Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Teoría de juegos. Juegos no cooperativos.

Autor: María Espinar Fernández

Director: Dr. Josep Vives

Realitzat a: Departament: Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 24 de enero de 2023

2020 Mathematics Subject Classification. 91A05, 91A10, 91A11

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría agradecer a mi tutor, el Dr. Josep Vives por su paciencia, consejos y ayuda durante las reuniones que mantuvimos a lo largo del semestre. Gracias por todas las correcciones, el tiempo dedicado a este trabajo y la oportunidad de descubrir y entender la teoría de juegos.

También me gustaría dar las gracias a mis padres y a mi hermana por su apoyo y confianza durante los últimos años.

Por último, estoy inmensamente agradecida a todos los amigos y amigas que me han acompañado en esta etapa de mi vida.

Motivación

Antes de empezar este semestre, mi tutor me recomendó leer el libro [4], en el que se explica la teoría de juegos de una manera entretenida y dinámica, dándole mucho énfasis a situaciones cotidianas de la vida.

Este libro me hizo ver, aún más, lo camufladas que están las matemáticas en la vida real, y la importancia de la teoría de juegos en el comportamiento animal y humano. Por ello quise aprender más sobre el tema.

Índice

1. Introducción **4**

1.1. Breve historia de la Teoría de Juegos 4

1.2. Terminilogía básica 5

2. Funciones de utilidad **6**

3. Juegos estratégicos **10**

3.1. Introducción de los juegos estratégicos 10

3.2. Equilibrio de Nash en juegos estratégicos 10

3.3. Estrategias mixtas en juegos finitos 16

3.3.1. Equilibrio de Nash con estratégias mixtas 18

4. Juegos extensivos **22**

4.1. Introducción de los juegos extensivos 22

4.2. Estrategias en los juegos extensivos 25

4.3. Equilibrio de Nash en los juegos extensivos 26

5. Aplicación en el mundo real **33**

5.1. Monopolio 33

5.2. El duopolio de Cournot 36

5.2.1. Contexto 36

5.2.2. Representación del juego 36

5.2.3. Equlibrio Cournot-Nash 37

5.2.4. Función de mejor respuesta (BR). Caracterización del equilibrio . . 37

5.2.5. Ejemplo 38

5.3. El duopolio de Bertrand 40

5.3.1. Contexto 40

5.3.2. Demanda residual 40

5.3.3. Representación del juego en forma estratégica. Noción de equilibrio 40

5.3.4. Paradoja de Bertrand. Caracterización del equilibrio y unicidad . . 41

5.3.5. Ejemplo 44

5.4. El concejal y la inspectora 49

1. Introducción

1.1. Breve historia de la Teoría de Juegos

El nacimiento de la teoría de juegos como disciplina se considera que ocurrió en 1944 con la publicación de *Game Theory and Economic Behavior* de Von Neumann y Morgenstern, aunque existen trabajos anteriores como los de Zermelo (1913), Borel (1921) y del propio Von Neumann (1928), en los que ya se anticipaba parte de las bases de la Teoría de Juegos.

Von Neumann y Morgensten establecen las pautas de lo que ahora se conoce como Teoría de Juegos clásica, proporcionando una solución para juegos de suma cero (los jugadores ganan lo que los otros pierden) y estableciendo los fundamentos para el análisis de juegos con más de dos jugadores. Alrededor de los años cincuenta, Nash aporta algunos de los conceptos más importantes, como el equilibrio de Nash, para un abanico más amplio de juegos (no sólo para aquellos que modelizan el conflicto puro).

Aunque existen algunas polémicas sobre los fundamentos, sus métodos y conceptos se aplican con éxito a otros campos aparte de la economía, como la biología, la sociología y la ciencia política.

La teoría de juegos se desarrolla con el simple hecho de contemplar las relaciones entre los individuos.

En esta teoría se estudia cuál sería la conducta óptima elegida por un individuo cuando el coste y el beneficio de cada una de las opciones no viene dado, sino que dependerá de las elecciones que a su vez hagan otros individuos.

Existen diferentes tipos de juegos:

- Cooperativos (jugadores toman decisiones para el beneficio conjunto) o no cooperativos (jugadores toman decisiones independientemente para su beneficio personal).
- De suma cero (las ganancias de un jugador se equilibran con las pérdidas del otro) o suma distinta de cero.
- De información perfecta (todos los individous conocen toda la información suya como la de los demás) o imperfecta (hay información oculta).
- Con estrategias puras (probabilidad de que un jugador elija cierta opción con probabilidad 1) o mixtas (la elección viene dada por una distribución de probabilidad sobre el conjunto de sus estrategias).

Veamos ciertos casos reales:

- No cooperativo: el dilema del prisionero (lo veremos detallado más adelante).
- De suma cero: póker.
- Información perfecta: tres en línea o ajedrez.

Durante el trabajo nos vamos a centrar en la Teoría de juegos para juegos no cooperativos.

1.2. Terminilogía básica

Jugadores
Son los participantes en el juego que toman decisiones con el fin de maximizar su utilidad. Son dos o más.

Acciones de cada jugador
Son las decisiones que puede tomar cada jugador en cada momento en que le toque jugar.

Resultados del juego
Son los distintos modos en que puede concluir un juego.

Pagos
Cada jugador recibe un pago al acabar el juego, que depende de cuál haya sido el resultado. El significado de dicho pago es la utilidad que cada jugador atribuye a dicho resultado, es decir, el valor que para el jugador tiene un determinado resultado en el juego.

Estrategias
Una estrategia de un jugador es un plan completo de acciones con las que éste podría proponerse participar en dicho juego.

2. Funciones de utilidad

Las funciones de utilidad nos muestran cuáles son las preferencias de los jugadores, de manera cuantitativa, respecto de los posibles resultados que pueda tener un juego [2].

Sea A un conjunto de alternativas posibles, mutuamente excluyentes, entre las que debe elegir un jugador. En A suponemos definida una relación $\succsim$, llamada relación de preferencia, de manera que, para $x,\ y \in X$, $x \succsim y$ quiere decir que la alternativa x es preferida o indiferente a la alternativa y.

A partir de esta relación se derivan otras dos:

1. La relación de preferencia estricta, $\succ$:

$$x \succ y \Longleftrightarrow x \succsim y \text{ pero no } y \succsim x,$$

que se lee x es preferido a y.

2. La relación de indiferencia, $\backsim$:

$$x \backsim y \Longleftrightarrow x \succsim y \text{ y también } y \succsim x,$$

que se lee x es indiferente a y.

Definición 1. *Sea A el conjunto de alternativas/estrategias. A es un conjunto finito y tiene dimensión m. Llamaremos L al conjunto de loterías sobre A. Matemáticamente tenemos:*

$$L := \{x \in [0,1]^A : x(a) \in [0,1] \ \ \forall a \in A, \sum_{a \in A} x(a) = 1\}, \tag{1}$$

donde $[0,1]^A \equiv$ son las aplicaciones de A a $[0,1]$.

Esto nos dice que L es el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre A finitas.

Definición 2. *A la pareja $(A, \succsim)$ la llamaremos juego. Definimos A como $A := A_1 \times \cdots \times A_n$, ya que hay $N := \{1, ..., n\}$ jugadores.*

[2] Este capítulo podemos verlo más en profundidad siguiendo los libros [1] y [2].

Definición 3. *Sea* $(A, \succsim)$ *un juego. Una función* $u : A \to \mathbb{R}$ *es una función de utilidad que representa la relación de preferencia* $\succsim$ *, si para todo* $a, b \in A$ *,* $a \succsim b \iff u(a) \geq u(b)$*.*

Definición 4. *Dado un juego estratégico* $G = (A, u)$*. Decimos que* G *es un* ***juego finito*** *si, por cada* $i \in N, |A_i| < \infty$*.*

Definición 5. ***Utilidad de von Neumann-Morgenstern.***
Sea $(L, \succsim)$ *un problema de decisión. Una función* $u : A \to \mathbb{R}$ *es una* ***función de utilidad de von Neumann-Morgenstern*** *si, para cada par* $x, y \in L$*,*

$$x \succsim y \iff \sum_{a \in A} u(a)x(a) \geq \sum_{a \in A} u(a)y(a). \tag{2}$$

Proposición 1. *Sea* $(L,\succsim)$ *un problema de decisión. Entonces existe una función de utilidad de von Neumann-Morgenstern representada por* $\succsim$ *si y sólo si hay una función de utilidad lineal representada por* $\succsim$*.*

Demostración
Suponemos que u es una función de utilidad von Neumann-Morgenstern representada por $\succsim$ que define $\bar{u} : L \to \mathbb{R}$, para cada $\bar{p} \in L$, por $\bar{u}(\bar{p}) := \sum_{a \in A} u(a)\bar{p}(a)$. Por tanto, $\bar{u}$ es una función lineal de utilidad representada por $\succsim$.

Por el contrario, sea $\bar{u}$ una función lineal de utilidad representada por $\succsim$ que define $u : A \to \mathbb{R}$, para cada $a \in A$, por $u(a) := \bar{u}(e_a)$. Puesto que cada $\bar{p} \in L$ se puede escribir como $\sum_{a \in A} \bar{p}(a)e_a$, u es una función de utilidad de von Neumann-Morgenstern representada por $\succsim$.
$\square$

Observación 1. *Para cada* $a \in A$*,* $e_a \in L$ *será la lotería definida por* $e_a(a) := 1$ *y, para cada* $\bar{a} \in A \setminus \{a\}$*,* $e_a(\bar{a}) := 0$*.*

Definición 6. ***La utilidad esperada.***
La hipótesis de la ***utilidad esperada*** *afirma que un jugador elige entre sus posibles acciones comparando los valores de utilidad esperada (es decir, la suma ponderada de sumar los respectivos valores de utilidad de los pagos multiplicados por sus probabilidades). La fórmula resumida de la utilidad esperada es*

$$U(p) = \sum u(x_k)p_k,$$

donde el índice k *nos señala cada estrategia.* p_k *es la probabilidad de que se realice la elección indicada y el resultado* x_k *es el valor de utilidad del pago, y la función* u *expresa la utilidad de cada pago respectivo.*

Definición 7. ***Función de utilidad esperada.***
Se dice que la función de utilidad $U : L \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern si existen n números $u_1, u_2, ..., u_n$ asociados respectivamente a $x_1, ..., x_n$ tales que cada lotería $\bar{p} = (p_1, p_2, ..., p_n) \in L$ se verifica que

$$U(\bar{p}) = u_1 p_1 + u_2 p_2 + \cdots + u_n p_n.$$

Observación 2. $L := L_1 \times \cdots \times Ln$.

La proposición siguiente nos da una condición necesaria y suficiente para que una función con dominio L que tome valores en $\mathbb{R}$ sea una función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern.

Proposición 2. *La función de utilidad $U : L \to \mathbb{R}$ es una* ***función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern*** $\Longleftrightarrow \forall \bar{p}_1, ..., \bar{p}_l \in L, \forall \lambda_1, ..., \lambda_l \in [0, 1]$ *, con* $\sum_{j=1}^{l} \lambda_j = 1$ *, se verifica que*

$$U(\textstyle\sum_{j=1}^{l} \lambda_j \bar{p}_j) = \sum_{j=1}^{l} U(\lambda_j \bar{p}_j)$$

Demostración
Vamos a probarlo para los dos sentidos de la implicación.

$\Longrightarrow$)

Sean

$$\bar{p}_1 = (p_1^1, p_2^1, ..., p_n^1), \bar{p}_2 = (p_1^2, p_2^2, ..., p_n^2),...,$$
$$\bar{p}_l = (p_1^l, p_2^l, ..., p_n^l) \in L \text{ y } \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l \in [0, 1], \text{ con } \textstyle\sum_{j=1}^{l} \lambda_j = 1.$$

Consideramos la lotería compuesta $(\bar{p}_1, ..., \bar{p}_l; \lambda_1, ..., \lambda_l)$, que es equivalente a la lotería simple $\bar{p} = (p_1, ..., p_n)$ en donde para cada $i = 1, 2, ..., n$ es $p_i = \lambda_1 p_i^1 + \lambda_2 p_i^2 + \cdots + \lambda_l p_i^l$. Por tanto,

$$L = \textstyle\sum_{j=1}^{l} \lambda_j p_j.$$

$\Longleftarrow$)

Sea $\bar{p} = (p_1, ..., p_n) \in L$. Podemos escribir $\bar{p}$ de esta forma:
$\bar{p} = p_1(1, 0, ..., 0) + p_2(0, 1, ..., 0) + \cdots + p_n(0, 0, ..., 1) = p_1 \bar{p}^1 + p_2 \bar{p}^2 + \cdots + p_n \bar{p}^n$.

