Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRADO DE MATEMÁTICAS

Trabajo final de grado

Propiedad Cohen-Macaulay en Complejos Simpliciales Shellable

Autor: Pol Úbeda Ripoll

Director: Dr. Santiago Zarzuela Armengou
Realizado en: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 24 de enero de 2023

Abstract

The main goal of this project is to prove the Stanley-Reisner ring of a shellable simplicial complex is Cohen-Macaulay over every field. To do so, we study the necessary theory from a non-homological standpoint in a self-contained manner.

In particular we study associated primes, dimension and grade of a module and how these pave the way for Cohen-Macaulay theory. We continue studying simplicial complexes and basic Stanley-Reisner theory, proving the needed results in order to prove our goal.

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es demostrar que el anillo de Stanley-Reisner de todo complejo simplicial shellable es Cohen-Macaulay. Para ello estudiamos de manera auto-contenida la teoría necesaria para llegar a ello.

En particular estudiamos la teoría de primos asociados, de la dimensión y del grado, y vemos como estas conforman conjuntamente la teoría de Cohen-Macaulay. Seguidamente trabajamos con complejos simpliciales y sus correspondientes anillos de Stanley-Reisner hasta poder demostrar el resultado deseado.

2020 Mathematics Subject Classification. 05E40, 05E45, 13C15, 13F55

Agradecimientos

Quiero primero agradecerle a mi tutor, el Dr. Santiago Zarzuela, por haberme presentado este tema de trabajo que tanto he disfrutado. El valioso tiempo que me ha dedicado y el gran apoyo que me ha mostrado de principio a fin en este proyecto ha sido invaluable para su realización. Semana tras semana nos hemos reunido desde mediados de Septiembre, y con sus consejos y nuestras interesantes conversaciones he podido explorar parte del mundo del álgebra conmutativa, que tanto me llama la atención, además de empezar a entender cómo se mueve el mundo de la investigación matemática.

Le agradezco también a mi familia su gran apoyo este semestre y todos los anteriores, en particular a mis hermanos por no huir cuando me pongo a hablar sobre matemáticas. Sin ellos no podría haber realizado el trabajo.

Finalmente gracias a todos mis amigos, que aunque no me hayan podido ayudar con la parte técnica del trabajo, mis descansos con ellos han permitido que la vuelta al estudio sea mucho más ligera. Y a mi novia, Jazmín, que aunque no hayamos estado en el mismo país durante el proyecto, me ha animado cuando lo necesitaba.

Gracias.

Índice

1. Introducción

En 1957, Theodore Motzkin conjeturó el conocido *Upper Bound Theorem*, o UBT, un enunciado de carácter combinatorio que pretende acotar el número de caras que puede tener un polítopo convexo en función de su dimensión y número de vértices. Poco después, en el 1964, Victor Klee conjeturó una pregunta similar para esferas simpliciales, es decir, para complejos simpliciales cuya realización geométrica es topológicamente una esfera. En el año 1970 Peter McMullen consiguió demostrar el resultado para polítopos manteniéndose en el campo de la combinatoria, para el lector interesado lÃ©ase su artículo [8] para una prueba completa, o bien las páginas 223-229 de [2] para una breve introducción a polítopos y un esbozo de la demostración de McMullen.

A principios de los años 70 se empezó a desarrollar lo que ahora conocemos como teoría de Stanley-Reisner, el principal puente entre el álgebra conmutativa y la combinatoria. Entre los pioneros de esta teoría están Richard P. Stanley, Gerald Reisner y Melvin Hochster. La teoría Stanley-Reisner establece una correspondencia entre los ideales monomiales libres de cuadrados en n indeterminadas y los complejos simpliciales en n vértices. Fue en el 1975 cuando Stanley pudo demostrar el UBT para esferas simpliciales, apoyándose en los métodos de álgebra conmutativa de Reisner y Hochster. En particular demostró que si Δ es un complejo simplicial de n vértices cuya realización geométrica es homeomorfa a $\mathbb{S}^{d-1}$, entonces el número de caras de Δ de dimensión $i < n$ no superan al número de caras de dimensión i del polítopo cíclico de n vértices en $\mathbb{R}^d$, $C(n, d)$. Una demostración de la conjetura para esferas simpliciales se puede encontrar en [2], o en el mismo artículo de Stanley [13].

Este es un trabajo auto-contenido en el que demostramos una pieza elemental de la demostración de McMullen que inspiró a Stanley en su demostración del UBT para esferas simpliciales [13]. Concretamente, que todo complejo simplicial *shellable* es de Cohen-Macaulay. A mediados de los años 70 Hochster le propuso a Reisner (su estudiante en aquel entonces) que caracterizara los anillos Cohen-Macaulay de Stanley-Reisner. Este lo demostró en su tesis doctoral [11], y se convirtió en un resultado homológico de gran importancia, lo que ahora conocemos como criterio de Reisner. Fue Stanley quien, inspirándose en la demostración de McMullen, dedujo que gracias al criterio de Reisner podía utilizar los anillos Cohen-Macaulay a su favor, y fue esta la idea con la que pudo demostrar el UBT para esferas simpliciales a través de las ecuaciones de Dehn-Sommerville.

El camino que se suele tomar para demostrar lo que queremos requiere métodos homológicos, ya que algunos resultados de los que veremos se demuestran más rápido por esta vía, pero sobre todo porque los resultados necesarios para el UBT que no se estudian en este trabajo requieren tomar ese camino. Sin embargo, el Dr. Santiago Zarzuela y yo decidimos no incluir álgebra homológica en el trabajo y seguir un camino alternativo con demostraciones más explícitas.

El primer capítulo está dedicado a los primos asociados de un módulo, y hemos seguido el libro de Atiyah Macdonald [1]. En este definimos los primos asociados y vemos algunas de sus propiedades básicas, en particular su existencia en el caso de módulos sobre un anillo Noetheriano. Vemos además que, si el módulo es finitamente generado, el conjunto de primos asociados es finito. Definimos también el soporte de un módulo y demostramos que el conjunto de primos asociados minimales es igual al conjunto de minimales en el soporte. Junto a otro resultado, esto nos permite deducir que si tenemos un anillo Noetheriano A y un ideal I, los primos minimales de I van a ser asociados al A-módulo

A/I.

En el segundo capítulo estudiamos la teoría de la dimensión de un anillo; la dimensión de Krull. Se sigue sobre todo el libro de Sharp [12], en particular el capítulo 15. En este capítulo hay tres resultados muy importantes del álgebra conmutativa. El primero es el teorema de la altura de Krull, que afirma que si I es un ideal generado por n elementos, la altura de sus minimales es como mucho n. El segundo es la noción de sistema de parámetros de un anillo local, que relacionaremos con el capítulo siguiente. Por último demostramos lo que llamamos teorema de la dimensión, que determina la dimensión de un anillo de polinomios. La demostración del último resultado sigue la de Nagata en [9].

El tercer capítulo estudia la teoría del grado. En este, nos seguimos basando mayoritariamente en el libro de Sharp [12], aunque algunos de los resultados están consultados en los apuntes de Giral [4] o de Kaplansky [7]. Definimos las sucesiones regulares y vemos sus propiedades básicas. Con esto demostramos que toda sucesión maximal es de la misma longitud, y denominamos grado a esta longitud. Vemos algunas propiedades del grado, y lo conseguimos relacionar con la teoría de la dimensión, probando que el grado de un ideal es como mucho su altura. Acabamos el capítulo demostrando algunas propiedades importantes que nos sirven en capítulos posteriores.

Los capítulos anteriores generan el capítulo de los anillos Cohen-Macaulay, donde definimos estos objetos y vemos algunas propiedades, como la equivalencia entre las sucesiones regulares y sistemas de parámetros en anillos locales Cohen-Macaulay. Para desarrollar este capítulo nos basamos en el libro conocido de Bruns y Herzog [2] para las definiciones y algunos resultados básicos. Sin embargo, el uso recurrente de álgebra homológica en este libro requiere que para resultados más avanzados acudamos al libro de Sharp [12]. Un resultado crucial que se necesita para el último capítulo es que si un anillo A es Cohen-Macaulay entonces un anillo de polinomios sobre A también lo es. Para terminar el capítulo definimos los módulos Cohen-Macaulay y estudiamos brevemente los anillos graduados. Esto nos permitirá utilizar un resultado crucial en la demostración final.

Acabamos con la teoría de Stanley-Reisner, donde introducimos los complejos simpliciales y definimos algunas de las propiedades que pueden adoptar, como el *shellability* o la propiedad Cohen-Macaulay. También definimos el ideal y anillo de Stanley-Reisner de un complejo, y terminamos probando que un complejo simplicial *shellable* es Cohen-Macaulay. Para realizar el capítulo utilizamos el libro de Herzog y Hibi [6] para teoría de ideales monomiales y, a lo largo del resto del capítulo utilizamos resultados y ejemplos de [2] y [3]. Acabamos dando un ejemplo de complejos simpliciales *shellable* definidos a partir de un cierto tipo de posets.

2. Notación

Para evitar posible confusión delimitemos la notación potencialmente ambigua.

- Denotamos los números enteros con $\mathbb{Z}$ y los naturales (incluyendo el 0) con $\mathbb{N}$.
- A lo largo de todo el trabajo todos los anillos que consideremos serán conmutativos.
- Si $f : A \to B$ es un aplicación, $\ker f = \{x \in A |\, f(x) = 0\}$ y $\operatorname{Im} f = \{f(x) |\, x \in A\}$.
- Si A es un anillo, $\operatorname{Spec} A$ denota su conjunto de ideales primos, y $\operatorname{Max} A$ denota los maximales del conjunto $\operatorname{Spec} A$.
- Si A es un anillo y $I \subset A$ es un ideal $\operatorname{Min}(I)$ denota los primos minimales de I.
- Sea A un anillo y $I \subset A$ un ideal. Denotamos el radical de I con

$$\operatorname{rad} I = \{x \in A |\, x^n \in I \textit{ para algún } n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{P \in \operatorname{Spec} A,\, I \subset P} P.$$

- Sea A un anillo. Denotamos el radical de Jacobson de A con

$$J(A) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A} \mathfrak{m}.$$

- Si A es un anillo, M un A-módulo y $N_1, N_2 \subset M$ A-submódulos de M, escribimos

$$(N_1 :_A N_2) = \{x \in A |\, xN_2 \subset N_1\}.$$

  En particular si $m \in M$, $(0 :_A m) = \{x \in A |\, xm = 0\}$.
- Si M es un módulo sobre A, denotamos los divisores de cero de M en A con $Z_A(M)$.
- Dado un poset $(\Pi, \leq)$, una cadena en Π es un subconjunto ordenado de elementos de Π comparables dos a dos.
- Si M es un A-módulo y N un A-submódulo de M. Denotamos el cociente M sobre N con M/N. Si $m \in M$ denotamos su clase en el cociente con $\overline{m}$ o $m + N$.
- Sea A un anillo. Un subconjunto $S \subseteq A$ es un sistema multiplicativamente cerrado de A, o s.m.c. si $1 \in S$ y para todo $s_1, s_2 \in S$, $s_1 s_2 \in S$.
- Sea A un anillo y S un s.m.c. de A. Denotamos por $S^{-1}A$ al anillo de fracciones de A respecto S. Si $P \in \operatorname{Spec} A$ y ponemos $S = A \backslash P$, denotamos $S^{-1}A = A_P$, y lo llamamos el localizado de A por P.

3. Preliminares

Este trabajo es uno auto-contenido a partir del grado universitario de matemáticas, es decir, se da por hecha toda la teoría del grado. En particular, la gran mayoría de resultados que exponemos requieren conocimiento de una asignatura introductoria al álgebra conmutativa. Exponemos en esta sección los resultados más importantes que utilizaremos a lo largo de todo el trabajo.

Proposición 3.1. *Sea K un cuerpo y I_1, I_2, I_3 tres ideales de $K[X_1, \ldots, X_n]$. Entonces entonces $I_1 \cap (I_2 + I_3) = (I_1 \cap I_2) + (I_1 \cap I_3)$.*

Lema 3.2 (Primer lema de Evitación de Primos)**.** *Sea A un anillo conmutativo, $I_1, \ldots, I_n$ ideales de A y $P \in \operatorname{Spec} A$. Si $\cap_{s=1}^{n} I_s \subset P$ entonces existe algún $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $I_i \subset P$.*

Lema 3.3 (Segundo lema de Evitación de Primos)**.** *Sea A un anillo conmutativo, I, J, K ideales de A y $P_1, \ldots, P_n$ ideales primos de A. Si $I \subset J \cup K \cup P_1 \cup \cdots \cup P_n$, entonces $I \subset J$ o bien $I \subset K$ o bien $I \subset P_i$ para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Definición 3.4. *Un anillo Artiniano es un anillo cumpliendo la condición de cadena descendente.*

Lema 3.5. *Un anillo es Artiniano si, y solo si tiene dimensión de Krull* 0.

Definición 3.6. *Sean A, B dos anillos y $f : A \to B$ un morfismo de anillos. Sean I un ideal de A y J un ideal de B. Definimos la extensión de I respecto f como $I^e = f(I)B$ y la contracción de J respecto f como $f^{-1}(J)$.*

Proposición 3.7. *Sean A, B dos anillo y I_1, I_2 dos ideales de A. Consideremos un morfismo de anillos $f : A \to B$. Entonces*

1. $(I_1 I_2)^e = I_1^e I_2^e$.
2. $(I_1)^e = (I_1)^{ece}$.

Teorema 3.8. *Sea A un anillo y I un ideal de A. Existe una biyección que preserva el orden entre los primos de A/I y los primos de A que contienen a I.*

Teorema 3.9. *Sea A un anillo y S un sistema multiplicativamente cerrado. Entonces existe una biyección que preserva el orden entre los primos de $S^{-1}A$ y los primos P de A tales que $P \cap S = \emptyset$.*

Lema 3.10. (Nakayama) *Sean A un anillo, M un A-módulo finitamente generado, $N \subset M$ un submódulo y $I \subset J(A)$.*

1. *Si $IM = M$ entonces $M = 0$.*
2. *Si $M = N + IM$ entonces $M = N$.*

Proposición 3.11. *Sea A un anillo y M un A-módulo finitamente generado por elementos $\{m_1, \ldots, m_n\}$. Entonces $(0 :_A M) = \cap_i (0 :_A m_i)$.*

Proposición 3.12. *Sea A un anillo, S un s.m.c. y M_1, M_2, M_3 tres A-módulos. Entonces una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

induce una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow S^{-1}M_1 \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M_2 \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M_3 \longrightarrow 0$$

4. Primos asociados a un módulo

Los primos asociados son de gran importancia en álgebra conmutativa ya que nos permiten comprender la estructura de los módulos (y en particular los anillos y sus ideales) de una manera elegante y útil. Por ejemplo, los primos asociados cumplen un papel esencial en la descomposición primaria de ideales, el teorema Lasker-Noether, y como veremos en capítulos posteriores, son clave al comparar la dimensión y grado de un anillo. Por esta razón vamos a estudiarlos y comprenderlos bien antes de seguir con las secciones principales de este trabajo. Nos va a interesar el caso Noetheriano por el Teorema 2.3.. El principal objetivo de este capítulo es demostrar que si M es un A-módulo finitamente generado, con A Noetheriano, entonces los minimales en el conjunto de asociados a M y los minimales en $\mathrm{Supp}_A(M)$ coinciden. Como veremos, esto nos da un punto de vista muy importante sobre los primos minimales sobre un ideal $I \subset A$, cuando consideramos el caso $M = A/I$.

