Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

THE WAR OF ATTRITION

Autor: Marina Ginel

Director: Dr. Xavier Jarque
Realitzat a: Departament de matemàtiques i informàtica

Barcelona, 23 de gener de 2023

Abstract

This paper presents a negotiation model known as the *War of Attrition*, in which two players compete for a good that loses value until they reach an agreement on distribution (what part of this good each will keep). The mathematical tool we use to study this model is game theory, and more specifically, the theory of non-cooperative games with incomplete information. The resolution of the model, that is, the characterization of the equilibria, will involve the study of special solutions of differential equations in the plane.

Resum

Aquest treball presenta un model de negociació conegut com a *War of Attrition* (guerra del desgast), en el que dos jugadors es disputen un bé que perd valor mentre no s'arribi a un acord de repartiment (quina part d'aquest bé es quedarà cadascú). L'eina matemàtica que fem servir per a estudiar aquest model és la teoria de jocs i, més concretament, la teoria de jocs no cooperatius amb informació incompleta. La resolució del model, és a dir, la caracterització dels equilibris, implicarà l'estudi de solucions especials d'equacions diferencials al pla.

2020 Mathematics Subject Classification. 91A1, 91A27, 91B06

Agraïments

Vull començar agraint al meu tutor el Dr. Xavier Jarque per haver estat ajudant-me durant tots aquests mesos en l'elaboració d'aquest treball.

Vull agrair a la meva família per haver-me sentit parlar de matemàtiques durant tots aquests anys i, tot i no entendre res dir-me que si amb un somriure, i per entendre que el fet de passar més hores a la biblioteca que a casa no era en contra seva.

M'agradaria mencionar també a totes les persones que he conegut durant la carrera, sense ells no hauria estat possible arribar fins a qui, sobretot gràcies als que m'han ajudat a estudiar i entendre millor les assignatures més complicades, als que heu compartit classes amb mi i m'heu donat suport quan no sabíem com fer els exercicis.

Finalment, vull agrair a tota la gent de l'hockey, i en especial al meu equip, que han aguantat durant quatre anys de viatges tots els meus drames matemàtics, des d'hores de bus de programació, hores de repetició dels Teoremes de Sylow i moments d'estrès per haver d'acabar una entrega i que no tinguéssim llum.

Índex

1 Introducció

La teoria de jocs és una branca del coneixement científic entre les matemàtiques i l'economia (també en altres àmbits com la biologia matemàtica, l'ecologia, etc.) que vol entendre els mecanismes de presa de decisions d'agents davant de processos de negociació, competència entre agents o espècies, repartiment dels costos en un projecte comú, etc.

Les decisions que prenen els agents s'anomenen estratègies. Un cop fixades les estratègies de cadascun dels jugadors, el joc dona una solució concreta i la teoria de jocs pretén entendre, des d'un punt de vista científic, quines són "les millors"estratègies que poden jugar els agents, les propietats de les solucions obtingudes, i més generalment donar un marc teòric a la teoria de decisions.

Els primers escrits sobre teoria de jocs daten del 1713 quan James Waldegrave (1684-1741) va donar una solució a un joc de cartes per a dos jugadors. Més endavant, en 1838, Antonie Agustin Cournot (1801-1877) va desenvolupar un treball sobre duopolis, un aspecte rellevant dins de la teoria de jocs. Aquesta materia no va començar a consolidar-se fins a les aportacions de John von Neumann (1903-1957) que l'any 1928 va publicar un article titulat "Sobre la teoria de jocs", i més tard, juntament amb Oskar Morgensetern, un llibre anomenat "Teoria de jocs i comportament econòmic", en 1944. A poc a poc, l'àmbit de la teoria de jocs va anar guanyant terreny. El seu gran pensador va ser John Nash (1928-2015), qui va guanyar el Premi Nobel d'Economia gràcies a les seves aportacions, i va ser ell qui va descriure el que avui dia coneixem com a equilibri de Nash, que més endavant detallarem que és i la seva importància.

Podem definir la teoria de jocs com l'estudi matemàtic de les situacions en les quals un individu ha de prendre una decisió tenint en compte les eleccions que els altres realitzen. Així, de manera informal podem dir que un joc és un model matemàtic per entendre la presa de decisions en una determinada situació i la interacció entre els que prenen les decisions, aquests s'anomenaran jugadors. Els jugadors podran jugar de manera conjunta, és a dir, per a obtenir un benefici conjuntament, sent així un joc cooperatiu, o de manera individual intentant beneficiar-se el màxim un mateix, el que anomenem jocs no cooperatius. En el primer cas podríem tenir com a joc unes eleccions, on el guanyador es tria conjuntament entre tots els votants, per altra banda, en parlar de joc no cooperatius, podem tenir per exemple el joc dels escacs, en el qual ambdós jugadors jugaran una partida per veure qui guanya.

Dins dels principals conceptes de teoria de jocs, parlarem d'estratègies, aquestes ens donaran les accions dels jugadors en cada moment del joc, o en altres paraules, ens diran que haurà de fer cada jugador quan li toqui jugar. Per exemple, si agafem el joc de pedra, paper, tisora, on juguen dos jugadors, les possibles estratègies per a tots dos són pedra, paper o tisora, i han de triar quina de les tres accions realitzaran. Un cop feta la tria es jugarà el joc. El joc podrà acabar de dues maneres diferents, en empat, si els dos jugadors han triat la mateixa acció, o en victòria per a un jugador i derrota per a l'altre amb relació a què la pedra guanya a la tisora, la tisora guanya al paper i, el paper a la pedra. Així, un cop acabat el joc, direm que tenim una solució del joc. Podem definir informalment la solució d'un joc com el conjunt de resultats del joc que donaran peu a un seguit de pagaments, que seran els beneficis (positius, zero o negatius) que tindran els jugadors un cop finalitzat el joc. En el nostre exemple podríem dir que guanyar aporta un pagament d'un euro, perdre aporta la pèrdua d'un euro, i l'empat ens deixaria en pagament zero.

Una noció clau dins de la teoria de jocs, potser fins i tot l'objectiu de la teoria de jocs en si mateixa, és localitzar quines són les "millors" estratègies de cada jugador d'acord amb els pagaments que tenen associats. Dins la teoria de jocs clàssica suposem que tots els jugadors són racionals i, per tant, miren de maximitzar els pagaments com a objectiu únic. Després d'alguns intents descrits per John von Neumann i Oskar Morgenstern en el seu llibre sobre jocs de "suma zero" (com el pedra, paper o tisora) va ser John Nash qui, introduint la noció que avui coneixem com Equilibri de Nash, va revolucionar la teoria. Nash va observar que en un joc no cooperatiu on els jugadors no poden arribar a cap tipus de pacte o coalició, cada jugador ha d'optimitzar el seu guany "assumint" qualsevol possible estratègia del seu(s) oponent(s). Així quan això ho fem per tots els jugadors alhora permet trobar estratègies per tots els jugadors amb la propietat que cap jugador es vol desviar un cop sap el que els altres jugadors han fet. Tothom alhora ha fet l'estratègia de millor resposta tenint en compte l'estratègia dels altres jugadors. Certament, Nash va provar que tots els jocs (sota hipòtesis força raonables) admeten estratègies d'equilibris (potser no úniques) introduint un nou tipus d'estratègies anomenades estratègies mixtes.

Quan parlem de jocs podrem dividir-los en dues categories ben diferenciades, els jocs amb informació completa i els jocs amb informació incompleta. El joc del qual parlàvem abans, pedra, paper i tisora, es classificarà dins dels jocs amb informació completa, ja que tots dos jugadors saben quines són les possibles estratègies del seu oponent i, quins són els seus pagaments i els de tots els jugadors un cop obtingut el resultat. Per altra banda, els jocs amb informació incompleta, seran aquells en els quals els jugadors tenen informacions privades sobre les seves preferències, estratègies o pagaments, que el seu oponent no coneix. Un exemple seria la subhasta a sobre tancat d'un quadre. Cada jugador sap quina serà la seva valoració del quadre (és a dir, allò que estan disposats a pagar), però no sap la valoració del quadre per part dels altres jugadors.

L'objectiu d'aquest treball serà analitzar el que es coneix com a *War of Attrition*, en català *guerra del desgast*. Iniciarem l'explicació amb un exemple i al capítol 3 donarem tots els detalls del joc. Es tracta d'un joc de dos jugadors que competeixen, suposem, que per un pastís de nata que es va desfent a mesura que passa el temps i, per tant, cada vegada el valor del pastís va decreixent. Inicialment, els dos jugadors volen emportar-se el màxim del pastís, posem que cada jugador vol com a mínim el 80%, cedint així només el 20% restant al seu oponent. L'estratègia per a cada jugador serà triar en quin moment acceptarà l'oferta del seu oponent. Es tracta d'un joc amb informació incompleta. Els jugadors no saben com és d'ambiciós el seu oponent, és a dir, no saben quina disposició té el seu adversari en fer el pas i cedir. Aquesta incertesa la modelitzarem suposant que cada jugador sap que el tipus del seu adversari (és a dir, allò que determina la seva actitud a la negociació o predisposició a cedir) és una variable aleatòria amb una certa funció de densitat. Així, cada jugador coneix el seu tipus i la informació (incompleta) sobre el tipus del seu adversari és que aquest segueix una certa disposició aleatòria, les funcions de densitat i distribució on viuen els tipus dels jugadors són conegudes per tots. A continuació veiem una imatge de les propostes inicials de repartiment del pastís per part dels dos jugadors. (Veure figura 1)

Parlant més matemàticament, però sense entrar en formalitats, podem dir que es tracta d'un joc de dos jugadors, que compten amb informació incompleta, és a dir, els jugadors tenen informació privada sobre les seves preferències, que el seu oponent no coneix; i que juguen a temps continu, que vol dir que el temps no es mesura en moments (temps discret), sinó que s'avalua com un flux que no està dividit, és a dir, no es limita a una mesura període a període, sinó que avança contínuament sense interrupcions un cop

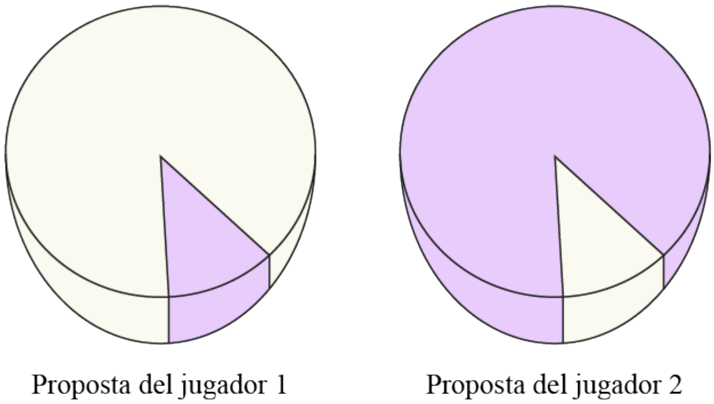

Figura 1: Representació de les preferències de repartiment de cada jugador.

iniciat. Cadascun dels jugadors haurà de decidir quina de les dues alternatives possibles preferirà, en termes de l'exemple anterior, el jugador 1 preferirà quedar-se amb la seva proposta, mentre que el jugador 2 preferirà per la seva banda la seva opció; i haurà de triar en quin temps la cedirà, és a dir, ha de decidir en quin moment es queda amb el "20%", en cas que l'altre jugador no ho hagi fet encara. En acabar el joc, els individus obtindran els pagaments corresponents, que hauran anat decreixent a mesura que passa el temps, en el cas del pastís el pas del temps es reflectirà en què s'haurà anat desfent i el seu "valor"haurà disminuït.

Aquest joc el va proposar originàriament John Maynard Smith, el 1974, per estudiar el comportament dels animals, i posteriorment, s'ha usat per a estudiar una gran varietat de conflictes. Van ser molts qui van analitzar aquest tipus de jocs i, en general, la conclusió a la qual es va arribar va ser que hi ha un seguit d'equilibris que es poden caracteritzar mitjançant un sistema d'equacions diferencials ordinàries.

Definirem el model de manera que la impaciència quedarà modelada en forma d'exponencial, és a dir, el factor de descompte serà una exponencial amb exponent negatiu. L'exponencial ens donarà la possibilitat de tenir jugadors que preferiran no concedir mai en el temps, ja que, acabar el joc en desacord els proporcionarà pagament zero, mentre que si cedeixen en temps molt llunyans de zero obtindran pagaments negatius.

2 Conceptes elementals de teoria de jocs

En aquest capítol donarem una pinzellada a diferents conceptes relacionats amb la teoria de jocs, els quals ens seran de gran utilitat per a entendre millor les nocions que necessitarem durant tot el treball. Començarem parlant de l'exemple més típic d'aquest àmbit matemàtic, com és el joc del dilema del presoner.

Exemple 2.1 (Dilema del presoner). S'han detingut dos lladres que han comès un robatori junts, però no es tenen proves suficients perquè tots dos vagin a la presó per haver comès un delicte greu. Es decideix interrogar-los per separat, i proposar-los un pacte. Si un dels dos confessa i l'altre no, el que ha confessat se'l deixa lliure mentre que es tenen proves suficients perquè l'altre lladre vagi deu anys a la presó. Si ambdós confessen, aleshores, tenen proves suficients per tancar-los, i van cadascun cinc anys a la presó. Mentre que si cap dels dos confessa, aleshores, aniran els dos a la presó, però com les proves són mínimes només se'ls condemna a un any.

Per poder representar tota aquesta informació de manera més senzilla, usarem. En el nostre cas ens quedarà la següent matriu:

		Jugador 2	
		Confessar	No confessar
Jugador 1	Confessar	-5, -5	0, -10
	No confessar	-10, 0	-1, -1

A aquesta representació l'anomenem **representació en forma matricial d'un joc**. En aquest cas, el que a simple vista sembla més òptim és que tots dos lladres no confessin, però com veurem més endavant aquesta no és la solució del joc si suposem que els jugadors són racionals, els jugadors racionals són aquells que sempre trien les millors estratègies disponibles. Ja que en el cas que un dels dos en última instància canviï el seu semblar, canviaria la disposició del joc i estaríem en un punt de pagaments (0, -10) o (10, -0), i el jugador que havia decidit no confessar acabaria rebent pagaments pitjors. Tot just, si els dos trien confessar, mai voldran canviar el seu semblar, ja que si saben que l'altre ha confessat, i no confessen, estaran condemnats a deu anys de presó, i l'individu que ha confessat quedarà lliure. Per tant, el millor que poden fer tots dos jugadors és confessar, i com veurem més endavant, la condició (confessar, confessar) és el que anomenarem equilibri de Nash.

2.1 Jocs en forma extensiva

Per tal de poder definir els jocs en forma extensiva començarem parlant dels elements que formen un joc.

1. **Conjunt de jugadors**. Tindrem $N = \{0, 1, ..., n\}$, on el jugador 0 representa a la natura, tot i que no sempre tindrà un paper rellevant.

2. **Ordre dels successos**. Analitzem els successos en forma de arbre. Sigui K el conjunt de nodes de l'arbre, definim una relació binària d'ordre parcial R sobre K. Aquesta serà una relació de precedència i complirà les propietats següents:

   (a) Propietat irreflexiva: per tot $x \in K$ tenim que $\neg(xRx)$.

(b) Propietat transitiva: per tot $x, x', x'' \in K$, si (xRx') i $(x'Rx'')$, aleshores, (xRx'').

Tot seguit, definim també una relació de precedència immediata P de la següent manera: xPx', si i només si, (xRx') i no existeix x'' tal que $xRx''Rx'$. El conjunt de predecessors immediats el definim tal que per cada $x \in K$, $P(x) \equiv \{x' \in K; x'Px\}$. Per altra banda, els successors immediats estaran definits com P^{-1}.