Por tanto,

$$U(\bar{p}) = U(\textstyle\sum_{i=1}^{n} p_i \bar{p}^i) = \sum_{i=1}^{n} p_i U(\bar{p}^i) = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i \ ,$$

donde $u_i = U(\bar{p}^i)$, por lo que U es una función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern.
□

3. Juegos estratégicos

3.1. Introducción de los juegos estratégicos

En este tipo de juegos, todos los jugadores toman sus decisiones simultánea e independientemente. Están caracterizados por las estrategias de los jugadores junto a sus funciones de utilidad.

Al conjunto de jugadores del juego lo denotaremos como $N := \{1, ..., n\}$.

Definición 8. *Un juego estratégico de n jugadores es la pareja* $G := (A, u)$ *donde:*

- ***Conjuntos de estrategias:*** *Para cada* $i \in N, A_i$ *es el conjunto de estrategias del jugador* i, *y* $A := (A_1 \times \cdots \times A_n)$.
- ***Funciones de pago:*** *Para cada* $i \in N$, $u_i : A \to \mathbb{R}$ *es la función de pagos del jugador* i.

Observación 3. *Sea* $a \in A$ *y* $a = (a_1, ..., a_n)$. *En un juego* G, *cada jugador* $i \in N$ *escoge independientemente y simultáneamente una estrategia* $a_i \in A_i$. *Después, cada jugador i obtiene una recompensa* $u_i(a_1, ..., a_n)$.

Observación 4. *En un juego* G, *definiremos a la combinación de estrategias* a_{-i} *como* $a_{-i} = (a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n)$.

3.2. Equilibrio de Nash en juegos estratégicos

Para encontrar soluciones en juegos estratégicos podemos usar el concepto de equilibrio de Nash. La idea de este equilibrio es encontrar una situación en donde los individuos o jugadores no tienen ningún incentivo a cambiar su estrategia teniendo en cuenta las decisiones tomadas por sus oponentes.

Definición 9. *Dado un juego estratégico* $G = (A, u)$. *Un* ***equilibrio de Nash*** *de* G *es la estrategia* $a^* \in A$ *para la que por cada* $i \in N$ *y cada* $a'_i \in A_i$,

$$u_i(a^*) \geq u_i(a^*_{-i}, a'_i).$$

Ejemplo 1. ***El dilema del prisionero***

Es un juego no cooperativo con estrategias puras.

Trata de una situación dónde dos sospechosos de un crimen, que les llamaremos Carlos, al jugador 1 y Marta, al jugador 2. Son arrestados por la policía y, una vez en la comisaría, los dejan en dos celdas separadas. Dado que no hay pruebas concluyentes para condenarlos la policía les ofrece el mismo trato a los dos:
Pueden elegir entre 2 opciones, delatar al otro, o bien no delatarlo. Por lo tanto dentro del juego $G = (A, u)$ tenemos:

- $A_1 = A_2 = \{ND, D\}$
- $u_1(ND, ND) = 1, u_1(ND, D) = 7, u_1(D, ND) = 0, u_1(D, D) = 3$
- $u_2(ND, ND) = 1, u_2(ND, D) = 0, u_2(D, ND) = 7, u_2(D, D) = 3$

Veamos que le pasa a cada sospechoso según la opción que escoja:

Podemos ver claramente que si Carlos no delata (ND), la mejor opción de Marta sería delatar, por tanto tenemos $D \succ ND$. De la misma manera, si Carlos delata, delatar seguiria siendo la mejor opción de Marta, $D \succ ND$. Análogamente el razonamiento inverso.

Si observamos este dilema desde un punto cooperativo, lo que beneficiaria a los dos sería comportarse haciendo caso a los sentimientos y optar por no delatar al otro, de dicha manera los dos tendrían que pasar tan solo un año en prisión.

Sin embargo, si maximizamos su beneficio individualmente la situación cambia, ya que los dos están separados y no pueden saber lo que el otro ha respondido. Por tanto la mejor solución individual sería culpar al otro, ya que cada uno persigue su propio interés.

A este equilibrio $a^* = (D, D) \cong (3, 3)$ se le llama ***equilibrio de Nash****.*

Figura 1. *Dilema del prisionero*

Jugador 1: Carlos \ Jugador 2: Marta	ND	D
ND	1, 1	7, 0
D	0, 7	3, 3

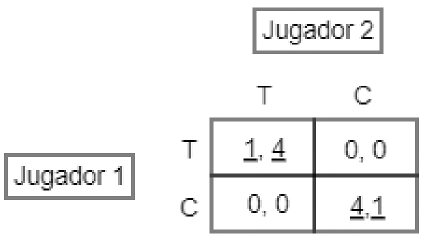
Ejemplo 2. ***Batalla de sexos***

En este caso nos encontramos una situación dónde una pareja quiere ponerse de acuerdo en el plan para el fin de semana. Un miembro de la pareja (jugador1*) prefiere ir al cine antes que al teatro y el otro miembro de la pareja (jugador*2*) al revés. En todo caso, a los dos miembros de la pareja les compensa más hacer un plan conjunto que por separado. Por lo tanto tendríamos una situación del tipo siguiente: Juego* $G = (A, u)$ *con*

- $A_1 = A_2 = \{T, C\}$
- $u_1(C, C) = 4, u_1(C, T) = 0, u_1(T, C) = 0, u_1(T, T) = 1$
- $u_2(C, C) = 1, u_2(C, T) = 0, u_2(T, C) = 0, u_2(T, T) = 4$

Veámos la matriz del juego:

Figura 2. *Batalla de sexos*



Podemos ver que el método del equilibrio de Nash a veces no nos da un resultado único sino múltiple, ya que tanto la estrategia $a^* = (C, C) \cong (1, 4)$ *como la estrategia* $a' = (T, T) \cong (4, 1)$ *son equilibrios de Nash para este juego* G*.*

Ejemplo 3. ***Matching pennies***

Los jugadores 1 y 2 escogen, simultánea e independientemente, un número natural. Si la suma de los números escogidos es par (E), el jugador 1 gana; en cambio si la suma de los números es impar (O), gana el jugador 2.

Figura 3. *The matching pennies*

	E	O
E	1, -1	-1, 1
O	-1, 1	1, -1

Este juego no tiene ningún equilibrio de Nash ya que no hay ninguna estrategia pura que domine por encima de las demás.

Ahora vamos a presentar el Teorema de Nash, que nos da una condición suficiente para la existencia de un equilibrio de Nash en juegos estratégicos.

Antes de ello tenemos que definir unos conceptos básicos.

Definición 10. *Al conjunto de partes de Y lo llamaremos 2^Y.*

Definición 11. *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ y $Y \subset \mathbb{R}^m$. Una* ***correspondencia F*** *de X a Y es una aplicación $F : X \to 2^Y$. Una correspondencia es no nula, cerrada o convexa si, para cada $x \in X, F(x)$ es, respectivamente, un subconjunto de Y no nulo, cerrado, o convexo.*

Ahora vemos la definición para la continuidad de una correspondencia, aunque primero necesitamos enunciar la definición de una función continua.

Definición 12. *Una función $f : X \to Y$ es* **continua** *si, para cada secuencia $x_k \subset X$ que converge a $x' \in X$, y cada conjunto abierto $Y^* \subset Y$ tal que $f(x') \in Y^*$, hay un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $k \geq k_0, f(x_k) \in Y^*$.*

Definición 13. *Una correspondencia F es* **semicontinua superior** [3] *si, para cada secuencia $x_k \subset X$ que converge a $x' \in X$, y cada conjunto abierto $Y^* \subset Y$ tal que $f(x') \in Y^*$, hay un $k_0 \in \mathbb{N}$ que para cada $k \geq k_0, f(x_k) \cap Y^* \neq \varnothing$.*

Definición 14. *En este contexto, la* **casi-concavidad** [4] *de la función $u_i(a_{-i}, \cdot)$ puede expresarse de la siguiente manera: siempre que todos los jugadores distintos del jugador i estén jugando según a_{-i}, tenemos que, para cada $k \in \mathbb{R}$, si dos estrategias dan al menos una recompensa k al jugador i, entonces también lo hace cualquier combinación convexa de ellas.*

[3] Gracias al libro [2].
[4] Recogida del libro [2].

Teorema 1. ***Punto fijo de Brouwer.***
Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, convexo y compacto. Y sea $f : X \to X$ una función contínua. Entonces, existe un $\bar{x} \in X$ tal que $f(\bar{x} = \bar{x}$, es decir, f tiene un punto fijo.

Demostración.
La podemos seguir en el libro [2], páginas 89-90.

Teorema 2. ***Punto fijo de Kakutani.***
Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, convexo y compacto. Y sea $F : X \to X$ una correspondencia, semicontinua superior, cerrada y convexa. Entonces, existe un $x' \in X$ tal que $x' \in F(x')$, es decir, F tiene un punto fijo.

Demostración
Vamos a dividir esta demostración en dos casos.

Caso 1: Sean $k \in \mathbb{N}$, y sea I un conjunto tal que $|I| = k + 1$, y $\{x^i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}^n$ puntos afines independientes tal que X coincide con $\text{conv}(\{x^i\}_{i\in I})$. Sea $\{S^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una secuencia de disecciones de X tales que $\{d_{S_m}\} \to 0$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos la función $\eth^m : X \to X$ de la siguiente manera. Si $x \in V(S^m)$, tomando $y \in F(x)$ tenemos $\eth^m(x) := y$. Entonces, para cada $x \in X$, existe una $S = \text{conv}(\{x^i_S\}_{i\in I}) \in S^m$ tal que $x \in S$. Por lo tanto, $x = \sum_{i\in I} \alpha_i x^i_S$, donde $\sum_{i\in I} \alpha_i = 1$ y, para cada $i \in I$, $\alpha \geq 0$. Sea $\eth^m(x) := \sum_{i\in I} \alpha_i \eth^m(x^i_S)$. Todas las funciones $\eth^m$ son lineales por partes y, por tanto, continuas. Por el *teorema del punto fijo de Brouwer*, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe un x^m tal que $\eth^m(x^m) = x^m$. Entonces, para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $\{x^i_m\}_{i\in I}$ los puntos extremos del símplex [5] de S^m que contiene a x^m. Entonces, $x^m = \sum_{i\in I} \alpha^m_i x^i_m$, donde $\sum_{i\in I} \alpha^m_i = 1$ y, para cada $i \in I$, $\alpha \geq 0$.

Llegados a este punto podemos usar subsucesiones si fuese necesario. Podemos suponer que, para cada $i \in I$, $\{\alpha^m_i\}_{m\in\mathbb{N}} \to \bar{\alpha}_i$ y $\{\eth^m(x^i_m)\}_{m\in\mathbb{N}} \to \bar{y}^i$. Ahora, $\sum_{i\in I} \bar{\alpha}_i = 1$ y, para cada $i \in I$, $\bar{\alpha}_i \geq 0$. Además, podemos suponer también que las sucesiones $\{x^i_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ y $\{x^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ son convergentes y, en $\{d_{S^m}\} \to 0$, todos los limites coinciden. Sea $\bar{x} \in X$ el límite común.

Afirmamos que, para cada $i \in I$, $\bar{y}^i \in F(\bar{x})$. Suponemos que hay $i \in I$ tal que $\bar{y}^i \notin F(\bar{x})$. Entonces, siendo $F(\bar{x})$ cerrado, hay conjuntos abiertos B_1 y B_2 en X tal que $\bar{y}^i \in B_1$, $F(\bar{x}) \subset B_2$, y $B1 \cap B_2 = \emptyset$ (recordemos que estamos en un espacio Hausdorff). Dado que F es semicontinua superior y $\{x^i_m\}_{m\in\mathbb{N}} \to \bar{x}$, hay un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $k \geq k_0$, $\eth^k(x^i_k) \in B_2$. De la misma manera, dado $\{\eth^m(x^i_m)\}_{m\in\mathbb{N}} \to \bar{y}^i$, hay un $\hat{k}_0 \in \mathbb{N}$, tal que, para cada $k \geq \hat{k}_0$, $\eth^k(x^i_k) \in B_1$.
Las dos últimas características de $\{\eth^m(x^i_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ contradicen la propiedad $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Por lo tanto, para cada $i \in I$, $\bar{y}^i \in F(\bar{x})$.

[5] Un símplex es la envoltura convexa de un conjunto de (n+1) puntos independientes afines en un espacio euclídeo de dimensión n o mayor.

Finalmente, para cada $m \in \mathbb{N}$, $x^m = \eth^m(x^m) = \sum_{i \in I} \alpha_i^m \eth^m(x_m^i)$. Pasando al límite obtenemos $\bar{x} = \sum_{i \in I} \bar{\alpha}_i \bar{y}^i$. Por tanto, $\bar{x} \in conv(F(\bar{x}))$. Por lo tanto, dado que F es valuada convexa, $\bar{x} \in F(\bar{x})$.

