Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Valoración de swaptions usando el modelo de Black

Autor: Jorge Gálvez Perea

Director: Dr. José Manuel Corcuera
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 24 de enero de 2023

Abstract

The objective of this work is to build a rigorous path to understand and model financial derivatives of the interes rate such as swaptions. We start by defining the interest rate and where does it come from. Understanding zero-bonds and coupon bonds and using them to define the yield curve. We are then going to see how forwards and swaps work and we will valuate these at today and at the future. Along some basic concepts about options and a little introduction on stochastic calculus we are able to introduce options valuation models, Black-Scholes model and Black model. Finally we define swaptions and apply Black's model to price them.

Resumen

El objetivo de este trabajo es construir un camino riguroso para entender y modelizar derivados financieros del tipo de interés como *swaptions*. Comenzando por definir el tipo de interés y de donde sale. Comprendiendo el funcionamiento de los bonos cero y bonos con cupón y usándolos para definir la curva de rendimiento. Posteriormente analizaremos el funcionamiento de futuros y de *swaps* que veremos como valorar en presente y en futuro. Junto con unas nociones básicas de opciones y una pequeña introducción al cálculo estocástico podremos definir modelos de valoración de opciones, el modelo de Black-Scholes y el modelo de Black. Entonces definiremos las *swaptions* y aplicaremos el modelo de Black para poder ponerle precio.

2020 Mathematics Subject Classification. 60G05, 91G20, 91G30

Agradecimientos

A mi tutor, José Manuel Corcuera Valverde, por haberme permitido realizar el trabajo con él y haberme prestado ayuda y tenido paciencia.

A los profesores del grado por la voluntad de transmitir el conocimiento sobre las matemáticas.

A mi pareja y familia por haberme apoyado durante este proyecto y durante todo el grado.

Índice

1. El tipo de interés

El tipo de interés es ese concepto financiero que a todos se nos viene a la cabeza cuando pensamos en prestar o en recibir dinero prestado y sobretodo pensamos en los índices como el EURIBOR. El hecho de que prestar dinero cuesta dinero es quizá uno de los elementos mas arraigados en nuestra cultura financiera y consecuentemente hemos desarrollado mucho las formas que tenemos de prestar dinero y los mecanismos para cuantificar y obtener beneficio de estos intercambios.

En este trabajo queremos responder a la pregunta: ¿Cual debe ser el precio de tener la posibilidad pero no la obligación de entrar en un contrato mediante el cual puedo realizar pagos constantes a cambio de recibir pagos variables relacionados con algún índice?

En este primer capítulo introductorio presentaremos el tipo de interés de una forma general y explicaremos los conceptos necesarios para poder construir el camino hasta la resolución de nuestra pregunta. Seguiremos principalmente el capítulo 1 de Ruttiens (2013) [1].

Durante gran parte de este trabajo, hasta que introduzcamos el cálculo estocástico, consideraremos que los tipos de interés serán deterministas, es decir, que podemos conocer su valor en el futuro y que por tanto no sigue un camino aleatorio.

1.1. Recuperando el dinero

Empezaremos introduciendo el tipo de interés con un ejemplo y llegaremos a la expresión general.

Supongamos que un importante empresario tiene un nuevo proyecto en mente, pero para llevarlo a cabo necesitará 100.000€. Como no dispone de esa cantidad ahora mismo, decide acudir a una entidad financiera, supongamos un banco, supongamos también que tiene claro que podrá devolver la cantidad y un poco más en un año. El banco está más que dispuesto a dejarle el capital, pero como se verá obligado a no poder disponer de su dinero durante un año, pedirá una compensación.

En este ejemplo, el empresario podrá tener 100.000€ siempre y cuando le devuelva 110.000€ al banco el año que viene. Entonces diremos que el interés de la transacción es de 10.000€ y el tipo de interés es del 10 %.

Del ejemplo podemos entender que el valor del dinero cambia con el tiempo, para el banco 100.000€ hoy valen lo mismo que 110.000€ dentro de un año, y de igual forma será para el empresario si decide aceptar el trato. Así el valor futuro FV es equivalente al valor presente PV más un cierto interés i.

$$FV = PV + i \tag{1.1}$$

Y si usamos el tipo de interés r:

$$FV = PV + r \cdot PV = PV(1 + r) \tag{1.2}$$

Decimos que r es el tipo de interés anual, ya que este es el ratio al que el valor presente crece durante el transcurso de un año. En casi cualquier otra situación el tipo de interés se expresará de forma anual.

Definición 1.1. *Llamamos r_n al tipo de interés para operaciones que empiezan hoy y terminan en el periodo n.*

En muchos casos el tipo de interés se compone de forma anual. Es decir, durante el primer año se generan intereses sobre el valor presente, al final del año estos intereses se suman al valor presente y durante el año siguiente se calculan los intereses sobre esta suma. Si lo generalizamos para n años tendremos:

$$FV = (1 + r_n)^n \cdot PV \tag{1.3}$$

Si el tiempo hasta el pago es inferior a un año usamos la fracción correspondiente del tiempo para el ratio, $t' < 1$ así el valor futuro es:

$$FV = (1 + r \cdot t') \cdot PV \tag{1.4}$$

Finalmente, si el tiempo total es superior a un año pero no una cantidad entera de años, usamos una combinación de las fórmulas anteriores, usando (1.3) para el periodo de años naturales y (1.4) para el restante del ultimo año. Como ejemplo, si el ratio es 10 % y asumimos que el empresario puede devolver el dinero en un año y medio tendremos que el valor futuro justo será de:

$$FV = 100.000€ \cdot (1 + 0.1)^2 \cdot \left(1 + 0.1 \cdot \frac{6}{12}\right) = 127.050€$$

1.2. Ajustando para el valor futuro

Imaginemos que el empresario sabe seguro que podrá pagar 100.000€ en un año y que quiere obtener tanto dinero como el banco le pueda prestar para devolver 100.000€ el año que viene. Podemos reordenar la expresión (1.2) de tal forma que quede:

$$PV = \frac{FV}{1 + r} = FV \cdot \frac{1}{1 + r} = FV \cdot D_1 \tag{1.5}$$

Llamamos a D_t el factor de descuento para tiempo t, en nuestro caso 1 año al 10 % de interes equivale a:

$$D_1 = \frac{1}{1 + r} = 0.90909$$

Si el tiempo es superior a un año, digamos n años llamamos al factor de descuento:

$$D_n = \frac{1}{(1 + r_n)^n} \tag{1.6}$$

1.3. Prefiero cobrar un poco cada día

Uno se puede haber dado cuenta de que en el primer ejemplo el pago total resultaba en 127.050€ en vez de 125.000€ como se podría esperar de un 10 % dos veces y media. Esto se debe a que al final de cada año los intereses se componen y el interés del año siguiente se genera sobre el principal y los intereses ya generados.

Entonces, es lógico cuestionarse que pasa si en vez de componer anualmente se usan otras bases de composición, como semestral, mensual o diaria. Podemos repartir el tipo de interés anual entre los periodos y componerlos, de tal forma que FV quede:

$$FV = PV \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n \tag{1.7}$$

Donde n es el numero de periodos. En nuestro ejemplo, la siguiente tabla resume el pago total para diferentes composiciones a lo largo de un año.

Composición	Calculo	Valor futuro
Anual	$100.000€ \cdot (1 + 0,1)$	110.000€
Semestral	$100.000€ \cdot (1 + \frac{0,1}{2})^2$	110.250€
Mensual	$100.000€ \cdot (1 + \frac{0,1}{12})^{12}$	110.471,31€
Diaria	$100.000€ \cdot (1 + \frac{0,1}{365})^{365}$	110.515,58€

Cuadro 1: Diferentes valores futuros para diferentes composiciones

Viendo la tabla podemos pensar que cuanto mas pequeña sea la fracción de tiempo en más cantidad resultará. ¿Pero será siempre este el caso o por el contrario tiene límite?

Lema 1.2. *Si realizamos la composición de forma continua, es decir con $n \to \infty$, $FV = PV \cdot e^r$*

Demostración. Si observamos la expresión para el valor futuro $FV = PV \cdot (1 + \frac{r}{n})^n$ y hacemos el cambio $x = n/r$ obtenemos $FV = PV \cdot (1 + \frac{1}{x})^{x \cdot r}$ y por tanto $FV = \lim_{n \to \infty} PV \cdot (1 + \frac{r}{n})^n = \lim_{x \to \infty} PV \cdot (1 + \frac{1}{x})^{x \cdot r} = PV \cdot e^r$ □

Si estamos considerando un mercado donde la composición del tipo de interés es continua tenemos que el tipo de descuento será:

$$D_t = e^{-rt} \tag{1.8}$$

1.4. El principio de no arbitraje

Definición 1.3. *Consideramos arbitraje a una operación o conjunto de operaciones cumpliendo las siguientes condiciones:*

- *Lleva a beneficio seguro.*
- *No se necesita efectivo para entrar en la operación.*

Consideraremos a lo largo de todo el trabajo que en nuestros mercados hay ausencia de arbitraje. En la realidad se pueden encontrar situaciones en las que hay arbitraje, pero si el mercado es lo suficientemente liquido los arbitrajistas, operadores que aprovechan las oportunidades de arbitraje, se encargarán de utilizar esas oportunidades y siguiendo la ley de la oferta y la demanda llevarán los precios a puntos donde ya no haya oportunidades de arbitraje.

2. Bonos

El objetivo de este capítulo es introducir los bonos para obtener expresiones de los bonos con cupón fijo y variable que usaremos para la construcción de los swaps. Seguiremos principalmente el capítulo 6 de Capiński y Kopp (2012) [5].

2.1. Bonos cero

Definición 2.1. *Un bono cupón cero, o simplemente bono cero, con fecha de madurez t y valor nominal F (de $Face$ value en ingles) es un contrato que garantiza al poseedor el pago de la cantidad F en la fecha de madurez.*

Los bonos se ofrecen por muchas entidades financieras, siendo los más conocidos los bonos emitidos por organismos públicos, como las letras, bonos y obligaciones españoles o US Securities bills, bonds y notes norte americanos. La mayoría de estos bonos se emiten con un valor nominal de 1.000€ en el caso de bonos europeos o 1.000$ en el caso de bonos en dolares.

Definición 2.2. *Un bono unidad es un bono con valor nominal 1 unidad monetaria.*

De ahora en adelante asumiremos, salvo que se especifique lo contrario, que todos los bonos serán bonos unidad. Si estamos en un entorno con tiempo discreto tiene sentido llamar a los bonos por su fecha de vencimiento, pues hemos establecido que todos los bonos son unidad, de tal forma que un bono que finaliza en t es un t-bono. Llamemos a la fecha de emisión del bono t_0.

Los bonos pueden ser intercambiados diversas veces durante su vida en periodos s con $t_0 \leq s \leq t$.

Definición 2.3. *Para un periodo $s \leq t$ llamamos precio al contado de un t-bono al valor presente de 1 unidad monetaria en tiempo t. Lo denotamos por $B(s,t)$.*

Observación 2.4. Resulta evidente que $B(t,t) = 1$. En condiciones económicas normales se podría asegurar también que si $s < t$ tendremos $0 < B(s,t) < 1$.

Aunque acabamos de atravesar una época en la cual teníamos tipos de interés negativos y bonos que no cumplían la ultima observación, para simpleza del calculo, supondremos que se sigue cumpliendo y que los tipos de interés negativos no son posibles.

Podemos observar una clara dependencia del valor de un bono con respecto al tiempo de madurez y podemos establecer una función que conocido el momento actual $t_0 = s$ y un cierto número de periodos en el futuro n nos devuelva el precio al contado de un bono. Tal que:

$$n \mapsto B(s, s+n) \tag{2.1}$$

Lo lógico sería que a medida que el número de periodos hasta la fecha de maduración crezca el precio de los bonos decrezca, como se puede observar en la siguiente tabla:

n	B(s,s+n)
1	0.98024
2	0.96249
3	0.94661
4	0.93033
5	0.91349

Cuadro 2: Precio medio de bonos AAA en la Unión Europea a 8 de diciembre del 2022 para n en años

Aun así sería mas cómodo disponer de la información dada como el tipo de interés en vez del precio actual. Hay ciertas tasas que nos dan este valor, las tasas -ibor de (InterBank Offer Rate) que indica el tipo al cual los bancos se prestan dinero entre ellos. La más usada a nivel mundial es (o era) el LIBOR tipo de cambio para los bancos en Londres, aquí en la Unión Europea es más conocida la tasa EURIBOR, que simplemente es la tasa para los bancos europeos.