Definición 4.1. *Sea A un anillo y M un módulo sobre A. Llamamos ideal primo asociado a M (o primo asociado a M) a un ideal primo $P \in \mathrm{Spec}(A)$ tal que existe $m \in M$ de manera que $P = (0 : m)$.*
Denotamos por $\mathrm{Ass}_A(M)$ al conjunto de los primos asociados a M.

Nota 4.2. El caso particular en que $M = A/I$ los llamamos primos asociados de I.

Un potencial problema sería el caso en que $\mathrm{Ass}_A(M) = \emptyset$, pero el teorema siguiente demuestra que esto no es posible en el caso Noetheriano:

Teorema 4.3. *Sea A un anillo conmutativo y M un módulo sobre A no trivial. Entonces:*

1. *Todo ideal maximal del conjunto $F = \{(0 : m) | m \in M \backslash \{0\}\}$ es primo. y así un primo asociado de M.*
2. *Si A es Noetheriano, entonces $\mathrm{Ass}_A(M) \neq \emptyset$*
3. *Si A es Noetheriano, entonces $Z_A(M) = \bigcup_{P \in \mathrm{Ass}_A(M)} P$.*

Demostración: (1). Supongamos que $\mathfrak{m}$ es un maximal de F. Para demostrar que es primo asociado basta con ver que es ideal primo, por definición. Sean $x, y \in A\backslash\{0\}$ y $m \in M\backslash\{0\}$ tal que $xy \in \mathfrak{m} = (0 : m)$. Entonces $x(ym) = 0$. Supongamos entonces que $y \notin (0 : m) \Rightarrow ym \neq 0$ y entonces $x \in (0 : ym) \in F$. Además, $(0 : m) \subset (0 : ym)$ ya que si $xm = 0 \Rightarrow xmy = 0$. Como $\mathfrak{m} = (0 : m)$ es maximal tenemos que $(0 : m) = (0 : ym) \Rightarrow x \in (0 : m) = \mathfrak{m}$ y por lo tanto $\mathfrak{m}$ es primo, y un primo asociado de M.

(2). Si A es Noetheriano tenemos que toda cadena de ideales en F estabiliza, por lo que existen ideales maximales en F. Por (1) se sigue que $\mathrm{Ass}_A(M) \neq \emptyset$.

(3). $\bigcup_{P \in \mathrm{Ass}_A(M)} P \subset Z_A(M)$ es evidente por definición de primo asociado. Sea ahora $x \in Z_A(M) \Rightarrow \exists m \in M\backslash\{0\}$ tal que $xm = 0 \Rightarrow x \in (0 : m)$, y por (1) y (2) existe $(0 : m) \subset \mathfrak{m} \in F$ primo asociado. Así, x está en un primo asociado de M, y la otra inclusión queda demostrada. □

Veamos un ejemplo de un anillo sin primos asociados.

Ejemplo 4.4. Consideramos el anillo no Noetheriano $S = K[X_i]_{i \geq 0}/(X_i^2)_{i \geq 0}$ donde K es un cuerpo. Entonces el ideal $\mathfrak{m} = (\overline{X_i})_{i \geq 0}$ de S es maximal puesto que $S/\mathfrak{m} \cong K$. Además como $\overline{X_i}^2 = 0 \; \forall i$ tenemos que $\mathfrak{m} \subseteq \mathrm{rad}(\overline{0}) = \bigcap_{P \in \mathrm{Spec}(S)} P$. Entonces $\mathrm{Spec}(S) = \mathfrak{m}$. Queremos ver entonces que $\mathfrak{m}$ no es primo asociado. Sea $x \in S$, $x \neq \overline{0}$. Podemos escribir x como una suma finita

$$x = \sum a_i \overline{X_{i_1}, \ldots X_{i_r}}$$

donde $a_i \in K$. Sabemos entonces que existe $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\overline{X_n} \cdot x \neq 0$. Como $\overline{X_n} \in \mathfrak{m}$ tenemos que $(0 : x) \neq \mathfrak{m}$. Como esto es para cualquier $x \in S$, $\mathfrak{m}$ no es primo asociado, y concluimos que $\mathrm{Ass}(S) = \emptyset$.

Ahora que hemos definido lo que son los primos asociados, vamos a ver algunas propiedades. Observemos primero lo siguiente:

Observación 4.5. P es primo asociado de un A-módulo N si y solo si existe un monomorfismo $A/P \hookrightarrow N$ definido por $\overline{1} \mapsto n$. En este caso, $P = (0 : n)$.

Notación 4.6. *Sean A un anillo, $S \subset A$ un s.m.c. y M un A.módulo. Denotamos $S^{-1}(\mathrm{Ass}_A(M)) := \{S^{-1}P \mid P \in \mathrm{Ass}_A(M)\}$. Además, si P es un ideal primo de A, y $S = A \backslash P$, escribimos $S^{-1}(\mathrm{Ass}_A(M))$ como $(\mathrm{Ass}_A(M))_P$.*

Proposición 4.7. *Sean $S \subset A$ un s.m.c. y N un $S^{-1}A$-módulo. Entonces*

$$\mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(N) = S^{-1}(\mathrm{Ass}_A(N)).$$

Si M es un A-módulo,

$$\mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M) \subseteq S^{-1}(\mathrm{Ass}_A(M)).$$

Si además A es Noetheriano, la última inclusión es una igualdad.

Demostración: Empezamos demostrando la primera parte del enunciado, con la inclusión $\subset$. Sea $S^{-1}P \in \mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(N)$, con $P \in \mathrm{Spec}(A)$ tal que $P \cap S = \emptyset$. Entonces tenemos que $S \cap Z_A(A/P) = \emptyset$, ya que $s \cdot \overline{a} = 0 \Rightarrow s \cdot a \in P \Rightarrow a \in P \Rightarrow \overline{a} = 0$. Por lo tanto existe un monomorfismo $A/P \hookrightarrow S^{-1}(A/P)$. Ahora podemos construir un monomorfismo

$$A/P \hookrightarrow S^{-1}(A/P) = S^{-1}A/S^{-1}P \hookrightarrow N$$

donde el último en la construcción viene dado por la observación 4.5. Y de nuevo por la observación, $P \in \mathrm{Ass}_A(N) \Rightarrow S^{-1}P \in S^{-1}\,\mathrm{Ass}_A(N)$.

Para la otra inclusión, sea $P \in \mathrm{Ass}_A(N)$ (pongamos $P = (0 : n), n \neq 0$), existe $A/P \hookrightarrow N$. Tenemos que $P \cap S = \emptyset$; si no fuera así, existiría $s \in S \cap P$ y se cumpliría que $s \cdot n = 0 \Rightarrow \frac{s}{1} \cdot n = 0 \Rightarrow n = 0$ por ser $\frac{s}{1}$ invertible. Así tenemos un monomorfismo inducido $S^{-1}(A/P) \hookrightarrow S^{-1}N = N$, y como $S^{-1}(A/P) = S^{-1}A/S^{-1}P$, por la observación anterior tenemos que $S^{-1}P \in \mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(N)$.

Ahora vamos a demostrar la segunda parte del enunciado, la inclusión $\supseteq$. Sea $P \in \mathrm{Ass}_A(M)$, entonces existe $A/P \hookrightarrow M$, lo que induce, como hemos visto en la primera parte de la demostración, el monomorfismo $S^{-1}(A/P) = S^{-1}A/S^{-1}P \hookrightarrow S^{-1}M$, lo que nos dice que $S^{-1}P \in \mathrm{Ass}_{S^{-1}M}(S^{-1}M)$.

Veamos ahora que cuando A es Noetheriano la última inclusión se convierte en igualdad. Sea $S^{-1}P \in \mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M)$. Basta con ver que P es primo asociado de M. Pongamos $S^{-1}P = (0 : \frac{m}{s})$. Podemos asumir equivalentemente que $s = 1$. Entonces para todo $x \in P$, $\frac{x}{1} \cdot \frac{m}{1} = 0$, y por definición de módulo de fracciones, $\exists t_x \in S$ tal que $t_x m x = 0$.

Ahora, como A es Noetheriano, P es finitamente generado. Consideremos t el producto de todos los t_x correspondientes a los generadores de P. Entonces $\forall x \in P, txm = 0$, o en otras palabras, $Ptm = 0 \Rightarrow P \subseteq (0 : tm)$. Ahora, si $y \in (0 : tm) \Rightarrow \frac{y}{1} \cdot \frac{tm}{1} \cdot \frac{1}{t} = 0 \Rightarrow \frac{y}{1} \cdot \frac{m}{1} = 0 \Rightarrow \frac{y}{1} \in S^{-1}P \Rightarrow y \in P \Rightarrow (0 : tm) \subseteq P \Rightarrow P = (0 : tm)$. Finalmente $P \in \mathrm{Ass}_A(M)$, que es lo queríamos demostrar. $\square$

Como consecuencia tenemos el caso particular en que $S = A \backslash P$, es decir, el caso localizado:

Corolario 4.8. *Sea A un anillo Noetheriano, M un A-módulo y $P \in \mathrm{Spec}(A)$. Entonces*

$$P \in \mathrm{Ass}_A M \iff PA_P \in \mathrm{Ass}_{A_P}(M_P).$$

Demostración: Por el corolario anterior se tiene que $\mathrm{Ass}_{A_P}(M_P) = (\mathrm{Ass}_A(M))_P$. Entonces si $P \in \mathrm{Ass}_A(M)$ está claro que $PA_P \in \mathrm{Ass}_{A_P}(M_P)$. Al revés, si $PA_P \in \mathrm{Ass}_{A_P}(M_P) \Rightarrow PA_P \in (\mathrm{Ass}_A(M))_P$, y por la correspondencia biunívoca entre los primos de A_P y los de A contenidos en P, tenemos que necesariamente $P \in \mathrm{Ass}_A(M)$. $\square$

El próximo resultado nos proporciona una relación muy útil entre los conjuntos de asociados de A-módulos formando una sucesión exacta. Va a ser clave para demostrar el teorema objetivo de esta sección.

Proposición 4.9. *Sean A un anillo Noetheriano y M_1, M_2, M_3 A-módulos, y*

$$0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$$

una sucesión exacta. Entonces $\mathrm{Ass}_A(M_2) \subseteq \mathrm{Ass}_A(M_1) \bigcup \mathrm{Ass}_A(M_3)$.

Demostración: Sea $P \in \mathrm{Ass}_A(M_2)$. Existe $h : A/P \hookrightarrow M_2$. Supongamos que $h(A/P) \cap f(M_1) \neq \emptyset$. Entonces $\exists \overline{a} \in A/P, m_1 \in M_1$ tal que $h(\overline{a}) = f(m_1)$. Tenemos entonces que por ser f inyectiva, $(0 : \overline{a}) = (0 : m_1)$, y como $P = (0 : \overline{a})$, tenemos que $P = (0 : m_1) \Rightarrow P \in \mathrm{Ass}_A(M_1)$.

Supongamos ahora que $h(A/P) \cap f(M_1) = \emptyset$. Al ser $\mathrm{Im}(f) = \ker(g)$, tenemos un monomorfismo

$$g \circ h : A/P \hookrightarrow M_3$$

y por lo tanto, $P \in \mathrm{Ass}_A(M_3)$. $\square$

La siguiente proposición es de gran importancia, y no solo en este trabajo, se utiliza frecuentemente en álgebra conmutativa.

Proposición 4.10. *Sea A un anillo Noetheriano y M un A-módulo finitamente generado. Entonces existe una cadena de A-submódulos*

$$0 = M_0 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M$$

tal que $\forall i, M_i/M_{i-1} \cong A/P,\ P \in \mathrm{Spec}(A)$.

Demostración: Observamos primero que como A es Noetheriano, M también lo es. Además, por el Teorema 4.3 $\mathrm{Ass}_A M \neq \emptyset$. Sean entonces $P_1 \in \mathrm{Ass}_A M$ y su monomorfismo $h_1 : A/P_1 \hookrightarrow M$. Definimos $M_1 = \mathrm{Im}(h_1)$, así tenemos una cadena $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M$ con $M_1/M_0 \cong A/P_1$. Si $M = M_1$ no hace falta hacer nada más. En caso contrario, cogemos $P_2 \in \mathrm{Ass}_A(M/M_1)$ (P_2 existe por ser M/M_1 Noetheriano), y su monomorfismo $h_2 : A/P_2 \hookrightarrow M/M_1$. Entonces existe M_2 con $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M$, y además $M_2/M_1 \cong A/P_2$. Si $M_2 = M$ ya hemos acabado, en caso contrario construimos M_3 de forma análoga a M_2. Continuando con este algoritmo de construcción se llega a un módulo $M_n = M$, ya que M es Noetheriano y por lo tanto la cadena estabiliza. $\square$

Antes de demostrar el Corolario 4.12. necesitamos un lema previo:

Lema 4.11. *Sea A un anillo y $P \in \mathrm{Spec}(A)$. Entonces $\mathrm{Ass}_A(A/P) = \{P\}$.*

Demostración: En efecto, $P = (0 : \overline{a})$, para todo $a \notin P$ (si $x \in (0 : \overline{a}) \Rightarrow xa \in P \Rightarrow x \in P$ por ser P primo), entonces $P \in \mathrm{Ass}_A(A/P)$. Sea ahora $x \in Z_A(A/P)$, tenemos que $x\overline{y} = 0 \Rightarrow xy \in P \Rightarrow x \in P$, por lo tanto $Z_A(A/P) \subseteq P$. Entonces concluimos por el Teorema 4.3 que todo los asociados de P (es decir los primos en $\mathrm{Ass}(A/P)$) están contenidos en P. Ahora, si $J \subsetneq P$ es primo propio en P, no puede ser asociado, pues existiría $b \notin P$ con $J = (0 : \overline{b}) \subsetneq (0 : \overline{a}) = P$, que es absurdo pues $(0 : \overline{a}) = (0 : \overline{b}) \forall a, b \notin P$.
$\square$

Corolario 4.12. *Si A es un anillo Noetheriano y M un A-módulo finitamente generado, entonces $\mathrm{Ass}_A(M)$ es un conjunto finito.*

Demostración: Consideramos una cadena del estilo de la proposición 4.10. Tenemos la sucesión exacta

$$0 \to M_{n-1} \to M_n \to M_n/M_{n-1} \cong A/P_n \to 0.$$

Tenemos por el lema anterior que $\mathrm{Ass}_A(A/P_n) = \{P_n\}$, y por la proposición 4.9. tenemos que $\mathrm{Ass}_A(M) \subseteq \mathrm{Ass}_A(M_{n-1}) \bigcup \{P_n\}$, y por un argumento simple de inducción concluimos finalmente que

$$\mathrm{Ass}_A(M) \subseteq \{P_1 \dots P_n\}.$$

$\square$

Ahora vamos a ver la relación entre los primos asociados de un A-módulo y el soporte del mismo, que definimos a continuación:

Definición 4.13. *Sea M un A-módulo. Definimos el soporte de M como*

$$\mathrm{Supp}_A(M) = \{P \in \mathrm{Spec}(A) \mid M_P \neq 0\}.$$

Cuando no haya ambigüedad respecto el anillo sobre el que se estudia el soporte lo denotaremos simplemente con $\mathrm{Supp}\, M$.

Observación 4.14. Como ser 0 es una propiedad local de módulos, se sigue que $M = 0$ si, y solo si $\mathrm{Supp}_A(M) = \emptyset$.

Observación 4.15. Sean P y Q ideales primos. Si $P \in \mathrm{Supp}\, M$ y $Q \supset P$ se tiene que $Q \in \mathrm{Supp}\, M$ ya que es evidente que si $M_P \neq 0$ entonces $M_Q \neq 0$.