Caso 2: $X \subset \mathbb{R}^m$ es un conjunto no vacío, convexo y compacto. Sea λ la función auxiliar definida como $\lambda(x) := max\{\lambda \in [0,1] : (1-\lambda)\tilde{x} + \lambda x \in X\}$ y la extensión de F definida como $\tilde{F} := F((1-\lambda(x))\tilde{x} + \lambda(x)x)$. Entonces, por definición, $\tilde{F}$ es convexa, cerrada y no vacía. Además, como es la composición de una función continua y una correspondencia semicontinua superior, también es semocontinua superior. Por tanto, podemos aplicar el **Caso 1** a F.
□

Definición 15. *Sea G=(A, u) un juego estratégico tal que, para cada $i \in \mathbb{N}$:*

1. *Hay un $m_i \in \mathbb{N}$ tal que A_i es un subconjunto compacto y no vacío de $\mathbb{R}^{m_i}$.*

2. *u_i es continua.*

Entonces, para cada $i \in N$, la mejor correspondencia de respuesta para i es $BR_i : A_{-i} \to A_i$, que es definida, por cada $a_{-i} \in A_{-i}$ por:

$$BR_i(a_{-i}) := \{a_i \in A_i : u_i(a_{-i}, a_i) = \max_{\tilde{a}_i \in A_i} u_i(a_{-i}, \tilde{a}_i)\}. \tag{3}$$

Proposición 3. *Sea G=(A, u) un juego estratégico tal que, para cada $i \in \mathbb{N}$,*

1. *A_i es un subconjunto no vacío y compacto de $\mathbb{R}^{m_i}$.*

2. *u_i es continua.*

3. *Para cada $a_{-i}, u_i(a_{-i}, \cdot)$ es casi-cóncava en A_i.*

Entonces, para cada $i \in \mathbb{N}$, BR_i es una correspondencia superiormente semicontinua, no vacía, cerrada y cóncava. Por lo tanto, BR satisface también las propiedades anteriores.

Teorema 3. ***Teorema de Nash.***
Sea $G = (A, u)$ un juego estratégico tal que, para cada $i \in \mathbb{N}$,

1. *A_i es un subconjunto no vacío, convexo y compacto de $\mathbb{R}^{m_i}$.*

2. *u_i es continua.*

3. Para cada $a_{-i}, u_i(a_{-i}, \cdot)$ es casi-cóncava en A_i.

Entonces, el juego G tiene almenos un equilibrio de Nash.

Demostración

Si a es un punto fijo de la correspondencia $BR : A \to A$, entonces a es un equilibrio de Nash de G. Por la proposición anterior, BR satisface las condiciones del teorema de Kakutani. Por lo tanto, BR tiene un punto fijo.
□

3.3. Estrategias mixtas en juegos finitos

Las estrategias mixtas son una generalización de las estrategias puras. Se usan para poder describir una selección aleatoria de las posibles estrategias puras que tiene cada jugador. Las estrategias de cada jugador quedan determinadas por una distribución de probabilidad.

Para el ejemplo que pondremos a continuación vamos a tener en cuenta la función de utilidad de von Neumann-Morgenstern definida anteriormente.

Ejemplo 4. *Consideramos el juego de matching pennies (Ejemplo 3). En este caso los jugadores aparte de poder escoger par (E) o impar (O) también pueden escoger una lotería (L) que consta en elegir (E) con una probabilidad de 1/2 , o bien elegir (O) con una probabilidad de 1/2, como si lanzásemos una moneda al aire para escoger. Tenemos que tener en cuenta que los jugadores usan funciones de utilidad de von Neumann-Morgenstern, es decir, sus funciones de pago pueden extenderse al conjunto de perfiles de estrategias mixtas calculando la esperanza matemática.*

Vamos a representar el nuevo juego.

Figura 4. *Matching pennies con lanzamiento de moneda.*

	E	O	L
E	1, -1	-1, 1	0, 0
O	-1, 1	1, -1	0, 0
L	0, 0	0, 0	0, 0

En comparación al Ejemplo 3 vemos que las funciones de pago se han ampliado, teniendo en cuenta que los jugadores eligen sus loterías de forma independiente ya que estamos en un juego estratégico. Por ejemplo:

$$u_1(L,L) = \frac{1}{4}u_1(E,E)+\frac{1}{4}u_1(E,O)+\frac{1}{4}u_1(O,E)+\frac{1}{4}u_1(O,O) = \frac{1}{4}(+1-1-1+1) = 0. \quad (4)$$

Podemos ver que en este caso el equilibrio de Nash es (L,L). Una posible interpretación para esto puede ser la siguiente. En el juego de los matching pennies, en el caso de escoger (L), es muy importante tener en cuenta que ninguno de los dos jugadores tiene información sobre cuál va a ser su decisión final, si (E) o (O). Por este motivo sería óptimo para cada jugador si el propio jugador no sabe cuál va a ser su decisión final: este razonamiento justifica la lotería (L).

Definición 16. *Sea G=(A, u) un juego finito. La* ***extensión mixta*** *de G es el juego estratégico $E(G) := (S, u)$, los elementos del cuál son los siguientes:*

1. ***Conjuntos de estratégias (mixtas):*** *Para cada $i \in N$, $S_i := L_i$ y $S := \prod_{i\in\mathbb{N}} S_i$. Para cada $s \in S$ i para cada $a \in A$ tenemos $s(a) := s_1(a) \cdots s_n(a)$.*

2. ***Funciones de pago:*** *Para cada $s \in S$, $u_i(s) := \sum_{a\in A} u_i(a)s(a)$ y $u := \prod_{i=1}^{n} u_i$.*

Observación 5. *La ampliación/extensión mixta de un juego finito sólo tiene sentido si los jugadores tienen preferencias sobre el conjunto de loterias de $\mathbb{R}$ (el conjunto de posibles resultados) y sus funciones de utilidad son de von Neumann-Morgenstern.*

Observación 6. *E(G) es de hecho una extensión de G, en el sentido que, para cada jugador $i \in N$, cada elemento de A_i (de una estratégia pura) puede ser identificado únicamente con un elemento de S_i (de la estratégia mixta). Por lo tanto, podemos escribir $A_i \subset S_i$. Por el mismo motivo, las funciones de utilidad en E(G) son extensiones de las funciones de utilidad en G.*

Observación 7. *Sea $m_i := |A_i|$. Entonces, para cada $i \in N$, se puede identificar con $\mathbb{R}^{m_i}$ dado por:*

$$\{s_i \in \mathbb{R}^{m_i} : \sum_{k=1}^{m_i} s_{i,k} = 1, \;\; s_{i,k} \geq 0, \;\; k \in \{1, ..., m_i\}\}. \quad (5)$$

Notamos que la extensión mixta de un juego finito satisface las condiciones del Teorema de Nash. Por lo tanto toda extensión mixta de un juego finito tiene, como mínimo, un equilibrio de Nash.

Teorema 4. *Sea $G = (A, u)$ un juego estratégico finito. Entonces, la extensión mixta del juego G tiene, al menos, un equilibrio de Nash.*

Demostración
Inmediato siguiendo el teorema de Nash.
□

3.3.1. Equilibrio de Nash con estratégias mixtas

En este caso, encontrar equilibrios de Nash se hace un tanto más difícil. Por ello vamos a ver distintas maneras de encontrar equilibrios de Nash para estratégias mixtas. [6]

Maximin / Minimax

En general, en los juegos no cooperativos, de dos jugadores, con información perfecta y de suma cero, podemos considerar el principio Minimax o Maximin creado por John von Neumann.
Este principio nos viene a decir:

- **Maximin:** maximización del mínimo pago posible. Se parte de la base de que sólo puede ocurrir lo peor, por lo tanto, se intenta obtener lo mejor de las peores condiciones.

- **Minimax:** minimización del 'remordimiento' posible (lo que podría haberse ganado si se hubiera optado por otra estrategia). Se denomina como pérdida de oportunidad pues se reconoce que se toma una decisión que no necesariamente es la mejor. No obstante, la mejor decisión es aquella en la que se produce el menor coste de oportunidad.

Nosotros trabajaremos con el concepto Maximin.

Por lo tanto, estamos hablando de:

$$v_1 = max_x min_y U_1(x, y) \qquad y \qquad v_2 = max_y min_x U_2(x, y) \ ,$$

donde U_1 y U_2 son las utilidades esperadas.

[6] Idea cogida de [3].

La solución Maximin (x^*, y^*) vendrá de resolver las dos ecuaciones citadas previamente.

Consideramos el juego de **la batalla de los sexos.**
Dada su matriz de juego Fig. 2, vamos a encontrar la solución Maximin para el jugador 1. Estamos asumiendo un juego de suma-zero, por lo tanto tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Suponemos que la probabilidad con la que el jugador 1 escoge ir al cine es de x, mientras que la probabilidad de ir al teatro es $(1 - x)$. Teniendo en cuenta que el jugador 2 tiene probabilidad y de ir al cine y probabilidad $(1 - y)$ de ir al teatro, tenemos:

$$\begin{aligned} U_1 = 1xy + 0x(1-y) + 0(1-x)y + 4(1-x)(1-y) = 5xy - 4x - 4y + 4 \rightarrow \\ \rightarrow max_X min_Y (5xy - 4x - 4y + 4) = \frac{4}{5}. \end{aligned} \tag{7}$$

Por lo tanto, la utilidad esperada de que el jugador 1 vaya al cine será $v_1 = \frac{4}{5}$ y de que vaya al teatro $1 - v_1 = (1 - \frac{4}{5}) = \frac{1}{5}$, así que tenemos $x^* = (\frac{4}{5}, \frac{1}{5})$.
Análogamente encontramos la utilidad esperada del jugador 2, $y^* = (\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$, con $v_2 = \frac{4}{5}$.
Esto también nos dice que $\frac{16}{25}$ de las veces el resultado va a ser (0,0), es decir, no se van a poner de acuerdo.
Tenemos dos situaciones de equilibrio claras que son: (C,C) y (T,T).

El método esvástica

Asumimos como estrategias generales (x,1-x) y (y,1-y) para los jugadores 1 y 2 respectivamente. Una situación de equilibrio es admisible para todos los jugadores.
Vamos a calcular por separado estas situaciones para cada jugador y después las intersecaremos.

En primer lugar, nos centraremos en el jugador 1. Para cada estratégia y, tenemos que calcular la mejor respuesta que se corresponde a $max_x U_1(x, y)$. Consideramos la matriz de la batalla de los sexos 2. Empezamos con H_1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Teniendo encuenta las estrategias generales descritas anteriormente tenemos

$$U_1 = x(5y - 4) - 4 + 4.$$

La parte de esta ecuación que el jugador 1 puede alterar es la parte que depende de x. El máximo de la expresión anterior, suponiendo que sea lineal en x, es cuándo x=0 o bien

x=1. Por otro lado, podemos tener en cuenta también la opción de que, el concepto lineal, desaparezca.
Juntándolo todo tenemos que para maximizar U_1:

- Si $y < \frac{4}{5}, \quad x = 0.$
- Si $y = \frac{4}{5}, \quad x \in [0, 1].$
- Si $y > \frac{4}{5}, \quad x = 1.$

Vamos a hacer ahora el mismo procedimiento para el jugador 2. Su matriz en este caso seria:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Las estrategias seguidas son las mismas, (x,1-x) y (y,1-y). Tendremos entonces:

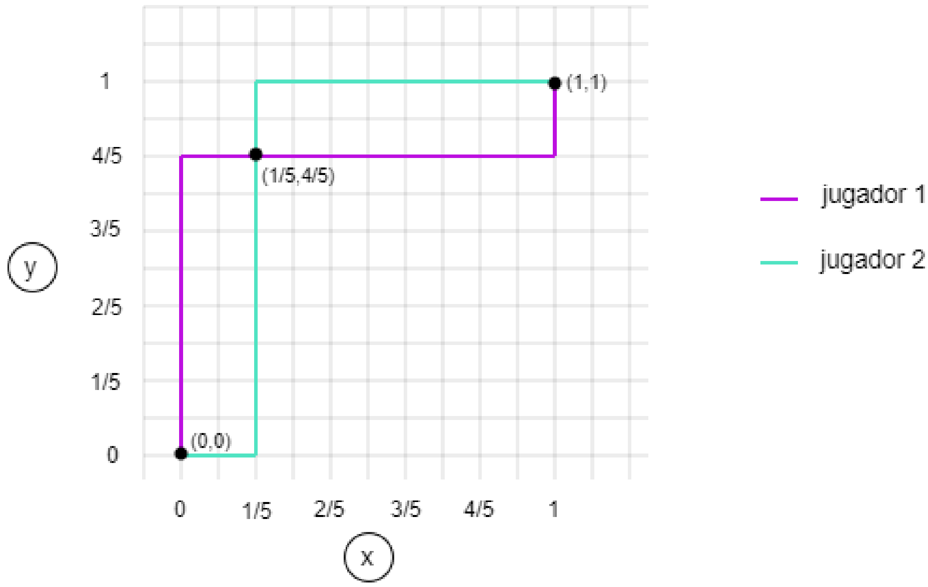
$$U_2 = y(5x - 1) - x + 1.$$

Usando el mismo razonamiento que antes, vemos que para maximizar U_2:

- Si $y < \frac{1}{5}, \quad y = 0.$
- Si $y = \frac{1}{5}, \quad y \in [0, 1].$
- Si $y > \frac{1}{5}, \quad y = 1.$

Uniendo todas estas desigualdades obtenemos el siguiente gráfico:

Figura 5. *Método de esvástica para la batalla de los sexos.*



Podemos ver claramente la tres situaciones de equilibrio que hay:

$$\begin{array}{lll} (x^*, y^*) = ((0,1),(0,1)). & \text{Entonces} \quad U_1(x^*, y^*) = 4 & \text{y} \quad U_2 = (x^*, y^*) = 1. \\ (x^*, y^*) = ((1,0),(1,0)). & \text{Entonces} \quad U_1(x^*, y^*) = 1 & \text{y} \quad U_2 = (x^*, y^*) = 4. \\ (x^*, y^*) = ((\frac{1}{5}, \frac{4}{5}),(\frac{4}{5}, \frac{1}{5})). & \text{Entonces} \quad U_1(x^*, y^*) = \frac{4}{5} & \text{y} \quad U_2 = (x^*, y^*) = \frac{4}{5}. \end{array}$$

Para empezar, es necesario remarcar que los equilibrios de Nash tienen distintos beneficios para los jugadores, cosa que nos enseña que el concepto unitario del valor de un juego no tiene sentido, en general, para los juegos no cooperativos.
Ahora nos podriamos preguntar por la generalización de este método. La búsqueda de algoritmos para lograrlo es un tema muy estudiado actualmente del que, por ahora, nadie ha encontrado una solución.

