Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Linealització de matrius polinomials regulars quadrades

Autora: Núria Lan González Vidal

Directora: Dra. Maria Eulàlia Montoro López
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica
Barcelona, 24 de gener de 2023

Abstract

The usual way to numerically find the spectral structure of a regular matrix polynomial is to linearize it and then calculate eigenvalues and eigenvectors using numerical techniques for pencils of matrices. The aim of this project is to study linearization of square matrix polynomials that are regular. Given a matrix polynomial of degree l, linearization involves finding an equivalent one of degree 1. In order to find an equivalent matrix pencil, the case in which matrix polynomials are monic with the First Companion Matrix as a linearization is first discussed. Moreover, in the non-monic case, a generalised First Companion Matrix is found to be a linearization. Taking these into account, numerous linearizations are determined. To sum up applications such as calculating the resolvent form, the inverse problem and obtaining solutions of differential and difference equations are seen.

Resum

La forma estàndard de trobar numèricament l'estructura espectral d'una matriu polinomial regular és linealitzar-la i llavors calcular els VAPs i els VEPs de la linealització usant les tècniques numèriques per a feixos de matrius. L'objectiu principal d'aquest treball és estudiar la linealització de matrius polinomials regulars quadrades. Donada una matriu polinomial de grau l, la linealització consisteix a trobar-ne una de grau 1 equivalent. Primer s'estudia el cas mònic amb la Primera Matriu Companya com a primera linealització per a trobar un feix de matrius equivalent. Una linealització en el cas no mònic ve donada per una Primera Matriu Companya generalitzada. Aquestes matrius polinomials permeten trobar altres linealitzacions. Finalment, es presenten aplicacions: la forma resolvent, el problema invers i l'obtenció de solucions per a equacions diferencials i en diferències.

2020 Mathematics Subject Classification. 5A18, 15A20, 15A21, 15A22, 15A29, 15A86, 47A10

Agraïments

Vull agrair primer de tot a la meua tutora Eulàlia, per proposar-me este tema fascinant que desconeixia i endinsar-m'hi en tot lo suport possible en tot moment.

També a mons pares pel seu estímul constant.
A Lin.
A Navi.
A mons iaios i a mes iaies per saber vore meravelles.
A la meua família per fer el temps més divertit.

I a tota la bona gent que m'ha acompanyat durant estos anys de carrera.

Índex

Introducció

L'estudi exhaustiu de la teoria de matrius polinomials ha tingut força influència des del 1980 per autors com Israel Gohberg, Peter Lancaster i Leiba Rodman ([GLR82]), entre d'altres. Un plantejament inicial és l'estudi dels feixos de matrius ([Gan59]), és a dir les matrius polinomials de grau 1: $B\lambda + A$ on $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Donada una matriu polinomial $L(\lambda)$, volem trobar un feix de matrius "equivalent" que preservi el màxim de propietats de $L(\lambda)$, i que com a mínim es preservi l'estructura espectral de $L(\lambda)$ ([LP06]). Aquest feix $B\lambda + A$ l'anomenarem linealització de $L(\lambda)$.

En aquest treball, ens centrarem a estudiar la linealització pel cas de matrius polinomials regulars quadrades ([Lan08]), és a dir donades $A_0, \ldots, A_l \in \mathbb{C}^{n\times n}$ considerarem

$$L(\lambda) = \sum_{i=0}^{l} A_i \lambda^i \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$$

tals que $\det(L(\lambda)) \not\equiv 0$.

Començarem estudiant el cas en què $\det(A_l) \neq 0$ (cas mònic). Un primer exemple de linealització de $L(\lambda) = I_n\lambda^l + \sum_{i=0}^{l-1} A_i\lambda^i \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ és $I_{nl}\lambda - C_1 \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda]$ on

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & I_n & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & I_n \\ -A_0 & -A_1 & \ldots & -A_{l-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nl\times nl}.$$

En aquest cas es pot demostrar que tota matriu polinomial $U(\lambda)(I_{nl}\lambda - C_1)V(\lambda)$, amb $U(\lambda), V(\lambda) \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda]$ unimodulars, també és linealització de $L(\lambda)$ ([LT85]).

Si $L(\lambda) = \sum_{i=0}^{l} A_i\lambda^i \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ amb A_l qualsevol (cas no mònic), una linealització ve donada per

$$C_{1L}(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & I_n & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & A_l \end{bmatrix} \lambda - \begin{bmatrix} 0 & I_n & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & I_n \\ -A_0 & -A_1 & \ldots & -A_{l-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda].$$

El cas no mònic és més delicat, ja que si bé $C_{1L}(\lambda)$ preserva l'estructura espectral a l'∞ de $L(\lambda)$, tota matriu polinomial $U(\lambda)C_{1L}(\lambda)V(\lambda)$, amb $U(\lambda), V(\lambda) \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda]$ unimodulars, no tindrà necessàriament la mateixa estructura espectral a l'∞ que $L(\lambda)$. En aquest cas ens cal introduir una linealització ([GKL88]) més forta que en el cas mònic que involucrarà el polinomi revers de $L(\lambda)$, $rev(L(\lambda))$. En particular tindrem que tota matriu polinomial $UC_{1L}(\lambda)V$, amb $U, V \in \mathbb{C}^{nl\times nl}$ no singulars, preserva l'estructura espectral a l'∞.

Les parelles estàndards (cas mònic ([LT85])) i les parelles descomponibles (cas no mònic ([GLR82])) ens permeten obtenir més linealitzacions.

L'estudi de les linealitzacions ha estat focus d'interès des de fa 20 anys. Per una part s'han obtingut linealitzacions de matrius polinomials rectangulars ([DDM12]) i de matrius polinomials singulars ([DDM09]), així com linealitzacions de matrius polinomials estructurades (hermítiques, simètriques...) ([AT12]).

Una aplicació de les linealitzacions és el càlcul de la resolvent de $L(\lambda)$

$$R_L(\lambda) = L(\lambda)^{-1} \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda], \quad \lambda \in \mathbb{C} \text{ tals que } \det(L(\lambda)) \neq 0.$$

Podem representar la resolvent de $L(\lambda)$ mitjançant una parella estàndard (cas mònic) o una parella descomponible (cas no mònic).

Finalment, considerem el problema invers de la linealització: donat un feix de matrius, $B\lambda + A \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda]$, volem trobar totes les possibles matrius polinomials que tenen $B\lambda + A$ com a linealització ([Coh83]).

Aquesta memòria està distribuïda en cinc capítols.

En el capítol 1 s'introdueixen conceptes bàsics de matrius polinomials quadrades.

El segon capítol està dedicat a analitzar l'espectre d'una matriu polinomial regular quadrada.

El tercer capítol mostra linealitzacions per a matrius polinomials regulars quadrades en el cas mònic, comònic i en general. Al final del capítol s'introdueixen més linealitzacions.

El capítol 4 se centra a mostrar com a partir de la linealització d'una matriu polinomial en podem calcular la seva resolvent i s'introdueix el problema invers.

Per acabar, el capítol 5 estudia el paper de les linealitzacions per a la resolució d'equacions diferencials i en diferències.

Notació

Comencem introduint una sèrie de notacions que usarem al llarg del treball.

Treballarem sobre un cos $\mathbb{F}$, en general el cos dels nombres complexos $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, i direm que:

- $\mathbb{F}^{n\times m}$ representa el conjunt de matrius amb n files i m columnes amb coeficients al cos $\mathbb{F}$.
- Una matriu $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$ amb elements a_{ij} es denota A=$(a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$. On a_{ij} es troba a la i-èsima fila i j-èsima columna. Si $n = m$ diem que la matriu és quadrada d'ordre n.
- Escriurem $I_n \in \mathbb{F}^{n\times n}$ la matriu identitat d'ordre n.
- Dos matrius $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ són similars, $A \overset{s}{\sim} B$, si $B = S^{-1}AS$ per a alguna $S \in \mathbb{F}^{n\times n}$ no singular. "$\overset{s}{\sim}$" és relació d'equivalència.
- $A^T \in \mathbb{F}^{m\times n}$ obtinguda a partir d'$A \in \mathbb{F}^{n\times m}$ intercanviant les files per les columnes, denotarà la matriu transposada d'A. És a dir $A^T = (a_{ji})_{1\leq j\leq m, 1\leq i\leq n}$.
- El conjunt de valors propis d'$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ el denotem per $Spec(A)$ i l'anomenem espectre d'A.
- Donades $Z_i \in \mathbb{F}^{n\times m}$, denotem $\text{fil}(Z_i)_{i=k}^{p}$ la matriu fila per blocs
$$\begin{bmatrix} Z_k & Z_{k+1} & \dots & Z_p \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times m(p-k)}$$
i, $\text{col}(Z_i)_{i=k}^{p}$ la matriu columna per blocs
$$\begin{bmatrix} Z_k & Z_{k+1} & \dots & Z_p \end{bmatrix}^T \in \mathbb{F}^{m(p-k)\times n}.$$
- Donada $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$, $\text{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{F}^{m\times 1} | Ax = 0\}$ és el nucli d'A.
- $\mathbb{F}[X]$ és el conjunt de polinomis en X amb coeficients en $\mathbb{F}$.
I $\mathbb{F}^{n\times m}[X]$, el conjunt de matrius polinomials en X de mida $n \times m$.
- Denotarem per $\det(\cdot) : \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda] \to \mathbb{C}[\lambda]$ el determinant d'una matriu polinomial quadrada, i per $\text{gr}(\cdot) : \mathbb{C}^{n\times m}[\lambda] \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ el grau d'una matriu polinomial.
- Denotarem per $\#K$ el cardinal d'un conjunt K.

Capítol 1

Matrius polinomials quadrades

En aquest capítol introduirem conceptes i propietats generals sobre la teoria de matrius polinomials. Prenem com a referències bàsiques ([Gan59], [LT85], [Mac33]).

Definim una matriu polinomial quadrada com

$$A(\lambda) = \sum_{i=0}^{l} A_i \lambda^i \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda],$$

on $A_0, A_1, \ldots, A_l \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Quan $A_l = I_n$ diem que $A(\lambda)$ és *mònica* de grau l, i si $\det(A_l) = 0$ diem que estem sota el cas *no mònic*.

Exemple 1.0.1.

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 & -\lambda \\ -2\lambda - 1 & \lambda^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}[\lambda]$$

és una matriu polinomial mònica de grau 2 ($A_2 = I_2$).

La suma de matrius polinomials es defineix de forma natural com en les matrius. El producte no és commutatiu. Per tant, tenim dos casos en la divisió:

Definició 1.0.2 (Divisió entre una matriu polinomial i un *feix*)**.**
Siguin $A(\lambda), I_n\lambda + B \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$.

1. *La divisió d'$A(\lambda)$ entre $I_n\lambda + B$ per la dreta es pot expressar com*

$$A(\lambda) = Q_d(\lambda)(I_n\lambda + B) + R_d,$$

on $Q_d(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ és el quocient dret i $R_d \in \mathbb{C}^{n\times n}$ és el residu dret.

2. *La divisió d'$A(\lambda)$ entre $I_n\lambda + B$ per l'esquerra es pot expressar com*

$$A(\lambda) = (I_n\lambda + B)Q_e(\lambda) + R_e,$$

on $Q_e(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ és el quocient esquerre i $R_e \in \mathbb{C}^{n\times n}$ és el residu esquerre.

Les matrius polinomials invertibles s'anomenen *unimodulars*. Tenen una relació directa amb la matriu identitat i ens són útils per a reduir una matriu polinomial a formes més senzilles.

Definició 1.0.3. *Sigui $A(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$, diem que $A(\lambda)$ és unimodular si*

$$det(A(\lambda)) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Proposició 1.0.4. ([LT85]) *$A(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ és unimodular $\iff \exists A(\lambda)^{-1} \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$.*

Demostració. Si $\det(A(\lambda)) = t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, llavors els elements de la matriu inversa són els menors d'ordre $n-1$ d'$A(\lambda)$ dividits entre $t \neq 0$. De manera que $A(\lambda)^{-1}$ està formada per polinomis a $\mathbb{C}[\lambda]$. I per tant $A(\lambda)^{-1} \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$.

D'altra banda, si $A(\lambda)$ és invertible, aleshores $A(\lambda)A(\lambda)^{-1} = I_n$. Tenim que

$$\det(A(\lambda))\cdot\det(A(\lambda)^{-1}) = 1,$$

per tant $\det(A(\lambda))$ i $\det(A(\lambda)^{-1})$ han de ser constants diferents de zero. □

Exemple 1.0.5.

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^3 - 5 & \lambda^4 \\ \lambda^2 & \lambda^3 + 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}[\lambda]$$

és unimodular.

Emprant matrius polinomials unimodulars podem descriure una "equivalència" entre matrius polinomials. I usant matrius polinomials no singulars, incloses dins de les exposades anteriorment, veurem que podem definir una "equivalència estricta".

Definició 1.0.6. *Siguin $M_1(\lambda), M_2(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$, direm que $M_1(\lambda)$ i $M_2(\lambda)$ són* equivalents*, $M_1(\lambda) \sim M_2(\lambda)$, si $\exists E(\lambda), F(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ unimodulars tals que*

$$M_1(\lambda) = E(\lambda)M_2(\lambda)F(\lambda).$$

I direm que són estrictament equivalents*, $M_1(\lambda) \overset{e}{\sim} M_2(\lambda)$, si $\exists E, F \in \mathbb{C}^{n\times n}$ amb $det(E) \neq 0$ i $det(F) \neq 0$ tals que*

$$M_1(\lambda) = EM_2(\lambda)F.$$

Una matriu polinomial unimodular la podem representar a partir d'un producte finit de matrius elementals.

Corol·lari 1.0.7. ([LT85]) *Si $A(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ és unimodular, llavors $A(\lambda) \sim I_n$.*

Demostració. $A(\lambda)$ unimodular $\implies A(\lambda)A(\lambda)^{-1} = I_n$.
Per tant $I_n = E(\lambda)A(\lambda)F(\lambda)$ amb $E(\lambda) = I_n$ i $F(\lambda) = A(\lambda)^{-1}$ unimodulars. □

L'equivalència i l'equivalència estricta són relacions d'equivalència, tal com veurem en la següent proposició.

Proposició 1.0.8. ([GLR82]) *"$\sim$" i "$\overset{e}{\sim}$" de la Definició 1.0.6 són relacions d'equivalència.*

En el següent teorema veurem que hi ha una relació entre la similitud de matrius i l'equivalència de matrius polinomials.

Teorema 1.0.9. ([GLR82]) $A \overset{s}{\sim} B \in \mathbb{C}^{n\times n} \iff I_n\lambda - A \sim I_n\lambda - B \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$.

Demostració. $A \overset{s}{\sim} B \implies \exists S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ amb $\det(S) \neq 0$ tal que $B = S^{-1}AS$.

