UNIVERSITAT DE BARCELONA

Treball Final de Grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES I ADMINISTRACIÓ I DIRECCIÓ D'EMPRESES

El repartiment dels ingressos per retransmissions en el futbol

Joan Domènech Jiménez

Directors: **Dr. David Márquez Carreras**
Dept. de Matemàtiques i Informàtica
Dr. Javier Martínez de Albéniz
Dept. de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial

Barcelona, Gener 2023

Resum

Aquest treball tracta des d'un punt de vista analític i formal els repartiment dels ingressos de LaLiga per retransmissions en el futbol. L'objectiu del treball és proposar un model alternatiu a l'actual on es minimitzi la diferència d'ingressos entre equips.

Primer, es defineixen el problema de bancarrota i les principals regles de repartiment. A continuació, s'estableix una comparació entre les normatives de LaLiga i la English Premier League. Posteriorment, s'especifica el model teòric, les seves variables, les regles de repartiment i els axiomes utilitzats en la part final del treball.

Per últim, es defineixen els models alternatius amb les seves corresponents regles de repartiment. També, s'analitzen els resultats de tots els models entre ells amb dades reals.

Abstract

This paper deals from an analytical and formal point of view the distribution of LaLiga's broadcasting revenues in soccer. The aim of the paper is to propose an alternative model to the current one in which revenue difference between teams is minimised.

First, the bankruptcy problem and the main distribution rules are defined. Next, a comparison is made between the regulations of LaLiga and the English Premier League. Subsequently, the theoretical model, its variables, distribution rules and axioms used in the final part of the paper are specified.

Finally, the alternative models with their corresponding distribution rules are defined. The results of all models are also analysed against each other with real data.

2020 Mathematics Subject Classification. 91A12, 91B32

Agraïments

En primer lloc, vull agrair als meus tutors David Márquez Carreras i Javier Martínez de Albéniz la seva disposició durant tot el temps en el que he estat realitzant aquest treball.

En segon lloc, vull agrair a tots els meus amics que sempre m'han recolzat i m'han animat quan més ho necessitava.

Per últim, vull dedicar aquest treball a tota la meva família pel suport rebut i per haver-me acompanyat durant aquests anys en els que he estat estudiant a la universitat.

If people do not believe
that mathematics is simple,
it is only because they do not realize
how complicated life is.

John Von Neumann (1903–1957)

Índex

Capítol 1

Introducció

Els esports, o almenys alguns esports, s'han convertit en espectacles seguits per molt de public. Els equips i jugadors participants generen una quantitat immensa de diners. La diferència entre esport professional i amateur s'ha anat esvaint i només cal recordar el cas dels Jocs Olímpics, que van ser totalment amateurs (és especialment conegut el trist cas de Jim Thorpe, al 1912). En particular, el futbol s'ha convertit en un dels esports més seguits mundialment i com a conseqüència, es mou una quantitat astronòmica de diners en concepte de contractes televisius i drets associats.

A la Taula 1.1 es mostren les 10 competicions que van ingressar més per drets televisius durant l'any 2019, amb la quantitat corresponent.

Lliga	**Esport**	**Dòlars** (en milions)
NFL	Futbol americà	4,520
EPL	Futbol	3,830
NBA	Bàsquet	3,120
LaLiga	Futbol	2,270
MLB	Beisbol	1,650
Bundesliga	Futbol	1,570
Serie A	Futbol	1,510
Ligue 1	Futbol	1,370
NHL	Hoquei	220
MLS	Futbol	110

Taula 1.1: Competicions amb més drets televisius. Any 2019.
Font: Statista [21]

Aquesta taula serveix per posar xifres concretes i veure la magnitud de negoci que genera. A més a més, 6 de les 10 competicions que reben més ingressos corresponen a lligues de futbol. En aquest treball estudiem el repartiment dels diners en el futbol, dins de dues lligues, la espanyola i l'anglesa.

El problema dels repartiments dels ingressos en concepte de drets televisius és un conflicte actual. La nova llei de l'esport, que ha estat al Congrés dels Diputats durant 2022 incideix en aquest tema (Projecte de llei del 14 de gener de 2022). Tal com publica el diari *as* [13], el 24 d'octubre molts dels clubs de la Primera i la Segona Divisió van tenir una reunió per postular-se en contra de la nova *Ley del deporte* [13]. Segons el 95% dels equips, aquesta llei afavoriria només als equips grans i faria la lliga més desigual.

En aquesta llei es preveu que desaparegui la comercialització dels drets televisius. D'aquesta manera, s'aconseguiria que aquells equips més grans rebessin molta més quantitat d'ingressos en concepte d'aquest tipus de drets. Els equips grans diuen no estar d'acord en el repartiment que es fa servir actualment a la competició. En canvi, els altres equips reclamen que sigui LaLiga qui exploti aquest drets comercials i audiovisuals. A més a més, també que distribueixi els ingressos. El text de la llei es va aprovar al Congrés dels Diputats el 2 de novembre de 2022 i al Senat estava previst que es voti el 12 de desembre de 2022. Si hi ha canvis tornarà al Congrés i després es publicarà al BOE. Aquest mateix desembre, el Congrés ha aprovat definitivament la nova Llei de l'Esport.

En aquest treball s'aborda el repartiment dels drets televisius. En els articles de Bergantiños i Moreno-Ternero (2020 i 2021) [4] [6] es fa una aproximació axiomàtica general d'aquest problema i identifiquen les regles a les quals respon el repartiment en el cas de la lliga.

El problema del repartiment d'una quantitat entre diferents agents que tenen unes demandes que no es poden satisfer sobre la quantitat disponible s'anomena *problemes de bancarrota.* Per la seva importància pràctica ja es menciona en textos molt antics (vegeu Thomson, 2019). L'article de O'Neill (1982) [9] és el que comença l'estudi formal del problema i les seves solucions. Al llibre de Thomson (2019)[11] es pot trobar una exposició clara i uniforme de les aportacions que s'han fet a l'estudi del problema.

Normalment, en aquest tipus de competicions solament se segueixen els partits dels equips que som seguidors. En canvi, els altres partits no ens interessen tant perquè o bé els trobem desigualats entre els dos equips que juguen, o bé perquè el nivell de l'equip que seguim és molt superior als dos que juguen.

Si els ingressos fossin més equilibrats entre els equips d'una mateixa competició, aquesta dissimilitud no seria tant gran. D'aquesta manera, despertaríem molt més interès per tots els partits als nostres oients. És a dir, se seguirien els partits dels equips que s'és fan i dels que no ho som també.

Igualment, hem de continuar prioritzant els mèrits de cada equip (per exemple, no hauríem de donar la mateixa quantitat de diners a tots els equips, incloent-hi el campió de la lliga i l'últim classificat). Es tindrà en compte tot els mèrits esportius que generen.

Atès que en el cas espanyol, el repartiment es va definir via un decret-llei, es fan hipòtesis de com es tradueixen las disposicions legals, i es compara les solucions axiomàtiques amb el repartiment real en la temporada estudiada. En el cas anglès, les normes es van actualitzant cada tres anys i actualment respon a la regla "50:25:25". Teoritzarem aquestes normes i les contrastarem entre elles. Es seguirà el model de Bergantiños i Moreno-Ternero (2021) [4]. Darrerament han seguit amb el model i analitzant noves propietats o enfocant el problema de forma més empírica a l'article per Sports Economic Review [3], Economics Letters [5] i Public Choice [2].

Per aquest motiu, en aquest treball proposem un model alternatiu econòmic per distribuir aquests ingressos en concepte de drets televisius d'una manera més equitativa.

L'aplicació d'aquest treball és la creació d'un model amb diverses variables on es minimitzi la diferenciació d'ingressos entre equips de la mateixa divisió. Aquestes retribucions les reparteix l'organisme corresponent en cada cas. Ho apliquem a les dades de la lliga 2021/2022 i veurem les diferències entre el model creat i els guanys rebuts realment. També s'afegeixen els mèrits esportius per saber quin pes han de tenir en aquesta retribució.

Estructura del treball

Aquest treball comença al Capítol 2 amb una exposició preliminar de les regles de repartiment. Es defineix un problema de bancarrota, les principals regles (acompanyades per algun exemple) i les propietats principals.

Seguidament, el Capítol 3 exposa les normes de repartiment dels ingressos generats en concepte de drets televisius per dues de les lligues de futbol més importants: LaLiga i la English Premier League. També, s'han comparat les dues normes per establir les similituds i les diferències.

A continuació, el Capítol 4 especifica el model teòric, les seves variables i les regles de repartiment que s'utilitzaran en l'aplicació. Tot seguit, es descriuen les famílies de regles resultants de la combinació convexa de les anteriors. Així mateix, es defineixen els principals axiomes que es consideren per l'aplicació. Aquest apartat acaba amb el teorema de caracterització de dues de les regles esmentades.

Per últim, en el Capítol 5 es creen uns models alternatius per construir una transició entre la normativa de LaLiga i un model on s'inclouen les audiències i els mèrits esportius. Per a fer-ho, es defineixen les regles de repartiment utilitzant la teoria dels capítols anteriors i s'extreuen dades reals per poder obtenir resultats en aquests models alternatius.

Capítol 2

Regles de repartiment

En aquest capítol s'exposen quins són, des d'un punt de vista formal, els problemes de repartiment i les diferents regles que es poden aplicar. Aquest serà un estudi axiomàtic i de caracteritzacions, ja que el nostre objectiu serà la seva aplicació als problemes del repartiment dels diners aconseguits pels drets televisius dels partits de futbol.

Aquest tema ha estat tractat des de l'antiguitat i està molt relacionat amb el concepte de justícia. Segons Aristòtil (Ètica a Nicòmac), la justícia és tractar igual als iguals i desigual als desiguals (vegeu Young, 1995 [12]). L'estudi modern d'aquest tema es remunta a O'Neill (1982) [9] i per la seva sistematització seguirem el text de Thomson (2019) [11]. Sobre les regles es pot consultar també el treball d'Herrero i Villar (2001) [8].

2.1 Problemes de repartiment i regles

Considerem la situació en què un grup d'agents han de repartir-se una quantitat de recursos finita i divisible. Aquests agents tenen unes demandes sobre els recursos tals que la suma és major que la quantitat total d'aquests i per tant, no es poden satisfer les seves demandes. A aquests problemes, se'ls anomena *problemes de bancarrota*. L'exemple més clar és la fallida d'una empresa, quan aquesta no pot respondre amb el seu patrimoni al conjunt de deutes que té.

Formalment, sigui $N = \{1, \dots, n\}$ el grup de n agents que reclamen cadascun unes demandes (*claims*) $c_i \geq 0$ per $i \in N$ sobre una quantitat de recursos divisible $X \in \mathbb{R}_+$.

Definició 2.1. *Un* problema de bancarrota *és un parell* $(c, X) \in \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}_+$ *tal que* $\sum_{i=1}^n c_i \geq X$.

Denotem $\mathbb{C}^N$ el domini de tots els problemes.

Solucionar un problema de bancarrota significa identificar la quantitat de recursos que rebrà cada agent. En tot cas, percebrà una quantitat no negativa i com a màxim igual a la quantitat que demana. Això defineix un vector de pagaments.

Un *vector de pagaments* és un vector $x \in \mathbb{R}^N$ per $(c, X) \in \mathbb{C}^N$ tal que $0 \leq x \leq c$ que satisfà

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq X.$$

En els diferents problemes de bancarrota, pot ser que segons les regles utilitzades quedi romanent de recursos a repartir. Aquest no serà el nostre cas ja que volem que es distribueixin tota la quantitat.

Donat un problema de bancarrota qualsevol, definim ara un procediment per saber què s'assigna a cadascú dels agents. Això és el que s'anomena una regla de repartiment.

Una *regla de repartiment* S és una funció que associa a qualsevol problema $(c, X) \in \mathbb{C}^N$ un vector de pagaments:

$$\begin{array}{rlcl} S: & \mathbb{R}^N_+ \times \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^N_+ \\ & (c, X) & \longmapsto & x = (x_1, ..., x_n) = (S_1(c, X), ..., S_n(c, X)). \end{array}$$

En el tots els casos, la regla proporcionarà un únic valor per a cada agent, és a dir, un únic vector de pagaments per a cada problema.

Un cop definides unes regles es poden crear infinitat de combinacions convexes de regles amb els seus diferents pesos. Una combinació convexa de regles també és una regla.

Siguin $S^1, S^2, ..., S^k$, k regles de repartiment amb pesos $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, respectivament, complint $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ i que $\lambda_i \in [0, 1]$, $\forall i \in \{1, ...k\}$. La regla que és combinació convexa de les anteriors aplicada al problema $(c, X) \in \mathbb{C}^N$ serà:

$$S(c, X) = \lambda_1 S^1(c, X) + \lambda_2 S^2(c, X) + ... + \lambda_k S^k(c, X).$$

2.2 Propietats de les regles

La primera condició que ha de tenir una regla és que reparteixi tota la quantitat dels recursos. És a dir, que la distribució sigui eficient. En cap cas es pot repartir més del que disposem però tampoc és recomanable deixar de distribuir béns.

Propietat 2.2 (**BALANÇ PRESSUPOSTARI**). *La regla S satisfà la* condició de balanç pressupostari *si, per qualsevol problema $(c, X) \in \mathbb{C}^N$,*

$$\sum_{i=1}^N S_i(c, X) = X.$$

Aquesta propietat assegura que beneficia a tots els agents en el nostre problema. Així, sempre és reparteix el màxim que és pugui entre ells. Aleshores, volem que tota regla utilitzada compleixi aquesta propietat. També s'anomena *eficiència*.

La següent condició és que canvis petits en les dades no provoquin grans canvis en els vectors de pagaments. Es vol que hi hagi una estabilitat, ja que una mínima desviació en les dades no ha d'afectar d'una manera dràstica a la solució del problema.

Propietat 2.3 (**CONTINUÏTAT**). *La regla S satisfà la* condició de continuïtat *si, per qualsevol problema $(c, X) \in \mathbb{C}^N$ i qualsevol successió de problemes $\{(c^\nu, X^\nu)\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ que satisfà:*

$$(c^\nu, X^\nu) \to (c, X), \qquad \textit{llavors} \qquad S(c^\nu, X^\nu) \to S(c, X).$$

Això impedeix canvis sobtats en les solucions, justament el que correspon a la continuïtat de les funcions.

L'última de les propietats analitzades aquí és que si la quantitat de recursos i les demandes està multiplicada pel mateix nombre positiu, també ho han d'estar tots els valors del vector de pagaments.

