Universitat de Barcelona

CURS DE TRANSICIÓ

A LES

MATEMÀTIQUES I

Gonzalo Rodríguez

Departament de Matemàtica Econòmica,

Financera i Actuarial

Graus d'ADE i d'Economia

Facultat d'Economia i Empresa

PRÒLEG

L'objectiu d'aquest petit manual és proporcionar a l'estudiant novell dels graus d'ADE (Administració i Direcció d'Empreses) i d'Economia de la UB un resum acurat dels continguts del curs-seminari de transició a l'assignatura de Matemàtiques I. Aquest curs, que no forma part del currículum dels graus, pretén "*homogeneïtzar els coneixements matemàtics dels estudiants fins al nivell necessari per poder afrontar les assignatures dels graus en les quals s'utilitza el potencial de les matemàtiques*". A tal fi, s'ha cregut convenient posar l'èmfasi en dos dels aspectes més importants d'aquest potencial com són les derivades de les funcions d'una variable i els sistemes d'equacions lineals.

El manual contempla dos blocs o apartats. S'ha destinat el primer (Bloc de Càlcul) a desenvolupar la temàtica de les funcions d'una variable posant l'èmfasi en l'aplicació de les derivades al càlcul de màxims i mínims –òptims- de funcions, mentre que el segon (Bloc d'Àlgebra) fa lo propi amb la discussió i resolució de sistemes d'equacions lineals a partir de la teoria elemental de matrius; val a dir que cadascun dels blocs conté una petita llista d'exercicis que demanen ser resolts en el curs-seminari. Així mateix, i al final del document, s'inclou un apèndix amb les representacions gràfiques de les funcions més habituals i una breu exposició del mètode de Gauss de resolució de sistemes. Tanca el manual una ressenya bibliogràfica i un glossari de termes que a ben segur facilitarà la cerca dels conceptes més importants que aquí s'exposen. Finalment, dir que aquest document ha estat arxivat en el Dipòsit Digital de la UB (**http://hdl.handle.net/2445/19883**.), i que el seu contingut, així com les errades que hom hi pugui trobar, són responsabilitat única i exclusiva de l'autor.

ÍNDEX

BLOC I: __Càlcul__

1. FUNCIONS REALS D'UNA VARIABLE REAL

1.1. Funció real d'una variable i domini

Una *funció real d'una variable* (*funció* des d'ara) és una aplicació del tipus:

$$\begin{array}{l} A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{\ f\ } \mathbb{R} \\ x \in A \longrightarrow f(x) = y \in \mathbb{R} \end{array}$$

on $\mathbb{R}$ és el conjunt dels nombres reals (recta real) i $A \subset \mathbb{R}$ el seu *domini*.[1]

__Exemple__: *Troba el domini $A \subset \mathbb{R}$ de les funcions:*

a. $y = +\sqrt[3]{x}$ b. $y = \dfrac{x-2}{x-5}$ c. $y = \dfrac{x}{\ln x}$ d. $y = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

SOLUCIÓ: a) En aquest cas el domini és la recta real $A = \mathbb{R}$ ja que tot nombre real té arrel cúbica.

b) El domini de definició, ara, són els nombres reals llevat del 5 ja que no podem dividir per zero. Per tant: $A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 5\} =]-\infty,5[\cup]5,+\infty[$.[2]

c) El domini ara estarà format pels nombres reals x que admeten logaritme neperià, és a dir, $x > 0$ i diferents de 1, $x \neq 1$. Per tant:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ i } x \neq 1\} =]0,1[\cup]1,+\infty[.$$

d) En aquest cas, el domini està format pels x tal que:

$$\frac{x-1}{x+1} > 0 \xleftrightarrow{\text{Equivalent}} \left\{ \begin{array}{c} x-1>0 \text{ i } x+1>0 \\ \text{ó} \\ x-1<0 \text{ i } x+1<0 \end{array} \right\} \xleftrightarrow{\text{Equivalent}} \left\{ \begin{array}{c} x>1 \text{ i } x>-1 \\ \text{ó} \\ x<1 \text{ i } x<-1 \end{array} \right\}.$$

Així doncs: $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 1 \text{ ó } x < -1\} =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

[1] El domini $A \subset \mathbb{R}$ està format pels punts de la recta real que admeten imatge per la funció.

[2] L' *interval obert* $]a,b[$ està format pels punts de la recta real compresos estrictament entre a i b.

1.2. Límit i continuïtat d'una funció

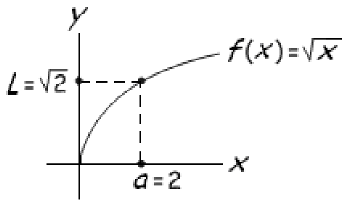
1.2.1. *Límit d'una funció en un punt*

Des d'un punt de vista informal[3] diem que una funció $A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ té *límit* $L \in \mathbb{R}$ en un punt $a \in \mathbb{R}$ (no necessàriament del seu domini), i posem:

$$L = \lim_{x \to a} f(x)$$

si els valors $f(x)$ de la funció s'aproximen al valor L a mesura que els valors de la variable $x \in A$ s'aproximen al punt a.

Com a exemple de límit tenim $\lim_{x \to 2} \sqrt{x} = \sqrt{2}$.[4] Gràficament:



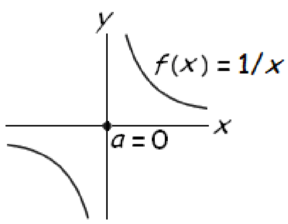
Un altre cas és el de la funció $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ en $a = 0$ ja que:

$$\lim_{x \to 0} (\sin x / x) = 1.$$

Notem que el 0 no pertany al domini d'aquesta funció. Finalment, un exemple on no existeix límit seria el de la funció:

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ en } a = 0.$$

Gràficament:



---

[3] Hom pot trobar la definició formal de límit en qualsevol manual d'anàlisi matemàtica al ús.

[4] En aquest cas la funció és, a més, contínua en $a = 2$ (veure la plana següent).

1.2.2. *Continuïtat d'una funció*

Cal recordar ara que una funció és contínua en un punt si té per límit la imatge de la funció en aquest punt. Formalment, diem que $A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ és *contínua* en $a \in A$ si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$[5]

Notem que per a que una funció sigui contínua en un punt, aquest punt ha de pertànyer al domini de la funció. Per exemple, la funció anterior:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

encara que té límit en 0, no és contínua ja que no té imatge en 0. Recordem que una funció pot presentar tres tipus de *discontinuïtats*:

i. *Discontinuïtat evitable*, com el cas que acabem de comentar, que és quan existeix el límit de la funció en el punt però no coincideix amb la seva imatge. Exemple:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ en } a = 0.$$

ii. *Discontinuïtat de 1ª espècie* o de *salt*, que es dóna quan existeixen els dos límits laterals de la funció en el punt però no coincideixen.[6] Exemple:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}} \text{ en } a = 0.$$[7]

iii. *Discontinuïtat de 2ª espècie*, que apareix quan no existeix algun dels dos límits laterals. Exemple:

$$f(x) = \frac{1}{1 - x} \text{ en } a = 1.$$

---

[5] Generalitzant aquesta definició direm que una funció és contínua "sobre un conjunt" si és contínua en cadascun dels seus punts.

[6] Els dos *límits laterals* apareixen quan la variable x s'aproxima, o bé per l'esquerra o bé per la dreta, al punt on es calcula el límit. En aquest cas, el *salt* de la funció en el punt seria la diferència en positiu (valor absolut) entre els dos límits laterals.

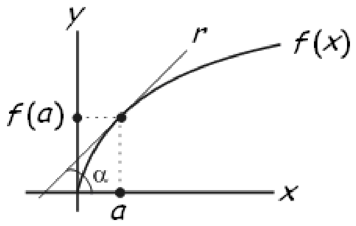
[7] Aquesta funció té límit per l'esquerra 1 i límit per la dreta 0, i, per tant, un salt igual a 1.

1.3. Derivada d'una funció

Com ja sabem, una funció $A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ és *derivable* en un punt $a \in A$ si existeix el límit del quocient incremental:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \in \mathbb{R}$$

sent el número real $f'(a)$ la *derivada* de la funció en a.[8] Des d'un punt de vista geomètric, la derivada d'una funció en un punt és la pendent de la *recta tangent* r a la funció en aquest punt. Gràficament:



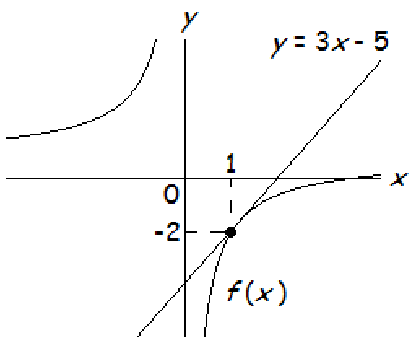
Així doncs, $f'(a) = \tan\alpha$ i l'equació de r serà: $y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$.