Tenim que $\lambda I_n - B = S^{-1}(\lambda I_n - A)S$, i per tant $I_n\lambda - A \sim I_n\lambda - B$. En particular, $I_n\lambda - A \overset{e}{\sim} I_n\lambda - B$.

Recíprocament, $I_n\lambda - A \sim I_n\lambda - B \implies \exists E(\lambda), F(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ unimodulars tals que

$$I_n\lambda - B = E(\lambda)(I_n\lambda - A)F(\lambda). \tag{1.0.1}$$

Suposem que la divisió per l'esquerra de $E(\lambda)^{-1}$ per $I_n\lambda - A$ és

$$E(\lambda)^{-1} = (I_n\lambda - A)S(\lambda) + E_0, \tag{1.0.2}$$

i la divisió per la dreta de $F(\lambda)$ per $I_n\lambda - B$ és

$$F(\lambda) = T(\lambda)(I_n\lambda - B) + F_0; \tag{1.0.3}$$

per a alguns quocients $S(\lambda), T(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ i residus $E_0, F_0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$, esquerres i drets respectivament.

Substituïm les expressions de (1.0.2) i (1.0.3) a (1.0.1), i obtenim que

$$\begin{aligned}[(I_n\lambda - A)S(\lambda) + E_0](I_n\lambda - B) = (I_n\lambda - A)[T(\lambda)(I_n\lambda - B) + F_0] \iff \\ \iff (I_n\lambda - A)F_0 - E_0(I_n\lambda - B) = (I_n\lambda - A)[S(\lambda) - T(\lambda)](I_n\lambda - B).\end{aligned}$$

Observem que

$$\mathrm{gr}((I_n\lambda - A)F_0 - E_0(I_n\lambda - B)) = 1 = \mathrm{gr}((I_n\lambda - A)[S(\lambda) - T(\lambda)](I_n\lambda - B)),$$

és a dir, ha de ser $S(\lambda) = T(\lambda)$.

Per tant,

$$(I_n\lambda - A)F_0 = E_0(I_n\lambda - B) \implies \{F_0 = E_0, \quad AF_0 = E_0B\} \implies AE_0 = E_0B.$$

Falta veure que $\det(E_0) \neq 0$. Dividim per l'esquerra $E(\lambda)$ per $I_n\lambda - B$, i obtenim

$$E(\lambda) = (I_n\lambda - B)U(\lambda) + R_0 \tag{1.0.4}$$

per a alguns quocient esquerre $U(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ i residu esquerre $R_0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Usant (1.0.2) i (1.0.4), tenim que

$$\begin{aligned}I_n = E(\lambda)^{-1}E(\lambda) &= [(I_n\lambda - A)S(\lambda) + E_0][(I_n\lambda - B)U(\lambda) + R_0] = \\ &= (I_n\lambda - A)S(\lambda)(I_n\lambda - B)U(\lambda) + (I_n\lambda - A)S(\lambda)R_0 + \\ &\quad + E_0(I_n\lambda - B)U(\lambda)] + E_0R_0 = \\ &= (I_n\lambda - A)[S(\lambda)(I_n\lambda - B)U(\lambda) + S(\lambda)R_0 + F_0U(\lambda)] + E_0R_0.\end{aligned}$$

Comparant termes del mateix grau, veiem que

$$(I_n\lambda - A)[S(\lambda)(I_n\lambda - B)U(\lambda) + S(\lambda)R_0 + F_0U(\lambda)] = 0 \quad \text{i} \quad E_0R_0 = I_n.$$

Per tant, $\det(E_0)\det(R_0) = 1 \implies \det(E_0) \neq 0$.

Notem que $AE_0 = E_0B \iff E_0^{-1}AE_0 = B \iff A \overset{s}{\sim} B$. □

1.1 Forma canònica de Smith

Les formes canòniques són eines útils per a classificar matrius, identificar les seves propietats bàsiques i per a reduir sistemes d'equacions al cas escalar.

A partir de la relació d'equivalència de la Definició 1.0.6 podem definir una forma canònica ([Mac33]) per a matrius polinomials de forma similar a la forma canònica de Jordan per a matrius.

Teorema 1.1.1 (Forma canònica de Smith)**.** ([GLR05]) *Donada $A(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$, tenim que $A(\lambda) \sim D(\lambda)$, on*

$$D(\lambda) = diag(i_1(\lambda), \dots, i_r(\lambda), 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda] \tag{1.1.1}$$

amb $i_j(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$ mònics tals que $i_j(\lambda)$ és divisible per $i_{j-1}(\lambda)$ per $j = 2, \dots, r$.

La forma de Smith es troba aplicant un nombre finit de les següents transformacions elementals a $A(\lambda)$:

- Intercanvi de dos files (columnes).
- Suma d'una fila (columna) multiplicada per un polinomi escalar a una altra.
- Producte d'una fila (columna) per un nombre de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Fins a trobar una matriu polinomial equivalent a $A(\lambda)$ en forma diagonal $D(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ com en (1.1.1).

Definició 1.1.2. *Els polinomis $i_1(\lambda), \dots, i_r(\lambda)$ del Teorema 1.1.1 els anomenem* polinomis invariants *d'$A(\lambda)$.*

Observació 1.1.3. Els polinomis invariants d'$A(\lambda)$ estan determinats pels elements d'$A(\lambda)$. En efecte, si

$$p_k(\lambda) = \text{mcd(menors d'ordre } k \text{ d'}A(\lambda)) \in \mathbb{C}[\lambda] \text{ mònics} \quad (1 \leq k \leq n)$$

i definim $p_0(\lambda) = 1$ i $D(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ és la forma de Smith d'$A(\lambda)$. Llavors si

$$r = \text{màxim}(k \in \mathbb{Z}_{>0} | p_r(\lambda) \not\equiv 0),$$

tenim que

$$i_j(\lambda) = \frac{p_j(\lambda)}{p_{j-1}(\lambda)}, \quad j = 1, \dots, r.$$

Definició 1.1.4. *Si factoritzem cada polinomi invariant* $i_j(\lambda) \not\equiv 1$ *sobre* $\mathbb{C}$, *descompon com*

$$i_j(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_{jk_1}} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{\alpha_{jk_m}} = d_{jk_1}(\lambda) \cdots d_{jk_m}(\lambda), \quad \alpha_{jk_s} \in \mathbb{Z}_{>0} \tag{1.1.2}$$

on $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ *tals que* $\lambda_i \neq \lambda_j$ *per* $i \neq j$.
Els factors $d_{jk_s}(\lambda)$ *de cada polinomi invariant (1.1.2) els anomenem* divisors elementals finits *d'*$A(\lambda)$ *on* $\sum_{j=1}^{r}\sum_{s=1}^{m}\alpha_{jk_s} =$ *gr(det(*$A(\lambda)$*)).*

Exemple 1.1.5. Considerem

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -8 \\ -1 & \lambda+1 & -\lambda+3 \\ \lambda-3 & 5\lambda+5 & \lambda^3-2\lambda^2-8\lambda+7 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}[\lambda].$$

Els seus divisors elementals finits són $d_{11}(\lambda) = \lambda$, $d_{12}(\lambda) = (\lambda-1)^2$ i $d_{13}(\lambda) = \lambda+1$, i

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1)^2(\lambda+1) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}[\lambda].$$

A partir dels polinomis invariants i dels divisors elementals finits, podem obtenir una caracterització de l'equivalència "$\sim$" mitjançant la forma de Smith.

Teorema 1.1.6. ([GLR86]) $A(\lambda) \sim B(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ $\iff$ *tenen la mateixa forma de Smith* $\iff$ *tenen els mateixos polinomis invariants* $\iff$ *tenen els mateixos divisors elementals finits.*

1.2 Forma local de Smith

Sigui $A(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ una matriu polinomial regular $(\det(A(\lambda)) \not\equiv 0)$.

Un cas particular de la forma de Smith és considerar-la només en un entorn d'un punt λ_0 tal que $\det(A(\lambda_0)) = 0$. En particular existiran dos matrius polinomials unimodulars que mostren els divisors elementals finits d'una matriu polinomial en un únic λ_0.

En el cas escalar tenim:

Siguin $a(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$ i $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tal que $a(\lambda_0) = 0$, llavors $\exists b(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$ amb $b(\lambda_0) \neq 0$ tal que

$$a(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^s b(\lambda), \quad s \in \mathbb{Z}_{>0}. \tag{1.2.1}$$

Si $a(\lambda_0) \neq 0$, posem $s = 0$ i $b(\lambda) = a(\lambda)$.

Volem estendre (1.2.1) a $A(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$.

Teorema 1.2.1 (Forma local de Smith)**.** ([GLR86]) *Sigui* $A(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ *tal que det(*$A(\lambda)$*)* $\not\equiv 0$. *Llavors donat* $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ *tal que det(*$A(\lambda_0)$*)* $= 0$ *podem escriure*

$$A(\lambda) = E_{\lambda_0}(\lambda)\, diag((\lambda-\lambda_0)^{s_1}, \ldots, (\lambda-\lambda_0)^{s_n}) F_{\lambda_0}(\lambda), \tag{1.2.2}$$

on $E_{\lambda_0}(\lambda), F_{\lambda_0}(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ *tals que det*$(E_{\lambda_0}(\lambda_0)) \neq 0$ *i det*$(F_{\lambda_0}(\lambda_0)) \neq 0$*, i* $0 \leq s_1 \leq \ldots \leq s_n$*, anomenades* multiplicitats parcials *de* λ_0 *en* $A(\lambda)$*, corresponen als graus dels divisors elementals d'*$A(\lambda)$ *en* λ_0*.*

Demostració. Sigui $D(\lambda) = \mathrm{diag}(i_1(\lambda), \ldots, i_n(\lambda))$ la forma de Smith d'$A(\lambda)$ i sigui

$$A(\lambda) = E(\lambda)D(\lambda)F(\lambda),$$

amb $E(\lambda), F(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ unimodulars.

Posem cada $i_j(\lambda)$ com en (1.2.1), llavors

$$i_j(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{s_j}\tilde{i_j}(\lambda), \quad j = 1, \ldots, n,$$

on $\tilde{i_j}(\lambda_0) \neq 0$ i $s_j \geq 0$. Com $i_j(\lambda)$ és divisible per $i_{j-1}(\lambda)$, tenim que $s_j \geq s_{j-1}$. Per tant, obtenim (1.2.2) amb

$$E_{\lambda_0}(\lambda) = E(\lambda)\mathrm{diag}(\tilde{i_1}(\lambda)), \ldots, \tilde{i_n}(\lambda)), \quad F(\lambda_0) = F(\lambda).$$

$\square$

Capítol 2

Estructura espectral de matrius polinomials regulars quadrades

Direm que una matriu polinomial $A(\lambda) = \sum_{i=0}^{l} A_i\lambda^i \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ és regular si $\det(A(\lambda)) \not\equiv 0$.

Donada $A(\lambda) = \sum_{i=0}^{l} A_i\lambda^i \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ regular, de forma anàloga a les matrius quadrades, podem definir els valors i vectors propis.

2.1 Espectre d'una matriu polinomial regular quadrada

Sigui $A(\lambda) = \sum_{i=0}^{l} A_i\lambda^i \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ regular.

Definició 2.1.1. *Diem que $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ és un* valor propi *(VAP) finit d'$A(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ si $Ker(A(\lambda_0)) \neq 0$, és a dir si $det(A(\lambda_0)) = 0$.*
Els $v \in \mathbb{C}^{n\times 1} \setminus \{0\}$ tals que $v \in Ker(A(\lambda_0))$ són els vectors propis *(VEPs) corresponents a λ_0.*
L'espectre finit d'$A(\lambda)$ es defineix com

$$Spec_{fin}(A(\lambda)) = \{\lambda \in \mathbb{C} | det(A(\lambda)) = 0\}.$$

Definició 2.1.2. *La multiplicitat de λ_0 com a arrel de $det(A(\lambda))$ l'anomenem* multiplicitat algebraica.

Exemple 2.1.3. Considerem

$$A_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+4 & 0 \\ -1 & \lambda^2-5 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}[\lambda].$$

Calculem els VAPs i VEPs d'$A_1(\lambda)$ que és mònica ($A_2 = I_2$).

$$\det(A_1(\lambda)) = (\lambda-2i)(\lambda+2i)(\lambda-\sqrt{5})(\lambda+\sqrt{5}) = 0 \iff \lambda = \pm 2i, \pm\sqrt{5}.$$

Posem $\lambda_k = k$ per $k = \pm 2i, \pm\sqrt{5}$, tots quatre amb multiplicitat algebraica 1. Per tant,

$$Spec_{fin}(L(\lambda)) = \{\pm 2i, \pm\sqrt{5}\}.$$

Busquem $v_k \in \mathbb{C}^{2\times 1} \setminus \{0\}$ tals que $L(\lambda_k)v_k = 0$. En efecte, obtenim que

$$v_{\pm 2i} = \begin{bmatrix} -9a \\ a \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad v_{\pm\sqrt{5}} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

per a $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ són VEPs corresponents a $\lambda_{\pm 2i}$ i $\lambda_{\pm\sqrt{5}}$, respectivament.

Exemple 2.1.4. Considerem ara una petita variació d'$A_1(\lambda)$ de l'Exemple 2.1.3:

$$A_2(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 4 & 0 \\ \lambda^2 - 1 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}[\lambda].$$

Notem que $A_2(\lambda)$ és no mònica, és a dir $\det(A_2) = 0$, i tenim que

$$\det(A_2(\lambda)) = -5(\lambda - 2i)(\lambda + 2i) = 0 \iff \lambda = \pm 2i.$$

Posem $\lambda_k = k$ per $k = \pm 2i$, tots dos amb multiplicitat algebraica 1. Per tant,

$$Spec_{fin}(L(\lambda)) = \{\pm 2i\}.$$

Busquem $v_k \in \mathbb{C}^{2\times 1} \setminus \{0\}$ tals que $L(\lambda_k)v_k = 0$. En efecte, obtenim que

$$v_{\pm 2i} = \begin{bmatrix} -\frac{41}{5}c \\ c \end{bmatrix}$$

per a $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ són VEPs corresponents a $\lambda_{\pm 2i}$.

Observació 2.1.5. En els Exemples 2.1.3 i 2.1.4 d'$A_1(\lambda)$ (cas mònic) hem trobat 4 VAPs finits i d'$A_2(\lambda)$ (cas no mònic), 2.
Hem vist que pot ser que no aconseguim tots els VAPs d'una matriu polinomial no mònica. És a dir donada una matriu polinomial de grau l i ordre n, en el cas mònic trobem exactament nl VAPs finits, el grau del seu determinant, mentre que en el cas no mònic podem trobar-ne $p \leq nl$.

Quan considerem matrius polinomials no mòniques, haurem de plantejar-nos com trobar els VAPs que "falten", per això necessitem el *polinomi revers*.