Propietat 2.4 (**HOMOGENEÏTAT**). *La regla S compleix la* condició de homogeneïtat *si per qualsevol problema $(c, X) \in \mathbb{C}^N$ i qualsevol $\lambda \geq 0$ és té que:*

$$S(\lambda c, \lambda X) = \lambda S(c, X).$$

Una regla que satisfà aquesta propietat, la homogeneïtat, no depèn de canvis en la unitat de mesura (per exemple, passar de dòlars a euros).

2.3 Principals regles

En aquest apartat, definim les principals regles vectorials que utilitzarem més endavant per l'aplicació del treball. En el llibre de Thomson (2019) [11] en descriuen moltes, però aquí destacarem les més utilitzades i les que compleixen les condicions de l'apartat anterior.

A més a més, ens serà útil definir certes regles que en el Capítol 4 les transformem per tractar dades agrupades en matrius, no en vectors.

La primera d'aquestes és la regla proporcional. És la més utilitzada i simplement diu que cada un dels demandants rep la part proporcional de la seva demanda respecte del total de demandes.

La regla proporcional

Definició 2.5. *Per tot $(c, X) \in \mathbb{C}^N$ es defineix la* regla proporcional *com:*

$$P_i(c, X) = \lambda \cdot c_i, \qquad \forall i \in N,$$

on $\lambda \in \mathbb{R}_+$ està definida per aconseguir la condició de balanç, és a dir $\sum_{i \in N} \lambda c_i = X$.

Per tant, $\lambda = \dfrac{X}{\sum_{i \in N} c_i}$.

Aquesta es la regla més senzilla i comú de totes. Es tracta de fer una proporció sobre el que demanden cadascun dels agents i segons la quantitat de recursos que es tingui, repartir el percentatge corresponent.

La regla dels guanys igualitaris

La següent s'anomena regla dels guanys igualitaris (en anglès, *Constrained-equal awards rule, CEA*). La raó per la qual s'utilitzarà aquesta regla és perquè afavoreix a aquells participants que reclamen una quantitat més petita. Es tracta de repartir la quantitat de forma igual a tothom, però sense sobrepassar el que cada agent demana.

Definició 2.6. *Per tot $(c, X) \in \mathbb{C}^N$ es defineix la* regla dels guanys igualitaris *com:*

$$CEA_i(c, X) = min\{c_i, \lambda\}, \qquad \forall i \in N,$$

on $\lambda \in \mathbb{R}_+$ està definida per aconseguir la condició de balanç.

Una manera de calcular aquesta regla és la següent. Es comença per fer una divisió igualitària del conjunt de recursos a repartir. Si cap agent obté més del que demana, s'agafa aquest repartiment. En canvi, si algun rep més del que demana, es calcula la diferència entre el que rep i el que demana i es redistribueix la suma de les diferència igualitàriament entre els agents que reben menys del que demanen. Aquest moviment pot tornar a provocar desajustos i se seguiran els mateixos passos fins que cap agent rebi més del que demana.

Exemple 2.7. *Imaginem-nos que 3 jugadors s'han de repartir 150 punts en total en un joc. Però el criteri de puntuació actual atorga 55 punts al primer jugador, 80 punts al segon jugador i 35 punts al tercer jugador. La suma de la puntuació dels 3 jugadors és de 170 però només es poden repartir 150 punts.*

Per això, es decideix aplicar la regla dels guanys igualitaris amb $N = \{1, 2, 3\}$, $c = (55, 80, 35)$, *i* $X = 150$.

Segons aquesta regla, primer es fa una divisió igualitària, és a dir, $(50, 50, 50)$. *Veiem que el jugador 3 ha rebut més del que demanda. Per tant,* $(50, 50, 35)$ *i la diferència entre* $50 - 35 = 15$ *es repartirà de forma igual entre els altres dos jugadors.*

Aleshores el vector quedarà $(57.5, 57.5, 35)$. *Donat que el jugador 1 rep més del que demanda, rebrà aquella quantitat que vol percebre i el vector de pagaments quedarà* $(55, 57.5, 35)$. *La diferència entre* $57.5 - 55 = 2.5$ *la rebrà el jugador 2.*

Per tant, el vector de pagaments a assignar a aquests tres jugadors serà $(55, 60, 35)$.

En aquesta regla es veu com els jugadors que reclamen menys és on s'actua primer per completar la seva demanda. El jugador 3 és qui menys demandava, i a l'haver-hi més a repartir, només s'ha satisfet allò que demanava. Al repartir la diferència del jugador 3, es repartia de més al jugador 1 i la seva diferència l'ha rebut el jugador 2.

També, com que el jugador que demanda més va rebent la diferència dels jugadors que demandaven menys i la suma de les demandes és superior als recursos a repartir, aquest jugador sempre rebrà menys del que reclama.

Concedeix-i-divideix

La propera regla s'anomena concedeix-i-divideix. Aquesta regla s'utilitzarà per repartir les audiències dels partits tenint en compte que cada equip es discutirà amb la resta dels equips considerats com un únic conjunt.

Definició 2.8. *Per tot* $(c, X) \in \mathbb{C}^N$ *i per* $N = \{1, 2\}$ *es defineix la regla* concedeix-i-divideix*:*

$$CD_1(c, X) = \max\{X - c_2, 0\} + \frac{X - \max\{X - c_2, 0\} - \max\{X - c_1, 0\}}{2},$$
$$CD_2(c, X) = \max\{X - c_1, 0\} + \frac{X - \max\{X - c_1, 0\} - \max\{X - c_2, 0\}}{2}.$$

La idea que expressa la regla és que cada un dels agents considera que si es donés a l'altre el que demana, el que queda és seu (i segur que per les condicions dels problemes és menor que el que demana). Llavors, el que queda per repartir és el que es disputa, i es reparteix a parts iguals.

Per veure com s'aplica aquesta regla posarem un exemple explicat en el llibre de Thomson (2019) [11] anomenat *constested garment problem* que en català seria el *problema de la roba discutida.*

Exemple 2.9 (Problema de la roba discutida). *Siguin dos persones discutint sobre la propietat d'una peça de roba i fent incompatible les demandes que demana cadascuna d'elles.*

La primera persona reclama tota la peça mentre que la segona reclama solament la meitat d'ella.

Aleshores, com s'hauria de repartir la peça de roba?

Per a resoldre-ho apliquem la regla concedeix-i-divideix. *Sigui* $N = \{1, 2\}$ *les dos persones que discuteixen sobre la roba i sigui* $c = (100, 50)$ *el vector de demandes tal que els nombres representen el % del total que reclamen cadascuna de les persones. Així,* $X = 100$.

Aplicant la regla s'obté:

$$\begin{aligned}
CD_1(c, X) &= max\{X - c_2, 0\} + \frac{X - max\{X - c_2, 0\} - max\{X - c_1, 0\}}{2} \\
&= max\{100 - 50, 0\} + \frac{100 - max\{100 - 50, 0\} - max\{100 - 100, 0\}}{2} \\
&= (100 - 50) + \frac{100 - (100 - 50) - 0}{2} \\
&= 50 + \frac{100 - 50 - 0}{2} \\
&= 75. \\
CD_2(c, X) &= max\{X - c_1, 0\} + \frac{X - max\{X - c_1, 0\} - max\{X - c_2, 0\}}{2} \\
&= max\{100 - 100, 0\} + \frac{100 - max\{100 - 100, 0\} - max\{100 - 50, 0\}}{2} \\
&= 0 + \frac{100 - 0 - (100 - 50)}{2} \\
&= 0 + \frac{100 - 0 - 50}{2} \\
&= 25.
\end{aligned}$$

Per tant, la primera persona rebria tres quartes parts de la roba mentre que la segona rebria solament una quarta part restant. Observeu que el que diu és que hi ha un 50 % de la roba que no es troba en discussió, i que per tant s'assigna a qui demana el 100 %. La part en discussió es reparteix en parts iguals.

Aquest problema és un exemple representatiu d'aquesta regla de repartiment. L'extensió d'aquesta regla a més de dos agents es pot fer de diverses maneres. Una d'elles correspon a la regla del Talmud (vegeu Thomson, 2019 [11]).

Capítol 3

La situació actual en el repartiment

En aquest capítol descrivim les principals normes de repartiment en concepte de drets televisius que tenen les dos lligues que estudiem (LaLiga i la English Premier League). A més a més, les comparem per analitzar els seus avantatges i/o inconvenients. Posem com a exemple, les dades de la temporada 2020/2021 per així, contrastar aquestes diferències.

3.1 Espanya: LaLiga

Els diners generats per la competició espanyola estan regulats pel Reial Decret-llei 5/2015 [7] que porta per títol: *"Real Decreto-ley 5/2015, de 30 de abril, de medidas urgentes en relación con la comercialización de los derechos de explotación de contenidos audiovisuales de las competiciones de fútbol profesional"*. En aquest document s'especifica quines normes s'han de seguir per repartir els diners en concepte de drets televisius:

- Percentatge fix: El 50% de tots els diners aconseguits seran repartits a parts iguals entre tots els equips.
- Percentatge variable: Aquesta quantitat dependrà dels resultat esportius obtinguts. S'agafen els resultats de les últimes cinc temporades. L'última ponderarà un 35%, la penúltima un 20% i les tres anteriors un 15% cadascuna. Aquests percentatges es multiplicaran per la quantitat assignada a cada temporada segons la posició en la qual s'hagi quedat. També de la implantació social, que depèn del taquillatge mitjà de cada equip i les audiències televisives.

3.2 Anglaterra: English Premier League (EPL)

La competició anglesa és propietat d'una empresa privada i és aquesta qui estableix la norma 50:25:25 que s'estableix de la següent manera, en tres parts:

- El 50% del total recaptat es dividirà igualitàriament entre tots els clubs.
- El 25% està basat en el mèrit esportiu que només té en compte la posició obtinguda a la lliga.

- L'últim 25% correspon a la quota de pantalla en la qual apareixen els equips en els partits televisats.

3.3 Comparació de les lligues

En aquest apartat s'analitzen les diferències entre les dues lligues pel que fa a les seves regulacions.

Pel que fa a la part jurídica, LaLiga ha de seguir la regulació jurídica aprovada per l'organisme públic estatal (Congrés dels Diputats), mentre que en el cas de la competició anglesa, està regulada per una empresa privada.

En ambdues normes es preveu que el 50% dels diners recaptats es repartiran entre els equips que participin a la competició a parts iguals. D'aquesta manera, no hi ha tanta diferència entre els ingressos rebuts entre els equips i la competició és més igualitària.

Ens fixarem ara amb el repartiment de diners de la temporada 20/21 en concepte de drets televisius. Aixi, podrem veure si realment aquesta mesura és efectiva i comparar-ho entre les dues lligues. A les taules 3.1 i 3.2 es poden veure els repartiments corresponents a aquesta temporada.

TEMPORADA - 2020/21 -

LaLiga Santander

	Ingresos	Obligaciones
ATHLETIC CLUB	72,2	-6,1
FUTBOL CLUB BARCELONA	165,6	-14,1
REAL MADRID CLUB DE FUTBOL	163,0	-13,9
CLUB ATLETICO DE MADRID, S.A.D.	130,1	-11,1
SEVILLA FUTBOL CLUB, S.A.D.	84,2	-7,2
REAL BETIS BALOMPIE, S.A.D.	59,5	-5,1
REAL SOCIEDAD DE FUTBOL, S.A.D.	66,4	-5,6
LEVANTE UNION DEPORTIVA, S.A.D.	50,3	-4,3
CADIZ CLUB DE FUTBOL, S.A.D.	47,3	-4,0
VALENCIA CLUB DE FUTBOL, S.A.D.	73,3	-6,2
CLUB ATLETICO OSASUNA	49,7	-4,2
DEPORTIVO ALAVES, S.A.D.	51,1	-4,3
ELCHE CLUB DE FUTBOL, S.A.D.	47,3	-4,0
VILLARREAL CLUB DE FUTBOL, S.A.D.	73,3	-6,2
REAL CLUB CELTA DE VIGO, S.A.D.	53,3	-4,5
REAL VALLADOLID CLUB DE FUTBOL, S.A.D.	48,5	-4,1
GRANADA CLUB DE FUTBOL, S.A.D.	52,5	-4,5
SOCIEDAD DEPORTIVA EIBAR S.A.D.	51,8	-4,4
SOCIEDAD DEPORTIVA HUESCA, S.A.D.	46,8	-4,0
GETAFE CLUB DE FUTBOL, S.A.D.	58,5	-5,0
TOTAL:	1.444,7	-122,8

LaLiga SmartBank

	Ingresos	Compensación por Descenso	Ingresos más compensación	Obligaciones
R.C.D. ESPANYOL DE BARCELONA, S.A.D.	10,4	30,5*	40,9	-0,9
CENTRE D'ESPORTS SABADELL F.C., S.A.D.	5,8		5,8	-0,5
REAL SPORTING DE GIJON, S.A.D.	7,6		7,6	-0,6
REAL CLUB DEPORTIVO MALLORCA, S.A.D.	9,5	9,9*	19,4	-0,8
SOCIEDAD DEPORTIVA PONFERRADINA, S.A.D.	6,0		6,0	-0,5
CLUB DEPORTIVO CASTELLÓN, S.A.D.	6,1		6,1	-0,5
CLUB DEPORTIVO TENERIFE, S.A.D.	6,9		6,9	-0,6
RAYO VALLECANO DE MADRID, S.A.D.	7,4		7,4	-0,6
REAL OVIEDO, S.A.D.	6,8		6,8	-0,6
CLUB DEPORTIVO MIRANDES, S.A.D.	6,4		6,4	-0,5
CLUB DEPORTIVO LEGANES, S.A.D.	9,8	16,1*	25,9	-0,8
GIRONA FUTBOL CLUB, S.A.D.	7,8		7,8	-0,7
REAL ZARAGOZA, S.A.D.	9,4		9,4	-0,8
ALBACETE BALOMPIE, S.A.D.	6,2		6,2	-0,5
UNION DEPORTIVA LAS PALMAS, S.A.D.	8,0		8,0	-0,7
CLUB DEPORTIVO LUGO, S.A.D.	6,2		6,2	-0,5
AGRUPACION DEPORTIVA ALCORCON, S.A.D.	6,4		6,4	-0,5
CLUB DE FUTBOL FUENLABRADA	6,7		6,7	-0,6
UNION DEPORTIVA ALMERIA, S.A.D.	8,0		8,0	-0,7
MALAGA CLUB DE FUTBOL, S.A.D.	7,2		7,2	-0,6
FUTBOL CLUB CARTAGENA, S.A.D.	6,0		6,0	-0,5
UNION DEPORTIVA LOGROÑES, S.A.D.	5,9		5,9	-0,5
TOTAL:	160,5	56,5	217,0	-13,6