4. Juegos extensivos

4.1. Introducción de los juegos extensivos

Los juegos representados de forma extensiva nos permiten valorar aspectos como el orden de los movimientos, las diferentes decisiones en cada punto de decisión, la información (que puede ser imperfecta) que el jugador tiene de sus oponentes y los pagos de cada jugador al terminar el juego.
Este tipo de representación nos vendrá muy bien para los juegos secuenciales.

Definición 17. *Un juego extensivo de n-jugadores es un juego* $\Gamma := (X, E, P, W, C, p, U)$ *los elementos del cual son los siguientes* [7]*:*

- ***El árbol del juego:*** *(X,E) es un árbol finito. Hay un conjunto finito de nodos y* $E \subset X \times X$ *es un conjunto finito de aristas que satisface:*

  1. *hay un único nodo raíz* r*, es decir, un único nodo* r *sin ningún* $x \in X$ *tal que* $(x, r) \in E$.

  2. *para cada* $x \in X \setminus \{r\}$ *hay un único camino que conecta* r *con* x*, dónde u camino es una secuencia de aristas consecutivas.*

- ***Partición del jugador:*** $P := \{P_0, ..., P_n\}$ *es una partición de* $X \setminus Z$ *(donde* Z *es el conjunto de posibles escenarios finales del juego) que indica, para cada nodo x, que jugador tiene que tomar una decisión en x.*

- ***La información de la partición:*** $W := \{W_1, ..., W_n\}$*, y para cada* $i \in N$*,* W_i *es una partición de* P_i*. Cada* $w \in W_i$ *contiene los nodos de* P_i *en el que el jugador i tiene la misma información de lo que ha pasado en el juego hasta el momento.*

- ***La partición de elección:*** *C es una partición del conjunto de aristas que empiezan en los nodos fuera de* P_0*. Para cada* $w \in W_i$*, sea* C_w *el conjunto de todas las decisiones de w.*

- ***Asignación probabilística:*** *p asigna para cada* $x \in P_0$*, una distribución de probabilidad* p_x*, definida por el conjunto de aristas que empiezan en x.*

- ***Utilidades:*** $U := (U_1, ..., U_n)$ *son las funciones de utilidad de los jugadores, definidas en Z. Asumimos que cada jugador* $i \in N$ *tiene preferencias en Z y las preferencias están representadas por la función de utilidad* U_i*. En general asumimos que estas funciones de utilidad son de von Neumann-Morgenstern.*

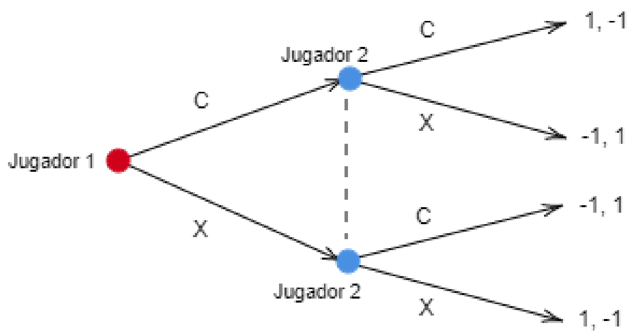
[7] Libro [2].

Ejemplo 5. ***El juego de las monedas***

Tenemos dos jugadores (1 y 2) que dipositan una moneda de manera simultánea sobre una mesa. Si coinciden en el resultado, dos cara o bien dos cruces, el jugador 1 recoge los 2 euros; mientras que si el resultado es cara y cruz, el jugador 2 es el que se lleva los dos euros. Este juego tiene el mismo tipo de razonamiento y manera de ejecutarlo que el de los matching pennies con loterias, Ejemplo 4.

Veámos la representación de este juego de forma extensiva (o de árbol).

Figura 6. *El juego de las monedas*



Los dos nodos correspondientes al jugador 2 están unidos mediante un segmento de recta discontinua, se debe a que estos dos nodos forman un conjunto de información ya que dicho jugador no sabe en cuál de los dos se encuentra.

Vamos a ver ahora un ejemplo de juego secuencial.

Ejemplo 6. ***El juego de los piratas***

Hay 5 piratas A,B,C,D,E que encuentran 100 monedas de oro y tienen que decidir como distribuirlas. Los piratas tienen un rango de A-E, siendo A el de más alto rango y E el de menor.

Las reglas de distribución són las siguientes: el pirata de más alto rango propone una distribución y se vota, si es aceptada se distribuyen las monedas y el juego termina; en cambio, si es rechazada, se tira al pirata que ha hecho esa distribución por la borda. En caso de empate en la votación, el voto del proponente vale por dos.

Los piratas basan sus decisiones en 3 factores:

1. *cada pirata quiere sobrevivir.*

2. *cada pirata quiere maximizar el número de monedas que recibe.*

3. *cada pirata preferiría echar al otro por la borda, si todos los demás resultados fueran iguales.*

Los piratas no confían entre sí por tanto no hacen alianzas, es un juego no cooperativo.

La intuición nos dice que el pirata A destinará muy pocas monedas para él por miedo a que lo tiren por la borda. Con la teórica de la teoria de juegos vemos que no.

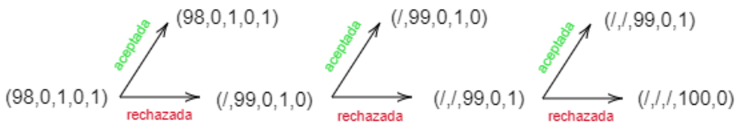
Tenemos que trabajar de atrás para adelante: si todos excepto D y E han sido echados por la borda, D planteará una distribución de 100 para D y 0 para E ya que el voto de D vale por dos.
Si estuvieran (C, D y E) , C sabe que D le ofrecerá 0 a E en la próxima ronda, por lo tanto lo único que tiene que hacer es ofrecerle 1 moneda a E y 0 a D, por lo tanto la propuesta quedará: C:99, D:0, E:1.
Si estuvieran (B, C, D y E), para no ser echado por la borda puede simplemente ofrecer 1 moneda a D para tener su apoyo, por lo tanto B:99, C:0, D:1, E:0.
Para finalizar, si A sabe todas estas cosas, puede contar con el apoyo de C y E, así que su propuesta será:

A:98 , B:0 , C:1, D:0 , E:1

y este es el resultado final.

Vemos cúal sería en este caso el diagrama de forma extensiva.

Figura 7. *El juego de los piratas*



4.2. Estrategias en los juegos extensivos

Definiremos las estrategias de los jugadores para los juegos extensivos. Primero definiremos las estrategias puras y después introduciremos el concepto de comportamiento estratégico.

Definición 18. *Sea Γ un juego extensivo y $i \in N$. Una* ***estrategia pura*** *a_i del jugador i es una aplicación que asigna, para cada $w \in W_i$, una elección $a_i(w) \in C_w$. Un perfil de estrategias puras de un juego extensivo es un conjunto de n estrategias puras, una para cada jugador. Llamamos a A_i al conjunto de estrategias puras del jugador i y A a los perfiles de conjunto de las estrategias puras.*

Definición 19. *Sea Γ un juego extensivo y $i \in N$. Un* ***comportamiento estratégico*** *b_i del jugador i es una aplicación que asigna, para cada $w \in W_i$, una lotería sobre C_w. Para cada $w \in W_i$ y cada $c \in C_w$, $b_i(c)$ es la probabilidad que el jugagor i asigna a la elección c cuando está en el conjunto de información w. Las loterías de los diferentes conjuntos de información de un jugador son independientes entre ellas. Denotaremos con B_i al conjunto de comportamientos estratégicos del jugador i y con B al conjunto de perfiles de comportamiento estratégico.*

Notamos que cada estrategia pura de un jugador se puede ver como un comportamiento estratégico. En este caso podemos decir que, para cada $i \in N, A_i \subset B_i$, y por lo tanto $A \subset B$.

Ahora considerando un juego extensivo Γ. Para cada $b \in B$ y cada $x \in X$, tenemos $p(x, b)$ que es la probabilidad de que se alcance el nodo x si los jugadores juegan según b. Notamos que $\{p(z, b) : z \in Z\}$ es la distribución de probabilidad sobre Z. Entonces si los jugadores siguen las funciones de utilidad de von Neumann-Morgenstern, para cada $i \in N$ las funciones de pago del jugador i se corresponden con la función $u_i : B \to \mathbb{R}$ dada, para cada $b \in B$ por:

$$u_i(b) = \textstyle\sum_{z \in Z} p(z, b) U_i(z).$$

Por lo tanto, mientras $A \subset B$, dado un juego extensivo Γ podemos definir formalmente el juego estratégico associado a Γ por $G_\Gamma := (A, u)$. Ya dijimos que cada situación interactiva, no estática puede ser representada por un juego estratégico.
Podemos considerar también el juego $E(G_\Gamma) := (S, u)$, es decir, la extensión mixta del juego estratégico asociado con Γ. Por definición, una estrategia mixta en G_Γ es una lotería sobre las estrategias puras de G_Γ y, por lo tanto, una lotería sobre las estrategias puras de Γ; así, las llamaremos también estrategias mixtas de Γ.

Definición 20. *Sea Γ un juego extensivo. Sea $i \in N$, $s_i \in S_i$ y $b_i \in B_i$. Las estrategias s_i y b_i son* ***equivalentes*** *si inducen las mismas probabilidades sobre A_i.*

Cada comportamiento estratégico induce a una lotería sobre estrategias puras en un entorno natural. Sea $b_i \in B_i$ y $a_i \in A_i$. La probabilidad de que a_i sea jugado cuando i esta jugando según b_i es $\prod_{w \in W_i} b_i(a_i(w))$. Por lo tanto, para cada comportamiento estratégico hay una estrategia mixta equivalente.

4.3. Equilibrio de Nash en los juegos extensivos

Antes de empezar a definir el equilibrio de Nash vamos a presentar las mejores respuestas de juegos extensivos.

Definición 21. *Sea Γ un juego extensivo y sea $b \in B$ y $\bar{b_i} \in B_i$. Decimos que $\bar{b_i}$ es la **mejor repsuesta** del jugador i si:*

$$u_i(b_{-i}, \bar{b_i}) = max_{\hat{b_i} \in B_i} u_i(b_{-i}, \hat{b_i}).$$

Ahora introduciremos el concepto de equilibrio de Nash en juegos extensivos. Vamos a definirlo para el comportamiento estratégico (o bien estrategias de comportamiento), ya que las definiciones para estrategias puras y mixtas son análogas.

Definición 22. *Sea Γ un juego extensivo. Un **equilibrio de Nash** de Γ con estrategias de comportamiento es el perfil estratégico $b^* \in B$ tal que, para cada $i \in N$ y cada $\hat{b_i} \in B_i$,*

$$u_i(b^*) \geq u_i(b^*_{-i}, \hat{b_i}).$$

Proposición 4. *Sea Γ un juego extensivo y $a^* \in A$. Entonces, a^* es un **equilibrio de Nash** de Γ en estrategias de comportamineto si, y sólo si, para cada $i \in N$ y cada $\hat{a}_i \in A_i$,*

$$u_i(a^*) \geq u_i(a^*_{-i}, \hat{a}_i).$$

Por lo que, a^* es un equilibrio de Nash en Γ para las estrategias de comportamiento si, y solo si, a^* es un equilibrio de Nash en G_Γ.