Definició 2.1.6. *El revers d'*$A(\lambda) = \sum_{i=0}^{l} A_i\lambda^i \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ *és*

$$rev(A(\lambda)) = \lambda^l A(\lambda^{-1}) = \sum_{i=0}^{l} A_{l-i}\lambda^i \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]. \tag{2.1.1}$$

Observació 2.1.7. Si $A(\lambda)$ és regular, llavors $rev(A(\lambda))$ també ho és.

En la proposició següent veurem que les propietats espectrals de $rev(A(\lambda))$ i les d'$A(\lambda)$ estan estretament relacionades.

Proposició 2.1.8. ([Coh83]) *Sigui* $A(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ *regular. Llavors*

$$\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ és VAP de } rev(A(\lambda)) \implies \lambda_0^{-1} \in \mathbb{C} \text{ és VAP d'}A(\lambda).$$

Demostració. Sigui $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un VAP de $rev(A(\lambda)) \implies \det(rev(A(\lambda_0))) = = det(\lambda_0^l A(\lambda_0^{-1})) = 0 \implies \det(A(\lambda_0^{-1})) = 0 \implies \lambda_0^{-1} \in \mathbb{C}$ és VAP d'$A(\lambda)$. $\square$

Definició 2.1.9. *Si* $0 \in Spec_{fin}(rev(A(\lambda)))$*, diem que* $\lambda = \infty$ *és VAP infinit d'*$A(\lambda)$*.*

Definició 2.1.10. *L'espectre d'*$A(\lambda)$ *es defineix com*

$$Spec(A(\lambda)) = \{\,\text{VAPs finits d'}A(\lambda)\} \cup \{\,\text{VAPs } \infty \text{ d'}A(\lambda)\}.$$

Observem que $Spec_{fin}(A(\lambda)) \subseteq Spec(A(\lambda))$.

En el cas que $\lambda = \infty \in Spec(A(\lambda))$, definim les seves multiplicitats algebraica i parcials com les multiplicitats algebraica i parcials de $\lambda = 0$ en $rev(A(\lambda))$.

Notem que la forma de Smith local de $rev(A(\lambda))$ en $\lambda = 0$ és $\operatorname{diag}(\lambda^{k_1}, \ldots, \lambda^{k_n})$ amb $0 \leq k_1 \leq \ldots \leq k_n$, on les k_i són les multiplicitats parcials de $\lambda = \infty$.

Observació 2.1.11. $\#Spec(A(\lambda)) = nl$.

En el cas mònic,

$$\operatorname{gr}(A(\lambda)) = l \implies \operatorname{gr}(\det(A(\lambda))) = nl,$$

i tots els VAPs són finits.

En el cas no mònic,

$$\operatorname{gr}(A(\lambda)) = l \implies \operatorname{gr}(\det(A(\lambda))) \leq nl.$$

Cal considerar VAPs a l'infinit. Prenent determinants en (2.1.1), tenim que

$$\det(rev(A(\lambda))) = \det(\lambda^l A(\lambda^{-1})) = \lambda^{nl}\det(A(\lambda^{-1})),$$

és a dir, $\lambda = 0$ té multiplicitat algebraica igual a $nl - \operatorname{gr}(\det(A(\lambda)))$ en $rev(A(\lambda))$.

Per tant, $A(\lambda)$ sempre té nl VAPs, comptant els finits i els infinits amb les seves multiplicitats algebraiques.

Exemple 2.1.12. Seguint amb l'Exemple 2.1.4, el revers d'$A_2(\lambda)$ és

$$rev(A_2(\lambda)) = \begin{bmatrix} 1+4\lambda^2 & 0 \\ 1-\lambda^2 & -5\lambda^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}[\lambda].$$

Calculem els VAPs de $rev(A_2(\lambda))$:

$$\det(rev(A_2(\lambda))) = -5\lambda^2(1+4\lambda^2) = 0 \iff \lambda = \pm\frac{i}{2}, 0.$$

Com $\lambda = 0 \in Spec_{fin}(rev(A(\lambda)))$ amb multiplicitat algebraica 2, tenim que $\lambda = \infty \in Spec(A_2(\lambda))$ amb multiplicitat algebraica 2. Per tant,

$$Spec(A_2(\lambda)) = \{\pm 2i, \infty, \infty\}.$$

Definició 2.1.13. *Els* divisors elementals infinits *d'$A(\lambda)$ són els divisors elementals finits de $rev(A(\lambda))$ en $\lambda = 0$, i els escriurem com $d_{jk}^{\infty}(\lambda)$.*

Definició 2.1.14. *El conjunt de divisors elementals finits i infinits de $L(\lambda)$, inclo-ent-hi repeticions, formen l'*estructura espectral *de $L(\lambda)$.*

Exemple 2.1.15. Seguint amb l'Exemple 1.1.5, $Spec_{fin}(A(\lambda)) = \{0, 1, 1, -1\}$.

De manera anàloga a $A(\lambda)$ trobem la forma de Smith de $rev(A(\lambda))$:

$$\begin{bmatrix} 2\lambda^3 & 0 & -8\lambda^3 \\ -\lambda^3 & \lambda^2 + \lambda^3 & -\lambda^2 + 3\lambda^3 \\ \lambda^2 - 3\lambda^3 & 5\lambda^2 + 5\lambda^3 & 1 - 2\lambda - 8\lambda^2 + 7\lambda^3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3(\lambda-1)^2(\lambda+1) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}[\lambda].$$

Notem que $0 \in Spec_{fin}(rev(A(\lambda)))$ amb multiplicitat algebraica 5, i per tant $\infty \in Spec(L(\lambda))$ amb multiplicitat algebraica 5. És a dir,

$$Spec(A(\lambda)) = \{0, 1, 1, -1, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty\}.$$

Obtenim que $A(\lambda)$ té dos divisors elementals infinits: $d_{11}^{\infty}(\lambda) = \lambda^2$ i $d_{21}^{\infty}(\lambda) = \lambda^3$.

I l'estructura espectral d'$A(\lambda)$ és $\{\lambda, (\lambda-1)^2, \lambda+1, \lambda^2, \lambda^3\}$.

Lema 2.1.16. ([GLR86]) *Sigui $A(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ analítica en un entorn de $\lambda_0 \in Spec(A(\lambda))$. Llavors les multiplicitats parcials de λ_0 són invariants pel producte d'$A(\lambda)$ a l'esquera i a la dreta per matrius polinomials analítiques $E(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ tals que $det(E(\lambda_0)) \neq 0$.*

2.2 Parelles estàndards, parelles descomponibles i parelles de Jordan

En aquesta secció, el nostre objectiu és definir una forma de Jordan anàloga al cas de matrius.

Comencem estudiant-ne el cas mònic.

Definició 2.2.1. *Una parella de matrius (X, T) es diu que és admissible per a $L(\lambda) = I_n\lambda^l + \sum_{i=0}^{l-1} A_i\lambda^i \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ si $X \in \mathbb{C}^{n\times nl}$ i $T \in \mathbb{C}^{nl\times nl}$.*

Definició 2.2.2. *Sigui (X, T) admissible per a $L(\lambda)$, diem que és parella estàndard de $L(\lambda)$ si*

(1) $det(col(XT^i)_{i=0}^{l-1}) \neq 0$.

(2) $\sum_{i=0}^{l-1} A_iXT^i + XT^l = 0$.

Proposició 2.2.3. ([GLR05]) *(P_1, C_1) és parella estàndard de $L(\lambda)$, on*

$$P_1 = \begin{bmatrix} I_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times nl} \quad i \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & I_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_n \\ -A_0 & -A_1 & \dots & -A_{l-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nl\times nl}.$$

Demostració. Observem que

$$P_1 C_1^k = \begin{cases} [0 \quad \dots \quad 0 \quad I_n \quad 0 \quad \dots \quad 0] & \text{amb } I_n \text{ al lloc } k+1 \text{ si } k = 0, 1, \dots, l-1 \\ [-A_0 \quad -A_1 \quad \dots \quad -A_l] & \text{si } k = l. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

És a dir, tenim que $\mathrm{col}(P_1 C_1^i)_{i=0}^{l-1} = I_{nl}$. Per tant, es compleix la condició (1).

D'altra banda, a partir de (2.2.1) veiem que $\sum_{i=0}^{l-1} A_i P_1 C_1^i = -P_1 C_1^l$. Per tant, la condició (2) es compleix. □

Definició 2.2.4. *Dos parelles admissibles* $(X_1, T_1), (X_2, T_2)$ *per a* $L(\lambda)$ *són similars,* $(X_1, T_1) \overset{s}{\sim} (X_2, T_2)$*, si*

$$X_2 = X_1 S, \quad T_2 = S^{-1} T_1 S$$

per a alguna $S \in \mathbb{C}^{nl \times nl}$ *amb* $det(S) \neq 0$.

Proposició 2.2.5. ([GLR82]) *Siguin* (X_1, T_1) *i* (X_2, T_2) *parelles estàndards de* $L(\lambda)$*, llavors*

$$(X_1, T_1) \overset{s}{\sim} (X_2, T_2).$$

Demostració. Notem que $X_1[\mathrm{col}(X_1 T_1^i)_{i=0]}^{l-1}]^{-1} = P_1$, doncs tenim que

$$X_1[\mathrm{col}(X_1 T_1^i)_{i=0]}^{l-1}]^{-1}[\mathrm{col}(X_2 T_2^i)_{i=0]}^{l-1}] = X_1 S = X_2,$$

per a

$$S = [\mathrm{col}(X_1 T_1^i)_{i=0]}^{l-1}]^{-1}[\mathrm{col}(X_2 T_2^i)_{i=0]}^{l-1}] \in \mathbb{C}^{nl \times nl} \tag{2.2.2}$$

tal que $\det(S) \neq 0$.

Ara, tenim

$$C_1 \mathrm{col}(X_1 T_1^i)_{i=0}^{l-1} = \mathrm{col}(X_1 T_1^i)_{i=0}^{l-1} T_1, \quad C_1 \mathrm{col}(X_2 T_2^i)_{i=0}^{l-1} = \mathrm{col}(X_2 T_2^i)_{i=0}^{l-1} T_2.$$

Per tant, $T_2 = S^{-1} T_1 S$ amb S com en (2.2.2).

De manera que $(X_1, T_1) \overset{s}{\sim} (X_2, T_2)$ □

Observació 2.2.6. Notem que a partir d'una parella estàndard (X, T) de $L(\lambda)$ podem definir una única matriu

$$Y = (\mathrm{col}(X T^i)_{i=0)}^{l-1})^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & I_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^{nl \times n}.$$

Per tant, direm que (X, T, Y) formen una *terna estàndard* de $L(\lambda)$.

Com hem vist en la Proposició 2.2.5 que tota parella de parelles estàndards són similars entre si, volem determinar un parell en què la segona matriu estigui en la forma de Jordan.

Recordem que la noció de parella de Jordan per a $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ és (X, J), on $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que $\det(X) \neq 0$, $J \in \mathbb{C}^{n \times n}$ és la forma canònica de Jordan d'A i $A = XJX^{-1}$.

Per a matrius polinomials, donat $\lambda_0 \in Spec(L(\lambda))$, denotem $X(\lambda_0) \in \mathbb{C}^{n\times r}$ la matriu que té per columnes les cadenes de Jordan de $L(\lambda_0)$ associades a λ_0 i expressem $J(\lambda_0) = \text{diag}(J_1, \dots, J_k) \in \mathbb{C}^{r\times r}$ la matriu formada pels blocs de Jordan d'ordres r_i corresponents a λ_0, on $r = \sum_{i=1}^{k} r_i$ és la multiplicitat algebraica de λ_0.

Diem que $(X(\lambda_0), J(\lambda_0))$ és una parella de Jordan de $L(\lambda)$ *corresponent a* λ_0.

Definició 2.2.7. *Sigui $(X(\lambda_i), J(\lambda_i))$ una parella de Jordan corresponent a cada $\lambda_i \in Spec(L(\lambda))$. Diem que (X, J) és* parella de Jordan *de $L(\lambda)$ si*

$$X = \begin{bmatrix} X(\lambda_1) & \dots & X(\lambda_p) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times nl}, \quad J = diag(J(\lambda_1), \dots, J(\lambda_p)) \in \mathbb{C}^{nl\times nl},$$

on $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$ per $i, j \in \{1, \dots, p\}$.

Proposició 2.2.8. ([LT85]) *Tota parella de Jordan de $L(\lambda)$ és parella estàndard de $L(\lambda)$.*

Suposem ara que $L(\lambda) = \sum_{i=0}^{l} A_i\lambda^i \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ on A_l no necessàriament és no singular.

Definició 2.2.9. *Una parella de matrius (X, T) es diu que és* admissible *per a $L(\lambda) = \sum_{i=0}^{l} A_i\lambda^i \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ si $\exists 0 \leq m \leq nl$ tal que*

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times nl} \quad i \quad T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nl\times nl},$$

on $X_1 \in \mathbb{C}^{n\times m}$ i $T_1 \in \mathbb{C}^{m\times m} \implies X_2 \in \mathbb{C}^{n\times(nl-m)}$ i $T_2 \in \mathbb{C}^{(nl-m)\times(nl-m)}$.

Definició 2.2.10. *A cada parella (X, T) admissible per a $L(\lambda)$ li associem una matriu*

$$S_k = \begin{bmatrix} X_1 & X_2T_2^k \\ X_1T_1 & X_2T_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots \\ X_1T_1^k & X_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(nk+n)\times nl}.$$

Diem que (X, T) admissible per a $L(\lambda)$ és parella descomponible de $L(\lambda)$ si

(1) $det(S_{l-1}) \neq 0$.

(2) $\{\sum_{i=0}^{l} A_iX_1T_1^i = 0 \quad i \quad \sum_{i=0}^{l} A_iX_2T_2^{l-i} = 0\} \iff \begin{bmatrix} A_0 & \dots & A_l \end{bmatrix} S_l = 0$.

Observació 2.2.11. Notem que a partir de $(\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix})$ una parella descomponible de $L(\lambda)$ podem definir una única matriu

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & T_2^{l-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{l-2} \\ V \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & I_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^{nl\times n},$$

on

$$Z_1 \in \mathbb{C}^{m\times n} \implies Z_2 \in \mathbb{C}^{(nl-m)\times n},$$
$$V = \begin{bmatrix} A_lX_1T_1^{l-1} & -\sum_{i=0}^{l-1} A_iX_2T_2^{l-1-i} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times nl}$$
$$\text{i} \quad S_{l-2} = \text{col}(X_1T_1^i, X_2T_2^{l-2-i})_{i=0}^{l-2} \in \mathbb{C}^{(nl-n)\times nl}.$$

Per tant, direm que (X, T, Z) formen una *terna descomponible* de $L(\lambda)$.

Generalitzant el cas mònic, podem definir una parella de Jordan de $L(\lambda)$. En aquest cas diferenciem dos parts en la parella de Jordan: la finita que es defineix de manera pareguda al cas mònic, i a més tenim una component infinita.