Datos en millones de euros

Font: *LaLiga* [19]

Taula 3.1: Repartiment dels ingressos audiovisuals de la temporada 20/21

En primer lloc, hem aplicat el canvi de 1.15 euros aproximadament per cada lliura esterlina per poder comparar les xifres. El símbol M significa milions. Els clubs més ben remunerats d'Anglaterra són el Manchester City (175.4M€), el Manchester United (173.9M€) i el Liverpool (172.5M€) . En canvi, els més ben posicionats a Espanya són el Futbol Club Barcelona (165.6M€), el Reial Madrid (163.0M€) i l'Atlètic de Madrid (130.1M€). En el cas d'aquest país, només hem considerat els ingressos, no la resta generada a partir dels ingressos menys les obligacions. D'aquesta manera, la comparació entre nombres és més curosa ja que la English Premier League només facilita els ingressos

Premier League 2020/21 Payments to Clubs

		UK			International			
Club Name	Live	Equal Share	Facility Fees	Merit Payment	Equal Share	Merit Payment	Central Commercial	Total Payment
Manchester City	27	31,375,697	24,424,705	34,961,500	47,541,599	8,325,500	5,924,232	**152,553,233**
Manchester United	28	31,375,697	25,291,836	33,213,425	47,541,599	7,909,225	5,924,232	**151,256,014**
Liverpool	29	31,375,697	26,158,967	31,465,350	47,541,599	7,492,950	5,924,232	**149,958,795**
Chelsea	30	31,375,697	27,026,098	29,717,275	47,541,599	7,076,675	5,924,232	**148,661,576**
Leicester City	22	31,375,697	20,089,050	27,969,200	47,541,599	6,660,400	5,924,232	**139,560,178**
West Ham United	22	31,375,697	20,089,050	26,221,125	47,541,599	6,244,125	5,924,232	**137,395,828**
Tottenham Hotspur	25	31,375,697	22,690,443	24,473,050	47,541,599	5,827,850	5,924,232	**137,832,871**
Arsenal	24	31,375,697	21,823,312	22,724,975	47,541,599	5,411,575	5,924,232	**134,801,390**
Leeds United	24	31,375,697	21,823,312	20,976,900	47,541,599	4,995,300	5,924,232	**132,637,040**
Everton	24	31,375,697	21,823,312	19,228,825	47,541,599	4,579,025	5,924,232	**130,472,690**
Aston Villa	19	31,375,697	17,487,657	17,480,750	47,541,599	4,162,750	5,924,232	**123,972,685**
Newcastle United	18	31,375,697	16,620,526	15,732,675	47,541,599	3,746,475	5,924,232	**120,941,204**
Wolverhampton Wanderers	17	31,375,697	15,753,395	13,984,600	47,541,599	3,330,200	5,924,232	**117,909,723**
Crystal Palace	14	31,375,697	13,152,002	12,236,525	47,541,599	2,913,925	5,924,232	**113,143,980**
Southampton	14	31,375,697	13,152,002	10,488,450	47,541,599	2,497,650	5,924,232	**110,979,630**
Brighton & Hove Albion	15	31,375,697	14,019,133	8,740,375	47,541,599	2,081,375	5,924,232	**109,682,411**
Burnley	11	31,375,697	10,550,609	6,992,300	47,541,599	1,665,100	5,924,232	**104,049,537**
Fulham	15	31,375,697	14,019,133	5,244,225	47,541,599	1,248,825	5,924,232	**105,353,711**
West Bromwich Albion	11	31,375,697	10,550,609	3,496,150	47,541,599	832,550	5,924,232	**99,720,837**
Sheffield United	11	31,375,697	10,550,609	1,748,075	47,541,599	416,275	5,924,232	**97,556,487**
All figures in £		627,513,940	367,095,760	367,095,750	950,831,980	87,417,750	118,484,640	2,518,439,820

Font: *English Premier League* [15]

Taula 3.2: Repartiment dels ingressos audiovisuals de la temporada 20/21

per drets televisius.

En tots dos països, les xifres són bastant semblants. L'única diferència destacable és que el tercer equip espanyol està 30M€per sota de tots els altres equips més ben pagats de les dues lligues, en què volten pels 160M€.

Ara bé, per poder comparar relativament aquestes xifres dividim els ingressos de cada equip pel total repartit per cada lliga. En el cas de LaLiga és de 1444.7M€. En el de la English Premier League és de 2518.4M£ que equivaldrien a 2896.16M€. Destaquem que la diferència entre el recaptat per la competició anglesa i l'espanyola és molt gran.

Construïm una taula per poder resumir tota la informació. Així, podrem saber quin percentatge s'ha emportat cada participant segons els diners distribuïbles en la lliga a la qual pertanyin. L'ordenem de major a menor quantitat de diners recaptats.

La Taula 3.3 t'ensenya els equips més ben pagats de LaLiga.

Equip	Diners rebuts (€)	% del total
FC Barcelona	165.6M	11,46
Real Madrid	163.0M	11,28
Atlético de Madrid	130.1M	9,01

Taula 3.3: Els 3 equips que reben més a LaLiga

La Taula 3.4 t'ensenya els equips més ben pagats en la EPL.

Aquí veiem com a Espanya s'emporten quasi bé el doble (en %) que no pas en Anglaterra. En haver-hi 20 equips per cada competició, si fos totalment igualitària cada equip s'hauria d'emportar un 5%. En la English Premier League, aquest percentatge

Equip	Diners rebuts (€)	% del total
Manchester City	175.4M	6.05
Manchester United	173.9M	6.00
Liverpool	172.5M	5.96

Taula 3.4: Els 3 equips que reben més a la EPL

s'ajusta bastant al 5%, sent la diferència a aquesta proporció els mèrits aconseguits esportivament i televisivament. Però en LaLiga la diferència és més gran ja que els tres equips més ben posicionats s'emporten aproximadament el doble que els hi tocaria en la distribució igualitària. A més a més, cal afegir que si mirem les xifres en valor absolut, el tercer equip de la lliga anglesa cobra més que el millor de la lliga espanyola.

Encara que en ambdues lligues reparteixen igual el 50% dels ingressos recaptats, continua havent-hi una dissimilitud destacable en els percentatges. Això significa que per molt que apliquem aquesta regla per millorar la igualtat de la competició, no sempre s'aconsegueix l'objectiu si les altres regles provoquen uns resultats molt dispars entre equips.

Pel que fa a la resta de regles, és on s'instal·len les principals diferències. En el cas d'Espanya, s'estableix una ponderació entre les cinc últimes temporades mentre que a Anglaterra només es té en compte l'última temporada.

Fixar un criteri que relacioni més d'una temporada només beneficia als equips grans. Aquells que aconsegueixin una dinàmica més positiva al llarg dels anys seran els qui rebran una quantitat molt més gran de diners que aquells equips de mitja taula o de la part baixa. En canvi, en la English Premier League si un equip de la part baixa de la taula fa una temporada bona, no es tindrà en compte les anteriors temporades ja que el penalitzarien. És a dir, només tenen en compte els mèrits esportius en el present i no aquells acumulats en els anys. Això provoca que a Anglaterra hi ha més possibilitats de millorar els ingressos amb una temporada bona i així fer que els equips tinguin un nivell més equilibrat.

Una part de la regulació que dicta la English Premier League que no ho fa LaLiga és la quota de pantalla dels partits televisats. Aquesta regla reparteix els ingressos que els equips han de rebre per la quantitat de partits que es televisen. Els equips que son a la part alta de la taula tendeixen a aparèixer més durant la temporada actual i la següent. A més a més, sempre es televisen els partits dels sis equips més importants de la competició durant tota la temporada (Arsenal, Chelsea, Liverpool, Manchester City, Manchester United i Tottenham Hotspur). D'aquesta manera, els equips que la gent vol veure seran aquells que rebran més ingressos.

Capítol 4

Model teòric de repartiment

En el capítol anterior, hem explicat les principals normes de repartiment dels diners en concepte dels drets televisius i hem establert les principals diferències entre els dos països.

En aquest capítol parlarem del model teòric descrit en els articles de Bergantiños i Moreno-Ternero (2020 i 2021) [4] [6]. A partir de les dades de la matriu, es defineixen les regles de repartiment i els axiomes que caracteritzen les regles amb el mateix esperit que en els problemes de bancarrota.

Aquest model pretén explicar i donar una caracterització teòrica a les normes de repartiment que hi ha en les dues competicions. Per això, en aquest apartat definirem tant les variables com les regles utilitzades.

Fins ara, hem descrit matemàticament els problema de bancarrota i les principals regles de repartiment d'una manera general. Ara ens centrem a descriure aquest problema més específicament.

4.1 Variables del model

Sigui $N = \{1, \ldots, n\}$ el conjunt d'equips participants. Com que la competició tindrà el format d'una lliga, és a dir, tots jugaran contra tots; assumirem que $N \geq 3$. Amb 2 equips seria només una doble eliminatòria.

Considerem la matriu A de dimensió $n \times n$ que recull les audiències generades per cada partit. L'entrada a_{ij} de la matriu correspon a l'audiència del partit on l'equip $i \in N$ juga com a local i l'equip $j \in N$ juga com a visitant. Observem que $a_{ii} = 0$ per a qualsevol $i \in N$. El conjunt d'aquestes matrius es denotarà per $\mathbb{A}_{n \times n}$

Així es diferencien les audiències partit a partit. Repartirem el total de l'audiència entre els diferents equips i farem servir aquestes dades per donar les regles de repartiment en el nostre problema. A més a més, no és el mateix jugar a casa que jugar a fora. Per exemple, imaginem un partit que juguen un equip amb poc seguidors com a local i un equip amb molt seguidors com a visitant. Normalment, les audiències de l'equip menys seguit seran baixes, però a causa de que rep un equip amb molt seguidors, l'audiència d'aquest partit augmentarà molt.

Denotem α_i a la suma de les audiències generades per l'equip i de la matriu A, és a dir:

$$\alpha_i = \sum_{j \in N} (a_{ij} + a_{ji}).$$

Aquesta quantitat sorgeix de sumar la columna i amb la fila i de l'equip corresponent. Quan sumem les audiències de l'equip tant de local com de visitant, l'únic element que es repeteix és $a_{ii} = 0 \quad \forall i \in N$. Per tant, no es compten elements doblats.

Anomenem $\overline{\alpha}$ a la mitjana d'audiències generades per equip:

$$\overline{\alpha} = \frac{\sum_{i \in N} \alpha_i}{n}.$$

Observeu que cada espectador/entrada de la matriu s'ha comptat dues vegades, una per l'equip local i una altra per l'equip visitant.

Per tot $A \in \mathbb{A}_{n \times n}$, anomenem $||A||$ l'audiència total generada:

$$||A|| = \sum_{i,j \in N} a_{ij}.$$

Vegi's que $||A|| = n \cdot \dfrac{\overline{\alpha}}{2}$

Se suposarà que tot espectador generà un guany d'un euro per persona. Per aquesta raó, es repartirà el total d'audiència $||A||$. En el cas real que els guanys siguin diferents, es repartirà de forma proporcional.

Un *problema de repartiment* està format, doncs, per un parell (N, A) on N és el conjunt d'equips, i A la matriu de les audiències. El conjunt de tots els problemes de repartiment es denotarà per $\mathbb{P}$.

4.2 Regles aplicades al model

En aquesta secció, definim les principals regles de repartiment i les agrupacions que es poden formar entre elles. La definició de regla per un problema de bancarrota es troba al Capítol 2 d'aquest treball.

Per començar, una regla de repartiment matricial és una aplicació matemàtica on s'associa per a cada problema, la quantitat que rebrà cada equip del total a repartir. Formalment, sigui $R : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ on per a cada problema $(N, A) \in \mathbb{P}$ obtenim $R_i(A) \in \mathbb{R}$ per $i \in N$,

$$\sum_{i \in N} R_i(A) = ||A||.$$

En aquest treball utilitzarem tres regles que seran les següents:

Definició 4.1 (Regla Uniforme). *Per cada* $(N, A) \in \mathbb{P}$*, la* regla uniforme *(U) es defineix com:*

$$U_i(A) = \frac{||A||}{n} = \frac{\overline{\alpha}}{2}, \qquad \forall i \in N.$$

La regla uniforme representa la divisió igualitària de la quantitat a repartir entre tots els equips. És la regla més bàsica i es relaciona amb la regla proporcional de la Secció

2.3 ja que distribueix en igual proporció els recursos. La diferència és que en la regla uniforme sempre es repartirà la mateixa quantitat mentre que en la regla proporcional dependrà de la demanda que hagi fet cada equip.

Definició 4.2 (**Regla de la divisió igual**). *Per a cada* $(N, A) \in \mathbb{P}$*, la* regla de la divisió igual *(en anglès Equal-Split, ES) es defineix com:*

$$ES_i(A) = \frac{\alpha_i}{2}, \qquad \forall i \in N.$$

La regla de la divisió igual reparteix l'audiència de cada partit entre els dos equips participants en dues parts iguals. Aquesta regla també es pot entendre com una variant de la regla proporcional. Aquí, el vector de demanda seria el α_i per a cada equip i $\lambda = \frac{1}{2}$ i per tant el vector de pagaments quedaria $\frac{\alpha_i}{2}$ per tot $i \in N$.

Definició 4.3 (**Concedeix-i-divideix**). *Per a cada* $(N, A) \in \mathbb{P}$*, la regla* concedeix-i-divideix *(en anglès Concede-and-Divide, CD) es defineix com:*

$$CD_i(A) = \alpha_i - \frac{\sum_{j,k \in N \setminus \{i\}} (a_{jk} + a_{kj})}{n-2} = \frac{(n-1)\alpha_i - ||A||}{n-2}, \qquad \forall i \in N.$$

Aquesta regla compara les audiències d'un equip en concret amb la mitjana de les audiències dels altres equips. Agafa les audiències de l'equip en concret per després restar-li totes les audiències dels altres equips dividides pels equips restants.

Famílies de regles

Definim tres famílies de regles. Totes elles sorgeixen d'establir pesos a les diferents combinacions formades per les tres regles anteriorment explicades. En aplicacions reals, s'utilitzen més les famílies de regles per ponderar els diferents criteris de la manera que es cregui més convenient.