<u>Exemple</u>: *Troba la recta tangent en el punt* $a = 1$ *a la funció* $f(x) = \dfrac{x-3}{x}$.

SOLUCIÓ: Com que $f'(x) = 3/x^2$ i $f'(1) = 3$,[9] la recta tangent serà:

$$y = f(1) + f'(1) \cdot (x - 1) = -2 + 3(x - 1) = 3x - 5.$$

Gràficament:



---

[8] Es pot demostrar que tota funció derivable en un punt és contínua (veure l'Exercici 1 d'aquest Bloc).

[9] El càlcul d'aquesta derivada s'obté a partir de la taula i de les regles de derivació de la plana següent.

1.3.1. *Càlcul de derivades*

En el càlcul de la *funció derivada* $f'(x)$ (o *derivada* a seques) d'una funció $A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ caldrà tenir present la següent taula:[10]

$f(x)$	$f'(x)$
c, amb $c \in \mathbb{R}$	0
x^a, amb $a \neq 0$	$a \cdot x^{a-1}$
$\ln x$	$1/x$
a^x, amb $a > 0$	$a^x \cdot \ln a$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x \ \left(=1/\cos^2 x\right)$
$\arctan x$	$1/\left(1+x^2\right)$

Aplicant aquesta taula i les regles bàsiques de derivació com són:

- $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$.
- $(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$, amb $a \in \mathbb{R}$ constant.
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
- $(f(x)/g(x))' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$.
- $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.[11]

podem trobar les derivades de totes les funcions elementals.[12]

---

[10] La *funció derivada* d'una funció fa correspondre a tot punt la derivada associada.
[11] Aquesta regla de derivació és coneix amb el nom de *regla de la cadena*.
[12] Una funció *elemental* és una funció construïda a partir de una quantitat finita de exponencials, logaritmes, potències, sinus, cosinus, tangents i constants mitjançant la composició de funcions i utilitzant les quatre operacions fonamentals de l'aritmètica.

Vegem ara uns quants exemples de càlcul de derivades:

<u>Exemple</u>: *Calcula les derivades de les funcions:*

a. $y=\dfrac{x^2+3x}{e^{x^2}}$.

b. $y=\ln\left(\ln\sqrt{1-x}\right)$.

c. $y=\sin\sqrt{x^2+1}$.

d. $y=\tan\left(2x^2\right)$.

e. $y=\left(x^2-1\right)^{\sin x}$.

SOLUCIÓ: a) En aquest cas:

$$y'=\frac{(2x+3)\cdot e^{x^2}-\left(x^2+3x\right)\cdot\left(e^{x^2}\cdot 2x\right)}{\left(e^{x^2}\right)^2}=\frac{e^{x^2}\left((2x+3)-2x\cdot\left(x^2+3x\right)\right)}{e^{2x^2}}=$$
$$=\frac{-2x^3-6x^2+2x+3}{e^{x^2}}.$$

b) Aplicant la regla de la cadena tenim que:

$$y'=\frac{1}{\ln\sqrt{1-x}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\cdot(-1)\right)=\frac{-1}{2(1-x)\ln\sqrt{1-x}}=\frac{-1}{(1-x)\ln(1-x)}.$$

c) Com en el cas anterior: $y'=\cos\sqrt{x^2+1}\cdot\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x\right)=\dfrac{x\cos\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$.

d) En aquest cas: $y'=\left(1+\tan^2\left(2x^2\right)\right)\cdot 4x=\dfrac{4x}{\cos^2\left(2x^2\right)}$.

e) Aplicant el logaritme neperià tenim $\ln y=\ln\left(x^2-1\right)^{\sin x}=\sin x\cdot\ln\left(x^2-1\right)$ i,

per la regla de la cadena, podem posar que:

$$\frac{y'}{y}=(\ln y)'=\cos x\cdot\ln\left(x^2-1\right)+\sin x\cdot\frac{2x}{x^2-1}$$

d'on, finalment:

$$y'=\left(x^2-1\right)^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln\left(x^2-1\right)+\frac{2x\sin x}{x^2-1}\right).$$

1.4. Aplicacions de la derivada

1.4.1. *Regles de L'Hôpital*

- Les regles de L'Hôpital afirmen, bàsicament, que:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left\{\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}\right\}\xrightarrow{\text{L'Hôpital}}\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$ [13]

<u>Exemple</u>: *Calcula els límits següents:*

a. $\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^3-1}$ b. $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ c. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x^2}{x}$ d. $\lim_{x\to2}\left(\frac{x^2+1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x^2-4}}$.

SOLUCIÓ: a) $\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^3-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\{\text{L'Hôpital}\}=\lim_{x\to1}\frac{2x-3}{3x^2}=-\frac{1}{3}$.

b) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\{\text{L'Hôpital}\}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}.$

c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x^2}{x}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\{\text{L'Hôpital}\}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{(1/x)}{1}=2\cdot\left(\frac{1/\infty}{1}\right)=0$.

d) Com que el límit és indeterminat de la forma 1^∞, el calcularem a partir del límit L del seu logaritme neperià:[14]

$$L=\lim_{x\to2}\ln\left(\frac{x^2+1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x^2-4}}=\lim_{x\to2}\frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{2x+1}\right)}{x^2-4}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\{\text{L'Hôpital}\}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)\left(\frac{2x(2x+1)-(x^2+1)2}{(2x+1)^2}\right)}{2x}=\lim_{x\to2}\frac{2x^2+2x-2}{2x(x^2+1)(2x+1)}=\frac{1}{10}.$$

Per tant: $\lim_{x\to2}\left(\frac{x^2+1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x^2-4}}=e^L=e^{\frac{1}{10}}$.

---

[13] Òbviament, les funcions han de ser derivables per poder aplicar les regles de L'Hôpital.

[14] Així doncs el límit que busquem serà igual, aplicant les propietats dels logaritmes, a e^L.

1.4.2. *Creixement i decreixement d'una funció*

En general, el signe de la derivada d'una funció, sempre i quan sigui diferent de zero, ens permetrà decidir si la funció creix o decreix. Per definició, hom diu que la funció $A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ en un punt $a \in A$ és:

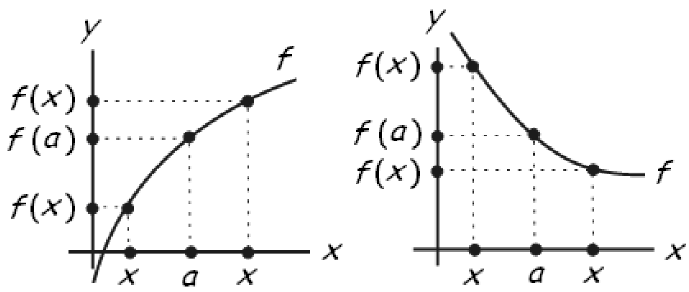
1. *Creixent* si existeix un interval obert $]a-r,a+r[\subset A$ tal que, per a tot punt $x \in]a-r,a+r[$:[15]

$$\left.\begin{matrix} x \le a \\ x \ge a \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{implica}} \left\{\begin{matrix} f(x) \le f(a) \\ f(x) \ge f(a) \end{matrix}\right.$$

2. *Decreixent* si existeix un interval obert $]a-r,a+r[\subset A$ tal que, per a tot punt $x \in]a-r,a+r[$:

$$\left.\begin{matrix} x \le a \\ x \ge a \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{implica}} \left\{\begin{matrix} f(x) \ge f(a) \\ f(x) \le f(a) \end{matrix}\right.$$

Gràficament:



Com podem veure la funció $f(x)$, en el primer cas, és creixent en el punt a mentre que en el segon és decreixent.[16]

[15] Aquest interval $]a-r,a+r[$ és, per definició, l'*entorn* de centre a i de radi $r > 0$.

[16] Els conceptes locals de funció creixent i decreixent "en un punt" donen lloc, de manera natural, als de funció creixent i decreixent "sobre un conjunt": diem una funció és creixent (o decreixent) sobre un conjunt si ho és en cadascun dels seus punts.

