{x \in \mathbb{R}} \sum_{s \in \mathcal{T}(n)} |\varphi_s(x)|, 2^{-\frac{n}{2}} \|\widehat{\varphi}\|_1 \|\widehat{f}\|_2^2 \sup_{x \in \mathbb{R}} \sum_{s \in \mathcal{T}(n)} |\widehat{\varphi}_s(x)| \right) \\ &\lesssim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \min(2^{\frac{n}{2}}, 2^{-\frac{n}{2}}) \lesssim 1. \end{aligned}$$

□

**Lema 2.29.** *El nucli de  $Q_\xi$  conté les funcions que tenen transformada de Fourier suportada sobre l'interval  $[\xi, \infty)$ .*

*Demostració.* Suposem que  $f \in L^2(\mathbb{R})$  i que el suport de  $\widehat{f}$  està contingut sobre l'interval  $[\xi, \infty)$ , llavors utilitzat que la transformada de Fourier és un operador unitari, la definició de producte escalar i hem jugat amb l'indicador i el conjunt d'integració tenim que:

$$\begin{aligned} Q_\xi f &= \sum_{s \in \mathcal{T}} \mathbf{1}_{\omega_{s+}}(\xi) \langle f, \varphi_s \rangle \varphi_s = \sum_{s \in \mathcal{T}} \mathbf{1}_{\omega_{s+}}(\xi) \langle \widehat{f}, \widehat{\varphi}_s \rangle \varphi_s = \sum_{s \in \mathcal{T}} \mathbf{1}_{\omega_{s+}}(\xi) \left( \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) \overline{\widehat{\varphi}_s(x)} dx \right) \varphi_s = \\ &= \sum_{s \in \mathcal{T}} \mathbf{1}_{\omega_{s+}}(\xi) \left( \int_{[\xi, \infty) \cap \omega_{s-}} \widehat{f}(x) \overline{\widehat{\varphi}_s(x)} dx \right) \varphi_s = 0. \end{aligned}$$

□

**Lema 2.30.** *Per tota  $\xi \in \mathbb{R}$  i per tota  $k \in \mathbb{Z}$  es compleix que:*

$$Q_\xi = \text{Dil}_{2^{-k}}^2 Q_{\xi 2^{-k}} \text{Dil}_{2^k}^2.$$

*Demostració.* Definim  $s_k := 2^{-k} I_s \times 2^k \omega_s$ , llavors per les definicions i les propietats:

$$\begin{aligned} \text{Dil}_{2^{-k}}^2 Q_{\xi 2^{-k}} \text{Dil}_{2^k}^2 f &= \sum_{s \in \mathcal{T}} \mathbf{1}_{\omega_{s+}}(\xi 2^{-k}) \langle \text{Dil}_{2^k}^2 f, \varphi_s \rangle \text{Dil}_{2^{-k}}^2 \varphi_s = \\ &= \sum_{s \in \mathcal{T}} \mathbf{1}_{\omega_{s+}}(\xi 2^{-k}) \langle f, \text{Dil}_{2^{-k}}^2 \varphi_s \rangle \text{Dil}_{2^{-k}}^2 \varphi_s = \sum_{s_k \in \mathcal{T}} \mathbf{1}_{\omega_{s_k+}}(\xi) \langle f, \varphi_{s_k} \rangle \varphi_{s_k} = Q_\xi. \end{aligned}$$

□

**Lema 2.31.** *Per tot  $\xi \in \mathbb{R}$  i per tot  $k \in \mathbb{Z}$  es compleix:*

$$Q_{\xi, k} \text{Tr}_{2^k} = \text{Tr}_{2^k} Q_{\xi, k}.$$

*Demostració.* Definim  $s_k := ((I_s + k|I_s|) \times \omega_s)$ , llavors per les definicions i les propietats:

$$\begin{aligned} Q_{\xi, k} \text{Tr}_{2^k} f &= \sum_{\substack{s \in \mathcal{T} \\ |I_s| \leq 2^k}} \mathbf{1}_{\omega_{s+}}(\xi) \langle \text{Tr}_{2^k} f, \varphi_s \rangle \varphi_s = \sum_{\substack{s \in \mathcal{T} \\ |I_s| \leq 2^k}} \mathbf{1}_{\omega_{s+}}(\xi) \langle f, \text{Tr}_{-2^k} \varphi_s \rangle \varphi_s = \\ &= \sum_{\substack{s \in \mathcal{T} \\ |I_s| \leq 2^k}} \mathbf{1}_{\omega_{s+}}(\xi) \langle f, e^{2\pi i 2^k c(\omega_{s-})} \varphi_{s_k} \rangle \varphi_s = \sum_{\substack{s \in \mathcal{T} \\ |I_s| \leq 2^k}} \mathbf{1}_{\omega_{s+}}(\xi) \langle f, \varphi_{s_k} \rangle e^{-2\pi i 2^k c(\omega_{s-})} \varphi_s = \\ &= \sum_{\substack{s \in \mathcal{T} \\ |I_s| \leq 2^k}} \mathbf{1}_{\omega_{s_k+}}(\xi) \langle f, \varphi_{s_k} \rangle \text{Tr}_{2^k} \varphi_{s_k} = \text{Tr}_{2^k} Q_{\xi, k} f. \end{aligned}$$

□

**Lema 2.32.** *L'operador  $Q_\xi$  és semidefinit positiu.*

*Demostració.* Simplement per la definició i les propietats del producte escalar tenim que:

$$\langle Q_\xi f, f \rangle = \left\langle \sum_{s \in \mathcal{T}} \mathbf{1}_{\omega_{s+}}(\xi) \langle f, \varphi_s \rangle \varphi_s, f \right\rangle = \sum_{s \in \mathcal{T}} \mathbf{1}_{\omega_{s+}}(\xi) \langle f, \varphi_s \rangle \langle \varphi_s, f \rangle = \sum_{\substack{s \in \mathcal{T} \\ \xi \in \omega_{s+}}} |\langle f, \varphi_s \rangle|^2 \geq 0.$$

□

Tots aquest lemes ens permeten demostrar el que volíem: la proposició 2.22. El nostre objectiu és linealitzar l'operador  $P_-$ . Per aquest fi definim un nou operador.

**Definició 2.33.** *Per tota funció de quadrat integrable  $f \in L^2(\mathbb{R})$  definim el següent operador:*

$$Qf = \lim_{Y \rightarrow \infty} \int_{B(Y)} \text{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \text{Tr}_{-y} \text{Mod}_{-\xi} Q_\xi \text{Mod}_\xi \text{Tr}_y \text{Dil}_{2^\lambda}^2 f \mu(d\lambda, dy, d\xi), \quad (2.33)$$

on el conjunt d'integració és  $B(Y) = [1, 2] \times [0, Y] \times [0, Y]$  i  $\mu$  és la norma de Lebesgue normalitzada.

**Proposició 2.34.** *L'operador  $Q$  està ben definit, és un operador fitat a  $L^2(\mathbb{R})$ , és invariant per translacions i modulacions, el seu nucli conté les funcions amb transformada de Fourier suportada sobre l'interval  $[0, \infty)$  i no és l'operador idènticament zero.*

Demostrarem alguna d'aquestes propietats.

**Lema 2.35.** *L'operador  $Q$  és un operador fitat a  $L^2(\mathbb{R})$ .*

*Demostració.* Per la convexitat de la norma  $L^2(\mathbb{R})$  i com que els operadors  $\text{Tr}$ ,  $\text{Mod}$ ,  $\text{Dil}^2$  preserven aquesta norma tenim:

$$\begin{aligned} \|Qf\|_2 &= \left\| \lim_{Y \rightarrow \infty} \int_{B(Y)} \text{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \text{Tr}_{-y} \text{Mod}_{-\xi} Q_\xi \text{Mod}_\xi \text{Tr}_y \text{Dil}_{2^\lambda}^2 f \mu(d\lambda, dy, d\xi) \right\|_2 \leq \\ &\leq \limsup_{Y \rightarrow \infty} \int_{B(Y)} \|Q_\xi \text{Mod}_\xi \text{Tr}_y \text{Dil}_{2^\lambda}^2 f\|_2 \mu(d\lambda, dy, d\xi). \end{aligned}$$

A més a més com que l'operador  $Q_\xi$  és un operador fitat pel lema 2.22:

$$\begin{aligned} \|Qf\|_2 &\lesssim \limsup_{Y \rightarrow \infty} \int_{B(Y)} \|\text{Mod}_\xi \text{Tr}_y \text{Dil}_{2^\lambda}^2 f\|_2 \mu(d\lambda, dy, d\xi) = \\ &\limsup_{Y \rightarrow \infty} \int_{B(Y)} \|f\|_2 \mu(d\lambda, dy, d\xi) = \|f\|_2. \end{aligned}$$

□

**Lema 2.36.** *L'operador  $Q$  és invariant per operadors de translació i de dilatació.*

*Demostració.* Aquest resultat s'obté del fet que  $Q_\xi$  també compleix aquestes invariàncies pels lemes 2.30 i 2.31. □

**Proposició 2.37.** *L'operador  $Q$  és múltiple de l'operador  $P_-$ .*

*Demostració.* Això és conseqüència directa d'aplicar el lema 2.8 amb totes les propietats de  $Q$  que acabem de veure.  $\square$

Ara la idea és que aquesta expressió que hem trobat de  $P_-$  ens ajudi a demostrar el lema 2.4. Definim un últim operador del qual dependrà tota la demostració.