Definició 4.4. *Per tot* $\lambda \in [0, 1]$ *i tot* $(N, A) \in \mathbb{P}$*, es defineix la família* $\{UC^\lambda\}_{\lambda \in [0,1]}$*,* $\{UE^\lambda\}_{\lambda \in [0,1]}$ *i* $\{EC^\lambda\}_{\lambda \in [0,1]}$ *per a tot* $i \in N$ *com:*

$$UC_i^\lambda(A) = (1 - \lambda)U_i(A) + \lambda CD_i(A),$$

$$UE_i^\lambda(A) = (1 - \lambda)U_i(A) + \lambda ES_i(A),$$

$$EC_i^\lambda(A) = (1 - \lambda)ES_i(A) + \lambda CD_i(A).$$

En aquest cas, s'anomena $UC^\lambda(A)$ per la combinació convexa de les regles $U(A)$ i $CD(A)$. Anàlogament, $UE^\lambda(A)$ s'anomena per la combinació de $U(A)$ i $ES(A)$. Per últim, $EC^\lambda(A)$ s'anomena per la de $ES(A)$ i $CD(A)$.

En l'article de Bergantiños i Moreno-Ternero (2021) [4] donen una caracterització de les famílies depenent del valor de la λ. Estableixen aquells axiomes, tals que juntament amb aquesta caracterització, si existeix una regla només pugui ser una família en concret.

En totes tres famílies, cal dir que com que es tracta d'una combinació convexa de les regles, el paràmetre λ es troba entre $[0, 1]$. A partir d'aquí, podem generalitzar les famílies considerant combinacions no convexes de les regles U i CD.

Definició 4.5. *Per tot $\lambda \in \mathbb{R}$, i tot $(N, A) \in \mathbb{P}$ es defineix la família $\{GUC^{\lambda}\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ com:*

$$GUC_i^{\lambda}(A) = (1-\lambda)U_i(A) + \lambda CD_i(A), \qquad \forall i \in N.$$

En aquesta família, s'afegeix la lletra "G"de *Generalized* ja que es treu la condició $\lambda \in [0,1]$. Així es realitza la combinació no convexa de la família $UC(A)$.

La següent família, anomenada en anglès *Split Rules* dona diferents pesos als partits en que es juga com a local i com a visitant:

Definició 4.6. *Per tot $\lambda \in [0,1]$, tot $(N, A) \in \mathbb{P}$ i tot $i \in N$ es defineix la família $\{S^{\lambda}\}_{\lambda\in[0,1]}$ com:*

$$S_i^{\lambda}(A) = (1-\lambda)\sum_{j\in N\setminus\{i\}} a_{ij} + \lambda \sum_{j\in N\setminus\{i\}} a_{ji}, \qquad \forall i \in N.$$

Vegi's que si $\lambda = \frac{1}{2}$ obtenim la regla $ES(A)$. En el cas que $\lambda = 0$ només ponderarien els partits en què es juga com a local. Anàlogament, si $\lambda = 1$ només es comptabilitzarien les audiències dels partits en que es juga com a visitant.

També s'obté la família de regles que pondera de diferent manera els partits jugats a casa i els jugats a fora. S'ha de treure la condició $\lambda \in [0,1]$ per construir la combinació no convexa.

Definició 4.7. *Per tot $\lambda \in \mathbb{R}$, tot $(N, A) \in \mathbb{P}$ i tot $i \in N$ es defineix la família $\{GS^{\lambda}\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ com:*

$$GS_i^{\lambda}(A) = (1-\lambda)\sum_{j\in N\setminus\{i\}} a_{ij} + \lambda \sum_{j\in N\setminus\{i\}} a_{ji}, \qquad \forall i \in N.$$

Aquesta família s'anomena en anglès *Generalized Split Rules*. Com és obvi, la família de regles S es troben incloses dins de la família GS.

Definició 4.8. *Per tot trio $x, y, z \in \mathbb{R}$ amb $x + y + nz = 1$, tot $(N, A) \in \mathbb{P}$ es defineix la família $\{G^{xyz}\}_{x,y,z\in\mathbb{R}}$ com:*

$$H_i^{xyz}(A) = x\sum_{j\in N\setminus\{i\}} a_{ij} + y\sum_{j\in N\setminus\{i\}} a_{ji} + z||A||, \qquad \forall i \in N.$$

D'aquesta manera recollim les tres regles de repartiment anteriors. En el cas que $x = 0, y = 0$ i $z = \dfrac{1}{n}$ s'obté amb la regla uniforme (U). També si $x = \dfrac{1}{2}, y = \dfrac{1}{2}$ i $z = 0$ s'obté la regla de la divisió igual (ES). Per últim, si $x = \dfrac{n-1}{n-2}, y = \dfrac{n-1}{n-2}$ i $z = \dfrac{-1}{n-2}$ s'obté la regla concedeix-i-divideix (CD).

4.3 Axiomes/Propietats

Ara estudiem diferents propietats que les regles poden complir, i immediatament, veurem si les regles definides fins ara compleixen, o no, les propietats esmentades.

Quan definim una propietat i volem caracteritzar quines regles la compleixen, s'anomena axioma, ja que es posa per davant. Aquest mètode axiomàtic permet distingir les regles i té un caràcter normatiu: si volem que una regla compleixi A, B i C, ha de ser X.

També, si obtenim que unes regles compleixen un axioma en concret, la combinació convexa d'elles també el complirà.

El primer axioma diu que si dos equips tenen les mateixes audiències quan s'enfronten amb els altres rivals, han de rebre la mateixa quantitat de recursos.

Axioma 4.9 (**Tractament igualitari dels iguals**). *Una regla R satisfà la propietat o axioma de* tractament igualitari dels iguals *si per a cada $(N, A) \in \mathbb{P}$ i cada parell $i, j \in N$ tals que $a_{ik} = a_{jk}$ i $a_{ki} = a_{kj}$ per cada $k \in N \setminus \{i, j\}$ es compleix:*

$$R_i(A) = R_j(A).$$

Les tres normes estudiades (U, ES i CD) compleixen aquest axioma. Per tant, també ho compliran tota família composta per una combinació convexa entre elles.

Ara afegim una condició més per tractar dos equips d'una manera més igualitària. Aquesta consisteix en demanar que a més de l'anterior, que si les audiències son iguals quan s'enfronten entre ells aleshores també haurà de ser igual el pagament.

Axioma 4.10 (**Tractament igualitari dels iguals dèbil**). *Una regla R satisfà l'axioma de* tractament igualitari per iguals dèbil *si per a cada $(N, A) \in \mathbb{P}$ i cada parell $i, j \in N$ tals que $a_{ij} = a_{ji}$, $a_{ik} = a_{jk}$ i $a_{ki} = a_{kj}$ per cada $k \in N \setminus \{i, j\}$ es compleix:*

$$R_i(A) = R_j(A).$$

Aquest axioma és més dèbil que l'anterior ja que estableix una condició més que el *tractament igualitari dels iguals* al considerar que $a_{ij} = a_{ji}$.

La següent proposició es dedueix de forma immediata dels axiomes i per tant, no es demostrarà en aquest treball.

Proposició 4.11. *El* tractament igualitari dels iguals *implica el* tractament igualitari dels iguals dèbil.

Aleshores tota norma i família de normes que hem anomenat anteriorment afirmant que complien el *tractament igualitari dels iguals* també compliran el *tractament igualitari dels iguals dèbil.*

Un altre axioma és considerar la situació que les audiències positives només s'aconsegueixen quan s'enfronten dos equips concrets. Aleshores tota la quantitat de recursos s'ha de repartir entre aquests dos equips.

Axioma 4.12 (**Parells autònoms**). *Una regla R satisfà l'axioma de* parells autònoms *si per a cada $(N, A) \in \mathbb{P}$ i cada parell d'equips $i, j \in N$ tals que $a_{kl} = 0$ per a cada parell $k, l \in N$ amb $(k, l) \neq (i, j)$ i $(k, l) \neq (j, i)$ es compleix:*

$$R_i(A) + R_j(A) = ||A||.$$

És clar que la regla U no compleix aquest axioma. En el cas que només dos equips hagin aconseguit audiències positives, igualment aquesta regla reparteix els recursos a parts iguals entre tots els equips.

Com que la regla ES depèn solament de les audiències de cada equip (ja que α_i és la suma d'aquestes), si que ho complirà.

La regla CD també ho compleix perquè compara les audiències d'un equip en concret amb les mitjanes dels altres (tant aquells que tenen audiència nul·la com els que no).

A més a més es pot tenir en compte de repartir una quantitat homogènia si sobren recursos a distribuir.

Axioma 4.13 (Efecte homogeni dels parells autònoms). *Una regla R satisfà l'axioma de l'*efecte homogeni dels parells autònoms *si per a cada $(N, A) \in \mathbb{P}$ i cada parell $i, j \in N$ tals que $a_{kl} = 0$ per a cada parell $k, l \in N$ amb $(k, l) \neq (i, j)$ i $(k, l) \neq (j, i)$ es compleix:*

$$R_k(A) = R_l(A) \quad \textit{per tot} \quad k, l \in N \setminus \{i, j\}$$

Aquí, la regla U si que compleix aquest axioma. La diferència es que aquí considera que els altres equips que no siguin i i j haurien de cobrar el mateix i la uniforme reparteix igualitàriament tots els recursos.

També ho compleix la ES ja que tots aquells equips amb audiència igual a 0 no rebran cap ingrés. La regla CD encara que pot donar pagaments negatius també compleix aquest axioma.

Una condició més forta de l'axioma dels *parells autònoms* diu que si un equip té zero audiència, aleshores no rep cap ingrés.

Axioma 4.14 (Audiència zero). *Una regla R satisfà l'axioma d'*audiència zero *si per a cada $(N, A) \in \mathbb{P}$ i cada $i \in N$ tals que per a cada $j \in N$, $a_{ij} = 0 = a_{ji}$ es compleix:*

$$R_i(A) = 0.$$

Immediatament, la regla U i la CD no ho compleixen i la regla ES sí que ho compleix.

Una altra condició és que si solament un equip te audiència positiva, aquest rebrà la seva demanda.

Axioma 4.15 (Equip essencial). *Una regla R satisfà l'axioma de l'*equip essencial *si per a cada $(N, A) \in \mathbb{P}$ tal que $a_{jk} = 0$ per a cada parell $j, k \in N \setminus \{i\}$ es compleix:*

$$R_i(A) = \alpha_i \qquad \forall i \in N.$$

Evidentment, per la definició de CD, aquesta regla compleix aquest axioma. També es veu que tant U com ES no ho compleix.

Els següents axiomes enforteixen el *tractament per iguals*. El primer d'ells consisteix en què si una audiència de l'equip i, partit per partit, és més gran que l'audiència de l'equip j partit a partit; aleshores l'equip i no hauria de rebre menys que l'equip j.

Axioma 4.16 (Ordre de preservació). *Una regla R satisfà l'axioma de l'*ordre de preservació *si per a cada $(N, A) \in \mathbb{P}$ i cada parell $i, j \in N$ tals que per cada $k \in N \setminus \{i, j\}$, $a_{ik} \geq a_{jk}$ i $a_{ki} \geq a_{kj}$ es compleix:*

$$R_i(A) \geq R_j(A).$$

Totes les tres normes estudiades compleixen aquest axioma.

Les versions naturals més dèbils que l'*ordre de preservació* es tenir en compte quan s'enfronten els dos equips. D'aquí es treu l'*ordre de preservació local* i l'*ordre de preservació visitant*

Axioma 4.17 (**Ordre de preservació local**). *Una regla R satisfà l'axioma de l'*ordre de preservació local *si per a cada $(N, A) \in \mathbb{P}$ i cada parell $i, j \in N$ tals que per cada $k \in N \setminus \{i, j\}$, $a_{ik} \geq a_{jk}$, $a_{ki} \geq a_{kj}$ i $a_{ij} \geq a_{ji}$ es compleix:*

$$R_i(A) \geq R_j(A).$$

Axioma 4.18 (**Ordre de preservació visitant**). *Una regla R satisfà l'axioma de l'*ordre de preservació visitant *si per a cada $(N, A) \in \mathbb{P}$ i cada parell $i, j \in N$ tals que per cada $k \in N \setminus \{i, j\}$, $a_{ik} \geq a_{jk}$, $a_{ki} \geq a_{kj}$ i $a_{ji} \geq a_{ij}$ es compleix:*

$$R_i(A) \geq R_j(A).$$

La següent proposició no es demostrarà en aquest treball ja que es dedueixen immediatament dels tres axiomes anteriors.

Proposició 4.19. *L'*ordre de preservació *implica l'*ordre de preservació local *i l'*ordre de preservació visitant.

Gràcies a aquest resultat, podem afirmar que totes tres normes també compleixen l'*ordre de preservació local* i l'*ordre de preservació visitant.*

El següent axioma estableix que tots els equips han de rebre una quantitat de diners no negativa.

Axioma 4.20 (**No-negativitat**). *Una regla R satisfà l'axioma de la* no-negativitat *si per a cada $(N, A) \in \mathbb{P}$ es compleix:*

$$R_i(A) \geq 0, \qquad \forall i \in N.$$

Per les definicions, tant U com ES compleixen aquest axioma. En el primer cas la quantitat rebuda és la mateixa i no-negativa. En el segon, la quantitat rebuda depèn de la audiència i el cas extrem és que no en tingui, que rebrà 0.

CD no compleix aquest axioma. Segons la definició, si un equip té audiència nul·la, rebria una quantitat negativa.

També s'ha de d'establir un màxim de recursos que ha de rebre l'agent. Una manera és distribuir com a màxim el total de les audiències del partit que ha jugat. En canvi, l'altra opció és repartir tota l'audiència de tots els partits de la lliga. Aquesta segona alternativa és més dèbil que la primera.

Axioma 4.21 (**Màximes aspiracions**). *Una regla R satisfà l'axioma de les* màximes aspiracions *si per a cada $(N, A) \in \mathbb{P}$ es defineix les* màximes aspiracions *com:*

$$R_i(A) \leq \alpha_i, \qquad i \in N.$$

La regla U no compleix aquest axioma. Al rebre tots els equips la mateixa quantitat, pot succeir el cas que un equip hagi demanat menys que $\frac{||A||}{n}$.

Immediatament, la regla ES compleix aquest axioma ja que cada equip rep l'audiència generada dividida entre 2. També la regla CD ho compleix, perquè a la suma de l'audiència hi restes certs elements de la matriu A. Si en la matriu hi ha algun element nul, es rebrà menys que la màxima aspiració; en el cas contrari, es rebrà la suma de les audiències generades d'aquell equip.