1.4.2.1. Relació entre el creixement d'una funció i la derivada

En aquest sentit hem de tenir present el teorema que ens diu que si una funció $A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ és derivable en $A \subset \mathbb{R}$ aleshores:

- Per a tot $x \in A$, $\begin{Bmatrix} f'(x) > 0 \\ f'(x) < 0 \end{Bmatrix} \xrightarrow{\text{implica}} f(x)$ és $\begin{Bmatrix} \text{creixent} \\ \text{decreixent} \end{Bmatrix}$ en *A*.
- $f(x)$ és $\begin{Bmatrix} \text{creixent} \\ \text{decreixent} \end{Bmatrix}$ en $A \xrightarrow{\text{implica}} \begin{Bmatrix} f'(x) \geq 0 \\ f'(x) \leq 0 \end{Bmatrix}$, per a tot $x \in A$.

Notem que la 2ª propietat no és exactament la recíproca de la 1ª.[17] Així doncs, el problema del creixement i/o decreixement d'una funció derivable està resolt si la seva derivada és diferent de zero.[18] Vegem un exemple:

Exemple: *Estudia el creixement i decreixement de les funcions:*

a. $f(x) = x^2$ b. $f(x) = x^3$ c. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

SOLUCIÓ: a) En aquest cas, com que $f'(x) = 2x$, tenim que la funció és creixent per a tot $x > 0$ i decreixent si $x < 0$; en el punt 0, el teorema anterior no decideix.[19] b) Ara, ja que $f'(x) = 3x^2$, la funció serà creixent per a tot $x \neq 0$; com abans, el teorema tampoc decideix en 0.[20] c) Ja que:

$$f'(x) = -\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

la funció és creixent pels punts $x < 0$ i decreixent si $x > 0$.[21]

---

[17] La recíproca d'una propietat de la forma "A implica B" és "B implica A".

[18] Els punts que anul·len la derivada d'una funció s'anomenen *punts crítics* o *estacionaris*. Val a dir que un punt crític és, o un màxim, o un mínim, o un punt d'inflexió de la funció (els punts d'inflexió no els estudiarem aquí).

[19] En el punt 0 la funció té un mínim.

[20] 0 és un punt d'inflexió.

[21] En 0 la funció té un màxim.

1.4.3. *Òptims d'una funció*

Els màxims i mínims d'una funció real d'una variable juguen un paper molt important a l'hora d'estudiar-la i, en l'àmbit econòmic, són fonamentals.[22] Formalment, hom diu que la funció $A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ té en el punt $a \in A$ un:

1. *Màxim absolut* o *global* si:

$$f(x) \leq f(a), \text{ per a tot } x \in A.$$

2. *Mínim absolut* o *global* si:

$$f(a) \leq f(x), \text{ per a tot } x \in A.$$

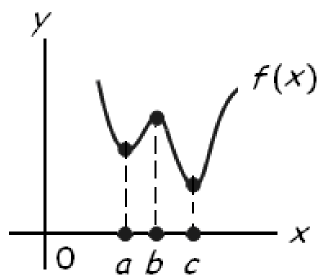
3. *Màxim relatiu* o *local* si existeix un entorn de $a \in A$ tal que:

$$f(x) \leq f(a), \text{ per a tot punt } x \in A \text{ de l'entorn.}$$

4. *Mínim relatiu* o *local* si existeix un entorn de $a \in A$ tal que:

$$f(a) \leq f(x), \text{ per a tot punt } x \in A \text{ de l'entorn.}$$

Gràficament:



En aquest cas, el punt a és un mínim relatiu de la funció $f(x)$, el punt b és un màxim relatiu i c és un mínim absolut. En Economia, a tot punt que satisfà alguna de les definicions anteriors se l'anomena *òptim* de la funció.

[22] De fet hi ha una branca de la ciència econòmica, anomenada Optimització Matemàtica, que té per objecte determinar els màxims i mínims de funcions d'una o més variables amb o sense restriccions addicionals.

1.4.3.1. Relació entre els òptims d'una funció i la derivada

Com veurem tot seguit, el coneixement de les derivades successives d'una funció ens permetrà trobar els seus òptims locals.[23] En efecte, si notem per $f^{(n)}(x)$ a la *derivada successiva* d'ordre *n* (o *derivada n-èsima*) de la funció $A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, definida recurrentment per:

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

es pot provar que:

- Si en un punt crític $a \in A$ d'una funció real $A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, la primera derivada successiva diferent de zero és d'ordre parell, és a dir, si:

  $$f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \text{ i } f^{(n)}(a) \neq 0, \text{ amb } n > 1 \text{ parell}$$

  llavors:

  $$\left.\begin{matrix} f^{(n)}(a) > 0 \\ f^{(n)}(a) < 0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{implica}} a \text{ és un } \begin{Bmatrix} \text{mínim} \\ \text{màxim} \end{Bmatrix} \text{ local de } f(x).$$[24]

Exemple: *Estudia si la funció* $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x}$ *té òptims relatius.*

SOLUCIÓ: Com que els punts crítics d'aquesta funció són el 0 i el 2 ja que:

$$0 = f'(x) = x(2-x)/(1-x)^2 \xrightarrow{\text{Solució}} x = 0{,}2$$

i com que:

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \xrightarrow{\text{implica}} \begin{cases} f''(0) = 2 > 0 \\ f''(2) = -2 < 0 \end{cases}$$

deduïm que, en aquest cas, $n = 2$ parell i que, en conseqüència, 0 és un mínim relatiu i 2 un màxim relatiu de $f(x)$.[25]

[23] Determinar els òptims globals pot arribar a ser, en certs casos, bastant complicat.
[24] Si aquest ordre de derivació *n* és imparell no hi hauran òptims sinó punts d'inflexió.
[25] De vegades amb la 2ª derivada no n'hi ha prou i cal recórrer a derivades d'ordre superior per a esbrinar si estem davant d'un òptim o no (veure l'Exercici 3 de la plana 18).

Vegem una aplicació econòmica del càlcul d'òptims:

Exemple: *Una empresa dedicada a l'explotació comercial d'una autopista cobra 700 u.m. per cada vehicle que hi circula.*[26] *Tenint en compte que les despeses de personal són de 6000 u.m. al dia i que els costos de manteniment i amortització per vehicle venen donats per la funció:*

$$2+\frac{x}{40}\ u.m.$$

on x *denota el nombre de vehicles diaris que hi circulen, determina:* (a) *Les funcions de costos, ingressos i beneficis diaris de l'empresa.* (b) *Els vehicles que haurien de circular cada dia per l'autopista per a maximitzar els beneficis diaris, així com el seu valor.* (c) *El interval de rendibilitat diària.*

SOLUCIÓ: a) Ja que les funcions d'ingrés i costos totals són:

$$IT(x)=700x \quad \text{i} \quad CT(x)=\left(2+\frac{x}{40}\right)x+6000$$

hom dedueix que la funció de beneficis serà:

$$BT(x)=IT(x)-CT(x)=-\frac{x^2}{40}+698x-6000.$$

b) Com que:

$$0=BT'(x)=-\frac{x}{20}+698\xrightarrow{\text{implica}}x=13960 \quad \text{i} \quad BT''(x)=-\frac{1}{20}<0$$

tenim que 13960 vehicles maximitzaran el benefici diari de l'empresa. Cal notar que el *valor òptim* dels beneficis serà: $BT(13960)=4866040$ u.m.[27]

c) Els extrems del interval de rendibilitat diària són les arrels de l'equació:

$$0=BT(x)=-\frac{x^2}{40}+698x-6000\xrightarrow{\text{Solucions}}x_1=8.60 \text{ i } x_2=27911.4.$$

Per tant, l'empresa tindrà beneficis si circulen diàriament per l'autopista entre 9 i 27911 vehicles.

[26] u.m. denota unitats monetàries.

[27] Podem definir el *valor òptim* d'una funció com la imatge que pren sobre l'òptim.