Definició 2.2.12. *Sigui* $(X(\lambda_i), J(\lambda_i))$ *una parella de Jordan corresponent a cada* $\lambda_i \in Spec(L(\lambda))$. *Diem que* (X_{fin}, J_{fin}) *és una* parella de Jordan finita *de* $L(\lambda)$ *si*

$$X_{fin} = \begin{bmatrix} X(\lambda_1) & \dots & X(\lambda_p) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times b}, \quad J_{fin} = diag(J(\lambda_1), \dots, J(\lambda_p)) \in \mathbb{C}^{b \times b},$$

on $\lambda_i \neq \lambda_j$ *si* $i \neq j$ *per* $i, j \in \{1, \dots, p\}$ *i* $b = gr(det(L(\lambda))) \leq nl$.

Juntament amb (X_{fin}, J_{fin}) ens caldrà considerar (X_∞, J_∞), una parella de Jordan de $L(\lambda)$ per a $\lambda = \infty$, per a determinar $L(\lambda)$ de manera única.

Definició 2.2.13. *Siguin* $X_\infty \in \mathbb{C}^{n \times \kappa}$ *formada per les cadenes de Jordan de* $rev(L(\lambda_0))$ *en* $\lambda_0 = 0$ *i* $J_\infty = diag(J_{\infty 1}, \dots, J_{\infty q}) \in \mathbb{C}^{\kappa \times \kappa}$ *on* $\kappa = \sum_{i=0}^{q} k_i$ *i* $J_{\infty i} \in \mathbb{C}^{k_i \times k_i}$ *és el bloc de Jordan corresponent al VAP 0. Diem que* (X_∞, J_∞) *és una* parella de Jordan infinita *de* $L(\lambda)$.

En la següent proposició veurem una caracterització de les parelles de Jordan corresponents a un valor propi d'una matriu polinomial, que dona lloc a les parelles de Jordan finites.

Proposició 2.2.14. ([GLR82]) *Siguin* $\hat{X} \in \mathbb{C}^{n \times \alpha}$ *i* $\hat{J} \in \mathbb{C}^{\alpha \times \alpha}$ *una matriu de Jordan amb un únic* $\lambda_0 \in Spec(L(\lambda))$. *Llavors* $(\hat{X}, \hat{J})$ *és parella de Jordan de* $L(\lambda)$ *corresponent a* λ_0 *si i només si*

1. $\lambda_0 \in Spec(L(\lambda))$ *amb multiplicitat algebraica* α.
2. $rang(col(\hat{X}\hat{J}^i)_{i=0}^{l-1}) = \alpha$.
3. $\sum_{i=0}^{l} A_i \hat{X} \hat{J}^i = 0$.

Per al cas de les parelles de Jordan infinites tenim el següent corol·lari.

Corol·lari 2.2.15. ([GLR82]) *Si, a més, es compleix la Proposició 2.2.14 anterior amb* $\lambda_0 = 0$, *és a dir, 0 és l'únic VAP de* $\hat{J}$ *i* $0 \in Spec(rev(L(\lambda)))$ *amb multiplicitat algebraica* α. *Aleshores* $(\hat{X}, \hat{J})$ *és parella infinita de Jordan de* $L(\lambda)$.

Exemple 2.2.16. Sigui

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 & \lambda \\ 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}[\lambda].$$

Calculem una parella de Jordan de $L(\lambda)$. Tenim que

$$Spec(L(\lambda)) = \{1, 1, 1, -1, \infty, \infty\}.$$

Per tant,

$$X(1)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad X(-1)=\begin{bmatrix}1\\8\end{bmatrix}\quad \text{i}\quad J_{fin}=\operatorname{diag}(\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\end{bmatrix}).$$

D'altra banda,

$$X_\infty=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\quad J_\infty=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$$

Teorema 2.2.17. ([GLR82]) *Siguin $L(\lambda)\in\mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ i considerem (X_{fin},J_{fin}) i (X_∞,J_∞) les parelles de Jordan finita i infinita respectivament. Llavors*

$$(\begin{bmatrix}X_{fin}&X_\infty\end{bmatrix},\begin{bmatrix}J_{fin}&0\\0&J_\infty\end{bmatrix})$$

és una parella descomponible de $L(\lambda)$.

Observació 2.2.18. En el cas mònic només tenim la part de l'espectre finit, ja que considerant la infinita com a zero, n'obtenim una parella de Jordan.

Exemple 2.2.19. Seguint amb l'Exemple 2.2.16

$$L(\lambda)=\begin{bmatrix}-\lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+1&\lambda\\0&\lambda+1\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^{2\times 2}[\lambda].$$

Vegem que la parella de Jordan

$$(X,T)=(\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&0&0&8&1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix})$$

és parella descomponible de $L(\lambda)$.

Tenim que (X,T) compleix les tres condicions per a $L(\lambda)$:

(1) Per a $m=4$, $X=\begin{bmatrix}X_1&X_2\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^{2\times 4}$ i $T=\begin{bmatrix}T_1&0\\0&T_2\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^{4\times 4}$.

(2) $\det(S_2)=\det\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&0&0&8&0&0\\1&1&0&-1&0&0\\0&0&0&-8&0&1\\1&2&1&1&0&0\\0&0&0&8&1&0\end{bmatrix}=8\neq 0.$

(3) $A_0X_1+A_1X_1T_1+A_2X_1T_1^2+A_3X_1T_1^3=0$, $A_0X_2T_2^3+A_1X_2T_2^2+A_2X_2T_2+A_3X_2=0$.

Capítol 3

Linealització de matrius polinomials regulars quadrades

En aquest capítol, considerarem matrius polinomials regulars quadrades, és a dir

$$L(\lambda) = \sum_{i=0}^{l} A_i\lambda^i \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$$

tals que $\det(L(\lambda)) \not\equiv 0$.

En primer lloc, considerarem el cas en què $\det(A_l) \neq 0$ (cas mònic).

3.1 Linealització de matrius polinomials regulars mòniques

Volem trobar una matriu polinomial mònica de la forma

$$\lambda I_n - A \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$$

que sigui "equivalent" a $L(\lambda) = I_n\lambda^l + \sum_{i=0}^{l-1} A_i\lambda^i \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$. En aquest cas direm que $\lambda I_n - A$ és una *linealització* de $L(\lambda)$.

Observem que $\det(A_l) \neq 0 \implies L(\lambda) \sim A_l^{-1}L(\lambda)I_n$. Podem suposar doncs que $A_l = I_n$, i direm que $L(\lambda)$ és mònica.

La linealització consisteix a trobar una matriu polinomial mònica de grau 1 $\lambda I_{n+p} - A \in \mathbb{C}^{(n+p)\times(n+p)}[\lambda]$ tal que

$$\lambda I_{n+p} - A \sim L(\lambda) = I_n\lambda^l + \sum_{i=0}^{l-1} A_i\lambda^i \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda].$$

Si ens fixem en matrius $n\times n$, la mida de $L(\lambda)$, no existeix aquesta "linealització". Per a trobar l'"equivalència" entre $L(\lambda)$ i $\lambda I_{n+p} - A$ cal estendre'n la mida.

Observem que

$$\mathrm{gr}(\det(\lambda I_{n+p} - A)) = n + p = \mathrm{gr}(\det(L(\lambda))) = nl \iff p = nl - n.$$

Llavors en lloc de $L(\lambda)$ considerem

$$\begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{nl-n} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda].$$

Definició 3.1.1. $\lambda I_{nl} - A \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda]$ *és una* linealització *de*

$$L(\lambda) = I_n\lambda^l + \sum_{i=0}^{l-1} A_i\lambda^i \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$$

si

$$\lambda I_{n+p} - A \sim \begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}.$$

A més, tenim que $\lambda I_{nl} - A$ i $L(\lambda)$ tenen els mateixos divisors elementals finits, i en conseqüència les mateixes multiplicitats parcials. És a dir, en preserva l'estructura espectral.

La linealització ens permet reduir un problema de grau l a un de grau 1 i preservar-ne els mateixos VAPs finits en un feix de matrius.

Un inconvenient és que augmentem les mides de les matrius.

Exemple 3.1.2. Considerem el cas d'un polinomi ($n = 1$) de grau l.

$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{k}(\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i} \in \mathbb{C}[\lambda]$ amb $\lambda_i \neq \lambda_j$ per $i \neq j$. Observem que $l = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$.

Volem trobar una linealització de $L(\lambda)$.

Siguin $J_i \in \mathbb{C}^{\alpha_i\times\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, k$, els blocs de Jordan corresponents a cada $\lambda_i \in Spec(L(\lambda))$ i $J = \mathrm{diag}(J_{\alpha_1}, \ldots, J_{\alpha_k}) \in \mathbb{C}^{l\times l}$.

Llavors

$$I_l\lambda - J \sim \begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{l-1} \end{bmatrix}.$$

És a dir, una linealització d'un polinomi de grau l és la seva forma de Jordan.

Exemple 3.1.3. Considerem

$$L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_2) \in \mathbb{C}[\lambda] \quad \text{amb} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Llavors

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

és linealització de $L(\lambda)$.

Per al cas general ($n > 1$), una linealització de $L(\lambda)$ ve donada per la matriu companya associada a la matriu polinomial $L(\lambda)$, tal com veurem a continuació.

Teorema 3.1.4. ([GLR82]) *Siguin* $L(\lambda) = I_n\lambda^l + \sum_{i=0}^{l-1} A_i\lambda^i \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ *i*

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & I_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_n \\ -A_0 & -A_1 & \dots & -A_{l-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nl\times nl}.$$

Llavors

$$\lambda I_{nl} - C_1 \sim \begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{nl-n} \end{bmatrix}.$$

Demostració. Considerem les matrius polinomials

$$E(\lambda) = \begin{bmatrix} E_{l-1}(\lambda) & \dots & E_1(\lambda) & I_n \\ -I_n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -I_n & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda] \quad \text{i} \quad F(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n & \dots & 0 & 0 \\ -\lambda I_n & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\lambda I_n & I_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda],$$

on $E_0(\lambda) = I_n$ i $E_{r+1}(\lambda) = \lambda E_r(\lambda) + A_{l-r-1} \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ per $r = 0, \dots, l-2$.

Notem que

$$\det(E(\lambda)) \equiv \pm 1 \quad \text{i} \quad \det(F(\lambda)) \equiv 1.$$

Tenim que

$$E(\lambda)(\lambda I_{nl} - C_1) = \begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{nl-n} \end{bmatrix} F(\lambda).$$

I per tant

$$\lambda I_{nl} - C_1 \sim \begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{nl-n} \end{bmatrix}.$$

□

Exemple 3.1.5. Prosseguint amb l'Exemple 1.0.1, considerem

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}[\lambda].$$

La seva Primera Matriu Companya és

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ -A_0 & -A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}.$$

Calculem els VAPs de $L(\lambda)$ i de $I_4 - C_1$.

$$\det(L(\lambda)) = \lambda(\lambda+1)(\lambda^2 - \lambda - 1) = \det(I_4\lambda - C_1) = 0 \iff \lambda = 0, -1, \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}).$$

Teorema 3.1.6. ([GLR82]) *Donades* $L(\lambda) = I_n\lambda^l + \sum_{i=0}^{l-1} A_i\lambda^i \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ *i* $S \in \mathbb{C}^{nl\times nl}$ *una linealització de* $L(\lambda)$*. Llavors* $S \overset{s}{\sim} T$ *si i només si* T *és també linealització de* $L(\lambda)$*.*

Demostració. Tenim que

$$S \overset{s}{\sim} T \implies S = VTV^{-1} \implies I_{nl}\lambda - S = V(I_{nl}\lambda - T)V^{-1} \implies$$
$$\implies I_{nl}\lambda - S \sim I_{nl}\lambda - T \sim \begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{nl-n} \end{bmatrix}.$$

D'altra banda, si S i T són linealitzacions de $L(\lambda)$, tenim que

$$I_{nl}\lambda - S \sim \begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{nl-n} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda] \quad \text{i} \quad I_{nl}\lambda - T \sim \begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{nl-n} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda].$$

Per tant, $I_{nl}\lambda - S \sim I_{nl}\lambda - T$. I per la Proposició 1.0.9 tenim que $S \overset{s}{\sim} T$. □

Corol·lari 3.1.7. ([LT85]) *La matriu*

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -A_0 \\ I_n & \dots & 0 & -A_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & I_n & -A_{l-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nl\times nl},$$

anomenada Segona Matriu Companya *de* $L(\lambda)$*, és linealització de* $L(\lambda)$*.*

Corol·lari 3.1.8. ([GLR86]) *Sigui* (X, T) *una parella estàndard de* $L(\lambda)$*, llavors* T *és linealització de* $L(\lambda)$*.*

3.2 Linealització de matrius polinomials regulars comòniques

Un cas distintiu de les matrius polinomials és quan $L(0) = I_n$, és a dir $A_0 = I_n$, en aquest cas diem que $L(\lambda)$ és *comònica*.

Teorema 3.2.1. ([GR78]) *Sigui* $L(\lambda) = \sum_{i=1}^{l} A_i\lambda^i + I_n \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ *comònica tal que* $gr(L(\lambda)) = l$*. Considerem la matriu*

$$R = \begin{bmatrix} 0 & I_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & I_n \\ -A_l & -A_{l-1} & \dots & -A_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nl\times nl},$$

que anomenarem Matriu Companya Comònica *de* $L(\lambda)$*. Llavors*

1. $I_{nl} - \lambda R \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda]$ *és una linealització de* $L(\lambda)$*.*

2. $\lambda I_{nl} - R \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda]$ *és una linealització de* $rev(L(\lambda))$ *a l'infinit.*

Demostració. Considerem les matrius polinomials

$$E(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & I_n \\ 0 & 0 & \iddots & 0 \\ \vdots & \iddots & \dots & \vdots \\ I_n & E_1(\lambda) & \dots & E_{l-1}(\lambda) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda] \quad \text{i} \quad F(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & I_n \\ 0 & 0 & \iddots & -\lambda I_n \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ I_n & -\lambda I_n & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda],$$

on $E_r(\lambda) = \sum_{j=0}^{l-r-1} \lambda^{l-r-j} A_{l-j} \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ per $r = 1, \dots, l-1$.

Tenim que

$$I_{nl} - \lambda R = E(\lambda) \begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{nl-n} \end{bmatrix} F(\lambda).$$

D'altra banda, si considerem les matrius polinomials

$$G(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & I_n \\ 0 & 0 & \iddots & 0 \\ \vdots & \iddots & \dots & \vdots \\ I_n & -G_1(\lambda) & \dots & -G_{l-1}(\lambda) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda] \quad \text{i} \quad H(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda I_n & -I_n \\ \vdots & \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & \lambda I_n & \iddots & 0 & 0 \\ \lambda I_n & -I_n & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda]$$

on $G_1(\lambda) = \lambda I_n + A_1$ i $G_r(\lambda) = \lambda G_{r-1} + A_r \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ per $r = 2, \dots, l-1$.

