Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRADO DE MATEMÁTICAS

Trabajo final de grado

Reparto de derechos televisivos: axiomática y beneficios extraordinarios

Autor: Marcos Miranda Medina

Director: Dr. Javier Martínez de Albéniz Salas
Dept. Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial
Facultat d'Economia i Empresa

Barcelona, Enero 2023

Resumen

El objetivo de este trabajo es estudiar la distribución de los ingresos televisivos entre los diferentes equipos de una liga de fútbol. Este trabajo surge de un problema aplicado sobre cómo se debe entregar este dinero a los diferentes equipos, teniendo en cuenta las audiencias que atraen.

Este estudio es analítico, reuniendo herramientas de la teoría de juegos cooperativos, problemas de bancarrota y estadística. El método es principalmente axiomático, es decir, normativo: caracterizar las reglas.

Después de un capítulo preliminar sobre juegos cooperativos, establecemos el modelo teórico, sus variables, reglas de distribución y axiomas. Exploramos las relaciones con los juegos cooperativos, los problemas de bancarrota y también tratamos de identificar el fenómeno fan en las audiencias. Seguimos el trabajo de Bergantiños y Moreno-Ternero (Management science, 2020). Finalmente, estudiamos una extensión para acomodar la posibilidad de ingresos extra, y cómo esta extensión permite una axiomatización de las reglas.

Abstract

The objective of this work is to study the distribution of the television revenues among the different teams of a soccer league. This work comes from an applied problem on how should this money given to the different teams, taking into account the audiences they attract.

This study is analytical, bringing together tools from cooperative game theory, conflicting claims problems and statistics. The method is mainly axiomatic, i.e. normative: how are the rules characterized.

After a preliminary chapter on cooperative games, we set the theoretical model, its variables, distribution rules and axioms. We explore the relationships with cooperative games, conflicting claims problems and also we try to identificate the fan phenomenon on audiences. We follow the paper of Bergantiños and Moreno-Ternero (Management science, 2020). Finally, we study an extension to accomodate the possibility of extra revenues, and how this extension allows an axiomatization of the rules.

2020 Mathematics Subject Classification. 91A12, 91B32

Agradecimientos

En primer lugar me gustaría agradacer al Dr. Javier Martínez de Albéniz su cercanía y predisposición como tutor. Sin su ayuda no habría sido posible redactar este trabajo.

En segundo lugar quiero agradecer a mi familia su apoyo incondicional. Gracias por estar siempre a mi lado.

Por último también me gustaría dar las gracias a todos los amigos que me han acompañado estos últimos años.

Índice general

Resumen/Abstract iii

Agradecimientos v

Índice general vii

Introducción 1

1. Preliminares: Juegos cooperativos 3

1.1. Juegos cooperativos en forma característica 3

2. Reparto de derechos televisivos 11

2.1. El modelo 11

2.2. Reglas de reparto 13

2.3. Axiomática del modelo 15

3. Análisis de las reglas 19

3.1. El efecto fan 19

3.2. Análisis desde la teoría de juegos 20

3.3. Análisis desde los problemas de bancarrota 24

3.4. Análisis estadístico 27

4. Reparto de beneficios extraordinarios 31

4.1. Axiomas sobre reparto de beneficios extraordinarios 31

4.2. Caracterización con tratamiento igualitario 33

4.3. Caracterización con beneficio equitativo 34

5. Conclusiones 39

Bibliografía 41

Introducción

Es un hecho irrefutable que la industria televisiva, y más en concreto la retransmisión de eventos deportivos constituye un sector muy relevante dentro de la economía global a día de hoy. Muchas veces la pasión que despierta el deporte entre los aficionados eclipsa el verdadero motor económico de este sector: los derechos televisivos.

Consideremos un caso empírico que nos resulta cercano, la Liga Española de Fútbol (LaLiga). El modelo de negocio es el siguiente: las compañías televisivas adquieren los derechos para emitir los partidos de la Liga Española confiando en que puedan vender la emisión de los partidos generando una plusvalía para ellos. La Liga Española, por su parte, otorga a cada equipo de la liga una cantidad determinada, reparto que hasta este momento está legislado por un Real Decreto-ley 5/2015 por título: *Real Decreto-ley 5/2015, de 30 de abril, de medidas urgentes en relación con la comercialización de los derechos de explotación de contenidos audiovisuales de las competiciones de fútbol profesional"*. Allí se especifican con detalle cómo se reparten los derechos televisivos. La reciente Ley del Deporte, aprobada definitivamente por el Congreso de los Diputados el 22 de diciembre de 2022 y se ha publicado el día 30 de diciembre para entrar en vigor desde el 1 de enero de 2023, cambia ligeramente estas reglas. Sin embargo, todavía es pronto para predecir cuál va a ser el desenlace de esta cuestión.

Este modelo de negocio resulta puede resultar altamente lucrativo tanto para las compañías de televisión como para los equipos de la liga. De acuerdo con los datos, la liga deportiva con los derechos televisivos mejor valorados es la NFL con unos derechos de televisión valorados en 13 billones (miles de millones) de dólares americanos, seguida de la MLS americana y la Premier League inglesa.

Una vez considerado el modelo de negocio, es natural preguntarse lo siguiente: ¿cómo reparte la liga los beneficios obtenidos por la venta de derechos televisivos a sus equipos? La respuesta no es sencilla. Solo debemos v ver por ejemplo la gran diferencia de repartos de derechos televisivos que hay entre la primera división inglesa de fútbol y la española. La liga inglesa (EPL) es mucho más igualitaria que la española (LaLiga).

El primer trabajo formal en desarrollar un modelo axiomático para estudiar la pregunta anterior fue escrito por Bergantiños y Moreno-Ternero (2020), eso sí, bajo la hipótesis de que la competición sobre la cual estudiamos el reparto de derechos televisivos sea una liga de ida y vuelta. Esta línea de investigación empezó estudiando el problema de reparto de un pase de los museos entre las entidades participantes, dando lugar a una caracterización axiomática y permitiendo un análisis económico mucho más rico. Del problema del reparto de los derechos televisivos hasta el día de hoy, los mismos autores, Bergantiños y Moreno-Ternero han seguido escribiendo artículos relacionados con el reparto de derechos televisivos en diversos aspectos. Citaremos [1], [2], [3], [4], [5].

Aunque la legislación puede modificar el reparto, estos estudios permiten dar fundamento por sus propiedades a las reglas que se deseen utilizar, y son de aplicación a fenómenos distintos.

En los trabajos mencionados se utilizan propiedades y modelos de los juegos cooperativos, cuyos fundamentos se encuentran en los Preliminares. También la literatura sobre los problemas de bancarrota (véase Thomson, 2019, [13]), así como un ajuste por Mínimos cuadrados ordinarios (MCO) que acaba siendo evaluado de forma alternativa mediante un ajuste.

Estructura del trabajo

El trabajo consta de 4 capítulos.

En el primer capítulo, que corresponde a los Preliminares, usando el texto de Rafels et al. (1999) [10], introducimos los resultados y herramientas necesarios para la comprensión y estudio de los juegos cooperativos. Ciertos resultados de este capítulo como el *core* o el valor de Shapley resultarán importantes en el devenir del trabajo, especialmente en el tercer capítulo.

En el segundo capítulo, siguiendo el artículo de Bergantiños y Moreno-Ternero (2020a) [1], introducimos formalmente la definición de problema de retransmisión. Este problema de retransmisión es un conjunto de equipos junto con una matriz que indica las audiencias de los partidos entre los diferentes equipos. Posteriormente se define qué es una regla. A modo de resumen, una regla nos dice cómo repartir la audiencia total entre los equipos de una liga cualquiera. A raíz de este concepto se introducen tres reglas que jugarán un papel fundamental en lo restante de trabajo: la regla uniforme, la regla *equal-split* y la regla *concede-and-divide*. Para finalizar el capítulo se caracterizan las reglas *equal-split* y *concede-and-divide* mediante una serie de axiomas.

El tercer capítulo se basa en el estudio de las reglas *equal-split* y *concede-and-divide*. El capítulo comienza contrastando las diferencias que presentan las dos reglas a la hora de explicar el efecto de los fans en la audiencia de los partidos. El contenido restante del capítulo se divide en tres secciones, cada una de las cuales estudia los problemas de retransmisión desde un punto de vista diferente y arroja una de las dos reglas como el resultado del estudio.

En el cuarto y último capítulo, estudiamos (siguiendo el trabajo de Bergantiños y Moreno-Ternero, 2020b [2]) cómo actúan la regla uniforme, la regla *equal-split* y la regla *concede-and-divide* ante un aumento en la audiencia. Para ello se definen nuevos axiomas y se presentan caracterizaciones de las tres reglas anteriores mediante estos nuevos axiomas.

Por último se presentan las conclusiones de este trabajo.

Capítulo 1

Preliminares: Juegos cooperativos

Este capítulo está dedicado a introducir los conceptos sobre juegos cooperativos necesarios para explicar el modelo presentado por Bergantiños y Moreno-Ternero (2020) [1]. Para ello utilizaremos la teoría de juegos.

La Teoría de Juegos es una rama de las matemáticas que estudia la toma de decisiones cuando los decisores pueden elegir entre diferentes estrategias y el resultado depende de las estrategias escogidas por parte de todos los agentes. Surge a partir del libro de Von Neumann y Morgenstern (1944) [14]. En este libro titulado *Game Theory and Economic Behavior,* se pretende hallar un fundamento a las decisiones económicas que toman los consumidores, las empresas, los gobiernos, etc. Aunque el objetivo inicial, demasiado ambicioso, no se ha cumplido, los modelos que utilizan las herramientas de esta teoría se han convertido en imprescindibles en muchos campos, como se prueba en los Premios Nobel de Economía dedicados tanto a estudiosos de la teoría como los que la usan en aplicaciones como las subastas o la asignación de estudiantes a las universidades.

Hay múltiples tipos de juegos, pero en este trabajo nos centraremos en estudiar los juegos cooperativos y sus aplicaciones. En los juegos cooperativos la unidad esencial son las coaliciones y nos centramos en conceptos de solución, es decir en repartos de lo que los jugadores pueden conseguir juntos.

En la exposición de los juegos cooperativos, usamos el texto de Rafels et al. (1999) [10], aunque también hay otros textos disponibles, como Curiel (1997) [6] o González-Díaz et al. (2010) [7].

1.1. Juegos cooperativos en forma característica

Un juego cooperativo es un tipo de juego que estudia de qué manera se pueden juntar las jugadores un juego para obtener una situación ventajosa. Una unión de jugadores (un subconjunto del total de jugadores) se denomina coalición. Para modelizar esta situación, nos basta con tener una función que asigne a cada coalición un valor numérico (esta función se llama función característica).

Definición 1.1. *Un* juego cooperativo *en forma característica con utilidad transferible de orden n es un par ordenado (N, v) dónde:*

- $N = \{1, \ldots, n\}$ *es un conjunto de jugadores*

- *v es una aplicación*

$$\begin{array}{rccc} v: & \mathcal{P}(N) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & S \subseteq N & \longmapsto & v(S) \end{array}$$

tal que $v(\emptyset) = 0$.

Usaremos las letras mayúsculas $S, T, R, \ldots$ para referirnos a las coaliciones y las letras minúsculas $s, t, r, \ldots$ para referirnos a su cardinalidad. Imponemos, como es natural, que $v(\emptyset) = 0$, es decir que la coalición sin jugadores reciba una utilidad de 0. Cabe remarcar que a pesar de que en este trabajo el valor que obtienen las coaliciones es "dinero", en general no tiene porque ser así. En general las coaliciones reciben un bien que les genera una utilidad. A partir de ahora no explicitaremos el orden de un juego cooperativo a no ser que sea estrictamente necesario. También nos referimos a los juegos cooperativos de utilidad transferible simplemente como juegos TU o juegos cooperativos TU, una notación ampliamente usada. Denotamos por Γ el conjunto de juegos juegos cooperativos TU.

Antes de seguir con más nociones, vamos a exponer a continuación un pequeño ejemplo en el que modelizamos una situación que bien podría suceder en la vida real mediante un juego TU.

Ejemplo 1.2. Tres municipios cercanos entre ellos planean la posibilidad de desarrollar un sistema de tratamiento de aguas residuales propio.A día de hoy, los 3 municipios mandan sus aguas a una planta de tratamiento situada en una gran ciudad cercana a dichos municipios, por lo cual pagan una tarifa mensual.