Veamos como podemos caracterizar el soporte:

Proposición 4.16. *Sea M un A-módulo finitamente generado. Se tiene que* $\mathrm{Supp}_A(M) = \{P \in \mathrm{Spec}(A) \mid (0 : M) \subseteq P\} = V((0 : M))$.

Demostración: Veamos las dos inclusiones. Primero, si $P \in \mathrm{Supp}_A(M) \Rightarrow M_P \neq 0$ y por lo tanto $P \supseteq (0 : M)$. Ahora, si M es finitamente generado tenemos que existen $m_1, \ldots, m_n \in M \backslash \{0\}$ con $M = \langle m_1, \ldots, m_r \rangle$. Ahora,

$$(0 : M) = \bigcap_{1 \leq i \leq r} (0 : m_i).$$

Si suponemos que $P \supseteq (0 : M)$ tenemos por el segundo lema de evitación de primos que $P \supseteq (0 : m_i)$ para algún i. En particular tenemos que $\frac{m_i}{1} \neq 0$ en M_P, y por lo tanto $M_P \neq 0$. $\square$

Nota 4.17. Recordemos que existe una correspondencia biyectiva entre los primos de $V(0 : M)$ y de $\mathrm{Spec}(A/(0 : M))$. La utilizaremos al final de esta sección para estudiar un caso particular que nos será de interés en todo el trabajo.

Proposición 4.18. *Sea M un A-módulo. Entonces $\mathrm{Ass}_A(M) \subseteq \mathrm{Supp}_A(M)$.*

Demostración: Sea $P \in \mathrm{Ass}_A(M)$, entonces tenemos una inyección $A/P \hookrightarrow M$, lo que induce otra inyección $(A/P)_P \hookrightarrow M_P$, y como $(A/P)_P = A_P/(PA_P) \neq 0$, tenemos que $M_P \neq 0$. $\square$

Además nos fijamos en que por la nota 4.17, el soporte de M está en correspondencia con el espectro de un anillo, lo que nos dice que $\mathrm{Supp}_A(M)$ tiene elementos minimales (por Zorn). Más aún, si M es finitamente generado, tenemos por el Corolario 4.12 que $\mathrm{Ass}_A(M)$ es un conjunto finito, y por lo tanto también tiene minimales.

Ahora ya podemos probar el crucial resultado que vamos a utilizar en el resto del trabajo.

Teorema 4.19. *Sean A un anillo Noetheriano y M un A-módulo finitamente generado. Entonces $\mathrm{Supp}_A(M)$ y $\mathrm{Ass}_A(M)$ comparten los minimales, es decir, P es minimal en $\mathrm{Supp}_A(M) \iff P$ es minimal es $\mathrm{Ass}_A(M)$. En particular el conjunto de minimales es finito.*

Demostración: Sea $Q \in \mathrm{Supp}_A(M)$ minimal, entonces $M_Q \neq 0$. Sea $PA_Q \in \mathrm{Spec}(A_Q)$, en particular $P \subseteq Q$. Entonces es evidente que $(M_Q)_{PA_Q} = M_P$. Supongamos que $PA_Q \subsetneq QA_Q$, entonces $P \subsetneq Q$, y al ser Q minimal en $\mathrm{Supp}_A(M)$ se sigue que $M_P = 0$, y como QA_Q es maximal en M_Q, nos queda que $\mathrm{Supp}_{A_Q}(M_Q) = \{QA_Q\}$.

Ahora, como A es Noetheriano, A_Q también lo es, por lo que $\mathrm{Ass}_{A_Q}(M_Q) \neq \emptyset$, y por la proposición 4.18 concluimos que $\mathrm{Ass}_{A_Q}(M_Q) = \{QA_Q\}$. Por por la proposición 4.7 $Q \in \mathrm{Ass}_A(M)$. Finalmente, es evidente que como Q es minimal en el soporte, también lo es en el conjunto de asociados, ya que $\mathrm{Ass}_A(M) \subseteq \mathrm{Supp}_A(M)$. Y al revés, si $P \in \mathrm{Ass}_A(M)$ es minimal, también lo es en $\mathrm{Supp}_A(M)$. En efecto, si no fuera minimal en el soporte existiría $Q \in \mathrm{Supp}_A(M)$ con $Q \subsetneq P$ minimal. Pero acabamos de ver que si es minimal en el soporte lo es también en los asociados, contradiciendo que P es minimal.

En particular, como si A es Noetheriano entonces $\mathrm{Ass}_A(M)$ es finito, es evidente que lo minimales forman un subconjunto también finito. $\square$

Ahora que ya conocemos la relación entre los primos asociados a un módulo y su soporte, podemos aplicar los resultados demostrados al caso en que $M = A/I$, donde A es Noetheriano y I es un ideal de A. En este caso tenemos que por la proposición 4.16 tenemos que $\mathrm{Supp}_A(A/I) = V((0 : A/I)) = V(I)$, que está en correspondencia biyectiva con $\mathrm{Spec}(A/I)$. De esto concluimos que todos los primos minimales sobre I son de hecho asociados de I, y hay un número finito de ellos. Además, en este caso, podemos escribir que

$$\mathrm{rad}(I) = \bigcap_{P \in \mathrm{Min}(I)} P = \bigcap_{P \in \mathrm{Ass}_A(A/I)} P$$

donde la intersección es finita sobre los primos minimales sobre I.

Es importante entender bien la relación entre asociados y minimales de un ideal. Lo que hemos comprobado es la inclusión $\mathrm{Min}(I) \subseteq \mathrm{Ass}(A/I)$, es decir, podríamos encontrarnos con que no todo asociado es minimal. Más adelante, en la sección sobre anillos Cohen-Macaulay, veremos que el caso $\mathrm{Min}(I) = \mathrm{Ass}(A/I)$ es muy rico en propiedades, y da lugar al estudio de los anillos Cohen-Macaulay, un pilar del álgebra conmutativa moderna.

Para terminar el capítulo y dar cuerpo al párrafo anterior, veamos un ejemplo donde la inclusión $\mathrm{Min}(I) \subseteq \mathrm{Ass}(A/I)$ es estricta.

Ejemplo 4.20. Sea K un cuerpo. Consideramos el anillo de polinomios en las indeterminadas X,Y sobre K, $A = K[X,Y]$. Sea también $I = (X^2, XY) \subsetneq A$. Podemos tomar $M = A/I$ como A-módulo. Consideramos también los ideales $J_1 = (X)$ y $J_2 = (X,Y)$, y observamos que $I \subsetneq J_1 \subsetneq J_2$. Vamos a comprobar además que tanto J_1 como J_2 son asociados de I. Veamos que $J_1 = (0 : X+Y)$. Todo elemento de J_1 está generado por X, por lo que si $aX \in J_1$ con $a \in A \Rightarrow aX(X+Y) = aX^2 + aY = 0$ en M. Y al revés, sea $b \in (0 : X+Y) \Rightarrow b(X+Y) = bX + bY = 0$. Supongamos que $b = c_1X + c_2Y$, donde $c_1, c_2 \in A$. Entonces tenemos que $c_1X^2 + c_2XY + c_1XY + c_2Y^2 = c_2Y^2 = 0$ en M, y por lo tanto $c_2 = 0 \Rightarrow b = c_1X \in J_1$. Ahora veamos que $J_2 = (0 : X)$. Sea $aX + bY \in J_2$, donde $a, b \in A$, entonces $(aX + bY)X = aX^2 + bXY = 0$ en $M \Rightarrow aX + bY \in (0 : X)$. Y al revés, si $a \in A$ tal que $aX = 0$ en M, entonces es evidente que $a \in (X,Y) = J_2$.
Hemos demostrado entonces que J_1 y J_2 son asociados de I. Además es muy sencillo comprobar que J_1 es minimal sobre I. Concluimos que J_1 es asociado y minimal de I, pero J_2 es tan solo asociado, y no es minimal. A los asociados que son minimales se les llama aislados, y a los que no lo son, inmersos.

Observación 4.21. Para ver en el ejemplo anterior que J_1 es primo asociado podríamos haber argumentado por el Teorema 4.19 que J_1 es minimal sobre I.

5. Teoría de la Dimensión

En este capítulo vamos a estudiar la teoría de la dimensión de anillos conmutativos. Introducimos la noción de altura de un ideal primo que, junto a la definición de sucesión regular en el capítulo siguiente, nos dirige a definir los anillos Cohen-Macaulay, un objeto principal en este trabajo. Primero probamos el Teorema de Ideales Principales de Krull, y su versión generalizada, el teorema de la altura de Krull. También estudiamos el caso de un anillo local, y definiremos sistemas de parámetros, que nos ayudará a relacionar la teoría de la dimensión con la del grado, explicada en el capítulo siguiente.

Definición 5.1. *Sean A un anillo conmutativo y $P_0 \dots P_n$ ideales primos de A que cumplen*

$$P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n.$$

Definimos la longitud de esta cadena de primos como uno menos que el número de ideales en la cadena, en este caso n.
Sea $P \in \operatorname{Spec} A$. Definimos la altura de P como el supremo de las longitudes de todas las cadenas de primos en A, y la denotamos por $\operatorname{ht} P$.

Definición 5.2. *Sea A un anillo conmutativo. Definimos la dimensión de Krull de un subconjunto $S \subset \operatorname{Spec} A$ como el supremo de las longitudes de cadenas de primos de S, y las denotamos $\dim S$. De ahora en adelante cuando hablemos de dimensión, sin especificar si es vectorial o de Krull, asumiremos que es de Krull.*
Definimos la dimensión de A como $\dim A = \dim(\operatorname{Spec} A)$. Si M es un A-módulo, definimos la dimensión de M sobre A como $\dim M = \dim(\operatorname{Supp} M)$.

Observación 5.3. Fijémonos en que si $(\mathrm{A}, \mathfrak{m})$ es un anillo local, entonces $\operatorname{ht} \mathfrak{m} = \dim A$.

Empecemos con un resultado que necesitaremos en el último capítulo.

Proposición 5.4. *Sean A un anillo conmutativo y M_1, M_2 y M_3 tres A-módulos donde $\dim M_2 = d$ y $\dim M_3 < d$. Si existe una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

entonces $\dim M_1 = d$.

Demostración: Vamos a demostrar las dos desigualdades de $\dim M_1 = d$. Sea entonces $P \in \operatorname{Supp} M_1$. Sabemos que al localizar la sucesión por P se mantiene la exactitud, por lo que como $(M_1)_P \neq 0$ se sigue que $(M_2)_P \neq 0$, y $P \in \operatorname{Supp} M_2$, por lo que tenemos que $\operatorname{Supp} M_1 \subseteq \operatorname{Supp} M_2$ y entonces $\dim M_1 \leq \dim M_2$. Ahora, de la observación 4.15 deducimos que existe $P \in \operatorname{Supp} M_2$ tal que $\dim_A M_2 = \dim A/P$. Tenemos que $(M_2)_P \neq 0$, y al ser $\dim M_3 < \dim M_2$, se sigue que $P \notin \operatorname{Supp} M_3$, por lo que $(M_3)_P = 0$. Tenemos entonces una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow (M_1)_P \xrightarrow{f_P} (M_2)_P \xrightarrow{g_P} 0$$

por lo que $(M_1)_P \cong (M_2)_P \neq 0$ y $P \in \operatorname{Supp} M_1$, y por lo tanto $\dim M_1 = \dim M_2$. □

Antes de enunciar y demostrar el Teorema de Ideales Principales de Krull debemos definir los ideales primarios y las potencias simbólicas. También vemos algunas propiedades de estos objetos que nos ayudarán en la demostración del teorema.

Lema 5.5. *Sea A un anillo conmutativo, $S \subset A$ un s.m.c., $I \subset A$ un ideal y P un primo minimal de I tal que $P \cap S = \emptyset$. Entonces $S^{-1}P$ es un primo minimal de $S^{-1}I$.*

Demostración: Lo hacemos por contradicción. Usemos la notación de extensión y contracción respecto el morfismo $A \to S^{-1}A$. Ya sabemos que $P^e \in \operatorname{Spec} S^{-1}A$ y que $I^e \subseteq P^e$. Supongamos que P^e no es minimal de I^e, es decir, existe $Q \in \operatorname{Spec}(A)$ con $Q \cap S = \emptyset$ tal que $I^e \subseteq Q^e \subsetneq P^e$ (por la correspondencia biyectiva entre $\{P \in \operatorname{Spec} A \mid P \cap S = \emptyset\}$ y $\operatorname{Spec}(S^{-1}A)$). Ahora contraemos la cadena y obtenemos

$$I \subseteq I^{ec} \subseteq Q^{ec} = Q \subsetneq P^{ec} = P$$

contradiciendo que P es minimal. □

Ahora definimos lo que es un ideal primario y las potencias simbólicas. Vamos a ver dos definiciones equivalentes porque en algunos casos nos conviene usar una u otra.

Definición 5.6. *Decimos que un ideal $Q \subset A$ es primario si $\forall a, b \in A$ tal que $ab \in Q$ se tiene que si $a \notin Q$ entonces $b \in \operatorname{rad}(Q)$. Si $P = \operatorname{rad}(Q)$ decimos que Q es P-primario.*

Equivalentemente,

Definición 5.7. *Con la misma notación que en la definición anterior, decimos que Q es primario cuando: si $ab \in Q$ y $a \notin \operatorname{rad}(Q)$ entonces $b \in Q$. Además, si P es el radical de Q, decimos que Q es P-primario.*

Lema 5.8. *Si $I \subset A$ es un ideal primario, entonces $\operatorname{rad}(I)$ es primo.*

Demostración: Suponemos que I es primario, y denotamos $Q = \operatorname{rad}(I)$. Sean $a, b \in A$ tal que $ab \in Q$ pero $a \notin Q$. Entonces para algún $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $(ab)^n \in I$. Como I es primario, $b^n \in I$ y entonces $b \in Q$, y concluimos que $Q = \operatorname{rad}(I)$ es primo. □

Veamos un caso particular del lema anterior en el que $\operatorname{rad}(I) = \mathfrak{m}$ es maximal. Cuando esto pasa, el resultada es recíproco.

Proposición 5.9. *Sea $\mathfrak{m}$ un maximal de A. Entonces $I \subset A$ es $\mathfrak{m}$-primario si, y solo si $\operatorname{rad}(I) = \mathfrak{m}$.*

Demostración: Si I es $\mathfrak{m}$-primario, entonces $\operatorname{rad}(I) = \mathfrak{m}$ por definición. Veamos entonces que si $\operatorname{rad}(I) = \mathfrak{m}$, entonces I es primario. Sean $a, b \in A$ tal que $ab \in I$. Para ver que I es primario suponemos que $a \notin \operatorname{rad}(I) = \mathfrak{m}$ y queremos ver que $b \in I$. Tenemos que $(a) + I = A$. En efecto, si no fuera así, existiría un primo P con $(a) + I \subseteq P \Rightarrow I \subseteq P$, pero al ser $\mathfrak{m}$ el único primo que contiene a I se tendría $P = \mathfrak{m}$, entonces $a \in \mathfrak{m}$, absurdo. Entonces podemos escribir $1 = ax + y$, donde $x \in A$ y $y \in I$. Multiplicando por b queda $b = abx + by \in I$ ya que $ab \in I$ y $by \in I$. Queda probado que I es primario, y por lo tanto $\mathfrak{m}$-primario. □

Ahora definimos las potencias simbólicas y demostramos algúnos resultados que nos ayudarán a demostrar el Teorema de Ideales Principales.