Tenim que

$$\lambda I_{nl} - R = G(\lambda) \begin{bmatrix} \lambda^l L(\lambda^{-1}) & 0 \\ 0 & I_{nl-n} \end{bmatrix} H(\lambda).$$

□

Exemple 3.2.2. Considerem la següent matriu polinomial comònica

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 1 & -2\lambda^3 \\ 4\lambda & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}[\lambda].$$

En aquest cas

$$R = \begin{bmatrix} 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \\ -A_3 & -A_2 & -A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{6\times 6}$$

i

$$E(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_2 \\ 0 & I_2 & 0 \\ I_2 & \lambda^2 A_3 + \lambda A_2 & \lambda A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda & -2\lambda^2 & 0 & -2\lambda \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{6\times 6}[\lambda],$$

$$F(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_2 \\ 0 & I_2 & -\lambda I_2 \\ I_2 & -\lambda I_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\lambda \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{6\times 6}[\lambda],$$

$$G(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_2 \\ 0 & I_2 & 0 \\ I_2 & -(\lambda I_2 + A_1) & -(\lambda(\lambda I_2 + A_1) + A_2) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 & -\lambda^2 - 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -\lambda & -4\lambda & -\lambda^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{6\times 6}[\lambda]$$

$$\text{i} \quad H(\lambda) = \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda I_2 & -I_2 \\ \lambda I_2 & -I_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & -1 \\ \lambda & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{6\times 6}[\lambda].$$

De manera que obtenim les següents linealitzacions de $L(\lambda)$ i de $rev(L(\lambda))$ respectivament.

$$I_6 - \lambda R = E(\lambda) \begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & I_4 \end{bmatrix} F(\lambda) \quad \text{i} \quad \lambda I_6 - R = G(\lambda) \begin{bmatrix} \lambda^3 L(\lambda^{-1}) & 0 \\ 0 & I_4 \end{bmatrix} H(\lambda).$$

3.3 Linealització de matrius polinomials regulars

De manera anàloga al cas mònic i al cas comònic podem definir una linealització pel cas general.

Definició 3.3.1. $\lambda B - A \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda]$ *és una linealització de* $L(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ *si*

$$\lambda B - A \sim \begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{nl-n} \end{bmatrix}.$$

Independentment de qui siguin A_l i A_0, disposem d'una matriu polinomial que ens servirà de guia per a trobar una linealització de qualsevol matriu polinomial, com mostra el següent teorema.

Teorema 3.3.2. ([GLR82]) *La matriu polinomial*

$$C_{1L}(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & I_n & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_l \end{bmatrix} \lambda - \begin{bmatrix} 0 & I_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_n \\ -A_0 & -A_1 & \dots & -A_{l-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda],$$

anomenada Primera Matriu Companya de $L(\lambda)$, és linealització de $L(\lambda)$.

Demostració. Considerem les matrius polinomials

$$E(\lambda) = \begin{bmatrix} E_{l-1}(\lambda) & \dots & E_1(\lambda) & I_n \\ -I_n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -I_n & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda] \quad \text{i} \quad F(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n & \dots & 0 & 0 \\ -\lambda I_n & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\lambda I_n & I_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda],$$

on $E_0(\lambda) = A_l$ i $E_{r+1}(\lambda) = \lambda E_r(\lambda) + A_{l-r-1} \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ per $r = 0, \dots, l-2$.

Notem que

$$\det(E(\lambda)) \equiv \pm 1 \quad \text{i} \quad \det(F(\lambda)) \equiv 1.$$

Tenim que

$$E(\lambda)C_{1L}(\lambda) = \begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{nl-n} \end{bmatrix} F(\lambda). \tag{3.3.1}$$

□

Observació 3.3.3. En particular, si $A_l = I_n$, tenim que $C_{1L}(\lambda) = I_{nl}\lambda - C_1$ és la Primera Matriu Companya del cas mònic.

Exemple 3.3.4. Considerem

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda^2 & \lambda \\ -\lambda - 15 & 7\lambda + 9 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}[\lambda],$$

on $\det(A_2) = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$.

Tenim que

$$C_{1L}(\lambda) = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \lambda - \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ -A_0 & -A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 15 & -9 & 1 & -7 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}[\lambda].$$

Considerem les matrius polinomials

$$E(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda A_2 + A_1 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}[\lambda]$$

$$\text{i} \quad F(\lambda) = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ -\lambda I_2 & I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}[\lambda].$$

Llavors obtenim que

$$E(\lambda)C_{1L}(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda^2 & \lambda & 0 & 0 \\ -\lambda-15 & 7\lambda+9 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} F(\lambda).$$

Corol·lari 3.3.5. ([GLR86]) *La Segona Matriu Companya de $L(\lambda)$,*

$$C_{2L}(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & I_n & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_l \end{bmatrix} \lambda - \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -A_0 \\ I_n & \dots & 0 & -A_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & I_n & -A_{l-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda],$$

és una linealització de $L(\lambda)$.

Si $N(\lambda) = U(\lambda)C_{1L}(\lambda)V(\lambda)$ amb $U(\lambda), V(\lambda) \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda]$ unimodulars, llavors si $\det(A_l) = 0$ (cas no mònic) pot passar que $N(\lambda)$ no preservi l'estructura espectral a l'∞ de $L(\lambda)$. De fet tenim el següent teorema.

Proposició 3.3.6. ([LP06]) *Sigui $L(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ tal que $\infty \in Spec(L(\lambda))$ amb multiplicitat algebraica $\kappa > 0$. Sigui $\kappa = \sum_{i=0}^{p} k_i$ una partició qualsevol de κ amb $k_i \in \mathbb{Z}_{>0}$. Llavors $\exists \lambda B - A \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda]$ que preserva les multiplicitats de tots els VAPs finits de $L(\lambda)$ i on $\infty \in Spec(L(\lambda))$ té multiplicitats parcials $k_1, \dots, k_p$.*

Exemple 3.3.7. Dos formes canòniques a l'infinit són

$$\lambda B_1 - A_1 = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (k_1 = 3) \quad \text{i} \quad \lambda B_2 - A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (k_1 = 1, k_2 = 2).$$

Tenim que $\lambda B_1 - A_1 \sim \lambda B_2 - A_2$ per a $E(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -\lambda^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $F(\lambda) = I_3$.

Ens caldrà una altra condició addicional per a definir una linealització més forta per tal de preservar l'estructura espectral a l'∞ de $L(\lambda)$, que és el que ens interessa.

Definició 3.3.8. *Donada una linealització de $L(\lambda) = \sum_{i=0}^{l} A_i\lambda^i \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$, $\lambda B - A \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda]$, diem que és* linealització forta *de $L(\lambda)$ si $rev(\lambda B - A) = B - \lambda A$ és linealització de $rev(L(\lambda))$.*

Proposició 3.3.9. ([Gan59]) *Si $\lambda B - A \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda]$ és una linealització forta de $L(\lambda)$, llavors $Spec(\lambda B - A) = Spec(L(\lambda))$. És a dir, els VAPs finits tenen les mateixes multiplicitats parcials; i si $\infty \in Spec(L(\lambda))$, les seves multiplicitats parcials en $\lambda B - A$ i en $L(\lambda)$ són les mateixes. En definitiva, preserva l'estructura espectral a l'∞.*

Proposició 3.3.10. ([GKL88]) *La Primera i la Segona Matrius Companyes, $C_{1L}(\lambda)$ i $C_{2L}(\lambda)$, són linealitzacions fortes de $L(\lambda)$.*

Demostració. En el Teorema 3.3.2 i en el Corol·lari 3.3.5 hem provat que $C_{1L}(\lambda)$ i $C_{2L}(\lambda)$ són linealitzacions de $L(\lambda)$.

Per tant només ens cal demostrar la segona condició.

Definim les matrius polinomials

$$G(\lambda) = \begin{bmatrix} -G_1(\lambda) & \dots & -G_{l-1}(\lambda) & I_n \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & I_n & \iddots & 0 \\ I_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda] \quad \text{i} \quad H(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^{l-1}I_n & \dots & \lambda I_n & I_n \\ \lambda^{l-2}I_n & \dots & I_n & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ I_n & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda],$$

on $G_r(\lambda) = \sum_{j=0}^{r-1} \lambda^{r-j} A_j \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ per $r = 1, \dots, l-1$.

Notem que

$$\det(G(\lambda)) \equiv \pm 1 \quad \text{i} \quad \det(H(\lambda)) \equiv \pm 1.$$

Tenim que

$$G(\lambda) rev(C_{1L}(\lambda)) H(\lambda) = \begin{bmatrix} rev(L(\lambda)) & 0 \\ 0 & I_{nl-n} \end{bmatrix}. \tag{3.3.2}$$

Per tant, $C_{1L}(\lambda)$ és linealització forta de $L(\lambda)$.

Transposant per blocs la igualtat (3.3.2), obtenim que $C_{2L}(\lambda)$ també és linealització forta de $L(\lambda)$. $\square$

Exemple 3.3.11. Seguint amb l'Exemple 3.3.4, considerem

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda^2 & \lambda \\ -\lambda - 15 & 7\lambda + 9 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}[\lambda].$$

Veurem que

$$rev(C_{1L}(\lambda)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \\ -15\lambda & 9\lambda & -\lambda & 7\lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}[\lambda]$$

és linealització forta de $rev(L(\lambda))$.

Prenem

$$G(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda A_0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 15\lambda & -9\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}[\lambda]$$

$$\text{i} \quad H(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda I_2 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}[\lambda].$$

I tenim que

$$G(\lambda) rev(C_{1L}(\lambda)) H(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda & \lambda^2 & 0 & 0 \\ -15\lambda^3 - \lambda^2 & 9\lambda^3 + 7\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rev(L(\lambda)) & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}.$$

Teorema 3.3.12. ([GKL88]) *Donades* $L(\lambda) = \sum_{i=0}^{l} A_i\lambda^i \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ *i* $B_1\lambda - A_1 \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda]$ *una linealització forta de* $L(\lambda)$*. Llavors* $B_1\lambda - A_1 \overset{e}{\sim} B_2\lambda - A_2$ *si i només si* $B_2\lambda - A_2$ *és també linealització forta de* $L(\lambda)$*.*

Demostració. Si $B_1\lambda - A_1 \overset{e}{\sim} B_2\lambda - A_2 \implies \exists E_1, F_1 \in \mathbb{C}^{nl\times nl}$ invertibles tals que

$$B_1\lambda - A_1 = E_1(B_2\lambda - A_2)F_1. \tag{3.3.3}$$

Per tant, apliquem el revers a les dues bandes de l'equació (3.3.3) i obtenim

$$rev(B_1\lambda - A_1) = E_1 rev(B_2\lambda - A_2)F_1$$

i, per tant, $B_2\lambda - A_2$ és també linealització forta.

D'altra banda, si $B_1\lambda - A_1, B_2\lambda - A_2 \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda]$ són linealitzacions fortes de $L(\lambda)$, llavors $\exists E_1(\lambda), E_2(\lambda), F_1(\lambda), F_2(\lambda), G_1(\lambda), G_2(\lambda), H_1(\lambda), H_2(\lambda) \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda]$ unimodulars tals que

$$E_1(\lambda)(B_1\lambda - A_1)F_1(\lambda) = \begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{nl-n} \end{bmatrix} = E_2(\lambda)(B_2\lambda - A_2)F_2(\lambda),$$

$$G_1(\lambda)rev(B_1\lambda - A_1)H_1(\lambda) = \begin{bmatrix} rev(L(\lambda)) & 0 \\ 0 & I_{nl-n} \end{bmatrix} = G_2(\lambda)rev(B_2\lambda - A_2)H_2(\lambda).$$

És a dir, ha de ser

$$B_1\lambda - A_1 = E(\lambda)(B_2\lambda - A_2)F(\lambda), \quad rev(B_1\lambda - A_1) = G(\lambda)rev(B_2\lambda - A_2)H(\lambda)$$

Doncs $\lambda B_1 - A_1$ i $\lambda B_2 - A_2$ tenen els mateixos divisors elementals finits i infinits.

Per tant, $\lambda B_1 - A_1 \overset{e}{\sim} \lambda B_2 - A_2$. □

La forma local de Smith ens permet establir un criteri per a determinar si un feix és linealització (forta) o no, com mostra la següent proposició.

Proposició 3.3.13. ([Lan08]) *Siguin* $L(\lambda) = \sum_{i=0}^{l} A_i\lambda^i \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ *i qualsevol* $\lambda B - A \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda]$*. Si* $\forall \lambda_j \in Spec_{fin}(L(\lambda))$*, tal que* $\lambda_j \neq \lambda_i$ *si* $j \neq i$*, existeixen* $E_{\lambda_j}(\lambda), F_{\lambda_j}(\lambda) \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda]$ *unimodulars tals que* $det(E_{\lambda_j}(\lambda_j)) \neq 0$ *i* $det(F_{\lambda_j}(\lambda_j)) \neq 0$ *complint*

$$\begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{nl-n} \end{bmatrix} = E_{\lambda_j}(\lambda)(\lambda B - A)F_{\lambda_j}(\lambda),$$

llavors $\lambda B - A$ *és una linealització de* $L(\lambda)$*.*

Si a més $L(\lambda)$ *té un VAP a l'infinit i* $\exists E_0(\lambda)$, $F_0(\lambda) \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda]$ *unimodulars tals que* $det(E_0(0)) \neq 0$ *i* $det(F_0(0)) \neq 0$ *complint*

$$\begin{bmatrix} rev(L(\lambda)) & 0 \\ 0 & I_{nl-n} \end{bmatrix} = E_0(\lambda)(B - \lambda A)F_0(\lambda),$$

llavors $\lambda A - B$ *és una linealització forta de* $L(\lambda)$*.*

Demostració. Pel Lema 2.1.16, tenim que $\lambda B - A$ i $L(\lambda)$ tenen les mateixes multiplicitats parcials en cada VAP. Llavors el resultat és conseqüència de la Proposició 3.3.9. □

3.4 Altres linealitzacions per a matrius polinomials regulars

Tal com acabem de veure, a part de les Primera i Segona Matrius Companyes, hi ha altres linealitzacions de $L(\lambda)$.

3.4.1 Matrius de Fiedler

Un desavantatge de la Primera Matriu Companya és que pot no reflectir l'estructura algebraica de la matriu a linealitzar, per això sorgeixen les matrius companyes de Fiedler ([DPR19], [DDM10]).