Mediante un estudio se ha calculado que seguir enviando las aguas residuales a la planta de tratamiento situada en la gran ciudad implica un coste a cada municipio de 100 unidades por familia. Por otro lado construir y mantener una planta propia tiene un coste que depende del número de familias involucradas en la construcción (llamémosle NFI a este número). Este coste viene dado por:

$$C_{NFI} = \begin{cases} 500000 & \text{si} \quad 0 \leq NFI \leq 5000, \\ 600000 & \text{si} \quad 5000 < NFI \leq 10000, \\ 700000 & \text{si} \quad 10000 < NFI \leq 15000. \end{cases}$$

El municipio 1 tiene una población de 5000 familias, el municipio 2 de 3000 familias y el municipio 3 de 4000 familias.

Modelizamos el problema anterior mediante un juego cooperativo (N, v). Los jugadores del juego serán los municipios involucrados en el problema, por lo que $N = \{1, 2, 3\}$. Calculemos ahora la función característica asociada: Sea $S \subseteq N$ y s su cardinalidad. Consideremos los siguientes casos:

- Si $s = 0$, entonces $S = \emptyset$ y tenemos que $v(S) = 0$.
- Si $s = 1$, entonces $S = \{i\}$ para algún $i \in N$. Para el caso del municipio 1, como tiene 5000 familias, el coste para construir un sistema de aguas propio será de 500000. Mientras que con el sistema de aguas que usa actualente le supone un gasto de 500000 (ya que cada familia paga 100 unidades por el servicio y hay 5000 familias). Por lo tanto el municipio 1 no estará interesado en la construcción de una nueva planta, es decir, $v(\{1\}) = 0$. Usando un argumento análogo obtenemos que $v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$.

- Si $s = 2$, entonces $S \in \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$. Calculemos, por ejemplo, $v(\{1,2\})$. Si la coalición formada por los municipios decidiera abrir una planta conjunta, le costaría una utilidad de 600000, ya que entre ambos municipios juntan 8000 familias. En cambio mantenerse con su sistema de aguas actual le reporta un coste de 800000. Por lo tanto, construir una planta nueva será la opción más beneficiosa para la coalición ya que le reportará una utilidad de $v(\{1,2\}) = 800000 - 600000 = 200000$. Analógamente obtenemos que $v(\{1,3\}) = 300000, v(\{2,3\}) = 100000$.
- Si $s = 3$, entonces $S = N$ y usando los mismos argumentos que en los casos anteriores obtenemos que $v(N) = 500000$.

Por ello la función característica (en miles) será:

$$\begin{array}{lll} v(\{1\}) = 0, & v(\{1,2\}) = 200, & \\ v(\{2\}) = 0, & v(\{1,3\}) = 300, & v(\{1,2,3\}) = 500. \\ v(\{3\}) = 0 & v(\{2,3\}) = 100, & \end{array}$$

Introducimos ahora la definición de juego cooperativo TU convexo (Shapley, 1971 [12]). Esta propiedad será importante en el desarrollo del trabajo ya que los juegos TU que estudiaremos en el Capítulo 3 serán todos convexos y este tipo de juegos como veremos adelante presentan una característica muy importante: tienen el core no vacío.

Definición 1.3. *Sea (N, v) un juego TU. Decimos que (N, v) es* convexo *si para cualquier par $S, T \in \mathcal{P}(N)$ y cualquier $i \in N$ tal que $S \subset T$ y $i \notin T$, se cumple*

$$v(T \cup \{i\}) - v(T) \geq v(S \cup \{i\}) - v(S).$$

Esta condición nos dice que si tenemos dos coaliciones S, T tal que $S \subset T$ (es decir que todos los jugadores de la coalición S pertenecen a T pero hay como mínimo un jugador de T que no está en la coalición S) y un jugador i que no pertenece a ninguna de las dos coaliciones, el efecto marginal de i sobre la coalición T es mayor o igual que el efecto marginal de i sobre S.

Soluciones, conjunto de preimputaciones, conjunto de imputaciones y core de un juego

Una vez hemos introducido las definiciones y notaciones necesarias para entender qué es un juego cooperativo TU, queremos resolver la siguiente cuestión: dado un juego (N, v), ¿de qué maneras podemos repartir $v(N)$ entre los n participantes del juego?

Para ello definimos el concepto de solución de un juego TU:

Definición 1.4. *Sea (N, v) un juego cooperativo TU. Una solución del juego es un vector*

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Una solución sugiere repartir a cada jugador $i \in N$ la cantidad x_i. Del concepto de solución, podemos obtener la cantidad que recibe una coalición cualquiera $S \in \mathcal{P}(N)$ de una x, la cual notamos por $x(N)$. Es decir:

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i.$$

Dicho esto, una solución incluye cualquier vector que pertenezca a $\mathbb{R}^n$ lo que implica que puede haber soluciones que no sean aceptables por el conjunto de los jugadores. Para mejorar ese problema podemos acotar el conjunto de soluciones bajo ciertas condiciones o principios.

La primera condición que podemos imponer es que $v(N)$ sea repartido íntegramente a los participantes, es decir que $v(N) = x(N)$. Esta condición es conocida como principio de *eficiencia* y da lugar al conjunto de preimputaciones de un juego TU.

Definición 1.5. *Sea (N, v) un juego TU. El* conjunto de preimputaciones *del juego (N, v) es el conjunto denotado por $I^*(N, v)$ y definido por:*

$$I^*(N, v) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N)\}.$$

Es decir el conjunto de preimputaciones es el conjunto formado por las soluciones que cumplen el principio de eficiencia. De manera similar es lógico para los jugadores de un juego exigir que una solución les aporte como mínimo la misma utilidad que les otorga la función característica. Esta condición es conocida como principio de racionalidad individual y da lugar al conjunto de imputaciones de un juego TU.

Definición 1.6. *Sea (N, v) un juego TU. El* conjunto de imputaciones *del juego (N, v) es el conjunto denotado por $I(N, v)$ y definido por:*

$$I(N, v) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N), x_i \geq v(\{i\}) \quad \forall i \in N\}.$$

Por último, podemos considerar el principio de racionalidad coalicional. Una solución de un juego TU cumple el principio de racionalidad coalicional si cualquier la utilidad de cualquier coalición del juego por la solución es superior al valor de la coalición en la función característica. De esta manera definimos el Core de un juego TU de la siguiente manera:

Definición 1.7. *Sea (N, v) un juego TU. El Core del juego (N, v) es el conjunto denotado por $Core(N, v)$ y definido por:*

$$Core(N, v) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N), x(S) \geq v(S) \quad \forall S \in \mathcal{P}(N)\}.$$

Cabe remarcar que el principio de racionalidad coalicional implica el principio de racionalidad individual. Claramente viendo los conjuntos que hemos definido tenemos que para cualquier juego TU (N, v) se cumple que:

$$Core(N, v) \subseteq I(N, v) \subseteq I^*(N, v).$$

Esto es lógico ya que cada conjunto que hemos introducido presentaba condiciones más restrictivas que el conjunto anterior. A pesar de que el Core es el conjunto que parece presentar vectores de pago más favorables para los jugadores, tiene el problema de que puede ser el conjunto vacío.

A pesar de ello, los juegos cooperativos TU que se estudian en este trabajo serán convexos, y éstos cumplen que tienen el core no vacío:

Teorema 1.8. *Sea (N, v) un juego cooperativo TU. Si el juego (N, v) es convexo entonces $Core(N, v) \neq \emptyset$.*

Dado que nuestro objetivo no es profundizar en los juegos cooperativos, la demostración del teorema anterior se puede hallar en en el libro de Rafels et al. (1999) [10]. Los resultados originales se hallan en el trabajo de Shapley (1971) [12].

El valor de Shapley

El Core, como concepto de solución, tiene el problema de que puede ser vacío, y en caso de que no lo sea, presenta en general infinitos repartos posibles. Por ello vamos a presentar ahora una solución puntual muy relevante: el *valor de Shapley* (Shapley, 1953 [11]).

La idea de Shapley fue buscar una solución única $Sh(N,v) \in \mathbb{R}^n$ para juegos TU que satisficiera unas propiedades muy naturales.

Antes de explicitarlas, necesitamos algunas definiciones.

Definición 1.9. *Sea $(N,v) \in \Gamma$ un juego TU. Decimos que $i \in N$ es un* jugador nulo *en el juego cooperativo (N,v) si su contribución a cualquier coalición es igual a cero, es decir, si $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ para toda coalición $S \subseteq N$.*

Definición 1.10. *Sea $(N,v) \in \Gamma$ un juego TU. Decimos que $i,j \in N$ son* jugadores simétricos *si sustituyendo uno por el otro no se altera la utilidad de ninguna coalición, es decir, si $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ para cualquier coalición $S \subseteq N \setminus \{i,j\}$.*

Las propiedades que Shapley utiliza son las siguientes:

1. **Aditividad**. Dados $(N,v),(N,\omega) \in \Gamma$, se cumple
$$Sh(N,v) + Sh(N,\omega) = Sh(N,v+\omega),$$
donde el juego $(N,v+\omega)$ es el juego cuya función característica es la función definida por $(v+\omega)(S) := v(S) + \omega(S), \forall S \subseteq N$.

2. **Simetría**. Dado $(N,v) \in \Gamma$, y para cualquier par de jugadores simétricos i,j en (N,v) se cumple
$$Sh_i(N,v) = Sh_j(N,v).$$

3. **Eficiencia**. Dado cualquier $(N,v) \in \Gamma$, se cumple
$$\sum_{i \in N} Sh_i(N,v) = v(N).$$

4. **Jugador nulo**. Dado $(N,v) \in \Gamma$, si para cualquier jugador nulo i en (N,v) se cumple
$$Sh_i(N,v) = 0.$$

Shapley no solo demostró que el valor de Shapley existe para todo juego TU, sino que además ese valor es único y encontró una expresión explícita para calcularlo. Todo esto viene recogido en el siguiente teorema.

Teorema 1.11. *Dado $(N,v) \in \Gamma$ un juego cooperativo TU, existe una única solución Δ del juego (N,v) que cumple los axiomas de Aditividad, Simetría, Eficiencia y Nulidad y viene dada por la siguiente expresión:*
$$Sh_i(N,v) = \frac{1}{n!} \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} s!(n-s-1)! \left(v(S \cup \{i\}) - v(S) \right),$$
donde s es la cardinalidad de la coalición S.

Si comentamos brevemente los axiomas que Shapley usa para caracterizar el valor, lo primero que debemos señalar es la Eficiencia. Efectivamente, nos interesará una distribución que reparta todos los recursos disponibles entre los jugadores. Se trata de repartir el valor total pensando en que los jugadores entran según un orden determinado, y cada jugador recibe justamente su contribución marginal a los precedentes. Y el valor de Shapley no es más que el promedio sabiendo que los órdenes se toman de forma aleatoria.

En segundo lugar, la Aditividad solamente implica que el valor de aquellos juegos que se pueden descomponer es simplemente la suma de los valores de los elementos de la descomposición.

Los axiomas de simetría y del jugador nulo se basan en principios de igualdad, tratar de forma igual a jugadores intercambiables, y por último, quien no aporta nada, no debe recibir nada.

El valor de Shapley se basa en la idea de calcular las contribuciones de cada jugador a las coaliciones a las que no pertenece. Dado un juego cooperativo (N, v), la *contribución* del jugador i a la coalición $S \subseteq N$ tal que $i \notin S$ es $v(S \cup \{i\}) - v(S)$. Por lo tanto, se trata de la diferencia entre lo que gana la coalición S con y sin el jugador i.

Por último, hay una manera alternativa de expresar el valor de Shapley que usaremos en apartados posteriores.

Sea (N, v) un juego TU. Denotamos por Π_N el conjunto de todas las permutaciones del conjunto N, es decir:

$$\Pi_N = \{\Phi : N \longrightarrow N : \Phi \quad \text{es biyectiva}\}.$$

Ahora, dados $\pi \in \Pi_N$ y $i \in N$, denotamos por $Pre(i, \pi)$ el conjunto de predecesores del jugador i por la permutación π:

$$Pre(i, \pi) = \{j \in N : \pi(j) < \pi(i)\}.$$

Introducimos entonces la definición alternativa del valor de Shapley, usando las contribuciones marginales del jugador i a sus predecesores para cada permutación, y haciendo el promedio de ellas. Se define el *vector de contribuciones marginales* para una permutación $\pi \in \Pi_N$ el vector $m^\pi(v) \in \mathbb{R}^N$ definido por:

$$m_i^\pi(v) = v(Pre(i, \pi) \cup \{i\}) - v(Pre(i, \pi)), \quad \forall i \in N.$$

Teorema 1.12. *Dado $(N, v) \in \Gamma$ un juego cooperativo TU, existe una única solución Sh del juego (N, v) que cumple los axiomas de Aditividad, Simetría, Eficiencia y Nulidad y viene dada por la siguiente expresión:*

$$Sh_i(N, v) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi_N} [v(Pre(i, \pi) \cup \{i\}) - v(Pre(i, \pi))].$$

Introducimos ahora un pequeño ejemplo donde calculamos el valor de Shapley de un juego TU.