Demostración

Para demostrar esta proposición vamos a usar el teorema de Kuhn, por lo tanto vamos a enunciarlo primero:

Teorema 5. ***Teorema de Kuhn**.*
Sea Γ un juego extensivo. Sea $i \in N$ y sea $s_i \in S_i$. Entonces, existe un $b_i \in B_i$ tal que s_i y b_i, en relación, son equivalentes.

Más adelante también lo usaremos para probar otros teoremas.

Ahora ya podemos ver que si $A \subset B$, si a^* es un equilibrio de Nash de Γ en estrategias de comportamiento, entonces la definición 22 implica que, para cada $i \in N$ y cada $a_i \in A_i$, $u_i(a*) \geq u_i(a^*_{-i}, a_i)$.
Por el contrario, sea $a^* \in A$ tal que, para cada $i \in N$ y cada $a_i \in A_i$, $u_i(a^*) \geq u_i(a^*_{-i}, a_i)$. Cada estrategia de comportamiento b_i del jugador i define una lotería s^{b_i} sobre su conjunto de estrategias puras A_i, es decir, una estrategia del jugador i en la extensión mixta de G_Γ. Por lo tanto, para cada $i \in N$ y cada $b_i \in B_i$,

$$u_i(a^*_{-i}, b_i) = \textstyle\sum_{a_i \in A_i} u_i(a^*_{-i}, a_i) s^{b_i}(a_i) \leq u_i(a^*).$$

□

Vamos a usar los teoremas de Nash y de Kuhn para mostrar que cada juego extensivo tiene un equilibrio de Nash. En realidad ya sabemos que cada extensión mixta de G_Γ, $E(G_\Gamma)$, tiene, al menos, un equilibrio de Nash; es decir, el juego extensivo Γ siempre tiene un equilibrio en las estrategias mixtas. No obstante, usando las estrategias mixtas para estudiar los juegos extensivos sería casi como volver a los juegos estratégicos, es decir, en este contexto, las estrategias de comportamiento parecen más naturales para captar los aspectos dinámicos de los juegos en cuestión. De aquí en adelante, cuando hablemos del equilibrio de Nash para juegos extensivos, en realidad nos estaremos refiriendo al equilibrio de Nash para los comportamientos estratégicos.

Teorema 6. *Sea Γ un juego extensivo con memoria perfecta (los jugadores recuerdan cuáles han sido las decisiones/acciones que han elegido en el pasado como también cualquier otro suceso). Entonces , Γ tiene, al menos, un equilibrio de Nash.*

Demostración

Por el teorema de Nash, el juego estratégico $E(G_\Gamma)$ tiene, al menos, un equilibrio de Nash. Sea $s^* \in S$ uno de estos equilibrios. Por el teorema de Kuhn, existe un $b^* \in B$ tal que s^* y b^* están equivalentemente relacionados y, por lo tanto, los pagos son equivalentes. Esto último implica también que $u(s^*) = u(b^*)$.
Ahora vamos a mostrar que b^* es un equilibrio de Nash de Γ. Supongamos, por el contrario, que hay $i \in N$ y $\hat{b_i} \in B_i$, tal que $u_i(b^*) < u_i(b^*_{-i}, \hat{b_i})$. Por tanto,

$$u_i(s^*) = u_i(b^*) < u_i(b^*_{-i}, \hat{b_i}) = u_i(s^*_{-i}, \hat{b_i}).$$

Esto implica que s^* no es un equilibrio de Nash de $E(G_\Gamma)$, y hemos llegado a contradicción.
□

El resultado anterior supone que dado un juego extensivo con memoria perfecta Γ y un equilibrio de Nash s de $E(G_\Gamma)$, hay un equilibrio de Nash b de Γ que es esencialmente igual que s.

Teorema 7. *Sea Γ un juego extensivo con memoria perfecta. Si b^* es un equilibrio de Nash de Γ, entonces b^* es también equilibrio de Nash de $E(G_\Gamma)$.*

Demostración

Primero, recordemos que B puede ser considerado un subconjunto de S. Si b^* no es un equilibrio de Nash de $E(G_\Gamma)$, entonces hay un $i \in N$ y $\hat{s}_i \in S_i$ tal que $u_i(b^*) < u_i(b^*_{-i}, \hat{s}_i)$. Por el teorema de Kuhn, existe un $\hat{b_i} \in B_i$ equivalentemente relacionado con $\hat{s}_i$ y, por lo tanto, el pago también es equivalente. Por lo que,

$$u_i(b^*) < u_i(b^*_{-i}, \hat{b_i})$$

, y b^* no es un equilibrio de Nash de Γ.
$\square$

Sin embargo, no es cierto que todo juego extensivo tenga un equilibrio de Nash, es decir, no podemos eliminar la suposición de memoria perfecta del teorema 6.

Ejemplo 7. *Dos empresas desarrollan un nuevo producto y están planeando sacarlo al mercado. No saben si el mercado de ese producto será pequeño (P), que reportaría unos beneficios agregados de 80 millones de euros al año, o grande (G), que reportaría unos beneficios agregados de 200 millones de euros al año. No se dispone de información sobre la naturaleza del mercado (el producto nunca se ha vendido antes), pero el análisis de mercado predice que será pequeño con probabilidad $\frac{1}{2}$ y que será grande con probabilidad $\frac{1}{2}$. Las empresas tienen que decidir si fabrican un producto de calidad media (M), que funcionará mejor si el mercado es grande, o un producto de calidad alta (A), que funcionará mejor si el mercado es pequeño.*

La empresa 1 es líder del sector. La empresa 2 es una empresa más pequeña que comercializa sus productos a un público más sofisticado. Los analistas de ambas empresas han estimado las cuotas de mercado que figuran en la Fig. 8 (se supone que estas estimaciones se basan en hechos conocidos, por lo que pueden considerarse conocimiento común).

Figura 8. *Estimaciones de cuota de mercado.*

Empresa 1: P

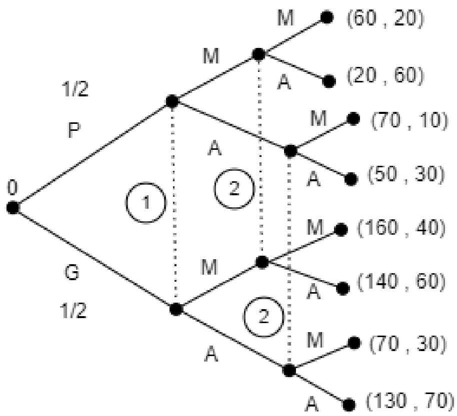
	M	A
M	60, 20	20, 60
A	70, 10	50, 30

Empresa 2: G

	M	A
M	60 40	40 60
A	70, 130	30, 70

Otra característica relevante es que, dado que la empresa 2 es más pequeña y flexible, necesita menos tiempo para lanzar el producto, por lo que puede observar la decisión de la empresa 1 antes de tomar su decisión sobre la calidad del producto. Esta situación interactiva no estática puede modelizarse utilizando el juego extensivo Γ *de la Fig. 9.*

Figura 9. *Juego extensivo* Γ *del ejemplo 7.*



Su correspondiente juego estratégico G_Γ *se muestra en la Fig. 10.*

Las estrategias de la empresa 2 son las siguientes:

- *MM: La empresa 2 juega M independientemente de la elección de la empresa 1.*
- *MH: La empresa 2 juega igual que la empresa 1.*
- *HM: La empresa 2 nunca juega lo mismo que la empresa 1.*
- *HH: La empresa 2 juega H independientemente de la elección de la empresa 1.*

Figura 10. *La estrategia asociada al juego* Γ *del ejemplo 7.*

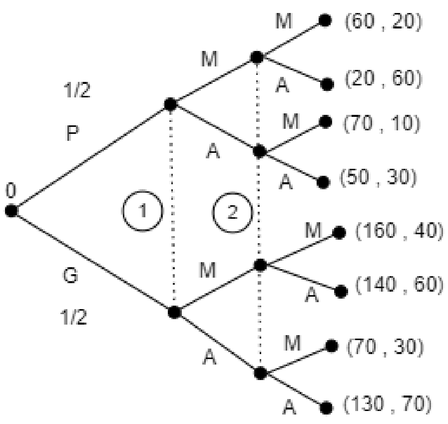
	MM	MA	AM	AA
M	110, 30	110, 30	80, 60	80, 60
A	70, 70	90, 50	70, 70	90, 50

Notamos que se trata de un juego de suma constante de dos jugadores. Analizarlo, es lo mismo que analizar el juego de suma cero correspondiente a la función de pago del jugador 1. Es fácil comprobar que, en los juegos de suma constante para dos jugadores, la retribución de un jugador es la misma en todos los equilibrios de Nash del juego (como en el caso de suma cero). Por lo tanto, podemos hablar del valor del juego como la ganancia del jugador 1 en cualquiera de sus equilibrios de Nash. Observamos que (M, HM) es un equilibrio de Nash puro de G_Γ*, por lo que es un equilibrio de Nash de* Γ*. Por lo tanto el valor del juego es 80.*

Supongamos que el jugador 2 no puede observar la estrategia del jugador 1 antes de hacer su elección. Entonces el juego extensivo realmente jugado, llamado $\bar{\Gamma}$*, es otro. La Fig. 11 muestra tanto* $\bar{\Gamma}$ *(a), como su juego estratégico asociado* $G_{\bar{\Gamma}}$ *(b). En este caso,* $G_{\bar{\Gamma}}$ *no tiene equilibrio de Nash y* $E(G_{\bar{\Gamma}})$ *tiene un único equilibrio de Nash:* $((2/5, 3/5), (1/5, 4/5))$*. Dado que ambos jugadores tienen un único conjunto de información, las estrategias de comportamiento de* $\bar{\Gamma}$*. El valor de este juego es 86. Esto significa que, si el jugador 2 puede observar la estrategia del jugador 1 antes de elegir, entonces su pago de equilibrio sube, lo cual es natural.*

Figura 11. $\bar{\Gamma}$ *y* $G_{\bar{\Gamma}}$ *del ejemplo 7.*

(a)



(b)

	M	A
M	110, 30	80, 60
A	70, 70	90, 50

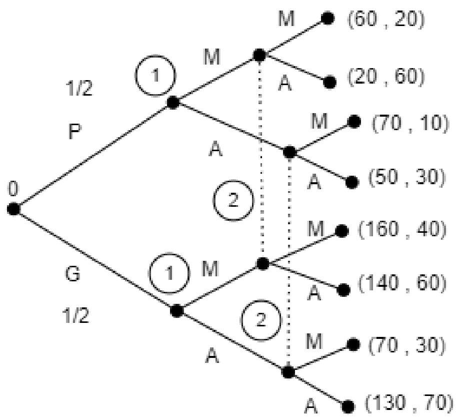
Ahora vamos a cambiar un poco el contexto.

Ejemplo 8. *Consideramos de nuevo la situación descrita en el ejemplo anterior, pero ahora suponemos que la empresa 1 ha realizado un estudio de mercado y sabe si el mercado va a ser pequeño o grande. Asumimos que la empresa 2 sabe que la empresa 1 ha hecho el estudio pero no sabe los resultados obtenidos.*

Entonces, el juego extensivo, llamado $\hat{\Gamma}$*, y su juego estratégico asociado,* $G_{\hat{\Gamma}}$ *los podemos ver en la figura siguiente.*

Figura 12. $\hat{\Gamma}$ *y* $G_{\hat{\Gamma}}$ *del ejemplo 7.*

(a)



(b)

	MM	MA	AM	AA
MM	110, 30	110, 30	80, 60	80, 60
MA	75, 65	95, 45	75, 65	95, 45
AM	115, 25	105, 35	105, 35	95, 45
AA	70, 70	90, 50	70, 70	90, 50

Las estrategias de la empresa 2 son las mismas que en el ejemplo anterior. En cambio las estrategias para la empresa 1 son las siguientes:

- *MM: La empresa 1 juega M independientemente del tamaño del mercado.*

- *MH: La empresa 1 juega M si el mercado es pequeño (P) y H si el mercado es grande (G).*

- *HM: La empresa 1 juega H si el mercado es pequeño (P) y M si el mercado es grande (G).*

- *HH: La empresa 2 juega H independientemente del tamaño del mercado.*

Ahora, (HM, HH) es equilibrio de Nash en $G_{\hat{\Gamma}}$*, por lo tanto también lo será para* $\hat{\Gamma}$*. El valor del juego es 95 en vez de 80 (ejemplo 7). Así, la empresa 1 debería estar dispuesta a realizar el estudio de mercado si su coste es inferior a 15. Observamos que, si la empresa 1 es capaz de mantener en secreto la realización del estudio de marketing, entonces la empresa 2 piensa que el juego realmente jugado es el del ejemplo 7, por lo que elegirá HM y la empresa 1 tendrá un beneficio extra de 10.*

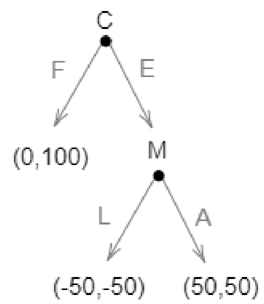
5. Aplicación en el mundo real

5.1. Monopolio

Un monopolista (jugador 2 : M) en un mercado que genera unos beneficios de 100 millones de euros se enfrenta a la posibilidad de que un competidor (jugador 1 : C) entre en el mercado.
En primer lugar, el competidor decide si entra (E) o no (F) en el mercado. Si el competidor entra en el mercado, el monopolista observa la acción del entrante y decide si lucha (L) o no (A) contra el entrante. Si el monopolista lucha, se inicia una guerra de precios. Como resultado, ambas empresas acaban perdiendo 50 millones de euros cada una. Si el monopolista se acomoda, ambas empresas se reparten por igual el mercado. Supongamos que no hay coste de entrada para el competidor.