**Definició 2.38.** Per tota funció de quadrat integrable  $f \in L^2(\mathbb{R})$  i per tota funció real mesurable  $A$  definim el següent operador:

$$\mathcal{C}_A f(x) := \sum_{s \in \mathcal{T}} \mathbf{1}_{\omega_{s+}}(A(x)) \langle f, \varphi_s \rangle \varphi_s(x). \quad (2.34)$$

**Observació 2.39.** Si prenem la funció contant  $A = \xi$  tenim que  $\mathcal{C}_A = Q_\xi$ .

**Lema 2.40.** L'operador  $\mathcal{C}_A$  és un operador 2 feble, és a dir, per tota funció de quadrat integrable  $f \in L^2(\mathbb{R})$  i per tota constant real  $\lambda \in \mathbb{R}$  amb  $\lambda > 0$  es compleix la següent desigualtat:

$$|\{\mathcal{C}_A f > \lambda\}| \lesssim \frac{\|f\|_2^2}{\lambda^2}. \quad (2.35)$$

**Lema 2.41.** Si suposem el lema anterior cert podem demostrar la proposició 2.4 de la següent manera.

*Demostració.* La funció  $A$  especifica el valor de  $a$  pel qual l'expressió (2.1) assoleix el suprem. Aleshores:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{C}f\|_{L^{2,\infty}} &= \|P_-(\text{Mod}_{A(x)}f)\|_{L^{2,\infty}} \lesssim \|Q(\text{Mod}_{A(x)}f)\|_{L^{2,\infty}} \lesssim \\ &\lesssim \left\| \lim_{Y \rightarrow \infty} \int_{B(Y)} \text{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \text{Tr}_{-y} \text{Mod}_{-\xi} Q_\xi \text{Mod}_\xi \text{Tr}_y \text{Dil}_{2^\lambda}^2 (\text{Mod}_{A(x)}f) \mu(d\lambda, dy, d\xi) \right\|_{L^{2,\infty}} \lesssim \\ &\lesssim \limsup_{Y \rightarrow \infty} \int_{B(Y)} \|\text{Dil}_{2^{-\lambda}}^2 \text{Tr}_{-y} \text{Mod}_{-\xi} Q_\xi \text{Mod}_\xi \text{Tr}_y \text{Dil}_{2^\lambda}^2 \text{Mod}_{A(x)}f\|_{L^{2,\infty}} \mu(d\lambda, dy, d\xi) \lesssim \\ &\lesssim \limsup_{Y \rightarrow \infty} \int_{B(Y)} \|Q_\xi \text{Mod}_\xi \text{Tr}_y \text{Dil}_{2^\lambda}^2 \text{Mod}_{A(x)}f\|_{L^{2,\infty}} \mu(d\lambda, dy, d\xi) \lesssim \\ &\lesssim \limsup_{Y \rightarrow \infty} \int_{B(Y)} \|\text{Mod}_\xi \text{Tr}_y \text{Dil}_{2^\lambda}^2 \text{Mod}_{A(x)}f\|_2 \mu(d\lambda, dy, d\xi) \lesssim \\ &\lesssim \limsup_{Y \rightarrow \infty} \int_{B(Y)} \|f\|_2 \mu(d\lambda, dy, d\xi) = \|f\|_2. \end{aligned}$$

$\square$

Aquest és justament el resultat que volem veure.

### 3 Els lemes centrals

El nostre objectiu és demostrar el lema 2.40 de la secció anterior. Per poder-ho fer haurem de trobar una formulació que l'impliqui. Introduïrem un seguit d'eines i lemes necessaris i finalment ho demostrarem.

**Lema 3.1.** *El lema 2.40 és implicat per la següent fita on  $f \in L^2(\mathbb{R})$  és una funció de quadrat integrable i  $E \subset \mathbb{R}$  és un conjunt de mesura finita:*

$$|\langle \mathcal{C}_N f, \mathbf{1}_E \rangle| \lesssim \|f\|_2 |E|^{\frac{1}{2}}. \quad (3.1)$$

*Demostració.* Farem servir aquesta notació pel conjunt que ens interessa fitar:

$$A_\lambda = \{\mathcal{C}_N f > \lambda\}. \quad (3.2)$$

Aleshores:

$$\begin{aligned} |A_\lambda| &= \int_{A_\lambda} dx \leq \int_{A_\lambda} \frac{\mathcal{C}_N f(x)}{\lambda} dx \lesssim \frac{1}{\lambda} \|f\|_2 |A_\lambda|^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow |A_\lambda|^{\frac{1}{2}} \lesssim \frac{1}{\lambda} \|f\|_2 \Rightarrow |A_\lambda| \lesssim \frac{\|f\|_2^2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

□

**Lema 3.2.** *L'operador  $\mathcal{C}_A$  és lineal i invariant per dilatacions de potències de 2.*

**Definició 3.3.** *Per tota rajola  $s \in \mathcal{T}$  i tota funció real mesurable  $A$  definim els següent conjunts:*

$$E_s := E \cap A^{-1}(\omega_s), \quad (3.3)$$

$$E_{s+} := E \cap A^{-1}(\omega_{s+}). \quad (3.4)$$

Aquests conjunts els utilitzarem al llarg de la demostració.

**Proposició 3.4.** *Per tota funció de quadrat integrable  $f \in L^2(\mathbb{R})$  de norma  $\|f\| = 1$ , per tota funció mesurable  $A$  i per tot conjunt mesurable  $E \subset \mathbb{R}$  amb  $\frac{1}{2} < |E| \leq 1$  es compleix el següent:*

$$\sum_{s \in \mathcal{T}} |\langle f, \varphi_s \rangle \langle \varphi_s, \mathbf{1}_{E_{s+}} \rangle| \lesssim 1. \quad (3.5)$$

**Lema 3.5.** *La proposició anterior 3.4 implica el lema 3.1*

**Observació 3.6.** Això es veu usant el lema 3.2.

Només caldrà demostrar la proposició 3.4. A partir d'ara tindrem una funció de quadrat integrable  $f \in L^2(\mathbb{R})$  fixada i un conjunt mesurable  $E \subset \mathbb{R}$  amb  $\frac{1}{2} < |E| \leq 1$  també fixat.

Necessitem nous conceptes per avançar en la demostració. Existeix un ordre parcial natural en el conjunt de rajoles:

### 3.1 Relació d'ordre $\leq$

**Definició 3.7** (Relació d'ordre del conjunt de rajoles). *Per tot parell de rajoles  $s, s' \in \mathcal{T}$  definim la següent relació:*

$$s \leq s' \iff I_s \subset I_{s'}, \omega_{s'} \subset \omega_s. \quad (3.6)$$

**Lema 3.8.** *La relació 3.7 és un ordre parcial.*

*Demostració.* Hem de comprovar les tres propietats que defineixen un ordre parcial.

- Reflexivitat. Per tota rajola  $s \in \mathcal{T}$  es compleix que  $s \leq s$ .  
Sempre és cert que  $I_s \subset I_s$  i  $\omega_s \subset \omega_s$ . Aleshores per la definició tenim que  $s \leq s$ .
- Antisimetria. Per totes rajoles  $s, s' \in \mathcal{T}$  si  $s \leq s'$  i  $s' \leq s$  llavors  $s = s'$ .  
Per les hipòtesis i la definició tenim les següents inclusions:  $I_s \subset I_{s'}, \omega_{s'} \subset \omega_s, I_{s'} \subset I_s, \omega_s \subset \omega_{s'}$ . Això implica que  $I_s = I_{s'}$  i  $\omega_s = \omega_{s'}$  i per tant  $s = s'$ .
- Transitivitat. Per totes rajoles  $s, s', s'' \in \mathcal{T}$  si  $s \leq s'$  i  $s' \leq s''$  llavors  $s \leq s''$ .  
Per les hipòtesis i la definició tenim les següents inclusions:  $I_s \subset I_{s'}, I_{s'} \subset I_{s''}, \omega_{s'} \subset \omega_s, \omega_{s''} \subset \omega_{s'}$ . Per tant, també tenim que  $I_s \subset I_{s''}, \omega_{s''} \subset \omega_s$  i per la definició arribem a  $s \leq s''$ .

□

**Lema 3.9.** *Per tot parell de rajoles  $s, s' \in \mathcal{T}$  tenim que  $s, s'$  són incomparables sí i només sí la seva intersecció és buida, o sigui,  $s \cap s' = \emptyset$ .*

*Demostració.* •  $\Leftarrow$  Si dues rajoles tenen intersecció buida aleshores els seus conjunts de temps i de freqüències també són disjunts respectivament. En cap cas tenim les inclusions de la definició de l'ordre i per tant són incomparables.