La tasa LIBOR entrará en desuso en los próximos meses y será substituida por la tasa SOFR (Secured Overnight Financing Rate), es por eso que durante este trabajo no la tomaremos como referencia y en su lugar usaremos el EURIBOR.

Ahora mismo se puede encontrar el EURIBOR para 5 periodos distintos: 1 semana, 1 mes, 3 meses, 6 meses y 12 meses. Siendo la tasa a 12 meses la más utilizada. La siguiente tabla muestra los valores del EURIBOR para diferentes periodos a fecha 9 de diciembre del 2022.[2]

Periodo	r_t	EURIBOR
1 semana	$r_{\frac{1}{52}}$	1.416
1 mes	$r_{\frac{1}{12}}$	1.605
3 meses	$r_{\frac{3}{12}}$	2.005
6 meses	$r_{\frac{6}{12}}$	2.466
12 meses	r_1	2.861

Para los cálculos supondremos que dividimos el año en m partes iguales y por tanto cada parte equivale a $h := \frac{1}{m}$ años. Si decimos $m = 1$ cada fracción de tiempo

[2]Valores obtenidos el 11 de diciembre en la página https://www.euribor-rates.eu/en/

equivale a un año y por tanto se compone cada fracción. En cambio, si $m \neq 1$, no trabajamos con años enteros y la composición es cada m periodos. Salvo que se especifique, supondremos que $m = 1$.

El interés que se obtiene al mantener un bono hasta su fecha de madurez es $i = B(t,t) - B(s,t)$ o simplemente $i = 1 - B(s,t)$

Lema 2.5. *Si el tiempo de madurez de un bono es una cantidad n de años y conocemos su precio al contado, podemos obtener el rendimiento o el tipo de interés obtenido de mantener un bono hasta su fecha de madurez tal que:*

$$r_n = \frac{1}{\sqrt[n]{B(s,s+n)} - 1}$$

Podemos además, establecer una relación entre los valores presente y futuro (PV y FV) y el precio de los bonos. Si asumimos, sin pérdida de generalidad que 0 es el tiempo presente, tenemos que 1 unidad monetaria en tiempo t equivale a $B(0,t)$ unidades monetarias hoy. De donde obtenemos que:

$$PV = B(0,t) \cdot FV \tag{2.2}$$

Lema 2.6. *Supongamos conocido el precio de un bono (futuro) $B(k,n)$ a tiempo s donde $s < k < n$. Entonces $B(s,n) = B(s,k) \cdot B(k,n)$.*

Demostración. Probaremos que es cierto usando el argumento de la ausencia de arbitraje. Consideramos primero que:

$$B(s,n) < B(s,k) \cdot B(k,n)$$

Entonces en tiempo s realizamos las siguientes operaciones

1. Compramos un n-bono.
2. Vendemos $m := B(k,n)$ partes de un k-bono.

Notemos que nuestro balance a s después de realizar las operaciones es positivo, pues $-B(s,n)+B(s,k)\cdot m = -B(s,n)+B(s,k)\cdot B(k,n) > 0$. Entonces, a tiempo k tendremos que pagar $B(k,k) \cdot m$ por la operación (2), pero $B(k,k) = 1$ y por tanto tendremos que pagar $B(k,k) \cdot m = B(k,n)$ que es justamente lo que vale nuestro bono obtenido en la operación (1). Lo usamos para cerrar sin gastar nada y por tanto habríamos obtenido un beneficio por las operaciones realizadas en s sin riesgo.

Para ver la desigualdad $B(s,n) > B(s,k) \cdot B(k,n)$ venderíamos un n-bono y compraríamos m partes de un k-bono, esto da balance positivo por la desigualdad y en k liquidamos el n-bono con los m k-bonos. Asegurando así beneficio sin riesgo y por tanto dando posibilidad a arbitrajes.

Como cualquier desigualdad nos lleva a tener posibilidades de arbitraje obtenemos que solo la igualdad es valida. □

2.2. Bonos con cupón fijo

Definición 2.7. *Se dice bono con cupón a aquel bono que, a diferencia de los bonos cero, ofrece el pago de ciertas cantidades (cupones) a lo largo de su vida, además del valor nominal en la fecha de madurez.*

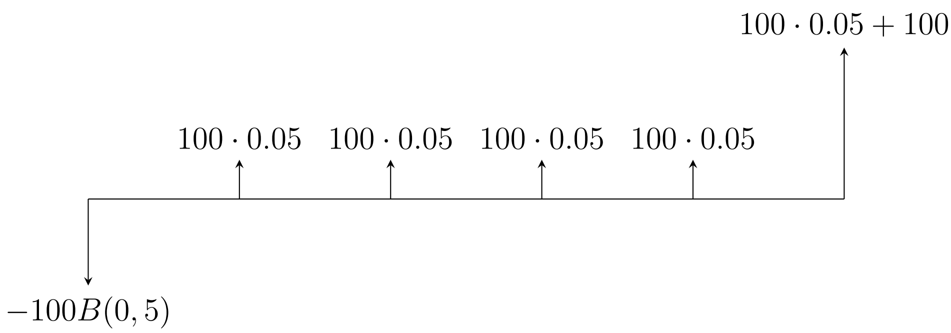
Observación 2.8. Como norma general, los bonos emitidos hasta un año serán bonos cero y a partir de un año serán bonos con cupón.

Definición 2.9. *Un bono cuyos cupones (o cupón) quedan determinados al principio de la vida del mismo y son siempre iguales se denomina bono con cupón fijo.*

Observación 2.10. Se suele indicar el cupón como una cantidad respecto al valor nominal.

Observación 2.11. Si no se indica lo contrario entenderemos que un bono con cupón es fijo.

Ejemplo 2.12. El siguiente diagrama muestra el flujo de pagos de un bono con cupón del 5 % sobre el valor nominal cada periodo, valor nominal 100$ y fecha de madurez en 5 periodos.



Hay muchas formas de interpretar los bonos con cupón, una de ellas es pensar que los bonos con cupón son la suma de varios bonos cero representando los cupones y un bono cero representando al valor nominal. Denotamos por C el valor del cupón, que en el caso de un bono con cupón fijo es igual a $C = c \cdot F$. Entonces podemos expresar un bono con cupón fijo como:

$$B_c(0,t) = \sum_{n=0}^{t-1} C \cdot B(0,n) + (C+F) \cdot B(0,t) \tag{2.3}$$

O directamente:

$$B_c(0,t) = \sum_{n=0}^{t} \frac{a_n}{(1+r_n)^n} \tag{2.4}$$

Donde a_n es el cupón, $C = c \cdot F$, para $n < t$ y es el cupón más el nominal, $C + F = F(1+c)$, para $n = t$.

Suele ser también habitual, en vez de determinar un tipo de interés para cada bono, determinar un solo tipo de interés común para todos ellos, que lógicamente debe ser equivalente. De esta forma precio del mismo bono resultaría:

$$B_c(0,t) = \sum_{n=0}^{t} \frac{a_n}{(1+r)^n} \tag{2.5}$$

2.3. Bonos a la par

Si miramos la valoración de un bono es fácil observar que cuanto más alto sea el cupón más alta será la valoración, y cuanto más bajo el cupón mas baja la valoración.

Ejemplo 2.13. Si suponemos que el tipo de interés es fijo a un 2 % un bono con valor nominal de 100€, fecha de vencimiento en 3 años y que paga un cupón anual de c %. Podemos observar como cambia el valor del bono para algunos valores de c.

c	$B_c(0,3)$
0	94.232 €
1	97.116 €
2	100 €
3	102.88 €
4	105.76 €
5	108.65 €

Observación 2.14. En la tabla podemos observar que se da el hecho que si se paga un cupón del 2 % el valor del bono es idéntico al valor nominal del bono. Es este hecho el que llamaremos bono a la par.

Definición 2.15. *Llamamos bono a la par aquellos bonos que cumplen que su valor actual es idéntico al valor nominal.*

El ejemplo anterior era relativamente sencillo pues el valor del tipo de interés se mantenía fijo todo el tiempo, en la practica este cálculo no resultará tan sencillo.

2.4. Bonos con cupón variable

Un bono con cupón variable es un bono que paga cupones con cierta periodicidad pero estos son desconocidos al principio de la vida del bono. Normalmente estos cupones van ligados a algún índice -ibor.

Definición 2.16. *Definimos $r_{s,n}$ el tipo de interés sin riesgo para operaciones que empiezan en el periodo s y terminan en el periodo n.*

Observación 2.17. Notemos que $r_n = r_{0,n}$.

Observación 2.18. El valor de $r_{s,n}$ es desconocido cuando el periodo actual es anterior a s.

Entonces podemos establecer el precio de un bono que paga cupones ligados al tipo de interés sin riesgo de cada periodo tal que:

$$B_v(0,t) = \sum_{n=1}^{t} \frac{a_n}{(1+r_n)^n} \tag{2.6}$$

Con $a_n = F \cdot r_{n-1,n}$ para $n < t$ y $a_n = F(1 + r_{t-1,t})$ para $n = t$.

Teorema 2.19. *Todos los bonos con cupón variable según el tipo de interés libre de riesgo son a la par.*

Demostración. Lo demostraremos por inducción. Vemos que el precio de un bono con cupón variable que finaliza en n y empieza un periodo antes es:

$$B_v(n-1,n) = \frac{F(1+r_{n-1,n})}{(1+r_{n-1,n})} \tag{2.7}$$

Y en este caso claramente $B_v(n-1,n) = F$. Supongamos entonces cierto para todos los periodos hasta 1. Es decir, se cumple que:

$$B_v(1,n) = F \tag{2.8}$$

Y como tenemos que:

$$B_v(k,s) = \frac{1}{1+r_{k,k+1}}(C_{k+1} + B_v(k+1,s)) \tag{2.9}$$

Donde C_{k+1} es el cupón pagado en el primer periodo, es decir, $F \cdot r_{k,k+1}$. Entonces usando (2.8) y (2.9) tenemos que:

$$B_v(0,n) = \frac{1}{1+r_{0,1}}(F \cdot r_{0,1} + F) \tag{2.10}$$

$$B_v(0,n) = \frac{1+r_{0,1}}{1+r_{0,1}} F = F \tag{2.11}$$

□

2.5. Curva de rendimiento

Definición 2.20. *La curva de rendimiento (yield curve en inglés) es la representación gráfica de la función que a cada instante temporal, t, le asigna el rendimiento de un bono cero equivalente con fecha de madurez t.*

Observación 2.21. En nuestro caso veremos representada la curva de rendimiento de forma que el tipo de interés indicado es con composición.

Si estamos trabajando con composición simple definimos la función mencionada como:

$$r : (0,\infty) \to (0,\infty) \tag{2.12}$$
$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt[t]{B(0,t)} - 1} \tag{2.13}$$

Y en el caso de composición continua tendríamos:

$$r : (0,\infty) \to (0,\infty) \tag{2.14}$$
$$t \mapsto \frac{-ln(B(0,t))}{t} \tag{2.15}$$

Que como habíamos establecido que los tipos de interés son siempre positivos, tendremos que $B(0,t) \leq 1$ y por tanto $-ln(B(0,t)) \in (0,\infty)$.

Observación 2.22. En ambos casos hemos usado como conjuntos de llegada los reales positivos porque estamos suponiendo que los tipos de interés no pueden ser negativos.

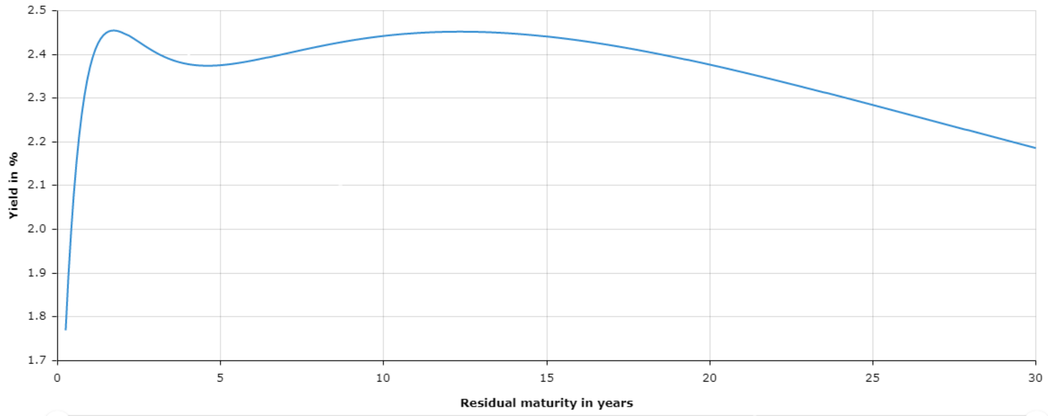
Observación 2.23. Se podría esperar que con el aumento del tiempo de madurez los precios al contado sean mayores y por tanto una curva de rendimiento normal será aquella que sea creciente y una curva de rendimiento invertida aquella que sea decreciente.