Tenim doncs que (K, R), el conjunt de nodes amb la relació binària, formen l'arbre de successors, que té les propietats següents:

(a) Té un únic node inicial x_0: únic x que no té predecessors immediats, és a dir, $P(x_0) = \emptyset$, i precedeix a tots els altres nodes, per tot $x \neq x_0$, tenim la relació x_oRx.

(b) Per cada $\hat{x} \in K$, amb $\hat{x} \neq x_0$, existeix un únic camí de predecessors $\{x_1, ..., x_n\}$ que uneix $\hat{x}$ a x_0.

3. **Nodes finals**. Anomenem conjunt de nodes finals a $Z = \{x \in K : P^{-1}(x) \neq \emptyset\}$. Aquests nodes ens donen tota la informació d'una jugada.

4. **Ordre de moviments**. Particionem $K \setminus Z$ en $n+1$ subconjunts, un per cada jugador, $K_0, ..., K_n$. I tenim que si $x \in K_i$, aleshores, un cop realitzat el moviment x és el jugador i qui ha de realitzar la següent acció. Per comoditat, la natura sempre mou primer, i de cop, és a dir, $K_0 = \{x_0\}$.

5. **Accions possibles**. Per tot $x \in K$ el conjunt d'accions possibles el denotem per $A(x)$. El cardinal d'accions possibles ha de ser igual al cardinal de successors immediats, és a dir, $\#A(x) = \#P^{-1}(x)$.

6. **Conjunts d'informació**. Per cada jugador i considerarem una partició H_i del seu conjunt de nodes K_i. Direm que H_i és un conjunt d'informació, si en cada $h \in H_i$ el jugador i no pot distingir en quin node es troba en el moment de realitzar l'acció, formalment, si $x \in h$ i $x' \in h$ aleshores $A(x) = A(x')$.

7. **Pagaments**. Cada possible jugada té un pagament associat per cadascun dels jugadors. A cada node $m \in Z$ li assignem un vector (n+1)-dimensional, π_i^j (amb $i = 0, ..., n$, i $j = 1, ..., m$), que s'identifica com el pagament al jugador i en el node Z^j. El pagament de la natura no és important, per tant li associarem a tots els nodes la mateixa quantitat.

Tenim doncs, que podem escriure un **joc en forma extensiva** com

$$\Gamma = \{N, \{K_i\}_{i=0}^n, R, \{H_i\}_{i=0}^n, \{(\pi_i^j)_{i=0}^n\}_{j=1}^m\}. \tag{2.1}$$

Acabarem la secció amb un parell d'exemples, on ilustrarem la respresentació extensiva (en forma d'arbre) d'un joc.

Exemple 2.2 (Matching pennies)**.** El matching pennies és el joc de cara o creu, el primer jugador tria entre cara o creu (C o +), i el segon fa el mateix. Si trien el mateix, guanya el jugador 1, si no, guanya el jugador 2. Pot tenir dues representacions diferents, depenent de si el joc es juga de forma seqüencial o simultània. En el primer cas, el jugador que juga en segona instància tindrà avantatges respecte al seu oponent, ja que sabrà quina ha estat la tria anterior, i si actua de forma racional, sempre guanyarà. En el segon cas, els dos jugadors jugaran a la vegada, i representarem la informació mitjançant conjunts d'informació (representats gràficament com una recta de punts entre els nodes que formen part del mateix conjunt d'informació). Tenim doncs, la representació en forma d'arbre següent:

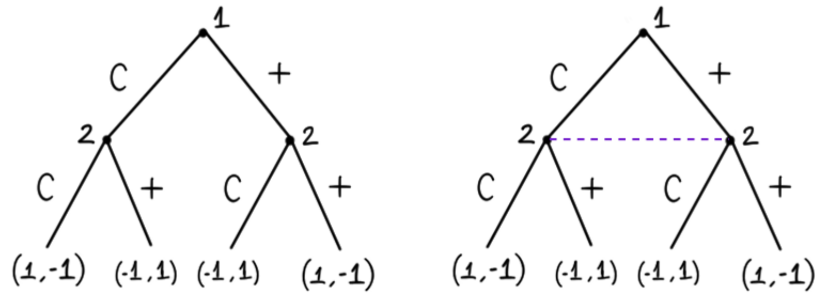

Figura 2: Representació en forma extensiva del matching pennies.

Exemple 2.3 (Dilema del presoner)**.** Retornant de nou al primer exemple, a continuació representarem en forma extensiva el joc ja mencionat. En aquest cas, es tracta sempre d'un joc simultani, per tant, només tindrem la representació que usa els conjunts d'informació.

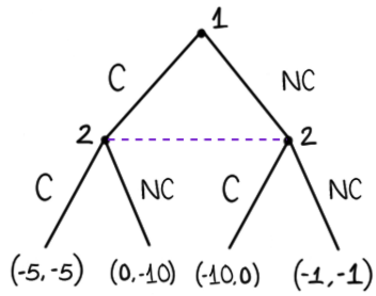

Figura 3: Representació en forma extensiva del dilema del presoner.

2.2 Jocs en forma normal o estratègica

Sigui Γ un joc en forma extensiva, definit a 2.1, **una estratègia en** Γ és un conjunt de regles contingents que prescriuen que ha de fer un dels jugadors en cadascun dels seus conjunts d'informació. És a dir, una estratègia per al jugador i ha d'anticipar totes les posibles situacions en les quals el jugador es pot trobar, i per a cadascuna d'elles triar una i només una de les accions possibles.

Una estratègia per al jugador i pot formalitzar-se mitjançant una funció

$$S_i : H_i \longrightarrow A_i,$$

que va des del conjunt d'informació del jugador, fins al seu conjunt d'accions possibles, on

$$A_i = \bigcup_{h \in H_i} A(h) \text{ i } A(h) = A(x) \; \forall x \in h,$$

requereix que $\forall h \in H_i$, $\forall x \in h$, tenim $S_i(h) \in A(h)$, és a dir, cadascuna de les accions triades al conjunt d'informació és una de les accions del conjunt d'accions possibles.

Cada jugador ha de triar una estratègia s_i en el seu conjunt d'estratègies S_i. Diem que un **perfil d'estratègies**

$$s = (s_0, s_1, \ldots, s_n) \in S = S_0 \times \cdots \times S_n,$$

descriu l'estratègia triada per cadascun dels jugadors. Si el joc és seqüencial, aleshores l'estratègia haurà d'incloure la seqüencialitat de la tria dels jugadors.

Tenim doncs, que podem representar un **joc en forma normal o estratègica** com

$$G(\Gamma) = \{N, \{S_i\}_{i=0}^n, \{\pi_i\}_{i=0}^n\}, \tag{2.2}$$

on S_i són els espais d'estratègies dels jugadors, i π_i són les funcions de pagaments, que ens donen el pagament π_i^j obtingut pel jugador i al node final Z^j. Amb aquesta definició, John Nash, va tenir problemes en el moment de definir l'existència del que coneixem com a equilibir de Nash, explicada en seccions posteriors. I per resolre el problema, va considerar la possibilitat de que els jugadors en comptes de triar una estratègia com les definides, que s'anomenen **estratègies pures**, pugui triar una distribució de probabilitats sobre els seus respectius conjunts d'estratègies, el que anomenarem **estratègies mixtes**.

Tenim doncs, que un joc en forma normal, $G = \{N, \{S_i\}_{i=0}^n, \{\pi_i\}_{i=0}^n\}$ es pot extendre a la seva extensió mixta com la tripleta

$$\hat{G} = \{N, \{\Sigma_i\}_{i=0}^n, \{\Pi_i\}_{i=0}^n\},$$

on per cada i, Σ_i (l'estratègia mixta), és el conjunt de les distribucions de probabilitats sobres les estratègies pures S_i, és a dir,

$$\Sigma_i = \{\sigma_i : S_i \to [0,1] \text{ tal que } \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1\},$$

i $\sigma_i(s_i)$ és la probabilitat amb la que el jugador i farà s_i si tria l'estratègia mixta σ_i. Notem que el conjunt Σ_i es pot identificar amb el simplex de l'espai euclidià S_i- dimensional. La funció de pagaments també s'extén al conjunt de perfils d'estratègies mixtes $\Sigma = \Sigma_1 \times ... \times \Sigma_n$ en termes de pagaments esperats, i la definim com

$$\Pi_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \left[\left(\prod_{j \in N} \sigma_j(s_j) \right) \cdot \pi_i(s) \right].$$

2.3 Dominància estratègica

En aquest apartat parlarem de la dominància estratègica, veurem quan una estratègia és dominant o dominada i per què aquest concepte ens facilitarà el fet de trobar solucions als jocs. Comencem definit estratègia dominada.

Definició 2.4. *Sigui G un joc en forma estratègica, la estratègia s_i del jugador i està (estricament)* ***dominada*** *si existeix $\sigma_i \in \Sigma_i$, on Σ_i és l'espai d'estratègies mixtes del jugador i, tal que*

$$\forall s_{-i} \in S_{-i} \equiv S_0 \times ... \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times ... \times S_n,$$

i es té la següent relació de pagaments:

$$\pi_i(\sigma_i, s_{-i}) > \pi(s_i, s_{-i}).$$

És a dir, direm que una estratègia s_i està dominada si el pagament d'alguna estratègia del jugador i pertanyent a Σ_i és més gran que el pagament de l'estratègia s_i.

Observació 2.5. Si una estratègia s_i està dominada, ho estarà també qualsevols estratègia mixta que li asigni probabilitat positiva.

A continuació ilustratem amb un exemple com s'aplicaria a un joc el concepte de dominància estratègica, i com aquest fet ens acabarà ajudant a trobar la solució del joc, és a dir, a trobar les estratègies que hauran de triar tots dos jugadors per tal de beneficiar-se al màxim.

Exemple 2.6. Considerem un joc de dos jugadors, el jugador 1 pot triar entre tres possibilitats X, Y o Z, el jugador 2 pot triar entre A, B i C, es juga el joc de forma simultània i, per tant, cada jugador té com a estratègies només les seves tres possibilitats. Escrivim el joc en forma matricial obtenint així la següent matriu:

		Jugador 2		
		A	B	C
	X	2, 2	1, 0	0, 3
Jugador 1	Y	4, 4	7, 2	6, 1
	Z	3, 5	2, 6	8, 3

Per veure la dominància en aquest joc comprovem que per al jugador 1, l'estratègia Y sempre és millor que la X, per fer-ho compararem un a un els pagament d'ambdues estratègies depenent de la tria del jugador 2, suposant que el jugador 2 tria A, aleshores el pagament per al jugador 1 és 4 si fa Y, mentre que si fa X és 2, i trivialment, $4 > 2$, per tant, en aquest cas el jugador 1 preferirà fer Y, si el jugador 2 fa B tenim que $7 > 1$, i si fa C $6 > 0$. Afirmem, doncs, que l'estratègia Y domina a la X. De la mateixa manera, tenim que per al jugador 2, l'estratègia B domina a la C.

Aplicant aquestes restriccions ens queda la següent matriu:

		Jugador 2	
		A	B
Jugador 1	Y	4, 4	7, 2
	Z	3, 5	2, 6

Repetint el mateix procediment en aquesta nova matriu, tenim que, per al jugador 1, l'estratègia Y domina la Z. I aleshores, considerant que el jugador 1 sempre farà Y, tenim que per al jugador 2, l'estratègia A domina la B. Obtenim, doncs, que la solució (Y, A) amb pagament (4, 4), trobada per dominància, és la solució associada a aquest joc.

El procediment que acabem de realitzar rep el nom de **procés iteratiu d'eliminació d'estratègies dominades**. Si considerem jocs finits, és a dir, jocs amb un límit temporal o espacial, aleshores el procés d'eliminació acabarà necessàriament en un nombre màxim d'iteracions. Per construcció tindrem, doncs, que el conjunt d'estratègies que perduraran a aquest procés indefinit mai serà buit, ja que una estratègia només es descarta si existeix una altra que la domini. Si el procés iteratiu d'eliminació dona lloc a un sol perfil d'estratègies, aleshores diem que el joc és resoluble per dominància. Però no tots els jocs es poden resoldre d'aquesta manera.

Podem afirmar, doncs, que el joc de l'exemple anterior és un joc resoluble per dominància, veiem ara un exemple d'un joc que no és d'aquest tipus.

Exemple 2.7 (Batalla dels sexes)**.** Aquest joc planteja la situació següent: una parella s'ha de posar d'acord sobre que fer el cap de setmana, els dos volen quedar, però no aconsegueixen posar-se d'acord amb el que fer. La noia vol anar a veure futbol, mentre que el noi prefereix anar de compres. Donat que ambdós volen passar temps junts, anar a llocs diferents els proporcionarà insatisfacció, que veurem reflectida amb pagaments zero. Si coincideixen i van junts, tots dos estaran contents, per tant, els pagaments seran positius, tot i que qui hagi triat el lloc de quedada estarà més satisfet, per tant, aquest tindrà pagament 3 mentre que l'altre membre de la parella obtindrà 2. Tenim doncs, la següent representació matricial del joc:

		Noi	
		Futbol	Compres
Noia	Futbol	3, 2	0, 0
	Compres	0, 0	2, 3

Apliquem ara el procés d'eliminació d'estratègies dominades. Tenim que si el noi tria anar al futbol, aleshores la noia prefereix anar també al futbol, ja que $3 > 0$, però si el noi tria anar de compres, aleshores la noia també triarà aquesta opció, ja que $0 < 2$, és a dir, li proporcionarà un pagament millor. Així, no hi ha estratègies dominades per a la noia. El noi, de forma anàloga, no tindrà tampoc estratègies dominades. Per tant, aquest joc no es podrà resoldre usant aquest procés d'eliminació.

2.4 Equilibri de Nash

Tal i com acabem de veure en el darrer exemple, malauradament, no tots els jocs admeten una resolució tan fàcil i còmoda com és la resolució mitjançant el mètode d'eliminació d'estratègies dominades. Per aquest motiu, durant aquesta secció parlarem d'un concepte molt conegut en teoria de jocs, i l'existència del qual estarà garantida per a un ampli conjunt de jocs, aquest concepte és l'equilibri de Nash.

Definició 2.8. *Donat un joc en forma estratègica $G = \{N, \{S_i\}_{i=0}^n, \{\pi_i\}_{i=0}^n\}$, un perfil d'estratègies $s^* \equiv (s_1^*, s_2^*, ..., s_n^*)$ és un* ***equilibri de Nash*** *si per tot $i = 1, 2, ..., n$ i per tot $s_i \in S_i$ tenim que $\pi_i(s^*) \geq \pi_i(s_i, s_{-i}^*)$.*

Un equilibri de Nash és, per tant, un perfil estratègic tal que cap jugador té una desviació unilateral beneficiosa, és a dir, qualsevol jugador que vulgui canviar d'estratègia obtindrà uns pagaments pitjors si els altres jugadors no canvien. D'aquesta manera, l'equilibri de Nash es pot entendre com a un requisit de consistència de les estratègies usades pels jugadors.

Lema 2.9. *En un joc resoluble per dominància, l'únic equilibri de Nash és el perfil d'estratègies resultant d'aquesta resolució.*

A continuació donarem un criteri per a trobar equilibirs de Nash, ja que amb la resolubilitat per dominànicia no tindrem suficient per trobar equilibris de Nash. El criteri s'anomena criteri de millor resposta.

Definició 2.10. *Per a un jugador i, definim la* ***funció de millor resposta*** $\rho_i : \Sigma \rightrightarrows \Sigma_i$ *com*

$$\rho_i(\sigma) = \{\hat{\sigma_i} \in \Sigma_i \text{ tal que } \pi_i(\hat{\sigma_i}, \sigma_{-i}) \geq \pi_i(\tilde{\sigma_i}, \sigma_{.i}), \text{ per tot } \tilde{\sigma_i} \in \Sigma_i\},$$

És a dir, la funció de millor resposta es basa en, sabent quina serà la tria d'un jugador, quina és la meva millor opció? Matemàticament, escriurem que sabent que l'altre jugador farà σ_{-i}, jo trio $\hat{\sigma_i}$ tal que els meus pagaments sempre siguin majors o iguals que qualsevol atra de les meves estratègies $\tilde{\sigma_i} \in \Sigma_i$.