1.4.4. *Elasticitat d'una funció en un punt*

Per regla general, els economistes treballen gairebé sempre amb increments relatius (hom diu, per exemple, que la inflació ha pujat un 0.5% o bé que el PIB ha baixat un 1% respecte l'any anterior). Doncs bé, si en la definició de derivada d'una funció $A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ en $a \in A$ canviem els dos increments absoluts que apareixen en el quocient incremental:

$$\Delta a = x - a \text{ i } \Delta f(a) = f(x) - f(a) = \{x = a + \Delta a\} = f(a + \Delta a) - f(a)$$

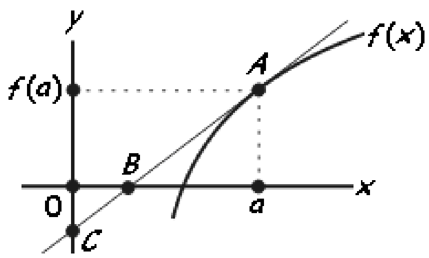
pels corresponents increments relatius:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{x-a}{a} \text{ i } \frac{\Delta f(a)}{f(a)} = \frac{f(x)-f(a)}{f(a)} = \frac{f(a+\Delta a)-f(a)}{f(a)}$$

obtenim la *derivada elàstica* o *elasticitat* en $a \in A$ de $A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$:

$$E_x f(a) = \lim_{\Delta a \to 0} \left(\frac{\Delta f(a)}{f(a)} : \frac{\Delta a}{a} \right) = \frac{a}{f(a)} \cdot f'(a) \in \mathbb{R}.$$

Gràficament, el valor absolut de la derivada elàstica seria $\left| E_x f(a) \right| = \frac{AC}{AB}$ on:



Com a conseqüència, tenim tres tipus bàsics d'elasticitat:

$$\text{Elasticitat} \begin{Bmatrix} \textit{Rígida} \\ \textit{Unitària} \\ \textit{Elàstica} \end{Bmatrix} \text{ quan } \left| E_x f(a) \right| \text{ és } \begin{Bmatrix} < \\ = \\ > \end{Bmatrix} 1.$$[28]

---

[28] Si, per exemple, la funció $q = f(p)$ és una funció de demanda d'un bé de forma que petites variacions en el preu p provoquen grans variacions en la quantitat demandada q, diem que aquest bé té una demanda *elàstica*. Si passa el contrari, és a dir, quan grans variacions de p donen lloc a petites variacions de q, tenim una demanda *rígida*. Finalment, quan les variacions de p i de q són semblants, tenim un bé amb una demanda *unitària*.

Vegem una aplicació econòmica:[29]

Exemple: *Si* $q = q(p) = 650 - 5p - p^2$ *és la funció de demanda d'un bé:*

a. *Calcula la seva elasticitat al preu de venda de* $p = 10$ *u.m.*

b. *Si aquest preu experimenta un increment del 2% determina, de forma aproximada, el percentatge de canvi en la quantitat demandada.*

SOLUCIÓ: a) En aquest cas l'elasticitat $E_p q(10)$ serà:

$$E_p q(10) = \frac{10}{q(10)} \cdot q'(10) \xrightarrow{q'(p)=-5-2p} E_p q(10) = \frac{10}{500} \cdot (-25) = -0.5.$$

Així doncs, la funció de demanda té elasticitat rígida en $p = 10$ u.m.[30]

b) Si el preu $p = 10$ augmenta un 2% tindrem que:

$$\frac{\Delta p}{p} = 2\% = 0.02.$$

Tot considerant que aquest increment relatiu és petit, podem estimar el percentatge de canvi en la quantitat demandada de $q = 500$ unitats al preu de venda de $p = 10$ u.m. tenint en compte l'aproximació:

$$\frac{\left(\frac{\Delta q}{q}\right)}{\left(\frac{\Delta p}{p}\right)} \simeq E_p q(p) \xrightarrow{\text{implica}} \frac{\Delta q}{q} \simeq E_p q(p) \cdot \frac{\Delta p}{p}.$$ [31]

En conseqüència, hom té que:

$$\frac{\Delta q}{q} \simeq \left(\frac{\Delta p}{p}\right) \cdot E_p q(p) \xrightarrow{\frac{\Delta p}{p}=0.02 \text{ i } E_p q(p)=-0.5} \frac{\Delta q}{q} \simeq 0.02 \cdot (-0.5) = -0.01 = -1\%.$$

Així doncs, la quantitat demandada de $q = 500$ unitats al preu de $p = 10$ u.m. experimenta un decrement aproximat del 1% quan el preu puja un 2%.

[29] "Elasticitat de preus".

[30] Val a dir que els bens de 1ª necessitat solen tenir una demanda rígida.

[31] Aquesta aproximació s'obté directament de la definició d'elasticitat.

1.5. Exercicis

1. *Prova que tota funció derivable en un punt també és contínua. Val la propietat recíproca? Raona la resposta.*[32]
2. *Calcula les rectes tangents a les funcions en els punts que s'indiquen:*

   a. $f(x) = e^x / (x-2)$, *en* $x = 0$.   b. $f(x) = \sin^2 x$, *en* $x = \pi$.
3. *Estudia el creixement i l'existència d'òptims de les funcions:*

   a. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 5$.   b. $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$.   c. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.
4. *Una llibreria obté d'una editorial un llibre a un cost unitari de 7 u.m. que està venent a un preu de 15 u.m. i, amb aquest preu, ha venut 1000 exemplars al mes. Per tal d'estimular les vendes, la llibreria es planteja reduir el preu de venda tot estimant que, per cada u.m. de reducció en el preu, vendrà 200 llibre mes. En aquestes condicions, determina el nombre de llibres a vendre mensualment, i el seu preu de venda, per tal de maximitzar els beneficis.*
5. *Una constructora adquireix 20.000 m^2 de terreny per a construir naus industrials. Per tal d'anivellar i preparar el terreny, ha de llogar unes màquines amb els costos i restriccions següents:*
   - *El lloguer de cada màquina és de 10.000 u.m. per hora.*
   - *Cada màquina anivella i prepara 25 m^2 de terreny cada hora.*
   - *Pel funcionament de les màquines calen 20 operaris amb un cost de 1.000 u.m. per hora i per operari.*
   - *El cost total de transportar cada màquina és de 40.000 u.m.*

   Sota aquestes condicions, calcula el nombre de màquines que caldria llogar per a minimitzar els costos totals.

[32] La demostració d'aquesta propietat s'ha de fer sobre una funció en general, tot provant que el límit de la diferència entre la funció i la seva imatge en el punt és 0 (funció contínua) tenint en compte que existeix límit del quocient incremental en el punt (derivada).

BLOC II: Àlgebra

2. MATRIUS I SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS

2.1. Matrius i determinant d'una matriu quadrada

2.1.1. *Matriu de coeficients reals*

Les matrius numèriques són l'eina fonamental que permet resoldre sistemes d'equacions lineals amb tota la seva generalitat. Podem dir, des d'un punt de vista informal, que una *matriu numèrica* (o *matriu* a seques) d'*ordre* $m \times n$ és una col·lecció de nombres, anomenats *coeficients*, disposats en m files i n columnes i que es representa de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Els elements a_{ii} constitueixen l'anomenada *diagonal principal* de la matriu *A*. Un exemple de matriu d'ordre 2×3 seria:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -11 \end{pmatrix}.$$

Si el nombre de files coincideix amb el de columnes, és a dir, si $m = n$, la matriu A se'n diu *quadrada*. Un exemple notable de matriu quadrada d'ordre 2×2 és:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \text{ amb } \alpha \in \mathbb{R}.$$ [33]

[33] Geomètricament parlant, aquesta matriu està associada a un gir en el pla d'angle α en sentit contrari al de les agulles del rellotge

2.1.2. *Determinant d'una matriu quadrada*

Una característica fonamental de les matrius quadrades *A*, i només d'elles, és el seu *determinant* que notem per $\det A = |A|$.[34] De cara a les aplicacions, ens interessarà conèixer tant sols cóm es calculen els determinants de les matrius quadrades d'ordre 2×2 i 3×3;[35] aquests determinants es poden calcular fàcilment a partir de la coneguda *regla de Sarrus*:

i. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Regla de Sarrus}} \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

ii. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Regla de Sarrus}} \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \left(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{21}a_{12}a_{33} + a_{32}a_{23}a_{11}\right).$$

<u>Exemple</u>: *Calcula el determinant de les matrius:*

a. $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, per a tot $\alpha \in \mathbb{R}$. b. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓ: a) Aplicant la regla de Sarrus tenim:

$$|A| = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \left(-\sin\alpha\right)\cdot \sin\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$ [36]

b) En aquest cas:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \left\{\text{Regla de Sarrus}\right\} =$$

$$= 0\cdot 3\cdot(-2) + (-1)\cdot 0\cdot(-4) + 5\cdot 1\cdot 2 - (-4)\cdot 3\cdot 2 - 5\cdot(-1)\cdot(-2) - 1\cdot 0\cdot 0 = 24.$$

[34] La definició de determinant és complexa i nosaltres no la donarem aquí. De fet es pot trobar en qualsevol text d'àlgebra lineal superior.