Como la hemos definido la curva de rendimiento nos permite identificar fácilmente los diferentes tipos de interés para los diferentes periodos.

Existen diferentes maneras de construir una curva de rendimiento pero nos ceñiremos al caso más sencillo que consiste en unir linealmente los precios conocidos.

Es muy probable que no contemos con datos para todas las fechas, en particular tendremos problemas para obtener datos de fechas muy cercanas al día actual y fechas muy lejanas. En el caso de fechas muy tempranas usaremos simplemente el primer precio conocido y en caso de fechas muy lejanas usamos el último precio conocido.

Ejemplo 2.24. El día 23 de diciembre la curva de rendimineto para bonos en la Unión Europea es la que se muestra a continuación:



Este gráfico muestra la relación entre el rendimiento de los bonos con calificación AAA en la Unión Europea y su fecha de madurez.[3]

Donde Yield in % indica el rendimiento r_t para t en años.

[3]Obtenido de https://www.ecb.europa.eu/stats/financial_markets_and_interest_rates/euro_area_yield_curves/html/index.en.html el día 23 de diciembre de 2022

3. Contratos a plazo y Futuros

Definición 3.1. *Un contrato a plazo (Forward en inglés) es un acuerdo entre dos partes que se comprometen a intercambiar alguna cantidad de un activo o un derivado a un cierto precio en un determinado tiempo futuro.*

Observación 3.2. Los contratos a plazo se negocian en el mercado extrabursátil, es decir, los contratos se establecen directamente entre las partes sin contar con una sociedad rectora del mercado que establezca el precio de este.

Definición 3.3. *Llamamos fecha de negociación al momento en el que se formaliza el contrato, fecha de entrega al momento acordado para intercambiar el activo y precio de entrega al precio acordado para el activo.*

Un contrato a plazo involucra dos partes contrarias, pues si alguien quiere comprar un cierto activo debe haber alguien que lo venda. Así decimos que va en largo (long position en inglés) aquel que acepta comprar el activo subyacente y que va en corto (short position en inglés) aquel que acepta vender el activo subyacente.

El coste de entrada a un forward es 0, puesto que el precio de entrega se estipula de forma que la operación no es beneficiosa para ninguna de las dos partes.

Si denotamos $F_S(n)$ el precio de entrega de un forward con activo subyacente S y fecha de entrega n, denotamos el precio del activo subyacente en el periodo n como S_n (que es desconocido en la fecha de negociación), tenemos que el valor del forward en la fecha de entrega es $S_n - F_S(n)$ para un forward en largo y $F_S(n) - Sl_n$ para un forward en corto.

Definición 3.4. *Un futuro es un contrato a plazo ofrecido en un mercado organizado que está estandarizado por la sociedad rectora del mercado.*

Observación 3.5. Los futuros heredan de los forwards los conceptos de ir en largo y en corto, la fecha de negociación, de entrega y el precio de entrega. Además, en este tipo de contratos tampoco hay coste de entrada.

Que el contrato esté estandarizado por la sociedad rectora del mercado implica que los contratos de futuros que se pueden realizar están limitados a los contratos que se ofrezcan en el mercado. Vendrán entonces determinados el activo subyacente, la cantidad de activos subyacentes por contrato y la fecha de entrega. Además esta sociedad es la encargada de hacer de intermediario entre la parte compradora y vendedora, de forma que estas no se conocen.

En un contrato a plazo existe la posibilidad de que una de las partes decida echarse atrás en el contrato o que simplemente no pueda hacer el pago en la entrega. Esta situación no puede darse en un futuro, pues la sociedad rectora se encarga de garantizar que los contratos se cumplan exigiendo una garantía y con un mark-to-market diario.

La garantía, o margen, obliga a las partes a disponer de liquidez monetaria para poder hacer frente a las variaciones en el precio, de esta forma se garantiza que al menos una parte de la variación del precio está cubierta.

El mark-to-market diario consiste en recalcular el precio del futuro cada día y realizar los intercambios monetarios pertinentes, reduciendo la posibilidad de fallar en el pago en la variación de solo un día y no en la de todo el contrato.

En este trabajo nos centraremos en los contratos a plazo sobre tipos de interés y derivados de este.

Supongamos que disponemos de una serie de tipos para diferentes periodos r_i, siendo r_i el tipo establecido para prestamos desde hoy ($t = k$) hasta $t = i$. Si queremos establecer hoy el tipo de interés de una operación realizada entre los periodos $t = s$ y $t = n$, denotado por $f_k(s, n)$, necesitamos que este valor sea consistente con la información actual.

Si quisiéramos asegurar hoy el tipo de interés para una operación realizada entre los periodos 1 y 2, debemos establecer un tipo que sea consistente con la información actual.

En particular debe ser equivalente realizar una operación de hoy al periodo n que realizarla desde hoy hasta el periodo s y rehacer la operación (con el valor en s) hasta el periodo n. Si hablásemos de prestamos sin composición tendríamos:

$$(1 + r_s)(1 + f_k(s, n)) = (1 + r_n) \tag{3.1}$$

Si tuviéramos composición cada periodo tendríamos:

$$(1 + r_s)^{s-k}(1 + f_k(s, n))^{n-s} = (1 + r_n)^{n-k}$$

Por simpleza del cálculo ponemos $k = 0$ sin pérdida de generalidad y tenemos:

$$(1 + r_s)^s(1 + f_0(s, n))^{n-s} = (1 + r_n)^n \tag{3.2}$$

Y por tanto podemos establecer $f_0(s, n)$ como:

$$f_0(s, n) = \left(\frac{(1 + r_n)^n}{(1 + r_s)^s}\right)^{\frac{1}{n-s}} - 1 \tag{3.3}$$

Notemos que si entre s y n solo sucede un periodo, es decir, $s = n - 1$ tendremos que $n - s = 1$ y en este caso:

$$f_0(n-1,n) = \frac{(1+r_n)^n}{(1+r_{n-1})^{n-1}} - 1 \tag{3.4}$$

Lema 3.6. *Si componemos todos los forwards de un solo periodo desde 0 hasta n obtenemos el equivalente a la composición de n veces r_n. Es decir:*

$$(1+r_n)^n = (1+f_0(0,1)) \cdot (1+f_0(1,2)) \cdots ((1+f_0(n-1,n))$$

Demostración. Para el caso n=1 es evidente que $(1+r_0)^0 = 1$ y por tanto $(1+r_1)^1 = (1+f_0(0,1)) \cdot (1+r_0)^0$. Supongamos que el lema es cierto para el caso $n-1$ y por tanto:

$$HI : (1+r_{n-1})^{n-1} = (1+f_0(0,1)) \cdot (1+f_0(1,2)) \cdots ((1+f_0(n-2,n-1))$$

Y de la definición de forward entre los periodos $n-1$ y n tenemos:

$$(1+r_n)^n = (1+f_0(n-1,n)) \cdot (1+r_{n-1})^{n-1}$$

Finalmente, aplicando la hipótesis de inducción concluimos que:

$$(1+r_n)^n = (1+f_0(n-1,n)) \cdot (1+f_0(0,1)) \cdot (1+f_0(1,2)) \cdots ((1+f_0(n-2,n-1))$$

Probando así el lema. □

Corolario 3.7. *Si aplicamos la fórmula obtenida en el lema 3.6 a la expresión del tipo de descuento (1.6) podemos expresar el tipo de descuento tal que:*

$$D_n = \frac{1}{(1+f_0(0,1)) \cdot (1+f_0(1,2)) \cdots ((1+f_0(n-1,n))} \tag{3.5}$$

Una vez visto como funcionan los forwards sobre los tipos de interés, veamos como funcionan los forwards sobre bonos. Supongamos que negociamos a fecha k la compra a fecha s de un n-bono, donde $k < s \leq n$. Denominamos al precio de este forward sobre un bono tal que $B(k,s,n)$ y podemos determinar su precio con el siguiente teorema.

Teorema 3.8. *El precio a futuro de un n-bono es:*

$$B(k,s,n) = \frac{B(k,n)}{B(k,s)}$$

Demostración. Probaremos el teorema usando el argumento de ausencia de arbitraje. Empezamos suponiendo que:

$$B(k,s,n) > \frac{B(k,n)}{B(k,s)}$$

Entonces a tiempo k realizamos las siguiente operaciones:

1. Vendemos un forward $B(k,s,n)$ que en k no incurre costes.

2. Vendemos la cantidad $m = \frac{B(k,n)}{B(k,s)}$ de s-bonos. Obteniendo $B(k,s) \cdot m = B(k,n)$.

3. Compramos un n-bono. Con un coste de $B(k,n)$.

De momento no hemos incurrido en costes pues (1) no tiene coste y (3) se paga con (2).
A tiempo s entonces:

I. Vendemos el n-bono adquirido en (3) para cerrar el forward (1), obteniendo B(k,s,n).

II. Cerramos la posiciones cortas de s-bonos, es decir, compramos m $B(s,s)$, pero $B(s,s) = 1$, por tanto incurrimos en unos costes de $m = \frac{B(k,n)}{B(k,s)}$

Por lo tanto, en s obtenemos $B(k,s,n)$ y pagamos $\frac{B(k,n)}{B(k,s)}$, pero por hipótesis:

$$B(k,s,n) - \frac{B(k,n)}{B(k,s)} > 0$$

Resultando así en beneficio seguro y por tanto arbitraje. Si suponemos entonces que:

$$B(k,s,n) < \frac{B(k,n)}{B(k,s)}$$

Entonces realizamos las operaciones inversas, en k entramos en un forward de compra $B(k,s,n)$, compramos m s-bonos y vendemos un n-bono. En tiempo s compramos el bono del forward y lo usamos para cerrar la venta del n-bono y cobramos los s-bonos. Resultando entonces en beneficio porque:

$$-B(k,s,n) + \frac{B(k,n)}{B(k,s)} > 0$$

Como ambas desigualdades llevarían a tener situaciones de arbitraje, tenemos que solo es posible la igualdad. □

4. Swaps

Esta capítulo está escrito con la información obtenida de sobretodo Ruttiens (2013) [1], Fabozzi (2007) [9] y Hull (2015) [10].

Un contrato swap es un acuerdo entre dos partes de intercambiar una serie de flujos de dinero bajo unas ciertas condiciones. Los swap son incondicionales, es decir, los intercambios monetarios suceden siempre y no dependen de ninguna condición.

Podemos valorar muchos casos de swaps, si todas las transacciones se realizan en la misma moneda hablamos de swaps del tipo de interés (IRS por sus siglas en ingles). En cambio, si el contrato se realiza entre dos monedas hablamos de un swap de divisas (CRS por sus siglas en ingles).

Como el ámbito de este trabajo es limitado nos centraremos solo en los swaps relacionados con el tipo de interés en una sola divisa, mas concretamente en los plain vanilla IRS.

4.1. Plain Vanilla Interest Rate Swaps

Definición 4.1. *Un plain vanilla IRS es un contrato en el cual una de las partes hace pagos periódicos determinados por un tipo de interés fijo (la parte fija o fixed-leg en inglés) y recibe pagos periódicos de la otra parte determinados por un tipo de interés variable (la parte variable o variable-leg en ingles).*

Observación 4.2. La parte variable hace lo contrario, es decir, recibe pagos determinados por un tipo de interés fijo y hace pagos determinados por un tipo de interés variable.

Como norma general la parte variable pagará intereses vinculados a algún -ibor, aunque también se encuentran swaps en los que la parte variable paga intereses sobre algún otro valor de referencia como U.S. Treasuries. La operación ha de ser justa para ambas partes, por tanto, para la parte fija existe un valor que deja el valor global del swap a 0, con la información conocida, la llamamos tasa swap o (swap rate en inglés) que denotaremos por r_{swap}.

Para poder definir completamente un plain vanilla IRS necesitamos el principal, las tasas para cada una de las partes, la frecuencia de pago y la duración del swap, ya sea en cantidad de periodos o dando la fecha del último pago.