Definición 5.10. *Sea A un anillo conmutativo y $S \subset A$ un s.m.c. Sea P un primo de A. Consideramos el anillo localizado en P, A_P. Usando la notación de extensión y contracción respecto $A \to A_P$, definimos para algún $n \geq 1$ la n-ésima potencia simbólica como el ideal*

$$P^{(n)} = (P^n)^{ec}.$$

Vamos a ver una defición alternativa de potencia simbólica, que usaremos en la demostración de la proposición 5.14.

Lema 5.11. *Podemos definir la n-ésima potencia simbólica como*

$$P^{(n)} = \{a \in A \mid \; as \in P^n \; para\; cierto \; s \notin P\}.$$

Demostración: Veamos la inclusión $\subseteq$. Si $a \in P^{(n)} = (P^n)^{ec}$ entonces existen $b \in P^n$, $s \notin P$ tal que $f(a) = \frac{b}{s} \Rightarrow f(as) = \frac{b}{1}$. Pero $f(as) = \frac{as}{1}$,por lo que existe $t \notin P$ tal que $t(b - as) = 0 \Rightarrow tb = a(ts)$. Ahora, como $b \in P^n \Rightarrow tb \in P^n \Rightarrow a(ts) \in P^n$, además $ts \notin P$.

Para la otra inclusión consideramos $a \in A$ tal que para algún $s \notin P$ se tiene $as \in P^n$. Entonces $f(as) = \frac{as}{1}$, y si dividimos por s tenemos que $\frac{a}{1} \in (P^n)^e$ y como $f(a) = \frac{a}{1}$ concluimos que $a \in (P^n)^{ec} = P^{(n)}$. $\square$

Lema 5.12. *Sea Q un ideal P-primario, y sea $x \notin P$. Entonces $Q = (Q : x)$.*

Demostración: Es evidente que si $y \in Q$, entonces $xy \in Q$ por ser Q ideal, por lo que la inclusión $Q \subseteq (Q : x)$ es inmediata. Ahora, si $y \in (Q : x)$ entonces $xy \in Q$. Pero como $x \notin P = \operatorname{rad}(Q)$, tenemos por la definición de ideal P-primario que $y \in Q$. Queda probada la igualdad. $\square$

Lema 5.13. *Sea $f : A \to B$ un morfismo de anillos, y $I \subset B$ un ideal. Entonces*

$$\operatorname{rad}(I^c) = (\operatorname{rad}(I))^c.$$

Demostración: Lo hacemos por inclusiones. Empezamos con $\subseteq$. Sea $a \in \operatorname{rad}(I^c)$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ con $a^n \in I^c$. Entonces $f(a^n) = (f(a))^n \in I \Rightarrow f(a) \in \operatorname{rad}(I) \Rightarrow a \in (\operatorname{rad}(I))^c$. Ahora la otra inclusión. Sea $b \in (\operatorname{rad}(I))^c$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f(b)^m \in I \Rightarrow f(b^m) \in I \Rightarrow b^m \in I^c \Rightarrow b \in \operatorname{rad}(I^c)$. $\square$

Proposición 5.14. *Sea $P \in \operatorname{Spec} A$. $P^{(n)}$ es P-primario.*

Demostración: Primero demostramos que P es el radical de $P^{(n)}$, y luego vemos que $P^{(n)}$ es primario. Usamos la notación de contracción y extensión respecto $f : A \to A_P$. Sabemos que A_P es local con maximal P^e. Sabemos además que $(P^n)^e = (P^e)^n$, por lo que $(P^n)^{ec} = ((P^e)^n)^c$. Como $\operatorname{rad}((P^e)^n) = P^e$, por la proposición 5.9 $(P^e)^n$ es P^e-primario, en particular $\operatorname{rad}((P^e)^n) = P^e \Rightarrow P = P^{ec} = (\operatorname{rad}((P^e)^n))^c$. Queremos ver que

$$(\operatorname{rad}((P^e)^n))^c = \operatorname{rad}(((P^e)^n)^c),$$

así tendremos que P es el radical de $P^{(n)}$. Esto se cumple por el lema 5.13

Veamos ahora que $P^{(n)}$ es primario. Sea $ab \in P^{(n)}$. Entonces, por el lema 5.11 existe $s \notin P$ tal que $(ab)s \in P^n$. Supongamos que $b \notin \operatorname{rad}(P^{(n)}) = P$, y veamos que $a \in P^{(n)}$, así $P^{(n)}$ será P-primario por la definición 3.6. Al ser P primo, $bs \notin P$, y como $a \cdot bs \in P^n$, por el lema 5.11 $a \in P^{(n)}$. $\square$

Teorema 5.15. (Ideales Principales de Krull) *Sea A un anillo conmutativo Noetheriano y $x \in A$ no unidad. Sea P un primo minimal de (x). Entonces* $\operatorname{ht} P \leq 1$.

Demostración: Por Lema 5.5 tenemos que PA_P es minimal de (x) y es evidente que $\operatorname{ht} PA_P = \operatorname{ht} P$. Como PA_P es el único maximal en A_P, es equivalente probar el resultado suponiendo que (A, P) es anillo local. Supongamos que $\operatorname{ht} P > 1$, entonces existe una cadena de primos de longitud 2,

$$Q_0 \subsetneq Q \subsetneq P.$$

Como P es minimal de (x) y maximal en A, se tiene que $\operatorname{Spec}(A/(x)) = \{\overline{P}\}$, y por lo tanto $A/(x)$ es Artiniano. Observamos que $Q^{(n+1)} \subseteq Q^{(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Podemos construir la cadena descendente en $A/(x)$

$$\overline{Q^{(1)}} \supseteq \overline{Q^{(2)}} \supseteq \cdots \supseteq \overline{Q^{(n)}} \supseteq \ldots$$

y por ser $A/(x)$ Artiniano, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{Q^{(m)}} = \overline{Q^{(m+1)}}$ para todo $m \geq m_0$, es decir, $Q^{(m)} + (x) = Q^{(m+1)} + (x)$. Sea entonces $r \in Q^{(m)}$. Tenemos que existen $s \in Q^{(m+1)}$, $c \in A$ tal que $r = s + xc \Rightarrow xc = r - s \in Q^{(m)}$ ya que $Q^{(m+1)} \subset Q^{(m)}$. Por la proposición anterior, $Q^{(m)}$ es Q-primario y $x \notin Q$ por ser P minimal sobre (x), y por el Lema 5.11 se tiene que $c \in Q^{(m)}$. De aquí se deduce que

$$Q^{(m)} = Q^{(m+1)} + xQ^{(m)}.$$

Por el Lema de Nakayama se sigue que $Q^{(m)} = Q^{(m+1)}$. Ahora usemos esta propiedad para acabar la demostración. Tenemos que, usando la notación de extensión y contracción respecto $A \to A_Q$,

$$(Q^e)^m = (Q^m)^e = (Q^m)^{ece} = (Q^{(m)})^e = (Q^{(m+1)})^e = (Q^{m+1})^{ece} = (Q^e)^{m+1}$$

donde hemos usado la propiedad, la definición de potencias simbólicas y que si I_1, I_2, I son ideales entonces $(I_1 I_2)^e = I_1^e I_2^e$ y $I^e = I^{ece}$. Ahora, aplicando el lema de Nakayama a la igualdad

$$(Q^e)^m = Q^e \cdot (Q^e)^m$$

obtenemos que $(Q^e)^m = 0$. Por lo tanto Q^e es nilpotente en A_Q y está contenido entonces en todo ideal primo de A_Q. En particular se tiene que $Q^e \subset Q_0^e$, pero esto contradice $Q_0 \subsetneq Q$, y por lo tanto no existe una cadena de longitud mayor a 1, por lo que $\operatorname{ht} P \leq 1$.
□

Ahora vamos a ver la versión del teorema generalizada, que es consecuencia del caso particular.

Teorema 5.16. (Altura de Krull) *Sea A un anillo conmutativo Noetheriano y $I \subset A$ un ideal propio que puede ser generado por n elementos. Entonces* $\operatorname{ht} P \leq n$ *para todo primo* $P \in \operatorname{Spec} A$ *minimal de I.*

Demostración: Lo haremos por inducción sobre n. El caso $n = 0$ es trivial y el caso $n = 1$ nos lo asegura el teorema anterior. Suponemos cierto el enunciado para $1 \leq k < n$. Sean $x_1, \ldots, x_n$ tal que $I = (x_1 \ldots, x_n)$. Sea $P \in \operatorname{Spec} A$ minimal de I y $Q \subsetneq P$ una cadena saturada, es decir, que no existe ningún primo Q_1 tal que $Q \subsetneq Q_1 \subsetneq P$. Queremos demostrar que $\operatorname{ht} P \leq n$, y para ello podemos suponer que (A, P) es local por la misma razón explicada al principio de la demostración anterior. Como la cadena $Q \subsetneq P$ es saturada, tenemos $\operatorname{ht} P \leq n \iff \operatorname{ht} Q \leq n - 1$, y esto es lo que vamos a demostrar. Por la minimalidad de P sobre I, tenemos que $I \not\subseteq Q$, por lo que existe algún i con $x_i \notin Q$. Sin perdida de generalidad pongamos $x_1 \notin Q$. Entonces se cumple que $I \subset Q + (x_1)$ y por lo tanto $P = \operatorname{rad}(Q + (x_1))$. Entonces para cada $i \geq 2$ existen $r_i \in \mathbb{N}, y_i \in Q, a_i \in A$ tal que

$$x_i^{r_i} = y_i + x_1 a_i.$$

Consideramos el anillo $\overline{A} = A/(y_2, \ldots, y_n)$ y la cadena inducida $\overline{Q} \subset \overline{P}$. Sea $\overline{P'} \in \operatorname{Spec} \overline{A}$ minimal sobre $\overline{(x_1)}$. Entonces como $\overline{0}, \overline{x_1} \in \overline{P'}$ se tiene que si denotamos $P' := (\overline{P'})^c$ donde la contracción es respecto $A \to \overline{A}$, entonces $x_1, x_2^{r_2}, \ldots, x_n^{r_n} \in P' \Rightarrow x_1, \ldots, x_n \in P'$, y como P es minimal sobre I y maximal en A entonces $P' = P$. Es decir, $\overline{P}$ es minimal sobre $\overline{(x_1)}$. Ahora, por el Teorema de Ideales Principales de Krull, se tiene que $\operatorname{ht} \overline{P} \leq 1 \Rightarrow \operatorname{ht} \overline{Q} = 0$. Entonces $\overline{Q}$ es un primo minimal de $\overline{(0)}$, de lo que deducimos que Q es un primo minimal de $(y_2, \ldots, y_n)$. Por la hipótesis de inducción, $\operatorname{ht} Q \leq n-1$ y como $Q \subset P$ es saturada, concluimos que $\operatorname{ht} P \leq n$. □

Observación 5.17. En particular, todos los primos minimales descritos en el enunciado del teorema anterior son asociados a I.

Corolario 5.18. *Sea A un anillo conmutativo Noetheriano.*

1. *Todo primo de A tiene altura finita.*
2. *Si $P \subseteq Q$ son primos, entonces $\operatorname{ht} P \leq \operatorname{ht} Q$ y es igualdad cuando $P = Q$.*

Demostración:

1. Si P es un primo de A, al ser Noetheriano, P es finitamente generado, pongamos por n elementos. Entonces por el teorema de altura de Krull se tiene $\operatorname{ht} P \leq n$.
2. Supongamos que $\operatorname{ht} P = n$, entonces existe una cadena

$$P_0 \subset \cdots \subset P_n = P.$$

Si $P \subsetneq Q$ entonces esta claro que $\operatorname{ht} P < \operatorname{ht} Q$ pues puedo construir la cadena

$$P_0 \subset \cdots \subset P_n = P \subset Q.$$

También es evidente que si $P = Q$ entonces sus alturas son iguales. □

Ahora que hemos probado el teorema de la altura de Krull, nuestro objetivo es probar que si $P \in \operatorname{Spec} A$ tiene altura n, entonces es minimal de un ideal generado por n elementos. Para ello necesitamos definir la altura de un ideal (no necesariamente primo) y un lema previo.

Definición 5.19. *Sea A un anillo conmutativo Noetheriano, $I \subset A$ un ideal. definimos la altura de I como*

$$\operatorname{ht} I = \min\{\operatorname{ht} P \mid P \in V(I)\}.$$

Observación 5.20. La altura de un ideal está bien definida pues siempre está contenido en un ideal primo. Fijémonos también en que si I es primo, la definición anterior coincide con la ya conocida. Además, podemos simplificar la definición de la siguiente manera:

$$\operatorname{ht} I = \min\{\operatorname{ht} P \mid P \in \operatorname{Min} I\} = \{\operatorname{ht} P \mid P \in \operatorname{Ass} A/I\}.$$

Lema 5.21. *Sea A un anillo conmutativo Noetheriano, $P \in \operatorname{Spec} A$, $I \subset A$ ideal. Suponemos que $\operatorname{ht} P = \operatorname{ht} I$. Entonces P es minimal de I.*

Demostración: Suponemos que P no es minimal de I, por lo que existe $Q \in \operatorname{Spec} A$ con $I \subsetneq Q \subsetneq P$. Entonces $\operatorname{ht} I \leq \operatorname{ht} Q < \operatorname{ht} P$, contradiciendo la hipótesis. $\square$

Ahora podemos probar el teorema deseado.

Teorema 5.22. *Sea A un anillo conmutativo Noetheriano y $P \in \operatorname{Spec} A$. Si $\operatorname{ht} P = n$ entonces existe un ideal $I \subset P$ generado por n elementos con $\operatorname{ht} I = n$. En particular P es minimal de I.*

Demostración: Lo hacemos por inducción en n. Para $n = 0$ podemos coger $I = (0)$, que cumple el enunciado. Suponemos cierto el resultado para todo $0 \leq k < n$. Suponemos entonces que $\operatorname{ht} P = n$, por lo que existe una cadena

$$P_0 \subset \cdots \subset P_{n-1} \subset P_n = P.$$

Es evidente que $\operatorname{ht} P_{n-1} = n-1$. Por la HI tenemos que existe un ideal $J = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ tal que $\operatorname{ht} J = n-1$ y P_{n-1} es minimal de J. Por el Teorema 5.16 tenemos que todo ideal minimal de J tiene altura $n-1$, y sabemos por el capítulo anterior que hay un número finito de minimales. Queremos ver que existe un elemento fuera de todo minimal de J, para asi construir un ideal nuevo adjuntando el elemento a J. Sean entonces $Q_1, \ldots, Q_r$ los otros minimales de J. Supongamos que

$$P \subseteq P_{n-1} \cup (\bigcup_{1 \leq i \leq r} Q_i).$$

Por el segundo lema de evitación de primos tenemos que o bien $P \subseteq P_{n-1}$ o $P \subseteq Q_i$ para algún i. Pero esto no puede pasar pues $n-1 = \operatorname{ht} P_{n-1} = \operatorname{ht} Q_i < \operatorname{ht} P = n$ para todo i. Podemos entonces considerar

$$x_n \in P \backslash (P_{n-1} \cup (\bigcup_{1 \leq i \leq r} Q_i))$$

y definir un ideal $I = J + (x_n) = (x_1, \ldots, x_n)$. Tenemos que I está generado por n elementos y se tiene que $I \subset P$. Por lo tanto solo falta ver que $\operatorname{ht} I = n$.
Como tenemos que $J \subseteq I \subseteq P$ se deduce que $\operatorname{ht} I \in \{n-1, n\}$. Suponemos que $\operatorname{ht} I = n-1$. Por definición quiere decir que existe un primo minimal P' de I con $\operatorname{ht} P' = n-1$. Pero por el lema 5.21 se sigue que P' es minimal de J, por lo que se encuentra en el conjunto $\{P_{n-1}, Q_1, \ldots, Q_r\}$, pero esto es una contradicción puesto que $x_n \in I \subset P'$ y en cambio x_n no está en ningún minimal de J. Concluimos que $\operatorname{ht} I = n$. Que P sea minimal de I se deduce del Lema 5.21. $\square$

Corolario 5.23. *Sea A un anillo conmutativo Noetheriano. Sea $I \subset A$ ideal generado por n elementos. Sea P primo con $I \subset P$. Entonces*

$$\operatorname{ht} P/I \leq \operatorname{ht} P \leq \operatorname{ht} P/I + n.$$

Demostración: Que $\operatorname{ht} P/I \leq \operatorname{ht} P$ es trivial, veamos la segunda desigualdad. Ponemos $I = (a_1, \ldots, a_n)$. Consideramos $\overline{A} = A/I$, y suponemos que $\operatorname{ht} P/I = r$. Por el teorema anterior existen $b_1, \ldots, b_r \in A$ tal que P/I es primo minimal de $\overline{J} := (\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_r})$. Ahora, si $J = (b_1, \ldots, b_r)$, se tiene que

$$\overline{J} = (J + I)/I,$$

y como P/I es minimal de $\overline{J}$, P es minimal de $J + I$, que se puede generar con $r + n$ elementos. Por el teorema de la altura de Krull, $\operatorname{ht} P \leq r + n$. $\square$

Ahora pasamos a estudiar el caso local Noetheriano. Primero vamos a ver que la dimensión de un anillo local $(\mathrm{A}, \mathfrak{m})$ es igual al mínimo número de elementos que generan un ideal $\mathfrak{m}$-primario. A partir de este resultado definimos lo que es un sistema de parámetros de A, y vemos el resultado que hace que estos objetos sean interesantes y útiles.