Veiem quin és l'equilibri de Nash en el joc que hem proposat a l'inici del capítol, el dilema del presoner.

Exemple 2.11. Teniem la matriu següent:

		Jugador 2	
		Confessar	No confessar
Jugador 1	Confessar	-5, -5	0, -10
	No confessar	-10, 0	-1, -1

Comencem resolent el joc per dominància, tenim que, per al jugador 1, en qualsevol cas, confessar és millor que no confessar, ja que obtindrà pagaments $-5 > -10$ o $0 > -1$. De forma anàloga, per al jugador 2, també serà millor confessar que no fer-ho. Per tant, tenim que la solució d'aquest joc, obtinguda per dominància, és (C,C) amb pagaments (-5,-5).

Ara fem el mateix procediment, però resolem el joc usant el criteri de millor resposta. Tenim doncs,

$$\rho_1(C) = C, \rho_1(NC) = C,$$
$$\rho_2(C) = C, \rho_2(NC) = C.$$

Destacant a la matriu els elements de millor resposta tenim:

		Jugador 2	
		Confessar	No confessar
Jugador 1	Confessar	**-5, -5**	**0**, -10
	No confessar	-10, **0**	-1, -1

Per tant, tenim que la solució d'aquest joc, obtinguda usant el criteri de millor resposta, és (C,C) amb pagaments (-5,-5). Obtenint així el mateix que amb el procediment anterior.

Podem concloure, doncs, que (C,C) serà l'únic equilibri de Nash. En casos amb estratègies dominants podem buscar els equilibris de Nash usant qualsevol dels dos procediments, en els casos en què no hi hagi estratègies dominants, usarem el criteri de millor resposta.

És possible també, que en molts casos tinguem més d'un equilibri de Nash, i no podrem tirar entre ells amb el que sabem actualment. Veiem un exemple de joc amb més d'un equilibri de Nash.

Exemple 2.12. En aquest joc de dos jugadors, el jugador 1 podrà triar entre X, Y o Z, mentre que el jugaodr 2 podrà triar entre A, B o C. En aquest cas, aquestes opcions es correspondran amb les estratègies, ja que jugaran de manera simultània. Tenim la següent representació matricial del joc:

		Jugador 2		
		A	B	C
	X	8, 5	1, 4	0, 7
Jugador 1	Y	3, 1	2, 3	1, 0
	Z	2, 0	0, 0	1, 1

Ara busquem els equilibris de Nash, per fer-ho usem el criteri de correspondencia de millor resposta, ja que en aquest joc no hi ha estratègies dominants. Tenim doncs

$$\rho_1(A) = X, \rho_1(B) = Y, \rho_1(C) = \{Y, Z\},$$

$$\rho_2(X) = C, \rho_2(Y) = B, \rho_2(Z) = C.$$

Destaquem els elements que ens han sortit com a millor resposta, i ràpidament ens adonarem de quins són els equilibris de Nash.

		Jugador 2		
		A	B	C
	X	**8**, 5	1, 4	0, **7**
Jugador 1	Y	3, 1	**2, 3**	**1**, 0
	Z	2, 0	0, 0	**1, 1**

Tenim doncs, que en aquest joc hi ha dos equilibris de Nash, (Y,B) amb pagaments (2,3) i (Z,C) amb pagaments (1,1). Tot i que el primer dona pagaments majors i podríem pensar que és millor, no sempre és així, per tant, amb la informació que tenim només podem concloure que tenim dos equilibris, però no podem tirar entre ells.

Un cop vist el que és un equilibri de Nash, volem veure la seva existència. Hem de remarcar que en estratègies pures, no sempre existirà l'equilibri de Nash, però en estratègies mixtes, sempre hi haurà, com a mínim un.

Abans d'enunciar el teorema donarem algunes definicions i teoremes previs que haurem d'aplicar per tal de demostrar de manera senzilla l'existència d'equilibris de Nash.

Definició 2.13. *Siguin $A \in \mathbb{R}^m$ i $B \in \mathbb{R}^n$, la correspondència $\Gamma : A \rightrightarrows B$ es diu que és una* ***correspondència hemiconitnua superiorment*** *si per a qualsevol obert $V \in B$ que contingui $\Gamma(a)$, $a \in A$, existeix un entorn $U \in A$ de a tal que V conté $\Gamma(x)$ per tot $x \in U$.*

A continuació farem una representació gràfica de la definició per a que es pugui entendre millor.

Teorema 2.14 (Teorema de Kakutani (Border 1985))**.** *Sigui $X \subset \mathbb{R}^m$ un conjunt compacte, convex i no buit; i sigui $\varphi : X \rightrightarrows X$ una correspondència hemicontinua superiorment amb imatges convexes no buides. Aleshores la correspondència ϕ té un punt fix.*

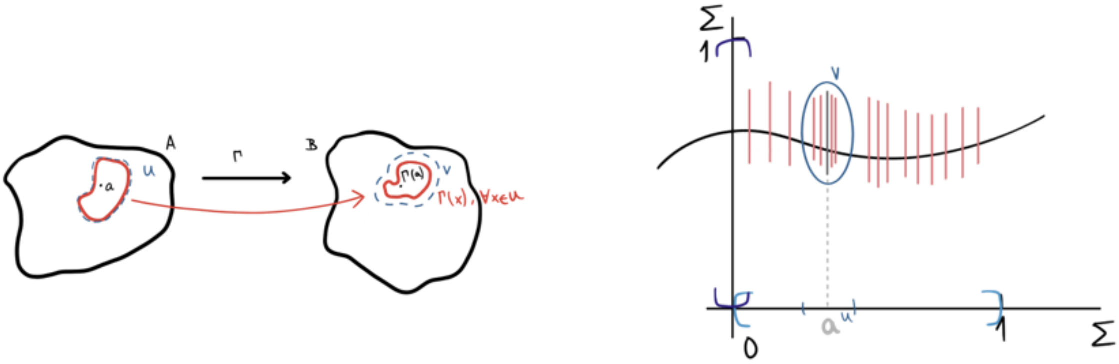

Figura 4: Representació de l'hemicontinuïtat per conjunts i per funcions.

Teorema 2.15 (Teorema del màxim (Border 1985)). *Sigui $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ un conjunt compacte i sigui $\phi : X \rightrightarrows Y$ una correspondència continua i $f : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua. Es defineix la correspondència $\xi : X \rightrightarrows Y$ com*

$$\xi(x) \equiv \{y \in \phi(x) : f(x,y) \geq f(x,y')\forall y \in \phi(x)\},$$

i la funció $g : X \to \mathbb{R}$ com

$$g(x) \equiv f(\bar{y}(x)), \bar{y}(x) \in \xi(x).$$

Aleshores la correspondència ξ és hemicontinua superiorment i la funcio g és continua.

Teorema 2.16 (Teorema d'existència de l'equilibri de Nash en jocs finits, Nash 1951). *Tot joc G en forma estratègica, en la seva extensió mixta, té al menys un equlibri de Nash.*

Demostració. Per demostrar l'existència dels equilibirs de Nash hem de tenir molt present la definició del criteri de millor resposta.

Sigui $\rho_i : \Sigma \rightrightarrows \Sigma_i$ la correspondència de millor resposta per al jugador i. Considerem ara el producte cartesià entre correspondències, és a dir, $\rho : \Sigma \rightrightarrows \Sigma$ definit per $\rho = \rho_1 \times \rho_2 \times \cdots \times \rho_n$.

Tindrem doncs, que un punt fix de ρ, és a dir, una estratègia $\sigma^* \in \Sigma$ tal que $\sigma^* \in \rho(\sigma^*)$, és un equilibri de Nash. Per probar l'existència del punt fix, usarem el teorema de Kakutani del punt fix.

Comprovem que les hipòtesi del teorema de Kakutani es compleixen per a cada ρ_i, i per tant per a ρ. Tenim que en estratègies mixtes Σ_i s'identifica amb el simplex de dimensió $S_i - 1$, on S_i és el conjunt d'estratègies per al jugador i, i

$$\Sigma = \prod_{i=1}^{n} \Sigma_i,$$

i per tant, el domini i rang de cada ρ_i és compacte, convex i no buit. Les seves imatges són no buides per tot σ, ja que cada π_i és una funció continua i per tant arriba a un màxim en Σ_i, ja que aquest és compacte. La convexitat de les imatges de ρ_i ve donada per la linealitat de cada π_i en σ_i. La hemicontinuitat superior és conseqüència del teorema del màxim. I podem aplicar el teorema de Kakutani, obtenint, tal i com voliem que existeix un punt fix de ρ.

$\square$

2.5 Informació incompleta i jocs bayesians

Fins ara els jocs que hem vist eren jocs en els quals la informació era completa o simètrica, és a dir, tota la informació necessària per a descriure el joc era de domini públic, coneguda per tots els jugadors. Però molts problemes d'interès sorgeixen en contexts on no tots els jugadors tenen o saben tota la informació del joc. És per això, que en aquesta secció parlarem de **jocs amb informació incompleta**, o informació asimètrica, que són aquells que tot i que l'estructura i el tipus de joc és coneguda per tots els jugadors, existeixen algunes informacions, normalment referides als pagaments, que són privades, és a dir, algun o alguns jugadors no les coneixen.

Un exemple de joc amb informació incompleta seria el cas de les subhastes a sobre tancat, veiem a continuació com funciona.

Exemple 2.17. Considerem una subhasta amb dos participants, és a dir, tenim un joc de dos jugadors. Cada participant ha de fer una oferta a sobre tancat sobre un quadre. L'oferta superior guanya el quadre al preu que ha indicat. Cada jugador coneix únicament la seva valoració de l'objecte, que anomenarem v_i. Les valoracions són independents entre elles, i, per tant, els jugadors no poden tenir creences entre unes i altres. El joc consistirà a calcular quina oferta ha de fer el jugador i per l'objecte coneixent únicament la seva valoració.

Els jocs amb informació incompleta es modelen moltes vegades usant jocs bayesians. Aquest tipus de joc van ser proposats per John Harsanyi (1920, 2000) entre 1967 i 1968. Harsanyi va relacionar-los, ja que va demostrar que totes les incerteses que podien aparei-xen en un joc amb informació incompleta es podien transformar en incertesa únicament en les funcions de pagament definides sobre els espais d'estratègies. A continuació donarem una caracterització sobre els jocs bayesians.

De la mateixa manera que hem fet amb els joc en forma extensiva i forma normal començarem donant els elements d'un joc bayesià.

1. **Conjunt de jugadors**. Tenim $N = \{1, 2, ..., n\}$.

2. **Conjunt de tipus**. Un conjunt de tipus T_i per a cada jugador $i \in N$, al nostre model del war of attirtion tindrem tipus infinits per a cada jugador.

3. **Una funció de densitat**. Determina la probabilitat amb la que la natura assigna a l'inici del joc el perfil de tipus $t \equiv (t_1, t_2, ..., t_n) \in T$ a cada jugador,

$$P : T \equiv T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_n \longrightarrow [0, 1].$$

4. **Pagaments**. Una funció de pagaments per a cada jugador i:

$$\pi_i : T \times A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \longrightarrow \mathbb{R},$$

   on T són els perfils de tipus de tots els jugadors, amb $t \in T$ i $A = A_1 \times ... \times A_n$, les accions possibles, amb $a \equiv (a_1, a_2, ..., a_n) \in A$.

   Definim $\mathbb{A} \equiv \Delta(A_i)$ com l'espai de mesures (o vectors) de probabilitats definits sobre A_i.

Suposarem que les dades subjacents del model són conegudes pels jugadors, i per tant donen informació simètrica. Tenim doncs, que podem definir un **joc bayesià** de la següent manera:

$$G = \{N, \{A_i\}_{i=1}^n, \{T_i\}_{i=1}^n, \{\pi_i\}_{i=1}^n, P\}.$$

La informació asimètrica s'introdueix al joc suposant que, una vegada la natura ha triat el vector de tipus $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$, cada t_i es revela únicament al jugadro i respectivament. I a partir d'aquesta informació el jugador selecciona la seva acció d'acord a una certa funció

$$\gamma_i : T_i \longrightarrow \mathbb{A}_i.$$

Que s'identifica amb l'estratègia del jugador i en el joc bayesià subjacent. Formulem ara la noció d'equilibiri bayesià:

Definició 2.18. *Donada una funció de densitats amb probabilitats $P(\cdot)$, un perfil d'estratègies $[\gamma_i^*(\cdot)]_{i=1}^n$, tal que $\gamma_i^* : T_i \to \mathbb{A}_i$, defineix un* ***equilibri bayesià*** *si per tot $i = 1, 2, \ldots, n$, per tot $t_i \in T_i$ i per tot $\alpha_i \in \mathbb{A}_i$ se satisfà que*

$$\sum_{t_{-i} \in T_{-i}} P_i(t_{-i}|t_i)\pi(t_i, t_{-i}, \gamma_i^*(t_1), \ldots, \gamma_i^*(t_i), \ldots, \gamma_n^*(t_n)) \geq \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} P_i(t_{-i}|t_i)\pi(t_i, t_{-i}, \gamma_i^*(t_1), \ldots, \alpha_i, \ldots, \gamma_n^*(t_n)),$$

on $P_i(t_{-i}|t_i)$ és la probabilitat sobre T_{-i} induïda per $P()$ quan es condiciona a t_i. I vol dir que la millor resposta és igual o millor que qualsevol altra.

Clarament, un joc bayesià es pot reformular com un joc en forma extensiva on la natura és un jugador fictici que mou primer. En aquest contex, la informació incompleta a la qual estan sotmesos els jugadors en un joc bayesià es tradueix en informació imperfecta sobre quina ha sigut l'elecció inicial de la natura. Donada qualsevol elecció de $t \in T$ realitada per la natura, es considera que aquesta no es coneguda amb precisió per algun (o tots) dels jugadors, estant la informació distribuida entre els jugadors de manera asimètrica, és a dir, uns poden saber més que els altres. Des d'aquesta perspectiva, un equilibri bayesià pot percebres com un equilibiri de Nash d'un joc amb informació imperfecta que inclou a la natura com a jugador.

3 Conceptes d'equacions diferencials

Per tal de poder donar solució al model de War of Attrition usarem equacions diferencials. Per aquest motiu durant aquest capítol parlarem de nocions bàsiques d'equacions diferencials, per tal de poder familiaritzar-se amb els conceptes que farem servir més endavant.

Una equació diferencial és aquella que relaciona una o vàries variables independents amb una variable dependent i les seves derivades respecte a les variables independents. Parlarem d'equacions diferencials ordinàries quan només depenguin d'una variable, i equacions en derivades parcials quan depenguin de més d'una variable. Durant el treball només utilitzarem les primeres.

3.1 Equacions diferencials. Teorema d'existència i unicitat

Primerament, parlarem del concepte d'equació diferencial i de les solucions de les equacions diferencials per poder, al llarg de la secció, veure l'existència i la unicitat del problema del valor inicial de solucions.

Definició 3.1. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ i sigui $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Llavors,*

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{3.1}$$

és a dir, $\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x)$ s'anomena ***equació diferencial ordinària d'ordre 1*** *(perque només apareix la primera derivada). La variable t l'anomenarem variable temporal (temps) i la x serà la variable espacial (espai).*

Un cop sabem que és una equació difererencial ordinària, veurem a que anomenem solució i algunes propietats de les solucions.

Definició 3.2. *Diem que la corba $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ és* ***una solució de l'equació*** (3.1) *a l'interval obert I, si es compleix que per tot $t \in I$ tenim que $(t, \varphi(t)) \in \Omega$ amb φ derivable i tal que la seva derivada és $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$, per tot $t \in I$.*

Sigui l'equació (3.1) definida a Ω, denotarem per $\varphi(t; t_0, x_0)$ la seva solució, amb $t_0 \in I$ tal que $\varphi(t_0; t_0; x_0) = x_0$, és a dir, de totes les solucions possibles vull mirar la que a t_0 val x_0. De fet, només hi haurà una si f compleix certes hipòtesis. Veiem un exemple.