Podemos representar esta situación como un árbol.

Figura 13. *Mercado forma extensiva*

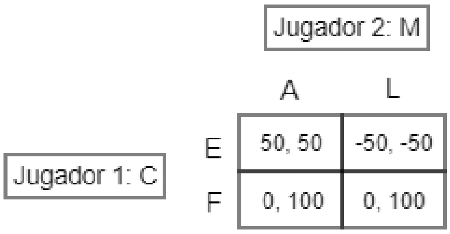


Vemos que es un árbol finito ya que tiene un conjunto finito de nodos X y un conjunto finito de aristas E.

Podemos transformar este juego extensivo en un juego estratégico. Tendriamos una situación de juego G:=(A,u) con:

- $A_M = \{L, A\}$.
- $A_C = \{F, E\}$.
- $u_M(L, E) = -50,\ \ u_M(L, F) = 100,\ \ u_M(A, E) = 50,\ \ u_M(A, F) = 100.$
- $u_C(L, E) = -50,\ \ u_C(L, F) = 0,\ \ u_C(A, E) = 50,\ \ u_C(A, F) = 0.$

Figura 14. *Mercado forma estratégica*



Ahora queremos encontrar un equilibrio de Nash de la forma:

$$\sigma_C = xE + (1-x)F$$
$$\sigma_M = yA + (1-y)L$$

Para ello vamos a tener que calcular la utilidad esperada de cada jugador:

$$U_C(E, \sigma_M) = 50y - 50(1-y) = 100y - 50.$$
$$U_C(F, \sigma_M) = 0y + 0(1-y) = 0.$$
$$U_M(\sigma_C, A) = 50x + 100(1-x) = 100 - 50x.$$
$$U_M(\sigma_C, L) = -50x + 100(1-x) = 100 - 150x.$$

Vemos que:

a) $0 < 100y - 50, \quad \frac{1}{2} < y \leq 1.$

b) $0 > 100y - 50, \quad 0 < y < \frac{1}{2}$

c) $0 = 100y - 50, \quad y = \frac{1}{2}$

Por lo tanto, tenemos que la mejor respuesta del jugador 1 (C):

$$BR_C(\sigma_M) = \begin{cases} x = 0 & \text{si } 0 \leq y < \frac{1}{2}, \\ x \equiv [0,1] & \text{si } y = \frac{1}{2}, \\ x = 1 & \text{si } \frac{1}{2} < y \leq 1. \end{cases}$$

Ahora haremos el mismo procedimiento para el jugador 2 (M):

a) $100 - 150x < 100 - 50x, \quad x > 0.$

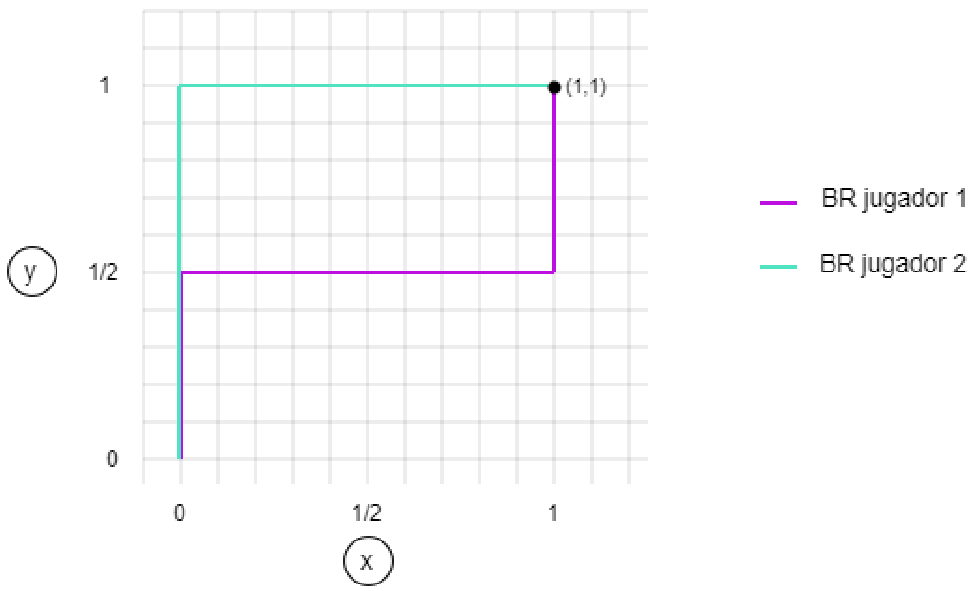
b) $100 - 150x100 - 50x, \quad x = 0.$

Por lo tanto, la mejor respuesta será:

$$BR_M(\sigma_C) = \begin{cases} y = 1 & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ y \equiv [0,1] & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Gráficamente,

Figura 15. *Gráfico de las BR (mejores respuestas).*



Observando la Fig. 15 , vemos claramente que para estratégias puras tenemos 2 equilibrios de Nash, (E,A) y (F,L).
En cambio para estratégias mixtas tenemos el equilibrio de Nash determinado por la siguiente ecuación:

$$F, yA + (1-y)L, \quad 0 \leq y \leq \tfrac{1}{2} \ .$$

5.2. El duopolio de Cournot

5.2.1. Contexto

El duopolio de Cournot es un modelo que sostiene que las empresas actúan sobre las cantidades. Tiene cuatro carácterísticas básicas:

- Consideramos un mercado en el que hay **dos empresas**.
- **Producto homogéneo**. Desde el punto de vista de los consumidores los productos producidos por las dos empresas son sustitutivos perfectos, es decir, se puede reemplazar uno por el otro y no hay ninún tipo de desventaja.
- **Competencia en cantidades**. La variable de elección de las empresas es el nivel de producción. Sean x_1 y x_2 los niveles de producción de las empresas 1 y 2 respectivamente.
- **Elección simultánea**. Las empresas tendrán que elegir simultáneamente sus niveles de producción. Es decir, cada empresa elegirá su nivel de producción sin saber previamente que nivel de producción ha elegido la empresa rival. Una elección simultánea no implica que la elección se realice en el mismo instante de tiempo; lo realmente importante es que aunque una empresa juegue primero la que juegue después no sepa el comportamiento de la primera.

La función inversa de demanda es $p(x)$, siendo $p(x) < 0$. Como el producto es homogéneo, el precio al que se puede vender la producción de las empresas depende de la producción agregada: $p(x) = p(x_1 + x_2)$; el coste de producción de la empresa i es $C_i(x_i), i = 1, 2$.

5.2.2. Representación del juego

1) i=1,2. (Jugadores/Empresas).

2) $x_i \geq 0$. Estrategias del jugador i, $x_i \in [0, \infty), i = 1, 2$.

3) Ganancia que obtiene cada empresa dada la combinación de estratégias (x_1, x_2) es:

$$\prod\nolimits_1(x_1, x_2) = p(x_1 + x_2)x_1 - C_1(x_1).$$
$$\prod\nolimits_2(x_1, x_2) = p(x_1 + x_2)x_2 - C_1(x_2).$$

5.2.3. Equlibrio Cournot-Nash

La combinación de estrategias (x_1^*, x_2^*) es un equilibrio de Cournot-Nash si

$$x_i^* = f_i(x_j^*), \;\; i, j = 1, 2, \;\;\; j \neq i \; ;$$

donde $f_i(x_j)$ es la función de mejor respuesta (BR) de la empresa i ante las producciones de la empresa j.

5.2.4. Función de mejor respuesta (BR). Caracterización del equilibrio

Para empezar, calcularemos la mejor respuesta (BR) de cada jugador ante las posibles estrategias del rival y después buscaremos una combinación de estrategias que sean mutuamente una la mejor respuesta de la otra.

Dada una estrategia de la empresa j buscaremos aquella estrategia que le dé mayores beneficios a la empresa i. Es decir, dada la estrategia $x_j \geq 0$ la mejor respuesta de la empresa i será la estrategia x_i que cumpla:

- $\prod_i(x_i, x_j) \equiv p(x_i + x_j)x_i - C(x_i)$.

- $\frac{\partial \prod_i}{\partial x_i} = p(x_i + x_j) + x_i p'(x_i + x_j) - C_i'(x_i) = 0 \rightarrow \bar{f}_i(x_j)$,

  dónde $\bar{f}_i(x_j)$ es la solución de la ecuación anterior.

- $\frac{\partial^2 \prod_i}{\partial^2 x_i^2} = 2p'(x_i + x_j) + x_i p''(x_i + x_j) - C_i''(x_i) < 0$.

Tenemos que tener en cuenta que $x_i \geq 0$. La función de mejor respuesta será: $BR_i \equiv f_i(x_j) = max\{\bar{f}_i(x_j), 0\}$.

El equilibrio de Cournot-Nash es una combinación de estrategias (x_1^*, x_2^*) tal que la estrategia de cada empresa es su mejor respuesta ante la estrategia del rival, matemáticamente:

$$x_1^* = f_1(x_2^*) = max\{\bar{f}_1(x_2^*), 0\}.$$

$$x_2^* = f_2(x_1^*) = max\{\bar{f}_2(x_1^*), 0\}.$$

5.2.5. Ejemplo

Ahora veamos un ejemplo para aclarar todos estos conceptos teóricos.

Dos empresas compiten a la Cournot en un mercado con función de demanda $Q = 130 - P$ siendo $Q = q_1 + q_2$ la cantidad total producida. Las funciones de costes son

$$C_1(q_1) = 10q_1 \qquad\qquad C_2(q_2) = 25q_2.$$

Vamos a encontrar las mejores respuestas (BR) y las cantidades producidas en el equilibrio.

Mejor respuesta de la empresa 1: Se trata de encontrar la cantidad q_1 que maximiza los beneficios de la empresa 1 para cualquier valor de q_2. Por lo tanto, tendremos que resolver el problema:

$$max_{q_1 \in [0,130]} B_1(q_1, q_2), \text{ donde } B_1(q_1, q_2) = (130 - q_1 - q_2)q_1 - 10q_1.$$

Como la función de beneficios es diferenciable, derivamos respecto a la variable de decisión:

$$\tfrac{\partial B_1}{\partial q_1} = -q_1 + (130 - q_1 - q_2) - 10.$$

Queremos encontras los puntos estacionarios, por tanto tendremos que igualar a 0:

$$\tfrac{\partial B_1}{\partial q_1} = 0 \Longleftrightarrow q_1 = R_1(q_2) = \tfrac{120 - q_2}{2}.$$

Además vemos que se trata de un máximo global, (como la ecuación es de segundo grado y sólo existe un único punto estacionario este será global), ya que B_1 es una función (estrictamente) cóncava respecto a la variable q_1:

$$\tfrac{\partial^2 B_1}{\partial q_1^2} = -2 < 0.$$

Análogamente hacemos el procedimiento para la empresa 2,

$$max_{q_1 \in [0,130]} B_2(q_1, q_2), \text{ donde } B_2(q_1, q_2) = (130 - q_1 - q_2)q_2 - 25q_2.$$

Derivamos respecto variable de decisión:

$$\tfrac{\partial B_2}{\partial q_2} = -q_2 + (130 - q_1 - q_2) - 25.$$

Puntos estacionarios:

$$\frac{\partial B_2}{\partial q_2} = 0 \Longleftrightarrow q_2 = R_2(q_1) = \frac{105-q_1}{2}.$$

Usando el argumento anterior, sabemos que es un máximo (global).

El equilibrio se da cuando $q_1 = R_1(q_2)$ y $q_2 = R_2(q_1)$, por lo tanto tendremos un sistema de ecuaciones lineales fácil de resolver. La solución será $(q_1, q_2) = (45, 30)$, único equilibrio de Nah en este juego.