Definició 3.4.1. *Siguin $M_i \in \mathbb{C}^{nl\times nl}$ definides com*

$$M_0 = \begin{bmatrix} -A_0 & 0 \\ 0 & I_{nl-n} \end{bmatrix}, \quad M_j = \begin{bmatrix} I_{nj-n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n & 0 \\ 0 & I_n & -A_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{nl-nj-n} \end{bmatrix} \quad i \quad M_l = \begin{bmatrix} I_{nl-n} & 0 \\ 0 & A_l \end{bmatrix}$$

per $j = 1, \ldots, l-1$. Donada una permutació $\sigma = (\sigma(0), \ldots, \sigma(l-1))$ de la l-tupla $(0, \ldots, l-1)$, diem que $F_\sigma = M_{\sigma(0)} \cdots M_{\sigma(l-1)} \in \mathbb{C}^{nl\times nl}$ és la matriu companya de Fiedler *de $L(\lambda)$ associada a σ.*

En particular tenim que $C_{1L}(\lambda) = \lambda M_l - F_{\sigma_1}$ per a $\sigma_1 = (l-1, \ldots, 0)$. Com cada factor M_i de les matrius companyes de Fiedler és simètric, per a $\sigma_2 = (0, \ldots, l-1)$, $F_{\sigma_2} = M_0 \cdots M_{l-1} = (M_{l-1} \cdots M_0)^T = C_1^T = C_2$. Per tant, tindrem una altra manera de construir linealitzacions fortes a partir de la Primera Matriu Companya de $L(\lambda)$, com mostra la següent proposició.

Proposició 3.4.2. ([DPR19]) *Sigui $C_{1L}(\lambda)$ la Primera Matriu Companya de $L(\lambda)$. Llavors per a tota permutació σ de la l-tupla $(0, \ldots, l-1)$, $\lambda M_l - F_\sigma \overset{e}{\sim} C_{1L}(\lambda)$.*

Exemple 3.4.3. Considerem

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 3\lambda & 2 \\ 4 & \lambda^3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}[\lambda].$$

Definim les matrius

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{6\times 6}, \qquad M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{6\times 6}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{6\times 6}, \qquad M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{6\times 6}.$$

Siguin $\sigma_1 = (210)$ i $\sigma_2 = (021)$. Les seves matrius companyes de Fiedler són

$$F_{\sigma_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad F_{\sigma_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observem que $\lambda M_3 - F_{\sigma_1}$ és la Primera Matriu Companya de $L(\lambda)$.

I tenim que $\lambda M_3 - F_{\sigma_2}$ és linealització forta de $L(\lambda)$.

3.4.2 Linealització descomponible

Donada una parella descomponible de $L(\lambda)$, podem determinar una linealització de $L(\lambda)$ i, com es mostra en la segona part de la següent proposició, podem definir de manera equivalent una parella descomponible.

Proposició 3.4.4. ([Coh83]) *Sigui* $(\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix})$ *una parella descomponible de $L(\lambda)$. Llavors*

$$T(\lambda) = \begin{bmatrix} I_m\lambda - T_1 & 0 \\ 0 & T_2\lambda - I_{nl-m} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda]$$

és linealització forta de $L(\lambda)$, que anomenarem linealització descomponible *de $L(\lambda)$.*

A més

$$C_{1L}(\lambda)S_{l-1} = \begin{bmatrix} S_{l-2} \\ V \end{bmatrix} T(\lambda) \tag{3.4.1}$$

on

- $C_{1L}(\lambda) \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda]$ *és la Primera Matriu Companya de $L(\lambda)$;*
- $S_{l-1} = col(X_1T_1^i, X_2T_2^{l-1-i})_{i=0}^{l-1} \in \mathbb{C}^{nl\times nl}$*;*
- $S_{l-2} = col(X_1T_1^i, X_2T_2^{l-2-i})_{i=0}^{l-2} \in \mathbb{C}^{(nl-n)\times nl}$*;*
- $V = \begin{bmatrix} A_lX_1T_1^{l-1} & -\sum_{i=0}^{l-1} A_iX_2T_2^{l-1-i} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times nl}$.

Demostració. Les primeres $nl - n$ files de (3.4.1) consonen per construcció, ja que

$$\begin{bmatrix} \lambda I_n & -I_n & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda I_n & -I_n \end{bmatrix} S_{l-1} = S_{l-2}T(\lambda) \in \mathbb{C}^{(nl-n)\times nl}[\lambda]. \tag{3.4.2}$$

I les últimes n files de (3.4.1) es desprenen de la Definició 2.2.10, en particular de la condició (2). De manera que

$$\begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_{l-2} & \lambda A_l + A_{l-1} \end{bmatrix} S_{l-1} = VT(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times nl}[\lambda].$$

A més,

$$\det \begin{bmatrix} S_{l-2} \\ V \end{bmatrix} \neq 0,$$

perquè sinó tindríem que $\det(C_{1L}(\lambda)) \equiv 0$, cosa que contradiria que $C_{1L}(\lambda) \sim L(\lambda)$ pel fet que $\det(L(\lambda)) \not\equiv 0$.

Per tant, $T(\lambda) \overset{e}{\sim} C_{1L}(\lambda)$ que és linealització forta de $L(\lambda)$. $\square$

Exemple 3.4.5. Continuant amb l'Exemple 2.2.19, considerem

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} -(\lambda-1)^3 & \lambda \\ 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}[\lambda] \quad \text{i} \quad \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

una parella descomponible de $L(\lambda)$.

Vegem que

$$T(\lambda) = \begin{bmatrix} I_4\lambda - T_1 & 0 \\ 0 & T_2\lambda - I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{6\times 6}[\lambda]$$

és linealització de $L(\lambda)$.

Tenim que

$$C_{1L}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & -\lambda+3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{6\times 6}[\lambda]$$

$$\text{i} \quad \begin{bmatrix} S_1 \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2T_2 \\ X_1T_1 & X_2 \\ A_3X_1T_1^2 & -\sum_{i=0}^{2} A_iX_2T_2^{2-i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{6\times 6}.$$

Per tant,

$$C_{1L}(\lambda)S_2 = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8\lambda+8 & 0 & -1 \\ \lambda-1 & \lambda-2 & -1 & -\lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8\lambda-8 & -1 & \lambda \\ -\lambda+1 & -2\lambda+3 & -\lambda+3 & -\lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ V \end{bmatrix} T(\lambda).$$

En particular, si tenim una parella de Jordan d'una matriu polinomial obtenim una forma canònica de forma semblant a la forma canònica de Jordan per a matrius.

Teorema 3.4.6 (Forma de Weierstrass)**.** ([LP06]) *Si $\lambda B - A \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda]$ és una linealització de $L(\lambda)$, llavors $\lambda B - A \overset{e}{\sim} W(\lambda)$, que anomenarem forma canònica de Weierstrass, on*
$W(\lambda) = diag(I_{k_1}+\lambda J_{k_1}(0), \dots, I_{k_p}+\lambda J_{k_p}(0), \lambda I_{l_1}+J_{l_1}(\lambda_1), \dots, \lambda I_{l_q}+J_{l_q}(\lambda_q)) \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda]$
i $J_k(\lambda_i) \in \mathbb{C}^{k\times k}[\lambda]$ és el bloc de Jordan corresponent a $\lambda_i \in Spec(L(\lambda))$.

Si posem que l'infinit té multiplicitat algebraica igual a $\kappa = \sum_{i=1}^{p} k_i$. Llavors podem denotar la linealització de Weierstrass com

$$W(\lambda) = \begin{bmatrix} I_\kappa + \lambda W_\infty & 0 \\ 0 & W_{fin}(\lambda) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda]$$

on $W_\infty = \operatorname{diag}(J_{k_1}(0), \dots, J_{k_p}(0))$ i $W_{fin}(\lambda) = \operatorname{diag}(\lambda I_{l_1} + J_{l_1}(\lambda_1), \dots, \lambda I_{l_q} + J_{l_q}(\lambda_q))$.

Exemple 3.4.7. Considerem

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}[\lambda].$$

Tenim que $\det(L(\lambda)) = -(\lambda + 2)(\lambda - 2)$.

El seu revers és

$$rev(L(\lambda)) = \begin{bmatrix} 1 - \lambda^2 & 3\lambda^2 \\ -\lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}[\lambda]$$

Tenim que $\det(rev(L(\lambda))) = \lambda^2(4\lambda^2 - 1)$. Per tant, $\infty \in Spec(L(\lambda))$ té multiplicitat algebraica 2.

Com la forma local de Smith de $rev(L(\lambda))$ en $\lambda = 0$ és

$$rev(L(\lambda)) = \begin{bmatrix} 1 - 4\lambda^2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

tenim que l'∞ té multiplicitats parcials $k_1 = 0, k_2 = 2$.

Per tant la forma canònica de Weierstrass de $L(\lambda)$ és

$$W(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda + 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}[\lambda].$$

Capítol 4

Resolvent i problema invers

Recordem que la forma resolvent d'una matriu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es defineix com

$$R_A(\lambda) = (I_n\lambda - A)^{-1} \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda], \quad \lambda \in \mathbb{C} \text{ tals que } \lambda \notin Spec(A).$$

En el cas de matrius polinomials $L(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ la resolvent es defineix com

$$R_L(\lambda) = L(\lambda)^{-1} \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda], \quad \lambda \in \mathbb{C} \text{ tals que } \lambda \notin Spec(L(\lambda)).$$

En la primera part d'aquest capítol veurem la relació entre la resolvent i linealitzacions d'una matriu polinomial.

En la segona part, estudiarem el problema invers de la linealització. És a dir donada una linealització estudiarem quan existeix una matriu polinomial que la té com a linealització.

4.1 Resolvent de matrius polinomials regulars

En general, a partir d'una linealització descomponible podrem trobar la resolvent d'una matriu polinomial. És a dir, expressarem

$$R_L(\lambda) = L(\lambda)^{-1} \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda], \quad \lambda \in \mathbb{C} \text{ tals que } \lambda \notin Spec(L(\lambda))$$

en termes d'una parella descomponible i la linealització descomponible corresponent.

Teorema 4.1.1. ([GLR82]) *Sigui* $L(\lambda) = \sum_{i=0}^{l} A_i\lambda^i \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$, *i considerem* $(\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix})$ *una terna descomponible de* $L(\lambda)$ *i* $T(\lambda) \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda]$ *la linealització descomponible corresponent. Llavors*

$$L(\lambda)^{-1} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} T(\lambda)^{-1} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}, \quad \forall\lambda \notin Spec(L(\lambda)).$$

Demostració. Notem que, com hem vist en la Proposició 3.4.4,

$$\det \begin{bmatrix} S_{l-2} \\ V \end{bmatrix} \neq 0.$$

Podem escriure (3.3.1) com

$$\begin{bmatrix} L(\lambda)^{-1} & 0 \\ 0 & I_{nl-n} \end{bmatrix} = F(\lambda)C_{1L}(\lambda)^{-1}E(\lambda)^{-1}.$$

Aleshores multiplicant-hi a l'esquerra per $\begin{bmatrix} I_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times nl}$ i a la dreta per $\begin{bmatrix} I_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^{nl\times n}$, obtenim que

$$L(\lambda)^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} C_{1L}(\lambda)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & I_n \end{bmatrix}^T. \tag{4.1.1}$$

I a partir de (3.4.1) i de propietats del producte de matrius polinomials veiem que

$$\begin{aligned} L(\lambda)^{-1} &= \begin{bmatrix} I_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} S_{l-1}T(\lambda)^{-1} \begin{bmatrix} S_{l-2} \\ V \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & I_n \end{bmatrix}^T = \\ &= \begin{bmatrix} X_1 & X_2T_2^{l-1} \end{bmatrix} T(\lambda)^{-1} \begin{bmatrix} S_{l-2} \\ V \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & I_n \end{bmatrix}^T = \\ &= \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & T_2^{l-1} \end{bmatrix} T(\lambda)^{-1} \begin{bmatrix} S_{l-2} \\ V \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & I_n \end{bmatrix}^T = \\ &= \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} T(\lambda)^{-1} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & T_2^{l-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{l-2} \\ V \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & I_n \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

□

Exemple 4.1.2. Continuant amb l'Exemple 2.2.19, considerem

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 & \lambda \\ 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}[\lambda].$$

Calculem $\det(L(\lambda)) = -(\lambda - 1)^3(\lambda + 1) = 0 \iff \lambda = \pm 1$.

Doncs per a $\lambda \neq \pm 1$, tenim que

$$\begin{aligned} L(\lambda)^{-1} &= \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1} & \dfrac{\lambda}{\lambda^4 - \lambda^3 + 2\lambda - 1} \\ 0 & \dfrac{1}{\lambda + 1} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} T(\lambda)^{-1} \begin{bmatrix} I_4 & 0 \\ 0 & T_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{l-2} \\ V \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^{2\times 2}[\lambda]. \end{aligned}$$

En particular, en el cas que $L(\lambda)$ sigui mònica, amb qualsevol linealització de $L(\lambda)$ podem obtenir la seva resolvent partint d'una terna estàndard corresponent. Tal com veurem en el següent corol·lari.

Corol·lari 4.1.3. ([LT85]) *Sigui (X, T, Y) una terna estàndard de $L(\lambda)$, llavors*

$$L(\lambda)^{-1} = X(I_{nl}\lambda - T)^{-1}Y, \quad \forall \lambda \notin Spec(L(\lambda)).$$

Observació 4.1.4. Si $L(\lambda)$ és mònica, en particular, tenim que la Primera Matriu Companya és de la forma $C_{1L}(\lambda) = I_{nl}\lambda - C_1$. I de l'expressió (4.1.1) deduïm que es pot expressar $R_L(\lambda) = L(\lambda)^{-1}$ en termes de la Primera Matriu Companya de $L(\lambda)$ en el cas mònic. Llavors $\forall\lambda \notin Spec(L(\lambda))$ tenim que

$$L(\lambda)^{-1} = P_1(I_{nl}\lambda - C_1)^{-1}R_1$$

on $C_1 \in \mathbb{C}^{nl\times nl}[\lambda]$ és la Primera Matriu Companya de $L(\lambda)$,

$$P_1 = \begin{bmatrix} I_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times nl} \quad \text{i} \quad R_1 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & I_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^{nl\times n}.$$

Observació 4.1.5. En el cas que $\det(A_l) \neq 0$, obtenim la resolvent amb $R_1 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & A_l^{-1} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^{nl\times n}$.

4.2 El problema invers de la linealització

El nostre objectiu és respondre a la següent pregunta:

Quan és (X,T), admissible per a $L(\lambda) = \sum_{i=0}^{l} A_i\lambda^i \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$, una parella descomponible d'alguna $L(\lambda)$ regular de grau l?

En el següent teorema obtindrem exactament qui és $L(\lambda)$ mitjançant els termes de la parella descomponible corresponent.