[35] Val a dir que el càlcul de determinats d'ordre superior es redueix, a partir de propietats generals, a determinants d'ordre 3×3 (veure els Exercicis 1 i 2 d'aquest Bloc).

[36] Notem que el valor del determinant no depèn de l'angle de gir α .

2.2. Rang d'una matriu

2.2.1. *Submatriu i menor d'una matriu*

Un segon element clau a tenir present serà el *rang* d'una matriu en general i, a tal fi, hem de menester introduir prèviament els conceptes de submatriu i menor d'una matriu. Per definició, una *submatriu* d'una matriu A d'ordre $m \times n$ és qualsevol matriu que s'obté al suprimir-ne $0 \leq m' \leq m$ files i/o $0 \leq n' \leq n$ columnes. Per exemple:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \text{ és una submatriu de } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

ja que s'han suprimit la 2ª fila i la 3ª columna. Així mateix, un *menor* de A serà el determinant de qualsevol submatriu quadrada de A. Per exemple:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 8$$

és un menor de A ja que és el determinant de la submatriu quadrada que s'obté al suprimir la 2ª fila i la 2ª columna. Vegem un exemple:

<u>Exemple</u>: *Calcula els menors associats a la diagonal principal de la matriu:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓ: Els menors d'ordre 1 són els elements de la diagonal principal: 0, 3 i -2. Els d'ordre 2:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 5, \ \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 \text{ i } \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 8$$

i l'únic menor d'ordre 3 és el determinant de la matriu: $|A| = 24$.

2.2.2. *Rang d'una matriu*

En general, el *rang* d'una matriu A, que denotem per $\text{rang}A$, és l'ordre més gran possible dels seus menors no nuls. Per exemple, el rang de la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

és 3 ja que el seu determinant és: $|A| = 24 \neq 0$.

<u>Exemple</u>: *Calcula els rangs de les matrius:*

$$\text{a. } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}. \qquad \text{b. } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓ:

a) En aquest cas:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 2 - 12 + 10 = 0 \text{ i } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0 \xrightarrow{\text{implica}} \text{rang}A = 2.$$

b) Ara, el rang de A pot ser, com a màxim, igual a 3 ja que té $m = 3$ files. Tanmateix, és més gran o igual que 2 ja que tenim un menor d'ordre 2 no nul:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Ara bé, com que el determinant de la submatriu quadrada formada per la 1ª, 2ª i 4ª columnes és diferent de zero,[37] deduïm, finalment, que:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 8 - 8 = -4 \neq 0 \xrightarrow{\text{implica}} \text{rang}A = 3.$$

[37] Notem que el determinant de la submatriu formada per les tres primeres columnes és 0.

2.3. Sistemes d'equacions lineals

En general, un *sistema de equacions lineals* (*sistema* a partir d'ara) és un conjunt d'equacions de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \cdots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \cdots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{cases}$$

on els nombres a_{ij} són els *coeficients*, les variables x_j les *incògnites* i els nombres b_i els *termes independents*. El problema consisteix en calcular, si existeixen, els valors de les incògnites que satisfan les equacions; aquests valors són, per definició, les *solucions* del sistema. Davant d'un sistema cal:

i. Discutir-lo, és a dir, veure si té solucions. Si resulta que en té, és tracta d'un sistema *compatible* (*incompatible* en cas contrari).
ii. Si és compatible caldrà resoldre'l, és a dir, trobar les solucions. Un sistema compatible amb una única solució se'n diu sistema *compatible* i *determinat* (*compatible* i *indeterminat* si en té més d'una).

En ambdós processos la teoria de matrius juga un rol essencial. Val a dir que nosaltres aquí estudiarem tant sols sistemes amb 2 o 3 equacions.

Exemple: *Comprova que* $x=1$, $y=2$ i $z=3$ *és una solució del sistema:*

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x+y-z=1 \\ x+y-3z=-6 \end{cases}$$

SOLUCIÓ: Evident ja que: $\begin{cases} 1-2\cdot 2+3=0 \\ 2\cdot 1+2-3=1 \\ 1+2-3\cdot 3=-6 \end{cases}$.[38]

[38] Com demostrarem més endavant aquest sistema, a més de compatible, és determinat la qual cosa vol dir que aquesta solució és la única possible.

2.3.1. *Matriu i matriu ampliada d'un sistema*

L'eina bàsica en la cerca de les solucions d'un sistema és el teorema de Rouché. Abans d'exposar-lo caldrà considerar els conceptes de *matriu* i de *matriu ampliada* d'un sistema de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \cdots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \cdots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{cases}$$

que són, respectivament, les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ i } (A;B) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Notem que la matriu d'un sistema A és la matriu formada pels coeficients, i que la matriu ampliada $(A;B)$ s'obté al afegir-hi la columna dels termes independents.[39]

<u>Exemple</u>: *Troba la matriu i la matriu ampliada del sistema* $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x+y-z=1 \\ x+y-3z=-6 \end{cases}$

SOLUCIÓ: Trivialment, la matriu del sistema és:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

i la matriu ampliada serà:

$$(A;B) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

[39] En particular, doncs, la matriu d'un sistema serà sempre una submatriu de la matriu ampliada.

2.3.2. *Discussió d'un sistema: teorema de Rouche*

El teorema de Rouché[40] posa en relació els conceptes de rang d'una matriu i de sistema d'equacions lineals compatible. En efecte, un sistema d'equacions lineals de matriu A i matriu ampliada $(A;B)$ amb n incògnites és:

- Compatible $\xleftrightarrow{\text{Equivalent}}$ $\text{rang}A = \text{rang}(A;B)$.[41]
- Compatible i determinat $\xleftrightarrow{\text{Equivalent}}$ $\text{rang}A = \text{rang}(A;B) = n$.
- Compatible i indeterminat $\xleftrightarrow{\text{Equivalent}}$ $\text{rang}A = \text{rang}(A;B) < n$.[42]

Vegem un exemple d'aplicació:

<u>Exemple</u>: *Prova que el sistema* $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \\ x + y - 3z = -6 \end{cases}$ *és compatible i determinat.*

SOLUCIÓ:

Ja hem vist que aquest sistema és compatible, és a dir, que té solució. A més, el rang del sistema és igual al número d'incògnites $n = 3$ ja que:[43]

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -11 \neq 0 \xrightarrow{\text{implica}} \text{rang}A = \text{rang}(A;B) = 3.$$

En conseqüència tenim que el sistema és, a part de compatible, determinat. Així doncs, la solució única serà: $x = 1$, $y = 2$ i $z = 3$.

[40] També conegut amb el nom de teorema de Rouché-Fröbenius.

[41] Podem anomenar *rang del sistema* a aquest valor de coincidència. En rigor, doncs, els únics sistemes que tenen rang seran els sistemes compatibles.

[42] A la diferència aritmètica entre el nombre d'incògnites i el rang d'un sistema compatible li diem *grau d'indeterminació*. Per una altra banda, fixem-nos que el rang de la matriu de qualsevol sistema és sempre menor o igual que el número d'incògnites.

[43] Notem que tot sistema compatible i determinant té grau d'indeterminació nul.

2.3.3. *Resolució d'un sistema compatible: sistemes de Cramer*

El teorema de Rouché resol la primera de les qüestions que ens plantejàvem al principi, és a dir, si un sistema té solució o no; tanmateix, però, no ens diu quina és. Nosaltres, aquí, analitzarem el mètode de resolució associat als sistemes de Cramer.[44] D'entrada, diem que un sistema es de *Cramer* si és compatible i determinat, amb la matriu associada quadrada.[45] En general, tenim que:

- La solució única d'un sistema de Cramer de matriu A amb n incògnites es:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A},\ i = 1,\ldots,n$$

  on A_i és la matriu que s'obté de A al substituir la seva columna i-èsima per la columna dels termes independents.