Ejemplo 1.13. Sea $(N, v) \in \Gamma$ el juego de tres jugadores, $N = \{1, 2, 3\}$, con la función característica definida de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lll} v(\{1\}) = 0, & v(\{1,2\}) = 2400, & \\ v(\{2\}) = 0, & v(\{1,3\}) = 2060, & v(\{1,2,3\}) = 4920. \\ v(\{3\}) = 0 & v(\{2,3\}) = 460, & \end{array}$$

Calculamos el valor de Shapley del jugador 1,

$$Sh_1(N,v) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi_N} [v(Pre(1,\pi) \cup \{i\}) - v(Pre(1,\pi))].$$

Ahora el conjunto $\Pi_N = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6\}$ está formado por las siguientes permutaciones (en forma matricial):

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right), \\
\pi_2 &= \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right), \\
\pi_3 &= \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right), \\
\pi_4 &= \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right), \\
\pi_5 &= \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right), \\
\pi_6 &= \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Aplicando la definición del valor de Shapley de arriba obtenemos que:

$$\begin{aligned}
Sh_1(N,v) = \frac{1}{3!}\ &[(v(\{1\}) - v(\{\emptyset\}))+ \\
&(v(\{1\}) - v(\{\emptyset\})] + (v(\{1,2\}) - v(\{2\})+ \\
&(v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\}) + (v(\{1,3\}) - v(\{3\})+ \\
&(v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})] = \frac{1}{6} \cdot 13380 = 2230.
\end{aligned}$$

Calculando de manera análoga el valor de Shapley para los equipos 2 y 3 obtenemos que:

$$Sh(N,v) = (2230, 1430, 1260).$$

Capítulo 2

Reparto de derechos televisivos

En este capítulo establecemos la notación y los supuestos en los que se basa el modelo de reparto de los derechos televisivos de una competición deportivas, y en concreto de la liga de futbol. Debemos establecer en primer lugar cuál será la información disponible y los objetivos que pretendemos obtener a partir del modelo. Seguimos el trabajo de Bergantiños y Moreno-Ternero (2020, 2021) [1] [3] porque son los que fijan este problema de manera formal y axiomática. Se trata de un problema que presenta un interés práctico y que suele verse oscurecido por las pasiones que desata el fútbol.

Una vez tenemos los datos del modelo, establecemos qué reglas se plantean para después caracterizar las reglas mediante una serie de axiomas o propiedades.

2.1. El modelo

El modelo de competición que analizamos en este trabajo es el de una liga de ida y vuelta. En la competición cada equipo juega contra cada uno de los demás equipos exactamente dos veces: una vez como local y la otra como visitante. Por esa razón los fundamentos del modelo serán los siguientes:

- Un conjunto finito $N = \{1, \ldots, n\}$, formado por los equipos de la liga, de cardinalidad $|N| = n$.
- Una matriz cuadrada de orden n, $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathcal{A}_{n\times n}$ que recoge las audiencias de la siguiente forma:

$$a_{ij} = \begin{cases} \text{si} \quad i \neq j, & \text{la audiencia del partido entre } i \text{ y } j \text{ en el campo de } i, \\ \\ \text{si} \quad i = j, & 0. \end{cases}$$

Claramente se cumple que $a_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j \in N$ ya que no es posible que un partido tenga audiencia negativa. De esta manera introducimos la siguiente definición:

Definición 2.1. *Una* matriz de audiencias *de orden n es una matriz $A \in \mathcal{A}_{n\times n}$ tal que $a_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in N$ y $a_{ii} = 0 \quad \forall i \in N$.*

Denotamos por $\Omega_{n\times n}$ el conjunto de todas las matrices de audiencias de orden n. Es decir:

$$\Omega_{n\times n} = \{A \in \mathcal{A}_{n\times n} \mid a_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in N, \text{ y } a_{ii} = 0 \ \forall i \in N\}.$$

Definimos entonces que es un problema de retransmisión:

Definición 2.2. *Un* problema de retransmisión de orden n *es un par ordenado* (N, A) *donde* N *es un conjunto tal que* $|N| = n$ *y* $A \in \Omega_{n\times n}$.

Denotamos por $\Theta_{n\times n}$ el conjunto de todos los problemas de retransmisión de orden n.

Dado un problema de retransmisión de orden n podemos obtener la audiencia conseguida por cualquier equipo $i \in N$. La denotamos como α_i y se obtiene de la siguiente manera:

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij} + a_{ji}) \quad \forall i \in N.$$

También podemos obtener la audiencia total del problema, denotada como $||A||$, simplemente sumando todas las entradas de las matriz de audiencias asociada. Es decir:

$$||A|| = \sum_{i,j\in N} a_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Introducimos un ejemplo para facilitar la comprensión de los conceptos presentados.

Ejemplo 2.3. Sea (N, A) el problema de retransmisión de orden 3 con la siguiente matriz de audiencias asociada:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1200 & 1030 \\ 1200 & 0 & 230 \\ 1030 & 230 & 0 \end{pmatrix}.$$

La audiencia asociada al equipo 1 será la siguiente:

$$\alpha_1 = \sum_{j\in N}(a_{ij} + a_{ji}) = 1200 + 1030 + 1200 + 1030 = 4460.$$

Calculando la audiencia asociada de los equipos 2 y 3 de la misma manera obtenemos que

$$\alpha = (4460, 2860, 2520).$$

Calculamos también la audiencia total del problema de retransmisión:

$$||A|| = \frac{1}{2}\sum_{i\in N} \alpha_i = \frac{4460 + 2860 + 2520}{2} = 4920.$$

Antes de proseguir, cabe remarcar una serie de convenios que se darán por sentados a partir de ahora. En primer solo estudiaremos los casos en que $n \geq 3$. En segundo lugar, asignando a cada equipo participante un número, podemos concluir sin pérdida de generalidad que el conjunto N será de la forma $\{1, \ldots, n\}$. Por último, no volveremos a indicar el orden n de una matriz o problema de retransmisión ya que, o bien quedará implícito en el contexto, o bien será irrelevante para las demostraciones.

2.2. Reglas de reparto

Una vez definido qué es un problema de retransmisión procedemos a introducir el concepto de regla de reparto. Dado un problema de retransmisión, una regla de reparto nos dice cómo distribuir los ingresos generados a cada uno de los equipos de la competición. Antes de definir las reglas de reparto de forma rigurosa, suponemos sin pérdida de generalidad que cada espectador genera unos beneficios de 1 unidad por ver el partido. Por esta razón, definimos la regla de reparto.

Definición 2.4. *Una* regla de reparto *es una aplicación R*

$$\begin{array}{rccl} R\colon & \Theta & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (N,A) & \longmapsto & R(N,A) = (R_1(N,A), R_2(N,A), \ldots, R_n(N,A)) \end{array}.$$

tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} R_i(N,A) = ||A||$.

La condición de que

$$\sum_{i=1}^{n} R_i(N,A) = ||A||$$

implica que cualquier regla de reparto distribuye totalmente el dinero recaudado.

De ahora en adelante nos referiremos a las reglas de reparto simplemente como reglas, y especificaremos que son de reparto en caso de que haya ambigüedad.

Un primer ejemplo de regla es la regla uniforme:

Definición 2.5. *La* regla uniforme *es la regla U definida por:*

$$U_i(N,A) = \frac{||A||}{n}, \quad \forall i \in N.$$

A partir de ahora nos referiremos a ella como regla U. Esta regla reparte los mismos beneficios a todos los equipos. La descartamos por no tener en cuenta las audiencias generadas.

Reglas *Equal-split (ES)* y *Concede-and-divide (CD)*

A continuación introducimos las dos reglas fundamentales que se utilizan en el estudio del modelo: la regla *equal-split* y la regla *concede-and-divide*, denotadas por *ES* y *CD* respectivamente a partir de ahora.

Ambas reglas se basan en sustraer de la audiencia generada por cada equipo, α_i, una cantidad determinada a repartir entre los demás $n-1$ equipos.

- En el caso de la regla *ES*, cada equipo i reparte a partes iguales entre los demás equipos la mitad de sus ingresos generados. Es decir, reparte

  $$\beta_i = \frac{\alpha_i/2}{n-1}$$

  a cada uno de los equipos restantes.

- La regla *CD*, en cambio, hace que el equipo i reparta a cada uno de los demás equipos el promedio de la audiencia de éstos, es decir

$$\gamma_i = \frac{1}{(n-1)(n-2)} \sum_{j,k \in N \setminus \{i\}} (a_{jk} + a_{kj}).$$

Teniendo en cuenta esto, definimos a continuación las reglas *ES* y *CD*.

Definición 2.6. *La regla* equal-split *es la regla ES definida por:*

$$ES_i(N, A) = \alpha_i - (n-1)\beta_i = \alpha_i - \frac{\alpha_i}{2} = \frac{\alpha_i}{2}, \quad \forall i \in N.$$

Veremos ahora la definición de la regla CD.

Definición 2.7. *La regla* concede-and-divide *es la regla CD definida por:*

$$CD_i(N, A) = \alpha_i - (n-1)\gamma_i = \alpha_i - \frac{1}{n-2} \sum_{j,k \in N \setminus \{i\}} (a_{jk} + a_{kj}), \quad \forall i \in N.$$

Ahora, es posible escribir la regla equal-split como una combinación convexa de U y CD. Considerando

$$\varepsilon(n) = \frac{n}{2(n-1)},$$

tenemos que para todo $i \in N$ se cumple

$$ES_i(N, A) = \varepsilon(n) U_i(N, A) + (1 - \varepsilon(n)) CD_i(N, A) = \varepsilon(n) \frac{||A||}{n} + (1 - \varepsilon(n)) \frac{\alpha_i}{2},$$

y aislando podemos expresar la regla concede-and-divide de la siguiente manera:

$$CD_i(N, A) = \frac{(n-1)\alpha_i - ||A||}{n-2}, \quad \forall i \in N.$$

Esta nueva manera de expresar la regla concede-and-divide nos resultará de gran utilidad en el desarrollo del trabajo.

Introducimos a continuación un ejemplo para ayudar a entender los conceptos introducidos previamente.

Ejemplo 2.8. Sea $(N, A) \in \Theta$ el mismo problema de retransmisión que tratamos en el Ejemplo 2.3. Calculamos los repartos de las reglas equal-split y concede-and-divide al jugador 1 en el problema (N, A).

$$\begin{aligned} ES_1 &= \frac{\alpha_1}{2} = \frac{4460}{2} = 2230, \\ CD_1 &= \frac{(n-1)\ \alpha_1 - ||A||}{n-2} = \frac{2 \cdot 4460 - 4920}{1} = 4000. \end{aligned}$$

Aplicando la misma regla a los jugadores 2 y 3 obtenemos que

$$ES(N, A) = (2230, 1430, 1260) \quad \text{y} \quad CD(N, A) = (4000, 800, 120).$$

2.3. Axiomática del modelo

En esta sección introducimos los axiomas que caracterizan las dos principales reglas que estudiamos a lo largo del trabajo: la regla equal-split y la regla concede-and-divide.

Nuestro primer axioma nos dice que dos equipos con las mismas audiencias deben obtener la misma cantidad en el reparto.

Axioma 2.9 (Tratamiento igualitario(*Equal treatment of equals*)). *Una regla R cumple la propiedad de* Equal treatment of equals *si para cualquier $(N, A) \in \Theta$ y cualquier par i, j tal que si $a_{ik} = a_{jk}$ y $a_{ki} = a_{kj} \quad \forall k \in N \setminus \{i, j\}$, entonces*

$$R_i(N, A) = R_j(N, A).$$

El segundo axioma que introducimos sugiere que los repartos deben ser aditivos en la matriz A, es decir, que si tenemos varias temporadas, el reparto se puede hacer en conjunto o para cada una, sin afectar al resultado final.