Exemple 3.3. Sigui l'equació diferencial $\dot{x} = ax(t)$. Busquem una solució a aquesta equació. Obtenim doncs, que per tot $k \in \mathbb{R}$ la funció $x(t) = ke^{at}$ és una solució de l'equació diferencial, ja que

$$\dot{x}(t) = ake^{at} = ax(t).$$

De fet no hi ha altres solucions. Veiem de manera senzilla que és única. Suposem que $u(t)$ és una altra solució, i calculem doncs la derivada de $u(t)e^{-at}$, tenim doncs,

$$\frac{d}{dt}u(t)e^{-at} = \dot{u}(t)e^{-at} + u(t)(-ae^{-at}) = au(t)e^{-at} - au(t)e^{-at} = 0.$$

Per tant, com la derivada és igual a zero, tenim que $u(t)$ és una constant, i la única solució és $x(t) = ke^{at}$, per $k \in \mathbb{R}$.

A la col·lecció de totes les solucins l'anomenem **solució general de l'equació diferencial ordinària**. No obstant, la constant k està completament determinada si fixem $x(t_0) = x_0$, és a dir, tenim $ke^{at_0} = x_0$ si i només si $k = x_0 e^{at_0}$. Si determinem k aleshores diem que tenim una solució per al problema del valor inicial. Veiem una definició formal.

Definició 3.4. *Sigui* $\Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ *i sigui* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *(regular). Suposem que* $(t_0, x_0) \in \Omega$. *Anomenem* ***Problema del valor inicial de Cauchy*** *a la resolució de*

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= f(t,x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

A la corba solució la denotarem com hem vist anteriorment $\varphi(t)$ *o* $\varphi(t; t_0; x_0)$.

Un cop definit el problema del valor inicial de Cauchy podem donar caracteritzacions sobre les solucions del mateix. Veiem com es relaciona aquesta darrera definició amb l'equació de Volterra.

Lema 3.5 (Equació de Volterra)**.** *Suposem que* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *és contínua a* Ω *i* $t_0 \in I$. *Sigui* $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$. *És equivalent:*

i) φ *és diferenciable i resol el porblema del valor inicial de Cauchy a* I.

ii) φ *és contínua i resol l'equació de Volterra, per* $t \in I$,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \tag{3.3}$$

És a dir, hi ha un únic punt fix que és solució del problema.

Demostració. Començarem veient la implicació $i) \rightrightarrows ii)$. Sabem que φ és diferenciable i resol el problema del valor inicial de Cauchy. Tenim, per tant, que

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{\varphi}(s)ds,$$

i per definició ens queda que això és

$$x_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{\varphi}(s)ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, \varphi(s))ds,$$

que és exactament l'equació de Volterra.

Veiem l'altre implicació $ii) \rightrightarrows i)$. Partim de

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, s)ds,$$

que en $t = t_0$ val exactament $\varphi(t_0) = x_0$ per construcció, per tant, compleix la condició inicial. Com que φ és contínua, tenim que és derivable, i es compleix que $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$ i, per tant, es compleix la primera equació de (3.2). □

Acabem de definir les equacions diferencials, i hem vist que és una solució. En general el fet de trobar solucions per a les equacions diferencials no és una cosa senzilla i, s'han d'usar mètodes numèrics per a poder trobar valors aproximats de les solucions que es busquen. Però perquè aquests mètodes funcionin, prèviament hem d'haver garantit l'existència i la unicitat de solucions del problema del valor inicial de Cauchy. Així, sota certes condicions de regularitat, en aquest cas la condició principal serà que la funció sigui Lipschitz respecte a la segona variable a Ω, podrem determinar l'existència i unicitat de solucions sense calcular-les prèviament.

Definició 3.6 (Rudolf Lipschitz, 1832-1903)**.** *Sigui* $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *i sigui* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$*. Diem que* f *és* ***Lipschitz respecte la segona variable*** *(a* Ω*) si existeix* $L > 0$ *tal que*

$$||f(t,x) - f(t,y)|| \leq L||x - y||,$$

per qualssevol parelles (t, x) *i* (t, y) *de* Ω*.*

Ara veurem aquest concepte en termes locals.

Definició 3.7. *Sigui* $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *i sigui* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$*. Diem que* f *és* ***localment Lipschitz respecte la segona variable*** *(a* Ω*) si per tota parella* $(t_0, x_0) \in \Omega$*, existeix un entorn* V_{t_0,x_0} *on* f *és lipschitz respecte de la segona variable a l'entorno definit.*

Per tal de poder demostrar que el problema de Cauchy admet solució única demostrarem que l'operador definit a l'equació de Volterra és contractiu sobre un espai complet. Seguim doncs veient que és un espai complet i un operador contractiu.

Definició 3.8. *Un espai mètric* (Y, d) *es diu* ***complet*** *si tota successió de Cauchy té límit a* Y*.*

Definició 3.9. *Sigui* (Y, d) *un espai mètric complet. Un operador* $T : Y \longrightarrow Y$ *es diu* ***contractiu****, si existeix* $k \in (0, 1)$ *tal que per tot* y_1*,* $y_2 \in Y$ *tenim que*

$$d(T(y_1), T(y_2)) \leq k\ d(y_1, y_2).$$

En particular, T *és un operador uniformement continu.*

Corol·lari 3.10. *Sigui* (Y, d) *un espai mètric complet. Suposem que* $T^\ell : Y \longrightarrow Y$ *és contractiu, per* $\ell > 0$*. Llavors, existeix un únic* $y_0 \in Y$ *tal que* $T(y_0) = y_0$*, és a dir, té un únic punt fix.*

Demostració. Sabem que existeix un únic $t_0 \in Y$ tal que $T^\ell(y_0) = y_0$. I volem probar que $T(y_0) = y_0$.

Suposem que és fals, i existeix $y_1 \in Y$ tal que $T(y_0) = y_1 \neq y_0$. Tenim doncs que,

$$T^\ell(y_1) = T^\ell(T(y_0)) = T(T^\ell(y_0)) = T(y_0) = y_1.$$

Arribem a contradicció, ja que acabem de trobar un altre punt fix, i teniem que $y_0 \in Y$ era l'únic punt tal que $T^\ell(y_0) = y_0$, per tant, no existeix y_1 com l'hem descrit. I obtenim que $T(y_0) = y_0$ tal i com volíem.

□

A continuació enunciarem i demostrarem el Teorema de Picard, que serà el que ens garantirà l'existència i unicitat de solucions del problema del valor inicial de Cauchy. Sigui $I_a(t_0) = [t_0 - a, t_0 + a]$ i $B_b(x_0)$ la bola tancada centrada en x_0 i de radi b, definirem $\Omega = I_a(t_0) \times B_b(x_0)$. Ilustrem Ω amb un dibuix.

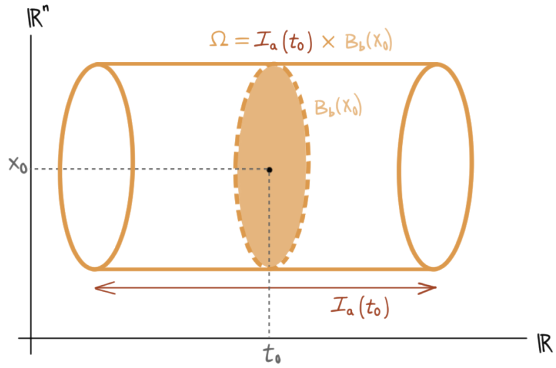

Figura 5: Representació gràfica de Ω.

Teorema 3.11 (Teorema de Picard)**.** *Sigui $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínua a Ω i Lipschitz respecte de la segona variable a Ω. Sigui $M =$màx$\{||f(t,x)||, (t,x) \in \Omega\}$. Aleshores, el problema del valor inicial de Cauchy* (3.2) *admet una única solució definida a $I_\alpha(t_0)$ on $\alpha =$ mín $\{a, \frac{b}{M}\}$.*

Demostració. Hem de veure que existeix una única funció $\varphi : I_\alpha \to \mathbb{R}^n$ que resol l'equació de Volterra. Sigui $X = \mathcal{C}(I_\alpha(t_0), B_b(x_0))$, és a dir, el conjunt de les funcions contínues definides a I_α tals que $||\varphi(t) - x_0|| \leq b$, per tot $t \in I_\alpha(t_0)$. Definim doncs l'operador $T : X \to X$ tal que

$$T(\varphi) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds.$$

Hem de veure que l'operador T està ben definit i que T^ℓ és contractiu per algun $\ell > 0$, el que ens portarà al fet que hi ha un únic punt fix que és solució, tal com volem.

Comencem per veure que T està ben definit. Tenim que,

$$||T(\varphi)(t) - x_0|| = ||x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds - x_0|| \leq |\int_{t_0}^{t} ||f(s, \varphi(s))||ds| \leq M|t_0 - t| \leq Ma < b,$$

i per tant, tal i com voliem T està ben definit.

Ara hem de veure que l'operador és contractiu. Prenem $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ i afirmem que, per tot $t \in I_\alpha$ tenim que

$$||T^n(\varphi_1)(t) - T^n(\varphi_2)(t)|| \leq \frac{L^n}{n!}|t - t_o|^n ||\varphi_1 - \varphi_2|| \leq \frac{L^n \alpha^n}{n!}||\varphi_1 - \varphi_2||.$$

Veiem que aquest fet és cert per inducció. Comencem amb el cas $n = 1$:

$$||T(\varphi_1)(t) - T(\varphi_2)(t)|| \leq |\int_{t_0}^{t} ||f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))||ds| \leq L|t_0 - t|||\varphi_1 - \varphi_2||,$$

per tant és cer per a $n = 1$. Suposem que és cert fins a n, veiem el cas $n + 1$.

$$
\begin{aligned}
||T^{n+1}(\varphi_1)(t) - T^{n+1}(\varphi_2)(t)|| &\leq ||T(T^{n+1}(\varphi_1)(t)) - T(T^{n+1}(\varphi_2)(t))|| \\
\leq |\int_{t_0}^{t} ||f(s, T^n(\varphi_1)(s)) - f(s, T^n(\varphi_2)(s))||ds| &\leq |\int_{t_0}^{t} L||T^n(\varphi_1)(s) - T^n(\varphi_2)(s)||ds| \\
\leq |\int_{t_0}^{t} L\frac{L^n}{n!}|s-t_o|^n||\varphi_1 - \varphi_2||ds| &\leq \frac{L^{n+1}}{n!}\frac{|t-t_0|^{n+1}}{n+1}||\varphi_1-\varphi_2|| \\
&\leq \frac{L^{n+1}}{(n+1!)}|t-t_0|^{n+1}||\varphi_1-\varphi_2||.
\end{aligned}
$$

Per tant, és cert per a n+1. Afirmem doncs, que la desigualtat és certa.

Ara anomenem

$$a_n = \frac{(L\alpha)^n}{n!},$$

notem que $\lim_{x\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ i, $a_n \to 0$ quan $n \to \infty$, per tant, tenim que existeix $n_0 > 0$ tal que $a_{n_0} < k < 1$ i, obtenim doncs,

$$||T^{n_0}(\varphi_1) - T^{n_0}(\varphi_2)|| \leq \sup ||T^{n_0}(\varphi_1)(t) - T^{n_0}(\varphi_2)(t)|| \leq k||\varphi_1 - \varphi_2||.$$

Per tant, T^{n_0} és un operador contractiu, tal i com voliem.

I usant el corol·lari, tenim que $T(\varphi) = \varphi$, és a dir, φ és un punt fix com voliem veure.

□

3.2 Interval màximal i solucions imporrogables

En aquesta secció veurem en quin interval com a màxim es pot definir la solució de cada equació diferencial, i com les solucions esgoten el temps o esgoten l'espai.

Definició 3.12. *Siguin φ_1 i φ_2 dues solucions de* (3.2) *definides respectivament als intervals I_1 i I_2. Si $I_1 \subset I_2$ i suposem que ${\varphi_2}_{|_{I_1}} = \varphi_1$. Llavors, diem que φ_2 és una* ***prolongació*** *de φ_1.*

Anomenem a I ***interval maximal*** *pel problema del valor inicial de Cauchy si la solució φ definida a I no es pot prolongar en cap interval $J \subset I$, és a dir, és* ***improrrogable****.*

Teorema 3.13 (Existència de solucions improrrogables)**.** *Sigui $\Omega \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un obert, sigui $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una funció contínua i Lipschitz respecte de la segona variable a Ω. Aleshores, per cada $(t_0, x_0) \in \Omega$ el corresponent problema del valor inicial de Cauchy definit a (3.2) té una única solució improrrogable. A més a més, I és obert.*

Demostració. Volem veure que si $\varphi_j : I_j \longrightarrow \mathbb{R}^n$ amb $j = 1, 2$, són dues solucions de (3.2), llavors, per tot $t \in I_1 \cap I_2$ tenim que $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$, perquè les solucions són úniques.

Pel teorema d'existència i unicitat de solucions de Picard, podem definir un t^* de la següent manera:

$$t^* = \text{infim } \{t \geq t_0 \text{ tal que si } t \in I_1 \cap I_2 \text{ aleshores } \varphi_1(t) \neq \varphi_2(t)\},$$

és a dir, el t més petit en el que fa que les solucions siguin diferents (es faria de forma anàloga per l'esquerra). Tenim doncs que podem fer la següent representació gràfica:

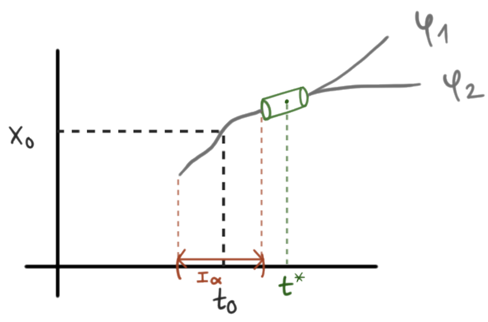

Figura 6: Prolongació de φ en φ_1 i φ_2.

Per contradicció, podem afirmar que existeix un $\bar{t} > t_0$ tal que $\varphi_1(\bar{t}) \neq \varphi_2(\bar{t})$ amb $\bar{t} \in I_1 \cap I_2$. A més a més, $t^* > t_0$ i $\varphi_1(t^*) = \varphi_2(t^*)$. Es clar que $(t^*, \varphi_1(t^*) = \varphi_2(t^*)) \in \Omega$. Apliquem el teorema de Picard al punt (t^*, Y^*), on $Y^* = \varphi_1(t^*) = \varphi_2(t^*)$.

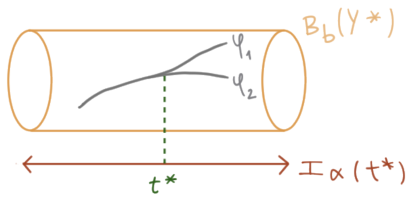

Figura 7: Representació del teorema de Picard al punt (t, Y^*).

Sigui $I = \cup_j I_j$ l'interval on podem definir una solució de (3.2). Sigui $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, la solució que envia t a $\varphi_j(t)$, per $t \in I_j$. Aleshores φ és la solució improrrogable i I és l'interval maximal i és únic, perque inclou tot j.

Falta veure que I és un obert. Suposem que no ho és, i definim $I = [a, b)$. Llavors, $(a, \varphi(a)) \in \Omega$. Apliquem Picard al problema del valor inicial de Cauchy amb condició inicial $x(a) = \varphi(a)$. I arribem a una contradició, ja que estem estenent φ cap a l'esquerra de a, però hem afirmat que I era tancat a l'esquerra de a, per tant, ha de ser $I = (a, b)$ obert.