<u>Exemple</u>: *Calcula la solució del sistema de Cramer* $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \\ x + y - 3z = -6 \end{cases}$.[46]

SOLUCIÓ: $$x = \frac{1}{|A|}\cdot|A_1| = \frac{1}{-11}\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -6 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \frac{-12+1+6-6}{-11} = 1$$

$$y = \frac{1}{|A|}\cdot|A_2| = \frac{1}{-11}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & -3 \end{vmatrix} = \frac{-3-12-1-6}{-11} = 2$$

$$z = \frac{1}{|A|}\cdot|A_3| = \frac{1}{-11}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 \end{vmatrix} = \frac{-6-2-24-1}{-11} = 3.$$

[44] En l'apèndix es resol un sistema aplicant el mètode de Gauss.
[45] Val a dir que tot sistema de Cramer és compatible i determinat però no tot sistema compatible i determinat és de Cramer.
[46] És evident que es tracta d'un sistema de Cramer ja que, com hem vist, és compatible i determinat i la seva matriu és quadrada.

2.3.3.1. Mètode de Cramer i sistemes equivalents

La idea subjacent a aquest mètode consisteix en transformar tot sistema compatible en un sistema de Cramer "equivalent".[47] A tal fi, i un cop provada la compatibilitat del sistema, caldrà considerar el seu grau d'indeterminació:

$$g^{o}\ \text{d'indeterminació} = k = n - \text{rang}A \xrightarrow{\text{implica}} \text{rang}A = n - k\ .$$

Això voldrà dir que existirà un menor d'ordre $n-k$ de la matriu del sistema diferent de zero. El pas següent consisteix en eliminar les equacions del sistema que no formen part d'aquest menor i considerar, com a paràmetres, les k incògnites que hi han quedat fora.[48] Aquest nou sistema, amb $n-k$ incògnites i k paràmetres, és un sistema de Cramer equivalent al inicial.

Exemple: *Resol el sistema* $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x+y-z=1 \\ x+3y-2z=1 \end{cases}$.

SOLUCIÓ: Notem que el sistema és compatible i indeterminat, amb un grau d'indeterminació igual a $k = n - \text{rang}A = 3-2=1$.[49] Així doncs, com que:

$$\text{rang}A = n-k = 3-1=2 \ \text{ i } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

el sistema és equivalent al sistema de Cramer:

$$\begin{cases} x-2y=-z \\ 2x+y=1+z \end{cases}, \text{ amb la variable } z \text{ com a paràmetre.}$$

Així doncs, la solució d'aquest sistema i, de retruc, la del inicial, serà:

$$x = \frac{1}{|A|}\cdot|A_1| = \frac{1}{5}\cdot\begin{vmatrix} -z & -2 \\ 1+z & 1 \end{vmatrix} = \frac{z+2}{5},\ y = \frac{1}{|A|}\cdot|A_2| = \frac{1}{5}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 2 & 1+z \end{vmatrix} = \frac{3z+1}{5} \ \text{ i } z\in\mathbb{R}\ .$$

---

[47] Dos sistemes d'equacions lineals són *equivalents* si tenen les mateixes solucions.
[48] Un paràmetre és, en general, una variable que actua com si fos una constant.
[49] Fixem-nos que la 3ª equació s'obté restant la 1ª de la 2ª.

En l'exemple que analitzem a continuació es discuteix i es resol un sistema d'equacions lineals amb paràmetres que és la situació més general possible:

Exemple: *Resol, per a tot valor del paràmetre* $a \in \mathbb{R}$ *, el sistema:*

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ ay + z = 0 \\ x + (1+a)y + az = 1 + a \end{cases}$$

SOLUCIÓ: Calculem, en primer lloc, el determinant de la matriu del sistema:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix} = a^2 + 1 - (1+a) = a(a-1).$$

En conseqüència, per $a \neq 0,1$, tenim un sistema de Cramer amb solució:[50]

$$x = \frac{1}{a(a-1)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1+a & 1+a & a \end{vmatrix} = \frac{a}{a-1},\ y = \frac{1}{a(a-1)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix} = \frac{-1}{a-1} \text{ i}$$

$$z = \frac{1}{a(a-1)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 1+a & 1+a \end{vmatrix} = \frac{a}{a-1}.$$[51] Per una altra banda, i pel valor $a = 0$, tenim el sistema compatible:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Considerant, per exemple, la variable x com a paràmetre les solucions són:

$$x \in \mathbb{R},\ y = 1 - x \text{ i } z = 0.$$

Finalment, si $a = 1$, el sistema és incompatible ja que:

$$\text{rang}A = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 < \text{rang}(A;B) = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3.$$

[50] Parlant en sentit estricte, el que tenim és un sistema de Cramer per cada valor del paràmetre a diferent de 0 i 1.
[51] Fixem-nos que la solució del sistema de Cramer depèn del valor del paràmetre *a*.

Vegem, finalment, una aplicació econòmica:

<u>Exemple</u>: *Una fabricant artesanal utilitza tres màquines per elaborar tres joguines A, B i C que ven a uns preus unitaris de 3, 4 i 7 u.m. Si el temps en hores que necessita cada màquina per elaborar una unitat de cada article, així com les disponibilitats horàries màximes, venen donades per la taula:*

Temps	*A*	*B*	*C*	*Total*
Màquina 1	*1h*	*2h*	*3h*	*80h*
Màquina 2	*1h*	*3h*	*5h*	*120h*
Màquina 3	*2h*	*5h*	*8h*	*200h*

troba la producció de A, B i C que, esgotant el temps disponible, proporciona uns ingressos de 190 u.m.

SOLUCIÓ: Si les variables x, y i z denoten les quantitats de A, B i C que esgoten el temps disponible, cal que satisfacin el sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} x+2y+3z=80 \\ x+3y+5z=120 \\ 2x+5y+8z=200 \end{cases}$$

Com que la 3ª equació és la suma de les altres dues, el sistema és compatible i indeterminat de rang 2, i equivalent al sistema de Cramer:

$$\begin{cases} x+2y=80-3z \\ x+3y=120-5z \end{cases}$$, amb z com a paràmetre.

És fàcil veure que aquest sistema té per solucions "econòmiques":

$$x=z \text{ i } y=40-2z\text{, amb } 0\le z\le 20.$$

Finalment, com que els ingressos satisfan la igualtat:

$$190=3x+4y+7z=\{x=z,y=40-2z\}=2z+160\xrightarrow{\text{Solució}}z=15$$

deduïm que cal produir i vendre 15 joguines de tipus A, 10 de tipus B i 15 de tipus C per tal d'obtenir uns ingressos monetaris de 190 u.m.

2.4. Exercicis

1. *Calcula el determinant de les matrius:*

   a. $\begin{pmatrix} a & 0 & -3 \\ 2 & -a & 5 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, per a tot $a \in \mathbb{R}$. b. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 \end{pmatrix}$.

   Són regulars aquestes matrius? Raona la resposta.[52]

2. *Calcula el rang de les matrius:*

   a. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

3. *Prova que tot sistema d'equacions lineals homogeni és compatible.*[53] *És sempre determinat? Raona la resposta.*

4. *Discuteix i resol els sistemes d'equacions lineals:*

   a. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x-z=0 \\ x+2y+3z=1 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x+y-2z=4 \\ x+8y-7z=8 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x+y-mz=1 \\ -x+my+z=1 \\ x-mz=0 \end{cases}$, amb $m \in \mathbb{R}$.

5. *Considerem una economia dividida en tres sectors: agrícola A, industrial I i serveis S. Si per a produir una unitat de A calen 1/6 unitats de A, 1/4 de I i 1/6 de S, per a una unitat de I calen 1/4 unitats de A, 1/4 de I i 1/4 de S, i per a una unitat de S calen 1/3 unitats de A, 1/4 de I i 1/3 de S, troba el número d'unitats que cal produir en cadascun dels sectors per tal de cobrir exactament les demandes internes de producció i unes demandes externes de 165 unitats en cada sector.*[54]

[52] Una matriu quadrada és *regular* si admet matriu inversa. Es pot provar que una matriu quadrada és regular si i només si el seu determinant és diferent de zero.
[53] Un sistema d'equacions lineals és *homogeni* si tots els seus termes independents són 0.
[54] Aquest exercici és un exemple de model "input-output" de Leontieff.