Axioma 2.10 (Aditividad). *Una regla R cumple la propiedad de Aditividad si ara cualesquiera $(N, A), (N, A^{'}) \in \Theta$ se cumple:*

$$R(N, A + A^{'}) = R(N, A) + R(N, A^{'}).$$

Introducimos a continuación un par de axiomas que nos dicen qué propiedades deben cumplir las reglas en situaciones inusuales. Estos axiomas reflejan propiedades muy naturales en los casos extremos: que quien no aporta nada no reciba nada, o que si todas las audiencias están concentradas en los partidos de un equipo, este equipo debe recibir todo. Son axiomas débiles, pero necesarios en la caracterización de ES y CD.

En primer lugar, un axioma que dice que si un equipo no tiene audiencia en ningún partido, no debe recibir nada.

Axioma 2.11 (Equipo nulo). *Una regla R cumple la propiedad Equipo Nulo si para cualquier $(N, A) \in \Theta$ y $i \in N$ tal que $a_{ij} = a_{ji} = 0 \forall j \in N$, se cumple:*

$$R_i(N, A) = 0.$$

El otro axioma de este par sugiere que si existe un equipo i de manera que los demás no reciben ninguna audiencia en sus partidos entre ellos, entonces el equipo i debe recibir toda su audiencia generada.

Axioma 2.12 (Equipo esencial). *Una regla R cumple la propiedad de Equipo esencial si para cualquier $(N, A) \in \Theta$ y para cualquier $i \in N$ tal que $a_{kj} = a_{jk} = 0 \quad \forall j, k \in N \setminus \{i\}$ se cumple:*

$$R_i(N, A) = \alpha_i.$$

Con todos estos axiomas presentados ya somos capaces de demostrar el teorema que caracteriza las reglas ES y CD.

Teorema 2.13. *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

a) Una regla cumple los axiomas tratamiento igualitario, aditividad y equipo nulo si y solo si, es la regla ES.

b) Una regla cumple los axiomas tratamiento igualitario, aditividad y equipo esencial si y solo si, es la regla CD.

Demostración. a) Empezamos demostrando que la regla ES cumple los tres axiomas mencionados por orden. Sean $(N, A), (N, A') \in \Theta$ dos problemas:

- (Tratamiento igualitario) Si tenemos $i, j \in N$ tal que $a_{ik} = a_{jk}$ y $a_{ki} = a_{kj}$ $\forall k \in N \setminus \{i, j\}$ se cumple que $\alpha_i = \alpha_j$ ya que $\alpha_l = \sum_{m \in N}(a_{lm} + a_{ml})$ $\forall l \in N$. Por lo cual tenemos
$$ES_i(N, A) = \frac{\alpha_i}{2} = \frac{\alpha_j}{2} = ES_j(N, A).$$

- (Aditividad) Sea $i \in N$. Consideramos la matriz $A + A' = (a_{ij} + a'_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$. Entonces tenemos que
$$\begin{aligned} ES_i(N, A + A') &= \frac{\sum_{j \in N \setminus \{i\}}((a_{ij} + a'_{ij}) + (a_{ji} + a'_{ji}))}{2} \\ &= \frac{\sum_{j \in N \setminus \{i\}}(a_{ij} + a_{ji})}{2} + \frac{\sum_{j \in N \setminus \{i\}}(a'_{ij} + a'_{ji})}{2} \\ &= \frac{\alpha_i}{2} + \frac{\alpha'_i}{2} = ES_i(N, A) + ES_i(N, A'). \end{aligned}$$

- (Equipo nulo) Sea $i \in N$. Si un equipo cumple $a_{ij} = a_{ji} = 0 \forall j \in N$, implica que $\alpha_i = 0$ por lo que $ES_i(N, A) = 0$.

Demostramos ahora la implicación contraria. Sean $(N, A) \in \Theta$ y R una regla que cumple los 3 axiomas mencionados. Queremos ver que esta regla R es la regla equal-split.

Consideremos las matrices A^{ij} definidas para cualquier i, j tal que $i \neq j$ con las siguientes entradas:
$$a^{ij}_{kl} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si} \quad (k, l) = (i, j), \\ 0 & \text{si} \quad (k, l) \neq (i, j). \end{cases}$$

Sea $k \in N$. Podemos expresar la matriz A como
$$A = \sum_{i,j \in N : i \neq j} A^{ij},$$
y aplicando la aditividad obtenemos que
$$R_k(N, A) = \sum_{i,j \in N : i \neq j} R_k(N, A^{ij}).$$

Ahora, por equipo nulo, para cada $i, j \in N$ tal que $i \neq j$ y para cualquier $l \in N \setminus \{i, j\}$ se cumple que $R_l(N, A^{ij}) = 0$, por lo que
$$R_k(N, A) = \sum_{l \in N \setminus \{k\}} (R_l(N, A^{lk}) + R_l(N, A^{kl})).$$

Ahora, las matrices A^{kl} y A^{lk} con $l \in N \setminus \{k\}$ cumplen que $||A^{kl}|| = a_{kl}$ y $||A^{lk}|| = a_{lk}$, por lo que aplicando Tratamiento Igualitario obtenemos que
$$R_k(N, A^{kl}) = \frac{a_{kl}}{2} \text{ y } R_k(N, A^{lk}) = \frac{a_{lk}}{2}, \quad \forall l \in N \setminus \{k\}.$$

Aplicando esto último al sumatorio anterior obtenemos que:

$$R_k(N,A) = \sum_{l\in N\setminus\{k\}} \left(\frac{a_{kl}}{2} + \frac{a_{lk}}{2}\right) = \sum_{l\in N\setminus\{k\}} \frac{a_{kl}+a_{lk}}{2} = \frac{\alpha_k}{2} = ES_k(N,A), \quad \forall k \in N.$$

b) Solo demostramos que CD cumple equipo esencial ya que tratamiento igualitario y aditividad son muy similares al apartado anterior. De igual manera, sea R una regla que satisface los 3 axiomas mencionados. Como tanto la regla R como la regla CD cumplen la propiedad de Aditividad será suficiente demostrar que

$$R_k(N,A^{ij}) = CD_k(N,A^{ij}), i,j \in N, i \neq j,$$

donde las matrices A^{ij} son las matrices definidas en el apartado a) anterior. Sean $i,j \in N$ tal que $i \neq j$. Separamos la demostración en dos casos:

- Si $k \in \{i,j\}$, por Equipo Esencial tenemos que:

$$R_k(N,A^{ij}) = a_{ij} = CD_k(N,A^{ij}).$$

- Sean $k,l \in N \setminus \{i,j\}$. Por Tratamiento igualitario se cumple que $R_k(N,A^{ij}) = R_l(N,A^{ij}) = x$. Entonces,

$$a_{ij} = ||A^{ij}|| = \sum_{k\in N} R_k(N,A^{ij}) = 2a_{ij} + (n-2)x,$$

de lo que se deduce que

$$x = \frac{-a_{ij}}{n-2} = CD_k(N,A^{ij}), \quad \forall k \in N \setminus \{i,j\}.$$

□

Este teorema nos indica que ES y CD están caracterizados por dos axiomas comunes (equal treatment of equals y aditividad) y un tercer axioma diferente en cada caso (equipo nulo en el caso de ES y equipo esencial en el caso de CD). Como indica la siguiente proposición, ambos axiomas son incompatibles.

Proposición 2.14. *No existe ninguna regla R que cumpla equipo nulo y equipo esencial.*

Demostración. Sea $(N,A) \in \Theta_{3\times 3}$ el problema de retransmisión de orden 3 tal que $a_{12} > 0$ y $a_{ij} = 0$ para cualquier par $(i,j) \neq (1,2)$.

Si R satisface equipo nulo, se debe cumplir que $R_3(N,A) = 0$.

Supongamos que R también satisface equipo esencial. Entonces $R_1(N,A) = R_2(N,A) = a_{12}$. Como se debe cumplir que $\sum_{i=1}^{3} = ||A|| = a_{12}$. tenemos que $R_3(N,A) = -a_{12}$, lo que es una contradicción. □

Un estudio adicional sobre axiomas que se pueden usar se encuentra en Bergantiños y Moreno-Ternero (2021) [3].

Capítulo 3

Análisis de las reglas equal-split y concede-and-divide

En este capítulo veremos más propiedades de la reglas mencionadas, para buscar sus relaciones con la teoría de juegos cooperativos. Posteriormente veremos qué relación tienen con el reparto si se detectan recursos adicionales. Seguimos el análisis de Bergantiños y Moreno-Ternero (2020a, 2020b, 2021) [1] [2] [3].

3.1. El efecto fan

Antes de empezar a estudiar los problemas de retransmisión y su relación con las reglas equal-split y concede-and-divide, nos detenemos un momento a entender como estas dos reglas interpretan el efecto de los fans en la audiencia de los partidos. Sea (N, A) un problema de retransmisión y sea $a_{ij} > 0$, para ciertos $i, j \in N$ tal que $i \neq j$. Podemos agrupar a cada espectador del partido entre i y j en uno de los siguientes grupos en función de porque ve el partido:

1. Ve el partido porqué es un fan del deporte en sí, independientemente de los equipos.
2. Ve el partido porqué es fan del equipo i.
3. Ve el partido porqué es fan del equipo j.
4. Ve el partido porqué considera interesante el partido entre i y j.

Dado este reparto de los espectadores (cuyo número exacto desconocemos), lo natural por como están definidos los grupos, sería dividir los ingresos generados por la audiencia de los grupos 1 y 4 a medias. En cambio repartimos los ingresos generados por los espectadores del grupo 2 íntegramente para el equipo i, y análogamente para el grupo 3 y el equipo j. El problema que se nos presenta a la práctica es que solo conocemos la audiencia del partido y no el motivo por el que ven el partido los espectadores.

Consideremos ahora el problema de retransmisión definido en el Ejemplo 2.3 y los 3 escenarios siguientes:

- Escenario a): No hay ningún espectador que pertenezca al grupo 4. En este escenario no hay fans de equipos. De esta manera es natural dividir la audiencia de cada partido a medias obteniendo así el reparto $(2230, 1430, 1260)$. Este reparto coincide con la regla *equal-split*.

- Escenario b): El equipo 1 tiene 1000 fans el equipo 2 tiene 200 fans y el equipo 3 tiene 30. De esta manera es natural repartir a cada equipo la audiencia generada por sus fans, lo que nos lleva al siguiente reparto $(4000, 800, 120)$. Este reparto coincide con la regla *concede-and-divide*.
- Escenario c): El equipo 1 tiene 800 fans, el equipo 2 tiene 100 fans y el equipo 3 tiene 30 fans. Aplicando el mismo procedimiento que en los escenarios anteriores obtenemos el reparto $(3700, 800, 420)$.

Vemos que el reparto sugerido en el escenario c) queda entre acotado por los repartos de los escenarios a) y b). Esto se debe a que las reglas *equal-split* y *concede-and-divide* tienen maneras completamente opuestas de entender el efecto fan.

La regla ES supone que no hay fans, por lo cual, es justo repartir la audiencia de cada partido a medias. La regla CD en cambio estima justo lo contrario, es decir, supone que el número de fans es máximo (maximiza el número de fans suponiendo que el número de espectadores del grupo 4 es mínimo). Como veremos más adelante esto es precisamente lo que sugiere la regla *concede-and-divide*.

3.2. Análisis desde la teoría de juegos

La primera forma en la que podemos estudiar un problema de retransmisión es desde el punto de vista de los juegos cooperativos. Para hacerlo asociaremos a cada problema de retransmisión un juego cooperativo de utilidad transferible y del cual estudiaremos las propiedades.

Sea (N, A) un problema de retransmisión. Queremos encontrar una manera de asociar un juego (N_A, v_A) al problema de retransmisión (N, A).

En primer lugar es lógico definir $N_A := N$, es decir que el conjunto de jugadores del juego TU asociado a (N, A) sea el conjunto de equipos del problema de retransmisión.

Por último falta definir la función característica v_A a partir de la información de la matriz A. Para ello consideremos una coalición $S \subseteq N = N_A$ de cardinalidad s. En principio, los equipos de la liga pertenecen a ésta porque maximizan sus ingresos, por lo cuál si la coalición $S \subseteq N$ decidiera empezar una competición propia, obtendría en el mejor escenario la audiencia que obtiene en el problema de retransmisión original (N, A). Teniendo esto en cuenta, es natural definir $v_A(S)$, como la audiencia total obtenida por los equipos de la coalición S en el problema de retransmisión (N, A), es decir:

$$v_A(S) = \sum_{i,j \in S, i \neq j} a_{ij}.$$

Una vez justificado cuál debe ser el valor de una coalición, podemos definir formalmente el juego cooperativo TU asociado a un problema de retransmisión:

Definición 3.1. *Sea $(N, A) \in \Theta$ un problema de retransmisión. Definimos el juego cooperativo TU asociado a (N, A) como el juego TU (N_A, v_A) dónde:*

- $N_A = N$.