- $\Rightarrow$  Ho demostrem pel contrarecíproc. Volem veure que si dues rajoles  $s, s' \in \mathcal{T}$  tenen intersecció no buida aleshores són comparables. Com que intersequen tenim que  $I_s \cap I_{s'} \neq \emptyset$  i  $\omega_s \cap \omega_{s'} \neq \emptyset$ . Suposem sense pèrdua de generalitat que  $I_s \subset I_{s'}$ . Si  $\omega_{s'} \not\subset \omega_s$  llavors  $\omega_s \subsetneq \omega_{s'}$  ja que són intervals diàdics, però això no pot ser perquè les rajoles tenen àrea 1.

□

#### 3.1.1 Arbres

**Definició 3.10** (Arbre). *Un subconjunt finit de rajoles  $\mathbf{T} \subset \mathcal{S}$  és un arbre si existeix una rajola  $I_{\mathbf{T}} \times \omega_{\mathbf{T}} \in \mathcal{T}$  que anomenarem el top de l'arbre tal que per tota rajola de l'arbre  $s \in \mathbf{T}$  es compleix que  $s \leq I_{\mathbf{T}} \times \omega_{\mathbf{T}}$ , on  $\leq$  és l'ordre definit anteriorment a 3.7.*

**Observacions 3.11.** El top de l'arbre no està definit únicament. Per cada arbre  $\mathbf{T}$  existeix un  $|I_{\mathbf{T}}|$  mínim.

**Definició 3.12** (Arbre+). *Un arbre+ és un arbre  $\mathbf{T}$  amb top  $I_{\mathbf{T}} \times \omega_{\mathbf{T}}$  tal que per tot  $s \in \mathbf{T}$  es compleix que  $\omega_{\mathbf{T}^+} \subset \omega_{s^+}$ .*



**Definició 3.13** (Arbre-). *Un arbre- és un arbre  $\mathbf{T}$  amb top  $I_{\mathbf{T}} \times \omega_{\mathbf{T}}$  tal que per tot  $s \in \mathbf{T}$  es compleix que  $\omega_{\mathbf{T}-} \subset \omega_{s-}$ .*

**Observació 3.14.** Tot arbre és unió d'un arbre+ i un arbre-.

*Demostració.* Com que estem treballant amb intervals diàdics es compleix que  $\omega_{\mathbf{T}} = \omega_s$ ,  $\omega_{\mathbf{T}} \subsetneq \omega_{s+}$  o  $\omega_{\mathbf{T}} \subsetneq \omega_{s-}$  i per tant aquesta descomposició sempre és possible.  $\square$

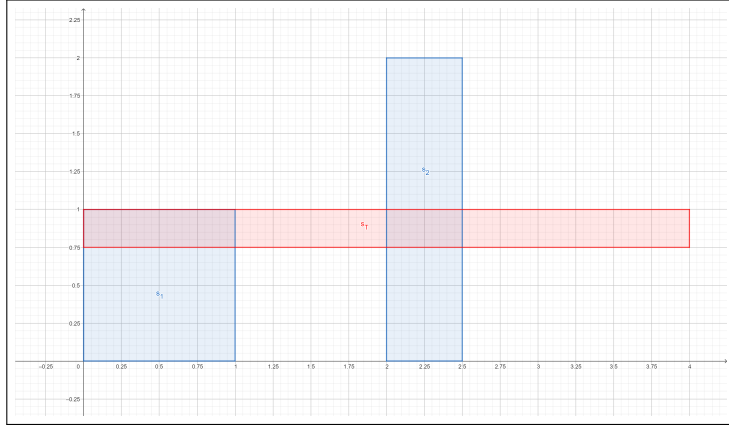


Figura 2: Exemple d'arbre

## 3.2 Funcions

A continuació definirem tres funcions que aniran del conjunt potència del conjunt de rajoles als nombres reals. Aquestes seran essencials per l'argument que farem servir per demostrar el teorema de Carleson.

### 3.2.1 Recompte

**Definició 3.15** (Recompte). *Un subconjunt finit de rajoles  $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$  té recompte com a molt  $A$  i escrivim*

$$\text{count}(\mathcal{S}) < A \tag{3.7}$$

*si existeix un conjunt d'arbres  $T$  tal que*

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\mathbf{T} \in T} \bigcup_{s \in \mathbf{T}} s \tag{3.8}$$

*i*

$$\sum_{\mathbf{T} \in T} |I_{\mathbf{T}}| < A. \tag{3.9}$$

**Observació 3.16.** El recompte és creixent.

### 3.2.2 Densitat

Per definir la densitat primer necessitarem definir una funció prèvia.

**Definició 3.17** (Funció khi). *La constant  $\kappa$  serà una constant grossa que no ens importarà el valor exacte.*

$$\chi(x) := (1 + |x|)^{-\kappa} \quad (3.10)$$

**Definició 3.18** (Funció khi adaptada a l'interval diàdic  $I$ ).

$$\chi_I := \text{Tr}_{c(I)} \text{Dil}_{|I|}^1 \chi \quad (3.11)$$

**Observacions 3.19.** Les funcions que acabem de definir tenen forma de pic i funcionen simillarment a una funció indicador. Són contínues, positives i integrables.

Calculem la seva norma.

*Demostració.*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \chi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} (1 + |x|)^{-\kappa} dx = \int_{-\infty}^0 (1 - x)^{-\kappa} dx + \int_0^{\infty} (1 + x)^{-\kappa} dx = \\ &= \frac{2}{\kappa - 1} \quad (\kappa > 1) \\ \|\chi_I\|_1 &= \|\text{Tr}_{c(I)} \text{Dil}_{|I|}^1 \chi\| = \|\chi\|_1 = \frac{2}{\kappa - 1} \quad (\kappa > 1) \end{aligned} \quad (3.12)$$

□

**Definició 3.20** (Densitat d'un rajola). *Per tota rajola  $s \in \mathcal{T}$  definim:*

$$\text{dense}(s) := \sup_{s \leq s'} \int_{E_{s'}} \chi_{I_s} dx. \quad (3.13)$$

**Definició 3.21** (Densitat d'un conjunt de rajoles). *Per tot subconjunt finit de rajoles  $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$  definim:*

$$\text{dense}(\mathcal{S}) := \sup_{s \in \mathcal{S}} \text{dense}(s). \quad (3.14)$$

**Observació 3.22.** La densitat és creixent al ser un suprem.

### 3.2.3 Mida

**Definició 3.23** (Mida). *Per tot subconjunt finit de rajoles  $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$  definim el següent:*

$$\text{size}(\mathcal{S}) := \sup \left\{ \left( |I_{\mathbf{T}}|^{-1} \sum_{s \in \mathbf{T}} |\langle f, \varphi_s \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mid \mathbf{T} \subset \mathcal{S}, \mathbf{T} \text{ és un arbre+} \right\}. \quad (3.15)$$

**Definició 3.24.** *Per cada arbre+  $\mathbf{T}$  definim el següent:*

$$\Delta(\mathbf{T})^2 := |I_{\mathbf{T}}|^{-1} \sum_{s \in \mathbf{T}} |\langle f, \varphi_s \rangle|^2. \quad (3.16)$$

Aleshores també podem fer servir la següent expressió:

$$\text{size}(\mathcal{S}) = \sup_{\substack{\mathbf{T} \subset \mathcal{S} \\ \mathbf{T} \text{ arbre+}}} \Delta(\mathbf{T}) \quad (3.17)$$

**Observació 3.25.** La mida és creixent.

*Demostració.* Siguin  $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$  subconjunts finits de  $\mathcal{T}$  amb  $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$ . Tot arbre+  $\mathbf{T} \subset \mathcal{S}$  també ho serà de  $\mathcal{S}'$  aleshores com que la definició de  $\text{size}()$  és un suprem es complirà que  $\text{size}(\mathcal{S}) \leq \text{size}(\mathcal{S}')$  □

### 3.3 Lemes

#### 3.3.1 Lema de la densitat

**Lema 3.26** (Lema de la densitat). *Qualsevol subconjunt finit de rajoles  $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$  és la unió de dos conjunts  $\mathcal{S}_{\text{light}}$  i  $\mathcal{S}_{\text{heavy}}$  tals que el conjunt  $\mathcal{S}_{\text{light}}$  satisfà:*

$$\text{dense}(\mathcal{S}_{\text{light}}) \leq \frac{1}{2} \text{dense}(\mathcal{S}) \quad (3.18)$$

*i el conjunt  $\mathcal{S}_{\text{heavy}}$  satisfà:*

$$\text{count}(\mathcal{S}_{\text{heavy}}) \lesssim \text{dense}(\mathcal{S})^{-1}. \quad (3.19)$$

#### 3.3.2 Lema de la mida

**Lema 3.27** (Lema de la mida). *Qualsevol subconjunt finit de rajoles  $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$  és la unió de dos conjunts  $\mathcal{S}_{\text{big}}$  i  $\mathcal{S}_{\text{small}}$  tals que el conjunt  $\mathcal{S}_{\text{small}}$  satisfà:*

$$\text{size}(\mathcal{S}_{\text{small}}) \leq \frac{1}{2} \text{size}(\mathcal{S}) \quad (3.20)$$

*i el conjunt  $\mathcal{S}_{\text{big}}$  satisfà:*

$$\text{count}(\mathcal{S}_{\text{big}}) \lesssim \text{size}(\mathcal{S})^{-2}. \quad (3.21)$$

#### 3.3.3 Lema de l'arbre

**Lema 3.28** (Lema de l'arbre). *Per tot arbre  $\mathbf{T}$  es compleix el següent:*

$$\sum_{s \in \mathbf{T}} |\langle f, \varphi_s \rangle \langle \varphi_s, \mathbf{1}_{E_{s^+}} \rangle| \lesssim |I_{\mathbf{T}}| \text{size}(\mathbf{T}) \text{dense}(\mathbf{T}). \quad (3.22)$$

### 3.4 Argument principal

Fixem un subconjunt finit de rajoles  $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ .

**Lema 3.29.** *Existeix una descomposició  $\{\mathcal{S}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  de  $\mathcal{S}$  complint:*

$$\text{size}(\mathcal{S}_n) < 2^n \quad (3.23)$$

$$\text{count}(\mathcal{S}_n) \lesssim 2^{-2n} \quad (3.24)$$

$$\text{dense}(\mathcal{S}_n) < \min(2, 2^{2n}). \quad (3.25)$$

*Demostració.* Sabem que  $\text{dense}(\mathcal{S}) < 2$  per  $\kappa > 2$  i  $\text{size}(\mathcal{S})$  és finit per tant podem trobar un  $k \in \mathbb{Z}$  complint  $\text{size}(\mathcal{S}) \leq 2^k$  i  $\text{dense}(\mathcal{S}) \leq 2^{2k}$ . Comencem la següent iteració per  $n = k$  i anem reduint  $n$  de un en un fins que  $\mathcal{S}$  arribi a ser buit. Això sempre passarà per la finitud dels conjunts.

- Si  $\text{dense}(\mathcal{S}) > 2^{2(n-1)}$  dividim pel lema de la densitat  $\mathcal{S}$  en  $\mathcal{S}_{\text{light}}$  i  $\mathcal{S}_{\text{heavy}}$ , substituïm  $\mathcal{S}$  per  $\mathcal{S}_{\text{light}}$  i afegim  $\mathcal{S}_{\text{heavy}}$  a  $\mathcal{S}_n$ .
- Si  $\text{size}(\mathcal{S}) > 2^{(n-1)}$  dividim pel lema de la mida  $\mathcal{S}$  en  $\mathcal{S}_{\text{small}}$  i  $\mathcal{S}_{\text{big}}$ , substituïm  $\mathcal{S}$  per  $\mathcal{S}_{\text{small}}$  i afegim  $\mathcal{S}_{\text{big}}$  a  $\mathcal{S}_n$ .

Per la pròpia construcció és fàcil veure que  $\text{size}(\mathcal{S}_n) < 2^n$  i  $\text{dense}(\mathcal{S}_n) < \min(2, 2^{2n})$ . Falta veure que  $\text{count}(\mathcal{S}_n) \lesssim 2^{-2n}$ . Ho comprovarem en cada cas.

1. Si  $\mathcal{S}_n = \emptyset$  es compleix que  $0 = \text{count}(\mathcal{S}_n) \lesssim 2^{-2(n-1)} \lesssim 2^{-2n}$ .
2. Si  $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_{\text{heavy}}$  on  $2^{2(n-1)} < \text{dense}(\mathcal{S}_n) \leq 2^{2n}$  es compleix que  $2^{-2n} \leq \text{dense}(\mathcal{S}_n)^{-1} < 2^{-2(n-1)}$  i per tant  $\text{count}(\mathcal{S}_n) \lesssim \text{dense}(\mathcal{S}_n)^{-1} < 2^{-2(n-1)} \lesssim 2^{-2n}$ .
3. Si  $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_{\text{big}}$  on  $2^{n-1} < \text{size}(\mathcal{S}_n) \leq 2^n$  es compleix que  $2^{-2n} \leq \text{size}(\mathcal{S}_n)^{-2} < 2^{-2(n-1)}$  i per tant  $\text{count}(\mathcal{S}_n) \lesssim \text{size}(\mathcal{S}_n)^{-2} < 2^{-2(n-1)} \lesssim 2^{-2n}$ .
4. Si  $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_{\text{heavy}} \cup (\mathcal{S}_{\text{small}})_{\text{big}}$  pel que hem vist anteriorment tenim que  $\text{count}(\mathcal{S}_n) \leq \text{count}(\mathcal{S}_{\text{heavy}}) + \text{count}((\mathcal{S}_{\text{small}})_{\text{big}}) \lesssim 2^{-2(n-1)} + 2^{-2(n-1)} \lesssim 2^{-2(n-1)} \lesssim 2^{-2n}$ .

□

Tot això ens permet fer el següent argument.

Expressem cada  $\mathcal{S}_n$  com unió dels elements d'un conjunt d'arbres  $T_n$ . Això sempre és possible per exemple escollint com arbres cada rajola per separat:

$$\mathcal{S}_n = \bigcup_{\mathbf{T} \in T_n} \bigcup_{s \in \mathbf{T}} s. \quad (3.26)$$

Aplicant la descomposició que hem trobat i el lema de l'arbre:

$$\begin{aligned} \sum_{s \in \mathcal{S}} |\langle f, \varphi_s \rangle \langle \varphi_s, \mathbf{1}_{E_{s+}} \rangle| &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{s \in \mathcal{S}_n} |\langle f, \varphi_s \rangle \langle \varphi_s, \mathbf{1}_{E_{s+}} \rangle| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{\mathbf{T} \in T_n} \sum_{s \in \mathbf{T}} |\langle f, \varphi_s \rangle \langle \varphi_s, \mathbf{1}_{E_{s+}} \rangle| \lesssim \\ &\lesssim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{\mathbf{T} \in T_n} |I_{\mathbf{T}}| \text{size}(\mathbf{T}) \text{dense}(\mathbf{T}) \lesssim \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^n \min(2, 2^{2n}) \sum_{\mathbf{T} \in T_n} |I_{\mathbf{T}}| \lesssim \\ &\lesssim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \min(2^{-n}, 2^n) \lesssim 1. \end{aligned}$$

Finalment podem demostrar la proposició 3.4.

*Demostració.* Com que els conjunts finits estan uniformament fitats el total també ho estarà:

$$\sum_{s \in \mathcal{T}} |\langle f, \varphi_s \rangle \langle \varphi_s, \mathbf{1}_{E_{s+}} \rangle| = \sup_{\substack{S \subset \mathcal{T} \\ S \text{ finit}}} \sum_{s \in S} |\langle f, \varphi_s \rangle \langle \varphi_s, \mathbf{1}_{E_{s+}} \rangle| \lesssim 1. \quad (3.27)$$

□

## 4 Lema de la densitat

Recordem primer de tot què anunciava aquest lema.

### 4.1 Lema de la densitat

**Lema 4.1.** *Qualsevol subconjunt finit de rajoles  $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$  és la unió de dos conjunts  $\mathcal{S}_{\text{light}}$  i  $\mathcal{S}_{\text{heavy}}$  tals que el conjunt  $\mathcal{S}_{\text{light}}$  satisfà:*

$$\text{dense}(\mathcal{S}_{\text{light}}) \leq \frac{1}{2} \text{dense}(\mathcal{S}) \quad (4.1)$$

*i el conjunt  $\mathcal{S}_{\text{heavy}}$  satisfà:*

$$\text{count}(\mathcal{S}_{\text{heavy}}) \lesssim \text{dense}(\mathcal{S})^{-1}. \quad (4.2)$$

### 4.2 Construcció

Fixem un subconjunt finit de rajoles  $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ . Sigui  $\delta = \text{dense}(\mathcal{S})$ . Definim el conjunt  $\mathcal{S}_{\text{heavy}}$  com el conjunt de rajoles  $s \in \mathcal{S}$  que tenen densitat més gran que  $\frac{\delta}{2}$ . Definim el conjunt  $\mathcal{S}_{\text{light}}$  com el seu complementari.

**Definició 4.2.**

$$\mathcal{S}_{\text{heavy}} := \{s \in \mathcal{S} \mid \text{dense}(s) > \frac{\delta}{2}\} \quad (4.3)$$

$$\mathcal{S}_{\text{light}} := \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_{\text{heavy}} \quad (4.4)$$

**Observació 4.3.** Per la pròpia definició tenim que  $\text{dense}(\mathcal{S}_{\text{light}}) \leq \frac{\delta}{2}$  com volem. Només fa falta veure que  $\text{count}(\mathcal{S}_{\text{heavy}}) \lesssim \delta^{-1}$ .

### 4.3 Demostració

El conjunt  $\mathcal{S}_{\text{heavy}}$  es pot expressar com una unió d'arbres. N'hi ha prou en trobar els tops d'aquests arbres.

El conjunt **Tops** és el conjunt de rajoles  $s$  de  $\mathcal{S}_{\text{heavy}}$  que són maximals respecte l'ordre parcial  $\leq$ .