En situación de equilibrio los beneficios de cada empresa serán:

$$B_1(45,30) = (130-45-30)45 - 10(45) = 2025.$$
$$B_2(45,30) = (130-45-30)30 - 25(30) = 900.$$

Como la lógica nos indica, la empresa con costes marginales más bajos tendrá más beneficios que la otra siempre que estemos en la situación de equilibrio.

5.3. El duopolio de Bertrand

5.3.1. Contexto

A diferencia del modelo Cournot, el modelo Bertrand sostiene que las empresas actúan sobre los precios de los productos. Se caracteriza por los siguientes elementos:

- Consideramos una industria en la que hay **dos empresas**.
- Las empresas venden un **producto homogéneo**.
- **Competencia en precios**.
- **Elección simultánea**: Exactamente igual que en el caso anterior.
- **Coste marginal y común** para las dos empresas: $c_1 = c_2 = c > 0$.

5.3.2. Demanda residual

Las empresas venden un producto homogéneo y compiten en precios. Luego desde el punto de vista de los consumidores lo único relevante es la relación que exista entre los precios de las dos empresas; así los consumidores comprarán el producto a la empresa que proporcione el precio más barato.
Es decir, si una empresa establece un precio inferior a la otra, la primera se llevaría a todos los compradores y la segunda no vendería nada. Si ambas establecen el mismo precio entonces los consumidores comprarían indiferentemente a la empresa 1 o a la empresa 2. Para simplificar, supondremos que en caso de igualdad de precios cada empresa vendería a la mitad del mercado. La demanda residual de la empresa i, con $i, j = 1, 2, \;\; j \neq i$, sería:

$$x_i(p_i, p_j) = \begin{cases} x(p_i) & \text{si } p_i < p_j, \\ \frac{1}{2}x(p_i) & \text{si } p_i = p_j, \\ 0 & \text{si } p_i > p_j. \end{cases}$$

5.3.3. Representación del juego en forma estratégica. Noción de equilibrio

El juego en forma estratégica es:

1) $i = 1, 2$. (Jugadores / Empresas).

2) $p_i \geq 0$. Estrategias del jugador i: $p_i \in [0, \infty)$, $i = 1, 2$.

3) La ganancia que obtiene cada empresa dada la combinación de estrategias (p_1, p_2) es:

$$\prod_1(p_1, p_2) = (p_1 - c)x_1(p_1, p_2)$$

$$\prod_2(p_1, p_2) = (p_2 - c)x_2(p_1, p_2)$$

, donde la demanda residual de la empresa i, con $i, j = 1, 2$, $j \neq i$ es la $x_i(p_i, p_j)$ definida anteriormente en el subapartado 5.3.2 .

En el juego de duopolio de Bertrand diremos que (p_1^*, p_2^*) es un equilibrio de Bertrand-Nash si:

$$\prod_i(p_i^*, p_j^*) \geq \prod_i(p_i, p_j^*), \ \forall p_i \geq 0, \ i, j = 1, 2, \ j \neq i.$$

5.3.4. Paradoja de Bertrand. Caracterización del equilibrio y unicidad

En este apartado demostraremos que el único equilibrio de Nash del juego de Bertrand corresponde a:

$$p_1^* = p_2^* = c.$$

Este resultado es concido como la **paradoja de Bertrand**:

"Bastan dos empresas compitiendo en precios para que se alcance un resultado competitivo".

Demostración

Vamos a demostrar que la combinación de estrategias $p_1^* = p_2^* = c$:

a) Es equilibrio de Nash.

b) Es el único equilibrio de Nash.

a) El beneficio de cada empresa en la combinación de estrategias (c,c) es:

$$\prod_i(c, c) = (c - c)\frac{1}{2}x(c) = 0, \ \ i = 1, 2.$$

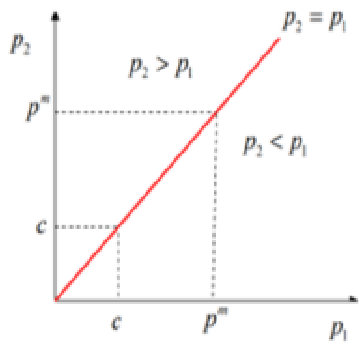
Si la empresa i se desvía unilateralmente fijando un precio $p_i > c$ su beneficio sería nulo ya que no vendería a nadie. Si baja el precio $p_i < c$ vendería a todo el mercado pero obtendría beneficios negativos. Por tanto,

$$\prod_i(c,c) \geq \prod_i(p_i,c) \ \ \forall p_i \geq 0, \ \ i,j = 1,2, \ \ j \neq i.$$

□

b) Vamos a demostrar que ninguna otra combinación de estrategias puede ser equilibrio de Nash. En el gráfico que veremos en la Fig. 16 aparecen los diferentes tipos de combinaciones de estrategias que se pueden dar. Para ver si son situaciones de equilibrio o no lo que haremos será calcular el beneficio que obtiene cada empresa en esa combinación de estrategias y nos preguntaremos si alguna de las empresas tiene incentivos para desviarse de manera unilateral. Para descartar una combinación de estrategias como equilibrio de Nash basta con comprobar que al menos una empresa puede mejorar desviándose unilateralmente.

Figura 16. *Paradoja de Bertrand.*



1) Precios iguales: $p_i = p_j$**.**

i) ¿$p_i = p_j > c$ Equilibrio de Nash ? NO. En una combinación de estrategias como esta la ganancia de cada empresa sería:

$$\prod_i(p_i,p_j) = (p_i - c)x_i(p_i,p_j) = (p_i - c)\tfrac{1}{2}x(p_i).$$

Cualquier empresa tendría incentivos a desviarse unilateralmente. Por ejemplo, elegimos $p_i' = p_i - \epsilon$ (donde ϵ es una cantidad aleatoria positiva y lo suficientemente pequeña): $(p_i' - c)x(p_i') = (p_i' - c)x_i(p_i',p_j) = \prod_i(p_i',p_j) > \prod_i(p_i,p_j) = (p_i - c)x_i(p_i,p_j) = (p_i - c)\frac{1}{2}x(p_i)$. De hecho existen infinitas desviaciones tales que la empresa i mejora con una desviación unilateral.

ii) ¿$p_i = p_j < c$ Equilibrio de Nash ? NO.
Teniendo en cuenta que $(p_i - c) < 0$. En una combinación de estrategias como esta la ganancia de cada empresa sería:

$$\prod_i(p_i, p_j) = (p_i - c)x_i(p_i, p_j) = (p_i - c)\tfrac{1}{2}x(p_i) < 0.$$

Cualquier empresa tendría incentivos a desviarse unilateralmente, igual que en el caso anterior. Por ejemplo, cualquier $p_i' > p_i$:

$$0 = (p_i' - c)x_i(p_i', p_j) = \prod_i(p_i', p_j) > \prod_i(p_i, p_j) = (p_i - c)x_i(p_i, p_j) = (p_i - c)\tfrac{1}{2}x(p_i).$$

2) Precios diferentes: $p_i \neq p_j$.

iii) ¿$p_i > p_j > c$ Equilibrio de Nash? NO. En una combinación de estrategias como esta la ganancia de la empresa i sería nula

$$\prod_i(p_i, p_j) = (p_i - c)x_i(p_i, p_j) = 0$$

, y la de la empresa j sería:

$$\prod_j(p_i, p_j) = (p_j - c)x_j(p_i, p_j) = (p_j - c)x(p_j) > 0.$$

Para la empresa i cualquier desviación unilateral p_i' tal que $c < p_i' \leq p_j$ eleva beneficios:

$$(p_i' - c)x(p_i') = (p_i' - c)x_i(p_i', p_j) = \prod_i(p_i', p_j) > \prod_i(p_i, p_j) = (p_i - c)x_i(p_i, p_j) = (p_i - c)0 = 0.$$

Aunque hemos demostrado anteriormente que la combinación de estrategias (p_i, p_j), con $p_i > p_j > c$ no puede ser equilibrio, podemos comprobar que en muchos casos la empresa j también tendría incentivos para desviarse unilateralmente. Por ejemplo, si $p^m \geq p_i > p_j > c$ cualquier desviación unilateral $p_i > p_j' > p_j$ eleva los beneficios de la empresa j. Para los casos $p_i > p_j > p^m > c$ y $p_i > p^m > p_j > c$ es también inmediato encontrar desviaciones que elevan el beneficio de la empresa j. La única situación en la que la empresa j no tendría incentivos a desviarse sería aquella en la que $p_i > p^m = p_j > c$.

iv) ¿$p_i > c \geq p_j$ Equilibrio de Nash? NO. La empresa i no tendría incentivos a desviarse unilaterlamente mientras que la empresa j cuando $p_i > c > p_j$ cualquier $p_j' > p_j$ eleva beneficios y si $p_i > c = p_j$ elevando convenientemente el precio, la empresa j eleva sus beneficios. Por ejemplo, si $p^m \geq p_i > c = p_j$ cualquier $p_i > p_i' > c$ eleva los beneficios de la empresa j. Si $p_i > p^m > c = p_j$ cualquier precio $p^m > p_j' > c$ (y otros muchos) eleva los beneficios de la empresa j.

v) ¿$c \geq p_i > p_j$ Equilibrio de Nash? NO. La empresa i no tendría incentivos a desviarse unilateralmente mientras que para la empresa j cualquier $p_j' > p_j$ eleva sus beneficios.

5.3.5. Ejemplo

Ahora veremos un par de ejemplos relacionados dónde podremos poner en práctica esta teoría.

Dos empresas compiten a la Bertrand en un mercado con función de demanda $q = 130 - min\{p_1, p_2\}$, siendo p_1 y p_2 los precios fijados por la empresa 1 y 2, respectivamente. Suponemos que las empresas pueden fijar cualquier precio, es decir, el precio es una variable continua. Las funciones de costes son

$$C_1(q_1) = 10q_1 \qquad\qquad C_2(q_2) = 30q_2$$

Vamos a construir las mejores respuestas y representarlas de forma gráfica. Después veremos qué precios fijan las empresas y si existen los equilibrios.

Este es un juego de dos jugadores, $N = \{1, 2\}$, conjunto de estrategias $S_1 = S_2 = [0, 130]$ y funciones de utilidad descritas para todo $0 \leq p_1, p_2 \leq 130$ por:

$$B_1(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_1 - 10)(130 - p_1) & \text{si } p_1 < p_2, \\ (p_1 - 10)\frac{(130-p_1)}{2} & \text{si } p_1 = p_2, \\ 0 & \text{si } p_1 > p_2. \end{cases}$$

$$B_2(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_2 - 30)(130 - p_2) & \text{si } p_2 < p_1, \\ (p_2 - 30)\frac{(130-p_2)}{2} & \text{si } p_2 = p_1, \\ 0 & \text{si } p_2 > p_1. \end{cases}$$

Ahora para encontrar las mejores respuestas de la **empresa 1** vamos a tener en cuenta 3 casos:

i) $p_2 < 10$
Si $p_1 < p_2$, la empresa 1 abastece a todo el mercado, pero $B_1 < 0$.
Si $p_1 = p_2$, la empresa 1 abastece a la mitad del mercado, pero seguimos teniendo $B_1 < 0$.
Por lo tanto la mejor respuesta será cuando $p_1 > p_2$ y la empresa 2 abastece el mercado con $B_1 = 0$.

$$p_1 \in (p_2, 130].$$

ii) $p_2 = 10$
Si $p_1 < p_2 = 10$, $B_1 < 0$.