- υ_A *es la función característica*

$$\begin{array}{rccl} \upsilon_A\colon & \mathcal{P}(N) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & S \subseteq N & \longmapsto & \upsilon_A(S) = \displaystyle\sum_{i,j\in S; i\neq j} a_{ij} = \sum_{i,j\in S; i<j} (a_{ij} + a_{ji}), \end{array}$$

con $\upsilon_A(\emptyset) = 0$.

Por la manera en la que hemos definido el juego asociado (N_A, υ_A) se cumple que $\upsilon_A\{i\} = 0, \ \forall i \in N$.

Antes de seguir presentamos un pequeño ejemplo:

Ejemplo 3.2. Sea $(N, A) \in \Theta$ el problema de retransmisión de orden 3 presentado en el Ejemplo 2.3. Vamos a calcular la función característica del juego TU correspondiente $(N, \upsilon_A) \in \Gamma$ asociado a (N, A).

Las coaliciones de un solo jugador tendrán valor 0, por lo cual $\upsilon_A(\{i\}) = 0$ para cualquier $i \in N$. Las coaliciones de dos jugadores tendrán los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \upsilon(\{1,2\}) &= \sum_{i,j\in\{1,2\}; i\neq j} a_{ij} = 2400, \\ \upsilon(\{1,3\}) &= 2060, \\ \upsilon(\{2,3\}) &= 460. \end{aligned}$$

Para la coalición total, se tiene que $\upsilon_A(N) = ||A|| = 4920$. Si nos fijamos bien, este juego TU es exactamente el mismo juego TU que el juego del Ejemplo 1.13, el cual tiene el siguiente valor de Shapley:

$$Sh(N, \upsilon_A) = (2230, 1430, 1260).$$

Fijándonos en el Ejemplo 2.8 vemos que $ES(N, A) = Sh(N, \upsilon_A)$.

El siguiente teorema demuestra que lo sucedido en el ejemplo no es una casualidad, y que de hecho la regla equal-split de un problema de retransmisión siempre coincide con el valor de Shapley de su juego TU asociado.

Teorema 3.3. *Sea* $(N, A) \in \Theta$. *Entonces* $ES(N, A) = Sh(N, \upsilon_A)$.

Demostración. Sea $(N, A) \in \Theta$ y sea (N, υ_A) su juego TU asociado. Definimos para cada par $i, j \in N$ con $i \neq j$ la función característica υ_A^{ij} de la manera presentada a continuación. Para cualquier $S \subseteq N$,

$$\upsilon_A^{ij}(S) = \begin{cases} a_{ij} + a_{ji} & \text{si} \quad \{i,j\} \subseteq S, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Consideramos el juego (N, υ_A^{ij}). Es trivial ver que en este juego los jugadores i y j son simétricos por lo que según las propiedades del valor de Shapley deben recibir el mismo pago. Por otro lado los demás jugadores que pertenecen a $N \setminus \{i, j\}$ son nulos por lo que su pago por el valor de Shapley es 0. Teniendo esto en cuenta podemos calcular el valor de Shapley para el juego (N, v_A^{ij}) de la siguiente manera:

$$Sh_k(N, v_A^{ij}) = \begin{cases} \dfrac{a_{ij} + a_{ji}}{2}, & \text{si} \quad k \in \{i, j\}, \\ \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ahora, para cualquier $S \subseteq N$, tenemos

$$v_A(S) = \sum_{i,j \in S, i<j} (a_{ij} + a_{ji}) = \sum_{i,j \in S, i<j} v_A^{ij}(S).$$

Como el valor de Shapley es aditivo, se cumple que:

$$Sh(N, v_A) = \sum_{i,j \in S, i<j} Sh(N, v_A^{ij}).$$

En definitiva, para cualquier $k \in N$,

$$\begin{aligned} Sh_k(N, v_A) &= \sum_{i,j \in N, i<j} Sh_k(N, v_A^{ij}) \\ &= \sum_{j \in N} Sh_k(N, v_A^{kj}) = \\ &= \sum_{j \in N} \frac{a_{kj} + a_{jk}}{2} = \frac{\alpha_k}{2} = ES_k(N, A). \end{aligned}$$

□

Este último resultado es natural por los axiomas que caracterizan el valor de Shapley y la regla ES. Ambas axiomáticas son muy similares.

Para finalizar esta sección presentamos un resultado que caracteriza el *core* de un juego TU asociado a un problema de retransmisión. Es fácil ver que este juego es un juego convexo, y para los juegos convexos, el core viene dado por la envoltura convexa de los vectores de contribuciones marginales (Shapley, 1971) [12].

Proposición 3.4. *Sean $(N, A) \in \Theta$ un problema de retransmisión y (N, v_A) su juego TU asociado. Entonces $x = (x_i)_{i \in N} \in Core(N, v_A)$ si y solo si, para todo $i \in N$, existe $(x_i^j)_{j \in N \setminus \{i\}}$ satisfaciendo las siguientes 3 condiciones:*

1. $x_i^j \geq 0, \quad \forall j \in N \setminus \{i\}$,
2. $\sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_i^j = x_i$,
3. $x_i^j + x_j^i = a_{ij} + a_{ji}, \quad \forall j \in N \setminus \{i\}$.

Demostración. Veamos primero que si $x = (x_i)_{i \in N}$ cumple las tres condiciones del enunciado, entonces $x \in Core(N, v_A)$. Usando la condición 2 de la proposición,

$$\sum_{i \in N} x_i = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_i^j = \sum_{i,j \in N; i<j} (x_i^j + x_j^i).$$

Por la condición 3. se cumple

$$\sum_{i,j\in N; i<j} (x_i^j + x_j^i) = \sum_{i,j\in N; i<j} (a_{ij} + a_{ji}) = \upsilon_A(N).$$

Ahora combinando los dos resultados anteriores se tiene que:

$$\sum_{i\in N} x_i = \upsilon_A(N),$$

por lo que se cumple el principio de eficiencia.

Veamos ahora que se cumple el principio de racionalidad coalicional, es decir, que $\sum_{i\in S} x_i \geq \upsilon_A(S), \forall S \subseteq N$. Sea $S \subseteq N$,

$$\sum_{i\in S} x_i = \sum_{i\in S} \sum_{j\in N\setminus\{i\}} x_i^j = \sum_{i\in S} \sum_{j\in S\setminus\{i\}} x_i^j =$$
$$\sum_{i,j\in S; i<j} (x_i^j + x_j^i) = \sum_{i,j\in S; i<j} (a_{ij} + a_{ji}) = \upsilon_A(S).$$

Por lo tanto $x = (x_i)_{i\in N} \in Core(N, \upsilon_A)$.

Veamos ahora la implicación contraria, es decir, que si $x = (x_i)_{i\in N} \in Core(N, \upsilon_A)$ entonces debe cumplir las tres condiciones mencionadas en el enunciado. Dado que el juego es convexo, todo punto del core se puede expresar como combinación convexa de los vectores de contribuciones marginales para los diferentes permutaciones de los jugadores. Existen, por tanto, coeficientes $(y_\pi)_{\pi\in\Pi_N}$ tales que $y_\pi \geq 0$ para todo $\pi \in \Pi_N$ y $\sum_{\pi\in\Pi_N} y_\pi = 1$, y que cumplen que

$$x_i = \sum_{\pi\in\Pi_N} y_\pi \left[\upsilon_A(Pre(i,\pi) \cup \{i\}) - \upsilon_A(Pre(i,\pi))\right].$$

Si ahora usamos la definición del juego (N, υ_A) podemos escribir:

$$x_i = \sum_{\pi\in\Pi_N} y_\pi \left[\sum_{j\in Pre(i,\pi)} a_{ij} + a_{ji}\right] = \sum_{j\in N\setminus\{i\}} (a_{ij} + a_{ji}) \sum_{\pi\in\Pi_N, j\in Pre(i,\pi)} y_\pi. \tag{3.1}$$

Podemos ahora definir, para cada par $i, j \in N$ con $i \neq j$

$$x_i^j = (a_{ij} + a_{ji}) \sum_{\pi\in\Pi_N, j\in Pre(i,\pi)} y_\pi.$$

Es inmediato que se cumplen las condiciones 1. y 2. del enunciado, puesto que se trata de sumas positivas, y la ecuación (3.1).

Por último, si $i, j \in N$ con $i \neq j$ tenemos

$$\begin{aligned} x_i^j + x_j^i &= (a_{ij} + a_{ji}) \sum_{\pi\in\Pi_N, j\in Pre(i,\pi)} y_\pi \\ &+ (a_{ij} + a_{ji}) \sum_{\pi\in\Pi_N, i\in Pre(j,\pi)} y_\pi \\ &= (a_{ij} + a_{ji}) \sum_{\pi\in\Pi_N} y_\pi = a_{ij} + a_{ji}. \end{aligned}$$

Con lo que la prueba está completa. □

Esta proposición nos dice que la única condición necesaria para que una solución pertenezca al *core* es que divida la audiencia de cada partido entre los equipos que lo juegan. Se trata de un juego convexo que es equivalente formalmente a los juegos cooperativos TFTS (Terrestrial Flight Telephone System) introducidos por van den Nouweland et al. (1996) [8].

3.3. Análisis desde los problemas de bancarrota

En esta sección vamos a estudiar los problemas de retransmisión desde el punto de vista de los problemas de bancarrota, concretamente desde el modelo introducido por Barry O'Neill en 1982 (O'Neill, 1982 [9]). Un estudio completo sobre los problemas de bancarrota, sus reglas, y la axiomática se puede hallar en el libro de Thomson (2019) [13].

Este modelo estudia como repartir un bien E entre un grupo de n reclamantes con el problema que la cantidad que exigen los reclamantes es superior a la cantidad disponible del bien E. El conjunto de reclamantes viene dado por el conjunto N y las demandas (*claims*) vienen dados por un vector $c \in \mathbb{R}^N_+$. Los problemas de este tipo se denominan problemas de bancarrota o de *conflicting claims*. Formalmente:

Definición 3.5. *Un* problema de bancarrota *de orden n es un conjunto ordenado* (N, c, E) *donde* $N = \{1, \ldots, n\}$, $c \in \mathbb{R}^n_+$ *y* $E \in \mathbb{R}_+$ *tal que* $\sum_{i=1}^n c_i \geq E$.

Imponemos que $\sum_{i=1}^n c_i \geq E$ ya que en caso contrario podríamos asignar a cada reclamante la cantidad que pide. Definimos C como la suma de las peticiones de todos los reclamantes:

$$C := \sum_{i=1}^n c_i.$$

Denotamos por Φ_n el conjunto de todos los problemas de *conflicting claims* de orden n, es decir:

$$\Phi_n = \left\{(N, c, E) : N = \{1, \ldots, n\}, c \in \mathbb{R}^n_+, E \in \mathbb{R}_+, C \geq E\right\}.$$

Una vez la definición de problema de *conflicting claims*, nuestro siguiente objetivo es estudiar la manera de repartir el bien E entre los reclamantes. Para ello introducimos el concepto de asignación.

Definición 3.6. *Dado* $(N, c, E) \in \Phi_n$, *una* asignación *de orden n es un vector* $x \in \mathbb{R}^n_+$ *tal que*

1. $0 \leq x_i \leq c_i, \quad \forall i \in N$ *y*
2. $\sum_{i=1}^n x_i = E$.

Por un lado, al imponer que $0 \leq x_i \leq c_i$ para cualquier $i \in N$ conseguimos que al realizar una asignación ningún reclamante obtenga una cantidad negativa ni una cantidad superior de la que demanda. Por otro lado, imponer que $\sum_{i=1}^n x_i = E$ es una cuestión de eficiencia ya que queremos que E sea repartido íntegramente.

Notamos por Ψ_n el conjunto de todas las asignaciones de orden n:

$$\Psi_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ : 0 \leq x_i \leq c_i \quad \forall i \in N, \quad \sum_{i=1}^n x_i = E \right\}.$$

A partir de ahora con el objetivo de aligerar la notación, nos referiremos a un problema de *conflicting claims* de orden n simplemtente como problema de *conflicting claims*. También usaremos Φ en lugar de Φ_n y Ψ en lugar de Ψ_n a no ser que no explicitar el orden genere confusión.

Reglas de asignación

Nuestro siguiente cometido es estudiar las reglas de asignación. Éstas nos asocian a cada problema de conflicting claims una asignación.