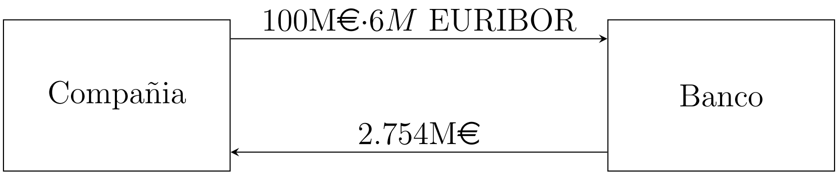
Es importante remarcar aquí que el principal solo sirve como base para generar intereses sobre el, en teoría el principal debería ser intercambiado al final de la vida del swap pero dado que ambas partes recibirían la misma cantidad esto no se lleva a cabo.

Ejemplo 4.3. Un ejemplo sencillo de un caso de uso de un swap sería el caso de una empresa que recibirá pagos de intereses anuales sobre un nominal de 100 millones de euros ligados al EURIBOR a 6 meses durante 10 años. La compañía no está satisfecha con desconocer la cantidad de los pagos en fechas futuras y por tanto decide acudir a un banco para negociar un swap donde la empresa es la parte variable. El banco no tiene ningún problema en aceptar el swap y determina que la tasa justa para el swap es $r_{swap} = 2.754\,\%$[4].

Si la empresa decide aceptar la tasa swap, que presuponemos que lo hará ya que la tasa ofertada es la tasa justa para el 6M EURIBOR, ambas partes entraran en el contrato swap y por tanto una vez al año durante los próximos 10 años sucederá:

- La compañía recibirá $100M€ \cdot 6M\ EURIBOR$ y le transferirá esta cantidad al banco.
- El banco le transferirá a la compañía $100M€ \cdot r_{swap} = 100M€ \cdot 0.02754 = 2.754M€$.

La figura siguiente ilustra el diagrama de pagos:



En la práctica lo que sucederá es que la empresa la transferirá al banco (o recibirá del banco en caso de resultar negativo) la diferencia entre el EURIBOR a 6 meses y la tasa swap multiplicado por $100M€$, es decir:

$$(6M\ EURIBOR - r_{swap}) \cdot 100M€$$

4.2. Valoración de un IRS

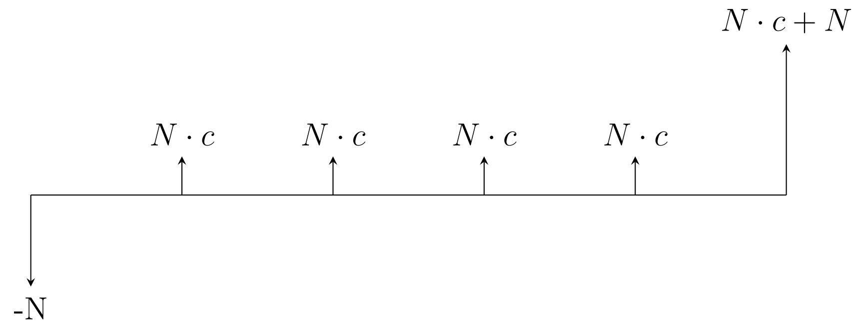
Los swaps del tipo de interés pueden ser entendidos como la combinación de otros elementos o derivados financieros. Hay muchas formas de construir y valorar un IRS, puede ser la combinación de bonos con cupón fijo y variable, la combinación de bonos con cupón fijo y un préstamo a tasa variable o incluso puede derivar de forwards del tipo de interés y préstamos a tasa variable.

Empezaremos ilustrando en caso de bono con cupón fijo y bono con cupón variable, este cupón podría ser perfectamente el nominal por el EURIBOR. Para

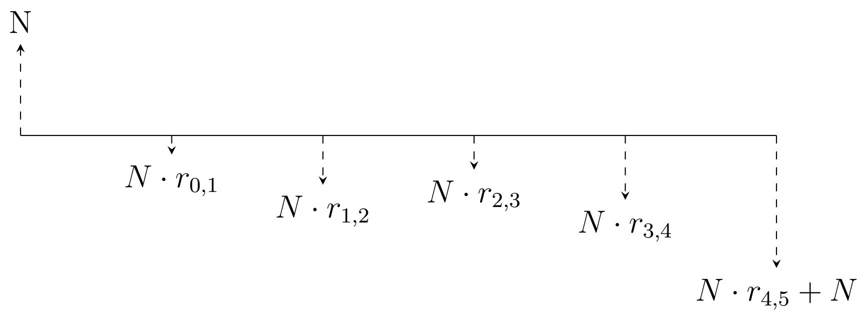
[4] Tipo swap para IRS del 6M EURIBOR a 10 años, tasa obtenida de https://www.chathamfinancial.com/technology/european-market-rates el 17 de diciembre de 2022

simplificar los cálculos supondremos que tanto el bono como el préstamo tienen pagos con la misma periodicidad que supondremos anual.

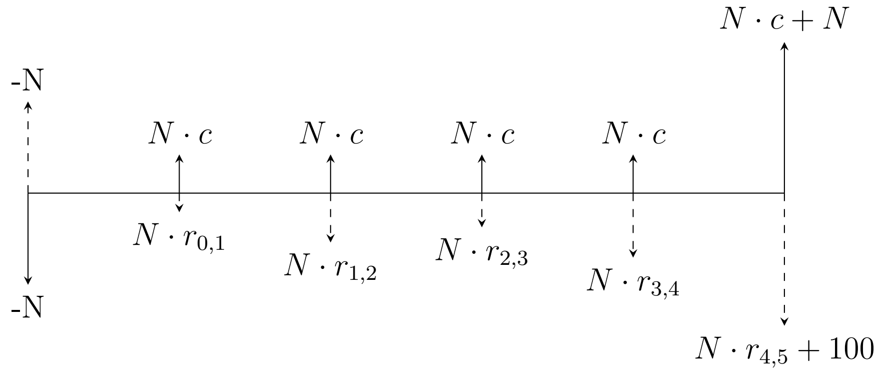
Para 'montar' el swap empezamos con la compra de un bono con cupón ofrecido a la par. Por ejemplo un bono con cupón fijo C con valor nominal N, es decir $C = c \cdot N$. Puesto que el cupón es fijo, este bono representa un flujo de dinero constante e igual, por lo tanto lo podemos usar para construir la parte fija y tendremos que el tipo de interés que se paga sobre el nominal en el swap, r_{swap} coincide con el tipo de interés de los cupones del bono, c. Podemos ilustrar los flujos de dinero con la siguiente figura:



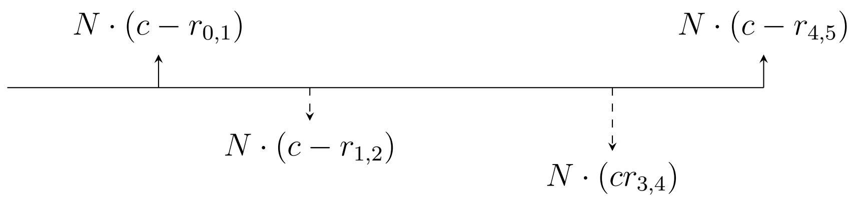
Pero un swap hemos determinado que no tiene cambios de principal, así que necesitamos una forma de financiar la compra del bono, el $-N$ de la figura. Esto lo haremos vendiendo un bono con cupón variable a la par, con las mismas fechas que el bono con cupón fijo y con el mismo valor nominal. Por vender este bono recibiremos en la fecha de la venta el valor nominal, en este caso N, y tendremos que realizar los pagos de los cupones cada periodo hasta el fin del bono. Supongamos que el bono está ligado al EURIBOR y que este es idéntico al tipo de interés libre de riesgo, de esta forma cada periodo tendremos que pagar los intereses generados por el nominal, es decir, en el periodo i habrá que pagar un cupón de $C_i = r_{i-1,i} \cdot N$.



Supongamos que los cobros y pagos de ambas operaciones pueden realizarse simultáneamente sin incurrir en más costes. Si juntamos ambas operaciones obtenemos el siguiente diagrama:



Finalmente eliminamos los intercambios de principal ya que hemos dicho que estos no se intercambian y por sencillez en vez de recibir $N \cdot c$ y pagar $N \cdot r_{t-1,t}$ asumimos que simplemente recibimos (o pagamos en caso de resultar negativo) $N \cdot (c - r_{t-1,t})$. Que podemos ilustrar de la siguiente manera, se ha ajustado la escala para una mayor visibilidad:



Una vez visto como es el flujo monetario de un swap a lo largo de su vida, veamos como combinar ambos bonos para obtener la valoración.

Para calcular el valor de un bono necesitamos tener clara primero la fórmula para nuestro bono con cupón fijo a la par , suponiendo que el bono comienza hoy y que representamos el presente con $s = 0$, expresada en (2.4) que recordamos:

$$B = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(1 + r_i)^i} \tag{4.1}$$

Donde a_i se define como el valor del cupón, es decir $a_i = B \cdot c$, para los periodos $i < n$ y para $i = n$ tenemos que a_n es el valor del cupón más el principal, es decir, $a_n = B \cdot c + B = B(1 + c)$.

Podemos en vez de expresar la fórmula así usar los factores de descuento, ajustado a nuestro caso actual tenemos que:

$$D_i = \frac{1}{(1 + r_i)^i} \tag{4.2}$$

Juntando las dos ecuaciones anteriores, (4.1) y (4.2), tenemos que podemos escribir el valor del bono en función de factores de descuento:

$$B = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot D_i$$

Aquí ha quedado un poco escondido, pero si seguimos pensando en el swap tenemos que el tipo fijo, la tasa swap, es igual al tipo de interés del cupón del bono, es decir, $r_{swap} = c$. Podemos ampliar la fórmula para explicitar este valor:

$$B = \sum_{i=1}^{n} B \cdot c \cdot D_i + B \cdot D_n \tag{4.3}$$

Lema 4.4. *Podemos escribir el tipo swap, r_{swap} como función de las tasas de descuento, tal que:*

$$r_{swap} = \frac{1 - D_n}{\sum_{i=1}^{n} D_i} \tag{4.4}$$

Demostración. La demostración se sigue de Ruttiens (2013) [1]. Partimos del bono con cupón escrito en función de las tasas de descuento (4.3):

$$B = \sum_{i=1}^{n} B \cdot c \cdot D_i + B \cdot D_n$$

Dividimos todo entre B:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} c \cdot D_i + D_n$$

Como c no depende de i puede salir del sumatorio y entonces resolviendo para c obtenemos:

$$c = \frac{1 - D_n}{\sum_{i=1}^{n} D_i}$$

Y como hemos dicho que $c = r_{swap}$ obtenemos el lema. □

Ejemplo 4.5. Hacemos un pequeño ejemplo para ver como sería el cálculo, partimos de los datos del tipo cero de los bonos y sus equivalentes tasas de descuento. Para la Unión Europea a fecha 15 de diciembre del 2022 suponiendo que empiecen hoy y representamos $s = 0$, tenemos:

n	r_n en %	B(0,n)
1	2.258629	0.9748
2	2.155594	0.9582
3	2.032663	0.9414
4	1.986398	0.9243
5	1.983092	0.9065

Cuadro 3: Precio medio de bonos AAA en la Unión Europea a 15 de diciembre del 2022 para n en años

De donde obtenemos que la tasa swap a 5 años resulta:

$$r_{swap,5a} = \frac{1 - 0,9065}{(0.9748 + 0.9582 + 0.9414 + 0.9243 + 0.9065)} = 1.9872\,\%$$

Lema 4.6. *La demostración se sigue de Ruttiens (2013) [1]. Podemos expresar el tipo swap, r_{swap} como función de los forwards del tipo de interés y las tasas de descuento tal que:*

$$r_{swap} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_0(i-1,i)D_i}{\sum_{i=1}^{n} D_i} \tag{4.5}$$

Demostración. Hemos visto anteriormente que podemos escribir las tasas de descuento en función de los tipos forward:

$$D_n = \frac{1}{(1+f_0(0,1))\cdots((1+f_0(n-1,n))}$$

Notamos que como:

$$D_1 = \frac{1}{(1+f_0(0,1))}$$

Tendremos que:

$$D_2 = \frac{1}{(1+f_0(0,1))\cdot(1+f_0(1,2)))} = \frac{D_1}{(1+f_0(1,2))}$$

Generalizando vemos que:

$$D_i = \frac{D_{i-1}}{(1+f_0(i-1,i))}$$

Y por tanto podemos expresar $f_0(i-1,i)$ como:

$$f_0(i-1,i) = \frac{D_{i-1}}{D_i} - 1$$

Multiplicando todo por D_i obtenemos:

$$f_0(i-1,i)\cdot D_i = D_{i-1} - D_i$$

Como $D_0 = 1$ tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} f_0(i-1,i)D_i = (1-D_1)+(D_1-D_2)+\cdots(D_{n-1}-D_n) = 1-D_n$$

Entonces sustituimos el sumatorio en la ecuación para la tasa swap del lema anterior (Lema 4.4) y tenemos lo que buscábamos. □

Dado que para calcular el valor de la parte variable no disponemos de cual será el tipo de interés a aplicar en el futuro usaremos los tipos forward.