Axioma 4.22 (Límit superior dèbil). *Una regla R satisfà l'axioma del* límit superior dèbil *si per a cada $(N, A) \in \mathbb{P}$ es compleix:*

$$R_i(A) \leq ||A||, \qquad i \in N.$$

Immediatament, les tres regles compleixen aquest axioma perquè totes elles son eficients.

Per últim, considerem l'axioma que constitueix que els pagaments han de ser additius en A respecte de la suma de dues matrius.

Axioma 4.23 (Addivitat). *Una regla R satisfà l'axioma de l'*addivitat *si per a tot parell de problemes $(N, A), (N, A') \in \mathbb{P}$ es compleix*

$$R(A + A') = R(A) + R(A').$$

Totes tres regles compleixen aquest axioma, ja que estan definides respecte la suma de certs elements de la matriu A i A'.

Si s'agrupa tota la informació de tots els axiomes que compleixen cada regla s'obté la Taula 4.1.

	TII	TIID	PA	EHPA	AZ	EE	OP	OPL	OPV	NN	MA	LSD	AD
U	X	X		X	X		X	X	X	X		X	X
ES	X	X	X	X	X		X	X	X	X	X	X	X
CD	X	X	X	X		X	X	X	X		X	X	X

Taula 4.1: Axiomes que compleixen les tres regles estudiades. Elaboració pròpia

Les abreviacions de la Taula 4.1 son:

- TII $\longrightarrow$ Tractament igualitari dels iguals
- TIID $\longrightarrow$ Tractament igualitari dels iguals dèbil
- PA $\longrightarrow$ Parells autònoms
- EHPA $\longrightarrow$ Efecte homogeni dels parells autònoms
- EE $\longrightarrow$ Equip essencial
- OP $\longrightarrow$ Ordre de preservació
- OPL $\longrightarrow$ Ordre de preservació local
- OPV $\longrightarrow$ Ordre de preservació visitant
- NN $\longrightarrow$ No-negativitat
- MA $\longrightarrow$ Màximes aspiracions
- LSD $\longrightarrow$ Límit superior dèbil
- AD $\longrightarrow$ Addivitat

4.4 Caracterització

El següent teorema descriu la caracterització de les dues regles:

Teorema 4.24. *Les següents asseveracions son certes:*

- *Una regla satisfà el tractament igualitari per iguals, l'addivitat i l'audiència zero si i només si és la* regla de la divisió igual, (ES).
- *Una regla satisfà el tractament igualitari per iguals, l'addivitat i l'equip essencial si i només si és la regla de* concedeix-i-divideix, (CD).

Demostració. Demostrarem la primera asseveració. És evident que la regla $ES(A)$ compleix els tres axiomes.

Contràriament, sigui R una regla que satisfà els tres axiomes del teorema sigui $(N, A) \in \mathbb{P}$. Per tot parell $i, j \in N$ amb $i \neq j$, sigui A^{ij} la matriu definida com:

$$a_{kl}^{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{si } (k,l) = (i,j), \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Es té que $a_{ji}^{ij} = 0$.

Sigui $k \in N$. Per addivitat, $R_k(A) = \sum_{i,j \in N : i \neq j} R_k(A^{ij})$. Per l'axioma d'audiència zero, per tot parell $i, j \in N$ amb $i \neq j$ i per tot $l \in N \setminus \{i, j\}$, es té que $R_l(A^{ij}) = 0$. Aleshores,

$$R_k(A) = \sum_{l \in N \setminus \{k\}} \left[R_k(A^{lk}) + R_k(A^{kl}) \right].$$

Per l'axioma del tractament igualitari dels iguals, $R_k(A^{lk}) = R_l(A^{lk})$. Com $||A^{lk}|| = a^{lk}$ s'obté que $R_k(A^{lk}) = \frac{a^{lk}}{2}$. D'una forma similar, $R_k(A^{kl}) = \frac{a^{kl}}{2}$. Així,

$$R_k(A) = \sum_{l \in N \setminus \{k\}} \left[\frac{a^{lk}}{2} + \frac{a^{kl}}{2} \right] = \frac{\alpha_k}{2} = ES(A).$$

Demostrarem la segona asseveració. Es veu immediatament que la regla $CD(A)$ compleix els tres axiomes.

Contràriament, sigui R una regla de repartiment satisfent els tres axiomes. Com R i CD satisfan l'*addivitat*, es suficient demostrar que $R(A^{ij}) = CD(A^{ij})$ per qualsevol parell $i, j \in N$, amb $i \neq j$.

Sigui $i, j \in N$, amb $i \neq j$. Per l'axioma de l'*equip essencial*, per tot $k \in \{i, j\}$,

$$R_k(A^{ij}) = a_{ij} = CD_k(A^{ij}).$$

Pel tractament igualitari dels iguals, $R_k(A^{ij}) = R_l(A^{ij}) = x$, per tot parell $k, l \in N \setminus \{i, j\}$. Aleshores,

$$a_{ij} = ||A^{ij}|| = \sum_{k \in N} R_k(A^{ij}) = 2a_{ij} + (n-2)x,$$

d'aquí s'obté que

$$R_k(A^{ij}) = x = \frac{-a_{ij}}{n-2} = CD_k(A^{ij}),$$

per tot $k \in N \setminus \{i,j\}$. $\square$

S'observa que l'única diferència entre aquestes dues regles és un sol axioma. Mentre que en l'asseveració de la regla de la divisió igual, l'axioma s'anomena l'*audiència zero*, concedeix-i-divideix s'esmenta l'axioma de l'*equip essencial*.

Aquests axiomes son lògicament independents, és a dir, no hi ha cap axioma que estigui implicat pels altres. Això significa que es poden trobar regles que compleixin dos axiomes però es diferenciïn en el tercer. Vegeu l'article de Bergantiños i Moreno-Ternero (2021) [4].

Capítol 5

Aplicació: un repartiment alternatiu

L'objectiu d'aquest capítol és trobar un model que agrupi les normes i els axiomes explicats en les seccions anteriors per minimitzar la forquilla d'ingressos entre participants de LaLiga. Aquest és, també, l'objectiu d'aquest treball.

Per a fer-ho, proposem una transició entre el model de LaLiga actual i el descrit en aquest treball. Un dels models tindrà només en compte les audiències televisives i l'altre afegirà a més els mèrits esportius.

També, es comprova si els dos models proposats: el que només considera les audiències i el que a més afegeix els mèrits esportius compleixen els axiomes descrits a la Secció 4.3.

En el cas de LaLiga, els números son aproximats i es calcula seguint el BOE [7]. En els altres dos models, s'estableixen relacions teòriques per veure quin dels dos està més a prop de complir els axiomes.

Així, es defineix el vector de demandes com els ingressos rebuts pels 20 equips participants de la competició espanyola. D'aquesta manera, s'entendrà que tots els equips voldran rebre més del que estan rebent. Sobretot els equips petits voldran que es compleixi les seves demandes, ja que així podran ser més competitius. Després, apliquem el model proposat per obtenir una distribució que no varïi dràsticament del de LaLiga i que sigui més equitativa.

Agafem les dades de la temporada 21/22 que son les més actuals.

5.1 Variables del model alternatiu

Tots els supòsits que es facin es corresponen al model teòric del Capítol 4. El conjunt dels equips de la lliga espanyola son $N = \{1, \dots, 20\}$. Sigui $A \in \mathbb{A}_{20\times 20}$ la matriu corresponent a les audiències generades de la LaLiga de l'any estudiat. També es defineix el vector d'ingressos $I \in \mathbb{R}^N_+$, on per qualsevol $i \in N$ el valor I_i correspon als ingressos rebuts aquell any. Per últim, denotem $x \in \mathbb{R}^N_+$ el vector de pagaments on x_i per qualsevol $i \in N$ és el pagament per a cada equip.

Cal tenir en compte que els equips estan ordenats per ordre alfabètic. Per exemple, el Barcelona es relacionarà amb les components I_4 i x_4 dels seus respectius vectors.

Es vol crear un model que ajudi a que els equips més petits siguin més competitius. Així, aquest torneig serà més interessant pels espectadors i també augmentarà el seu prestigi.

A més, es vol que aquest model tingui en compte els mèrits del joc. D'aquesta manera, els equips i els mateixos futbolistes estaran incentivats en jugar i crear joc per obtenir més d'aquestes recompenses. Per exemple, l'espectador troba avorrit veure un partit en que empatin sense cap gol o guanyin per la mínima. En canvi, un partit el trobarà més interessant si hi ha més gols per part dels dos equips o més jugades d'atac. Afegint variables que tinguin en compte el joc creat ajudarà a solucionar aquest problema.

Descrivim una regla de repartiment que valora els mèrits esportius. Però abans, es defineixen les variables addicionals que es tindran en compte. Les variables que es defineixen es comptabilitzen per a qualsevol equip $i \in N$.

- La primera d'elles seran els gols marcats per l'equip i i s'anomenarà g_i. Els gols son el factor indispensable per obtenir una victòria a més de ser un dels elements més atractius.

- La següent variable seran el total de passades completades per l'equip i, que es denotarà com p_i. Connectar amb tots els futbolistes i fer jugades d'equip també es crear joc i ha d'estar inclòs en el model.

- El porter és un dels futbolistes especials i per tenir-los en compte, s'inclouran el total de parades de l'equip i. Aquesta variable es defineix com s_i (de l'anglès *saves*).

- Per últim, també es important afegir com a variable la posició de l'equip i de LaLiga, ja que és el premi a la constància durant tota la temporada estudiada. Aquesta variable s'anomenarà l_i.

Ara bé, s'ha d'establir una ponderació coherent per a cada vector. Per exemple, no tindria sentit dir que les passades ponderessin el doble que els gols, ja que l'últim és el més difícil d'aconseguir i el que determina la victòria.

Per això, ens basarem en jocs que es dediquen a puntuar jugador per jugador. És el cas de LaLiga Fantasy [18], un joc del diari Marca que permet al jugador crear la seva pròpia alineació per a cada jornada i obtenir una puntuació final segons les seves actuacions.

El joc agrupa a un jugador amb més persones per crear una lliga i competir amb aquests. Quan no es juga cap partit, es pot fitxar nous futbolistes i entrenadors. El dia abans de començar una jornada, s'ha de triar l'onze inicial que es creu que obtindrà més puntuació. Als jugadors se'ls hi posa una nota segons els seus resultats esportius i l'aplicació dona més diners virtuals segons la suma total de les puntuacions per poder fitxar més futbolistes. Quan s'acaba la temporada, el guanyador serà aquell en que la suma de les puntuacions de totes les jornades sigui més alta.

Encara que en aquest videojoc s'obté una puntuació per jugador i per jornada, es pot obtenir les dades que es volen agrupant les dades per equip i per temporada. Després, s'aplica la ponderació del joc i obtindrem la puntuació total per equip.

En el cas dels gols, estableix una puntuació diferent segons si és un porter o defensa (6 punts per gol), un migcampista (5 punts per gol) o un davanter (4 punts per gol). Per agilitzar els càlculs l'aplicació d'aquest treball no distingeix els gols marcats per cadascuna de les posicions i equipara cada gol marcat amb una puntuació de 5 punts.

En relació amb les passades, el joc no estableix una ponderació per a elles. En aquesta aplicació, es troba una ponderació adequada per tal de que la puntuació de les passades no superi a la dels gols en cap equip. Així, cada 100 passades els equips sumaran 1 punt. Els gols han de considerar-se més mèrits esportius que les passades, ja que algunes d'elles poden ser cap enrere o en pilota morta (és a dir, que la pilota no està en joc).

L'aplicació del Fantasy assigna 1 punt per cada dos parades del porter i serà la mateixa per l'aplicació d'aquest treball.

Per últim, la puntuació per la posició en la qual s'hagi quedat a LaLiga surt d'aquesta fórmula:

$$pt_i = (20 - l_i) \cdot 20 \qquad \forall i \in N.$$

Denotarem com $M \in \mathbb{R}^N$ el vector dels *mèrits esportius.* Aleshores les components $M_i, \quad \forall i \in N$ es calculen com la suma de les variables ponderades de la següent manera:

$$M_i = 5 \cdot g_i + \frac{1}{100} \cdot p_i + \frac{1}{2} \cdot s_i + pt_i \qquad \forall i \in N.$$

Els mèrits esportius estan calculats a la Taula 5.1.

Ara, per tractar les dades de les audiències generades, que són les úniques que estan en forma de matriu, es defineix una família com les dels apartats anteriors. Donat que en el document de Bergantiños i Moreno-Ternero (2020) [4] les tres primeres famílies definides son el resultat de ponderar dues de les tres regles ($U_i(A)$ $ES_i(A)$ i $CD_i(A)$) les ajuntarem totes elles en una sola família. Aleshores, tindrem en compte les tres regles principals i la importància de cadascuna d'elles en els models alternatius.

Definició 5.1. *Per tot $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0,1]$ tals que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ i tot $(N, A) \in \mathbb{P}$ es defineix la família $\{F^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}\}_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in [0,1]}$ com:*

$$F_i^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A) = \lambda_1 \cdot U_i(A) + \lambda_2 \cdot ES_i(A) + \lambda_3 \cdot CD_i(A), \quad \forall i \in N.$$

Definim una nova regla que té en compte els mèrits esportius. Per això fem una ponderació entre la regla $F^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A)$ i el vector dels mèrits esportius M.

Definició 5.2. *Sigui $\mu \in [0,1]$, la regla $F^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A)$ i el vector dels mèrits esportius M. Es defineix la regla de repartiment que té en compte els mèrits esportius per a tots els equips com:*

$$G_i^{\mu}(A) = \mu \cdot F_i^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A) + (1 - \mu) \cdot M_i, \quad \forall i \in N.$$

Aquesta regla G a diferència de la F al només dependre de dos vectors, només s'ha hagut de definir una variable μ. Així, aquesta funció es la combinació convexa de dos vectors que retornarà també un altre vector.