**Definició 4.4.**

$$\mathbf{Tops} := \{s \in \mathcal{S}_{\text{heavy}} \mid s \text{ maximal respecte } \leq\}. \quad (4.5)$$

L'arbre associat a una rajola  $s \in \mathbf{Tops}$  és el conjunt de rajoles de  $\mathcal{S}$  més petites que  $s$ .

**Definició 4.5.**

$$\mathbf{T}_s := \{s' \in \mathcal{S} \mid s' \leq s\}. \quad (4.6)$$

Aleshores podem expressar el conjunt  $\mathcal{S}_{\text{heavy}}$  de la següent manera:

$$\mathcal{S}_{\text{heavy}} = \bigcup_{s \in \mathbf{Tops}} \bigcup_{s' \in \mathbf{T}_s} s'. \quad (4.7)$$

**Lema 4.6.** *Les rajoles de **Tops** són disjunctes dos a dos.*

*Demostració.* Les rajoles de **Tops** són maximals respecte l'ordre parcial  $\leq$  per tant són incomparables que és el mateix que dir que són disjunts dos a dos.  $\square$

Recordem que  $E_s = E \cap A^{-1}(\omega_s)$ .

**Lema 4.7.** *Per tota rajola  $s$  de **Tops** es compleix que:*

$$E_s \cap I_s \subset E \quad (4.8)$$

*i són disjunts dos a dos.*

*Demostració.* Això passa perquè  $N$  és una funció i pel lema anterior.  $\square$

Suposem ara que la densitat tingué una definició més senzilla.

**Definició 4.8.** *Per tot rajola  $s \in \mathcal{T}$  definim:*

$$\text{dense}(s) := \frac{|E_s \cap I_s|}{|I_s|}. \quad (4.9)$$

Això ens permetria fer el següent argument demostrant així el lema:

$$\sum_{s \in \mathbf{Tops}} |I_s| = \sum_{s \in \mathbf{Tops}} \frac{|E_s \cap I_s|}{\text{dense}(s)} \leq \frac{2}{\delta} \sum_{s \in \mathbf{Tops}} |E_s \cap I_s| \leq \frac{2}{\delta} |E| \lesssim \delta^{-1}.$$

El problema de les cues de Schwartz no ens permet utilitzar aquesta fita per demostrar aquest lema.

Tornem a la definició usual de densitat definida a 3.20. El nostre objectiu ara serà partir el conjunt **Tops**.

**Definició 4.9.** *Per tot enter  $k \geq 0$  i una constant real petita  $c > 0$  definim:*

$$\mathcal{S}_k = \left\{ s \in \mathbf{Tops} \mid |2^k I_s \cap E_s| \geq c 2^{2k} \delta |I_s| \right\}. \quad (4.10)$$

Cada rajola de **Tops** estarà en algun  $\mathcal{S}_k$  per un  $c$  suficientment petit. Llavors només cal veure que:

**Lema 4.10.** *Per tot enter  $k \in \mathbb{Z}$  amb  $k \geq 0$  el conjunt  $\mathcal{S}_k$  compleix:*

$$\sum_{s \in \mathcal{S}_k} |I_s| \lesssim 2^{-k} \delta^{-1}. \quad (4.11)$$

Suposem cert aquest lema. Aleshores podem fer el següent argument:

$$\text{count}(\mathcal{S}_{\text{heavy}}) \leq \sum_{s \in \mathbf{Tops}} |I_s| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s \in \mathcal{S}_k} |I_s| \lesssim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \delta^{-1} \lesssim \delta^{-1} \quad (4.12)$$

demostrant així el lema de la densitat.

**Lema 4.11.** *Per tot enter  $k \in \mathbb{Z}$  existeix un subconjunt  $\mathcal{S}_{k'}$  de  $\mathcal{S}_k$  complint:*

- Els conjunts  $\{2^k I_s \times \omega_s \mid s \in \mathcal{S}_{k'}\}$  són disjunts dos a dos.
- Si  $s \in \mathcal{S}_k$  i  $s' \in \mathcal{S}_{k'}$  tals que  $2^k I_s \times \omega_s$  i  $2^k I_{s'} \times \omega_{s'}$  interseccen llavors  $|I_s| \leq |I_{s'}|$ .

*Demostració.* Construïm el conjunt  $\mathcal{S}_{k'}$  de la següent manera: escollim les rajoles de  $\mathcal{S}_k$  amb  $|I_s|$  màxim. Les ordenem i les anem afegint a  $\mathcal{S}_{k'}$  sempre que es compleixi la primera propietat. Iterem aquest procés amb la resta de rajoles de  $\mathcal{S}_k$  anat en ordre descendent de  $|I_s|$ . Això acabarà per la finitud del conjunt  $\mathcal{S}_k$  i les propietats desitjades es segueixen d'aquesta construcció.  $\square$

Aquest resultat ens permet demostrar el lema 4.10.

*Demostració.* Usant els lemes anteriors i la definició del conjunt  $\mathcal{S}_k$ :

$$\begin{aligned} \sum_{s \in \mathcal{S}_k} |I_s| &\leq 2^{k+1} \sum_{s' \in \mathcal{S}'_k} |I_{s'}| \leq 2^{k+1} \sum_{s' \in \mathcal{S}'_k} \frac{|2^k I_{s'} \cap E_{s'}|}{c 2^{2k} \delta} \leq \\ &\leq \frac{2}{c} 2^{-k} \delta^{-1} \sum_{s' \in \mathcal{S}'_k} |2^k I_{s'} \cap E_{s'}| \leq \frac{2}{c} 2^{-k} \delta^{-1} |E| \lesssim 2^{-k} \delta^{-1}. \end{aligned}$$

$\square$

Acabant així la demostració del lema de la densitat.

## 5 Lema de la mida

Recordem primer de tot què anunciava aquest lema.

### 5.1 Lema de la mida

**Lema 5.1.** *Qualsevol subconjunt finit de rajoles  $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$  és la unió de dos conjunts  $\mathcal{S}_{\text{big}}$  i  $\mathcal{S}_{\text{small}}$  tals que el conjunt  $\mathcal{S}_{\text{small}}$  satisfà:*

$$\text{size}(\mathcal{S}_{\text{small}}) \leq \frac{1}{2} \text{size}(\mathcal{S}) \quad (5.1)$$

*i el conjunt  $\mathcal{S}_{\text{big}}$  satisfà:*

$$\text{count}(\mathcal{S}_{\text{big}}) \lesssim \text{size}(\mathcal{S})^{-2}. \quad (5.2)$$

### 5.2 Construcció

Fixem un subconjunt finit de rajoles  $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ . Sigui  $\sigma = \text{size}(\mathcal{S})$ . Construïrem inductivament una col·lecció  $T$  d'arbres tals que la seva unió serà  $\mathcal{S}_{\text{large}}$ .

Escollim un arbre+  $\mathbf{T}_+$  dins  $\mathcal{S}$  tal que:

1.  $\Delta(\mathbf{T}_+) \geq \frac{\sigma}{2}$ ,
2.  $c(\omega_{\mathbf{T}_+})$  és minimal respecte tots els arbres+ que satisfan la primera condició.

La idea és que escollim un arbre que fa que  $\text{size}(\mathcal{S})$  sigui gran i tal que el seu top sigui el més baix possible. Llavors sigui  $\mathbf{T}$  l'arbre maximal dins  $\mathcal{S}$  amb top  $I_{\mathbf{T}_+} \times \omega_{\mathbf{T}_+}$ , és a dir,  $\mathbf{T} = \{s \in \mathcal{S} \mid s \leq I_{\mathbf{T}_+} \times \omega_{\mathbf{T}_+}\}$ . Afegim  $\mathbf{T}$  a  $T$  i afegim  $\mathbf{T}_+$  a  $T_+$  que serà una col·lecció d'arbres+ amb la que treballarem després. Traiem tots els elements de  $\mathbf{T}$  de  $\mathcal{S}$ .

Iterem el procediment anterior fins que no hi hagi cap arbre+ dins  $\mathcal{S}$  complint la primera propietat. Això sempre passarà degut a la finitud dels arbres. Llavors definim  $\mathcal{S}_{\text{small}}$  com el conjunt  $\mathcal{S}$  final i  $\mathcal{S}_{\text{big}}$  com el seu complement o vist d'una altra manera  $\mathcal{S}_{\text{big}} = \bigcup_{\mathbf{T} \in T} \bigcup_{s \in \mathbf{T}} s$ .

Per la construcció tenim que  $\text{size}(\mathcal{S}_{\text{small}}) \leq \frac{\sigma}{2}$  com volem. Aleshores falta veure  $\text{count}(\mathcal{S}_{\text{big}}) \lesssim \sigma^{-2}$  que és el mateix que veure:

$$\sigma^2 \sum_{\mathbf{T} \in T_+} |I_{\mathbf{T}}| \lesssim 1. \quad (5.3)$$

### 5.3 Demostració

Necessitarem una mica de geometria del pla temps-freqüència relacionat amb la construcció dels arbres que acabem de definir.