Siendo el swap un intercambio de flujos de dinero este debe ser justo al inicio del contrato. Definimos el valor de un swap como su valor presente neto (NPV por sus siglas en ingles, Net Present Value) y este es la suma de todos los flujos de dinero en valor presente. Equivalentemente, si calculamos para la parte fija tenemos que sumar el flujo de dinero en valor presente de la parte fija PV_{FL} y restar el flujo de dinero en valor presente de la parte variable PV_{VL}. En caso de querer calcular para la parte variable cambiamos los signos. Y entonces:

$$NPV = \phi(PV_{FL} - PV_{VL}) \tag{4.6}$$

$$NPV = \phi\left(\sum_{i=1}^{n} N r_{swap} D_i - \sum_{i=1}^{n} N r_i D_i\right) \tag{4.7}$$

Donde ϕ es 1 si calculamos para la parte fija y -1 para la parte variable y h es la duración de cada periodo. Si estamos calculando un swap al inicio de su vida el valor de ϕ no debería importarnos demasiado ya que esperamos que el valor presente neto sea 0, pero nos será útil a la hora de reevaluar un swap o de poner precio a las swaptions.

Si el mercado es eficiente y usamos los instrumentos correctos para los cálculos podremos obtener que el cupón ofrecido por los bonos a la par y los forwards de tasas -ibor nos proporcionan valores para un swap justo.

Ejemplo 4.7. Queremos ver cual es la tasa swap justa para un IRS con una duración de 5 años, parte variable 12M EURIBOR y un nominal de 100M€.

Supongamos que a fecha 8 de diciembre de 2022 el tipo de los forwards del EURIBOR 12M son: 2.05 %, 1.79 %, 1.74 %, 1.74 % y 1.81 %, para los forwards de 1y a 5y respectivamente, cuando decimos forward a ny nos queremos referir al forward que acaba en n años y tiene una duración de 1 año, es decir $f_0(n-1, n)$. Cogiendo los valores del cuadro 2 como los tipos de descuento para esa misma fecha podemos calcular el tipo justo para un swap de 5 años de duración como hemos mostrado:

$$r_{swap} = \frac{1 - D_n}{\sum D_i} = \frac{1 - 0.91349}{0.98024 + 0.96249 + 0.94661 + 0.93033 + 0.91349} = 1.8277\,\%$$

Ahora procederíamos a usar la fórmula para el valor presente neto y comprobar que da 0, en vez de eso haremos una tabla con todos los valores que necesitamos para ilustrar este hecho un poco mejor:

n	D_i	12M EURIBOR (%)	Flujos monetarios (M€)		PV de los F.m. (M€)	
			FL	VL	FL	VL
0						
1	0.98024	2.05	1.828	2.05	1.792	2.009
2	0.96249	1.79	1.828	1.79	1.759	1.723
3	0.94661	1.74	1.828	1.74	1.730	1.647
4	0.93033	1.74	1.828	1.74	1.700	1.619
5	0.91349	1.81	1.828	1.81	1.670	1.653
				Suma:	8.651	8.651

Cuadro 4: Cálculo del valor presente neto de un IRS

Como la suma del valor presente de ambas partes del swap ha resultado 8.651 tenemos que la tasa swap de 1.828 % es la tasa justa para los swaps con parte variable 12M EURIBOR, pago anual y 5 años de fecha de madurez.

4.3. Forward IRS

Hasta ahora hemos evaluado todos los swaps suponiendo que empezaban inmediatamente, pero ¿Que pasaría si queremos asegurarnos un swap que empiece en el futuro?

Para esta situación necesitamos tener en cuenta 3 fechas, k que será el tiempo presente o la fecha de negociación del forward, s que es la fecha de entrega del forward y la fecha de inicio del swap y n que será la fecha de finalización del swap.

Denotaremos al tipo fijo de un swap valorado a plazo como $F_{swap}(s, n)$ y cuando esté claro que periodos son s y n simplemente F_{swap}.

Lema 4.8. *Podemos expresar el tipo forward swap, $F_{swap}(s, n)$ como función de las tasas de descuento a fecha k, tal que:*

$$F_{swap} = \frac{D_s - D_n}{\sum_{i=s+1}^{n} D_i} \tag{4.8}$$

Demostración. Partimos de la igualdad obtenida para los swaps evaluados en tiempo $k = s$, es decir, que empiezan en el momento de la evaluación.

$$r_s \sum_{i=1}^{n} B(s, i) = 1 - B(s, n)$$

Y la evaluamos en el futuro, teniendo en cuenta que ahora los bonos serán forwards de bonos y el tipo swap pasara a ser el tipo forward swap.

$$F_{swap}(s, n) = \sum_{i=s+1}^{n} B(k, s, i) = 1 - B(k, s, n)$$

Utilizando el teorema 3.8 (precio de un bono a futuro) que dice que:

$$B(k, s, n) = \frac{B(k, n)}{B(k, s)}$$

Y que obviamente podemos escribir que

$$1 = \frac{B(k, s)}{B(k, s)}$$

Tenemos la ecuación expresada como:

$$F_{swap} \sum_{i=s+1}^{n} \frac{B(k, i)}{B(k, s)} = \frac{B(k, s)}{B(k, s)} - \frac{B(k, n)}{B(k, s)}$$

Multiplicando a ambos lados por $B(k, s)$ tenemos que:

$$F_{swap} \sum_{i=s+1}^{n} B(k, i) = B(k, s) - B(k, n)$$

Finalmente despejamos para F_{swap} y tenemos en cuenta que $B(k, t) = D_t$ para obtener lo que buscábamos

$$F_{swap} = \frac{B(k, s) - B(k, n)}{\sum_{i=s+1}^{n} B(k, i)} = \frac{D_s - D_n}{\sum_{i=s+1}^{n} D_i}$$

□

Observación 4.9. Notemos que a medida que $k \to s$ tendremos $F_{swap} \to r_{swap}$, donde r_{swap} es la tasa justa para un swap que empieza en s y acaba en n valuado en s. Ya que $D_s = 1$ en s y las otras tasas que aparecen, actualizan el precio al mismo s en que empieza el swap.

4.4. Reevaluación de un IRS

Para reevaluar un swap seguimos el mismo procedimiento que seguiríamos para evaluar al inicio del contrato, pero ahora obtendremos un valor presente neto que seguramente no sea 0.

Es lógico pensar que no siga siendo 0, pues la curva de rendimiento cambia cada día y cada día que pasa estamos actualizando los forwards a un día antes.

Como consecuencia de este hecho ahora tendremos un swap que en el momento de la reevaluación será mas rentable para una de las partes. Este hecho tendrá consecuencias en algunas situaciones, por ejemplo, al querer cerrar un swap.

Ejemplo 4.10. Sigue del ejemplo 4.7. A día 31 de diciembre del mismo año consideramos que ya no necesitamos el swap y que por tanto lo queremos cerrar. Vamos a calcular el valor actual del swap.

Dado que la situación económica actual es muy incierta, en menos de un mes el precio del EURIBOR a 12 meses se ha disparado hasta los valores 3.56 %, 3.14 %, 3.02 %, 3.09 % y 3.05 % para los forwards que finalizaban en la misma fecha que los del ejemplo anterior.

Como ha sucedido con los forwards, también han cambiado los bonos y por tanto las tasas de descuento, quedando ahora tal que:

n	B(0,n)
1	0.97631
2	0.95161
3	0.92978
4	0.90861
5	0.88718

Donde n vuelve a ser la fecha en la cual se efectuaban los pagos en el ejemplo anterior.

Si quisiéramos ver cual es el valor neto del swap a día de hoy tendríamos que recalcular con los nuevos valores, en nuestro caso haremos otra tabla, marcando los valores que han cambiado:

n	D_i	12M EURIBOR (%)	Flujos monetarios (M€) FL	Flujos monetarios (M€) VL	PV de los F.m. (M€) FL	PV de los F.m. (M€) VL
0						
1	**0.97631**	**3.56**	1.828	**3.56**	**1.785**	**3.476**
2	**0.95161**	**3.14**	1.828	**3.14**	**1.740**	**2.988**
3	**0.92978**	**3.02**	1.828	**3.02**	**1.700**	**2.808**
4	**0.90861**	**3.09**	1.828	**3.09**	**1.661**	**2.808**
5	**0.88718**	**3.05**	1.828	**3.05**	**1.622**	**2.706**
				Suma:	**8.508**	**14.786**

Cuadro 5: Ejemplo de un IRS con los elementos actualizados en negrita

Entonces la valoración actual del swap para la parte fija es de:

$$NPV = 1\,(8.508 - 14.786) = -6.278$$

Por lo tanto, si quisiéramos cerrar el swap a día de hoy tendríamos que compensar a la parte variable con 6.278M€para que la operación fuera justa.

5. Modelo de Black

5.1. Introducción al cálculo estocástico

Esta se sección está ampliamente basada en las notas de Corcuera (2021) [7].

Aunque hasta el momento hemos considerado que los tipos de interés eran deterministas, es decir, podríamos conocer con certeza la evolución del rendimiento, debemos tener en cuenta que la naturaleza de los procesos en finanzas es más bien aleatoria y para ello necesitaremos utilizar el cálculo estocástico.

En todo el ámbito de este capítulo consideraremos que el tiempo es continuo.

Definición 5.1. *Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ indexados por un conjunto del parámetro T, es decir, $\{X_t, t \in T\}$.*

Definición 5.2. *Un proceso estocástico se dice estacionario si su distribución de probabilidad para un instante de tiempo es la misma para todos los instantes de tiempo.*

Observación 5.3. Notemos que en estos casos la varianza y la media se mantienen constantes.

Definición 5.4. *Un proceso de Wiener (o movimiento Browniano) es un proceso continuo con incrementos independientes y estacionarios. Es decir:*

- *Con probabilidad 1, $s \mapsto X_s(\omega)$ es continua en $[0, \infty)$.*
- $s \leq t,\ X_t - X_s$ *es independiente de* $\mathcal{F}_s = \sigma(X_u, 0 \leq u \leq s)$.
- $S \leq t,\ X_t - X_s \sim X_{t-s} - X_0$.

Podemos entonces ver que la ley de $X_t - X_0$ es Gausiana. La prueba del siguiente teorema se puede encontrar en [7].

Teorema 5.5. *Si $(X_t)_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano entonces:*

$$X_t - X_0 \sim N(rt, \sigma^2 t) \tag{5.1}$$

Definición 5.6. *Un proceso de Wiener estándar es un proceso de Wiener con $X_0 = 0$ con probabilidad 1, $r = 0$ y $\sigma^2 = 1$.*

Definición 5.7. *Si $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ es un proceso elemental,*

$$H_t = \sum_{i=1}^{n} h_i \mathbf{1}_{(t_{i-1}, t_i]}(t), \tag{5.2}$$

Con $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = T$, definimos:

$$\int_0^T H_s dW_s = \sum_{i=1}^{n} h_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \tag{5.3}$$

Definimos la clase $\mathcal{H}$ como:

$$\mathcal{H} = \{(H_t)_{0\leq t\leq T}, (\mathcal{F}_t) - adaptado, \int_0^T \mathbb{E}(H_s^2)ds < \infty\}. \tag{5.4}$$

Y entonces

Definición 5.8. *Si H es un proceso en la clase $\mathcal{H}$, la integral se define como el L^2 limite*

$$\int_0^T H_s dW_s = \underset{n\to\infty}{lim} \int_0^T H_s^n dW_s \tag{5.5}$$

donde H_s^n es una secuencia de procesos simples tal que:

$$\underset{n\to\infty}{lim} ||H^n - H||^2 = \underset{n\to\infty}{lim} \int_0^T \mathbb{E}(H_s^n - H_s)^2 ds = 0. \tag{5.6}$$

Definición 5.9. *Un proceso $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ se llama proceso de Itô si puede ser escrito como*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s \tag{5.7}$$

donde

- *X_0 es $\mathcal{F}_0 - medible$.*
- *(K_t) y (H_t) son $(\mathcal{F}_t) - adaptadas$.*
- *$\int_0^T (|K_s| + |H_s|^2)ds < \infty$ con probabilidad 1.*

Observación 5.10. Podemos expresar el proceso de Itô en forma diferencial tal que:

$$dX_t = K_t dt + H_t dW_t \tag{5.8}$$

El siguiente teorema nos permite obtener el valor de una función de un proceso de Itô y del tiempo, para una demostración véase [7].