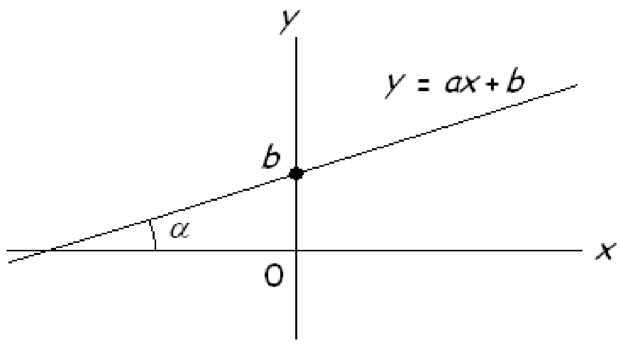
APÈNDIX

a. Funcions notables

Anem a donar la representació gràfica d'algunes de les funcions reals d'una variable més usuals.

i. *Recta*: $y = f(x) = ax + b$.[55]

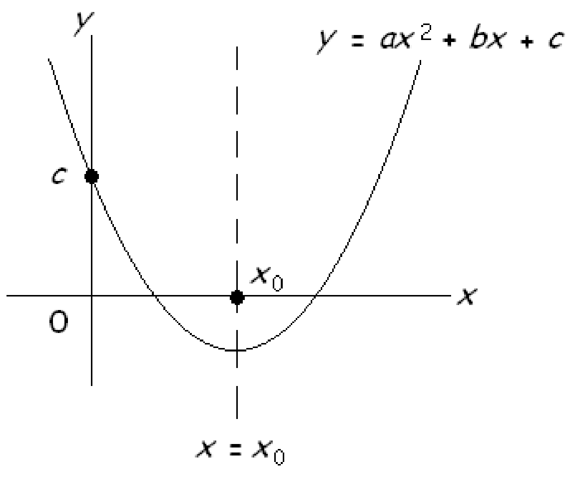
Gràficament:



La pendent de la recta és $\tan\alpha = a$.

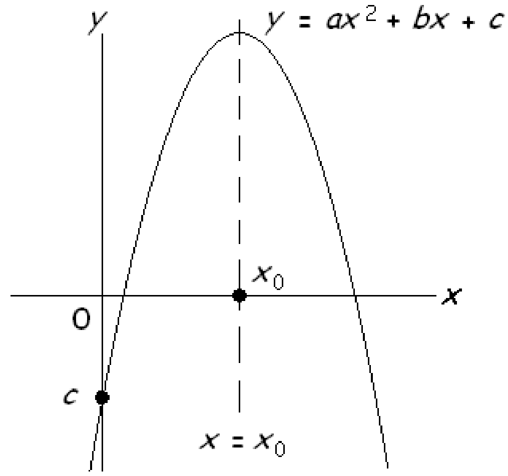
ii. *Paràbola*: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, amb $a \neq 0$.

Si $a > 0$ tenim:



[55] Es tracta de l'equació d'una recta no perpendicular a l'eix d'abscisses.

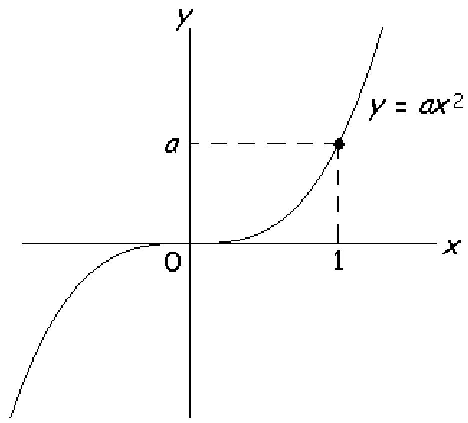
i si $a < 0$:



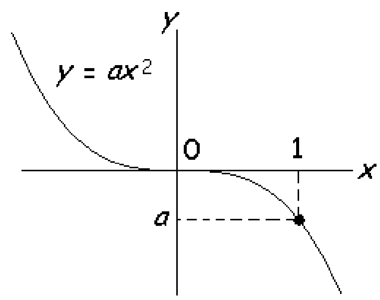
on $x_0 = -b/2a$ és el seu òptim (mínim en el primer cas i màxim en el segon), i on la recta $x = x_0$ és eix de simetria. Si $b = 0$ aquest eix coincideix amb l'eix d'ordenades.

iii. *Paràbola cúbica*: $y = f(x) = ax^3$, amb $a \neq 0$.

En tots els casos el 0 és un punt d'inflexió. Si $a > 0$ tenim:

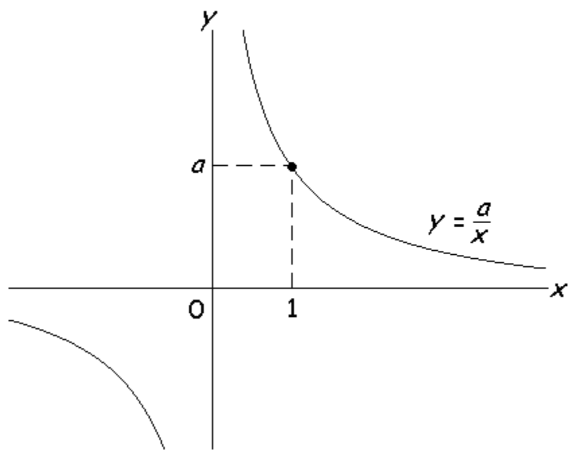


i si $a < 0$:



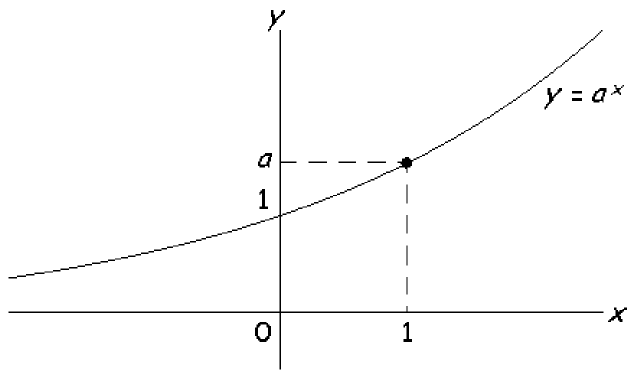
iv. *Hipèrbola equilàtera*: $y = f(x) = \frac{a}{x}$, amb $a \neq 0$.[56]

Els eixos coordinats són les seves asímptotes. Gràficament, en el cas $a > 0$:

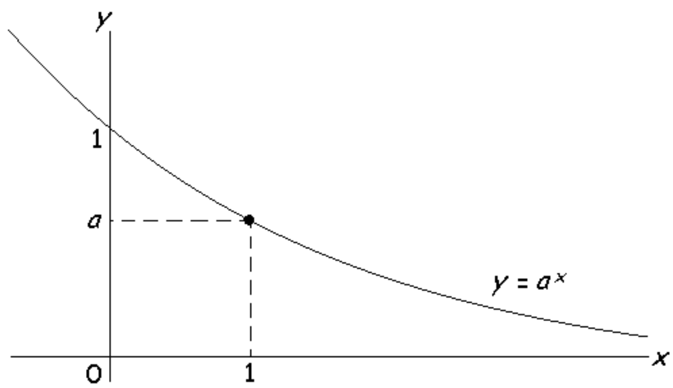


v. *Exponencial*: $y = f(x) = a^x$, amb $a > 0$.

Si $a > 1$ tenim:



i si $a < 1$:



---

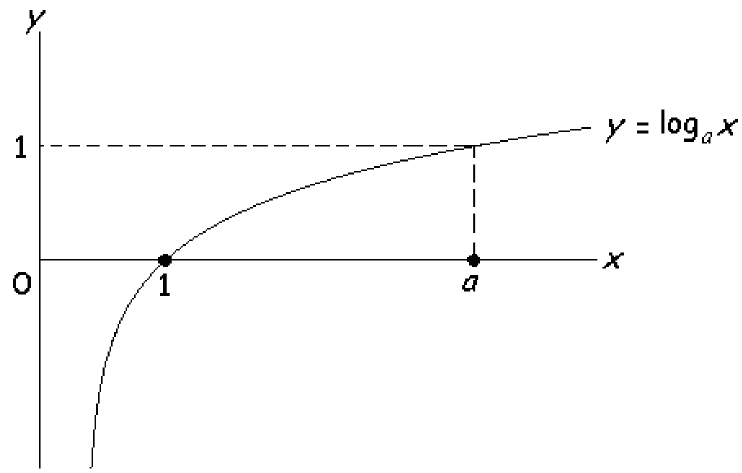
[56] Notem que una hipèrbola d'aquest tipus és el lloc geomètric dels punts que satisfan una equació del tipus $x \cdot y = \text{constant}$.