Definición 3.7. *Una regla de asignación es una aplicación S*

$$\begin{array}{rccl} S\colon & \Phi & \longrightarrow & \Psi \\ & (N,c,E) & \longmapsto & S(N,c,E) = (S_1(N,c,E), S_2(N,c,E), \ldots, S_n(N,c,E)). \end{array}$$

Hemos usado S en lugar de R para evitar una posible confusión con las reglas de reparto. Llamaremos a partir de ahora a las reglas de asignación simplemente como reglas excepto cuando haya posibilidad de confundirlas con las reglas de reparto.

Introducimos las dos principales reglas de asignación de que vamos a estudiar en este apartado (la regla proporcional y la regla de Talmud) planteando el siguiente problema:

Problema de la tela disputada. Supongamos que queremos repartir un bien E con un valor de $E = 1.$ entre dos reclamantes. El reclamante 1 pide una cantidad de $c_1 = 1$ mientras que el reclamante 2 pide $c_2 = \frac{1}{2}$. Hay muchas maneras de repartir E pero a continuación presentamos dos, que son las que suelen explicitarse en la literatura:

- En primer lugar, una manera de repartir E es proporcionalmente a las demandas de los reclamantes. Como el reclamante 1 exige una cantidad el doble de grande que el reclamante 2, sería justo que el reclamante 1 recibiera una cantidad el doble de grande que la cantidad repartidad al reclamante 2. Aplicando además que el reparto debe ser eficiente, obtenemos según esta lógica que el reclamante 1 recibe una cantidad de $\frac{2}{3}$ mientras que el reclamante 2 recibe una cantidad de $\frac{1}{3}$. Este es el reparto sugerido por la regla proporcional para el caso de 2 reclamantes.
- Otra manera de enfocar este problema es pensar que el reclamante 2 renuncia por su propia voluntad a una cantidad de $\dfrac{1}{2}$ por lo que se entrega esa misma cantidad de $\frac{1}{2}$ al reclamante 1 ya que no se encuentra en disputa. Los otros $\frac{1}{2}$ a entregar se reparte a partes iguales entre los dos reclamantes. Por lo que esta lógica sugiere un reparto de $\frac{3}{4}$ para el reclamante 1 y un reparto de $\frac{1}{4}$ para el reclamante 2. Este es el reparto sugerido por la regla de Talmud.

Una vez introducido el funcionamiento de las regla proporcional y la regla de Talmud para el caso de 2 reclamantes, procedemos a definir formalmente éstas para un problema de bancarrota de orden cualquiera.

Empezamos con la regla proporcional.

Definición 3.8. *Sea (N,c,E) un problema de bancarrota. La regla proporcional es la regla de asignación denotada por P y definida por*

$$P_i(N,c,E) = \frac{E}{C} \cdot c_i, \quad \forall i \in N.$$

Claramente se cumple que $P_i(N,c,E) \in \mathbb{R}$ para cualquier $i \in N$. Se cumple que

$$0 \leq P_i(N,c,E) \leq c_i,$$

ya que por un lado todos los elementos de la fracción $\frac{E}{C}c_i$ son positivos y por otro lado $P_i(N,c,E) = \frac{E}{C} \cdot c_i \leq c_i$ porque $C \geq E$. También se cumple que

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(N,c,E) = E,$$

ya que $\sum_{i=1}^{n} P_i(N,c,E) = \sum_{i=1}^{n} \frac{E}{C} \cdot c_i = \frac{E}{C} \sum_{i=1}^{n} c_i = \frac{E}{C}C = E.$

Definimos ahora la regla de Talmud para un problema de bancarrota cualquiera. Esta regla funciona de forma igualitaria en ganancias para valores pequeños de E y de forma igualitaria en pérdidas para los valores grandes de E.

Definición 3.9. *Sea (N,c,E) un problema de bancarrota. La* regla de Talmud *es la regla de asignación denotada por T y definida por*

$$T_i(N,c,E) = \begin{cases} \text{mín}\{\frac{c_i}{2}, \lambda\} & si \quad E \leq \frac{C}{2}, \\ \\ \text{máx}\{\frac{c_i}{2}, c_i - \mu\} & si \quad E \geq \frac{C}{2}, \end{cases}$$

donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ son escogidos de manera que se cumple $\sum_{i \in N} T_i(N,c,E) = E$.

Para interpretar la regla de Talmud para n reclamantes debemos separar en dos casos:

- Si $E \leq \frac{C}{2}$, se reparte E de manera que nadie gane más de la mitad de su demanda.
- Si $E \geq \frac{C}{2}$, se reparte E de manera que nadie pierda más de la mitad de su demanda.

Problema de bancarrota asociado a un problema de retransmisión

Una vez ya hemos estudiado el concepto de problema de bancarrota así como las herramientas para poder llevar a cabo su estudio, nuestro objetivo es asignar a cada problema de retransmisión un problema de bancarrota.

Para ello empleamos la siguiente definición:

Definición 3.10. *Sea $(N,A) \in \Theta$ un problema de retransmisión. Definimos el* problema de bancarrota asociado *al problema (N,A) como el problema $(N,c^A,E^A) \in \Phi$ tal que:*

- $c_i^A = \alpha_i, \quad \forall i \in N,$
- $E^A = ||A||.$

Esta manera de definir un problema de bancarrota asociado a un problema de retransmisión resulta natural, ya que un problema de retransmisión puede ser considerado un problema en el que n equipos se reparten el bien $||A||$ y cada equipo reclama su audiencia generada.

Ejemplo 3.11. Sea $(N, A) \in \Theta$ el problema de retransmisión del Ejemplo 2.3. Su problema de bancarrota asociado es el problema (N, c^A, E^A), donde $c^A = (4460, 2860, 2520)$ y $E^A = 4920$.

Calculamos a continuación la regla proporcional:

$$P(N, c^A, E^A) = \frac{E}{C^A} \cdot c^A = \frac{4920}{4460 + 2860 + 2520} \cdot (4460, 2860, 2520) = (2230, 1430, 1260).$$

Para la regla de Talmud también se cumple que:

$$T(N, c^A, E^A) = (2230, 1430, 1260).$$

Es más, no solo coinciden la regla de Talmud y la regla proporcional entre ellas sino que ambas también coinciden con la regla equal-split del problema (N, A).

Como demuestra el siguiente teorema, los resultados obtenidos en el ejemplo anterior no son casualidad, porque siempre se produce la anterior coincidencia.

Teorema 3.12. *Sea $(N, A) \in \Theta$ un problema de retransmisión y (N, c^A, E^A) su problema de bancarrota asociado. Entonces se cumple,*

$$P_i(N, c^A, E^A) = T_i(N, c^A, E^A) = ES_i(N, A), \quad \forall i \in N.$$

La demostración del teorema anterior se puede hallar en el artículo de Bergantiños y Moreno-Ternero (2020a) [1].

3.4. Análisis estadístico

Estudiamos ahora los problemas de retransmisión desde un enfoque basado en la estimación estadística. Sea $(N, A) \in \Theta$ un problema de retransmisión. Para cada par $i, j \in N$ tal que $i \neq j$, podemos escribir:

$$a_{ij} = b_0 + b_i + b_j + \varepsilon_{ij},$$

dónde:

- b_0 es el número de fans del deporte en sí (y que ven todos los partidos sea quien sea quien juegue).
- b_i es el número de fans del equipo i.
- b_j es el número de fans del equipo j.
- ε_{ij} es el número de espectadores que ven el partido (i, j) porque consideran que es interesante.

Nuestro objetivo es minimizar $\{\varepsilon_{ij}\}_{i,j\in N}$, dado que conocemos el valor de a_{ij} para cualquier $i,j \in N$. Definimos el vector $b = (b_0, b_1, \ldots b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ Por ello nuestro objetivo es resolver

$$\min_{b\in\mathbb{R}^{n+1}} \sum_{i,j\in N; i\neq j} \varepsilon_{ij}^2 = \min_{b\in\mathbb{R}^{n+1}} \sum_{i,j\in N; i\neq j} (a_{ij} - b_0 - b_i - b_j)^2. \tag{3.2}$$

Este problema de minimización definido por (3.2) coincide con el problema de minimización por estimación MCO (Mínimos cuadrados ordinarios) del siguiente modelo de regresión:

$$Y = b_0 + \sum_{i\in N} b_i X_i + \varepsilon,$$

dónde:

- Y es la audiencia de un partido.
- X_i es la variable que toma el valor 1 si el equipo i juega el partido y valor 0 si no lo juega.
- ε es el término de error.

Sin embargo, manipulando la fórmula anterior obtenemos que:

$$X_k = 2_A - \sum_{i\in N\setminus\{k\}} X_i,$$

donde 2_A es un vector formado por todas sus componentes igual a 2, por lo que la regresión lineal presenta un problema de multicolinealidad y no podemos calcular el estimador MCO.

Para solucionar este problema eliminamos un equipo $k \in N$ y consideramos el siguiente problema de minimización:

$$\min_{b\in\mathbb{R}^n} \sum {\varepsilon'}_{ij}^2,$$

donde

$$\varepsilon'_{ij} = \begin{cases} a_{ij} - b_0 - b_i - b_j & \text{si} \quad k \notin \{i,j\}, \\ a_{ij} - b_0 - b_i & \text{si} \quad k = j, \\ a_{ij} - b_0 - b_i & \text{si} \quad k = i. \end{cases}$$

Denotamos por $\widehat{b_0}$ y $\{\widehat{b_i}\}_{i\in N\setminus\{k\}}$, las soluciones de este problema de minimización.

Finalmente para cada par $i,j \in N$ tal que $i \neq j$ denotamos por

$$\widehat{\varepsilon'_{ij}} = \begin{cases} a_{ij} - \widehat{b_0} - \widehat{b_i} - \widehat{b_j} & \text{si} \quad k \notin \{i,j\}, \\ a_{ij} - \widehat{b_0} - \widehat{b_i} & \text{si} \quad k = j, \\ a_{ij} - \widehat{b_0} - \widehat{b_i} & \text{si} \quad k = i. \end{cases}$$

Ahora repartimos a_{ij} entre los equipos siguiendo los siguientes parámetros:

1. $\widehat{b_0}$ se reparte equitativamente entre todos los equipos.
2. $\widehat{b_l}$ se reparte íntegramente al equipo l para $l \in N \setminus \{k\}$.

3. $\widehat{\varepsilon'_{ij}}$ se divide equitativamente entre los equipos i, j para $i, j \in N$ tal que $i \neq j$.

Aplicando esto a todos los coeficientes de la matriz A del problema de retransmisión, obtenemos una regla, la cual denotamos por $R^{b,k}$, definida de la siguiente manera:

$$R_i^{b,k}(N,A) = \begin{cases} (n-1)\widehat{b_0} + 2(n-1)\widehat{b_i} + \sum\limits_{j \in N \setminus \{i\}} \dfrac{\widehat{\varepsilon'_{ij}} + \widehat{\varepsilon'_{ji}}}{2}, & \text{si} \quad i \neq k, \\ (n-1)\widehat{b_0} + \sum\limits_{j \in N \setminus \{i\}} \dfrac{\widehat{\varepsilon'_{ij}} + \widehat{\varepsilon'_{ji}}}{2}, & \text{si} \quad i = k. \end{cases}$$

Aunque se podría pensar que la regla anterior depende de la elección del equipo $k \in N$, el siguiente teorema demuestra que la regla $R^{b,k}$ no solo no depende de la elección de k sino que además coincide con la regla concede-and-divide.

Teorema 3.13. *Sea $(N, A) \in \Theta$ un problema de retransmisión y sean $i, k \in N$.La regla concede-and-divide coincide con la regla $R^{b,k}$, es decir*

$$CD_i(N,A) = R_i^{b,k}(N,A), \quad \forall i \in N.$$

El lector puede encontrar una demostración del mismo en la página 13 de [1].

Este teorema nos muestra que la regla concede-and-divide es el resultado de aplicar el procedimiento visto en este apartado. Esta idea ya fue introducida en el apartado efecto fan, donde estudiamos como interpreta la regla CD la inferencia de los aficionados sobre las audiencias de los partidos.

En general, la regla concede-and-divide otorga valores positivos, aunque existen casos dónde la regla puede sugerir repartos negativos para ciertos equipos. Aunque a primera vista el que la regla pueda asignar valores negativos suene como un aspecto en contra de la regla concede-and-divide, lo cierto es que este hecho no va en contra de la intuición.