Teorema 5.11. (Fórmula de Itô)
Sea $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ un proceso de Itô y $f(x,t) \in C^{2,1}$ entonces:

$$f(X_t,t) = f(X_0,0) + \int_0^t f_t(X_s,s)ds + \int_0^t f_x(X_s,s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}(X_s,s)d\langle X,X\rangle_s$$

Donde:

$$\int_0^t f_x(X_s,s)dX_s = \int_0^t f_x(X_s,s)K_s ds + \int_0^t f_x(X_s,s)H_s dW_s$$

$$\langle X,X\rangle_s = \int_0^t H_s^2 ds$$

Corolario 5.12. *En forma diferencial la fórmula de Itô se podría escribir:*

$$df(X_t,t) = f_t(X_t,t)dt + f_x(X_t,t)K_t dt + f_x(X_t,t)H_t dW_t + \tfrac{1}{2} f_{xx}(X_t,t)H_t^2 dt$$

$$df(X_t,t) = \left(f_t(X_t,t) + f_x(X_t,t)K_t + \frac{1}{2} f_{xx}(X_t,t)H_t^2 \right) dt + f_x(X_t,t)H_t dW_t \quad (5.9)$$

Para valorar productos financieros usaremos los procesos de Itô, y los trataremos sobretodo en forma diferencial.

Supondremos que los productos financieros S que vamos a tratar se mueven siguiendo un proceso de Itô tal que:

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_s \mu ds + \int_0^t \sigma S_s dW_s \quad (5.10)$$

Que en forma diferencial podemos escribir como:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad (5.11)$$

Y por el teorema anterior (Teorema 5.11) tenemos que lo podemos escribir tal que:

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} \quad (5.12)$$

A los procesos que se mueven según la ecuación (5.12) los llamamos movimientos Brownianos geométricos.

5.2. Volatilidad

La volatilidad la podemos definir como un indicador que mide la dispersión de los rendimientos de un determinado activo, índice o derivado financiero. Es un concepto que se deriva de la varianza o la desviación típica.

Si un activo ha sufrido cambios proporcionalmente muy pronunciados en su rentabilidad este tendrá una volatilidad muy alta, en cambio, si un activo ha mantenido rendimientos relativamente estables tendrá una volatilidad baja.

Observación 5.13. Como norma general el mercado asume que los activos con mayor volatilidad conllevan mas riesgo que aquellos con menor volatilidad.

La volatilidad puede ser obtenida de diferentes formas:

- La primera forma de obtener la volatilidad es mediante los datos históricos del activo a evaluar, la denotaremos por HV por sus siglas en inglés. La volatilidad histórica para un cierto periodo coincide con la desviación típica del logaritmo natural de los rendimientos cuando usamos esa misma frecuencia para el calculo, es decir, si calculamos la desviación típica de los rendimientos diarios, σ_{diaria}, obtendremos que es igual a la volatilidad histórica diaria, HV_{diaria}.

Para calcular otras volatilidades multiplicamos por la raíz cuadrada de la proporción de periodos. Se asume que en un año hay 252 días en los que el mercado está abierto (el mercado abre de lunes a viernes menos los festivos) y por tanto la volatilidad anual puede calcularse como $HV_{anual} = HV_{diaria} \cdot \sqrt{252}$.

Ejemplo 5.14. El rendimiento durante los últimos 12 meses de los bonos alemanes a 10 años ha sido: 2.393, 1.8855, 2.15, 2.1145, 1.536, 0.825, 1.368, 1.127, 0.935, 0.547, 0.159 y 0.014, todos ellos en porcentajes.[5]

Calculamos el logaritmo del rendimiento mensual $l_i = ln\frac{r_i}{r_{i-1}}$ que resulta en: 2.430, 1.236, 0.536, 0.187, 0.194, -0.506, 0.607, 0.334, 0.017, -0.131 y 0.238 (notemos que ahora hay 11 elementos).

Calculamos la media de los rendimientos con $\mu = \sum_{i=1}^{n} \frac{l_i}{n}$. En este caso $\mu = 0,467$.

Calculamos la desviación estándar usando $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(l_i - \mu)^2}$. En el problema finalmente tenemos que $\sigma = 0.78725$.

Como hemos usado datos mensuales para el cálculo de la volatilidad hemos obtenido al volatilidad mensual, si quisiéramos calcular la volatilidad anual necesitaríamos $\sigma_{anual} = \sigma_{mensual} \cdot \sqrt{12}$. Así la volatilidad anual nos queda 2.7271, o 272.71 %.

- La segunda forma de obtener la volatilidad es a partir de la información de precios de las opciones disponibles. En base al precio actual de las acciones y mediante alguna forma de modelar el precio de las mismas, deducimos cual debe ser el valor para la volatilidad que nos devolverá el precio que se observa. A esta volatilidad se le conoce como volatilidad implícita y la denotamos por IV por sus siglas en inglés.

  Dada la complejidad de las fórmulas para obtener el precio de las opciones, la mayoría de las veces obtendremos la volatilidad implícita de forma numérica, con métodos como Newton-Rhapson.

5.3. Opciones

Definición 5.15. *Una opción otorga a su poseedor el derecho a comprar o vender un determinado activo subyacente.*

La descripción es muy genérica, pero vamos a ver que hay muchas formas de definir una opción.

[5]Datos obtenidos de https://www.investing.com/rates-bonds/germany-10-year-bond-yield-historical-data el día 23 de diciembre de 2022

Podemos diferenciar las opciones por cuando pueden ser ejecutadas, el tipo de opción más sencillo son las opciones europeas, que son aquellas que solo pueden ser ejecutadas en un momento concreto preestablecido del tiempo que llamamos fecha de expiración. Otro tipo de opciones son las opciones americanas, que permiten ejecutar la acción en cualquier momento antes de la fecha de expiración, o las opciones Bermuda, que pueden ser ejecutadas en ciertos momentos preestablecidos del tiempo.

Cuando una opción nos otorga el derecho a comprar el activo la llamamos Call y cuando nos permite vender la llamamos Put. Nos centraremos en solo las opciones Europeas y entonces podemos definirlas como:

Definición 5.16. *Un Call(Put) europeo es una opción que otorga al poseedor el derecho sin obligación de comprar(vender) un determinado activo subyacente al escritor de la opción a un predeterminado precio de ejercicio K (Strike price en inglés) en una determinada fecha futura T.*

Denotamos el perfil de beneficios de un Call por C, el de un put por P y denotamos el precio del activo subyacente S tal que:

$$C_T = max\{S_T - K, 0\}, \quad P_T = max\{K - S_T, 0\} \tag{5.13}$$

Observación 5.17. En muchos casos usaremos la función parte positiva $(S_T - K)^+$ para determinar el $max\{S_T - K, 0\}$.

Uno puede tanto escribir como adquirir una opción, cuando se adquiere se dice que se va largo (long position en inglés) y cuando se escribe se dice que se va en corto (short position en inglés).

Las opciones no están a la par, una de las partes cuenta con ventaja, ya que puede ejecutar o no la opción. Si una opción no tuviera coste siempre podríamos entrar largo en ella y simplemente esperar tener beneficios por la diferencia de precios, si la diferencia de precios no nos reporta beneficios no ejecutamos la opción y no perderíamos nada. Como esta situación no se puede dar en el mercado, las opciones tienen un precio, o prima, que ha de pagar aquel que adquiere la opción a quien la escribe.

Poner este precio depende de muchos factores y lo haremos mejor o peor en función de nuestra capacidad para modelar el activo subyacente en la opción.

Ejemplo 5.18. Supongamos a finales del año pasado (2021) tenemos 1000 unidades de la acción de Meta, que por ciertas operaciones están bloqueadas hasta finales del 2022 y por tanto no las podemos vender. Asumamos que creemos que el mercado tecnológico se va a desplomar y que el metaverso no tiene futuro y que por tanto no estamos seguro de si el valor de estas acciones se mantendrá o caerá. En esta situación nos gustaría poder vender nuestras acciones y así liberar nuestra exposición a este riesgo, pero no podemos ya que están bloqueadas.

Decidimos que lo mejor que podemos hacer es entrar en una opción de put europeo para estas 1000 acciones. De esta forma, si el precio de las acciones cae podremos vender a un precio favorable, en cambio, si se mantiene o sube no haremos nada y podremos seguir manteniendo nuestras acciones.

El precio de las acciones es de 330$ por acción. Supongamos que una institución financiera nos ofrece un put europeo con una prima de 10$ por acción, con fecha de madurez 31 de diciembre de 2022 y precio de ejercicio de 300$, aceptamos el put y pagamos una prima de 10 000$ por todas las acciones.

Como esperábamos, a 31 de diciembre de 2022 el precio de las acciones de meta es de 120.34$, ejecutamos nuestro put y vendemos a 300$ ofreciendo un beneficio en la venta de $(300 - 120.34) \cdot 1000 = 179\ 660$$ si a esto le restamos la prima de 10 000$ obtenemos que la opción en total nos reporta un beneficio de 169 660$.

Si hubiese pasado que la acción de Meta se hubiese disparado a 400$, simplemente desecharíamos las opciones y tan solo habríamos perdido los 10 000$ de la prima.

Teorema 5.19. *Sea P el precio de un Put Europeo con precio de ejercicio K y fecha de madurez s. Sea C el precio de un Call Europeo con los mismos parámetros que el put, r el tipo de interés sin riesgo. Si S es el precio de la acción en tiempo presente, con $k = 0$, tenemos:*

$$P - C + S = Ke^{-rs} \tag{5.14}$$

Demostración. Veremos que estos son los precios justos para evitar arbitrajes.

Realizamos una estrategia que consiste en comprar un put del activo, vender un Call y comprar una unidad del activo. El precio del activo es mayor que los precios del Call y del put, así que la cantidad que hemos de pagar por estas operaciones resulta positiva, cogemos el dinero prestado al tipo de interés r.

Pero la compra del put y la acción y la venta del Call resuelve siempre en el mismo valor, que es K. Veamoslo por casos, supongamos que en s tenemos que $S_s > K$ en este caso el valor de nuestra cartera es:

$$P_s - C_s + S_s = (K - S_s)^+ - (S_s - K)^+ + S_s = 0 - S_s + K + S_s = K$$

Y en el caso que en s tengamos $S_s < K$, el valor de la cartera será:

$$P_s - C_s + S_s = (K - S_s)^+ - (S_s - K)^+ + S_s = K - S_s - 0 + S_s = K$$

Además, en s la cantidad que le debemos a la institución financiera que nos haya prestado el dinero para realizar la operación es de exactamente

$$(P - C + S)e^{rs}$$

Como el beneficio obtenido por el paquete es conocido y el precio que tenemos que pagar por haber entrado en las posiciones también, tendremos que estos dos valores han de coincidir. Así tendremos:

$$(P - C + S)e^{rs} = K$$

Si tuviéramos la desigualdad $(P - C + S)e^{rs} < K$ podríamos entrar en las operaciones, recibiríamos beneficio K y tendríamos que pagar $(P - C + S)e^{rs} < K$ por haber realizado la operación, resultando beneficio seguro.

En el caso contrario realizamos la operación inversa, vendemos un put y una acción y compramos un Call, las operaciones nos aportaran un flujo de efectivo, que invertimos al tipo de interés sin riesgo. En la fecha de expiración tendremos que pagar K, pero el deposito del flujo de efectivo nos reportará $(P - C + S)e^{rs} > K$, resultando en beneficio seguro. □

5.4. Estrategias de cobertura

Definición 5.20. *Una cobertura, hedge en inglés, es una operación o un conjunto de operaciones destinados a reducir la exposición o el riesgo de un activo o posición.*

Una estrategia de cobertura será entonces un conjunto de operaciones sobre activos que tengan alguna relación con lo que intentamos cubrir, de forma que un movimiento en el cubierto se compense con un movimiento contrario en la cobertura.