$\square$

Lema 3.14 (Lema de Winter)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un obert, i sigui $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínua a Ω. Sigui $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ una solució de l'equació diferencial (3.1). Suposem també que el punt $(b, y) \in \Omega$ és un punt d'acumulació de la gràfica de φ. Llavors,*

$$\lim_{t \to b} \varphi(t) = y.$$

En particular, la solució es pot prolongar més enllà de $t = b$.

Definició 3.15. *Sigui $\varphi : I = (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una solució del problema del valor inicial de Cauchy. Diem que φ **tendeix a la frontera de** Ω quan t tendeix a b, si per tot compacte $K \subset \Omega$ existeix $t_0 \in (a, b)$ tal que $(t, \varphi(t)) \notin K$ per tot $t \in [t_0, b)$.*

Teorema 3.16 (Les solucions improrrogables esgoten el temps o l'espai)**.** *Sigui Ω un obert, i sigui $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínua i lipschitz respecte de la segona variable a*

Ω. *Suposem que la solució $\varphi : I = (a,b) \to \mathbb{R}^n$ és una solució improrrogable del problema del valor inicial de Cauchy (3.2). Llavors, si $b < \infty$, la solució tendeix a la frontera de Ω quan t tendeix a b. Analogàment, si $a > -\infty$.*

Demostració. Ho farem per contradicció. Suposem que $b < \infty$, i que existeix $K \subset \Omega$ compacte tal que per tot $t \in (a,b)$ existeix $\bar{t} \geq t$ tal que $(\bar{t}, \varphi(t)) \in K$.

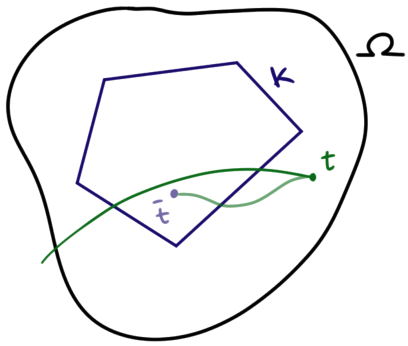

Figura 8: Representació del que suposem.

Per tant, existeix una successió $\{t_n\}_{n\geq 0}$ que tendeix a b tal que $(t_n, \varphi(t_n)) \in K$. Com que K és compacte, existeix una successió $\{t_{n_k}\}$ convergent. Per tant, sigui y el seu límit, $y = \lim_{k\to\infty} \varphi(t_{n_k})$, tenim doncs, que el punt $(b, y) \in K \subset \Omega$.

Llavors, pel Lemma de Winter, y és l'únic punt d'acumulació de la gràfica de y quan t tendeix a b. I podem extendre pel teorema de Picard la solució per la dreta de $t = b$, per tant, arribem a contradicció.

□

3.3 Teoria qualitativa

Quan es va començar a desenvolupar la teoria sobre les equacions diferencials, es va intentar trobar una solució explícita per a tipus especials d'equacions diferencials, però aviat es van adonar que només unes poques es podien resoldre analíticament. No obstant això, moltes vegades no és necessari obtenir fórmules explícites de les solucions i, és suficient donar les propietats d'aquestes solucions, veient així quin és el seu comportament general.

La teoria qualitativa és la branca del càlcul diferencial que s'encarrega d'estudiar el comportament de les òrbites d'un sistema quan aquest és molt difícil o impossible de solucionar, proporcionant així una anàlisi de la sensibilitat o de l'estabilitat dels equilibris.

En aquesta secció estudiarem les equacions diferencials des d'un punt de vista qualitatiu, això ens ajudarà a entendre el sistema del nostre model, i visualitzar el comportament entorn de les singularitats. Començarem veient que són les equacions diferencials autònomes.

Definició 3.17. *Definim les **equacions diferencials autònomes** com aquelles que no depenen de t explícitament, és a dir, són de la forma:*

$$\dot{x} = f(x), \tag{3.4}$$

on $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és una funció localment Lipschitz.

Les equacions diferencials autònomes són un cas particular de les equacions diferencials definides anteriorment i, per tant, garanteixen l'existència i unicitat de solucions dels corresponents problemes del valor inicial de Cauchy.

Lema 3.18. *Sigui $f : U \to \mathbb{R}^n$ i $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^n \times U$ una condició inicial de $\dot{x} = f(x)$. Denotem per $I(t_0, x_0)$ i $I(0, x_0)$ els intervals de definició de les solucions corresponents. Llavors, $\varphi(t; t_0, x_0) = \varphi(t - t_0; 0, x_0)$, i conseqüentment, $I(t_0, x_0) = I(0, x_0) + t_0$.*

Demostració. Volem veure que $\varphi(t; t_0, x_0) = \varphi(t - t_0; 0, x_0)$. Anomenem $\phi(t) = \varphi(t - t_0; 0, x_0)$. Comencem veient que per a $t = t_0$ tenim $\phi(t_0) = \varphi(t_0 - t_0; 0, x_0) = \varphi(0; 0, x_0) = x_0$, per tant, es compleix la condició inicial.

Per altra banda, volem veure que ϕ és solució de $\dot{x} = f(x)$. Pel teorema d'existència i unicitat de solucions, llavors, tenim que

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = \frac{d}{dt}\varphi(t - t_0; 0, x_0) = \frac{d}{d\tau}\varphi(\tau; 0, x_0) = f(\varphi(\tau)) = f(\phi(t)),$$

Per tant, $\phi(t)$ si que és solució de l'equació autònoma, tal i com volíem.

$\square$

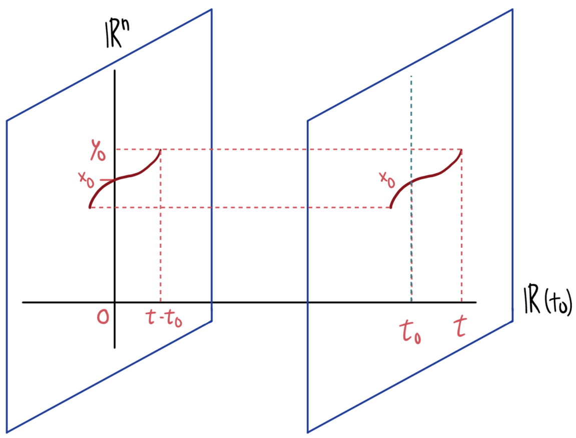

Figura 9: Solucions iguals en 0 i t_0.

Així, sense perdre generalitat, es suficient donar les solucions per a $t_0 = 0$.

Definició 3.19. *Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunt obert. Un **camp de vectors de classe** $\mathcal{C}^r$, amb $r \geq 1$, a U, és una aplicació $X : U \to \mathbb{R}^n$ que li assigna a cada punt $x \in U$ un vector $X(x) \in \mathbb{R}^n$. L'equació diferencial associada és $\dot{x} = X(x)$, és a dir, no dependrà de t ossigui serà una equació diferencial autònoma. Les solucions d'aquesta equació són funcions diferenciables $\varphi : I \to U$ tals que*

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = X(\varphi(t)), \text{ per tot } t \in I,$$

sent I l'interval de definició d'aquestes solucions.

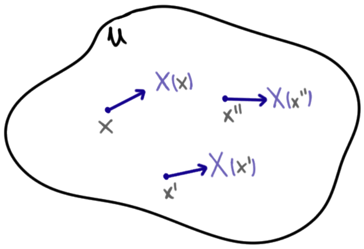

Figura 10: Representació d'un camp de vectors.

Definició 3.20. *La solució $\varphi : I \to U$ de $\dot{x} = X(x)$, es diu* ***maximal*** *si el seu interval de definició no es pot extendre.*

Definició 3.21. *Sigui $X : U \to \mathbb{R}^n$ un camp diferencial de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$, sigui $\dot{x} = X(x)$ l'equació diferencial ordinària associada. L'aplicació*

$$\begin{aligned} \varphi : D \subset \mathbb{R} \times U &\longrightarrow U \\ (t,x) &\longmapsto \varphi(t,x) := \varphi(t;0,x) \end{aligned}$$

on $D := \{(t,x) \in \mathbb{R} \times U$ tal que $t \in I(x)\}$ és obert, s'anomena ***flux associat al camp*** *X.*

A continuació donarem un teroema amb algunes propietats del flux associat al camp.

Teorema 3.22. *Sigui $X : U \to \mathbb{R}^n$ un camp diferencial de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$ i sigui φ el seu flux. Aleshores, per tot $x \in U$ i $s \in I(x)$ es compleix que*

i) $0 \in I(x)$ *i* $\varphi(0,x) = x$.

ii) $t \in I(\varphi(s,x))$ *si i només si* $s + t \in I(x)$. *A més,* $\varphi(t, \varphi(s,x)) = \varphi(s+t, x)$.

Demostració. i) Anàlog al darrer lema que hem vist.

ii) Veiem que $\varphi(t,\varphi(s,x)) = \varphi(s+t,x)$, tenim doncs $\varphi(t,\varphi(s,x)) = \varphi(t;0,\varphi(s,x)) = \varphi(t+s;s,\varphi(s,x)) = \varphi(t+s;0,x) = \varphi(s+t,x)$, on la segona igualtat és un desplaçament de 0 a s.

□

A conitnuació veurem conceptes relacionats amb les òrbites de X.

Definició 3.23. *Sigui $X : U \to \mathbb{R}^n$ un camp diferencial de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$ i sigui φ el seu flux associat. Donat $x \in U$ definim la seva* ***òrbita*** *com $\gamma(x) = \varphi(I(x),x) \subset U$. D'aquesta manera, podem definir una relació d'equivalencia $x_1 \sim x_2$ si i només si, $x_1 \in \gamma(x_2)$ o el que és equivalent $\gamma(x_1) = \gamma(x_2)$. La partició de l'espai de fases U en òrbites $U/\sim$ s'anomena* ***retrat de fase****. Els punts de $\gamma(x)$ s'ordenen amb una fletxa temporal de forma que si $x_1 \in \gamma(x_2) diemque x_1 \geq x_2$ si i només si, existeix $t \leq 0$ tal que $\varphi(t,x_2) = x_1$.*

Observació 3.24. Amb aquesta definició, $\gamma(x)$ no compleix la propietat antisimètrica.

Representem ara com es veuria un retrat de fase en el pla.

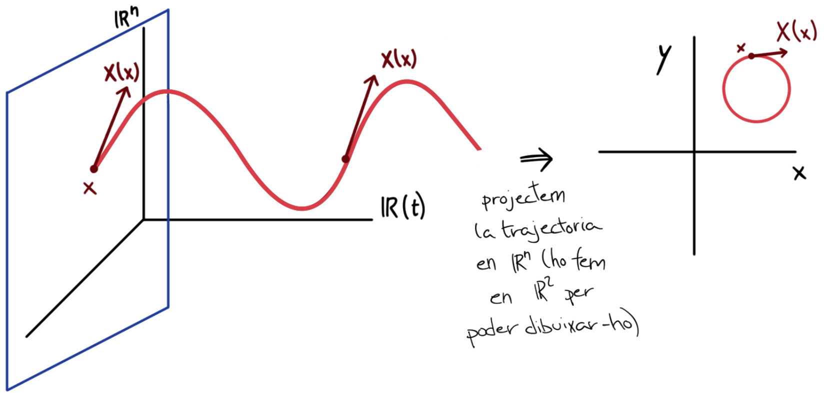

Figura 11: Representació del retrat de fase.

Teorema 3.25. *Sigui $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un camp diferencial de classe $\mathcal{C}^r$ $r \geq 1$, sigui φ el seu flux associat, sigui $x_0 \in U$, $I(x_0)$ l'interval maximal $i : I(x_0) \to U$ la solució improrrogable associada a $\dot{x} = X(x_0)$ amb $\varphi_0(0) = 0$. Sigui $\gamma(x_0)$ l'òrbita del punt $x_0 \in U$. Llavors, es dona, un i només un, dels següents casos:*

a) Si φ és una inmersió injectiva, aleshores, $\gamma(x_0)$ és una corba oberta i simple.

b) Si $I(x_0) = \mathbb{R}$ i φ_0 és constant, aleshores, $\varphi_0(x_0) = \{x_0\}$ és un punt.

c) Si $I(x_0) = \mathbb{R}$ i φ_0 és una corba periòdica no constant, aleshores, $\gamma(x_0)$ és una corba tancada i simple.

Demostració. Suposem que φ_0 és injectiva. Volem veure doncs, que no té cap punt amb derivada igual a zero, és a dir, no hi ha cap t tal que

$$\frac{d}{dt}\varphi_0(t) \neq 0,$$

per tot $t \in I(x)$. Ho fem per contradicció i suposem que existeix un $\bar{t} \in I(x)$ amb

$$\frac{d}{dt}\varphi_0(\bar{t}) = 0.$$

Denotem $x_0 = \varphi_0(I)$. Tenim doncs,

$$0 = \frac{d}{dt}\varphi_0(\bar{t}) = X(\varphi_0(\bar{t})) = X(x_0).$$

El que implica que $\bar{\varphi}(t) \equiv x_0$ és solució de (3.2). I podem dir que $\bar{\varphi}(t) = \varphi_0(t)$ que és una contradicció, i que implica que $\bar{\varphi}(t)$ és constant i $\varphi_0(t)$ és injectiva tal i com voliem, i a) queda demostrat.

Ara volem veure que $\varphi_0(t)$ és periòdica. Suposem que ho és, per tant, no és injectiva, el que vol dir que

$$\varphi_0(t_1) = \varphi_0(t_2) = x_0,$$

és a dir,

$$x_0 = \varphi(t_1, x) = \varphi(t_2, x),$$

tenim doncs

$$x = \varphi(-t_1, \varphi(t_1, x)) = \varphi(-t_1, \varphi(t_2, x)) = \varphi(t_2 - t_1, x) =^1 \varphi(\tau, x) = \varphi(-\tau, x),$$

on en la desigualtat (1) hem fet que $\tau := t_2 - t_1$. Per tant, l'interval maximal serà $I(x) = \mathbb{R}$, i $\varphi(k\tau, x) = x$ per tot $k \in \mathbb{Z}$. En particular, tenim que

$$\varphi(t + \tau, x) = \varphi(t, \varphi(\tau, x)) = \varphi(t, x),$$

i podem concloure que φ és periòdica, tal i com volíem veure.

Definim $T = inf\{\tau > 0 \text{ tal que } \varphi(\tau, x) = x\}$. Si $T > 0$ aleshores T és el periode de $\varphi(t, x)$ i el cas c) queda demostrat. Si $T = 0$, aleshores existeix una successió $\{\tau_n\}_{n\geq 0}$ tal que el seu límit quan n tendeix a ∞ és zero i

$$\varphi(\tau_n, x) = x \Rightarrow X(x) = \frac{d}{dt}\varphi_0(0) = \lim_{t\to\infty} \frac{\varphi_0(t) - \varphi_0(0)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\varphi(\tau_n) - x}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{x - x}{t} = 0.$$

El que implica que x és un punt singular i el cas b) queda demostrat.

□

A continuació veurem el concepte de camps conjugats.

Definició 3.26. *Siguin $X : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ i $Y : V \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dos camps vectorials de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$, i siguin $\varphi_X : D_X \longrightarrow V$ i $\varphi_Y : D_Y \longrightarrow V$ els fluxos corresponents. Diem que X i Y són **conjugats** si existeix una funció bijectiva $h : U \longrightarrow V$ tal que*

$$(t, x) \in D_X \Longleftrightarrow (t, h(x)) \in D_Y \quad i \quad h(\varphi_X(t, x)) = \varphi_Y(t, h(x)).$$

*Si h és un homeomorfisme, aleshores X i Y són **topologicament conjugats**.*

A continuació veurem les característiques dels punts d'equilibri.