Proposición 5.24. *Sea* $(\mathrm{A}, \mathfrak{m})$ *un anillo local Noetheriano. Entonces la dimensión del anillo,* $\dim A = \operatorname{ht} \mathfrak{m}$ *es igual al mínimo número de elementos de A que se necesitan para generar un ideal* $\mathfrak{m}$*-primario. Es decir,*

$$\dim A = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists\, a_1, \ldots a_n \in A,\ (a_1, \ldots, a_n)\ \mathfrak{m}\text{-}primario\}.$$

Demostración: Sea d la parte de la derecha de la igualdad en el enunciado, y sea Q el ideal $\mathfrak{m}$-primario generado por los d elementos. El ser $\mathfrak{m}$-primario quiere decir que el radical de Q es $\mathfrak{m}$, y como el radical es la intersección de los primos que contienen Q, deducimos que $\mathfrak{m}$ es minimal sobre Q. Por el teorema de la altura de Krull tenemos que $\operatorname{ht} \mathfrak{m} = \dim A \leq d$. Ahora veamos la otra desigualdad. Por el teorema 5.22 sabemos que existe un ideal I generado por $\operatorname{ht} \mathfrak{m}$ elementos, y que $\mathfrak{m}$ es minimal sobre I. Es entonces evidente que I es $\mathfrak{m}$-primario por la proposición 4.9. Tenemos entonces un ideal $\mathfrak{m}$-primario generado por $\operatorname{ht} \mathfrak{m}$ elementos. De la minimalidad en la definición de d se sigue que $d \leq \operatorname{ht} \mathfrak{m} = \dim A$. □

Definición 5.25. *Sea* $(\mathrm{A}, \mathfrak{m})$ *un anillo local Noetheriano de dimensión d. Llamamos sistema de parámetros de A a un conjunto de d elementos de A que generan un ideal M-primario.*

Observación 5.26. Se sigue de la proposición anterior que siempre existe un sistema de parámetros.

Antes de ver el resultado que hace que los sistemas de parámetros sean tan interesantes necesitamos un lema previo.

Lema 5.27. *Sea* $(\mathrm{A}, \mathfrak{m})$ *un anillo local y J un ideal. Sean $I \subset J$ dos ideales de A. Ponemos* $\overline{J} = J/I$ *y* $\overline{A} = A/I$. $\overline{J}$ *es un ideal* $\overline{\mathfrak{m}}$*-primario si, y solo si J es un ideal* $\mathfrak{m}$*-primario.*

Demostración: Es evidente que $\mathfrak{m}$ es minimal de J si, y solo si $\overline{\mathfrak{m}}$ es minimal de $\overline{J}$. Entonces

$$\operatorname{rad}(J) = \mathfrak{m} \iff \operatorname{rad}(\overline{J}) = \overline{\mathfrak{m}},$$

por lo que el resultado es consecuencia directa de la proposición 4.9. □

Proposición 5.28. *Sea* $(\mathrm{A}, \mathfrak{m})$ *un anillo local Noetheriano. Sean* $a_1, \ldots, a_t \in \mathfrak{m}$. *Entonces*

$$\dim A - t \leq \dim A/(a_1, \ldots, a_t) \leq \dim A.$$

Además, $\dim A/(a_1, \ldots, a_t) = \dim A - t \iff \{a_1, \ldots, a_t\}$ *es un subconjunto de un sistema de parámetros de A.*

Demostración: Por el Corolario 5.23 se cumple que $\dim A - t \leq \dim A/(a_1, \ldots, a_t)$, ya que $\dim A = \operatorname{ht} \mathfrak{m}$. La segunda desigualdad es trivial. Veamos entonces la segunda parte del enunciado.

($\Rightarrow$) Sea $d = \dim A$, y suponemos que $\dim \overline{A} = d - t$. Por la proposición 5.24 tenemos que existen $a_{t+1}, \ldots, a_d \in A$ tal que $(\overline{a_{t+1}}, \ldots, \overline{a_d})$ es ideal $\overline{\mathfrak{m}}$-primario. Por el lema anterior

$(a_1, \ldots, a_d)$ es ideal $\mathfrak{m}$-primario, por lo que $\{a_1, \ldots, a_d\}$ es un sistema de parámetros, y $\{a_1, \ldots, a_t\}$ es un subconjunto de un sistema de parámetros.

($\Leftarrow$) Sean $a_{t+1}, \ldots, a_d \in A$ tal que $\{a_1, \ldots, a_d\}$ es un sistema de parámetros de A. Entonces $(a_1, \ldots, a_d)$ es ideal $\mathfrak{m}$-primario, por lo que, por el lema anterior, $(\overline{a_{t+1}}, \ldots, \overline{a_d})$ es un ideal $\overline{\mathfrak{m}}$-primario. Por la minimalidad en la proposición 5.24 se sigue que $\dim \overline{A} \leq d-t$. Esto, junto a la primera parte del enunciado, concluye que $\dim A/(a_1, \ldots, a_t) = \dim A - t$ □

Este resultado es muy satisfactorio. Caracteriza los sistemas de parámetros de manera muy sencilla de comprender, lo que nos ayuda a trabajar con ellos.
Ahora vamos a ver una proposición bien conocida.

Proposición 5.29. *Sea A un anillo conmutativo Noetheriano, y consideramos el anillo $A[X]$. Sea I un ideal y P un primo minimal sobre I. Entonces $P[X]$ es minimal sobre $I[X]$.*

Demostración: Supongamos que existe un primo $J \in \operatorname{Spec}(A[X])$ de manera que $I[X] \subset J \subset P[X]$. Si contraemos estos ideales respecto el morfismo $f : A \to A[X]$ tenemos una cadena $I \subset J^c \subseteq P$. Por la minimalidad de P tenemos que $J^c = P$. Ahora, extendiendo a $A[X]$ obtenemos

$$P[X] = J^{ce} \subseteq J \subseteq P[X]$$

y por lo tanto $J = P[X]$. Así $P[X]$ es minimal sobre $I[X]$. □

Para acabar la sección vamos a demostrar el Teorema de la Dimensión, un resultado conocido de la dimensión de un anillo de polinomios sobre un anillo Noetheriano. El teorema nos interesa puesto que cuando estudiemos complejos simpliciales vamos a trabajar con anillos en un número finito de variables.

Teorema 5.30. *Sean A un anillo conmutativo Noetheriano y $X_1, \ldots, X_n$ indeterminadas. Entonces $\dim A[X_1, \ldots, X_n] = \dim A + n$.*

Demostración: Lo hacemos por inducción en n. Empezamos considerando $A[X]$, y queremos demostrar que $\dim A[X] = \dim A + 1$. Toda cadena de primos en A

$$Q_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Q$$

induce una cadena en $A[X]$

$$Q_0[X] \subsetneq \cdots \subsetneq Q[X].$$

Además podemos extender esta cadena con $Q[X] \subsetneq Q[X] + (X)$. En efecto, $Q[X] + (X)$ es primo pues $A[X]/(Q[X] + (X)) \cong A/Q$ es dominio. Por lo tanto para cualquier cadena en A de longitud r, existe una en $A[X]$ de longitud r+1, por lo que $\dim A[X] \geq \dim A + 1$.

Ahora veamos la otra desigualdad. Consideramos un ideal $P' \in \operatorname{Spec} A[X]$, y definimos $P = (P')^c$. Vamos a ver que $\operatorname{ht} P' \leq \operatorname{ht} P + 1$. Para ello, podemos suponer que (A, P) es local ya que al localizar A por P no cambian las alturas de P y P'. Entonces podemos considerar un sistema de parámetros de A, $\{a_1, \ldots, a_d\}$, donde $d = \dim A$. Por definición de sistema de parámetros, $P = \operatorname{rad}(a_1, \ldots, a_d)$, y tenemos que $P^e = P[X] = (\operatorname{rad}(a_1, \ldots, a_d))^e$. Observamos también que $A[X]/P[X] = (A/P)[X]$ es un DIP por ser A/P cuerpo, entonces existe $\overline{f} \in \overline{P'}$ tal que $\overline{P'} = (\overline{f})$, equivalentemente, existe $f \in P'$ tal que $P' = P[X] + (f)$.

Definimos el ideal $J = (a_1, \dots, a_d)^e + (f) \subset P'$. Veamos que P' es minimal sobre J. Sea $Q \in \operatorname{Spec} A[X]$ tal que $J \subset Q \subseteq P'$. En particular $(a_1, \dots, a_d)^e \subset Q$. Tenemos entonces la cadena de ideales

$$P[X] = (\operatorname{rad}(a_1, \dots, a_d))^e \subseteq \operatorname{rad}((a_1, \dots, a_d)^e) \subseteq Q$$

ya que $\operatorname{rad}((a_1, \dots, a_d)^e)$ es la intersección de los primos que contienen a $(a_1, \dots, a_d)^e$. Entonces, como Q contiene a (f) y $P[X]$, contiene también a P', y concluimos que $P' = Q$, y P' es minimal sobre J. Ahora, como J está generado por $d+1$ elementos, por el teorema de la altura de Krull, $\operatorname{ht} P' \leq d + 1 = \operatorname{ht} P + 1$. En particular $\dim A[X] \leq \dim A + 1$. Hemos visto que $\dim A[X] = \dim A + 1$.

Ahora podemos tomar el anillo $A[X_1]$ y, por el mismo argumento que acabamos de ver, $\dim A[X_1, X_2] = \dim A[X_1] + 1 = \dim A + 2$. Es evidente que repitiendo este paso llegamos a $\dim A[X_1, \dots, X_n] = \dim A + n$. $\square$

Observación 5.31. En la demostración anterior vemos que una cadena de ideales en A puede crecer al menos en uno en $A[X]$. También vemos que si $P \in \operatorname{Spec} A[X]$, P tiene altura como mucho uno más que su contracción. De esto concluimos que $\operatorname{ht} P = \operatorname{ht} P^c + 1$ para todo $P \in \operatorname{Max} A[X]$, ya que $P^{ce} \subsetneq P$. Esto se extiende evidentemente a n indeterminadas.

6. Teoría del Grado

Ahora vamos a estudiar la teoría del grado, el último capítulo que nos permitirá definir anillos Cohen-Macaulay. Empezamos definiendo las sucesiones regulares de un módulo, y probaremos que toda sucesión regular maximal tiene la misma longitud, lo que da lugar a un invariante llamado grado. A continuación veremos como se relacionan el grado y la altura, y la relación entre una sucesión regular y un sistema de parámetros de A. Esta teoría se suele estudiar a través de herramientas homológicas, sin embargo, estas se estudian en cursos superiores al grado. Por esa razón en este trabajo usaremos definiciones equivalentes pero sin usar herramientas que no hayamos visto bien en el grado o en este trabajo.

Definición 6.1. *Sea A un anillo conmutativo y $M \neq 0$ un A-módulo. Llamamos sucesión regular de M, o M-sucesión, a una sucesión $(a_1, \dots, a_n)$ donde $a_1, \dots, a_n \in A$, cumpliendo*

1. $M \neq (a_1, \dots, a_n)M$.
2. a_1 *no es divisor de cero en* M
3. $\forall\, 2 \leq i \leq n$, a_i *no es divisor de cero en* $M/((a_1, \dots, a_{i-1})M)$.

Decimos que la longitud de la M-sucesión es el número de elementos que la forman, es decir, la longitud de una M-sucesión $(a_1, \dots, a_n)$ es n.

Observación 6.2. Tomando $M = A$ podemos hablar de A-sucesiones. En este caso $(a_1, \dots, a_n)$ es una A-sucesión cuando forma un ideal propio, a_1 no es divisor de cero y a_i no es divisor de cero en $A/(a_1, \dots, a_{i-1})$.

Ejemplo 6.3. Consideramos el A-módulo $B \coloneqq A[X_1, \dots, X_n]$. Entonces $(X_1, \dots, X_n)$ es una B-sucesión. En efecto, $(X_1, \dots, X_n)$ es un ideal propio, X_1 no es divisor de cero en B y X_i no es divisor de cero en $B/(X_1, \dots, X_{i-1}) \cong A[X_i, \dots, X_n]$.