Una estrategia de cobertura perfecta consistiría en encontrar una estrategia que tuviera una correlación inversa con la posición que queremos cubrir. De esta forma, cualquier cambio en el valor de nuestra posición ser vería inmediatamente compensado por la cobertura.

En la práctica no solemos encontrar coberturas perfectas y se suelen usar coberturas que eliminan gran parte del riesgo pero no completamente.

Ejemplo 5.21. Supongamos una empresa de transporte, cuyo principal gasto consiste en combustible, quiere reducir su exposición a la variación en el precio de la gasolina sin plomo 98.

La compañía no tiene acceso a complejos derivados y decide que la mejor forma que tiene de cubrir su riesgo consiste en comprar futuros de petroleo, Brent Crude Oil. Evidentemente la correlación no es perfecta, ya que un incremento de 1 % en el precio del Brent no se traduce en un incremento del 1 % en el precio de la gasolina. Pero la relación sí que es estrecha y si el precio al cual la compañía paga el combustible sube mucho, seguramente el precio del petroleo también haya subido, por lo tanto el futuro en Brent reportará beneficios y reducirá el coste de la gasolina.

Una posición cubierta consiste en entrar en una operación de la cual ya se está cubierto por activos previamente obtenidos. Por ejemplo, vender una opción siendo ya propietario del activo subyacente.

Algunas estrategias de cobertura utilizan la venta en corto, estrategia que consiste en vender un activo que no se posee al precio actual y comprarlo, para cerrar la operación, a un precio posterior. Hay varias formas de realizar esta operación, una de ellas consiste en tomar prestado el activo y reponerlo mas tarde.

5.5. Introducción a Black-Scholes

El modelo de Black-Scholes asume que el mercado consiste en al menos dos activos:

- Un activo sin riesgo, R, que evoluciona con el tipo de interés continuo, es decir, $R(n) = R(0)e^{rN}$. Donde r es el tipo de interés.
- Un activo con riesgo S, que en este caso es una acción y evoluciona como un movimiento Browniano geométrico $S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$.

La publicación original en la que se presenta la fórmula de Black-Scholes, véase [2], se menciona su uso para la valoración de opciones sobre acciones, aunque puede ser usada para otros activos o derivados siempre y cuando cumplan las condiciones planteadas, que son:

- El tipo de interés al contado es conocido y constante en el tiempo.
- El activo subyacente es el único elemento estocástico del sistema.
- La acción no paga dividendos ni ninguna otra retribución.
- La opción es europea, es decir, solo puede ser ejecutada en la fecha de expiración.
- No hay costes involucrados en comprar o vender la acción.
- Es posible coger prestado cualquier cantidad de un activo o derivado para venderla o para mantenerla.
- No hay penalizaciones por vender en corto.

Vamos a ver que en este caso, podemos construir una ecuación para obtener el precio de la opción y resolver mediante ecuaciones parciales. Como se muestra en Black y Scholes (1973) [2].

Teorema 5.22. Fórmula de valoración de opciones de Black-Scholes
Bajo los supuestos del modelo de Black-Scholes podemos obtener que el precio de una opción Call Europea de tales características ha de ser:

$$C = S\Phi(d_1) - Ke^{-rs}\Phi(d_2) \tag{5.15}$$

Donde:

$$d_1 = \left[ln\frac{S}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) s \right] \frac{1}{\sigma\sqrt{s}} \tag{5.16}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{s} \tag{5.17}$$

C es el precio de la opción Call Europea, S es el precio del activo al contado, K es el precio de ejercicio de la opción, $\Phi(\cdot)$ es la función acumulativa de una distribución normal, σ es la volatilidad del activo, r es el tipo de interés del mercado y s es la fecha de expiración de la opción asumiendo que la fecha actual es $k = 0$.

Demostración. Seguiremos mayormente la demostración que se da en el paper original, véase Black y Scholes (1973) [2], y usaremos un trozo de la demostración que se da en Ruttiens (2013) [1].

Como estamos en los supuestos de Black-Scholes el valor de la opción solo depende del precio del activo, el tiempo y de valores que son conocidos y constantes. En este caso podemos crear una posición cubierta consistiendo en una posición en largo del activo y una posición en corto de la opción, es decir compraríamos el activo y venderíamos la opción. Construyendo la posición cubierta de tal forma que el precio de esta no dependa del precio de la acción y solo dependa del tiempo.

Poniendo $C(S,t)$ el valor de la opción como función del precio del activo S y del tiempo t, tenemos por el teorema de Itô que:[6]

$$dC = \left(C_1 \mu S + C_2 + \frac{1}{2} C_{11} \sigma^2 S^2 \right) dt + C_1 \sigma S dW \tag{5.18}$$

La cantidad de opciones, m, que debemos vender por cada acción comprada es de:

$$m = \frac{1}{C_1(S,t)}$$

Notemos que poniendo esta cantidad de opciones tenemos que el valor de una posición cubierta definida como:

$$E = S - \frac{C(S,t)}{C_1(s,t)} \tag{5.19}$$

No se ve afectada por los cambios en el precio del activo S. Ya que un cambio de dS en el activo repercute en la posición tal que:

$$S + dS - \frac{C + C_1 \cdot dS}{C_1} = S + dS - \frac{C}{C_1} - dS = S - \frac{C(S,t)}{C_1(s,t)} = E$$

Entonces, si mantenemos actualizada la estrategia continuamente con el valor de opciones adecuado tendremos que el riesgo de la misma será 0. Así, un pequeño cambio en el tiempo dt hará que el cambio en el valor de nuestra posición sea:

$$dE = dS - \frac{dC}{C_1} \tag{5.20}$$

Si asumimos que ajustamos continuamente la posición corta en opciones, usando el valor para dS y dC, (5.11) y (5.9), tenemos que:

$$dE = \mu S dt + \sigma S dW - \frac{\left(C_1 \mu S + C_2 + \frac{1}{2} C_{11} \sigma^2 S^2 \right) dt + C_1 \sigma S dW}{C_1} \tag{5.21}$$

$$dE = \mu S dt + \sigma S dW - \mu S dt - \frac{C_2}{C_1} dt - \frac{1}{2} C_{11} \sigma^2 S^2 dt - \sigma S dW \tag{5.22}$$

[6] El subíndice denota la derivada parcial respecto al argumento indicado

Y agrupando de nuevo tenemos:

$$dE = -\frac{(\frac{1}{2}C_{11}\sigma^2 S^2 + C_2)dt}{C_1} \tag{5.23}$$

Como el beneficio obtenido por la posición cubierta es seguro, ya que hemos dicho que su riesgo es 0 si actualizamos continuamente la posición, tendremos que tiene que ser igual utilizar la posición cubierta que simplemente mantener el valor de posición remunerado según el tipo de interés sin riesgo del mercado. Si esto no fuera así, los arbitrajistas podrían obtener beneficios de estas posiciones. Entonces el cambio en el valor de posición determinado por (5.23) tiene que ser equivalente a la posición, determinada en (5.19) multiplicada por rdt, resultando:

$$-\frac{(\frac{1}{2}C_{11}\sigma^2 S^2 + C_2)dt}{C_1} = S - \frac{C}{C_1} \cdot rdt \tag{5.24}$$

Dividiendo a ambos lados entre dt y reordenando obtenemos una ecuación diferencial para el valor de la opción:

$$C_2 = rC - rSC_1 - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{11} \tag{5.25}$$

Entonces, diciendo $t = s$ a la fecha de expiración de la opción y K al precio de ejercicio, sabemos que:

$$\begin{cases} C(S,s) = S - K, & S \geq K \\ C(S,s) = 0, & S < K \end{cases} \tag{5.26}$$

En este caso solo hay una fórmula que satisface la ecuación diferencial con las condiciones impuestas en (5.26) y esta debe ser la fórmula de valoración de la opción. Para resolver la ecuación diferencial hacemos la siguiente substitución:

$$C(S,t) = e^{-rs} y \left[\frac{2}{\sigma^2}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\left[ln\frac{S}{K} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)s\right] - \left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 s\right] \tag{5.27}$$

Con este cambio tenemos que la ecuación diferencial resulta:

$$y_2 = y_{11} \tag{5.28}$$

Y entonces las condiciones son:

$$\begin{cases} y(u,0) = 0, & u < 0 \\ y(u,0) = K\left[exp\left\{\frac{u\left(\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{r - \frac{1}{2}\sigma^2}\right\} - 1\right], & u \geq 0 \end{cases} \tag{5.29}$$

En este caso la ecuación diferencial definida en (5.28) es la ecuación de calor y su solución viene dada por:

$$y(u,l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-u}{\sqrt{2l}}}^{\infty} K\left[exp\left\{\frac{(u + q\sqrt{2l})\left(\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{r - \frac{1}{2}\sigma^2}\right\} - 1\right] e^{\frac{-q^2}{2}} dq \tag{5.30}$$

Finalmente sustituyendo la ecuación (5.29) en la ecuación (5.27) y simplificando obtenemos, como queríamos, que:

$$C = S\Phi(d_1) - Ke^{-rs}\Phi(d_2)$$

Donde $\Phi(\cdot)$ es la función acumulativa de una distribución normal y con:

$$d_1 = \left[ln\frac{S}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)s\right]\frac{1}{\sigma\sqrt{s}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{s} \tag{5.31}$$

□

Observación 5.23. Notemos que el valor esperado del rendimiento del activo no juega ningún papel a la hora de poner precio a la opción.

Corolario 5.24. *Usando la paridad Put-Call podemos expresar el put como:*

$$P = -S\Phi(-d_1) + Ke^{-rs}\Phi(-d_2) \tag{5.32}$$

Con d_1 y d_2 definidos como en (5.31).

Demostración. Directamente de sustituir el precio de un Call en la fórmula de la paridad Put-Call tenemos:

$$S\Phi(d_1) - Ke^{-rs}\Phi(d_2) = P + S - Ke^{-rs}$$

Aislando el precio del Put:

$$\begin{aligned} P &= S\Phi(d_1) - S - Ke^{-rs}\Phi(d_2) + Ke^{-rs} \\ &= S[\Phi(d_1) - 1] + Ke^{-rs}[1 - \Phi(d_2)] \\ &= -S[1 - \Phi(d_1)] + Ke^{-rs}[1 - \Phi(d_2)] \\ &= -S\Phi(-d_1) + Ke^{-rs}\Phi(-d_2) \end{aligned}$$

Como queríamos ver. □

Ejemplo 5.25. Supongamos que queremos calcular el precio de un Call sobre una acción de Apple a 1 año, con precio de ejercicio 130 USD. Suponiendo que se cumplen los supuestos de Black-Scholes y sabiendo que el tipo de interés es del 3 %, que el precio actual de la acción de Apple es de 126 USD[7] y que su volatilidad es de un 40 %[8] podemos obtener el precio justo para la opción:

$$d_1 = \left[ln\frac{126}{130} + \left(0.03 + \frac{0.4^2}{2}\right)\cdot 1\right]\frac{1}{0.4\cdot\sqrt{1}} = 0.1968686412$$

$$d_2 = d_1 - 0.4\sqrt{1} = -0.2031313588$$

$$C = 126\cdot N(d_1) - 130\cdot e^{-0.03}N(d_2) = 126\cdot 0.57803 - 130\cdot e^{-0.03}\cdot 0.41952 = 19.90\text{USD}$$

Las opciones sobre Apple para el 15 de diciembre con un precio de ejercicio de 130 USD tienen un precio de 20.08 USD[9] viendo que nuestros cálculos coinciden con lo que predice el mercado.

[7] https://www.nasdaq.com/es/market-activity/stocks/aapl/

[8] Obtenida de la volitilidad implicita de https://volafy.net/equity/AAPL

[9] https://www.nasdaq.com/es/market-activity/stocks/aapl/option-chain/Call-put-options/aapl–231215c00130000

5.6. Black-76

El modelo que propuso Fischer Black en 1976, que es una variación del modelo de Black-Scholes para la valoración de opciones, es aceptado como el estandar para la valoración opciones Europeas derivadas del tipo de interés, como caps, floors o swaptions.

Si tenemos en cuenta que entre el precio del forward de un activo y el precio actual se cumple, si el activo no paga dividendos u otros pagos entre hoy y T la siguiente relación:

$$\tilde{S_T} = S \cdot e^{rT} \tag{5.33}$$

Observación 5.26. Aquí denotamos el precio del forward como $\tilde{S_T}$ ya que existe riesgo de confusión con el precio en el periodo T, denotado habitualmente por S_T.