Definició 3.27. *Sigui $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un camp vectorial de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$, i sigui $x_0 \in U$ un punt tal que $X(x_0) = 0$. Aleshores, diem que x_0 és un **punt d'equilibri** o **punt singular**. En cas contrari, si $X(x_0) \neq 0$ parlem de **punts regulars**.*

Definició 3.28. *Sigui $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un camp vectorial de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$, i sigui $x_0 \in U$. Diem que el punt x_0 és un **punt d'equilibri hiperbòlic** si $X(x_0) = 0$ i la part real de tots els valors propis de $DX(x)_{|x=x_0}$ és diferent de 0.*

Teorema 3.29 (Teorem de Hartman-Grobman)**.** *Sigui $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un camp vectorial de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$, sigui $\varphi(t, x)$ el flux associat a X, sigui $x_0 \in U$ un punt d'equilibi hiperbòlic de X i, sigui $A = DX(x_0)$. Sigui $L^n_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ el camp linealitzat, és a dir, $L(y) = Ay$. Llavors, existeixen entorns $V \subset U$ de x_0 i W de $0 \in \mathbb{R}^n$ i una conjugació topologica $h : V \longrightarrow W$ entre $X_{|_v}$ i $L_{|_W}$. És a dir,*

$$h(\varphi(t, x)) = e^{tA}h(x).$$

Amb el següent teorema veurem quin és el criteri local d'estabilitat, per saber si els punts d'equilibri són punts atractors, punts repulsors o punts de sella.

Teorema 3.30. *Sigui* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *un punt hiperbòlic amb* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *els valors propis de* $Df(x_0)$. *Aleshores, el sistema* $\dot{x} = f(x)$ *és conjugat amb* $\dot{y} = Df(x_0)y$ *en un entorn de* x_0. *Conseqüentment,*

1. *Si la part real de tots els valors propis és més petita que zero, aleshores* x_0 *és* ***localement atractor***.

2. *Si la part real de tots els valor propis és major a zero, aleshores* x_0 *és* ***localment repulsor***.

La part real de com a mínim dos valors propis tenen signe diferent, aleshores aquest punt l'anomenem **punt de sella**. Aquests punts poden estar associats a varietats invariants. A continuació donarem una caracterització d'aquest tipus de varietats.

Definició 3.31. *Sigui* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *un punt de sella, dins dels punts d'equilibri de* $\dot{x} = f(x)$ *amb solucions* $\varphi_X(t)$, *aleshores definim una* ***varietat estable*** *de* x_0 *com* $W^s(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n | \varphi_X(t) \longrightarrow x_0 \text{ quan } t \to \infty\}$, *per altra banda, definim una* ***varietat inestable*** *com* $W^u(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n | \varphi_X(t) \longrightarrow x_0 \text{ quan } t \to -\infty\}$.

4 The war of attrition

L'any 1995, la Clara Ponsati i el József Sákovics, van publicar a la revista Mathematical Social Sciences un article anomenat *The War of attrition with incomplete information* [6]. En aquest capítol ens dedicarem a analitzar i estudiar aquest article.

Com ja hem mencionat anteriorment, *The War of attrition* es tracta d'un joc de dos jugadors, que anomenarem jugador a i jugador b, que juguen a temps continu i compten amb informació incompleta. Cadascun té una preferència d'alternativa diferent, i hauran de decidir en quin temps la cediran, en el cas que l'altre jugador no hagi cedit encara. Els pagaments dels jugadors aniran decreixent conforme a una funció de descompte exponencial e^{-t}. Començarem definint el model, per seguir caracteritzant la solució mitjançant equacions diferencials, de les quals veurem algunes propietats.

4.1 El model

Com ja hem dit, el joc que estudiarem és un joc amb informació incompleta. La forma de modelitzar aquesta manca d'informació que tenen els jugadors és segons el tipus de cada jugador. El jugador a sap que el seu adversari, el jugador b, és de tipus z on el valor de z és la variable aleatoria governada per f, una funció de densitat, definida a $z \in [b_L, b_H]$. Si per un esdevenimnet concret, el jugador b és d'un tipus z proper a b_L, diem que és un jugador dèbil, és a dir, està disposat a cedir "aviat", mentre que si z és proper a b_H el jugador b es diu que és un jugador fort i, o bé cedirà "tard"o simplement no cedirà mai: D'aquesta manera, diferenciarem entre aquests dos tipus de jugadors.

1. Els **jugadors dèbils** seran aquells que preferiran concedir abans que el joc acabi en desacord, seran jugadors de tipus propers al límit inferior.

2. Els **jugadors forts** seran aquells que preferiran acabar el joc en desacord o concedir tard, seran jugadors de tipus propers al límit superior.

En l'equilibri, els tipus forts mai concediran, mentre que els dèbils distribuiran les seves concessions al llarg del temps, el que ens permetrà caracteritzar les seves estratègies en forma d'equacions diferencials.

Quan la distribució de tipus sigui uniforme, les probabilitats de concessió en l'equilibri seran tals que, en tot moment, la probabilitat condicionada que el jugador a sigui fort serà la mateixa que la de què el jugador b sigui fort. En general, un jugador amb probabilitats de ser més fort que altres rep un pagament esperat més elevat. Esperar una mica per convèncer a l'oponent de què ets un tipus fort sempre augmentarà la recompensa esperada per als jugadors dèbils.

Comencem a descriure el model. Tenim dos jugadors, el jugador a que prefereix l'alternativa A, i el jugador b que per la seva part prefereix l'alternativa B. En cas que hàgim de parlar en general, parlarem d'una alternativa $X \in \{A, B\}$ preferida pel jugador $x \in \{a, b\}$.

Podem definir doncs les preferències del jugador $i \in \{a, b\}$ amb la següent funció d'utilitat. Informalment podem definir la funció d'utilitat com la mesura la satisfacció obtinguda pel jugador i en acabar el joc:

$$u_i(X,s) = \begin{cases} 1-s, & si \quad i = x \\ -s, & si \quad i \neq x \end{cases} \tag{4.1}$$

on el jugador i prefereix l'alternativa X i és de tipus s. El tipus és un valor privat, propi de cada jugador, és el que proporciona la informació incompleta del joc, que en economia és coneix com a valor de reserva.

El joc es juga en temps continu, començant en $t = 0$. Els jugadors tenen una única acció possible, és a dir, el joc es juga a una tirada, però poden triar lliurement el moment del temps en el qual la duen a terme. El jugador a comença proposant A, mentre que el jugador b proposa B i, aquesta situació persisteix en el temps fins que el jugador b cedeix i s'acaba el joc amb l'alternativa A, o bé el jugador a cedeix i aleshores el joc s'acaba amb l'alternativa B. Si els dos jugadors cedeixen a la vegada, aleshores es fa una loteria per veure quina de les dues solucions s'imposa. Usarem que la probabilitat que en aquesta loteria surti A és $\alpha \in (0,1)$, mentre que la probabilitat de què surti B serà $1-\alpha$, α mai podrà ser ni 1 ni 0, ja que de ser així se li assignaria probabilitat 1 a algun dels dos jugadors i, aleshores no seria una loteria.

Una estratègia, σ_i, per a un jugador i la definirem com una funció mesurable que va del tipus al temps de concessió, és a dir,

$$\sigma_i : (i_L, i_H) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad \text{amb} \quad \sigma_i(s) = t.$$

Assumim que els jugadors són impacients, i modelem la seva impaciència mitjançant un factor disminuidor e^{-1} per unitat de temps, és a dir, e^{-t}. Aleshores, el jugador $i \in \{a,b\}$ de tipus s, sent $X \in \{A,B\}$ l'alternativa triada i, t el temps en el qual s'ha concedit aquesta alternativa, tindrà la utilitat següent:

$$U_i(X,s,t) = u_i(X,s)e^{-t},$$

Els conflictes perpetus, és a dir, els que acaben en temps infinits, suposarem que acaben en desacord i tenen pagament zero per als dos jugadors.

Els jugadors tindran creences sobre els tipus dels altres. Aquestes assumirem que són conegudes i les representarem mitjançant una funció de distribució de probabilitats F_i, amb densitat positiva associada f_i, en l'interval $[i_L, i_H]$ i, en aquest interval, f_i serà de classe $\mathcal{C}^\infty$. Sobre aquest interval imposarem dues condicions: la primera serà que $i_L < 0$, mentre que la segona serà $i_H \leq 1$. Amb això obtenim que amb probabilitat 1, els jugadors sempre tenen utilitat positiva siguin del tipus que siguin i prevalgui o no la seva alternativa. Finalment, suposarem que els tipus dels dos jugadors són independents entre ells.

Donat un perfil d'estratègies σ, sigui $(X(\sigma(s,z)), t(\sigma(s,z))$ la solució generada per σ si els tipus dels jugadors són s per al jugador a i z per al jugador b. El **pagament esperat** per a un jugador a de tipus s i amb estratègia σ serà

$$V_a^s(\sigma) = \int_{[b_L,b_H]} U_a(X(\sigma(s,z)),\ s,\ t(\sigma(s,z)))\ dF_b(z). \tag{4.2}$$

Una estratègia σ^* serà un equilibri de Nash bayesià si i només si es compleix a la vegada que per al jugador a

$$V_a^s(\sigma^*) \geq V_a^s(\sigma'_i, \sigma^*_{-i}), \quad \text{per tota estratègia } \sigma'_i,$$

i per al jugador b

$$V_b^z(\sigma^*) \geq V_b^z(\sigma_i', \sigma_{-i}^*), \quad \text{per tota estratègia } \sigma_i'.$$

És a dir, seguint la definició d'equilibri bayesià donada anteriorment, σ^* és un equilibri bayesià si per a qualsevol altra estratègia σ_i' del jugador i, aquest obté pagament menor o igual que l'obtingut amb σ_i^*, suposant que l'altre jugador no canvia la seva jugada.

4.2 Solució del model

A continuació buscarem quin és el conjunt d'equilibris bayesians solució del model descrit en l'apartat anterior. Comencem donant una caracterització dels equilibris en forma de proposició.

Proposició 4.1. *Caracteritzem el conjunt d'equilibris bayesians de la següent manera:*

i) *Si $a_H \leq 0$ i $0 \leq b_H$, aleshores, gairebé segur, el jugador a concedeix a $t = 0$, i viceversa.*

ii) *Si $0 < a_H$ i $0 < b_H$, les estratègies són tals que $\sigma_a(s) = t$ si i només si $\varepsilon(t) = s$, on $\varepsilon : (0, \infty) \to (a_L, 0]$ i, $\sigma_b(z) = t$ si i només si $\zeta(t) = z$, on $\zeta : (0, \infty) \to (b_L, 0]$. Aleshores ε i ζ són funcions creixents i diferenciables, i són la única solució del següent sistema d'equacions diferencials:*

$$\left.\begin{aligned} -\zeta'(t) f_b(\zeta(t)) &= [1 - F_b(\zeta(t))]\varepsilon(t) \\ -\varepsilon'(t) f_a(\varepsilon(t)) &= [1 - F_a(\varepsilon(t))]\zeta(t) \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

amb $\lim_{t\to\infty}(\varepsilon(t), \zeta(t)) = (0, 0)$, és a dir, a temps infinit, l'equilibri serà a $(0, 0)$ i amb condició de sortida $(\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) - a_L)(\lim_{t\to 0} \zeta(t) - b_L) = 0$, és a dir, a temps $t = 0$ al menys un dels dos jugadores estarà al seu límit inferior.

iii) *Si $a_H \leq 0$ i $b_H \leq 0$, aleshores hi ha un seguit d'equilibris bayesians caracteritzats com a solucions de (4.3), tals que $(\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) - a_L)(\lim_{t\to 0} \zeta(t) - b_L) = 0$. Aquests inclouen dos equilibirs on, gairebé segur, exactament un jugador, concedeix a $t = 0$, més tard demostrarem que els dos jugadors no poden conceir a la vegada en $t = 0$. En els altres equilibris, si $a_H < 0$ i $b_H < 0$, aleshores $\lim_{t\to T}(\varepsilon(t), \zeta(t)) = (a_H, b_H)$ per algun $T < \infty$, T ha de ser la mateixa per als dos jugadors, ja que sino no serà equilibri bayesià. Si en canvi, $a_H = 0$, aleshores $\lim_{t\to\infty}(\varepsilon(t), \zeta(t)) = (\eta, \varphi)$, per a $\eta \in [a_L, a_H]$, $\varphi \in [b_L, b_h]$ amb $(\eta - a_H)(\varphi - b_H) = 0$, de forma anàloga en el cas de $b_H = 0$.*

Definició 4.2. *Anomenarem $H_i^\sigma(t)$ a la probabilitat de que el jugador $i \in \{a, b\}$ condeceixi abans de t d'acord amb la seva estratègia σ_i. Quan no pugui haver confusió, escriurem simplement $H_i(t)$, $i \in \{a, b\}$. De la mateixa manera, $H_i(\infty)$ denotarà la probabilitat de què el jugador i concedeixi segur, amb probabilitat 1, en algun moment finit del temps.*

Per tal de poder demostrar la proposició anterior, donarem un seguit de propietats i lemes intermitjos que ens serviran per concretar més el model. Començarem veient que els tipus positius no concediràn en l'equilibri.

Lema 4.3 (Tipus negatius)**.** *Sense perdre generaltiat, podem assumir que els tipus $s > 0$ mai concediran en l'equilibri.*

Demostració. Sigui $i \in \{a, b\}$ un jugador de tipus s, amb $s > 0$. Aleshores i obtindrà, si concedeix, una utilitat $U_i(X, s, t) = -se^{-t}$, que serà sempre negativa, per ser la $s > 0$. Mentre que si manté el desacord, obtindrà utilitat igual a zero. Tenim doncs, que el jugador de tipus $s > 0$ només concedirà en el moment en què l'altre jugador segur que ha concedit. Per tant, els jugadors de tipus positius mai concediran en l'equilibri.

□

Així doncs, a partir d'aquest moment, podem restringir les estratègies a tipus no positius.

Lema 4.4 (Moments simultanis)**.** *En un equilibri bayesià, les estratègies són tals que si la probabilitat de que el jugador a concedixi en $(t, t+\delta]$, $\delta < 0$, és nul·la, aleshoes, gairebé segur el jugador b no concedirà tampoc en aquest interval. És a dir, $H_b(t) = H_b(t+\delta)$.*

Demostració. Si un jugador sap que els seu oponent no concedirà en l'interval $(t, t+\delta]$, aleshores, concedir en algun temps $\bar{t} \in (t, t+\delta]$ no maximitzarà el seu pagament. Si el jugador b sap que el jugador a no concedirà en aquest interval, aleshores, el pagament per al jugador b per concedir a t serà

$$W_b(t) = (-z)e^{-t}(1 - H_a(t)) + \int_0^t (1-z)e^{-\tau} dH_a(\tau),$$

mentre que el pagament de concedir en $\bar{t}$ és

$$W_b(\bar{t}) = (-z)e^{-\bar{t}}(1 - H_a(\bar{t})) + \int_0^{\bar{t}} (1-z)e^{-\tau} dH_a(\tau) =$$
$$(-z)e^{-\bar{t}}(1 - H_a(\bar{t})) + \int_0^{t} (1-z)e^{-\tau} dH_a(\tau) + \int_t^{\bar{t}} (1-z)e^{-\tau} dH_a(\tau),$$

però com sabem que el jugador a no concedirà en $(t, t+\delta]$, tenim que

$$\int_t^{\bar{t}} (1-z)e^{-\tau} dH_a(\tau) = 0.$$

Hem de comparar doncs

$$W_b(t) = (-z)e^{-t}(1 - H_a(t)) + \int_0^t (1-z)e^{-\tau} dH_a(\tau) \quad \text{amb}$$

$$W_b(\bar{t}) = (-z)e^{-\bar{t}}(1 - H_a(\bar{t})) + \int_0^t (1-z)e^{-\tau} dH_a(\tau).$$

El segon terme és el mateix per a ambdós jugadors, per tant, hem de tenir en compte únicament el primer terme. Com que $t < \bar{t}$, aleshores $e^{-t} > e^{-\bar{t}}$. També sabem que el jugador a no concedirà en l'interval $(t, t+\delta]$, per tant, $H_a(t) = H_a(\bar{t})$. Llavors, el pagament en t serà major que el de $\bar{t}$, i el jugador b preferirà concedir en t. Podem concloure doncs, que el jugador b no concedirà mai en $\bar{t} \in (t, t+\delta]$ tal com volíem veure.