EQUIP	GOLS	PASSADES	PARADES	POSICIÓ	MÈRITS (M)
Alavés	31	9676	100	20	301,76
Athletic Club	43	12947	96	8	632,47
Atlético Madrid	65	15076	65	3	848,26
Barcelona	68	21489	84	2	956,89
Betis	62	15702	94	5	814,02
Cádiz	35	10136	117	17	394,86
Celta Vigo	43	16007	91	11	600,57
Elche	40	12948	121	13	529,98
Espanyol	40	13360	118	14	512,6
Getafe	33	10278	91	15	413,28
Granada	44	10582	132	18	431,82
Levante	51	12584	126	19	463,84
Mallorca	36	11046	91	16	415,96
Osasuna	37	11904	99	10	553,54
Rayo Vallecano	39	12747	112	12	538,47
Real Madrid	80	21373	97	1	1042,23
Real Sociedad	40	15403	89	6	678,53
Sevilla	53	18327	90	4	813,27
Valencia	48	9627	112	9	612,27
Villarreal	63	16679	91	7	787,29

Taula 5.1: Mèrits esportius dels equips (Temporada 2020-21). Elaboració pròpia

5.2 Ingressos rebuts per LaLiga en la temporada 2021-2022

En la pàgina web de LaLiga (laliga.com), concretament en l'apartat de transparència [19], es mostra quant rep cada equip en concepte d'ingressos per la comercialització dels drets televisius. Però no han sortit encara les dades de l'any en que s'està treballant i per tant, en aquesta secció hem aproximat els càlculs tot seguint les normes del BOE [7].

La temporada 2021-2022, LaLiga ha generat 1930 milions d'euros en concepte de drets televisius [20]. D'aquests diners, el 90% (1737M€) és pels equips de la Primera Divisió. A partir d'aquí es reparteix en tres partides:

El 50% es reparteix a parts iguals entre tots els equips. És a dir, cada equip rep 86,85M€.

El 25% per mèrits esportius que correspon a la classificació aconseguida a LaLiga tot seguint aquests percentatges:

- 1.º clasificado: 17 por 100.
- 2.º clasificado: 15 por 100.
- 3.º clasificado: 13 por 100.
- 4.º clasificado: 11 por 100.
- 5.º clasificado: 9 por 100.
- 6.º clasificado: 7 por 100.
- 7.º clasificado: 5 por 100.
- 8.º clasificado: 3,5 por 100.
- 9.º clasificado: 3 por 100.
- 10.º clasificado: 2'75 por 100.
- 11.º clasificado: 2'5 por 100.
- 12.º clasificado: 2'25 por 100.
- 13.º clasificado: 2 por 100.
- 14.º clasificado: 1'75 por 100.
- 15.º clasificado: 1'5 por 100.
- 16.º clasificado: 1'25 por 100.
- 17.º clasificado: 1 por 100.
- 18.º clasificado: 0'75 por 100.
- 19.º clasificado: 0'5 por 100.
- 20.º clasificado: 0'25 por 100.

Font: *BOE Real Decreto-ley 5/2015*

Taula 5.2: Ponderació dels ingressos rebuts per equip segons la posició obtinguda

L'últim 25% es rep segons la implantació social. Una tercera part es reparteix proporcionalment segons el taquillatge mitjà de cada equip. Les darreres dues terceres parts es distribueixen segons les audiències televisives també proporcionalment.

Donat que les dades de les recaptacions mitjanes de tots els equips no s'han trobat per aquest any se suposarà que totes les entrades de tots els partits de LaLiga valen igual i que a més a més els equips sempre omplen el 100% dels estadis (Font: Statista, 2022) [22]. Així, aquesta part dependrà solament de la capacitat d'aquests estadis.

D'aquesta manera, el vector de demandes (I) quedarà determinat com a la Taula 5.3. El resultat no és exacte ja que no hem obtingut totes les dades referents a la normativa del Decret llei.

EQUIPS	50% IGUALS	25% LLIGA	25% SOCIAL	TOTAL
Alavés	43.425.000	1.085.625	12.890.002	57.400.627
Athletic Club	43.425.000	15.198.750	29.648.943	88.272.693
Atlético Madrid	43.425.000	56.452.500	31.727.342	131.604.842
Barcelona	43.425.000	65.137.500	54.887.703	163.450.203
Betis	43.425.000	39.082.500	25.511.608	108.019.108
Cádiz	43.425.000	4.342.500	15.868.235	63.635.735
Celta Vigo	43.425.000	10.856.250	16.903.661	71.184.911
Elche	43.425.000	8.685.000	15.567.163	67.677.163
Espanyol	43.425.000	7.599.375	19.931.953	70.956.328
Getafe	43.425.000	6.513.750	13.241.412	63.180.162
Granada	43.425.000	3.256.875	15.457.071	62.138.946
Levante	43.425.000	2.171.250	15.542.309	61.138.559
Mallorca	43.425.000	5.428.125	14.518.392	63.371.517
Osasuna	43.425.000	11.941.875	14.615.520	69.982.395
Rayo Vallecano	43.425.000	9.770.625	12.579.974	65.775.599
Real Madrid	43.425.000	73.822.500	47.228.157	164.475.657
Real Sociedad	43.425.000	30.397.500	18.334.366	92.156.866
Sevilla	43.425.000	47.767.500	23.824.326	115.016.826
Valencia	43.425.000	13.027.500	21.953.980	78.406.480
Vila-real	43.425.000	21.712.500	14.017.881	79.155.381
			SUMA	1.737.000.000

Taula 5.3: Repartiment aproximat de LaLiga (Temporada 2020-21). Elaboració pròpia

Una de les condicions del Decret llei esmentat és que si el repartiment supera els 1500M€, la diferència entre el màxim i el mínim no podrà ser superior a 3,5 cops. Atès que el màxim el rep el Reial Madrid amb 164,5M€ i el mínim l'Alavés amb 57,4M€ i es té que la proporció entre els dos equips és de 2,86, la distribució està ben aplicada.

5.3 Relació entre la regla $F^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A)$ i els axiomes

En aquesta secció discutim quins axiomes dels explicats en la Secció 4.3 es compleixen per a qualsevol combinació de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ o quins d'ells tenen una condició específica.

Proposició 5.3. *La regla* $F^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A)$ *compleix el* tractament igualitari dels iguals *per a qualsevol* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0, 1]$ *tals que* $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$.

Demostració. Sigui i, j dos equips qualssevol. Volem veure que si $a_{ik} = a_{jk}$ i $a_{ki} = a_{kj}$ per tot $k \in N \setminus \{i, j\}$ aleshores $F_i^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A) = F_j^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A)$.

És a dir, és l'equivalent a veure que

$$\begin{aligned} 0 &= F_i^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A) - F_j^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A) \\ &= \lambda_1 \cdot (U_i(A) - U_j(A)) + \lambda_2 \cdot (ES_i(A) - ES_j(A)) + \lambda_3 \cdot (CD_i(A) - CD_j(A)). \end{aligned}$$

Així, comprovant que les normes pels tres equips son iguals (ja que els paràmetres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ són iguals per tots els equips) podrem concloure la demostració. En el cas de la *regla uniforme* és clar ja que es reparteix la quantitat de recursos en quantitats:

$$U_i(A) = \frac{||A||}{n} = U_j(A).$$

Mirem si la *regla de la divisió igual* pels dos equips són iguals. Abans, però veiem que:

$$\alpha_i = \sum_{k \in N} (a_{ik} + a_{ki}) = \sum_{k \in N} (a_{jk} + a_{kj}) = \alpha_j.$$

I per tant,

$$ES_i(A) = \frac{\alpha_i}{2} = \frac{\alpha_j}{2} = ES_j(A).$$

La propietat de que $\alpha_i = \alpha_j$ ens serveix per veure que en la regla *concedeix-i-divideix*:

$$CD_i(A) = \frac{(n-1)\alpha_i - ||A||}{n-2} = \frac{(n-1)\alpha_j - ||A||}{n-2} = CD_j(A).$$

□

Obtenir que $F^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A)$ tracti per igual a tots els equips participants és un resultat esperat, ja que totes tres regles $(U(A), ES(A), CD(A))$ ho compleixen i l'únic que hem definit és la seva combinació convexa.

També, gràcies a la Proposició 4.11 del treball de Bergantiños i Moreno-Ternero [4] tenim que com que es compleix el tractament igualitari dels iguals, es compleix el tractament igualitari dels iguals dèbil.

Per tant, $F_i^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A)$ ens assegura que es tractaran per igual tots els equips i que no afavorirà a cap d'ells per temes més enllà de les audiències que generen.

Proposició 5.4. *La regla $F^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A)$ compleix l'axioma dels* parells autònoms *si i només si*

$$\frac{2\lambda_1}{n} + \lambda_2 + 2 \cdot \lambda_3 = 1.$$

Demostració. Aquest axioma estableix que per cada $(N, A) \in \mathbb{P}$ i cada parell $i, j \in N$ tals que $a_{kl} = 0$ per a cada parell $\{k, l\} \in N$ amb $(k, l) \neq (i, j)$ i $(k, l) \neq (j, i)$ s'ha de complir que $F_i^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A) + F_j^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A) = ||A||$. Els únics elements no nuls de la matriu A son a_{ij} i a_{ji} i per tant, tenim:

$$\alpha_i = a_{ji} + a_{ij} = \alpha_j.$$

A més a més, tenim que $\alpha_i = \alpha_j = ||A||$. Desenvolupant l'expressió de $F_i^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A) + F_j^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A)$ s'obté:

$$
\begin{aligned}
&F_i^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A) + F_j^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A) \\
&= \lambda_1 \cdot (U_i(A) + U_j(A)) + \lambda_2 \cdot (ES_i(A) + ES_j(A)) + \lambda_3 \cdot (CD_i(A) + CD_j(A)) \\
&= \lambda_1 \cdot \frac{2||A||}{n} + \lambda_2 \cdot \frac{2\alpha_i}{2} + \lambda_3 \cdot \frac{2(n-1)\alpha_i - 2||A||}{n-2} \\
&= \lambda_1 \cdot \frac{2||A||}{n} + \lambda_2 \cdot \frac{2||A||}{2} + \lambda_3 \cdot \frac{2(n-1)||A|| - 2||A||}{n-2}.
\end{aligned}
$$

Això coincideix amb $||A||$ si i només si:

$$\frac{2\lambda_1}{n} + \lambda_2 + 2 \cdot \lambda_3 = 1.$$

□

La regla U no compleix aquest axioma (vegi's la Taula 4.1). Però en canvi, si es crea una funció F definida com la combinació convexa de les tres regles de repartiment (U, ES i CD), es pot trobar els casos en que aquesta regla F compleixi aquest axioma.

Proposició 5.5. *La regla* $F^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A)$ *compleix el* efecte homogeni dels parells autònoms *per a qualsevol* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0,1]$ *tals que* $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$.

Aquesta proposició no es demostra en aquest treball ja que és òbvia. La funció $F^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A)$ es defineix com la combinació convexa de tres normes (U, ES, CD) que compleixen aquest axioma. Vegi's la Taula 4.1.

Proposició 5.6. *La regla* $F^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A)$ *compleix l'axioma dels* audiència zero *si i només si*

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_3} = \frac{n}{n-2}.$$

Demostració. Aquest axioma estableix que si per a cada $(N, A) \in \mathbb{P}$ i cada $i \in N$ tals que per a cada $j \in N$, $a_{ij} = 0 = a_{ji}$ es compleix que $F_i^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A) = 0$.

Tornem a calcular el total d'audiència generada per cada equip per després poder-ho aplicar a $F^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A)$:

$$\alpha_i = \sum_{j \in N} (a_{ij} + a_{ji}) = 0.$$

D'aquí la funció $F_i^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A)$ per a qualsevol $i \in N$ és:

$$
\begin{aligned}
F_i^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A) &= \lambda_1 \cdot U_i(A) + \lambda_2 \cdot ES_i(A) + \lambda_3 \cdot CD_i(A) \\
&= \lambda_1 \cdot \frac{||A||}{n} + \lambda_2 \cdot \frac{\alpha_i}{2} + \lambda_3 \cdot \frac{(n-1)\alpha_i - ||A||}{n-2}.
\end{aligned}
$$

Com que $\alpha_i = 0$ volem que $F_i^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A) = 0$ s'obté:

$$F_i^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A) = \lambda_1 \cdot \frac{||A||}{n} - \lambda_3 \cdot \frac{||A||}{n-2} = 0.$$

Aleshores,

$$\lambda_1 \cdot \frac{||A||}{n} = \lambda_3 \cdot \frac{||A||}{n-2},$$
$$\frac{\lambda_1}{\lambda_3} = \frac{n}{n-2}.$$

□

La regla de repartiment CD no compleix aquest axioma (vegi's la Taula 4.1). Però en canvi, si creem una funció com a combinació convexa de U, ES i CD hem sigut capaços de trobar una relació entre λ_1, λ_2 i λ_3 tals que F compleix aquest axioma.

Proposició 5.7. *La regla* $F^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A)$ *compleix l'*ordre de preservació *per a qualsevol* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0,1]$ *tals que* $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$.

Demostració. Aquest axioma diu que per cada $(N, A) \in \mathbb{P}$ i cada parell $i, j \in N$ tals que per cada $k \in N \setminus \{i, j\}$, $a_{ik} \geq a_{jk}$ i $a_{ki} \geq a_{kj}$ s'obté $F_i^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A) \geq F_j^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A)$.

Sabem que:

$$\alpha_i = \sum_{k \in N} (a_{ki} + a_{ik}) \geq \sum_{k \in N} (a_{kj} + a_{jk}) = \alpha_j.$$

Avaluem $F^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A)$ per mirar si compleix l'axioma

$$\begin{aligned} F_i^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A) &= \lambda_1 \cdot U_i(A) + \lambda_2 \cdot ES_i(A) + \lambda_3 \cdot CD_i(A) \\ &= \lambda_1 \cdot \frac{||A||}{n} + \lambda_2 \cdot \frac{\alpha_i}{2} + \lambda_3 \cdot \frac{(n-1)\alpha_i - ||A||}{n-2} \\ &\geq \lambda_1 \cdot \frac{||A||}{n} + \lambda_2 \cdot \frac{\alpha_j}{2} + \lambda_3 \cdot \frac{(n-1)\alpha_j - ||A||}{n-2} \\ &= F_j^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A). \end{aligned}$$

□

Com que les tres regles de repartiment complien l'ordre de preservació per separat era lògic esperar que també ho complís F. Recordem que F està descrita com la combinació convexa de U, ES i CD. Vegi's la Taula 4.1.

Es té que l'ordre de preservació implica l'ordre de preservació local i visitant. També que l'ordre de preservació es compleix en la regla de repartiment F. Aleshores F compleix l'ordre de preservació local i visitant.

En el cas de la no-negativitat, recordem que la regla CD no compleix aquest axioma ja que en alguns casos el resultat d'aquesta regla pot ser negatiu. Podem establir una relació entre els pesos i les dues normes restants (U i ES) per saber quan aquest axioma es compleix.