Consideremos, por ejemplo, un problema de retransmisión $(N, A) \in \Theta$ con $n = 3$. De los 3 equipos del problema supongamos que los equipos 1 y 2 atraen a 1000 espectadores cada uno por partido. El equipo 3, no solo no tiene ningún espectador en sus partidos, sino que además provoca que cualquier partido en el que esté involucrado el equipo 3 no tenga audiencia. La matriz asociada a este problema tiene las siguientes entradas:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2000 & \text{si} \quad (i,j) \in \{(1,2),(2,1)\}, \\ 0 & \qquad\qquad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En este problema la regla concede-and-divide sugiere el siguiente reparto:

$$CD_i(N,A) = (4000, 4000, -4000).$$

Es natural que el equipo 3 acarree las pérdidas ya que no solo no aporta espectadores, sino que provoca pérdidas de audiencia en cualquier partido en el que juega.

Capítulo 4

Reparto axiomático de beneficios extraordinarios

En esta último capítulo del trabajo vemos cómo las reglas que hemos estudiado resuelven el problema de repartir beneficios extraordinarios. Para ello necesitamos una parte axiomática, en la estela de los capítulos anteriores.

4.1. Axiomas sobre reparto de beneficios extraordinarios

En primer lugar vamos a exponer algunos axiomas para tratar el hecho de que haya más espectadores de los que se han considerado inicialmente. Estos axiomas sirven para ordenar las reglas que se utilizan.

Axioma 4.1 (**Beneficio igualitario de espectadores adicionales, EBAV.** *Equal benefit from additional viewers*). *Para cualesquiera* $(N, A), (N, A') \in \Theta$ *tales que* $a_{ij} = a'_{ij} \quad \forall i, j \notin \{i_0, j_0\}$ *y* $a_{i_0,j_0} \leq a'_{i_0,j_0}$ *se cumple que*

$$\begin{aligned} R_{i_0}(A') - R_{i_0}(A) &= R_{j_0}(A') - R_{j_0}(A), \quad y \\ R_i(A') - R_i(A) &= R_j(A') - R_j(A) \quad \forall i, j \notin \{i_0, j_0\}. \end{aligned}$$

Designamos por EBAV a este axioma. EBAV nos indica que todos los equipos que reciben beneficios extra deben recibir el mismo aumento de beneficios y los equipos que no reciben beneficios extra también deben recibir un aumento igual en los beneficios.

Ahora, supongamos el caso en que cierto equipo $i \in N$ es el único equipo que hace que que la audiencia aumente, es decir que solo los partidos en los que participa aumentan en audiencia. ¿Cómo deberíamos repartir en este caso los beneficios extra? A continuación presentamos 3 axiomas que nos ayudan a resolver esta cuestión desde diferentes perspectivas:

Axioma 4.2 (**Reparto igualitario de espectadores adicionales, ESAV.** *Equal sharing of additional team viewers*). *Para cualesquiera* $(N, A), (N, A') \in \Theta$ *tales que* $a_{ij} \leq a'_{ij}, a_{ji} \leq a'_{ji} \quad \forall j \in N \setminus \{i\}$ *y* $a_{jk} = a'_{jk} \quad \forall j, k \in N \setminus \{i\}$, *se cumple*

$$R_l(A^{'}) - R_l(A) = c \quad \forall l \in N,$$

donde $c \in \mathbb{R}$.

El axioma previo reparte el beneficio extra entre todos los equipos. En cambio el siguiente solamente lo hace hasta la mitad.

Axioma 4.3 (**Reparto a medias de espectadores adicionales, HSAV** *Half sharing of additional team viewers*)**.** *Para cualesquiera* $(N, A), (N, A') \in \Theta$ *tal que* $a_{ij} \leq a'_{ij}, a_{ji} \leq a'_{ji} \forall j \in N \setminus \{i\}$ *y* $a_{jk} = a'_{jk} \forall j, k \in N \setminus \{i\}$*, se cumple*

$$R_i(A') - R_i(A) = \sum_{l \in N \setminus \{i\}} (R_l(A') - R_l(A))$$

Por último, este axioma implica el máximo individualismo.

Axioma 4.4 (**No reparto de espectadores adicionales, NSAV** *No sharing of additional team viewers*)**.** *Para cualesquiera* $(N, A), (N, A^{'}) \in \Theta$ *tal que* $a_{ij} \leq a^{'}_{ij}, a_{ji} \leq a^{'}_{ji} \forall j \in N \setminus \{i\}$ *y* $a_{jk} = a^{'}_{jk} \forall j, k \in N \setminus \{i\}$*, se cumple*

$$R_i(A^{'}) - R_i(A) = ||A^{'}|| - ||A||$$

Designamos por ESAV, HSAV y NSAV a los anteriores axiomas respectivamente. ESAV propone todos los equipos deben recibir la misma cantidad de ingresos extra independientemente de que equipo sea el causante del incremento de visitas. HSAV en cambio sugiere que la cantidad de beneficios extras que recibe el equipo i es igual a la suma de beneficios extra que reciben los demás equipos. Por último NSAV propone que los beneficios extras se repartan íntegramente al equipo i.

En último lugar presentamos una pareja de axiomas que será necesaria más adelante:

Axioma 4.5 (**Monotonía**)**.** *Una regla* R *cumple la propiedad de Monotonía si dados* $(N, A), (N, A') \in \Theta$ *cualesquiera tales que* $||A|| \leq ||A'||$ *entonces*

$$R_i(N, A) \leq R_i(N, A'), \quad \forall i \in N.$$

Una consecuencia que una regla cumpla la propiedad de *Monotonía* es que esta regla será igual para matrices de retransmisión con la misma audiencia total:

Proposición 4.6. *Sea* R *una regla y* $A, A' \in \Omega$ *dos matrices de audiencias. Si* R *cumple Monotonía y* $||A|| = ||A'||$ *entonces* $R(A) = R(A')$.

Demostración. Sean R una regla y A, A' matrices de audiencia que cumplen las condiciones del enunciado. Como $||A|| = ||A'||$, se cumple que $||A|| \geq ||A'||$ y $||A'|| \geq ||A^{|}|$. Aplicando *Monotonía* a ambos casos se cumple simultáneamente que $R(A) \geq R(A^{'})$ y que $R(^{'}) \geq R(A)$, por lo tanto $R(A) = R(A^{'})$. □

El siguiente axioma implica que no se puede recibir cantidades negativas.

Axioma 4.7 (**No negatividad**)**.** *Una regla* R *cumple la propiedad de No negatividad si para cualquier* $(N, A) \in \Theta$ *se cumple que*

$$R_i(N, A) \geq 0, \quad \forall i \in N.$$

4.2. Caracterización con tratamiento igualitario

Teorema 4.8. *Sea R una regla. R cumple ETE y ESAV si, y solo si, es la regla U.*

Demostración. Es evidente que la regla uniforme cumple ETE y ESAV.

Demostramos la otra implicación. Sea R una regla que cumple ETE y ESAV. Definimos para $i = 1, \ldots, n-1$ la matriz A^i con las siguientes entradas:

$$a^i_{jk} = \begin{cases} a_{jk} & \text{si} \quad min\{j,k\} \leq i, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Esta matriz, obtenida a partir de la matriz A, solo considera las audiencias de los equipos $\{1, \ldots, i\}$. Por definición, $A^{n-1} = A$ ya que $a_{nn} = 0$. Definimos A^0 como la matriz nula de orden n. Por ETE, $R_j(A^0) = 0 \quad \forall j \in N$.

Sea $i \in N \setminus \{n\}$. Tenemos que A^{i-1} y A^i cumplen las hipótesis para aplicar ESAV, por lo que para cualquier $j \in N$ se cumple que:

$$R_j(A^i) - R_j(A^{i-1}) = c = \frac{||A^i|| - ||A^{i-1}||}{n}$$

. Por lo tanto, para cualquier $j \in N$ se cumple que:

$$R_j(A) = \sum_{i=0}^{n-1}((R_j(A^i) - R_j(A^{i-1})) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{||A^i|| - ||A^{i-1}||}{n} = \frac{||A^{n-1}||}{n} = \frac{||A||}{n} = U_j(A).$$

□

Demostramos ahora que los axiomas son independientes, es decir que existen reglas que cumplen ETE y no ESAV y viceversa.

Proposición 4.9. *Los axiomas ETE y ESAV son independientes.*

Demostración. Comenzamos con un ejemplo de una regla que cumple ESAV y no cumple ETE. Sea $\kappa := (\kappa_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^n$ un vector de n componentes tal que $\sum_{i \in N} \kappa_i = 0$ y tal que existe $i \in N$ de manera que $\kappa_i > 0$. Introducimos a continuación la regla que denotamos por $R^{ES,\kappa}$ y tiene la siguiente expresión:

$$R^{ES,\kappa}_i(A) := ES_i(A) + \kappa_i, \quad \forall i \in N.$$

Vemos que $R^{ES,\kappa}$ no cumple ETE mediante un contraejemplo. Sea $(\{1,2,3,4\}, A)$ el problema de retransmisión de orden 4 con la siguiente matriz de audiencias:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 100 & 200 \\ 50 & 0 & 100 & 200 \\ 100 & 100 & 0 & 300 \\ 200 & 200 & 300 & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideramos ahora la regla $R^{ES,\kappa}$ con $\kappa = (1, 2, 0, -3)$. Los equipos 1 y 2 cumplen las hipótesis necesarias para aplicar Tratamiento igualitario, sin embargo:

$$R^{ES,\kappa}_1(A) = ES_1(A) + \kappa_1 = \frac{||A||}{n} + 1 = \frac{1900}{4} + 1 = 476,$$

$$R_2^{ES,\kappa}(A) = ES_2(A) + \kappa_2 = \frac{||A||}{n} + 2 = \frac{1900}{4} + 1 = 477.$$

Por lo que la regla $R^{ES,\kappa}$ no cumple Tratamiento igualitario. Sin embargo, si que cumple ESAV (es directo aplicando la definición del axioma).

Por el otro lado es sencillo comprobar que la regla equal-split satisface Tratamiento igualitario pero no ESAV. □

Teorema 4.10. *Sea R una regla. R cumple Tratamiento igualitario y HSAV si, y solo si, es la regla ES.*

Omitimos la prueba, pero se basa en construir reglas como las anteriores.

Lema 4.11. *Los axiomas Tratamiento igualitario y HSAV son independientes.*

Demostración. De manera similar a la Proposición 4.9 definimos la regla $R^{ES,\kappa} := ES(A)+\kappa$ donde κ es un vector igual al de la demostración de la Proposición 4.9. Esta regla cumple HSAV pero no cumple Tratamiento igualitario (para demostrarlo se usa un argumento muy similar al empleado en la Proposición 4.9).

En cambio la regla uniforme cumple Tratamiento igualitario pero no HSAV. □

4.3. Caracterización con Beneficio equitativo de espectadores adicionales

En esta sección vamos a estudiar otras caracteriaciones.

Teorema 4.12. *Sea R una regla. R satisface Monotonía, Beneficio igualitario de espectadores adicionales y No negatividad si, y solo si R es la regla uniforme.*

Demostración. Sea (N, A) un problema. En primer lugar, definimos s como el número de pares de equipos con audiencia positiva de una matriz de retransmisión M cualquiera. Formalmente:

$$s_M = |\{(i, j) \in N \times N \quad \text{tal que} \quad m_{ij} > 0\}|.$$

Ahora Hacemos inducción sobre $s_A = s$:

- Si $s = 0$ entonces $A = 0$ y por *No negatividad* se cumple que $R_i(0) = U_i(0) = 0, \quad \forall i \in N$.
- Sea $s \geq 1$. Vamos a ver que si el resultado es cierto para $s_A = s - 1$ entonces también lo es para $s_A = s$. Sea (i^1, i^2) de manera que $a_{i^1 i^2} > 0$ y sea $i^3 \notin \{i^1, i^2\}$. Consideramos los problemas de retransmisión A^*, A^1 y A^2 definidos de la siguiente manera:

$$a^*_{kk'} = \begin{cases} ||A|| - a_{i^1 i^2} & \text{si} \quad (k, k') = (i^1, i^3), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$a^1_{kk'} = \begin{cases} a_{i^1 i^2} & \text{si} \quad (k, k') = (i^1, i^2), \\ ||A|| - a_{i^1 i^2} & \text{si} \quad (k, k') = (i^1, i^3), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$a^2_{kk'} = \begin{cases} a_{i^1i^2} & \text{si} \quad (k,k') = (i^2,i^3), \\ ||A|| - a_{i^1i^2} & \text{si} \quad (k,k') = (i^1,i^3), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Vemos que las parejas de matrices A^*, A^1 y A^*, A^2 están bajo las hipótesis de *EBAV*, ya que la matriz A^1 y A^* tienen las mismas entradas quitando que $a^1_{i^1i^2} = a_{i^1i^2}$ y $a^*_{i^1i^2} = 0$ (lo mismo sucede con las matrices A^* y A^2 aunque en este caso el coeficiente de la matriz que es diferente es $a_{i^2i^3}$). Aplicando *EBAV* a ambas parejas de matrices,

$$R_k(A^1) - R_k(A^*) = \begin{cases} x^1 & \text{si} \quad k \in \{i^1, i^2\}, \\ y^1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$R_k(A^2) - R_k(A^*) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad k \in \{i^2, i^3\}, \\ y^2 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ahora, aplicando la hipótesis de inducción sobre la matriz A^* ($s_{A^*} = s_A - 1$ obtenemos,

$$R_{i^1}(A^1) = R_{i^1}(A^*) + R_{i^1}(A^1) - R_{i^1}(A^*) = U_{i^1}(A^*) + x^1,$$
$$R_{i^1}(A^2) = R_{i^1}(A^*) + R_{i^1}(A^2) - R_{i^1}(A^*) = U_{i^1}(A^*) + y^2.$$