En ambdós casos, l'eix d'abscisses és una asímptota de la funció. Algunes de les propietats a tenir en compte de la funció exponencial són:

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- $\left(a^x\right)^y = \left(a^y\right)^x = a^{xy}$
- $a^0 = 1$

vi. *Logaritme*: $y = f(x) = \log_a x$, amb $a > 0$.[57]

Gràficament:



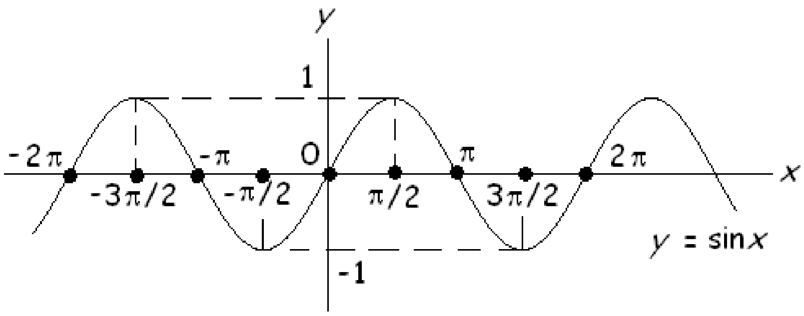
Com podem veure, l'eix d'ordenades és una asímptota. Les propietats algebraiques més importants de la funció logaritme són:

- $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^y = y \cdot \log_a x$
- $\log_a a^x = a^{\log_a x} = x$
- $\log_a a = 1$ i $\log_a 1 = 0$

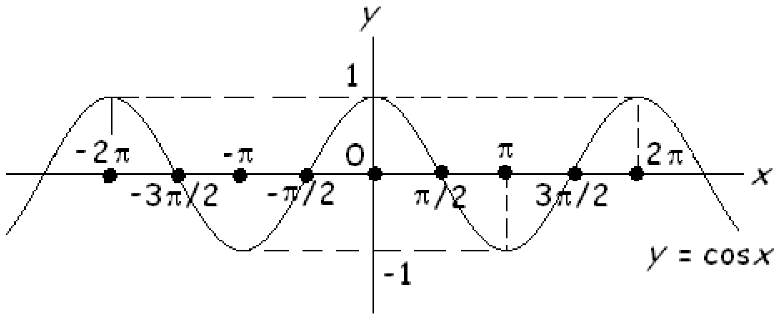
[57] Si $a = e$ es tractaria del logaritme *neperià* o *natural,* i del logaritme *decimal* si $a = 10$.

Finalment, tenim les funcions *trigonomètriques*. Ara la variable independent x ve expressada en radians.[58] Val a dir que les dues primeres funcions són periòdiques de període 2π, és a dir, que $f(x+2\pi)=f(x)$.

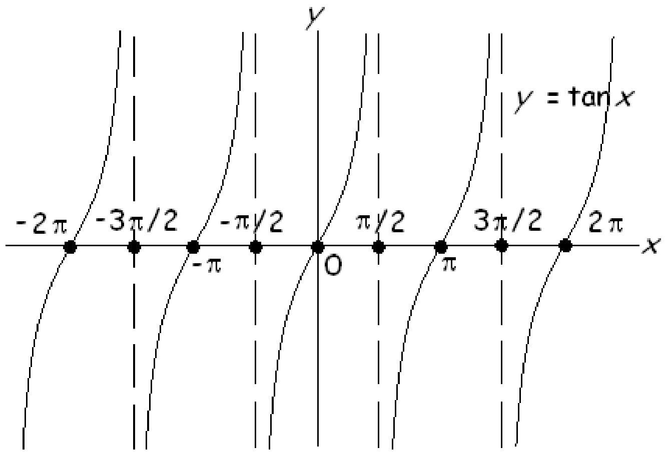
vii. $y=f(x)=\sin x$.



viii. $y=f(x)=\cos x$.



ix. $y=f(x)=\tan x$.[59]



---

[58] Un *radian* és l'angle que comprèn un arc de circumferència igual al radi. Amb total independència del valor del radi, aquest angle val una mica més de 57°.

[59] Notem que la funció tangent, per la seva banda, és periòdica de període π.

b. Mètode de Gauss

Explicarem, a grans trets, cóm funciona del mètode de Gauss de resolució de sistemes d'equacions lineals amb un exemple concret. Considerem, doncs, el sistema:

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x+y-z=1 \\ x+y-3z=-6 \end{cases}$$

que, com hem vist més amunt, és un sistema de Cramer amb solució única:

$$x=1,\ y=2 \text{ i } z=3.$$

El mètode de Gauss considera la matriu ampliada del sistema:

$$(A;B)=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

i tot un seguit d'operacions entre les seves files per tal d'obtenir, al final, una matriu triangular superior "equivalent" a $(A;B)$.[60] Una lectura atenta d'aquesta matriu triangular ens proporcionarà, finalment, la solució que busquem.[61] Les operacions entre files que estem esmentant consisteixen, bàsicament, en manipular algebraicament els coeficients de la matriu $(A;B)$ seguint la regla de que:

> "A una fila de se li pot sumar i/o restar una altra fila multiplicada per una constant".[62]

[60] Una *matriu triangular superior* té tots els coeficients per sota de la diagonal principal nuls. Per un altre cantó, quan diem que aquesta matriu és "equivalent" a la matriu ampliada del sistema inicial estem dient que és la matriu ampliada d'un sistema d'equacions lineals equivalent al inicial.

[61] En general, si no es pot arribar a obtenir aquesta matriu triangular superior això voldrà dir que el sistema inicial és incompatible.

[62] El mètode de Gauss es pot complicar una mica quan el sistema d'equacions lineals a resoldre tingui paràmetres.

Vegem com es materialitza el mètode de Gauss en aquest cas concret. El 1er. "moviment" consistirà en canviar l'element $a_{31}=1$ de $A_0=(A;B)$ per 0 i, per això, a la 3ª fila li podem restar, coeficient a coeficient, la 1ª:

$$A_0=(A;B)=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -3 & -6\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{3ª fila - 1ª fila}}A_1=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 1-1 & 1-(-2) & -3-1 & -6-0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -4 & -6\end{pmatrix}.$$

Ara, per fer un 0 en el coeficient $a_{21}=2$ de A_1, caldrà restar a la 2ª fila la 1ª multiplicada per 2:

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -4 & -6\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{2ª fila - }2\times\text{1ª fila}}A_2=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 5 & -3 & 1\\ 0 & 3 & -4 & -6\end{pmatrix}.$$

Finalment, per a aconseguir un 0 en el lloc del coeficient $a_{32}=3$ de A_2 restarem, a la 3ª fila, la 2ª multiplicada per 3/5:

$$A_2=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 5 & -3 & 1\\ 0 & 3 & -4 & -6\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{3ª fila - }\frac{3}{5}\times\text{2ª fila}}A_3=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 5 & -3 & 1\\ 0 & 0 & -11/5 & -33/5\end{pmatrix}.$$

Aquesta és la matriu triangular superior que anem buscant. Fixem-nos que A_3 és la matriu ampliada del sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases}x-2y+z=0\\ 5y-3z=1\\ -(11/5)z=-33/5\end{cases}$$

que resulta ser equivalent al inicial. Ja que:

$$-\frac{11}{5}z=-\frac{33}{5}\xrightarrow{\text{implica}}z=3\xrightarrow{5y-3z=1}y=2\xrightarrow{x-2y+z=0}x=1$$

la solució del sistema de partida serà:

$$x=1,\ y=2 \text{ i } z=3.$$

BIBLIOGRAFIA

- ADILLON, R. & JORBA, L. (1995) *Lecciones de matemáticas para economistas.* Barcelona: Gráficas Rey.
- ALEGRE, P. et al. (2005) *Matemáticas empresariales*. Madrid: AC.
- ANTÓN, H. (2003) *Introducción al álgebra lineal.* México: Limusa.
- CÁMARA, A. et al. (2003) *Problemas resueltos de matemáticas para Economía y Empresa.* Madrid: AC.
- CHIANG, A. F. (2005) *Métodos fundamentales de economía matemática.* Madrid: McGraw-Hill.
- DEMIDOVICH, B. (1993) *Problemas y ejercicios de análisis matemático.* Madrid: Paraninfo.
- DOWLING, E. T. (1982) *Matemáticas para economistas (teoría y problemas resueltos).* México: McGraw-Hill.
- MINGUILLÓN, E. et al. (2004) *Matemáticas para la Economía. Álgebra Lineal y Cálculo Diferencial. Libro de ejercicios.* Barcelona: Ariel.
- MUÑOZ, F. et al. (1988) *Manual de álgebra lineal.* Barcelona: Ariel.
- SYDSAETER, K. & HAMMOND, P.J. (1996) *Matemáticas para el análisis económico*. Madrid: Prentice Hall.

GLOSSARI