Nota 6.4. Consideramos un A-módulo L. Sean también I, J ideales de A. Tenemos que $(IL/JL) = ((I + J)L/JL)$, y por el Tercer Teorema de Isomorfia

$$(L/JL)/(IL/JL) = (L/JL)/((I + J)L/JL) = L/(I + J)L.$$

Proposición 6.5. *Sea A un anillo conmutativo y $M \neq 0$ un A-módulo. Sean $a_1, \dots, a_n \in A$ y $1 \leq h < n$. Entonces $(a_1, \dots, a_n)$ es una M-sucesión si, y solo si*

1. $(a_1, \dots, a_h)$ *es una M-sucesión.*
2. $(a_{h+1}, \dots, a_n)$ *es una $M/(a_1, \dots, a_h)M$-sucesión.*

Demostración: Si (1) y (2) se cumplen es evidente que $(a_1, \dots, a_n)$ es M-sucesión por definición. Veamos la otra implicación. Si $(a_1, \dots, a_n)$ es M-sucesión está claro que $(a_1, \dots, a_h)$ también lo es, por lo que se cumple (1). Para ver que $(a_{h+1}, \dots, a_n)$ es una $M/(a_1, \dots, a_h)M$-sucesión debemos comprobar que a_{h+1} no es divisor de cero de $M/(a_1, \dots, a_h)M$ y que a_i, con $h < i \leq n$, no es divisor de cero de

$$(M/(a_1, \dots, a_h)M)/((a_{h+1}, \dots, a_{i-1})M/(a_1, \dots, a_h)M).$$

La primera condición es inmediata por ser $(a_i)_i$ una M-sucesión. Por la nota 6.4 se sigue que la expresión anterior es isomorfa a $M/(a_1, \dots, a_{i-1})$. Como $(a_i)_i$ es una M-sucesión y los módulos isomorfos anteriores comparten los divisores de cero, obtenemos el punto (2). □

Corolario 6.6. *Sea A un anillo conmutativo y $M \neq 0$ un A-módulo. Sea $(a_i)_{i=1,\ldots,d}$ una M-sucesión. Ponemos $I = (a_1, \ldots, a_d)$. Si denotamos $\overline{A} = (A/I)$ y $\overline{M} = M/IM$, sabemos que $\overline{M}$ es un $\overline{A}$-módulo. Sean $a_{d+1}, \ldots, a_r \in A$. Entonces $a_1, \ldots, a_r$ es una M-sucesión si, y solo si $\overline{a_{d+1}}, \ldots, \overline{a_r}$ es una $\overline{M}$-sucesión.*

Demostración: Es consecuencia directa de la proposición anterior, ya que $a_{d+1}, \ldots, a_r$ es una $\overline{M}$-sucesión ($\overline{M}$ visto como A-módulo) si, y solo si $\overline{a_{d+1}}, \ldots, \overline{a_r}$ es una $\overline{M}$-sucesión ($\overline{M}$ visto como $\overline{A}$-módulo), puesto que $(\overline{a_{d+1}}, \ldots, \overline{a_r})\overline{M} = (a_{d+1}, \ldots, a_r)\overline{M}$.

Lema 6.7. *Sean A un anillo conmutativo y $M \neq 0$ un A-módulo. Si (a, b) es una M-sucesión regular, entonces $a \notin Z_A(M/bM)$.*

Demostración: Suponemos lo contrario. Entonces existe $m \in M \backslash bM$ tal que $am = bm'$ donde $m' \in M$. Como $b \notin Z_A(M/aM)$ tenemos que $m' \in aM$, y por lo tanto existe $n \in M$ tal que $am = bm' = ban$. Como a no es divisor de cero en M deducimos que $m = bn$, es decir, $m \in bM$, contradiciendo la hipótesis. Concluimos que a no es divisor de cero en M/bM. □

Corolario 6.8. *Sean A un anillo conmutativo y $M \neq 0$ un A-módulo. Sea $(a_i)_{i=1,\ldots,n}$ una M-sucesión y $1 \leq h < n$. Entonces la sucesión $a_1, \ldots, a_{h-1}, a_{h+1}, a_h, \ldots, a_n$ es M-regular si, y solo si $a_{h+1} \notin Z_A(M/(a_1, \ldots, a_{h-1})M)$.*

Demostración: Definimos $N = M/(a_1, \ldots, a_{h-1})M$. Tenemos que (a_h, a_{h+1}) es una N-sucesión. Por el lema anterior sabemos que

$$a_h \notin Z_A(N/a_{h+1}N) = Z_A(M/(a_1, \ldots, a_{h-1}, a_{h+1})M).$$

Por lo tanto, por definición se sigue que $a_1, \ldots, a_{h-1}, a_{h+1}, a_h, \ldots, a_n$ es M-regular si, y solo si $a_{h+1} \notin Z_A(M/(a_1, \ldots, a_{h-1})M)$. □

Definición 6.9. *Sean A un anillo conmutativo y M un A-módulo. Sea $I \subset A$ un ideal con $M/IM \neq 0$.*

1. *Si $a_1, \ldots, a_n \in I$ forman una M-sucesión decimos que es una M-sucesión regular en I.*
2. *Decimos que una sucesión $(a_i)_{i=1,\ldots,n}$ regular en I es maximal si no existe $a_{n+1} \in I$ tal que $a_1, \ldots, a_{n+1}$ forman una M-sucesión (de longitud $n+1$).*

En las próximas páginas vamos a ver que en el caso Noetheriano, dado $M \neq 0$ un A-módulo, no existe una sucesión infinita $(a_i)_{i \geq 1} \subset A$ de modo que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tenga que $(a_i)_{i=1,\ldots,n}$ sea una sucesión regular de M. Una consecuencia inmediata es que toda sucesión regular se extiende a una maximal finita. Nuestro objetivo será entonces probar que toda sucesión regular maximal en un ideal tiene la misma longitud sobre un A-módulo finitamente generado M, la cual denominaremos grado de M en el ideal.

Proposición 6.10. *Sea A un anillo conmutativo Noetheriano y $M \neq 0$ un A-módulo. Entonces no existe una sucesión de longitud infinita $(a_i)_{i \geq 1} \subset A$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ la sucesión finita $(a_i)_{i=1,\ldots,n}$ es regular de M.*

Demostración: Supongamos que existe tal sucesión. Entonces tendríamos una cadena infinita de ideales

$$(a_1) \subsetneq (a_1, a_2) \subsetneq \ldots$$

ya que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \notin (a_1, \ldots, a_{n-1})$ pues no es divisor de cero de $M/(a_1, \ldots, a_{i-n})M$. Esto contradice la condición Noetheriana. □

Observación 6.11. En particular, por la proposición 6.5 no existen sucesiones regulares de longitud infinita en un anillo Noetheriano.

Observación 6.12. Que $(a_1, \ldots, a_n)$ sea una M-sucesión maximal en I es equivalente, por definición, a que $I \subset Z_A(M/(a_1, \ldots, a_n)M)$. Esto lo podemos relacionar con la teoría de primos asociados: Por el Teorema 4.3 tenemos que cuando A es Noetheriano

$$Z_A(M/(a_1, \ldots, a_n)M) = \bigcup_{P \in \operatorname{Ass}(M/(a_1,\ldots,a_n)M)} P.$$

Si M es finitamente generado el conjunto de asociados es finito, y por el segundo lema de evitación de primos deducimos que I está contenido en un primo asociado de $M/(a_1, \ldots, a_n)M$.

Ahora, como ya hemos comentado, vamos a probar que toda sucesión regular de I maximal tiene la misma longitud. Para ello empezamos con un lema que nos asegura el caso de longitud 1.

Lema 6.13. *Sean A un anillo conmutativo Noetheriano y $M \neq 0$ un A-módulo finitamente generado. Sea $I \subset A$ un ideal con $M \neq IM$ y $a, b \in I$ no divisores de cero en M. Si (a) es una M-sucesión maximal en I, entonces (b) también.*

Demostración: Por la observación 6.12 sabemos que I está contenido en un primo asociado P de M/aM. Tenemos por definición que existe un $\overline{m} \in M/aM$ no nulo tal que $P \cdot \overline{m} = \overline{0}$, o equivalentemente, existe un $m \in M \backslash aM$ tal que $P \cdot m \subseteq aM$. Como $I \subset P$ tenemos en particular que $I \cdot m \subseteq aM$. Como $b \in I$ podemos escribir $bm = am'$, con $m' \in M$. Además, $m' \notin bM$, de lo contrario existiría $m'' \in M$ tal que $bm = am' = abm'' \Rightarrow m = am'' \in aM$ porque $b \notin Z_A(M)$, absurdo.
Nuestro objetivo es ver que $I \subset Z_A(M/bM)$, así tendremos que (b) es sucesión regular maximal en I. Sea $r \in I$. Tenemos que $ram' = brm \in baM$ ya que $I \cdot m \subseteq aM$. Por lo tanto $ram' = ban$, con $n \in M$ y se sigue que $rm' = bn \in bM$ pues $a \notin Z_A(M)$. Por lo tanto $r \in Z_A(M/bM)$. Como es para todo $r \in I$, queda demostrado el resultado. $\square$

Teorema 6.14. *Sean A un anillo conmutativo Noetheriano y $M \neq 0$ un A-módulo finitamente generado. Sea $I \subset A$ un ideal tal que $M \neq IM$. Entonces toda M-sucesión regular maximal en I tiene la misma longitud.*

Demostración: Para probar el teorema es suficiente ver que si $(a_i)_{i=1,\ldots,n}$ es una M-sucesión maximal en I y $(b_i)_{i=1,\ldots,n}$ es una M-sucesión en I, entonces $(b_i)_{i=1,\ldots,n}$ es también maximal en I. Lo haremos por inducción en n. El caso $n = 1$ lo hemos probado con el lema 6.13, así que podemos suponer el enunciado cierto para todo $n < k$, y lo demostramos para $n = k$. Sean entonces $(a_i)_{i=1,\ldots,k}$ una M-sucesión maximal en I y $(b_i)_{i=1,\ldots,k}$ una M-sucesión en I. Definimos para $0 \leq i \leq k-1$ los A-módulos $N_i = M/(a_1, \ldots, a_i)M$ y $L_i = M/(b_1, \ldots, b_i)M$, donde para $i = 0$ consideramos M. Entonces por la observación 6.12 y el segundo lema de evitación de primos tenemos que

$$I \not\subset (\bigcup_{1 \leq i \leq k-1} Z_A(N_i)) \cup (\bigcup_{1 \leq i \leq k-1} Z_A(L_i))$$

Entonces podemos escoger un $c \in I$ que esté fuera de la reunión en la expresión anterior. Es evidente que $(a_1 \ldots, a_{k-1}, c)$ es una M-sucesión. Por hipótesis sabemos que a_k es una

N_{k-1}-sucesión maximal en I, y por el lema 6.13 deducimos que c es también una N_{k-1}-sucesión maximal en I, es decir,

$$I \subseteq Z_A(N_{k-1}/cN_{k-1}) = Z_A(M/(a_1, \ldots, a_{k-1}, c)M),$$

así que $(a_1, \ldots, a_{k-1}, c)$ es una M-sucesión maximal en I. Ahora, aplicando el corolario 6.8 reiteradamente obtenemos que $(c, a_1 \ldots, a_{k-1})$ es una M-sucesión maximal en I, ya que hemos escogido c tal que no es divisor de cero en N_i para cualquier $i < k$. Análogamente deducimos que $(c, b_1 \ldots, b_{k-1})$ es una M-sucesión de I. Por lo tanto, si definimos $M' = M/cM$ (observamos que $M' \neq IM'$ porque $c \in I$ y $M \neq IM$) sabemos por la proposición 6.5 que $(a_i)_{i=1,\ldots,k-1}$ es una M'-sucesión maximal en I y $(b_i)_{i=1,\ldots,k-1}$ es una M'-sucesión en I. Por la HI deducimos que la M'-sucesión $(b_i)_{i=1,\ldots,k-1}$ es maximal en I, por lo que

$$I \subseteq Z_A(M'/(b_1, \ldots, b_{k-1})M') = Z_A(M/(c, b_1, \ldots, b_{k-1})M) = Z_A(L_{k-1}/cL_{k-1}).$$

De aquí deducimos que c es una L_{k-1}-sucesión maximal en I. Como $b_k \notin Z_A(L_{k-1})$, b_k es una L_{k-1}-sucesión en I, y por el lema 6.13 es maximal. Por la proposición 6.5 concluimos que $(b_i)_{i=1,\ldots,k}$ es una M-sucesión maximal en I, y el teorema queda demostrado. $\square$

Este teorema nos permite definir el grado de un ideal de un anillo Noetheriano.

Definición 6.15. *Sea A un anillo conmutativo Noetheriano y $M \neq 0$ un A-módulo finitamente generado. Sea $I \subset A$ ideal tal que $I \neq IM$. Llamamos I-grado de M, o grado de M en I, a la longitud de las M-sucesiones maximales de I. Lo denotamos con $\operatorname{gr}_I M$.*

El caso local es importante en álgebra conmutativa. Si suponemos que $(\mathrm{A}, \mathfrak{m})$ es local y M es un A-módulo, entonces toda M-sucesión $(a_i)_{i=1,\ldots,d}$ está en $\mathfrak{m}$, ya que por definición $M \neq (a_1, \ldots, a_d)M$ y todo elemento fuera de $\mathfrak{m}$ es unitario. Entonces el grado de M en $\mathfrak{m}$ se denomina profundidad de M y se denota $\operatorname{depth} M$.

Ahora que hemos probado nuestro principal objetivo de la sección, vamos a ver algunas propiedades importantes del grado, y vamos a relacionar el grado con la altura. En particular veremos que en un anillo Noetheriano A, el grado de un ideal en A es como mucho la altura del ideal.

Proposición 6.16. *Sea A un anillo conmutativo, I un ideal de A, $M \neq 0$ un A-módulo y $S \subset A$ un s.m.c. tal que $S \cap Z_A(M) = \emptyset$. Sea $(a_1, \ldots, a_n)$ una M-sucesión en I. Si $S^{-1}M \neq (a_1/1, \ldots, a_n/1)S^{-1}M$ entonces $(a_1/1, \ldots, a_n/1)$ es una $S^{-1}M$-sucesión en $S^{-1}I$.*

Demostración: Si $a_1, \ldots, a_n \in I$ es obvio que $a_1/1, \ldots, a_n/1 \in S^{-1}I$. Queremos ver que

$$a_i/1 \notin Z_{S^{-1}A}(S^{-1}M/(a_1/1, \ldots, a_{i-1}/1)S^{-1}M).$$

Como $(a_1, \ldots, a_{i-1})$ es M-sucesión, tenemos la sucesión exacta (por la izquierda)

$$0 \longrightarrow M/(a_1, \ldots, a_{i-1})M \xrightarrow{\cdot a_i} M/(a_1, \ldots, a_{i-1})M \qquad i = 1, \ldots, n$$

donde en el caso $i = 1$ consideramos tan solo M en la sucesión. Sabemos que esto induce una sucesión de $S^{-1}A$-módulos

$$0 \longrightarrow S^{-1}M/(a_1, \ldots, a_{i-1})S^{-1}M \xrightarrow{\cdot a_i/1} S^{-1}M/(a_1, \ldots, a_{i-1})S^{-1}M \qquad i = 1, \ldots, n$$

por lo que $a_i/1$ no es divisor de cero en $S^{-1}M/(a_1, \ldots, a_{i-1})S^{-1}M$. $\square$

Corolario 6.17. *Sea A un anillo Noetheriano, M un A-módulo finitamente generado y $S \subset A$ un s.m.c. Sea I un ideal propio en A. Entonces* $\operatorname{gr}_I M \leq \operatorname{gr}_{S^{-1}I} S^{-1}M$.

Demostración: El resultado es trivial a partir del resultado anterior: Si $(a_1, \ldots, a_n)$ es M-sucesión maximal en I, es $S^{-1}M$-sucesión (no necesariamente maximal) en $S^{-1}I$. $\square$

Con el siguiente ejemplo vemos que la desigualdad del corolario anterior puede ser estricta.

Ejemplo 6.18. Consideramos el anillo Noetheriano $K[X_1, X_2, X_3]$, donde K es un cuerpo no nulo. Sea $I = (X_1, X_2, X_3)^2 \cap (X_1)$, y consideramos el cociente Noetheriano $A = K[X_1, X_2, X_3]/I$. Sea $P = (X_1, X_2)/I$ un ideal en A. Tenemos que $P \subset Z(A)$, ya que por un lado $X_1 \neq 0$ y $X_1 \cdot X_1 = 0$ y por otro $X_2 \neq 0$ y $X_2 \cdot X_2 \cdot X_1 = 0$. Así que tenemos $\operatorname{gr}_P A = 0$. Ahora, consideramos el localizado de A por P, A_P (también Noetheriano). En este anillo X_3 es invertible, por lo que $X_1 = X_1 \cdot \frac{X_3}{X_3} = 0$. Esto es suficiente para ver que $X_2 \notin Z(A_P)$, ya que para anular X_2 debemos multiplicarlo por $X_1 = 0$. Entonces X_2 es A_P-sucesión en PA_P, por lo que $\operatorname{gr}_{PA_P} A_P > 0$.