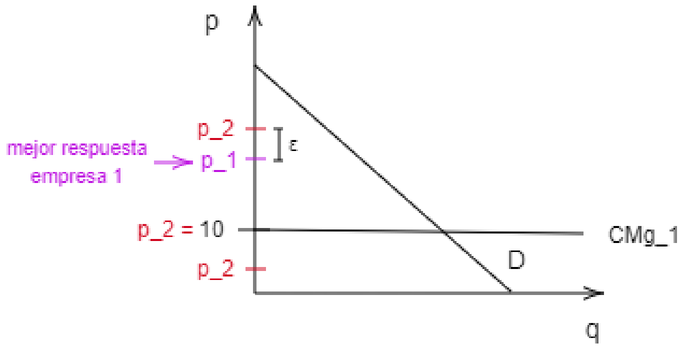
Si $p_1 = p_2 = 10$, la empresa 1 abastece a la mitad del mercado, y $B_1 = 0$.
Si $p_1 > p_2$, $B_1 = 0$.
Por lo tanto la mejor respuesta será cuando $p_1 \geq p_2$

$$p_1 \in [p_2, 130] = [10, 130]$$

iii) $p_2 > 10$
Si $p_1 > p_2 = 10$, $B_1 < 0$.
Si $p_1 = p_2 = 10$, la empresa 1 abastece a la mitad del mercado, y $B_1 = (p_1 - 10)\frac{130-p_1}{2} > 0$.
Si $10 < p_1 < p_2$, la empresa 1 abastece a todo el mercado con $p_1 > 10$ y tenemos $B_1 = (p_1 - 10)(130 - p_1) > 0$.
Por lo tanto la mejor respuesta será cuando $p_1 = p_2 - \epsilon$

Vemos un pequeño esquema en forma de gráfico de los 3 posibles casos que tenemos,

Figura 17. *Mejor respuesta de la empresa 1.*



Ahora vemos que el máximo de nuestra función de utilidad

$$\frac{\partial}{\partial p_1}[(p_1 - 10)\frac{130-p_1}{2}] = 0 \iff p_1 = 70.$$

Esto nos indica que si $70 \geq p_2 > 10$ la mejor respuesta de la empresa será $\emptyset$. En cambio, si $p_2 > 70$ entonces $p_1 = 70$. Nos aseguramos que $p_1 = 70$ es un máximo ya que

$$\frac{\partial^2}{\partial p_1^2} = -2 < 0.$$

Recogiendo todo esto, tenemos que la mejor respuesta de la empresa 1 es:

$$R_1(p_2) = \begin{cases} p_1 \in (p_2, 130] & \text{si } p_2 < 10, \\ p_1 \in (10, 130] & \text{si } p_2 = 10, \\ \nexists & \text{si } 10 < \mathrm{p}_2 \leq 70, \\ \mathrm{p}_1 = 70 & \text{si } \mathrm{p}_2 > 70 \end{cases}$$

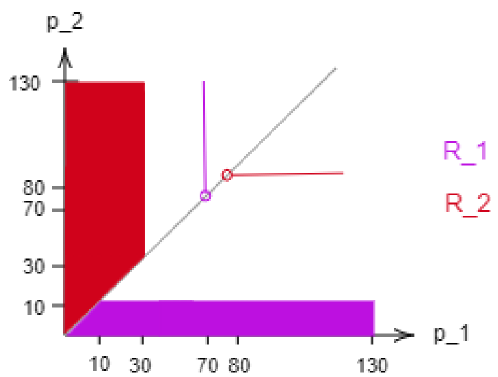
Por otro lado calculamos de manera análoga la mejor respuesta de la **empresa 2**. En este caso tenemos que tener en cuenta que el coste marginal de la empresa 2 es de 30 y que si derivamos B2 en función de p_2 tenenmos $\frac{\partial}{\partial p_2} = 160 - 2p_2 = 0 \iff p_2 = 80$. Además, nos aseguramos que es un máximo ya que $\frac{\partial^2}{\partial p_2^2} = -2 < 0$.

Por lo tanto, la mejor respuesta de la empresa 2 es:

$$R_2(p_1) = \begin{cases} p_2 \in (p_1, 130] & \text{si } p_1 < 30, \\ p_2 \in (30, 130] & \text{si } p_1 = 30, \\ \nexists & \text{si } 30 < \mathrm{p}_2 \leq 80, \\ \mathrm{p}_2 = 80 & \text{si } \mathrm{p}_1 > 80 \end{cases}$$

Ahora vemos las mejores respuestas de las dos empresas juntas en un sólo gráfico:

Figura 18.
Mejores respuestas de las dos empresas con costes diferentes y la variable precio continua.



En la Fig. 18 podemos ver que las mejores respuestas no intersecan en ningún punto. Es decir, no existe ningún equilibrio de Nash. El Teorema de Nash no puede aplicarse en este caso ya que las funciones de utilidad no son ni continuas ni diferenciables, así que las hipótesis del teorema no se cumplen y no está garantizada la existencia de un equilibrio.

En el ejemplo que veremos a continuación vamos a considerar casi el mismo enunciado que en el anterior pero con unas pequeñas variaciones.

Dos empresas compiten a la Bertrand en un mercado con función de demanda $q = 130 - min\{p_1, p_2\}$, siendo p_1 y p_2 los precios fijados por la empresa 1 y 2, respectivamente. Suponemos que los precios se fijan con unidad monetaria mínima de un céntimo de euro, es decir, el precio es una variable discreta. Las funciones de costes son

$$C_1(q_1) = 10q_1 \qquad\qquad C_2(q_2) = 30q_2$$

Los elementos del juego que cambian respecto al anterior ejemplo son los conjuntos de estrategias que ahora son $S_1 = S_2 = \{0, 0.01, 0.02, ..., 129.99, 130\}$. Observamos que las funciones de beneficios no cambian, por tanto nos quedamos con esas mismas funciones B_1 y B_2.

Las mejores respuestas se analizan de la misma manera.
Por lo tanto tendremos que para la **empresa 1**, para cualquier $p_2 \in S_2$,

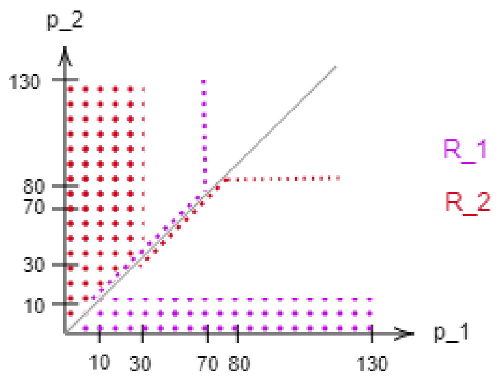
$$R_1(p_2) = \begin{cases} p_1 \in \{p_2 + 0.01, p_2 + 0.02, ..., 129.99, 130\} & \text{si } p_2 < 10, \\ p_1 \in \{10, 10.01, 10.02, ..., 129.99, 130\} & \text{si } p_2 = 10, \\ \text{p}_1 = 10.01 & \text{si } p_2 = 10.01, \\ \text{p}_1 = p_2 - 0.01 & \text{si } 10.01 < \text{p}_2 \leq 70, \\ \text{p}_1 = 70 & \text{si p}_2 > 70. \end{cases}$$

Y para la **empresa 2** adaptamos la mejor repsuesta de la emprea 1 teniendo en cuenta que el coste marginal es 30 y el precio que fijaría en monopolio es 80. Así, para cualquier $p_1 \in S_1$,

$$R_2(p_1) = \begin{cases} p_2 \in \{p_2 + 0.01, p_2 + 0.02, ..., 129.99, 130\} & \text{si } p_2 < 30, \\ p_2 \in \{30, 30.01, 30.02, ..., 129.99, 130\} & \text{si } p_2 = 30, \\ \text{p}_2 = 30.01 & \text{si } p_2 = 30.01, \\ \text{p}_2 = p_1 - 0.01 & \text{si } 30.01 < \text{p}_2 \leq 80, \\ \text{p}_2 = 80 & \text{si p}_2 > 80. \end{cases}$$

Pasamos a verlo de forma gráfica:

Figura 19. *Mejores respuestas de las dos empresas con costes diferentes y unidad monetaria mínima.*



Podemos ver que las mejores respuestas se solapan en los puntos que hay sobre la línea $p_1 = p_2$ en el intérvalo [10,30]. En concreto, tendremos equilibrios de Nash en los perfiles de estrategias $(p_2 - 0.01, p_2)$ para $p_2 \in \{10.02, 10.03, ..., 30.01\}$. Estos perfiles nos indican situaciones en las que la empresa 2 fija un precio que está entre el coste marginal de la empresa más competitiva (2 céntimos por encima del coste de la empresa 1) y el coste marginal propio (1 céntimo más que el coste marginal de la empresa 2) y la empresa 1 rebaja un céntimo este precio. Es decir, en todos los equilibrios solo vende la empresa más competitiva, la primera, que obtiene los beneficios más altos en el perfil de estrategias $(p_1, p_2) = (30, 30.01)$:

$$B_1(30, 30.01) = (30 - 10)(130 - 30) = 2000.$$

5.4. El concejal y la inspectora

Para finalizar vamos a ver un último ejemplo usando estrategias mixtas.

Un concejal del ayuntamiento A está pensando si malversar fondos públicos o no. A su vez, una determinada inspectora tiene que elegir entre investigar el ayuntamiento A o el ayuntamiento B.

- **Si la inspectora descubre que el concejal roba le otorgan un premio extraordinario (E) mientras que el concejal va a la cárcel (-C).**

- **Si el concejal decide robar y la inspectora no ha investigado su ayuntamiento el primero se convierte en millonario (M).**

- **Por último, si la inspectora decide investigar el ayuntamiento B (independientemente de lo que haga el concejal) descubrirá alguna pequeña irregularidad y le darán un pequeño premio (P donde P <E).**

Teniendo en cuenta que los parámetros representan utilidades en una misma escala y que todos ellos son números positivos, la situación del juego $G := (A, u)$ que tenemos es:

- $A_{J1} = \{R, NR\}$.

- $A_{J2} = \{A, B\}$.

- $u_{J1}(R, A) = -C, \;\; u_{J1}(NR, A) = 0, \;\; u_{J1}(R, B) = M, \;\; u_{J1}(NR, B) = 0.$

- $u_{J2}(R, A) = E, \;\; u_{J2}(NR, A) = 0, \;\; u_{J2}(R, B) = P, \;\; u_{J2}(NR, B) = P.$

Siendo $J1$ el concejal, $J2$ la inspectora, R malversar fondos públicos, NR no malversarlos, A investigar el ayuntamiento A y B investigar el ayuntamiento B.

Por tanto, tendremos un juego con forma estratégica:

Figura 20. *Forma estratégica del ejemplo concejal - inspectora.*

J2: Inspectora

J1: Concejal		A	B
	R	-C, E	M, P
	MR	0, 0	0, P

Para encontrar los equilibrios de Nash, primero observamos que no hay ninguna dominancia entre las estrategias ni equilibrios de Nash en estrategias puras. Por lo tanto solo tenemos que estudiar los posibles equilibrios de Nash en estrategias mixtas.

Estudiamos las utilidades esperadas de $J1$ cuando $J2$ utiliza una estrategia mixta $(y, 1-y)$ con $y \in [0,1]$:

$$u_1(R,(y,1-y)) = -Cy + M(1-y) = M - (C+M)y.$$
$$u_1(NR,(y,1-y)) = 0y + 0(1-y) = 0.$$

Igualamos y resolvemos para y:

$$M - (C+M)y = 0 \iff y = \tfrac{M}{C+M}.$$

Observamos que, $y > 0$ porque $C > 0$ y $M > 0$ y que $y < 1$ porque $C > 0$.

Repetimos el procedmiento para $J2$ siendo $(x, 1-x)$ una estrategia mixta de $J1$ con $x \in [0,1]$

$$u_2((x,1-x),A) = Ex + 0(1-y) = M - (C+M)y$$
$$u_2((x,1-x),B) = Px + P(1-x) = P$$

Igualamos y resolvemos para x:

$$Ex = P \iff x = \tfrac{P}{E}.$$

Observamos que, $x > 0$ porque $P > 0$ y $E > 0$ y que $x < 1$ porque $E > P$.

Como hemos obtenido valores para las dos variables en el intervalo abierto $(0,1)$ sabemos que las mejores respuestas se cruzan en un único punto y por lo tanto el método simplificado es suficiente. El único equilibrio de Nash se da en el perfil de estrategias mixtas

$$((\tfrac{P}{E}, \tfrac{E-P}{E}), (\tfrac{M}{M+C}, \tfrac{C}{M+C})).$$

Vamos a poner un caso en concreto. Sean $E = 10000$, $P = 1000$, $C = 500000$ *y* $M = 2000000$**.**

En este caso el equilibrio de Nash es: $((\frac{1}{10}, \frac{9}{10}), (\frac{4}{5}, \frac{1}{5}))$. Es decir, en equilibrio, el concejal malversa caudales públicos con una probabilidad de 0.1 y no lo hace con probabilidad de 0.9, y la inspectora investiga el ayuntamiento A con una probabilidad de 0.8 e investiga el ayuntamiento B con una probabilidad de 0.2.

¿Cómo podríamos cambiar el modelo para que el concejal tenga menos incentivos para robar?

Es tan fácil como bajar el valor de la variable $x = \frac{P}{E}$, acercándola a 0. Para ello, hay que aumentar la diferencia entre E y P. En otras palabras, aumentar la utilidad del premio extraordinario de la inspectora (E) o disminuir el pago que obtiene por investigar el ayuntamiento B (P).

Esta es una de las opciones posibles, no por ello la única.

Referencias

[1] Pérez, Joaquín; Jimemo, José Luís; Cerdá, Emilio: Teoría de Juegos.

[2] González Díaz, Julio; García Jurado, Ignacio; Fiestras Janeiro, M. Gloria: An Introductory Course on Mathematical Game Theory.

[3] San José Plana, Adrià: Noncooperative game theory: general overview and its application to the study of cooperation.

[4] Binmore, Ken; Effinger, G.; La teoría de juegos: una breve introducción.