□

Tot això ho podem resumir com que la probabilitat de què b concedeixi en t és la mateixa que ho faci en $t+\delta$. Intuïtivament, l'única raó per la qual un jugador es resisteix a cedir és perquè espera que el seu oponent cedeixi aviat. Si se sap que no cedirà, el millor que pot fer el jugador que vol cedir és fer-ho al més aviat possible, és a dir, en temps 0.

Amb el següent lema, que parla de la continuïtat, podrem afirmar que en cap moment diferent de zero, no hi ha cap punt massiu de concessions per part de qualssevol dels jugadors.

Lema 4.5 (Continuïtat)**.** *Per tot $0 < t < T$, on T és el moment del temps en el qual el joc s'acaba, $H_a(t)$ és una funció contínua.*

Demostració. La funció $H_a(t)$ és contínua en t_0 si per tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que si $|t - t_0| < \delta$ llavors $|H_a(t) - H_a(t_0)| < \varepsilon$.

Suposem que la funció no és contínua, aleshores, existeix $\varepsilon > 0$ tal que per tot $\delta > 0$ si $|t - t_0| < \delta$ llavors $|H_a(t) - H_a(t_0)| > \varepsilon$. Amb aquesta informació, el jugador b sap que tot i que t i t_0 estan prou a prop (com a molt a distància δ) , les probabilitats de què el jugador a cedeixi en aquests temps varien molt, per tant, el jugador b preferirà no concedir en $t' \in (t_0, t)$. Aleshores, pel lema dels moments simultanis, el jugador a tampoc concedirà en (t_0, t), amb el que tindrem que $H_a(t_0) = H_a(t)$, el que ens portà a contradicció, ja que havíem suposat que $|H_a(t_0) - H_a(t)| > \varepsilon$. Per tant, la funció $H_a(t)$ ha de ser contínua.

□

Definim a continuació $T_i < \infty$, que serà el temps mínim per al qual el jugador $i \in \{a, b\}$ concedirà amb probabilitat 1, condicionat a que en algun moment hagi concedit. Tenim doncs, $T_i =$mín$\{t$, tal que $H_i(t) = H_i(\infty)\}$. Amb el següent lema veurem que aquest T_i és el mateix per als dos jugadors, i seguidament, que $H_i(\cdot)$ ha de ser estrictament creixent en $(0, T_i)$.

Lema 4.6 (Dispersió simètrica)**.** *En tot equilibir bayesià, si T_a i T_b són positius, aleshores $T_a = T_b := T$*

Demostració. Suposarem sense perdúa de generalitat que $T_a < T_b$, és a dir, el jugador a concedeix abans amb probabilitat 1 que el jugador b.

Sigui $\bar{t} = T_a$, el temps màxim en el qual el jugador a haurà concedit segur, aleshores el jugador b, de tipus z perferirà cedir en $\bar{t}$ a fer-ho en $\hat{t} > T_a$, ja que pel lema de moments simultànis, si el jugador b sap que el jugador a no concedirà en l'interval $(\bar{t}, \hat{t})$ ell tampoc concedirà en aquest interval. D'aquesta manera, si el jugador a concedeix sempre abans de T_a, aleshores el jugador b també concedirà sempre abans de T_a.

Així doncs, obtenim que en l'equilibri s'ha de complir $T_a = T_b$.

□

A partir d'aquest moment escriurem $T = T_a = T_b$ indistintament. Veiem ara doncs, que $H_i(\ \cdot)$ ha de ser estrictament monòtona.

Lema 4.7 (Monotonia estricte)**.** *En tot equilibri bayesià, exceptuant el cas en que el joc acaba en $t = 0$, $H_i(t - \delta) < H_i(t)$, per a $0 < \delta < t \leq T$.*

Demostració. Assumirem el contrari, que amb probabilitat 1, el jugador a no concedeix a l'interval $(t, t+\delta]$, $\delta > 0$. Conseqüentment, pel lema de moments simultànis, el jugador b tampoc concedirà en aquest interval.

Anomenem δ^* al suprem de tots els $\delta > 0$ de $(t, t+\delta]$, és a dir, al δ més gran possible. Per qualsevol $t < T < \infty$, hi ha algun $\bar{t} > t + \delta^*$ per al qual la probabilitat de que els dos cedeixin en $[t+\delta^*, \bar{t}]$ és positiva.

Per un $\bar{t}$ lo suficientment a prop de $t + \delta^*$, els dos jugadors prefereixen concedir en temps $t' \in (t, t + \frac{\delta^*}{2})$ abans que cedir en $\bar{t}$, ja que obtindran pagaments majors. Mirem els pagaments per al jugador a de tipus s. Si concedeix en temps t':

$$W_a(t') = (-s)e^{-t'}(1 - H_b(t')) + \int_0^{t'} (1-s)e^{-\tau} dH_b(\tau),$$

mentre que si concedeix en $\bar{t}$ tindrà pagaments

$$W_a(\bar{t}) = (-s)e^{\bar{t}}(1 - H_b(\bar{t})) + \int_0^{\bar{t}} (1-s)e^{-\tau} dH_b(\tau) =$$
$$(-s)e^{\bar{t}}(1-H_b(\bar{t})) + \int_0^{t'} (1-s)e^{-\tau} dH_b(\tau) + \int_{t'}^{t+\delta^*} (1-s)e^{-\tau} dH_b(\tau) + \int_{t+\delta^*}^{\bar{t}} (1-s)e^{-\tau} dH_b(\tau)$$

Com que $\bar{t}$ està tan a prop com vulgui de $t+\delta$, aleshores el darrer terme és igual a zero, de la mateixa manera, com que sabem que el jugador a no concedirà en l'interval $(t, t+\delta)$, aleshores el jugador b tampoc ho farà, i la integral en aquest interval també serà zero. Ens hem de fixar doncs els primers termes, i hem de comparar

$$(-s)e^{-t'}(1 - H_b(t')) \quad \text{amb} \quad (-s)e^{\bar{t}}(1 - H_b(\bar{t}))$$

Com que $t' < \bar{t}$ tenim que $e^{-t'} - e^{-\bar{t}} > m > 0$, on m és una constant, i com hem dit abans, podem fer $\bar{t}$ tan a prop com vulguem de $t+\delta$, per tant podem suposar que $H_b(t') = H_b(\bar{t})$. Així doncs, el jugador a preferirà concedir en t' contradient el que havíem suposat.

□

Amb el següent lema descartarem concessions per part dels dos jugadors en $t = 0$.

Lema 4.8 (Concessions immediates). *En cap equilibri bayesià els dos jugadors concedirant al zero. És a dir,* $H_a(0) \cdot H_b(0) = 0$.

Demostració. Suposem que el jugador a concedeix al zero amb probabilitat $P > 0$. Si el jugador b decideix concedir també al zero, aleshores, obtindrà pagament

$$W_b(z, 0) = (\alpha - z)P - z(1 - P) \quad \alpha \in (0, 1),$$

on α és la probabilitat de que la seva alternativa sigui la triada en cas de loteria (la loteria es fa si els dos concedeixen al mateix temps), mentre que si el jugador b decideix concedir a $\delta > 0$, tindrà un pagament

$$W_b(z, \delta) = (1 - z)P - z(1 - P)e^{-\delta},$$

on $e^{-\delta}$ representa el descompte per esperar.

Donat que per a qualsevol tipus z existeix algun $\delta(s) > 0$ per al qual el segon pagament domina al primer, per tant, és millor que el jugador b aguanti una mica més abans de cedir, i d'aquesta manera, obtindrà majors pagaments. De manera anàloga per al jugador a. Podem concloure que el fet que els dos jugadors concedeixin al zero no serà mai un equilibri bayesià. $\square$

A continuació veurem un lema on obtindrem el criteri de millor resposta. Recordem que $s < 0$, i que la funció *argmax* ens dona els punts del domini de la funció en els quals els valors de la funció són màxims.

Lema 4.9 (Criteri de millor resposta)**.** *La correspondència de millor resposta, en un equilibri bayesià, donarà lloc al perfil d'estratègies σ següent:*

$$\sigma_a(s) \in argmax_{t \geqslant 0} \int_{[0,t)} (1-s)e^{-\tau} dH_b(\tau) - (1 - H_b(t))se^{-t}.$$

Demostració. Hem de veure que realment aquesta funció és la que ens dona els equilibris, és a dir, la que ens dona els pagament màxims per als quals, un cop acabat el joc, hauriem fet el millor possible. Tenim doncs, que en el cas que el jugador a concedeixi en $t > 0$, la utilitat esperada per aquest jugador, és justment la definida per la funció *argmax*

$$W_a(s,t) = \int_{[0,t)} (1-s)e^{-\tau} dH_b(\tau) - (1 - H_b(t))se^{-t}.$$

Per tant, per $t > 0$ tenim el que volíem. Ara hem de veure que pasa quan $t = 0$. El pagament esperat per al jugador a si cedeix en el zero serà

$$W_a(s,0) = (\alpha - s)H_b(0) - s(1 - H_b(0)) \quad \alpha \in (0,1).$$

Tenim doncs, que l'única diferència entre el pagametn esperat en temps zero i els pagament corresponent en temps t es troba en el fet que α substitueix a u en el primer terme. Tenim, però que pel lema anterior, si $H_b(0) > 0$, el jugador a sempre prefereix no cedir al zero, per tant, no hi haurà loteria. Mentre que, si $H_b(0) = 0$, aleshores $(\alpha - s)$ no juga cap paper important, ja que quedarà multiplicada per zero.

Com a resultat, podem concloure, que en tot equilibri bayesià, tenim que la millor resposta serà el perfil d'estratègies descrites a l'enunciat.

$\square$

Abans de continuar, remarcarem que $W_i(s,t)$ és el pagament esperat per al jugador $i \in \{a, b\}$, que té tipus s, concedit en temps t a l'equilibri. A continuació veurem que els estratègies són de tipus monòton.

Lema 4.10 (Estratègies de tipus monòton)**.** *Tot equilibri bayesià és tal que per tot jugador i, si es compleix que $s < s'$, aleshores implicarà que $\sigma_i(s) \leq \sigma_i(s')$.*

Demostració. Suposem que $s < s'$, i asignem $\sigma_i(s) = t$ i $\sigma_i(s') = t'$ volem veure que $t \leq t'$. Per tant, $W_i(s,t') \leq W_i(s,t)$, ja que per definició, el millor temps per al tipus s és t, i aleshores el pagament esperat per s en t serà millor que en t', de manera anàloga, tenim que $W_i(s',t) \leq W_i(s',t')$. Conseqüentment, usant que $W_i(s,t') - W_i(s,t) \leq 0$ i $W_i(s',t) - W_i(s',t') \leq 0$ i operant, obtenim la desigualtat següent: $W_i(s,t') - W_i(s,t) - W_i(s',t') + W_i(s',t) \leq 0$, que també la podem escriure de la següent manera: $W_i(s,t') -$

$W_i(s,t) \leq W_i(s',t') - W_i(s',t)$. Escrivim ara la definició de W_i, de manera que ens queda la següent desiguatat:

$$(1-s)\int_0^{t'} e^{-\tau} dH_j(\tau) - s(1-H_j(t'))e^{-t'} - (1-s)\int_0^t e^{-\tau} dH_j(\tau) + s(1-H_j(t))e^{-t} \leq$$

$$(1-s')\int_0^{t'} e^{-\tau} dH_j(\tau) - s'(1-H_j(t'))e^{-t'} - (1-s')\int_0^t e^{-\tau} dH_j(\tau) + s'(1-H_j(t))e^{-t}.$$

I agrupant per termes, ens quedarà

$$(1-s)\int_t^{t'} e^{-\tau} dH_j(\tau) - s[(1-H_j(t'))(e^{-t'} - e^{-t}) + (H_j(t) - H_j(t'))e^{-t}] \leq$$

$$(1-s')\int_t^{t'} e^{-\tau} dH_j(\tau) - s'[(1-H_j(t'))(e^{-t'} - e^{-t}) + (H_j(t) - H_j(t'))e^{-t}],$$

finalment, tornant a reordenar, obtenim

$$(1-H_j(t'))(e^{-t'} - e^{-t}) + (H_j(t) - H_j(t'))e^{-t} \leq \int_{t'}^t e^{-\tau} dH_j(\tau).$$

Assumim ara que $t > t'$. Tenim doncs, que usant la monotonia estricte de $H_j(t)$ podem afirmar que

$$\int_{t'}^t e^{-\tau} dH_j(\tau) < (H_j(t) - H_j(t'))e^{-t'} = (H_j(t) - H_j(t'))(e^{-t'} - e^{-t}) + (H_j(t) - H_j(t'))e^{-t}.$$

Degut a que $t > t'$, tenim $e^{-t'} - e^{-t} > 0$, el fet de que $H_j(t) \leq 1$ dona lloc a una contradicció i, per tant, ha de ser $t \geq t'$.

□

4.3 Equacions diferencials del model

En aquesta secció veurem finalment com obtenim les equacions proposades a l'inici del capítol com a solució del model.

Lema 4.11 (Sistema d'equacions diferencials)**.** *Tot equilibri bayesià és tal que per $t \in [0,T)$, $\varepsilon(\cdot)$ i $\zeta(\cdot)$ definides a la proposició 4.1 són solució del sistema d'equacions diferencials.*

Demostració. Si $t = \sigma_b(z)$ en $(0,\infty)$ per algun z. Pel lema de correspondència de millor resposta busquem el pagament màxim, és a dir, màximitzem $W(s,t)$. Per tant, com feiem habitualment, derivarem i igualarem a zero. Tenim doncs,

$$W(z,t) = \int_0^t (1-z)e^{-\tau} dH_a(\tau) - (1-H_a(t))ze^{-t}.$$

Derivem respecte t

$$\frac{d}{dt}W(z,t) = \frac{d}{dt}(\int_0^t (1-z)e^{-\tau} h_a(\tau) - (1-H_a(t))ze^{-t}).$$

Usant ara el teorema fonamental del càlcul amb

$$F := \int_0^t f(\tau)d\tau, \quad \text{on } f(\tau) = (1-z)e^{-\tau}dH_a(\tau),$$

tenim per tant,

$$\frac{d}{dt}W(z,t) = \frac{d}{dt}[F(t)-F(0)] - \frac{d}{dt}[(1-H_a(t))ze^{-t}] = f(t) - \frac{d}{dt}[(1-H_a(t))ze^{-t}] =$$
$$(1-z)e^{-t}h_a(t) - [-h_a(t)]ze^{-t} - [1-H_a(t)]ze^{-t} =$$
$$e^{-t}[h_a(t) - zh_a(t) + zh_a(t) + (1-H_a(t))z].$$

Igualem a zero, i reordenem

$$e^{-t}(h_a(t) - zh_a(t) + zh_a(t) + (1-H_a(t))z) = 0 \Leftrightarrow h_a(t) = -[1-H_a(t)]z.$$

Siguin $\phi : [0,\infty) \longrightarrow [a_L, a_H]$ i $\vartheta : [0,\infty) \longrightarrow [b_L, b_H]$, on $\phi(t) = s$ si i només si s =sup$\{v$ tal que $\sigma_a(v) \leq t\}$ i $\vartheta(t) = z$ si i només si z =sup$\{u$ tal que $\sigma_b(u) \leq t\}$. Pel lema de continuïtat, aquestes definicions es correspoenen amb les corresponents a $\varepsilon(t)$ i $\zeta(t)$, és a dir, $\phi(t) = \varepsilon(t)$ i $\vartheta(t) = \zeta(t)$. Aleshores, podem reescriure la igualtat anterior com

$$h_a(t) = -[1-H_a(t)]\zeta(t), \qquad \text{ja que } \zeta(t) = \vartheta(t) = z$$

Pel lema de les estratègies monòtones, podem afirmar que

$$H_a(t) = F_a(\varepsilon(t)),$$

derivem i obtenim

$$h_a(t) = f_a(\varepsilon(t))\dot{\varepsilon(t)},$$

substituïnt en la primera igualtat obtenim:

$$h_a(t) = -[1-H_a(t)]\zeta(t) = f_a(\varepsilon(t))\dot{\varepsilon}(t),$$

Obtenint així l'equació que buscavem

$$f_a(\varepsilon(t))\dot{\varepsilon}(t) = -[1-F_a(\varepsilon(t))]\zeta(t).$$

De forma anàloga obtindriem el mateix resultat per al jugador b.