Ahora por la Proposición 4.6 se cumple que $R(A^1) = R(A^2)$, por tanto $x^1 = y^2$. Repitiendo el mismo proceso con i^3 en lugar de i^1 obtenemos que $x^2 = y^1$ (análogamente empleando i^2 en lugar de i^1 obtenemos que $x^1 = x^2$). En resumen, tenemos que $x^1 = x^2 = y^1 = y^2$. Ahora tenemos que:

$$a_{i^1i^2} = \sum_{k \in N} (R_k(A^1) - R_k(A^*) = 2x^1 + (n-2)y^1 = nx^1,$$

lo que implica que:

$$x^1 = \frac{a_{i^1i^2}}{n}.$$

Por la Proposición 4.6 tenemos que $R_i(A) = R_i(A^1), \quad \forall i \in N$. Entonces,

$$R_i(A) = R_i(A^1) = R_i(A^1) + R_i(A^1) - R_i(A^1) = U_i(A^*) + \frac{a_{i^1i^2}}{n} = U_i(A), \quad \forall i \in N.$$

□

Proposición 4.13. *Los axiomas EBAV, Monotonía y No negatividad son independientes.*

Demostración. En primer lugar la regla $R^{U,\kappa}$ definida en la demostración de la Proposición 4.9 cumple EBAV y Monotonía pero no cumple No negatividad.

La regla equal-split satisface Monotonía pero no EBAV. □

Teorema 4.14. *Sea R una regla. R satisface Beneficio igualitario de espectadores adicionales y Equipo nulo si, y solo si R es la regla equal-split.*

Demostración. Demostremos ahora la implicación contraria. Sea R una regla que cumple *EBAV* y *Equipo nulo.* Queremos ver que R es la regla *equal-split.* Igual que en el caso anterior hacemos inducción el número de pares de equipos con audiencia positiva en la matriz A (denotado por s_A igual que en el Teorema 4.10).

- Si $s_A = 0$ entonces $A = 0$ y, por equipo nulo, $R_i(0) = ES_i(0) = 0, \forall i \in N$.
- Si $s_A = 1$, existe (i^1, j^1) tal que $a_{i^1j^1} > 0$ y $a_{ij} = 0$ en para cualesquiera otros $i, j \in N$. Aplicando $EBAV$ a las matrices A y 0, $R_{i^1}(A) - R_{i^1}(0) = R_{j^1}(A) - R_{j^1}(0)$. Como tenemos que $R_{i^1}(0) = R_{j^1}(0)$ se cumple que $R_{i^1}(0) = R_{j^1}(0)$. Entonces $R_{i^1}(A) = R_{j^1}(A) = \dfrac{a_{i^1j^1}}{2} = ES_{i^1}(A)$. Por lo tanto $R(A) = ES(A)$.
- Sea $s \geq 2$. Supongamos que el teorema se cumple para $s-1$ y vemos que se cumple para s. Sean $(i^1, j^1), (i^1, j^1)$ dos parejas de equipos tales que $a_{i^1j^1}, a_{i^2j^2}$ (podemos garantizar la existencia de estas dos parejas ya que $s \geq 2$). Ahora, dos casos son posibles.

  1. Caso 1: $(i^1, j^1) = (j^2, i^2)$. Sea A' la matriz con los mismos coeficientes que la matriz A a excepción de que $a'_{i^2j^2} = 0$. Por la hipótesis de inducción, $R(A') = ES(A')$. Usando un argumento similar al caso en que $s = 1$ (usando la matriz A' en lugar de la matriz 0) podemos deducir que $R(A) = ES(A)$.
  2. Caso 2:$(i^1, j^1) \neq (j^2, i^2)$. Entonces, existen $i, j \in N$ tal que $i \in \{i^1, j^1\} \setminus \{i^2, j^2\}, i \in \{i^2, j^2\} \setminus \{i^1, j^1\}$ con $i \neq j$. Consideramos los problemas A^{-1}, A^{-2} y A^{-12} definidos de la manera siguiente:

$$a^{-1}_{kk'} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (k, k') = (i^1, j^1), \\ a_{kk'} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$a^{-2}_{kk'} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (k, k') = (i^2, j^2), \\ a_{kk'} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$a^{-12}_{kk'} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (k, k') \in \{(i^1, j^1), (i^2, j^2)\}, \\ a_{kk'} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De manera similar al Teorema 4.10 tenemos podemos aplicar $EBAV$ a las parejas de problemas A, A^{-1} y A, A^{-2} obteniendo lo siguiente:

$$R_k(A) - R_k(A^{-1}) = \begin{cases} x^1 & \text{si} \quad k \in \{i^1, j^1\}, \\ y^1 & \text{si} \quad otrocaso. \end{cases}$$

$$R_k(A) - R_k(A^{-2}) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad k \in \{i^2, i^n\}, \\ y^2 & \text{si} \quad otrocaso. \end{cases}$$

Ahora, aplicando la hipótesis de inducción y $ESAV$ obtenemos que:

$$R_i(A) - R_i(A^{-12}) = R_i(A) - R_i(A^{-1}) + R_i(A^{-1}) - R_i(A^{-12}) = x^1.$$

$$R_i(A) - R_i(A^{-12}) = R_i(A) - R_i(A^{-2}) + R_i(A^{-2}) - R_i(A^{-12}) = y^2 + \frac{a_{i^1j^1}}{2}.$$

$$R_j(A) - R_j(A^{-12}) = R_j(A) - R_j(A^{-1}) + R_j(A^{-1}) - R_j(A^{-12}) = y^1 + \frac{a_{i^2j^2}}{2}.$$

$$R_j(A) - R_j(A^{-12}) = R_j(A) - R_j(A^{-2}) + R_j(A^{-2}) - R_j(A^{-12}) = x^2.$$

Combinando las ecuaciones anteriores obtenemos las dos siguientes ecuaciones:

$$x^1 - y^2 = \frac{a_{i^1j^1}}{2}, \tag{4.1}$$

$$x^2 - y^1 = \frac{a_{i^2j^2}}{2}. \tag{4.2}$$

Por otro lado, tenemos que se cumple:

$$\sum_{k \in N} (R_k(A) - R_k(A^{-1}) = a_{i^1j^1},$$

$$\sum_{k \in N} (R_k(A) - R_k(A^{-2}) = a_{i^2j^2}.$$

Las dos igualdades anteriores nos conducen a las dos siguientes ecuaciones:

$$2x^1 + (n-2)y^1 = a_{i^1j^1}, \tag{4.3}$$

$$2x^2 + (n-2)y^2 = a_{i^2j^2}. \tag{4.4}$$

Combinando las ecuaciones (4.1), (4.2), (4.3) y (4.4) obtenemos un sistema de ecuaciones con las incógnitas x^1, x^2, y^1 y y^2. No es complicado ver que se trata de un sistema compatible determinado cuya única solución es

$$(x^1, x^2, y^1, y^2) = (\frac{a_{i^1j^1}}{2}, \frac{a_{i^2j^2}}{2}, 0, 0).$$

Teniendo en cuenta la hipótesis de inducción, obtenemos que $R(A^{-1}) = ES(A^{-1})$. Dado $k \in \{i^1, j^1\}$,

$$R_k(A) = R_k(A^{-1}) + R_k(A) - R_k(A^{-1}) = ES_k(A^{-1}) + \frac{a_{i^1j^1}}{2} = ES_k(A).$$

De manera similar se demuestra que $R_k(A) = ES_k(A)$ para $k \in N \setminus \{i^1, j^1\}$.

□

Lema 4.15. *Los axiomas EBAV y Equipo nulo son independientes.*

Teorema 4.16. *Sea R una regla. R satisface Beneficio igualitario de espectadores adicionales y equipo esencial si, y solo si R es la regla concede-and-divide.*

Omitimos la demostración de este teorema ya que es muy similar a la del 4.14. El lector puede encontrar una demostración del teorema en la página 71 de Bergantiños y Moreno-Ternero (2020b) [2].

Lema 4.17. *Los axiomas EBAV y Equipo esencial son independientes.*

Demostración. Por un lado, la regla uniforme satisface EBAV pero no Equipo esencial.

Por el otro lado, sea $(N, A) \in \Theta$ consideramos la regla definida por $CD(A)$ cuando el problema contiene como mínimo un equipo esencial y definida por $ES(A)$ cuando el problema no tiene ningún equipo esencial. Esta regla cumple Equipo esencial pero no EBAV. □

Capítulo 5

Conclusiones

Considero que los objetivos principales del trabajo han sido asumidos, ya que he conseguido profundizar en el modelo de reparto de los ingresos televisivos entre los clubes de fútbol. Me habría gustado estudiar el aspecto práctico del modelo viendo los datos reales de ingresos y audiencias. Sé que no es nada fácil acceder a los datos reales (o realistas) por un problema de malentendido derecho a la privacidad de los datos.

De esta manera podríamos observar algunas inconsistencias en el modelo, o tal vez que el reparto debe considerar otros datos diferentes de los planteados. No olvidemos que aunque los modelos son incompletos o inexactos, sirven para guiar nuestro pensamiento y aportar claridad a los debates.

Bibliografía

[1] Bergantiños, G.; Moreno-Ternero, J. (2020a). Sharing the Revenues from Broadcasting Sports Leagues. Management Science, 66, 2417–2431.

[2] Bergantiños, G.; Moreno-Ternero, J. (2020b). Allocating extra revenues from broadcasting sports leagues. Journal of Mathematical Economics, 90, 65–73.

[3] Bergantiños G.; Moreno-Ternero J. (2021). On the axiomatic approach to sharing the revenues from broadcasting sports leagues. Social Choice and Welfare 58, 321–347.

[4] Bergantiños, G.; Moreno-Ternero, J. (2022). Broadcasting La Liga. Sports Economic Review, forthcoming.

[5] Bergantiños, G.; Moreno-Ternero, J. (2023). Decentralized revenue sharing from broadcasting sports. Public Choice, 194, 27–44.

[6] Curiel, I. (1997). Cooperative game theory and applications. Cooperative games arising from combinatorial optimization problems. Kluwer Academic Publishers, Boston.

[7] González-Díaz, J., García-Jurado, I., Fiestras-Janeiro, M.G. (2010). An introductory course on mathematical game theory. American Mathematical Society / Real Sociedad Matemática Española, Graduate Studies in Mathematics, Volume 115.

[8] van den Nouweland, A. ; P. Borm,P. ; van Golstein Brouwers,W. ; Groot Bruinderink, R. ; Tijs, S. (1996). A Game Theoretic Approach to Problems in Telecommunication. Management Science 42(2), 294–303.

[9] O'Neill, B. (1982). A problem of rights arbitration from the Talmud. Mathematical Social Sciences 2(4), 345–371.

[10] Rafels, C.; Izquierdo, J.M.; Marín-Solano, J.; Martínez de Albéniz, F.J.; Núñez, M.; Ybern, N. (1999). Jocs cooperatius i aplicacions econòmiques. Edicions de la Universitat de Barcelona.

[11] Shapley, L.S. (1953). A value for n-person games. En H. W. Kuhn, & A. W. Tucker (Eds.), Contributions to the Theory of Games (Vol. II, pp. 307-318). Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[12] Shapley, L.S. (1971). Cores of convex games. International Journal of Game Theory, 1(3), 11–26.

[13] Thomson, W. (2019). How to divide when there isn't enough: from Aristotle, the Talmud, and Maimonides to the axiomatics of resource allocation. Econometric Society Monograph. Cambridge University Press, Cambridge.

[14] Von Neumann, John and Oskar Morgenstern (1944). Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.