**Lema 5.2** (Disjunció forta). *Suposem que tenim dos arbres  $\mathbf{T} \neq \mathbf{T}'$  i rajoles  $s \in \mathbf{T}$  i  $s' \in \mathbf{T}'$  tals que  $\omega_s \subsetneq \omega_{s'}$ , llavors es compleix que  $I_{s'} \cap I_{\mathbf{T}} = \emptyset$*

*Demostració.* Per veure que la disjunció forta és certa observem primer que  $\omega_{\mathbf{T}} \subset \omega_s \subsetneq \omega_{s'}$ . Com que estem treballant amb arbres+ tenim que  $\omega_{\mathbf{T}'} \subset \omega_{s'}$  i per tant  $\omega_{\mathbf{T}'}$  està



sobre de  $\omega_{\mathbf{T}}$ . Això vol dir que en la nostra construcció recursiva  $\mathbf{T}$  es va construir primer. Argumentem per reducció a l'absurd. Suposem que  $I_{s'} \cap I_{\mathbf{T}} \neq \emptyset$ . Al ser intervals diàdics un ha de ser contingut en l'altre. Com que  $|\omega_{\mathbf{T}}| < |\omega_{s'}|$  i les rajoles tenen àrea 1 ha de ser  $I_{s'} \subset I_{\mathbf{T}}$ . Això vol dir que  $s' \leq I_{\mathbf{T}} \times \omega_{\mathbf{T}}$  i per tant  $s' \in \mathbf{T}$ . Però això no pot ser perquè durant la construcció  $s'$  hagués sigut eliminada de  $\mathcal{S}$  i no podria pertànyer a  $\mathbf{T}'$ .  $\square$

Fa falta veure que:

$$\sigma^2 \sum_{\mathbf{T} \in T_+} |I_{\mathbf{T}}| \lesssim 1. \quad (5.4)$$

**Definició 5.3.** Definim el següent conjunt que depèn de la construcció:

$$\mathcal{S}_+ = \bigcup_{\mathbf{T} \in T_+} \bigcup_{s \in \mathbf{T}} s. \quad (5.5)$$

**Definició 5.4.** Per tota rajola  $s \in \mathcal{T}$  definim el següent operador:

$$O_s f := \langle f, \varphi_s \rangle \varphi_s. \quad (5.6)$$

**Definició 5.5.** L'operador anterior ens permet definir el següent:

$$F f := \sum_{s \in \mathcal{S}_+} \langle f, \varphi_s \rangle \varphi_s = \sum_{s \in \mathcal{S}_+} O_s f. \quad (5.7)$$

**Lema 5.6.** Per tota rajola  $s \in \mathcal{T}$  l'operador  $O_s$  és autoadjunt, és a dir, per totes funcions de quadrat integrable  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  es compleix que:

$$\langle O_s f, g \rangle = \langle f, O_s g \rangle. \quad (5.8)$$

*Demostració.* Utilitzant el teorema de Fubini:

$$\begin{aligned} \langle O_s f, g \rangle &= \int_{\mathbb{R}} O_s f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \langle f, \varphi_s \rangle \varphi_s(x) \overline{g(x)} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(y) \overline{\varphi_s(y)} dy \right) \varphi_s(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \overline{\varphi_s(y)} \varphi_s(x) \overline{g(x)} dy dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \overline{\varphi_s(y)} \varphi_s(x) \overline{g(x)} dx dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) \overline{\varphi_s(y)} \langle \varphi_s, g \rangle dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \overline{\langle g, \varphi_s \rangle \varphi_s(y)} dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) \overline{O_s g(y)} dy = \langle f, O_s g \rangle. \end{aligned}$$

$\square$

Aquest lema i per la maximalitat de l'elecció ens permet arribar al següent usant la desigualtat de Cauchy–Schwarz:

$$\sigma^2 \sum_{\mathbf{T} \in T_+} |I_{\mathbf{T}}| = \langle f, F \rangle \leq \|f\|_2 \|F\|_2. \quad (5.9)$$

Només faltaria veure el següent lema per demostrar la cota.

**Lema 5.7.** L'operador  $F$  compleix la següent fita:

$$\|F\|_2^2 \lesssim \sigma^2 \sum_{\mathbf{T} \in T_+} |I_{\mathbf{T}}|. \quad (5.10)$$

Expandim l'expressió:

$$\begin{aligned} \|F\|_2^2 &= \langle F, F \rangle = \left\langle \sum_{s \in \mathcal{S}_+} \langle f, \varphi_s \rangle \varphi_s, \sum_{s' \in \mathcal{S}_+} \langle f, \varphi_{s'} \rangle \varphi_{s'} \right\rangle = \sum_{s, s' \in \mathcal{S}_+} \langle \langle f, \varphi_s \rangle \varphi_s, \langle f, \varphi_{s'} \rangle \varphi_{s'} \rangle \leq \\ &\leq \sum_{s, s' \in \mathcal{S}_+} |\langle f, \varphi_s \rangle \langle \varphi_s, \varphi_{s'} \rangle \langle \varphi_{s'}, f \rangle| \end{aligned}$$

i ho descomposem de la següent manera:

$$\sum_{\substack{s, s' \in \mathcal{S}_+ \\ \omega_s = \omega_{s'}}} |\langle f, \varphi_s \rangle \langle \varphi_s, \varphi_{s'} \rangle \langle \varphi_{s'}, f \rangle| \quad (5.11)$$

$$+ 2 \sum_{\substack{s, s' \in \mathcal{S}_+ \\ \omega_s \not\subseteq \omega_{s'}}} |\langle f, \varphi_s \rangle \langle \varphi_s, \varphi_{s'} \rangle \langle \varphi_{s'}, f \rangle|. \quad (5.12)$$

Hem utilitzat simetria a (5.12) i el fet que  $\langle \varphi_s, \varphi_{s'} \rangle = 0$  si  $\omega_s$  i  $\omega_{s'}$  són disjunts, ja que llavors els suports de les seves respectives transformades de Fourier són també disjunts.

### 5.3.1 Primera fita

Per un argument molt similar a la demostració del lema 2.28 i aplicant la definició de  $\Delta$  podem fitar l'expressió (5.11) per:

$$(5.11) \lesssim \sum_{s \in \mathcal{S}_+} |\langle f, \varphi_s \rangle|^2 = \sum_{\mathbf{T} \in T_+} |I_{\mathbf{T}}| \Delta(\mathbf{T})^2 \leq \sigma^2 \sum_{\mathbf{T} \in T_+} |I_{\mathbf{T}}| \quad (5.13)$$

que és exactament el que volíem veure.

### 5.3.2 Segona fita

Per acotar (5.12) necessiterem una definició i un lema previs.

**Definició 5.8.** Per tot arbre+  $\mathbf{T}$  de  $T_+$  definim:

$$H(\mathbf{T}) := \sum_{s \in \mathbf{T}} \left( \sum_{\substack{s' \in \mathcal{S}_+ \\ \omega_s \not\subseteq \omega_{s'}}} |\langle \varphi_s, \varphi_{s'} \rangle \langle \varphi_{s'}, f \rangle| \right)^2. \quad (5.14)$$

Aquesta funció ens és útil perquè compleix el següent lema.

**Lema 5.9** (Fita de la funció  $H$ ). Per tot arbre+  $\mathbf{T}$  de  $T_+$  tenim que:

$$H(\mathbf{T}) \lesssim \sigma^2 |I_{\mathbf{T}}|. \quad (5.15)$$

**Observació 5.10.** Aquest lema es demostra usant la propietat de la disjunció forta.

Acotem el segon sumand (5.12) aplicant la definició de la funció  $H$  i la desigualtat de Cauchy–Schwarz. Per acabar usarem el lema 5.9 i el que hem vist en la demostració de la primer fita. Continuem l’expressió anterior amb:

$$\begin{aligned}
(5.12) &\lesssim \sum_{s \in \mathcal{S}_+} |\langle f, \varphi_s \rangle| \sum_{\substack{s' \in \mathcal{S}_+ \\ \omega_s \not\subseteq \omega_{s'}}} |\langle \varphi_s, \varphi_{s'} \rangle \langle \varphi_{s'}, f \rangle| \lesssim \sum_{\mathbf{T} \in T_+} \left( \sum_{s \in \mathbf{T}} |\langle f, \varphi_s \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} H(\mathbf{T})^{\frac{1}{2}} \lesssim \\
&\lesssim \sum_{\mathbf{T} \in T_+} (|I_{\mathbf{T}}|^{\frac{1}{2}} \sigma) (\sigma^2 |I_{\mathbf{T}}|)^{\frac{1}{2}} = \sigma^2 \sum_{\mathbf{T} \in T_+} |I_{\mathbf{T}}|.
\end{aligned}$$

Acabem així la demostració del lema de la mida.

## 6 Lema de l'arbre

### 6.1 Lema de l'arbre

Recordem primer de tot què enuncïava aquest lema.

**Lema 6.1.** *Per tot arbre  $\mathbf{T}$  es compleix el següent:*

$$\sum_{s \in \mathbf{T}} |\langle f, \varphi_s \rangle \langle \varphi_s, \mathbf{1}_{E_{s+}} \rangle| \lesssim |I_{\mathbf{T}}| \text{size}(\mathbf{T}) \text{dense}(\mathbf{T}). \quad (6.1)$$

Recordem també que  $E_{s+} = E \cap A^{-1}(\omega_{s+})$ . Aquesta és la part més complexa i complicada de tota la demostració. Explicarem les eines que s'usen però no entrarem en molt detall.