Observación 5.27. Ahora usaremos sin riesgo a confusión S_F que denotará el precio forward de un activo en la fecha de expiración de una opción.

El modelo de Black tiene los mismos dos elementos del mercado, el activo sin riesgo y el activo con riesgo. Suponemos que son ciertos también todas las hipótesis del modelo de Black-Scholes. Como se muestra en Black (1976) [3]:

Teorema 5.28. Fórmula de valoración de opciones de Black
Bajo los supuestos de Black el precio de una opción Call europea con fecha de madurez s sobre un forward de un activo S_F y precio de ejercicio K, es:

$$C_F = e^{-rs}[S_F\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)] \tag{5.34}$$

Con

$$d_1 = \left[ln\frac{S_F}{K} + \frac{1}{2}\sigma^2 s\right]\frac{1}{\sigma\sqrt{s}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{s} \tag{5.35}$$

Demostración. Realizaremos la demostración como el autor deja indicada al final de Black (1976) [3].
Si cogemos la fórmula de Black-Scholes para un Call europeo y calculamos su precio para valorar un futuro obtenemos que:

$$C_F = S_F e^{-rs}\Phi(d_1) - Ke^{-rs}\Phi(d_2)$$

Y sacando factor común e^{-rs} tenemos:

$$C_F = e^{-rs}[S_F\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)]$$

Y lo mismo para d_1:

$$\begin{aligned} d_1 &= \left[ln\frac{S_F e^{-rs}}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)s\right]\frac{1}{\sigma\sqrt{s}} \\ &= \left[ln\frac{S_F}{K} + ln(e^{-rs}) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)s\right]\frac{1}{\sigma\sqrt{s}} \\ &= \left[ln\frac{S_F}{K} - rs + rs + \frac{1}{2}\sigma^2 s\right]\frac{1}{\sigma\sqrt{s}} \\ &= \left[ln\frac{S_F}{K} + \frac{1}{2}\sigma^2 s\right]\frac{1}{\sigma\sqrt{s}} \end{aligned}$$

□

Corolario 5.29. *Si realizamos el mismo procedimiento con la ecuación para un Put, obtenemos que el precio de una opción put europea con fecha de madurez s sobre un forward de un activo S_F y precio de ejercicio K, es:*

$$P_F = e^{-rs}[K\Phi(-d_2) - S_F\Phi(-d_1)] \tag{5.36}$$

Con d_1 y d_2 definidos como en (5.35).

6. Swaptions

El objetivo de esta sección es el de poder definir cual ha de ser la prima que se ha de cobrar por entrar en una swaption. Para ello debemos primero tener en cuenta que cuando hablemos de las swaptions estaremos teniendo en cuenta dos valoraciones, primero la valoración de los beneficios reportados por entrar en la opción (sobre un IRS) y la valoración reportados por el propio IRS.

Las demostraciones de este capítulo se siguen del paper de Akume, Luderer y Weber (2003) [6] y de las notas del curso en *Derivatives Securities* de Khon (2012) [4].

6.1. Opciones Europeas sobre IRS

Una swaption es fundamentalmente una opción europea sobre un interest rate swap. Y por lo tanto se define como:

Definición 6.1. *Un swaption otorga el derecho pero no la obligación a su poseedor de comprar un swap de una duración determinada, a un cierto tipo fijo en un tiempo determinado en el futuro.*

Definición 6.2. *Si el poseedor del swaption tendrá la opción de entrar en un swap como parte fija se denomina swaption pagador (payer swaption en inglés). Si el poseedor del swaption tendrá la opción de entrar en un swap como parte variable se denomina swaption receptor (receiver swaption).*

Observación 6.3. Como ha sucedido a lo largo del trabajo, nos centraremos solo en el caso de ser swaptions europeas.

Las swaptions, igual que los futuros sobre swaps, tienen 3 fechas fundamentales: k la fecha actual y fecha de escritura de la opción, s la fecha de expiración de la opción y la fecha de inicio del swap y n la fecha final del swap.

Asumiendo $k = 0$ a las swaptions se les suele llamar por la fecha de expiración de la opción y la duración del swap, con la forma s x m, donde m es la duración del swap, en caso de una swaption europea $m = n - s$, pero en el caso de una swaption que puede ser ejercida antes de la fecha de expiración esto no siempre es cierto.

6.2. Valoración de Swaptions

Cuando hacemos referencia a la valoración de una swaption estamos haciendo referencia solo a la valoración de la parte referente a la opción.

Lema 6.4. *La valoración de una swaption pagadora depende de los tipos forward F_{swap} y el tipo de ejercicio r_K, y es la siguiente:*

$$NPV_{swaption} = N \cdot \sum_{t=1}^{n} e^{-rt} \cdot (F_{swap} - r_K) \tag{6.1}$$

Demostración. El valor aportado por la opción es la diferencia entre lo que pagaríamos, o recibiríamos, con o sin opción. Situándonos en el t-ésimo término en un IRS tendríamos que pagar, o recibir:

$$N \cdot (r_{swap} - r_t)$$

Pero si $r_{swap} > r_K$ la opción nos permite elegir esta tasa en vez del swap y por tanto pagar:

$$N \cdot (r_K - r_t)$$

Lo que hace que en el termino t-ésimo la swaption nos reporte un beneficio de:

$$N \cdot (r_{swap} - r_t) - N \cdot (r_K - r_t) = N \cdot (r_{swap} - r_K)^+$$

Y de 0 si $r_{swap} < r_K$, ya que en ese caso no ejerceríamos la opción. Si evaluamos todos los términos en la fecha de expiración de la opción tendremos que el beneficio de entrar en la opción será de:

$$\sum_{t=s+1}^{n} N \cdot e^{-r(t-s)} \cdot (r_{swap} - r_K)^+$$

Si queremos valorar el beneficio que nos aportaría una swaption en el momento de su escritura tendremos que descontar los precios hasta el día actual $k = 0$ y cambiar la tasa swap justa por el tipo forward swap, como habíamos visto en la sección 4.3, de tal forma que resultará:

$$NPV_{swaption} = e^{-rs} \cdot \sum_{t=s+1}^{n} N \cdot e^{-r(t-s)} \cdot (F_{swap} - r_K)^+ = \sum_{t=s+1}^{n} N \cdot e^{-rt} \cdot (F_{swap} - r_K)^+$$

□

6.3. Poniendo precio a las swaptions

Para poner precio a una swaption usaremos un método parecido al visto para valorarla, primero veremos cual es el precio para un solo periodo y después sumaremos y descontaremos todos los periodos.

En este apartado cuando decimos modelo de Black nos referimos al modelo que sigue las hipótesis vistas en la sección 5.6 y en este caso el tipo swap es el activo subyacente, que sigue un proceso Browniano geométrico.

Lema 6.5. *El precio de una swaption pagadora europea, asumiendo las hipótesis del modelo de Black, resulta:*

$$C_{SP} = N \cdot A \cdot [F_{swap}\Phi(d_1) - r_K\Phi(d_2)] \tag{6.2}$$

Donde tenemos que:

$$d_1 = \frac{ln\frac{F_{swap}}{i_K} + \frac{1}{2}\sigma_F^2 t}{\sigma_F\sqrt{t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_F\sqrt{t}, \quad A = \sum_{t=s+1}^{n} e^{-rt}$$

Demostración. En la demostración del lema 6.4 hemos visto que el beneficio aportado por la swaption en el t-ésimo periodo, teniendo en cuenta que es una swaption a futuro, es:

$$N \cdot (F_{swap} - r_K)^+$$

Y entonces podemos usar el modelo de Black para determinar cual sería el precio de una opción que nos aporta este perfil de beneficios.

$$C_F = N \cdot e^{-rt} \cdot [F_{swap}\Phi(d_1) - r_K\Phi(d_2)]$$

Con las habituales:

$$d_1 = \frac{ln\frac{F_{swap}}{r_K} + \frac{1}{2}\sigma_F^2 t}{\sigma_F\sqrt{t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_F\sqrt{t} \tag{6.3}$$

Entonces, como el swap resultaría en la suma de todos estos futuros del tipo de interés y la swaption será la suma de las opciones sobre los futuros del tipo de interés. Así tendremos que el precio de la swaption será la suma de los Calls que acabamos de calcular:

$$C_{SP} = \sum_{t=s+1}^{n} C_F = \sum_{t=s+1}^{n} \left(N \cdot e^{-rt} \cdot [F_{swap}\Phi(d_1) - r_K\Phi(d_2)]\right)$$

Como ni el nominal ni la parte de $[F_{swap}\Phi(d_1) - i_K\Phi(d_2)]$ dependen del periodo temporal lo único que tenemos que sumar es la exponencial, resultando en:

$$C_{SP} = N \cdot A \cdot [F_{swap}\Phi(d_1) - r_K\Phi(d_2)]$$

Donde

$$A = \sum_{t=s+1}^{n} e^{-rt} \tag{6.4}$$

d_1 y d_2 definidos como en (6.3). □

Corolario 6.6. *Utilizando la paridad Call-Put tenemos que el precio de una swaption receptora es de:*

$$C_{SR} = N \cdot A \cdot [r_K\Phi(-d_2) - F_{swap}\Phi(-d_1)] \tag{6.5}$$

Con A como en (6.4) y d_1, d_2 como en (6.3).

7. Conclusiones

Mediante este trabajo hemos conseguido responder a la pregunta que nos hacíamos al principio. Para lograrlo nos hemos introducido en el mundo de la matemática financiera y hemos comprendido el funcionamientos de muchos instrumentos financieros.

Hemos mostrado también los elementos básicos del cálculo estocástico que nos han permitido demostrar la fórmula de valoración de Opciones de Black-Scholes. Junto a la modificación que presenta Fischer Black en su articulo *The pricing of Commodity Contracts* (1976) [3], hemos obtenido una fórmula para la valoración de opciones donde el activo subyacente es un futuro.

Con todo esto hemos podido estudiar como deberíamos valorar una swaption y así derivar una fórmula que nos proporcione el precio justo para este instrumento.

Aún así, hemos tenido ciertas limitaciones, propias de los modelos que hemos elegido, como que la volatilidad tiene que ser constante en el tiempo y que existe un tipo de interés libre de riesgo conocido y constante, además que solo podemos valorar opciones europeas. Estas limitaciones nos invitan a seguir investigando el tema para poder obtener soluciones a problemas que se nos planteen con estos supuestos.

Referencias

[1] Ruttiens, A.: *Mathematics of Financial Markets Financial Instruments and Derivatives Modeling Valuation and Risk Issues*, John Wiley & Sons, UK, 2013.

[2] Black, F., Scholes, M.: *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy 81, 1973, P. 637-654.

[3] Black, F.: *The Pricing of Commodity Contracts*, Journal of Financial Economics 3, 1976, P. 167-179.

[4] Khon, R.: *Course Notes on Derivatives Securities*, Courant Institute, New York University, 2012. https://www.math.nyu.edu/ kohn/derivative_securities.html

[5] Capiński, M and Kopp, E.: *Discrete Models of Financial Markets*, Mastering Mathematical Finance, Cambridge University Press, 2012.

[6] Akume D., Luderer B., Weber G.-W.: *Pricing and hedging of swaptions*, Chenmitz University of Technology, 2003.

[7] Corcuera Valverde, J.M.: *Course Notes on Quantitative Finance*, Universitat de Barcelona, 2021.

[8] Röman, J.: *Analytical Finance: Volume I, The Mathematics of Equity Derivatives, Markets, Risk and Valuation*, Palgrave Macmillan Cham, 2017.

[9] Fabozzi, J.: *Fixed Income Analysis*, John Wiley & Sons, 2007.

[10] Hull, J.: *Options, Futures, and Other Derivatives*, 9th Edition, Pearson Education Inc., 2015.

[11] Kienitz, J.: *Interest Rate Drivatives Explaines, Volume 1: Products and Markets*, Palgrave Macmillan Cham, 2014.

[12] Burgess, N.: *Interest Rate Swaptions - A Review & Derivation of Swaption Pricing Formulae*, Journal of Economics and Financial Analysis, Vol:2, No:2, 2018, P. 87-103.

[13] Fabozzi, J.: *The Handbook of Fixed Income Securities*, 8th Edition, Mc Graw Hill, 2012.

[14] Gamarnik, D.: *Course Notes on Advanced Stochastic Processes*, MIT, 2013. https://ocw.mit.edu/courses/15-070j-advanced-stochastic-processes-fall-2013/pages/lecture-notes/