$\square$

5 Estudi qualitatiu del model

En aquesta secció resoldrem el model de manera qualitativa, és a dir, buscarem quina és la solució del sistema d'equacions diferencials que ens proporciona el model mitjançant un estudi qualitatiu d'aquest.

D'ara endavant escriurem $x = \zeta(t)$ i $y = \varepsilon(t)$. Recordem que $\zeta(t) = s$ i $\varepsilon(t) = z$ són els tipus de cadascun dels jugadors i, per tant, tenim que $x \in [a_L, a_H]$ i $y \in [b_L, b_H]$. Ens trobem en el cas (ii) de la proposició 4.1, per tant, suposem $0 < a_H$ i $0 < b_H$.

Escrivim doncs, el sistema d'equacions (4.3) de la següent manera:

$$\begin{aligned} -x' f_b(x) &= [1 - F_b(x)]y \\ -y' f_a(y) &= [1 - F_a(y)]x \end{aligned} \tag{5.1}$$

Que podem reescriure com:

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{1 - F_b(x)}{f_b(x)}\, y \\ y' &= -\frac{1 - F_a(y)}{f_a(y)}\, x \end{aligned} \tag{5.2}$$

Tal com vàrem descriure en el capítol dedicat a parlar de les equacions diferencials, començarem buscant els punts d'equilibri del sistema. Per fer-ho igualem el sistema a zero. D'aquesta manera obtenim que el punt $(x, y) = (0, 0)$ és l'únic punt d'equilibri.

A continuació volem veure la seva estabilitat, per usar el Teorema de Hartman-Grobman necessitem calcular la seva diferencial. Tenim doncs que la diferencial del sistema és

$$D(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx}\left(-\frac{1 - F_b(x)}{f_b(x)}\right) y & -\frac{1 - F_b(x)}{f_b(x)} \\ -\frac{1 - F_a(y)}{f_a(y)} & \frac{d}{dy}\left(-\frac{1 - F_a(y)}{f_a(y)}\right) x \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

Que aplicat al punt $(x, y) = (0, 0)$ i, anomenant $r_i = \dfrac{1 - F_i(0)}{f_i(0)}$, $i \in \{a, b\}$, tenim

$$D(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -r_b \\ -r_a & 0 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

Notem que $r_i > 0$, $i \in \{a, b\}$, ja que la funció de densitat $f_i(\cdot)$ sempre és positiva a l'interval $[i_L, i_H]$, i $F_i(\cdot) \geq 0$ i, únicament val 1 a l'extrem superior de l'interval.

El polinomi característic del sistema és $\lambda^2 - r_a r_b$, on $r_a r_b > 0$. Aleshores, els valors propis associats són

$$\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{r_a r_b}.$$

Com que $\lambda_+ > 0$ i $\lambda_- < 0$, tenim que el punt $(0, 0)$ és un punt de sella. Calculem els vectors propis associats, per a λ_+ tenim $v_+ = (1, 1)$, i per a λ_- tenim $v_- = (1, -1)$. Deduïm doncs, que $(0, 0)$ té una varietat estable tangent a v_+, i una varietat inestable tangent a v_-.

Veiem ara que es compleix la condició inicial. Per hipòtesi tenim que $x \in [a_L, a_H]$ amb $0 < a_H \leq 1, a_L < 0$ i $y \in [b_L, b_H]$ amb $0 < b_H \leq 1, b_L < 0$, és a dir, ens centrarem en el tercer quadrant. Hem de veure que per a qualsevol condició inicial, existeix una única òrbita que tendeix a $(0,0)$. Volem provar que la varietat estable (global) tangent al vector $(1,1)$ en el tercer quadrant és monòtona, és a dir, que per tot (x_0, y_0) amb $x_0 \in [a_L, 0)$ i $y_0 \in [b_L, 0)$ hi ha un únic punt de la varietat passant pel $(0,0)$. Observem que el camp $(\dot{x}, \dot{y})$ en el tercer quadrant és tal que $\dot{x} > 0$ i $\dot{y} > 0$. Per veure això notem que $\dot{x} = 0$ si i només si $y = 0$, ja que

$$\frac{1 - F_b(x)}{f_b(x)} > 0 \quad \text{per tot } x \in [a_L, a_H],$$

com que estem al tercer quadrant $y < 0$, i per tant podem concloure que

$$\dot{x} = -\frac{1 - F_b(x)}{f_b(x)} \, y > 0.$$

De forma ànaloga procedim per a la segona component, $\dot{y} = 0$ si i només si $x = 0$, pel fet que

$$\frac{1 - F_a(y)}{f_a(y)} > 0 \quad \text{per tot } y \in [b_L, b_H]$$

com que estem al tercer quadrant $x < 0$, i per tant podem concloure que

$$y' = -\frac{1 - F_a(y)}{f_a(y)} \, x > 0.$$

Per tant, tenim que la varietat estable és monòtona al tercer quadrant, i es satisfà la condició inicial.

A continuació realitzarem un estudi numèric del model. Per fer-ho escollirem quines seran les creences dels jugadors i, per tant, quines seran les funcions de distribució dins del model.

5.1 Distribucions simètriques. Distribució uniforme $U[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

Començarem triant com a funció de distribució la distribució uniforme a l'interval $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ per als dos jugadors, és a dir, ambdós jugadors obtindran el seu tipus de forma simètrica dins d'aquesta distribució. Tindrem doncs que la funció de distribució i la de densitat seran de la forma

$$F(x) = x \quad \text{i} \quad f(x) = 1.$$

D'aquesta manera obtenim el sistema d'equacions següent:

$$\begin{aligned} -x' &= (1 - x)y \\ -y' &= (1 - y)x \end{aligned} \tag{5.5}$$

Podem reescriure el sistema com:

$$\begin{aligned} x' &= (x - 1)y \\ y' &= (y - 1)x \end{aligned} \tag{5.6}$$

Comencem mirant quins són els punts d'equilibri. Com hem vist anteriorment, el que hem de fer és igualar el sistema a zero, d'on obtenim que hi ha dos punts d'equilibri en el sistema, que són $(x, y) = (0, 0)$ i $(x, y) = (1, 1)$, però aquest darrer no el contemplarem, ja que $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ i $y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, per tant no compleix les condicions bàsiques. Ara calculem l'estabilitat del punt trobat, per fer-ho usarem el Teorema de Hartman-Grobman. Comencem calculant la diferencial del sistema, per després aplicar el punt i veure quins són els valors i vectors propis de la matriu resultant. Tenim doncs que la diferencial és:

$$D(x,y) = \begin{pmatrix} y & x-1 \\ y-1 & x \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

Aplicant el punt d'equilibri obtenim:

$$D(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

Calculem ara els valors propis de la matriu. Tenim que el polinomi característic per al punt $(0,0)$ és $\lambda^2 - 1$ i, per tant, obtenim els valors propis $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -1$, com que tenim un positiu i un negatiu, podem dir que es tracta d'un punt de sella. Calcularem els vecotrs propis per veure quines són les varietats associades. Resolem doncs el sistema $(D(x,y) - \lambda I_2)X = 0$, on I_2 és la matriu identitat de dimensió 2.

$$(D(0,0) - I_2)X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El que ens dona lloc a la recta $x+y=0$, en verd a la il·lustració, que serà varietat inestable tangent al $(0,0)$. De forma anàloga per a $\lambda_2 = -1$, obtenim la recta $x - y = 0$, en blau, que serà la varietat estable tangent al punt $(0,0)$. Notem que en aquest cas, la varietat estable coincideix amb el camp, això es deu a que $x = y$ és una recta invariant. Veiem que efectivament és una recta invariant. Multipliquem el camp pel vector perpendicular a la recta. Tenim doncs,

$$(1,-1)((x-1)y,(y-1)x)) = xy - y - xy + x = -y + x = 0$$

La darrera igualtat és certa ja que estem sobre la recta $x = y$. Tenim doncs, que la recta $x = y$ és una varietat estable invariant.

Notem que de forma lògica ens ha sortit el que haviem calculat amb el model general. Grafiquem els resultats i obtenim el següent:

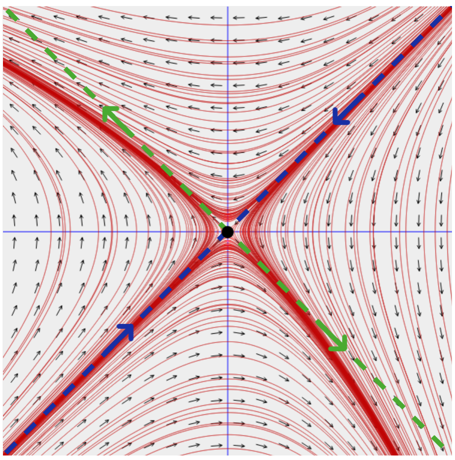

Figura 12: Representació del retrat de fase local al $(0,0)$.

5.2 Distribucions asimètriques

En aquesta secció agafarem la distribució uniforme a l'interval $(-k, \frac{1}{2})$ per al jugador a, i la distribució uniforme a l'interval $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ per al jugador b, és a dir, els jugadors estaran distribuïts de forma asimètrica. Tot i que les distribucions seran iguals a les de l'apartat anterior.

Tindrem doncs que la funció de distribució i la de densitat per al jugador a seran

$$F_a(x) = \frac{2x}{1+2k} \quad \text{i} \quad (x) = \frac{2}{1+2k} \quad \text{amb} \quad x \in [-k, \frac{1}{2}],\; k > 0.$$

Per tal de facilitar l'escriptura i els càlculs anomenarem $K = \frac{2}{1+2k}$ i, per tant, tindrem $F_a(x) = Kx$ i $f_a(x) = K$. Per altra banda, la funció de distribució per al jugador b, que serà igual a la de la secció anterior, $F_b(x) = x$ i la funció de densitat de probabilitats $f_b(x) = 1$ amb $x \in [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$.

De forma anàloga a l'apartat anterior, recordem que $x = \zeta(t)$ i $y = \varepsilon(t)$ i, d'aquesta manera obtindrem el sistema d'equacions següent:

$$\begin{aligned} -x' &= (1-x)y \\ -Ky' &= (1-Ky)x \end{aligned} \tag{5.9}$$

que podem reescriure com:

$$\begin{aligned} x' &= (x-1)y \\ y' &= \frac{1}{K}(Ky-1)x \end{aligned} \tag{5.10}$$

Ara hem de trobar els punts d'equilibri. En aquest cas obtenim els punts $(x, y) = (0, 0)$ i $(x, y) = (1, \frac{1}{K})$, però el segon l'hem de descartar perquè surt de l'interval on hem definit les distribucions, ja que $x \in [-k, \frac{1}{2}]$. Calculem la diferencial del sistema:

$$D(x,y) = \begin{pmatrix} y & x-1 \\ \frac{1}{K}(Ky-1) & x \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

Aplicant el punt d'equilibri obtenim:

$$D(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{-1}{K} & 0 \end{pmatrix} \tag{5.12}$$

Procedint de manera ànaloga als anteriors casos, tenim que els valors pròpis associats seran

$$\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{\frac{1}{K}},$$

amb vectors propis $v_+ = (-\sqrt{K}, 1)$, i $v_- = (\sqrt{K}, 1)$. Tenim doncs, que el punt $(0, 0)$ és un punt de sella i que el vector v_+ proporciona una varietat estable tangent al punt, i el vector v_- una vairetat inestable a $(0, 0)$.

Per acabar, graficarem els resultats amb dues K diferents per tal de veure com afectaran els diferents valors de K al sistema d'equacions diferencials i, per tant, a la solució del model.

Comencem donant una valor $K = 0.05$. Notem que d'aquesta manera el que farem respecte a la solució anterior serà augmentar el pendent de les dues varietats, tant de la estable com de la inestable, obtenint així una representació gràfica molt més vertical.

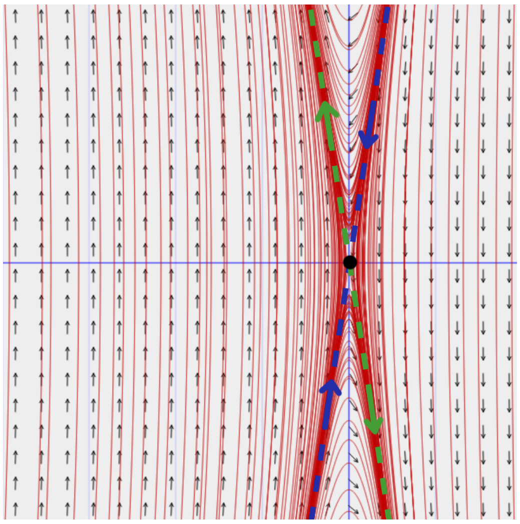

Figura 13: Representació del retrat de fase aprop del punt $(0,0)$ amb $K = 0.05$.

Per acabar realitzem el mateix procediment però amb $K = 10$. D'aquesta manera obtindrem varietats tangents al $(0,0)$ molt més horitzontals. Veiem la representació gràfica.

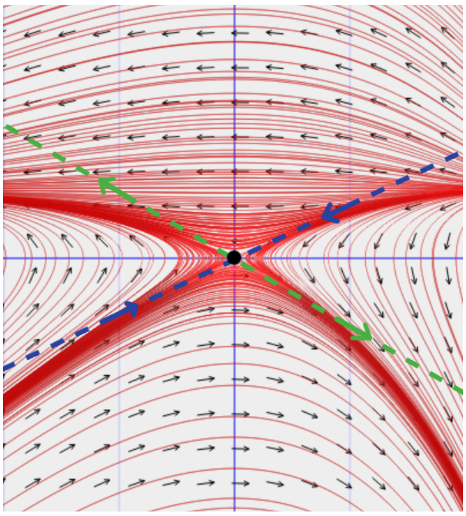

Figura 14: Representació del retrat de fase aprop del punt $(0,0)$ amb $K = 10$.

Referències

[1] Arnol'd, V.I. Ordinary differential equations. Berlin : Springer-Verlag, 2006.

[2] Hirsch, M.W. ; Smale, S. ; Devaney, R.L. Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos. San Diego (Calif.) : Academic Press, 2004.

[3] Massó, J. Nash a l'economia: equilibi i negociació. Universitat autònoma de Barcelona i Barecelona GSE, 2017.

[4] Maynard Smith, J. (1974). The theory of games and the evolution of animal conflicts, J. Theor. Biol. 47, 209–221.

[5] Pérez, Joaquin.; Jimeno, José. L.; Cerdà, Emilio. (2013) : Teoría de juegos. Madrid: Garceta. ISBN : 9788420537269

[6] Ponsati, C. and Sákovics, J. (1995). The war of attrition with incomplete information, Math. Soc. Sci. 29, 239–254

[7] Redondo, V. F. Economía Y Juegos. Antoni Bosch Editor, 2000. ISBN 84-85855-88-4

[8] Sotomayor, J. Liçóes de equaçóes diferenciais ordinárias. [Rio de Janeiro] : Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNP, 1979.

[9] Watson, Joel (2002). Strategy: An Introduction to Game Theory. New York: W.W.Norton Co