Proposició 5.8. *La regla* $F^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A)$ *compleix l'axioma de la* no-negativitat *si i només si*

$$ES_i(A) \cdot [\lambda_2(n-2) + 2\lambda_3(n-1)] \geq U_i(A)[\lambda_3 n - \lambda_1(n-2)], \quad \forall i \in N.$$

Demostració. En tots els casos tant la regla U com la regla ES seran o 0 o major que 0 i per tant, compliran l'axioma de la no-negativitat.

Ara bé, pel cas de CD ho separem per casos.

Suposem que $CD_i(A) \geq 0, \quad \forall i \in N$. És obvi que

$$F_i^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A) = \lambda_1 \cdot U_i(A) + \lambda_2 \cdot ES_i(A) + \lambda_3 \cdot CD_i(A) \geq 0, \quad \forall i \in N.$$

Suposem que $CD_i(A) \leq 0$, per algun $i \in N$,

$$F_i^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A) = \lambda_1 \cdot U_i(A) + \lambda_2 \cdot ES_i(A) + \lambda_3 \cdot CD_i(A) \geq 0,$$

i així,

$$\lambda_1 \cdot \frac{||A||}{n} + \lambda_2 \cdot \frac{\alpha_i}{2} \geq -\lambda_3 \cdot \frac{(n-1)\alpha_i - ||A||}{n-2},$$
$$\lambda_1 \cdot \frac{||A||}{n} + \lambda_2 \cdot \frac{\alpha_i}{2} \geq -\lambda_3 \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdot \alpha_i + \lambda_3 \cdot \frac{||A||}{n-2}.$$

Aplicant el mínim comú múltiple en les fraccions:

$$\lambda_1 \cdot \frac{||A|| \cdot (n-2)}{n} + \lambda_2 \cdot \frac{\alpha_i \cdot (n-2)}{2} \geq -2 \cdot \lambda_3 \cdot \frac{(n-1)\alpha_i}{2} + n \cdot \lambda_3 \cdot \frac{||A||}{n}$$

Ara agrupem els termes $\frac{||A||}{n}$ i $\frac{\alpha_i}{2}$ per obtenir les dues regles:

$$\frac{||A||}{n} \cdot [\lambda_1(n-2) - n\lambda_3] + \frac{\alpha_i}{2} \cdot [\lambda_2(n-2) + 2\lambda_3(n-1)] \geq 0$$
$$U_i(A) \cdot [\lambda_1(n-2) - n\lambda_3] + ES_i(A) \cdot [\lambda_2(n-2) + 2\lambda_3(n-1)] \geq 0$$

La part de la regla de la divisió igual sempre serà positiva ja que ES ho és, la part dels pesos està tot sumant i $n \geq 3$. Per tant, com que la part de la regla uniforme és la que pot ser negativa obtindrem:

$$ES_i(A) \cdot [\lambda_2(n-2) + 2\lambda_3(n-1)] \geq U_i(A) \cdot [\lambda_3 n - \lambda_1(n-2)],$$

que és el que volíem demostrar. □

Ara demostrem que F compleix l'axioma del límit superior dèbil.

Proposició 5.9. *La regla* $F^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A)$ *compleix l'axioma del* límit superior dèbil *per a qualsevol* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0,1]$ *tals que* $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$.

Demostració. Es recorda que l'axioma del *límit superior dèbil* es compleix si per a cada $(N, A) \in \mathbb{P}$ i $i \in N$ es té:

$$F_i^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A) \leq ||A||.$$

Donat que aquesta regla és eficient ja que $U(A)$, $ES(A)$, $CD(A)$ ho són i $F(A)$ és una ponderació d'elles s'obté que $\forall i \in N$,

$$\lambda_1 \cdot U_i(A) \leq U_i(A) \leq ||A||,$$
$$\lambda_2 \cdot ES_i(A) \leq ES_i(A) \leq ||A||,$$
$$\lambda_3 \cdot CD_i(A) \leq CD_i(A) \leq ||A||.$$

Tenint en compte que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ s'obté que

$$F_i^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A) \leq ||A||.$$

□

Com que F és la combinació convexa de les tres regles de repartiment descrites, compleix aquest axioma. Vegi's la Taula 4.1.

En el cas de l'*addivitat*, també l'ha de complir la regla $F^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A)$, ja que és la combinació convexa de les tres regles de repartiment (U, ES i CD). Vegi's la Taula 4.1.

5.4 Implementació: programa

En aquesta secció, s'exposen els tres programes que s'han realitzat per tractar les dades obtingudes.

En tots tres programes, es llegeixen les dades de les audiències i com que es disposa de les quantitats efectivament percebudes pels equips (vegi's la Secció 5.2), tractem de determinar els pesos adequats. Per això, s'aproximen els valors que han de tenir aquests pesos per tal que s'adaptin bé a les dades. Es defineixen funcions dintre dels programes que calculen les regles de repartiment U, ES o CD. També la que calcula el vector dels mèrits esportius M, que s'utilitzarà en el programa corresponent. A partir d'aquí, es determina el repartiment que s'ajusta millor utilitzant el mètode dels mínims quadrats.

En l'article de Bergantiños i Moreno-Ternero (2020) [6] també es fa una aplicació empírica. Utilitzen les dades de la temporada 16/17 on es mostra tant l'audiència total com els ingressos totals rebuts de tots els equips. Després, calculen els ingressos si només s'apliqués la regla ES i el seu percentatge respecte el total. També, calculen els ingressos si només s'apliqués la regla CD i el seu percentatge respecte el total. Aleshores, estableixen una comparació entre les tres columnes d'ingressos obtingudes per establir les principals diferències.

A més a més, estableixen un model híbrid que s'aproximi al de LaLiga. Estableixen que una meitat s'ha de repartir igualitàriament entre tots els equips i una quarta part segons la posició de LaLiga en els cinc anys anteriors. Totes aquestes parts queden determinades segons les dades que han extret en el seu article. La quarta part restant correspon a la implantació social. Aquí, una tercera part de la implantació social correspon als ingressos generats pel taquillatge durant les cinc temporades anteriors. Les dues terceres parts restants (que sobre el total serà $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$) corresponen a les audiències. Aquí és on es creen els dos models híbrids, una sisena part es calcularà segons la regla ES i l'altre es calcularà segons la regla CD. Així, estableixen una comparació entre els dos models híbrids.

En la nostra aplicació hem creat tres programes. El primer d'ells aproxima els pesos per a que s'ajustin al Decret llei. El segon, només es considerarà les audiències per a repartir els ingressos entre els equips. En el tercer i últim, a més de les audiències es tindran en compte els mèrits esportius.

Primer programa

En el *primer programa*, hem aproximat els pesos λ_1, λ_2 i λ_3 segons la normativa de LaLiga actual solament tenint en compte la matriu de les audiències.

S'ha llegit la matriu d'audiències A de la temporada 21/22 i s'ha establert el vector d'ingressos dels equips I (que correspon amb els ingressos aproximats rebuts de LaLiga). Després, es defineixen funcions corresponents a les tres regles principals: $U(A)$, $ES(A)$ i

$CD(A)$. També la definida com la combinació convexa d'aquestes tres: $F^{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(A)$.

A partir d'aquí, s'aproximen els pesos utilitzant el mètode de mínims quadrats ordinaris. Així establim la combinació que s'acostava més a la normativa de LaLiga.

També, en aquest programa ja se sap que el pes de la regla uniforme ha de ser igual a 0.5 (i per tant, $\lambda_1 = 0.5$). A partir d'aquí, s'exploren les possibles combinacions dels valors dels paràmetres i s'ha obtingut que:

$$\lambda_1 = 0.5, \quad \lambda_2 = 0.3, \quad \lambda_3 = 0.2.$$

I per tant la primera regla que denotarem com $F^{LaLiga}(A)$ serà:

$$F_i^{LaLiga}(A) = 0.5 \cdot U_i(A) + 0.3 \cdot ES_i(A) + 0.2 \cdot CD_i(A), \quad \forall i \in N.$$

Segon programa

El *segon programa* estableix els pesos de les regles de repartiment solament tenint en compte la matriu de les audiències generades pels equips i s'elimina la restricció que $\lambda_1 = 0.5$. A més, no té en compte els mèrits esportius.

Com en l'altre programa, es llegeix la matriu A de les audiències, el vector de demandes I corresponent als ingressos rebuts de LaLiga i s'han programat les tres regles de repartiment: $U(A)$, $ES(A)$ i $CD(A)$.

A partir d'aquí, es calculen els repartiments possibles per a tots els equips modificant la ponderació dels pesos λ_1, λ_2 i λ_3 en una quantia de 0.1. La precisió dels pesos es pot canviar per obtenir resultats més afinats.

És a dir, el primer casos serien:

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = 1.0 & \lambda_2 = 0.0 & \lambda_3 = 0.0, \\ \lambda_1 = 0.9 & \lambda_2 = 0.1 & \lambda_3 = 0.0, \\ \lambda_1 = 0.9 & \lambda_2 = 0.0 & \lambda_3 = 0.1, \end{array}$$

i així successivament.

Aleshores, escollim aquells repartiments segons les condicions que s'imposen en el programa. La primera d'elles és que el màxim no rebi més del 7.5% dels ingressos i el mínim rebi com a mínim el 2.5%. Donat que son 20 equips que s'han de repartir el 100% dels ingressos, si tothom rebés el mateix ingressarien el 5%. S'ha cregut convenient fer una desviació de $\pm 2.5\%$. Així els ingressos entre els equips son més equilibrats. Després d'obtenir aquests casos, triarem el que divergeixi menys en comparació als ingressos aproximats que haurien d'haver rebut de LaLiga. Per això, aplicarem el mètode dels mínims quadrats entre els vectors d'ingressos d'aquest model i el de LaLiga.

El resultat obtingut ha estat:

$$\lambda_1 = 0.8, \quad \lambda_2 = 0.1, \quad \lambda_3 = 0.1.$$

I per tant la segona regla que denotarem com $F^{Aud}(A)$ serà:

$$F_i^{Aud}(A) = 0.8 \cdot U_i(A) + 0.1 \cdot ES_i(A) + 0.1 \cdot CD_i(A), \quad \forall i \in N.$$

Tercer programa

En el *tercer programa*, s'utilitza quasi el mateix procediment però amb algun canvi.

Primer, s'agafa una possible combinació de μ i $1-\mu$ per establir la ponderació de les audiències i dels mèrits esportius. A partir d'aquí, es recorren totes les possibles ponderacions de λ_1, λ_2 i λ_3 amb les mateixes condicions que el programa anterior. Es calcula la suma total de les diferències utilitzant també el mètode dels mínims quadrats ordinaris.

Després es repeteix el procediment per totes les combinacions de μ i $1-\mu$ per així establir tant la ponderació de les tres regles de repartiment, com la ponderació entre la regla $F(A)$ i els mèrits esportius M.

S'ha de tenir en compte que la regla de repartiment utilitzada pels mèrits esportius és la regla proporcional del Capítol 2.

S'obté unes ponderacions de:

$$\mu = 0.6, \quad \lambda_1 = 0.7, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0.3.$$

La regla $F^M(A)$ quedarà de la següent manera:

$$F_i^M(A) = 0.7 \cdot U_i(A) + 0.3 \cdot ES_i(A) + 0 \cdot CD_i(A), \quad \forall i \in N.$$

Aquesta regla només correspon al tractament de les audiències.

I per tant l'última regla, que incorpora els mèrits esportius i que denotem per $G^M(A)$ serà:

$$G_i^M(A) = 0.6 \cdot F_i(A) + 0.4 \cdot M_i, \quad \forall i \in N.$$

5.5 Anàlisi dels resultats

En aquesta secció, s'analitzen els pesos obtinguts dels programes.

LaLiga és una competició on 20 equips s'enfronten tots contra tots. Cada equip s'enfronta contra cadascun dels rivals dos cops (un com a local i l'altre com a visitant). En total, cada equip ha de jugar 38 partits durant una temporada.

Els ingressos obtinguts pels equips en els tres programes estan recopilats en la Taula 5.4.

EQUIP	I	%	F^{LaLiga}	%	F^{Aud}	%	G^M	%
Alavés	57,40	0,0330	64,25	0,0370	77,11	0,0444	77,46	0,0446
Athletic Club	88,27	0,0508	110,51	0,0636	97,04	0,0559	96,68	0,0557
Atlético Madrid	131,60	0,0758	107,95	0,0621	95,94	0,0552	95,61	0,0550
Barcelona	163,45	0,0941	183,22	0,1055	128,36	0,0739	126,88	0,0730
Betis	108,02	0,0622	86,76	0,0499	86,81	0,0500	86,81	0,0500
Cádiz	63,64	0,0366	73,13	0,0421	80,94	0,0466	81,15	0,0467
Celta Vigo	71,18	0,0410	74,72	0,0430	81,63	0,0470	81,81	0,0471
Elche	67,68	0,0390	64,96	0,0374	77,42	0,0446	77,76	0,0448
Espanyol	70,96	0,0408	78,60	0,0453	83,29	0,0480	83,42	0,0480
Getafe	63,18	0,0364	67,53	0,0389	78,53	0,0452	78,83	0,0454
Granada	62,14	0,0358	75,85	0,0437	82,11	0,0473	82,28	0,0474
Levante	61,14	0,0352	71,46	0,0411	80,22	0,0462	80,46	0,0463
Mallorca	63,37	0,0365	68,77	0,0396	79,06	0,0455	79,34	0,0457
Osasuna	69,98	0,0403	68,20	0,0393	78,82	0,0454	79,10	0,0455
Rayo Vallecano	65,78	0,0379	66,41	0,0382	78,04	0,0449	78,36	0,0451
Real Madrid	164,48	0,0947	161,34	0,0929	118,94	0,0685	117,79	0,0678
Real Sociedad	92,16	0,0531	78,26	0,0451	83,15	0,0479	83,28	0,0479
Sevilla	115,02	0,0662	93,66	0,0539	89,78	0,0517	89,68	0,0516
Valencia	78,41	0,0451	75,86	0,0437	82,11	0,0473	82,28	0,0474
Villarreal	79,16	0,0456	65,53	0,0377	77,67	0,0447	78,00	0,0449
SUMA	1737,00		1736,97		1736,97		1736,98	

Taula 5.4: Ingressos en milions d'euros i % sobre el total dels equips segons els diferents models (Temporada 2020-21). Elaboració pròpia

Aquests models amb els seus resultats volen mostrar una transició per arribar al model que inclou els mèrits esportius. Primer es mostra els ingressos rebuts per LaLiga. Després l'aproximació del model de LaLiga si només tinguéssim en compte les audiències. D'aquí surt el model on només es consideren les audiències i s'afegeix que els equips estiguin entre una forquilla del total. Per últim, sorgeix el model on s'inclouen tant les audiències com els mèrits esportius.