### 6.2 Demostració

Fixem un arbre  $\mathbf{T}$ . Sigui  $\delta = \text{dense}(\mathbf{T})$  i sigui  $\sigma = \text{size}(\mathbf{T})$ .

**Definició 6.2** (Partició de la recta real). *Sigui  $\mathcal{J}$  la partició de  $\mathbb{R}$  definida pels intervals diàdics maximals  $J$  tals que  $3J$  no conté cap  $I_s$  per tota  $s \in \mathbf{T}$ .*

**Lema 6.3.** *Aquesta partició té dues propietats essencials:*

- Si  $|J| < |I_{\mathbf{T}}|$  llavors  $J \subset 3I_{\mathbf{T}}$ .
- Si  $|J| \geq |I_{\mathbf{T}}|$  llavors  $\text{dist}(J, I_{\mathbf{T}}) \gtrsim |J|$ .

Podem dir que si  $|J|$  és prou petit llavors  $J$  està al voltant de  $I_{\mathbf{T}}$  i si  $|J|$  és prou gros llavors la seva mida és proporcional a la distància a l'arbre.

Demostrem la primera propietat.

*Demostració.* Sigui  $J'$  l'únic interval diàdic que conté  $J$  i de mida  $2|J|$ . Llavors es compleix que  $|J'| \leq |I_{\mathbf{T}}|$ . Per la maximalitat existeix  $s \in \mathbf{T}$  tal que  $I_s \subset 3J'$  i també es compleix que  $I_s \subset I_{\mathbf{T}}$ . Si no es compleix que  $J' \subset 3I_{\mathbf{T}}$  llavors  $3J' \cap I_{\mathbf{T}} = \emptyset$  per ser intervals diàdics i, per tant, tampoc es compleix que  $I_s \subset 3J'$ . Aleshores sabem que  $J \subsetneq J' \subset 3I_{\mathbf{T}}$ .  $\square$

Definim  $\epsilon_s \in \{-1, 1\}$  tal que passi el següent:

$$\sum_{s \in \mathbf{T}} |\langle f, \varphi_s \rangle \langle \varphi_s, \mathbf{1}_{E_{s+}} \rangle| = \sum_{s \in \mathbf{T}} \epsilon_s \langle f, \varphi_s \rangle \langle \varphi_s, \mathbf{1}_{E_{s+}} \rangle. \quad (6.2)$$

Com que estem treballant amb funcions positives podem introduir la norma de la següent manera:

$$\sum_{s \in \mathbf{T}} \epsilon_s \langle f, \varphi_s \rangle \langle \varphi_s, \mathbf{1}_{E_{s+}} \rangle = \sum_{s \in \mathbf{T}} \epsilon_s \langle f, \varphi_s \rangle \|\varphi_s \mathbf{1}_{E_{s+}}\|_1 = \left\| \sum_{s \in \mathbf{T}} \epsilon_s \langle f, \varphi_s \rangle \varphi_s \mathbf{1}_{E_{s+}} \right\|_1.$$

Ara introduïm la partició  $\mathcal{J}$  per obtenir la següent descomposició:

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{s \in \mathbf{T}} \epsilon_s \langle f, \varphi_s \rangle \varphi_s \mathbf{1}_{E_{s+}} \right\|_1 = \sum_{J \in \mathcal{J}} \left\| \sum_{s \in \mathbf{T}} \epsilon_s \langle f, \varphi_s \rangle \varphi_s \mathbf{1}_{E_{s+}} \right\|_{L^1(J)} \leq \\ & \leq \sum_{J \in \mathcal{J}} \sum_{\substack{s \in \mathbf{T} \\ |I_s| \leq |J|}} \|\langle f, \varphi_s \rangle \varphi_s \mathbf{1}_{E_{s+}}\|_{L^1(J)} + \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$+ \sum_{J \in \mathcal{J}} \left\| \sum_{\substack{s \in \mathbf{T} \\ |I_s| > |J|}} \epsilon_s \langle f, \varphi_s \rangle \varphi_s \mathbf{1}_{E_{s+}} \right\|_{L^1(J)}. \quad (6.4)$$

Ho podem fitar per separat.

### 6.2.1 Primera fita

Per fitar 6.3 necessitarem uns resultats previs. Recordem que  $\delta = \text{dense}(\mathbf{T})$  i  $\sigma = \text{size}(\mathbf{T})$ .

**Lema 6.4.** *Per tot interval diàdic de la partició  $J \in \mathcal{J}$  i per tota rajola de l'arbre  $s \in \mathbf{T}$  es compleix que:*

$$\|\langle f, \varphi_s \rangle \varphi_s \mathbf{1}_{E_{s+}}\|_{L^1(J)} \lesssim \sigma \delta |I_s| (1 + \text{dist}(I_s, J) |I_s|^{-1})^{-\kappa}. \quad (6.5)$$

**Lema 6.5.** *Per tot enter  $k \in \mathbb{Z}$  amb  $2^k \leq |J|$  tenim que:*

$$\sum_{\substack{s \in \mathbf{T} \\ |I_s| = 2^k}} |I_s| (1 + \text{dist}(I_s, J) |I_s|^{-1})^{-\kappa} \lesssim 2^k (1 + \text{dist}(I_{\mathbf{T}}, J) |I_{\mathbf{T}}|^{-1})^{-\kappa'}. \quad (6.6)$$

**Observació 6.6.** Això és conseqüència de la segona propietat de la demostració i que totes les rajoles de l'arbre  $s \in \mathbf{T}$  amb mida de temps fixat  $|I_s| = 2^k$  tenen els intervals  $I_s$  disjunts dos a dos, disjunts de  $J$  i continguts en  $I_{\mathbf{T}}$ .

Totes aquestes cotes sumades ens donen el resultat que volem:

$$\sum_{J \in \mathcal{J}} \sum_{\substack{s \in \mathbf{T} \\ |I_s| \leq |J|}} \|\langle f, \varphi_s \rangle \varphi_s \mathbf{1}_{E_{s+}}\|_{L^1(J)} \lesssim \sigma \delta |I_{\mathbf{T}}|. \quad (6.7)$$

### 6.2.2 Segona fita

Necessitarem introduir un nou conjunt que serà el suport que ens interessarà.

**Definició 6.7.** *Per tot interval diàdic de la partició  $J \in \mathcal{J}$  definim:*

$$G_J := J \cap \bigcup_{\substack{s \in \mathbf{T} \\ |I_s| > |J|}} E_{s+}. \quad (6.8)$$

**Lema 6.8.** *La mesura del conjunt  $G_J$  compleix la següent fita:*

$$|G_J| \lesssim \delta |J|. \quad (6.9)$$

Ara la idea és partir l'arbre  $\mathbf{T}$  en un arbre $+$  i un arbre $-$  i fitar-los per separat.

**Definició 6.9.** L'arbre $+$   $\mathbf{T}_+$  és el conjunt de rajoles de l'arbre  $s \in \mathbf{T}$  tals que  $\omega_{\mathbf{T}_+} \subset \omega_{s_+}$ .

**Definició 6.10.** L'arbre $-$   $\mathbf{T}_-$  és el complementari de l'arbre $+$   $\mathbf{T}_+$ , és a dir,  $\mathbf{T}_- := \mathbf{T} \setminus \mathbf{T}_+$ .

Utilitzem aquests arbres per definir les següents funcions.

**Definició 6.11.** Pels arbres que acabem de definir:

$$F_{J_+} := \sum_{\substack{s \in \mathbf{T}_+ \\ |I_s| > |J|}} \epsilon_s \langle f, \varphi_s \rangle \varphi_s \mathbf{1}_{E_{s_+}} \quad (6.10)$$

$$F_{J_-} := \sum_{\substack{s \in \mathbf{T}_- \\ |I_s| > |J|}} \epsilon_s \langle f, \varphi_s \rangle \varphi_s \mathbf{1}_{E_{s_+}}. \quad (6.11)$$

**Observació 6.12.** Fitant aquestes dues funcions per separat n'hi ha prou per fitar (6.4).

Fitem primer la funció  $F_{J_-}$  al ser més senzill.

*Demostració.* Per la definició de  $G_J$ , per la desigualtat de Hölder i pel fet que estem treballant amb un arbre $-$  tenim que:

$$\begin{aligned} \|F_{J_-}\|_{L^1(J)} &\leq \sum_{\substack{s \in \mathbf{T}_- \\ |I_s| > |J|}} \|\langle f, \varphi_s \rangle \varphi_s \mathbf{1}_{E_{s_+}}\|_{L^1(J)} = \sum_{\substack{s \in \mathbf{T}_- \\ |I_s| > |J|}} \int_{J \cap E_{s_+}} |\langle f, \varphi_s \rangle \varphi_s(x)| dx \leq \\ &= \int_{G_J} \sum_{\substack{s \in \mathbf{T}_- \\ |I_s| > |J|}} |\langle f, \varphi_s \rangle \varphi_s(x)| dx \leq |G_J| \left\| \sum_{\substack{s \in \mathbf{T}_- \\ |I_s| > |J|}} |\langle f, \varphi_s \rangle \varphi_s| \right\|_{\infty} \lesssim \delta |J| \sigma. \end{aligned}$$

□

Fitem ara la funció  $F_{J_+}$ .