Proposición 6.19. *Sean A un anillo Noetheriano y $M \neq 0$ un A-módulo finitamente generado, $I \subset A$ un ideal tal que $M \neq IM$, y $g = \operatorname{gr}_I M$. Sea $(a_i)_{i=1,\ldots,n}$ una M-sucesión en I y $J = (a_1, \ldots, a_n)$. Poniendo $\overline{M} = M/JM$ y $\overline{I} = A/I$, entonces*

1. $\overline{M} \neq I\overline{M}$ *y* $\operatorname{gr}_I \overline{M} = g - n$.
2. $\overline{M} \neq \overline{I}\,\overline{M}$ *y* $\operatorname{gr}_{\overline{I}} \overline{M} = g - n$.

Demostración: Como $M \neq IM$, es evidente que $\overline{M} \neq I\overline{M}$ y que $\overline{M} \neq \overline{I}\,\overline{M}$. Ahora, por la observación 6.11 podemos extender la sucesión a una maximal. Sean $a_{n+1}, \ldots, a_g \in A$ tales que $(a_1, \ldots, a_g)$ es M-sucesión maximal. Por lo proposición 6.5 tenemos que $(a_{n+1}, \ldots, a_g)$ es una $\overline{M}$-sucesión maximal en I, es decir, $\operatorname{gr}_I \overline{M} = g - n$. Además, por el corolario 6.6 sabemos que $\overline{a_{d+1}}, \ldots, \overline{a_g}$ es una $\overline{M}$-sucesión maximal en $\overline{I}$, por lo que $\operatorname{gr}_{\overline{I}} \overline{M} = g - n$. $\square$

Proposición 6.20. *Sea A un anillo Noetheriano y $I \subset A$ un ideal generado por n elementos formando una A-sucesión. Entonces* $\operatorname{ht} I = n$.

Demostración: Lo hacemos por inducción en n. El caso $n = 0$ es trivial pues el ideal (0) tiene altura 0. Suponemos cierto el enunciado para $n < k$ y comprobamos que lo es también para $n = k$. Suponemos que $I = (a_1, \ldots, a_k)$, donde $a_1, \ldots, a_k$ forman una A-sucesión. Por el teorema de la altura de Krull, $\operatorname{ht} I \leq k$. Por HI sabemos que $J = (a_1, \ldots, a_{k-1})$ tiene altura $k - 1$. Como $J \subset I$ se tiene que $\operatorname{ht} I$ es $k - 1$ o k. Supongamos que es $k - 1$ y lleguemos a contradicción. Como $J \subseteq I$ y ambos tienen altura $k - 1$, comparten el conjunto de minimales. Sea un P un primo minimal sobre I (en particular $a_k \in P$). Entonces también es minimal sobre J. Sabemos también por el capítulo 4 del trabajo que $P \in \operatorname{Ass}(A/J)$. Por el teorema 4.3 los elementos de P son divisores de cero en (A/J). Pero a_k no es divisor de cero en A/J por definición de sucesión regular, y hemos llegado a contradicción. Concluimos que $\operatorname{ht} I = k$. $\square$

Corolario 6.21. *Sea A un anillo Noetheriano y $I \subset A$ un ideal propio. entonces* $\operatorname{gr}_I A \leq \operatorname{ht} I$.

Demostración: Por la proposición anterior, una sucesión regular maximal en I genera un ideal contenido en I de altura $\operatorname{gr}_I A$. Se sigue que $\operatorname{gr}_I A \leq \operatorname{ht} I$. $\square$

De este corolario nace la idea de los anillos Cohen-Macaulay, que son aquellos en los que se cumple la igualdad $\operatorname{gr}_I A = \operatorname{ht} I$. Los estudiamos en el capítulo siguiente. Sigamos viendo propiedades del grado que usaremos más adelante. Vamos a ver un teorema que se complementa con naturalidad con la proposición 4.20, pero necesitamos antes un lema.

Lema 6.22. *Sea A un anillo conmutativo, $P_1, \dots, P_n \in \operatorname{Spec} A$, $I \subset A$ un ideal propio y $x \in A$. Si $(x, I) \nsubseteq P_1 \cup \cdots \cup P_n$ entonces existe $y \in I$ tal que $x + y \notin P_1 \cup \cdots \cup P_n$.*

Demostración: Observamos que si para algún $i \neq j$ se tiene $P_i \subset P_j$ podemos eliminar P_i de la reunión de primos sin cambiar el problema, así que podemos considerar que $P_i \nsubseteq P_j$ para todo $i \neq j$. Supongamos que $x \in P_1, \dots, P_r$ y $x \notin P_{r+1}, \dots, P_n$ para algún $0 \leq r \leq n$. Si $r = 0$ el problema es trivial. Veamos que si $r = n$ se cumple el enunciado. Supongamos que $x + y \in P_1 \cup \cdots \cup P_n$ para todo $y \in I$. Entonces existe $1 \leq j \leq n$ tal que $x + y \in P_j$. Como $x \in P_j$ se tiene $y \in P_j$. Como es para todo $y \in I$ tenemos que $I \subset P_1 \cup \cdots \cup P_n$. Por el segundo lema de evitación de primos existe $1 \leq k \leq n$ tal que $I \subset P_k$, concluyendo que $(x, I) \subseteq P_k \subset P_1 \cup \cdots \cup P_n$, contradicción. Por tanto queda probado el caso $r = n$.

Suponemos ahora que $0 < r < n$. Por el mismo argumento de evitación de primos que acabamos de hacer arriba, $I \not\subset P_1 \cup \cdots \cup P_r$ entonces existe $c \in I \backslash P_1 \cup \cdots \cup P_r$. Sabemos que $P_{r+1} \cup \cdots \cup P_n \not\subset P_1 \cup \cdots \cup P_r$, de lo contrario tendríamos $P_i \subset P_j$ para algÃºn par $i \neq j$. Existe entonces algún $d \in (P_{r+1} \cup \cdots \cup P_n) \backslash (P_1 \cup \cdots \cup P_r)$. Sea $y = cd \in I$. Si $x + y \in P_i$ para $i = 1, \dots, r$ entonces $y \in P_i$, pero esto contradice la definición de c y d y que los P_i son primos. si $x + y \in P_j$ para algún $j = r + 1, \dots, n$ entonces $x \in P_j$, contradiciendo la hipótesis. Así, $x + y \notin P_1 \cup \cdots \cup P_n$. $\square$

Teorema 6.23. *Sea A un anillo Noetheriano y $I \subset A$ un ideal propio. Si $\operatorname{gr}_I A = n$ y I puede ser generado por n elementos, entonces I puede ser generado por una A-sucesión de longitud n.*

Demostración: Suponemos que $I = (x_1, \dots, x_n)$. Construiremos elementos $a_1, \dots, a_n$ formando una sucesión regular tales que para $i \neq n$

$$a_i = x_i + \sum_{j=i+1}^{n} b_{i,j} x_j$$

y $a_n = x_n$, de esta manera tendremos que $I = (a_1, \dots, a_n)$. Si $n = 0$ es trivial. Suponemos $n > 0$. Definimos $J_i = (x_i, \dots, x_n)$ y se tiene que $I = (x_1, J_2) \not\subset Z(A)$ ya que $\operatorname{gr}_I A \geq 1$. Como $Z(A)$ es una reunión de primos asociados, por el lema 6.22 existe $y \in J_2$ tal que $x_1 + y \notin Z(A)$. Ponemos $a_1 = x_1 + y$ y observamos que es una sucesión regular en I. Si $n = 1$ ya lo hemos demostrado. Suponemos $n > 1$. Tenemos entonces que $I \not\subset Z(A/(a_1))$. Veamos que $J_2 \not\subset Z(A/(a_1))$. Considerando que $x_1 = a_1 - y$, tenemos que todo $z \in I$ se puede escribir como

$$z = b_1 a_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n$$

donde $b_i \in A$. Si se tuviera que $J_2 \subset Z(A/(a_1))$ tendríamos que $z \in Z(A/(a_1))$ ya que $b_1 a_1$ se anula en $A/(a_1)$, pero esto contradice que $I \not\subset Z(A/(a_1))$. Se sigue pues que $J_2 = (x_2, J_3) \not\subset Z(A/(a_1))$ y de nuevo por el lema 6.22 existe $y_2 \in J_3$ tal que $x_2 + y_2 \notin Z(A/(a_1))$, y definimos $a_2 = x_2 + y_2$. Si $n = 2$ ya hemos acabado, si no, $I \not\subset Z(A/(a_1, a_2))$, y siguiendo el mismo procedimiento que acabamos de hacer definimos $a_3 = x_3 + y_3 \notin Z(A/(a_1, a_2))$, donde $y_3 \in J_4$. Si seguimos haciendo el procedimiento llegaremos a tener una sucesión regular $(a_1, \dots, a_n)$ generando I. $\square$

Lema 6.24. *Sean A un anillo Noetheriano y M, N dos A-módulos finitamente generados. Supongamos que $\operatorname{gr}_I M, \operatorname{gr}_I N > 0$. Entonces existe $x \in I$ no divisor de cero en M ni N.*

Demostración: Supongamos que no existe un $x \in I$ como en el enunciado. Entonces $I \subset Z_A(M) \cup Z_A(N)$, es decir, I está contenido en un primo asociado de M o N, lo que implicaría que el grado de M o N es cero, contradiciendo la hipótesis. $\square$

Proposición 6.25. *Sean A un anillo Noetheriano y*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de A-módulos finitamente generados. Sea $I \subset A$ un ideal tal que $I \neq IM_i$ para $i = 1, 2, 3$. Entonces si $\operatorname{gr}_I M_2 > \operatorname{gr}_I M_3$ se tiene que $\operatorname{gr}_I M_1 = \operatorname{gr}_I M_3 + 1$.

Demostración: Supongamos que $\operatorname{gr}_I M_3 > 0$. Entonces por el lema anterior sabemos que existe $x \in I$ no divisor de cero en M_2 ni M_3. Además x tampoco es divisor de cero en M_1: Si existe $m \in M_1 \backslash \{0\}$ con $xm = 0$ se tendrÃa $xf(m) = 0$, donde $f(m) \neq 0$, contradicción. Entonces podemos construir la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M_1/xM_1 \xrightarrow{f} M_2/xM_2 \xrightarrow{g} M_3/xM_3 \longrightarrow 0.$$

En efecto, esta sucesión se obtiene al tensorizar por $A/(x)$, y sabemos que es exacta por la derecha, por lo que solo queda ver que lo es por la izquierda. Es suficiente comprobar que $f(M_1) \cap xM_2 = f(xM_1)$ de esta manera aseguramos la inyectividad que deseamos. Supongamos entonces que $f(m_1) = xm_2$. Entonces $xg(m_2) = 0$, por lo que $m_2 \in \ker g = \operatorname{Im} f$ y existe $m_1' \in M_1$ tal que $f(m_1') = m_2$. Entonces $f(xm_1') = xm_2$, como queríamos ver (la otra inclusión es obvia). El grado de los módulos en la sucesión exacta ha bajado en exactamente 1 por la proposición 6.19. Podemos reiterar este paso hasta obtener una sucesión exacta donde el tercer módulo tiene grado 0 sobre I. De nuevo por lo proposición 6.19 basta con reducirnos al caso en que $\operatorname{gr}_I M_3 = 0$ y demostrar que $\operatorname{gr}_I M_1 = 1$.

Sea $x \in I$ no divisor de cero en M_2. Entonces x no es divisor de cero en M_1. En efecto, si $m \in M_1 \backslash \{0\}$ tal que $xm = 0$, tenemos que $xf(m) = 0$ donde $f(m) \neq 0$, contradiciendo la elección de x. Por lo tanto $\operatorname{gr}_I M_1 \geq 1$.

Finalmente queremos ver que el grado de M_1 no crece más, es decir, queremos comprobar que $I \subset Z_A(M_1/xM_1)$. Observamos que como $\operatorname{gr}_I(M_3) = 0$, $I \subset Z_A(M_3)$, por lo que I está contenido en un primo asociado de M_3, pongamos $I \subset (0 : m_3)$. Como g es epimorfismo podemos escoger $m_2 \in M_2$ tal que $g(m_2) = m_3$. Observamos que $xm_2 \in f(M_1)$, ya que $g(xm_2) = xm_3 = 0$ por lo que $xm_2 \in \ker g = \operatorname{Im} f$. Pero $xm_2 \notin xf(M_1)$ ya que si existe $m_1 \in M_1$ tal que $xf(m_1) = xm_2$ tendríamos que $f(m_1) = m_2$ ya que x no es divisor de cero en M_2, pero esto es una contradicción pues $g(m_2) \neq 0$. Por último nos fijamos en que $I \cdot xm_2 = x \cdot (Im_2) \in xf(M_1)$ ya que $g(Im_2) = Im_3 = 0$. Esto nos dice que I está contenido en los divisores de cero de $f(M_1)/xf(M_1)$ que es isomorfo a M_1/xM_1, así que $I \subset Z_A(M_1/xM_1)$. $\square$

Proposición 6.26. *Sea A un anillo Noetheriano y M un A-módulo finitamente generado. Sean $I, J \subset A$ ideales tales que $IM \neq M \neq JM$. Entonces $\operatorname{gr}_{IJ} M = \min\{\operatorname{gr}_I M, \operatorname{gr}_J M\}$.*

Demostración: Sea $k := \min\{\operatorname{gr}_I M, \operatorname{gr}_J M\}$. Como $IJ \subset I, J$ es evidente que $\operatorname{gr}_{IJ} A \leq k$, así que basta con ver que $\operatorname{gr}_{IJ} M \geq k$. Ponemos $\operatorname{gr}_I M = n$ y $\operatorname{gr}_J M = m$. Sean

$(a_1, \ldots, a_n)$ y $(b_1, \ldots, b_m)$ dos sucesiones regulares maximales en I y J respectivamente. Definimos $c_1 = a_1 b_1$. Es evidente que $c_1 \notin Z_A(M)$ ya que a_1 y b_1 no lo son, por lo tanto c_1 forma parte de una sucesión regular en IJ. Extendemos esta sucesión regular a dos maximales en I y en J, $(c_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ y $(c_1, b'_2, \ldots, b'_m)$ respectivamente. Ahora definimos $c_2 = a_2 b_2$, y se cumple que $c_2 \notin Z_A(M/c_1 M)$ ya que a_2 y b_2 no lo son, entonces (c_1, c_2) es una M-sucesión en IJ. Siguiendo el proceso acabamos obteniendo una M-sucesión regular en IJ de longitud k. Consecuentemente, $\operatorname{gr}_{IJ} M \geq k$. □

Corolario 6.27. *Sea A un anillo Noetheriano y M un A-módulo finitamente generado. Si $I \subset A$ es un ideal tal que $IM \neq M$, entonces $\operatorname{gr}_I M = \operatorname{gr}_{\operatorname{rad} I} M$.*

Demostración: Como $I \subset \operatorname{rad} I$ es evidente que $\operatorname{gr}_I M \leq \operatorname{gr}_{\operatorname{rad} I} M$. Probemos entonces que $\operatorname{gr}_I M \geq \operatorname{gr}_{\operatorname{rad} I} M$. Por ser A Noetheriano existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(\operatorname{rad} I)^k \subset I$. Tenemos entonces por la proposición anterior que

$$\operatorname{gr}_I M \geq \operatorname{gr}_{(\operatorname{rad} I)^k} M = \operatorname{gr}_{\operatorname{rad} I} M.$$

□

Corolario 6.28. *En la misma situación que en la proposición* 6.26 *se tiene* $\operatorname{gr}_{IJ} M = \operatorname{gr}_{I \cap J} M$.