En els ingressos aproximats de LaLiga, veiem com hi ha dos equips (el Barcelona i el Real Madrid) que reben més d'un 9% del total. Mentre que hi ha 8 equips que reben entre un 3% i un 4% (Alavés, Cádiz, Elche, Getafe, Granada, Levante, Mallorca i Rayo Vallecano). Aquí és on s'ha d'actuar si volem que la competició sigui més igualitària. Si dos equips reben molt més que els altres vuit, aquests últims ho tindran molt difícil per competir contra els grans.

Per aquesta raó, hem aproximat el model de LaLiga amb la funció F^{LaLiga}. Ara bé, el resultat obtingut no és el desitjat, ja que per exemple, augmentem els ingressos en el Barcelona en aproximadament 20M€. Això provoca que el seu percentatge sobre el total augmenti fins el 10,55%. També, els ingressos del Real Madrid no varien significativament, ja que solament disminueixen en 3M€, continuant per sobre el 9% del total. Sí que es veritat que dels 8 equips esmentats abans tots ells menys el Elche augmenten els seus ingressos. Però aquest augment no és suficient per arreglar les dissimilituds entre els equips.

Quan modelem la F^{Aud} imposant que el màxim i el mínim es trobin entre un percentatge del total, és on el resultat s'ajusta més. Si comparem els ingressos de LaLiga amb F^{Aud}, tant el Barcelona com el Real Madrid veuen reduïts els seus ingressos. Per exemple, l'equip blaugrana rep 35M€ menys i l'equip blanc rep 45M€ menys. Destaquem que malgrat el Real Madrid sigui campió de LaLiga, el Barcelona rep més que el conjunt blanc.

A més, si ens fixem en els 8 equips pitjors pagats per LaLiga, tots ells veuen com els seus ingressos pugen considerablement. Per exemple, els casos més extrems són els de l'Alavés, que passa de cobrar 57,40M€ a 77,11M€, i el del Granada que passa de 62,14M€ a 82,11M€. Tots dos equips veuen augmentats en 20M€ els seus ingressos.

També, els ingressos es redueixen en equips grans com el Sevilla o l'Atlético de Madrid. En canvi, sorprén com un equip històric com el Athletic Club augmenti de 88,27M€ a 97,04M€ els seus ingressos. Encara que aquests últims han sigut reduïts, ja que F^{LaLiga} li donava 110,51M€.

A partir d'aquí, s'han inclòs els mèrits esportius en la següent funció, la G^M. Es recorda que la imposició de que el màxim i el mínim estiguin entre un percentatge s'ha fet sobre el total d'ingressos (el de la part de les audiències i el de la part dels mèrits esportius).

Igualment, cap dels ingressos varia significativament respecte la F^{Aud}. Fins i tot, hi ha casos com el del Betis en que en els dos models els ingressos rebuts serien de 86,81M€. Això és un bon indicador de que les audiències i els mèrits esportius estan fortament relacionats.

En canvi, en els mèrits, si ho comparem amb els ingressos rebuts, hi havia més disparitat (vegi's la Taula 5.1) i la ponderació d'aquests era de 0,4. Per exemple, l'Alavés obté 301,76 punts de mèrits esportius, mentre que el Real Madrid obté 1042,23 punts.

En termes generals, la transició continua donant més ingressos els equips més ben posicionats com el Barcelona o el Real Madrid (que son el 2n i el 1r de LaLiga d'aquell any). Però el que sorprèn és que el conjunt blaugrana acumula menys mèrits esportius i rep més diners (956,89 punts i 126,88M€) mentre que el campió de lliga té més mèrits i menys ingressos (1042,33 punts i 117,79M€). Una explicació possible és que les audiències del Barcelona deuen ser molt més grans que les del Real Madrid. Com que a la gent li interessa menys veure el conjunt blanc que el conjunt blaugrana, el model li dona més diners a aquests últims. Igualment, la diferència és només d'uns 10M€.

A més, si ens fixem ens els tres equips grans (Real Madrid, Barça i Atlético de Madrid) del Capitol 3 quan es feia la comparació entre LaLiga i la EPL s'ha vist que rebien 459,53M€, més d'un 30% del total. Amb les funcions F^{Aud} i G^{M}, la suma de tots tres equips és de 343,24M d'euros i 340,28M d'euros respectivament. En el cas de només considerar les audiències, s'emportarien un 19,7% i en el cas d'incorporar els mèrits esportius un 19,5%. Per tant la diferència de percentatge s'ha reduït més d'un 10%. Recordem que en el Capítol 3, els tres millors equips anglesos rebien en total un 18,01%. Per tant, es veu com els models creats s'apropen més als de la Premier League i es desvien de la normativa de LaLiga.

Els equips que van descendre (Levante, Alavés i Granada) son els que la diferència en els ingressos entre el que rebien inicialment i el model incloent els mèrits esportius és més gran. Tots tres equips augmenten els ingressos per poder ser més competitius en uns 20M€. Per exemple, l'Alavés és l'únic equip de la competició que ha sigut incapaç d'arribar a 400 punts de mèrits esportius ja que ha obtingut 301,76 punts (vegi's la Taula 5.1).

Per tant, hem obtingut uns resultats que ens mostren que els mèrits esportius no modifiquen gaire els ingressos.

La transició feta en aquests tres models creats respecte als ingressos rebuts per LaLiga és una mica sobtada. En l'aplicació de F^{LaLiga} s'obtenen resultats que es desvien de l'objectiu, que els equips petits rebin més i els grans rebin menys. També, en els models de la F^{Aud} i G^{M} no hi ha una diferència significativa.

Ara estudiarem els pesos de les tres funcions F creades. La recopilació de la informació dels pesos es troba en la Taula 5.5.

	λ_1 : Pes $U(A)$	λ_2 : Pes $ES(A)$	λ_3 Pes : $CD(A)$
F_i^{LaLiga}	0.5	0.3	0.2
F_i^{Aud}	0.8	0.1	0.1
F_i^{M}	0.7	0	0.3

Taula 5.5: Ponderació dels pesos per les diferents regles de repartiment (Temporada 2020-21). Elaboració pròpia

En totes les funcions, els pesos de la regla U son els més grans. El primer d'ells ha estat imposat per semblar-se al model de LaLiga però els altres han estat obtinguts sense imposar aquests pesos directament. Ara bé, condicionar que el màxim i el mínim estiguessin entre el percentatge dels ingressos totals ha influït en l'obtenció dels resultats.

En el cas de la ES, sorprèn que en els successius models vagi disminuint la importància. Fins i tot, en el model on s'inclouen els mèrits esportius la ponderació és 0. Recordem que aquesta regla tracta per iguals a tots els equips i manté l'ordre de preservació per exemple. Per això, en la transició dels models hauria de tenir una importància creixent, no decreixent.

En canvi, els pesos de la regla CD no varien gaire en els tres models. A més, son baixos per a que tinguin més importància les altres dues regles.

Recordem que la funció G^M pondera en un 0.6 les audiències i en un 0.4 els mèrits esportius. Donat que el pes de la regla uniforme en la F^M és de 0.7, es pot afirmar que un $0,6 \cdot 0,7 = 0,42$ del total es reparteix uniformement entre tots els equips. Aquest percentatge no discerneix molt de la normativa de LaLiga, que reparteix la meitat dels ingressos a parts iguals.

Per últim, recordem que s'ha utilitzat la regla proporcional per ponderar els mèrits esportius. Donat que les puntuacions dels mèrits estan en centenes mentre que les audiències estan en milions, es pot pensar que els mèrits estan molt poc ponderats. Gràcies a utilitzar la regla proporcional, el fet de multiplicar pel mateix nombre totes les puntuacions (per exemple, per 1000) no fa variar els resultats. Aleshores, es conclou que els mèrits estan ben ponderats i que si no fan variar molt els resultats, es perquè estan fortament correlacionats amb les audiències.

Capítol 6

Conclusions

En aquest treball s'ha abordat el problema del repartiment dels ingressos en concepte de drets televisius dels equips de LaLiga.

Per un amant del futbol, el fet de poder teoritzar aquest esport utilitzant les matemàtiques em va interessar molt. Després d'haver cursat l'assignatura de Teoria de Jocs, vaig trobar un repte realitzar el meu treball sobre aquesta branca trobant una aplicació realista. A més, gràcies als articles de Bergantiños i Moreno-Ternero (2020 i 2021) [4] [6] vaig decidir que seria una bona manera d'aplicar tots els coneixements d'aquella assignatura en el meu treball. En aquests articles s'exposa un mètode axiomàtic per discutir el repartiment dels ingressos en concepte de drets televisius de LaLiga.

A més, els problemes de repartiment son molt més generals i amplis. Per exemple, el finançament autonòmic és un altre tema actual on s'utilitzen regles de repartiment per distribuir els ingressos que hauria de rebre cada comunitat autònoma.

Ara bé, m'hagués agradat dedicar-li més espai a la Teoria dels Jocs Cooperatius però tota la matèria de les regles de repartiment era molt extensa. De fet, en aquest treball només s'expliquen algunes regles, però n'existeixen moltes més que no s'han pogut exposar.

Els resultats del meu treball han sortit prou uniformes per aconseguir l'objectiu desitjat: que els equips de la taula baixa aconsegueixin més ingressos a costa dels equips de la taula alta. D'aquesta manera, la competició seria molt més interessant i segurament, augmentaria el seu prestigi. He volgut aproximar LaLiga a la English Premier League. Els equips més importants anglesos no reben tant de percentatge sobre el total que els equips espanyols. En el meu model, s'acosta el percentatge al de la competició anglesa.

El fet d'obtenir els resultats uniformes ha sigut en gran mesura per imposar que el màxim i el mínim estiguin sempre entre un interval del 7,5% i el 2,5% del total. Aquesta mesura ha influït positivament en els resultats.

Per últim, em pensava que els mèrits esportius farien variar molt més els resultats respecte al model que només considera les audiències. L'únic mèrit esportiu considerat en la normativa de LaLiga és la classificació final. Creia que afegint els gols els resultats es separarien més del que ho han fet.

Bibliografia

Llibres i Articles

[1] Aumann, R.; Maschler, M. (1985). "Game-theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud". *Journal of Economic Theory* 36, 195–213.

[2] Bergantiños, G.; Moreno-Ternero, J. (2023). "Decentralized revenue sharing from broadcasting sports". *Public Choice* 194, 27–44.

[3] Bergantiños, G.; Moreno-Ternero, J. (2022). "Broadcasting La Liga". *Sports Economic Review*, forthcoming.

[4] Bergantiños, G.; Moreno-Ternero, J. (2021). "On the axiomatic approach to sharing the revenues from broadcasting sports leagues". *Social Choice and Welfare* 58, 321–347.

[5] Bergantiños, G.; Moreno-Ternero, J. (2021). "Separable rules to share the revenues from broadcasting sports leagues". *Economics Letters* 211, 110233.

[6] Bergantiños, G.; Moreno-Ternero, J. (2020). "Sharing the revenues from broadcasting sports leagues". *Management Science* 66(6), 2417–2431.

[7] Boletín Oficial del Estado (01/05/15). "Real Decreto-ley 5/2015, de 30 de abril, de medidas urgentes en relación con la comercialización de los derechos de explotación de contenidos audiovisuales de las competiciones de fútbol profesional".

[8] Herrero, C.; Villar, A. (2001). "The three musketeers: four classical solutions to bankruptcy problems". *Mathematical Social Sciences* 42, 307–328.

[9] O'Neill, B. (1982). "A problem of rights arbitration from the Talmud". *Mathematical Social Sciences* 2(4), 345–371.

[10] Shapley, L. (1953). *A Value for N-Person Games.* In H. W. Kuhn, & A. W. Tucker (Eds.), Contributions to the Theory of Games (Vol. 1, pp. 307–318). Princeton University Press, Princeton, NJ.

[11] Thomson, W. (2019). *How to divide when there isn't enough: from Aristotle, the Talmud, and Maimonides to the axiomatics of resource allocation.* Econometric Society Monograph. Cambridge University Press.

[12] Young, H.P. (1995). *Equity: in theory and practice.* Princeton University Press, Princeton, NJ.

Web

[13] as: “No vamos de farol”, los clubes insisten en la amenaza de parar LaLiga.
Disponible en línia a:
https://as.com/futbol/primera/
no-vamos-de-farol-los-clubes-insisten-en-la-amenaza-de-parar-laliga-n/
[Consultat el 24/10/22]

[14] EPL: How much money do clubs receive from the distribution of broadcast rights?
Disponible en línia a:
https://www.premierleague.com/news/102362
[Consultat el 20/09/22]

[15] EPL: Premier League value of central payments to clubs 2020/21.
Disponible en línia a:
https://www.premierleague.com/news/2222377
[Consultat el 21/09/22]

[16] FBREF: Estadísticas 2021-2022 LaLiga
Disponible en línia a:
https://fbref.com/es/comps/12/2021-2022/Estadisticas-2021-2022-La-Liga
[Consultat el 22/12/22]

[17] FormulaTV: Audiencias
Disponible en línia a:
https://www.formulatv.com/
[Consultat el 10/11/22]

[18] LaLiga: Así se puntúa a los jugadores de LaLiga Fantasy.
Disponible en línia a:
https://www.laliga.com/noticias/
asi-se-puntua-a-los-jugadores-de-laliga-fantasy-marca
[Consultat el 6/11/22]

[19] LaLiga: Transparencia, Distribution of TV Rights:
Disponible en línia a:
https://www.laliga.com/transparencia/gestion-economica/derechos-audiovisuales
[Consultat el 10/11/22]

[20] Palco23: LaLiga genera 1.930 millones de euros por derechos televisivos en la temporada 2021-2022.
Disponible en línia a:
https://www.palco23.com/competiciones/ laliga-genera-
1930-millones-de-euros-por-derechos-televisivos-en-la-temporada-2021-2022
[Consultat el 10/11/22]

[21] statista: Broadcasting rights revenue of selected sports leagues worldwide in 2019.
Disponible en línia a:
https://www.statista.com/statistics/1120170/broadcasting-rights-sports-by-league/
[Consultat el 12/09/22]

[22] statista: Seating capacity of soccer stadiums hosting the highest professional men’s league in Spain in the 2021/2022 season.

Disponible en línia a:
https://www.statista.com/statistics/781889/
football-stadiums-in-spain-s-first-division-based-on-seating-capacity/
[Consultat el 10/11/22]