Fixem un  $x \in \mathbb{R}$  i suposem que  $F_{J_+}(x) \neq 0$ . Com que els intervals  $\omega_{s_+}$  amb  $s \in \mathbf{T}_+$  són intervals encaixats tindrem un interval més gran que tots els altres  $\omega_{\max}$  de la forma  $\omega_s$  i un interval més petit que tots els altres  $\omega_{\min}$  de la forma  $\omega_{s_+}$  on  $s \in \mathbf{T}_+$ ,  $x \in E_{s_+}$  i  $|I_s| > |J|$ . Dit d'una altra manera tenim que per tot  $s \in \mathbf{T}$  es compleix que  $x \in E_{s_+}$  i  $|I_s| > |J|$  si i només si  $|\omega_{\min}| < |\omega_s| \leq |\omega_{\max}|$ .

Podem escriure la funció  $F_{J_+}$  de la següent manera usant la geometria dels suports de les funcions  $\widehat{\varphi}_s$ :

$$\begin{aligned} F_{J_+}(x) &= \sum_{\substack{s \in \mathbf{T}_+ \\ |\omega_{\min}| < |\omega_s| \leq |\omega_{\max}|}} \epsilon_s \langle f, \varphi_s \rangle \varphi_s(x) = \\ &= \sum_{s \in \mathbf{T}_+} \epsilon_s \langle f, \varphi_s \rangle \left( \varphi_s * \left( \text{Mod}_{c(\omega_{\max})} \text{Dil}_{(0.1|\omega_{\max}|)^{-1}}^1 \varphi - \text{Mod}_{c(\omega_{\min})} \text{Dil}_{(0.09|\omega_{\min}|)^{-1}}^1 \varphi \right) \right) (x). \end{aligned}$$

Això ens permet arribar a la següent fita:

$$|F_{J_+}(x)| \lesssim \sup_{J \subset I} \frac{1}{|I|} \int_I \left| \sum_{s \in \mathbf{T}_+} \epsilon_s \langle f, \varphi_s \rangle \varphi_s(x) \right| dx \quad (6.12)$$

que utilitzarem per introduir la funció maximal de Hardy Littlewood  $M$ .

**Lema 6.13.** *Es compleix la següent cota:*

$$\left( \sum_{s \in \mathbf{T}_+} |\langle f, \varphi_s \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim |I_{\mathbf{T}}|^{\frac{1}{2}} \sigma. \quad (6.13)$$

La funció  $F_{J_+} \mathbf{1}_J$  està suportada sobre el conjunt  $G_J$ . Aplicant el teorema de la funció maximal de Hardy Littlewood, els lemes anteriors i la primera propietat de la partició podem dir que:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{J \in \mathcal{J} \\ J \subset 3I_{\mathbf{T}}}} \|F_{J_+}\|_{L^1(J)} &\lesssim \sum_{\substack{J \in \mathcal{J} \\ J \subset 3I_{\mathbf{T}}}} \delta |J| \sup_{J \subset I} \frac{1}{|I|} \int_I \left| \sum_{s \in \mathbf{T}_+} \epsilon_s \langle f, \varphi_s \rangle \varphi_s(x) \right| dx \lesssim \\ &\lesssim \delta \left\| M \left( \sum_{s \in \mathbf{T}_+} \epsilon_s \langle f, \varphi_s \rangle \varphi_s \right) \right\|_{L^1(3I_{\mathbf{T}})} \lesssim \delta |I_{\mathbf{T}}|^{\frac{1}{2}} \left\| \sum_{s \in \mathbf{T}_+} \epsilon_s \langle f, \varphi_s \rangle \varphi_s \right\|_2 \lesssim \\ &\lesssim \delta |I_{\mathbf{T}}| \sigma. \end{aligned}$$

D'aquesta manera acabem la demostració del lema de l'arbre.

## 7 Conclusions

En la fase final d'elaboració d'aquest treball tinc una sensació extremadament diferent envers els textos utilitzats per realitzar-lo. El què el principi eren jeroglífics de caràcters grecs i símbols ara tenen tot el sentit del món. Aquest procés d'agafar un text matemàtic aliè als teus coneixements previs i de llegir i rellegir, comparar, analitzar, comprovar... és la cosa més realitzadora que conec. És per això que m'he sentit molt a gust escrivint aquest treball.

Una de les principals dificultats que m'ha sorgit al llarg d'aquests mesos ha sigut el del bloqueig. He treballat amb una demostració que el meu tutor ja em va avisar que no seria fàcil. Tot i això, jo vaig decidir de tirar endavant igualment. Els escrits del Dr. Thiele que he fet servir presenten un sèrie de defectes que vull deixar palesos aquí. Recordem primer que la bibliografia consisteix principalment de dos textos seus que ambdós són demostracions del teorema de Carleson: una curta i l'altra llarga. En primer lloc, presenten sovint una forta imprecisió que porta a mal de caps. Per exemple mai queda clar si els objectes utilitzats són finits o numerables, les definicions entre els papers són una mica diferents quan després d'analitzar-ho crec que haurien de ser iguals, sovint anuncia que la construcció de diferents objectes és possible però no explica el com, la notació és inusual, poc intuïtiva i a vegades pesada etc.

És per totes aquestes dificultats que moltes vegades m'he trobat encallat i sense saber com continuar per entendre la demostració. Han sigut un munt d'hores que a priori poden semblar improductives però que al cap i a la fi són essencials per seguir avançant. Han consistit en llegir el text mil vegades, consultar apunts, llibres i la Vikipèdia per entendre més el context i intentar trobar alguna eina o procediment per continuar, comparar les dues demostracions i treuren el millor de cada una, pensar d'on es treuen els resultats, quin és el seu significat, per què ho fa d'aquesta manera i no d'una altra etc. Tot i que és una feina que fatiga i fins i tot agobia al final m'ha permès entendre amb una profunditat la demostració que no és possible de cap altra manera.

Després d'haver teclejat tantes comandes en  $\text{\LaTeX}$ em sento molt més a gust utilitzant-lo. En el passat ja l'havia fet servir en diverses ocasions però sempre a un nivell molt bàsic. Ara em considero un usuari mitjà: ni molt avançat, ni molt sapastre. He après a fer servir macros, a barallar-me amb les llibreries, a construir fórmules llarguíssimes amb moltes comandes una dins l'altra, a estructurar els escrits etc. M'he acostumat al ritual de compilar, observar com ha quedat, rectificar alguna cosa i tornar a compilar. Fins i tot li he trobat la gràcia a fer-ho d'aquesta manera i ja no veig amb els mateixos ulls altres programaris com el Word.

No he entès del tot la demostració. Encara em queden misteris en la prova dels lemes: cotes que no se saben ben bé d'on surten o arguments que no s'han acabat de mostrar i fins i tot petits errors. El més important és que l'estructura i l'argument principal de la demostració m'han quedat bastant clar.

Aquest treball no acaba aquí. Té moltíssimes ampliacions possibles. Existeix una generalització del teorema de Carleson als espais  $L^p(\mathbb{R})$  amb  $1 < p \leq \infty$  anomenat el teorema de Hunt que va ser demostrat per Richard Hunt el 1968. En aquests espais també és possible definir la transformada de Fourier però és bastant més complicat. S'han de fer servir interpolació i distribucions temperades. També podria estudiar més amb profunditat la relació entre la transformada de Fourier i les sèries de Fourier. Potser en un futur ho aconseguir fer.



## Agraïments

Vull agrair primer de tot als meus pares per haver-me donat l'espai i el suport necessaris per poder dur a terme aquest treball.

Voldria agrair al meu tutor del treball: el Dr. Martí Prats Soler per haver compartit molts dimarts per la tarda amb mi discutint i barallant-nos amb els papers del Dr. Lacey, pel seu interès i pels seus coneixements en la matèria.

També donar les gràcies a la biblioteca de la facultat de Matemàtiques de la UB per ser un lloc tan tranquil per fer feina, per la infinitud de llibres útils que tens a la teva disposició i per l'amabilitat dels bibliotecaris.

Finalment, donar gràcies a tots els companys i companyes de carrera que sense ells no hauria sigut el mateix.

## Referències

- [Gui79] Peano Guiseppe. *Los principios de la aritmética expuestos sobre un nuevo método*. Clásicos el Basilisco. Pentalfa ediciones, 1979.
- [iCT] Michael Lacey i Christoph Thiele. A proof of boundedness of the carleson operator. *Mathematical Research Letters* 7, 361–370 (2000).
- [Kra99] Steven G. Krantz. *A Panorama of Harmonic Analysis*. Number 27 in The Carus Mathematical Monographs. Mathematical Association of America, 1999.
- [Lac] Michael Lacey. Carleson’s theorem: Proof, complements, variations. *Publ. Mat.* 48 (2004), no. 2, 251–307.
- [Pra22] Martí Prats. *Anàlisi harmònica i teoria del senyal*. 2022.