Teorema 4.2.1. ([Coh83]) *Sigui* $(X,T) = (\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix})$ *una parella admissible per a* $L(\lambda) = \sum_{i=0}^{l} A_i\lambda^i \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$*. Si*

$$L(\lambda) = V \begin{bmatrix} I_m\lambda - T_1 & 0 \\ 0 & T_2\lambda - I_{nl-m} \end{bmatrix} (U_0 + U_1\lambda + \ldots + U_{l-1}\lambda^{l-1}) \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda], \quad (4.2.1)$$

on $V = \begin{bmatrix} A_l X_1 T_1^{l-1} & -\sum_{i=0}^{l-1} A_i X_2 T_2^{l-1-i} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times nl}$ *i* $\begin{bmatrix} U_0 & \dots & U_{l-1} \end{bmatrix} = S_{l-1}^{-1} \in \mathbb{C}^{nl\times nl}$, *aleshores* (X,T) *és parella descomponible de* $L(\lambda)$.

Demostració. Si $L(\lambda) = \sum_{i=0}^{l} A_i\lambda^i \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ és de la forma (4.2.1), n'obtenim els seus coeficients separant la linealització descomponible la qual depèn de λ i la que n'és independent. Comparant graus tenim que

$$\begin{bmatrix} A_0 & \dots & A_l \end{bmatrix} = V\left(\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} S_{l-1}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & I_{nl} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & I_{nl-m} \end{bmatrix} S_{l-1}^{-1} \begin{bmatrix} I_{nl} & 0 \end{bmatrix} \right).$$

De la igualtat (3.4.2), en deduïm que

$$S_{l-1}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda I_n & -I_n & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda I_n & -I_n \end{bmatrix} S_l = T(\lambda).$$

Tenim que

$$\begin{bmatrix} A_0 & \dots & A_l \end{bmatrix} S_l = V \left(\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} S_{l-1}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & I_{nl} \end{bmatrix} S_l - \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & I_{nl-m} \end{bmatrix} S_{l-1}^{-1} \begin{bmatrix} I_{nl} & 0 \end{bmatrix} S_l \right) =$$

$$= V \left(\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & I_{nl-m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & I_{nl-m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \right) = 0.$$

Per tant que (X, T) és parella descomponible de $L(\lambda)$. □

Exemple 4.2.2. Considerem

$$(X, T) = (\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix})$$

una parella admissible de

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} -(\lambda-1)^3 & \lambda \\ 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}[\lambda].$$

Calculem

$$V = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 6}, \quad S_2^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 8 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 2 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & -16 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{6\times 6}.$$

i veiem que

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} -(\lambda-1)^3 & \lambda \\ 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} I_4\lambda - T_1 & 0 \\ 0 & T_2\lambda - I_2 \end{bmatrix} S_2^{-1} \mathrm{col}(I_2\lambda^i)_{i=0}^2 \in \mathbb{C}^{2\times 2}[\lambda].$$

Per tant, (X, T) és parella descomponible de $L(\lambda)$.

En el cas mònic, ens preguntem:

Quan és (X, T), admissible per a $L(\lambda) = I_n\lambda^l + \sum_{i=0}^{l-1} A_i\lambda^i \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$, una parella estàndard d'alguna $L(\lambda)$ mònica regular de grau l?

En el següent corol·lari obtindrem exactament qui és $L(\lambda)$ mitjançant els termes de la parella estàndard corresponent.

Corol·lari 4.2.3. ([GLR05]) *Sigui (X, T) una parella admissible per a $L(\lambda) = = I_n\lambda^l + \sum_{i=0}^{l-1} A_i\lambda^i \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$. Si*

$$L(\lambda) = I_n\lambda^l - XT^l(V_1 + V_2\lambda + \ldots + V_l\lambda^{l-1}),$$

on $V_i \in \mathbb{C}^{nl\times n}$ tals que $fil(V_i)_{i=1}^l = [col(XT^i)_{i=0}^{l-1}]^{-1}$ aleshores (X, T) és parella estàndard de $L(\lambda)$.

Capítol 5

Aplicacions de la linealització

Les matrius polinomials tenen una infinitat d'aplicacions en camps com l'enginyeria, la física, la teoria de control... En el cas de les linealitzacions algunes aplicacions es troben en:

Anàlisi numèric La linealització s'usa per a simplificar l'anàlisi de matrius polinomials i dissenyar algorismes profitosos per a la seva manipulació. Això pot ser útil per a una varietat de camps, incloent-hi l'àlgebra lineal numèrica, la ciència computacional o els problemes dels VAPs. ([LLW12], [LRY17], [MT01])

Sistemes d'equacions diferencials lineals Per a modelar sistemes d'equacions diferencials lineals habitualment s'utilitzen matrius polinomials per a descriure sistemes físics. La linealització en simplifica l'anàlisi i la solució d'aquests, cosa que permet fer ús de tècniques d'àlgebra lineal i de teoria de matrius. ([CDF38], [CLV89])

Sistemes de control Les matrius polinomials normalment són emprades per a descriure sistemes de control lineals que es fan servir per a explicar el comportament de sistemes físics. La linealització en simplifica l'anàlisi i el disseny d'aquests, cosa que permet fer ús de tècniques de teoria de control i d'àlgebra lineal. ([LW07], [JLR19])

5.1 Aplicació a equacions diferencials i en diferències (cas mònic)

Considerem el sistema d'equacions diferencials

$$L\Big(\frac{d}{dt}\Big)x(t) = \frac{d^l x}{dt^l} + \sum_{i=0}^{l-1} A_i \frac{d^i x}{dt^i} = f(t), \quad -\infty < |t| < \infty \tag{5.1.1}$$

on $f(t)$ és una funció vectorial n-dimensional sobre $\mathbb{C}$ contínua a trossos.

Una solució general $x(t) \in \mathcal{C}^l(\mathbb{C})$ de (5.1.1) es pot expressar com

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

amb $x_h(t)$ solució general de l'equació homogènia

$$L\Big(\frac{d}{dt}\Big)x(t) = 0 \tag{5.1.2}$$

i $x_p(t)$ una solució particular de l'equació no homogènia inicial (5.1.1).

Proposició 5.1.1. ([Chr95]) *Les solucions de l'equació homogènia (5.1.2) formen un espai vectorial que denotarem per* $\varphi(L)$.

A més,

$$dim(\varphi(L)) = nl = gr(det(L(\lambda))). \tag{5.1.3}$$

Teorema 5.1.2. ([GLR82]) *La solució general de l'equació (5.1.1) es pot escriure com*

$$x(t) = P_1 e^{tC_1} z_r + P_1 \int_0^t e^{(t-s)C_1} R_1 f(s) ds$$

on $C_1 \in \mathbb{C}^{nl\times nl}$ *és la Primera Matriu Companya de* $L(\lambda)$,

$$P_1 = \begin{bmatrix} I_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times nl}, \quad R_1 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & I_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^{nl\times n}$$

i $z_r \in \mathbb{C}^{nl\times 1}$ *arbitrari. En particular, la solució general de l'equació homogènia (5.1.2) és*

$$x(t) = P_1 e^{tC_1} z_r. \tag{5.1.4}$$

Demostració. Comprovem que l'expressió (5.1.4) és solució general de l'equació homogènia (5.1.2) per a qualsevol $z_r \in \mathbb{C}^{nl\times 1}$.

Com $\dfrac{d^i x(t)}{dt^i} = P_1 C_l^i e^{tC_1} z_r$ per $i = 0, 1, \dots, l$, tenim

$$\begin{aligned} L(\frac{d}{dt})x(t) &= P_1 C_1^l e^{tC_1} z_r + A_{l-1} P_1 C_1^{l-1} e^{tC_1} z_r + \dots + A_0 P_1 C_1^0 e^{tC_1} = \\ &= \begin{bmatrix} -A_0 & -A_1 & \dots & -A_l \end{bmatrix} e^{tC_1} z_r + \\ &\quad + (A_{l-1} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & I_n \end{bmatrix} + \dots + A_0 \begin{bmatrix} I_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}) e^{tC_1} z_r = 0. \end{aligned}$$

Vegem que (5.1.4) dona totes les solucions de l'equació homogènia (5.1.2). Havent vist (5.1.3), cal veure que si $P_1 e^{tC_1} z_r \equiv 0$, llavors $z_r = 0$. Derivant tenim $P_1 C_1^i e^{tC_1} z_r \equiv 0$ per a $i = 0, 1, \dots$. En particular, $[\mathrm{col}(P_1 C_1^i)_{i=0}^{l-1}] e^{tC_1} z_r \equiv 0$. Però per (2.2.1) sabem que $\mathrm{col}(P_1 C_1^i)_{i=0}^{l-1} = I_{nl}$. Doncs ha de ser $e^{tC_1} z_r \equiv 0$. Com e^{tC_1} és no singular, és $z_r = 0$.

Finalment, fent el canvi $x_0 = x, x_i = \dfrac{dx_{i-1}}{dt}$ per $i = 1, \dots, l-1$, reduïm (5.1.1) a

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = C_1 \tilde{x} + g(t) \tag{5.1.5}$$

on

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{l-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nl\times 1} \quad \text{i} \quad g(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nl\times 1}.$$

La solució de (5.1.5) és

$$\tilde{x}(t) = \int_0^t e^{(t-s)C_1} g(s)ds.$$

Multiplicant per P_1 a l'esquerra, tenim que $x_0 = x_p(t) = P_1 \int_0^t e^{(t-s)C_1} g(s)ds$. Com $g(t) = R_1 f(t)$ trobem que $x_p(t) = P_1 \int_0^t e^{(t-s)C_1} R_1 f(t)ds$.

Per tant, $x(t) = x_h(t) + x_p(t) = P_1 e^{tC_1} z_r + P_1 \int_0^t e^{(t-s)C_1} R_1 f(s)ds$. □

Exemple 5.1.3. Considerem

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}[\lambda].$$

La seva equació diferencial associada és

$$L\Big(\frac{d}{dt}\Big)x(t) = \frac{d^2x}{dt^2} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2t+1 \\ t \end{bmatrix}. \tag{5.1.6}$$

Volem trobar una solució general de la forma $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$, on $x_h(t)$ és solució de

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = 0$$

i $x_p(t)$ és una solució particular de (5.1.6).

Usem el canvi $x_0 = x, x_1 = \dfrac{dx_0}{dt}$, de manera que reduïm (5.1.6) a

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2t+1 \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}, \quad \text{on} \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}.$$

La seva solució és

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \int_0^t e^{(t-s)C_1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2s+1 \\ s \end{bmatrix} ds.$$

Llavors $x_p = \int_0^t \begin{bmatrix} I_2 & 0 \end{bmatrix} e^{(t-s)C_1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \end{bmatrix} f(s)ds$.

Com $x_h = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \end{bmatrix} e^{tC_1} z_r$ per a qualsevol $z_r \in \mathbb{C}^{4\times 1}$. La solució general de (5.1.6) és

$$x(t) = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \end{bmatrix} e^{tC_1} z_r + \int_0^t \begin{bmatrix} I_2 & 0 \end{bmatrix} e^{(t-s)C_1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2t+1 \\ t \end{bmatrix} ds.$$

Sigui el sistema d'equacions en diferències

$$x_{j+l} + A_{l-1}x_{j+l-1} + \ldots + A_0 x_j = y_j, \quad j = 0, 1, \ldots \tag{5.1.7}$$

on $(y_0, y_1, \ldots)$ és una successió de vectors n-dimensionals donada i $(x_0, x_1, \ldots)$ és la successió a trobar.

Considerem el conjunt de successions $(x_0, x_1, \ldots)$ tal que $x_m \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ com l'espai vectorial complex, on la suma i el producte per un nombre complex estan definits per coordenades.

La solució general $x = (x_0, x_1, \ldots)$, com en el cas d'equacions diferencials, es pot expressar com $x = x_h + x_p$, on x_p és una solució particular de (5.1.7) fixada i x_h és una solució general de l'equació homogènia

$$x_{j+l} + A_{l-1}x_{j+l-1} + \ldots + A_0 x_j = 0, \quad j = 0, 1, \ldots. \tag{5.1.8}$$

Teorema 5.1.4. ([GLR82]) *La solució general de l'equació (5.1.7) es pot escriure com*

$$x_j = P_1 C_1^j z_r + P_1 \sum_{k=0}^{j-1} C_1^{j-k-1} R_1 y_k, \quad j = 0, 1, \ldots$$

on $C_1 \in \mathbb{C}^{nl\times nl}$ és la Primera Matriu Companya de $L(\lambda)$,

$$P_1 = \begin{bmatrix} I_n & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times nl}, \quad R_1 = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & I_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^{nl\times n}$$

i $z_r \in \mathbb{C}^{nl\times 1}$ arbitrari. En particular, la solució general de l'equació homogènia (5.1.8) és

$$x_j = P_1 C_1^i z_r, \quad j = 0, 1, \ldots. \tag{5.1.9}$$

Demostració. És clar que (5.1.9) és solució general de l'equació homogènia (5.1.8) per a qualsevol $z_r \in \mathbb{C}^{nl\times 1}$.

I anàlogament al cas de l'equació diferencial, tenim que (5.1.9) dona totes les solucions de l'equació homogènia (5.1.8).

Vegem que

$$x_{p,0} = 0 \quad \text{i} \quad x_{p,j} = P_1 \sum_{k=0}^{j-1} C_1^{j-k-1} R_1 y_k, \quad j = 1, 2, \ldots$$

és una solució particular de (5.1.7). En efecte,

$$x_{p,j+l} + A_{l-1}x_{p,j+l-1} + \ldots + A_0 x_{p,j} =$$
$$= P_1 \sum_{k=0}^{j+l-1} C_1^{j+l-k-1} R_1 y_k + A_{l-1} P_1 \sum_{k=0}^{j+l-2} C_1^{j+l-k-2} R_1 y_k + \ldots + A_0 P_1 \sum_{k=0}^{j-1} C_1^{j-k-1} R_1 y_k.$$

Agrupant els termes que multipliquen y_0, els d'y_1, i successivament, tenim que

$$\begin{aligned}&\Big(P_1C_1^{j+l-1}+\sum_{i=0}^{l-1}A_iP_1C_1^{j+i-1}\Big)R_1y_0+\Big(P_1C_1^{j+l-2}+\sum_{i=0}^{l-1}A_iP_1C_1^{j+i-2}\Big)R_1y_1+\\&\quad+\ldots+\Big(P_1C_1^{l}+\sum_{i=0}^{l-1}A_iP_1C_1^{i}\Big)R_1y_{j-1}+\Big(P_1C_1^{l-1}+\sum_{i=0}^{l-1}A_iP_1C_1^{i-1}\Big)R_1y_j+\\&\quad+\Big(P_1C_1^{l-2}+\sum_{i=0}^{l-1}A_iP_1C_1^{i-2}\Big)R_1y_{j+1}+\ldots+\Big(P_1C_1^{0}+\sum_{i=0}^{l-1}A_iP_1C_1^{-l+i}\Big)R_1y_{j+l-1}.\end{aligned}$$

Si considerem C_1^k nul·la per $k<0$. Juntament amb (2.2.1), sabem que

$$P_1C_1^kR_1=\begin{cases}0 & \text{si } k=0,\ldots,l-2\\ I_n & \text{si } k=l-1.\end{cases}$$

Doncs tots els sumands són igual a 0, excepte I_n que multiplica y_j. □

Exemple 5.1.5. Considerem l'equació en diferències

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}x_{j+2}+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}x_j=y_j\in\mathbb{C}^{2\times1}\quad\text{per } j=0,1,\ldots. \tag{5.1.10}$$

On $(y_0,y_1,\ldots,y_j,\ldots)=(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ldots,\begin{bmatrix}j\\j\end{bmatrix},\ldots)$

Comprovem que

$$x_j=\begin{bmatrix}I_2&0\end{bmatrix}C_1^jz_r+\begin{bmatrix}I_2&0\end{bmatrix}\sum_{k=0}^{j-1}C_1^{j-k-1}\begin{bmatrix}0\\I_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k\\k\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^{2\times1},\quad j=0,1,\ldots$$

és solució de (5.1.10), per a qualsevol $z_r\in\mathbb{C}^{4\times1}$.

Cal veure que

$$x_{p,0}=0\quad\text{i}\quad x_{p,j}=\begin{bmatrix}I_2&0\end{bmatrix}\sum_{k=0}^{j-1}C_1^{j-k-1}\begin{bmatrix}0\\I_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k\\k\end{bmatrix},\quad j=1,2,\ldots$$

és solució particular de (5.1.10). Substituint-hi les expressions anteriors obtenim

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}x_{p,j+2}+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}x_{p,j}=\begin{bmatrix}j\\j\end{bmatrix}.$$

5.2 Aplicació a equacions diferencials i en diferències (cas no mònic)

Considerem sistemes d'equacions diferencials i en diferències lineals d'ordre l amb coeficients constants. En cada cas tindrem una matriu polinomial de grau l amb determinant diferent de zero.

A diferència del cas mònic, no podrem resoldre, en general, el sistema associat a una matriu polinomial no mònica per a totes les funcions contínues per la dreta. Pel fet que pot existir estructura espectral a l'∞.

Considerem el sistema d'equacions diferencials

$$L(\frac{d}{dt})u = A_0 u + A_1 \frac{d}{dt} u + \ldots + A_l \frac{d^l}{dt^l} u = f, \tag{5.2.1}$$

on f és una funció vectorial n-dimensional sobre $\mathbb{C}$ de variable t i $u = u(t) \in \mathbb{C}^{n\times 1}$.

Volem expressar la solució de (5.2.1) en termes d'una terna descomponible de $L(\lambda)$. Tal com veurem en el següent teorema.

Teorema 5.2.1. ([GLR82]) *Donades $L(\lambda) = \sum_{i=0}^{l} A_i \lambda^i \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ i una terna descomponible de $L(\lambda)$, $(\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix})$. Suposem que $m = gr(det(L(\lambda)))$ i que $\exists q \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $T_2^q = 0$. Llavors $\forall f(t) \in \mathcal{C}^{q+l-1}(\mathbb{C})$ la solució general de l'equació (5.2.1) es pot escriure com*

$$u(t) = X_1 e^{T_1 t} x + \int_{t_0}^{t} X_1 e^{T_1(t-s)} Z_1 f(s) ds - \sum_{i=0}^{q-1} X_2 T_2^i Z_2 f^{(i)}(t), \tag{5.2.2}$$

on $x \in \mathbb{C}^{m\times 1}$ arbitrari.

Demostració. Vegem primer que (5.2.2) és solució de (5.2.1).

Per a $k = 0, 1, \ldots, l$ tenim que

$$\begin{aligned} u^{(k)}(t) = X_1 T_1^k e^{T_1 t} x + \sum_{j=0}^{k-1} X_1 T_1^{k-1-j} Z_1 f^{(j)}(t) + \\ + \int_{t_0}^{t} X_1 T_1^k e^{T_1(t-s)} Z_1 f(s) ds - \sum_{i=0}^{q-1} X_2 T_2^i Z_2 f^{(i+k)}(t). \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{l} A_k u^{(k)}(t) = \left(\sum_{k=0}^{l} A_k X_1 T_1^k \right) e^{T_1 t} x + \sum_{k=0}^{l} \sum_{j=0}^{k-1} A_k X_1 T_1^{k-1-j} Z_1 f^{(j)}(t) + \\ + \int_{t_0}^{t} \left(\sum_{k=0}^{l} A_k X_1 T_1^k \right) e^{T_1(t-s)} Z_1 f(s) ds - \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{k=0}^{l} A_k X_2 T_2^i Z_2 f^{(i+k)}(t). \end{aligned}$$

Com (X, T, Z) és terna descomponible, tenim que $\sum_{k=0}^{l} A_k X_1 T_1^k = 0$. Per tant,

$$\sum_{k=0}^{l} A_k u^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{l+q-1} \left(\sum_{k=i+1}^{l} A_k X_1 T_1^{k-1-j} Z_1 - \sum_{k=0}^{i} A_k X_2 T_2^{i-k} Z_2 \right) f^{(j)}(t), \tag{5.2.3}$$

considerant $\sum_{k=i+1}^{l} \alpha = 0$ si $i + 1 > l$.

A més, tenim que

$$L(\lambda)^{-1} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m\lambda - T_1 & 0 \\ 0 & T_2\lambda - I_{nl-m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}, \quad \forall \lambda \notin Spec(L(\lambda)).$$

Podem representar la resolvent, per a $|\lambda|$ prou gran, com

$$L(\lambda)^{-1} = -X_2T_2^{q-1}Z_2\lambda^{q-1} - \ldots - X_2T_2Z_2\lambda - X_2Z_2 + X_1Z_1\lambda^{-1} + X_1T_1Z_1\lambda^{-2} + \ldots. \tag{5.2.4}$$

El coeficient de $f^{(j)}(t)$ de la dreta de la igualtat (5.2.3) és igual al coeficient de λ^j en el producte $L(\lambda)L(\lambda)^{-1} = I_n$. És a dir, comparant graus, $\sum_{k=0}^{l} A_k u^{(k)}(t) = f(t)$.

Falta veure que (5.2.2) dona totes les solucions de l'equació (5.2.1).

Una solució general $u(t) \in \mathcal{C}^l(\mathbb{C})$ de (5.2.1) es pot expressar com

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t)$$

amb $u_h(t)$ solució general de l'equació homogènia

$$\sum_{i=0}^{l} A_i u^{(i)}(t) = 0 \tag{5.2.5}$$

i $u_p(t)$ una solució particular de l'equació no homogènia inicial (5.2.1), és a dir, és suficient veure que

$$u_h(t) = X_1 e^{T_1 t} x, \quad x \in \mathbb{C}^{m\times 1}$$

és solució general de (5.2.5).

Donat que el conjunt de solucions de (5.2.5) és un espai vectorial m-dimensional, hem de comprovar que $u_h(t) \equiv 0$ és possible si i només si $x = 0$. En efecte,

$$\begin{aligned} u_h(t) \equiv 0 &\implies u_h^{(i)}(t) = X_1T_1^i e^{T_1 t}x = 0 \quad i = 1, \ldots, l-1 \implies \\ &\implies \mathrm{col}(X_1T_1^i)_{i=0}^{l-1} e^{T_1 t}x = 0 \implies e^{T_1 t}x = 0 \implies x = 0. \end{aligned}$$

□

Sigui el sistema d'equacions en diferències

$$A_l u_{j+l} + A_{l-1}u_{j+l-1} + \ldots + A_0 u_j = v_j, \quad j = 0, 1, \ldots \tag{5.2.6}$$

on $(v_0, v_1, \ldots)$ és una successió de vectors n-dimensionals donada i $(u_0, u_1, \ldots)$ és la successió a trobar.

Teorema 5.2.2. ([GLR82]) *Donades $L(\lambda) = \sum_{i=0}^{l} A_i\lambda^i \in \mathbb{C}^{n\times n}[\lambda]$ i una terna descomponible de $L(\lambda)$, $\left(\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}\right)$. Siguin $\{v_j\}_{j=0}^{\infty}$ una successió de vectors n-dimensionals i $m = gr(det(L(\lambda)))$. Llavors la solució general de (5.2.6) es pot escriure com*

$$\begin{aligned} u_0 &= X_1x - \sum_{i=0}^{q-1} X_2T_2^iZ_2v_i, \\ u_j &= X_1T_1^jx - \sum_{i=0}^{q-1} X_2T_2^iZ_2v_{i+j} + \sum_{s=0}^{j-1} X_1T_1^{j-s-1}Z_1v_s, \quad j = 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

on $x \in \mathbb{C}^{m\times 1}$ arbitrari.

Demostració. Una solució general de (5.2.6) és

$$u_j = X_1 T_1^j x, \quad j = 0, 1, \ldots .$$

Doncs és suficient veure que la successió $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ donada per

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= -\sum_{i=0}^{q-1} X_2 T_2^i Z_2 v_i, \\
\varphi_j &= -\sum_{i=0}^{q-1} X_2 T_2^i Z_2 v_{i+j} + \sum_{s=0}^{j-1} X_1 T_1^{j-s-1} Z_1 v_s, \quad j = 1, 2, \ldots,
\end{aligned}$$

és solució de (5.2.6). En efecte,

$$\begin{aligned}
&A_0\varphi_j + A_1\varphi_{j+1} + \ldots + A_l\varphi_{j+l} = \\
&\quad = \sum_{k=0}^{l} \sum_{s=0}^{j+k-1} A_k X_1 T_1^{j+k-s-1} Z_1 v_s - \sum_{k=0}^{l} \sum_{i=0}^{q-1} A_k X_2 T_2^i Z_2 v_{j+k+i} = \\
&\quad = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k X_1 T_1^{j+k-i-1} Z_1 - \sum_{k=0}^{\infty} A_k X_2 T_2^{i-k-j} Z_2, \right) v_i,
\end{aligned} \tag{5.2.7}$$

on $T_1^{\alpha} = 0, T_2^{\alpha} = 0$ si $\alpha < 0$. Usant (5.2.4), tenim que el coeficient de v_i de la dreta de la igualtat (5.2.7) és igual al coeficient de λ^{i-j} en el producte $L(\lambda)L(\lambda)^{-1} = I_n$. És a dir, comparant graus, $\sum_{k=0}^{l} A_k \varphi_{j+k} = v_j$ per $i = j$. □

Bibliografia

[AT12] Al-Ammari, M.; Tisseur, F.: *Standard triples of structured matrix polynomials*, Linear Algebra and its Applications, Vol. 437, pp. 817-834, 2012.

[Chr95] Chrystal, G.: Transactions of the Royal Society of Edinburgh, Vol. 38, Issue 163, 1895.

[CLV89] Clímaco, J. C. N.; Lima, T. P.; Vitória, J.: *On the study of differential and difference equations using lambda-matrices*, Linear Algebra and its Applications, Vol. 121, pp. 639-643, 1989.

[Coh83] Cohen, N.: *Spectral analysis of regular matrix polynomials*, Integral Equations and Operator Theory, Vol. 6, 1983.

[CDF38] Collar, A. R.; Duncan, W. J.; Frazer, R. A.: *Elementary matrices and some applications to dynamics and differential equations*, Cambridge University Press, 1938.

[DDM09] De Terán, F.; Dopico, F. M.; Mackey, D. S.: *Linearizations of singular matrix polynomials and the recovery of minimal indices*, Electronic Journal of Linear algebra, Vol. 18, pp. 371-402, 2009.

[DDM10] De Terán, F.; Dopico, F. M.; Mackey, D. S.: *Fiedler companion linearizations and the recovery of minimal indices*, SIAM, Vol. 31, Issue 4, 2010.

[DDM12] De Terán, F.; Dopico, F. M.; Mackey, D. S.: *Fiedler companion linearizations for rectangular matrix polynomials*, Linear Algebra and its Applications, Vol. 437, pp. 957-991, 2012.

[DPR19] Del Corso, G. M.; Poloni, F.; Robol, L; Vandebril, R.: *Factoring block Fiedler companion matrices*. Dins: Bini, D. A.; Di Benedetto, F.; Tyrtyshnikov, E.; Van Barel, M.: *Structured matrices in numerical linear algebra*, Springer, 2019, pp. 129-155.

[Gan59] Gantmacher, F. R.: *The theory of matrices*, Vol. 1 & 2, Chelsea Publishing Company, 1959.

[GKL88] Gohberg, I.; Kaashoek, M. A.; Lancaster, P.: *General theory of regular matrix polynomials and band Toeplitz operators*, Integral Equations and Operator Theory, Vol. 11, 1988.

[GLR82] Gohberg, I.; Lancaster, P.; Rodman, L.: *Matrix polynomials*, Academic Press, 1982.

[GLR86] Gohberg, I.; Lancaster, P.; Rodman, L.: *Invariant subspaces of matrices with applications*, John Wiley & Sons, 1986.

[GLR05] Gohberg, I.; Lancaster, P.; Rodman, L.: *Indefinite linear algebra and applications*, Birkhäuser, 2005.

[GR78] Gohberg, I.; Rodman, L.: *On spectral analysis of non-monic matrix and operator polynomials, I. Reduction to monic polynomials*, Israel Journal of Mathematic, Vol. 30, pp. 133–151, 1978.

[JLR19] Jeinsch, T.; Lampe, B. P.; Rosenwasser, E. N.: *Computer-controlled systems with delay*, Springer, 2019.

[Lan08] Lancaster, P.: *Linearization of regular matrix polynomials*, Electronic Journal of Linear Algebra, Vol. 17, pp. 21-27, 2008.

[LP06] Lancaster, P.; Psarrakos, P.: *A note on weak and strong linearizations of regular matrix polynomials*, Manchester Institute for Mathematical Sciences, 2006.

[LT85] Lancaster, P.; Tismenetsky, M.: *The theory of matrices with applications*, Academic Press, 1985.

[LW07] Lawrence, D. A.; Williams, R. L.: *Linear state-space Control systems*, John Wiley & Sons, 2007.

[LLW12] Li, Y.; Liu, C.; Wang, Z.: *Computing pseudospectra of polynomial eigenvalue problems: direct approach vs linearization*, Journal of Mathematical and Computational Science, Vol. 2, No. 4, 2012.

[LRY17] Lim, L.; Rodriguez, J. I.; You, Y.: *Accurate solutions of polynomial eigenvalue problems*, 2017. [Consulta: 18 de novembre de 2022] Disponible a: `https://arxiv.org/pdf/1711.01301.pdf`.

[Mac33] Mac Duffee, C. C.: *The theory of matrices*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol. 2, Springer, 1933.

[MT01] Meerbergen, K.; Tisseur, F.: *The quadratic eigenvalue problem*, SIAM review, Vol 43, Issue 2, 2001.