Demostración: Como $IJ \subset I \cap J$ sabemos que $\operatorname{gr}_{IJ} M \leq \operatorname{gr}_{I \cap J} M$. Veamos la otra desigualdad. Tenemos que $\operatorname{rad} IJ = \operatorname{rad}(I \cap J)$. En efecto, una inclusión es trivial, y si $x \in \operatorname{rad}(I \cap J)$ entonces existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $x^t \in I \cap J$, y por lo tanto $(x^t)^2 \in IJ \Rightarrow x \in \operatorname{rad} IJ$. Por el corolario 6.27 tenemos que

$$\operatorname{gr}_{IJ} M = \operatorname{gr}_{\operatorname{rad} IJ} M = \operatorname{gr}_{\operatorname{rad}(I \cap J)} M = \operatorname{gr}_{I \cap J} M.$$

Corolario 6.29. *Sea A un anillo Noetheriano, M un A-módulo finitamente generado y $I \subset A$ un ideal. Entonces*

$$\operatorname{gr}_I M = \min \{\operatorname{gr}_P M \mid P \in \operatorname{Ass} A/I\}.$$

Demostración: Sabemos que $\operatorname{rad} I = \bigcap_{P \in \operatorname{Ass} A/I} P$. Por los corolarios 6.27 y 6.28 junto a la proposición 6.26 tenemos que

$$\operatorname{gr}_I M = \operatorname{gr}_{\operatorname{rad} I} M = \operatorname{gr}_{\bigcap_{P \in \operatorname{Ass} A/I}} M = \min \{\operatorname{gr}_P M \mid P \in \operatorname{Ass} A/I\}$$

por haber un número finito de primos asociados a A/I. □

Por último vamos a ver un resultado muy importante, que acota, en el caso de un anillo local Noetheriano (A, I), la profundidad de un A-módulo M finitamente generado por la dimensión de los cocientes A/P donde P es un asociado de M.

Teorema 6.30. *Sea (A, I) un anillo local Noetheriano y $M \neq 0$ un A-módulo finitamente generado. Entonces* $\operatorname{depth} M \leq \dim A/P$, *para todo* $P \in \operatorname{Ass} M$.

Demostración: Lo hacemos por inducción en $\operatorname{depth} M$. Cuando $\operatorname{depth} M = 0$ es trivial. Sea $k > 0$ y suponemos cierto el enunciado para $\operatorname{depth} M < k$; estudiamos el caso $\operatorname{depth} M = k$. Al tener $\operatorname{depth} M > 0$ sabemos que existe $x \in A$ (no unidad) no divisor de cero en M, y consideramos $\overline{M} = M/xM$. Escogemos $m \in M$ tal que $A \cdot m$ es maximal entre los submódulos cíclicos anulados por P (existe por definición de primo asociado). Queremos ver que P son divisores de cero en $\overline{M}$. Para ello vemos que $m \notin xM$. Si $m \in xM$ entonces existe $m' \in M$ tal que $m = xm'$. Se tiene que P también anula a $A \cdot m'$ ya que x no es divisor de cero en M, y además $A \cdot m \subsetneq A \cdot m'$. En efecto, si se tuviera $A \cdot m = A \cdot m'$ existiría $y \in A$ tal que $m' = ym = yxm'$, por lo que $m'(1 - xy) = 0$, pero sabemos que $1 - xy$ es unidad ya que $x \notin A^*$, por lo que $m' = 0$, absurdo. Tenemos entonces que $P \subset Z_A(\overline{M})$. Por el segundo lema de evitación de primos $P \subseteq Q$ para algún $Q \in \operatorname{Ass} \overline{M}$. Tenemos que $x \notin P$ por lo que $(\overline{M})_P = 0$, entonces $P \notin \operatorname{Supp} \overline{M} \supset \operatorname{Ass} \overline{M}$ y consecuentemente $P \subsetneq Q$. Finalmente, por la HI obtenemos

$$\operatorname{depth} M = \operatorname{depth} \overline{M} + 1 \leq \dim A/Q + 1 \leq \dim A/P.$$

y como hemos escogido $P \in \operatorname{Ass} M$ arbitrario, la desigualdad es cierta para todo $P \in \operatorname{Ass} M$. □

7. Anillos Cohen-Macaulay

A continuación vamos a introducir los anillos Cohen-Macaulay. Son muy importantes por varios motivos, se estudian en profundidad pues aparecen con frecuencia en diversas áreas de las matemáticas, por ejemplo, en geometría algebraica, combinatoria, y por supuesto, álgebra conmutativa. Además son estables bajo muchas operaciones, como por ejemplo al localizar, o adjunción de indeterminadas polinómicas. En esta sección dedicamos unas páginas a su estudio. Empezamos definiendo este tipo de anillo y demostrando algunas de sus propiedades básicas. Nuestro objetivo final del capítulo es demostrar que si A es un anillo Noetheriano, entonces A es Cohen-Macaulay si, y solo si su anillo de polinomios lo es. Necesitaremos este resultado para probar el teorema objetivo de este trabajo: Todo complejo simplicial *shellable* es Cohen-Macaulay sobre cualquier cuerpo.

Consideramos $(\mathrm{A}, \mathfrak{m})$ un anillo local Noetheriano. Recordemos que por el corolario 6.21 tenemos que $\operatorname{depth} A \leq \dim A$.

Definición 7.1. *Sea* $(\mathrm{A}, \mathfrak{m})$ *un anillo local Noetheriano. Decimos que A es un anillo Cohen-Macaulay cuando se tiene la igualdad* $\operatorname{depth} A = \dim A$.

Ejemplo 7.2. Sea K un cuerpo no nulo. Consideramos el anillo $A = (K[X])_{(X)}$. A es local con maximal (X), y la única cadena de primos posible es de longitud 1, por el teorema de la dimensión. Además la sucesión (X) es regular ya que es claramente no divisor de cero en A, por lo que A es un anillo Cohen-Macaulay.

Observación 7.3. La desigualdad del teorema 6.30 nos dice que

$$\operatorname{depth} A \leq \dim A/P \leq \dim A$$

para todo $P \in \operatorname{Ass} A$. Entonces si A es Cohen-Macaulay tenemos que $\operatorname{depth} A = \dim A/P$ para todo $P \in \operatorname{Ass} A$. En particular, todo primo asociado de A es minimal y tiene la misma co-altura (o dimensión).

Una importante conexión entre la teoría de la dimensión y la teoría del grado es la siguiente.

Lema 7.4. *Toda sucesión regular en un anillo local Noetheriano* $(\mathrm{A}, \mathfrak{m})$ *forma parte de un sistema de parámetros de A.*

Demostración: Lo hacemos por inducción. Sea $(a_1, \ldots, a_n)$ una sucesión regular de A. El caso $n = 0$ es trivial, entonces suponemos cierto el enunciado para $n < k$. Por la proposición 5.28 $\dim A/(a_1, \ldots, a_k) \geq \dim A - k$. Además, como $a_k \notin Z(A/(a_1, \ldots, a_{k-1}))$ tenemos en particular que a_k no está en ninguno de los minimales de $(a_1, \ldots, a_{k-1})$, y por tanto, junto a la HI,

$$\dim(A/(a_1, \ldots, a_{k-1}))/(a_k) = \dim A/(a_1, \ldots, a_k) < \dim A/(a_1, \ldots, a_{k-1}) = \dim A - k + 1$$

y concluimos entonces que $\dim A/(a_1, \ldots, a_k) = \dim A - k$, y por lo tanto es parte de un sistema de parámetros. $\square$

Corolario 7.5. *Sea A un anillo local Cohen-Macaulay de dimensión d y $(a_1, \ldots, a_n)$ una A-sucesión. Entonces para todo $1 \leq i \leq n$ se tiene $A/(a_1, \ldots, a_i)$ es Cohen-Macaulay de dimensión $d - i$.*

Demostración: Observemos que $n \leq d$. Basta con ver que $\operatorname{depth} A/(a_1, \ldots, a_i) = \dim A/(a_1, \ldots, a_i)$. Por el lema anterior $(a_1, \ldots, a_i)$ también forma parte de un sistema de parámetros. Por las proposiciones 5.28 y 6.19 tenemos que al ser A Cohen-Macaulay

$$\operatorname{depth} A/(a_1,\ldots,a_i) = \operatorname{depth} A - i = d - i = \dim A - i = \dim A/(a_1,\ldots,a_i).$$

□

Resulta que una caracterización de los anillos Cohen-Macaulay es que la implicación del lema 7.4 sea recíproca, es decir:

Proposición 7.6. *Sea* $(\mathrm{A},\mathfrak{m})$ *un anillo local Noetheriano. Entonces son equivalentes*

1. *A es Cohen-Macaulay.*
2. *$a_1,\ldots,a_r$ es A-sucesión si, y solo si $a_1,\ldots,a_r$ forma parte de un sistema de parámetros de A.*

Demostración: Veamos (*1*) $\Rightarrow$ (*2*). Ya hemos visto que si $a_1,\ldots,a_r$ es sucesión regular entonces forma parte de un sistema de parámetros de A. Estudiemos la otra implicación. Si $r=0$ es trivial. Suponemos que $a_1,\ldots,a_r$ es parte de un sistema de parámetros de A. Entonces $\dim A/(a_1) = \dim A - 1$. Además $a_1 \notin Z(A) = \cup_{P\in \operatorname{Ass} A} P$, de lo contrario a_1 estaría en algún asociado P de A y por la observación 7.3

$$\dim A/(a_1) = \dim A/P = \dim A$$

contradicción. Entonces a_1 es sucesión regular, y por el corolario anterior $A/(a_1)$ es Cohen-Macaulay. Ahora, $a_2,\ldots,a_r$ forma parte de un sistema de parámetros de $A/(a_1)$. Repitiendo el proceso que acabamos de hacer obtendremos que $(a_1,\ldots,a_n)$ es una A-sucesión.

(*2*) $\Rightarrow$ (*1*) Supongamos que $\operatorname{depth} A = n$ y $(a_1,\ldots,a_n)$ es una sucesión regular. Entonces es un sistema de parámetros y por la proposición 5.24 $\dim A = n = \operatorname{depth} A$ luego A es Cohen-Macaulay. □

Esta caracterización es de las más importantes, ya que expone de manera explícita la propiedad Cohen-Macaulay. Esto es porque la dimensión está determinada por cualquier sistema de parámetros y la profundidad por cualquier sucesión regular maximal.

Podemos extender de manera natural la propiedad Cohen-Macaulay a anillos no necesariamente locales:

Definición 7.7. *Sea A un anillo Noetheriano. Decimos que A es Cohen-Macaulay si para todo maximal $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ se tiene que $A_{\mathfrak{m}}$ es Cohen-Macaulay.*

Vamos a probar las propiedades básicas de anillos Cohen-Macaulay. Para ello definimos antes los ideales puros.

Definición 7.8. *Sea A un anillo Noetheriano y $I \subset A$ un ideal propio. Decimos que I es puro si todos su primos asociados tienen la misma altura.*

Observación 7.9. Si I es puro con $\operatorname{ht} I = n$ tenemos en particular que el conjunto de asociados a I es exactamente el conjunto $\operatorname{Min} I$ y $\operatorname{ht} P = n$ para todo $P \in \operatorname{Ass} A/I$.

Proposición 7.10. *Sea A un anillo Noetheriano. Entonces son equivalentes:*

1. *A es Cohen-Macaulay.*
2. *Todo ideal generado por una A-sucesión es puro.* (Macaulay)

3. $\operatorname{gr}_I A = \operatorname{ht} I$ *para todo ideal* I *de* A.

4. $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} A = \operatorname{ht} \mathfrak{m}$ *para todo maximal* $\mathfrak{m}$ *de* A.

Demostración: (*1* $\Rightarrow$ *2*) Consideramos un ideal $J = (a_1, \ldots, a_n)$ generado por elementos de una A-sucesión (no necesariamente maximal). Si A es Cohen-Macaulay entonces $A_{\mathfrak{m}}$ es Cohen-Macaulay para todo maximal $\mathfrak{m}$ en A. Sabemos que J está contenido en al menos un maximal. Observamos que

$$\operatorname{Ass} A/J = \bigcup_{J \subset \mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A} \operatorname{Ass} A_{\mathfrak{m}}/J_{\mathfrak{m}}$$

Entonces podemos considerar el caso $(\mathrm{A}, \mathfrak{m})$ local para cualquier $\mathfrak{m}$ y ver que la altura de los asociados de A/J en cualquier caso es n. Denotamos $g = \operatorname{depth} A = \dim A$. Sea $P \in \operatorname{Ass} A/J$. Por el corolario 6.20 $n = \operatorname{ht} J \leq \operatorname{ht} P$.

Por otro lado, por el teorema 6.30 $\operatorname{depth} A/J \leq \dim A/P$, y por la proposición 6.19 $g - n \leq \dim A/P$. Además se tiene la desigualdad

$$\operatorname{ht} P + \dim A/P \leq \dim A$$

por lo que

$$\operatorname{ht} P \leq \dim A - \dim A/P \leq g - (g - n) = n.$$

En definitiva, $\operatorname{ht} P = n$ para todo $P \in \operatorname{Ass} A/J$. En otras palabras, todo ideal generado por una A-sucesión es puro.

(*2* $\Rightarrow$ *3*) Sea $I \subset A$ un ideal propio y n su grado en A. Existe una A-sucesión en I, $(a_1, \ldots, a_n)$ maximal. Definimos el ideal $J = (a_1, \ldots, a_n)$. Es evidente que $I \subset Z_A(A/J)$, y por el segundo lema de evitación de primos, $I \subset P$ para algún $P \in \operatorname{Ass} A/J$. Por hipótesis, J es puro, y por la proposición 6.19 se sigue que $\operatorname{ht} J = n = \operatorname{ht} P$. Como $J \subset I \subset P$ tenemos que $\operatorname{ht} I = n$, obteniendo $\operatorname{gr}_I A = \operatorname{ht} I$.

(*3* $\Rightarrow$ *4*) Trivial

(*4* $\Rightarrow$ *1*) Es inmediato pues en particular, por el corolario 6.17

$$\operatorname{depth} A_{\mathfrak{m}} \geq \operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} A = \operatorname{ht} \mathfrak{m} = \dim A_{\mathfrak{m}}$$

para todo $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$. Pero por el corolario 6.21 $\operatorname{depth} A_{\mathfrak{m}} \leq \dim A_{\mathfrak{m}}$, por lo que $\operatorname{depth} A_{\mathfrak{m}} = \dim A_{\mathfrak{m}}$ para todo maximal $\mathfrak{m} \subset A$, y A es Cohen-Macaulay. $\square$

Nuestro objetivo ahora es demostrar que si tenemos un anillo A Cohen-Macaulay e indeterminadas $X_1, \ldots, X_n$, entonces el anillo $A[X_1, \ldots, X_n]$ también es Cohen-Macaulay. Para ello necesitamos probar primero que toda A sucesión es también $A[X_1, \ldots, X_n]$-sucesión y que en un anillo de polinomios, un maximal no está contenido en los divisores de cero del anillo.

Lema 7.11. *Sea* A *un anillo Noetheriano,* $I \subset A$ *ideal y* $X_1, \ldots, X_n$ *indeterminadas. Sean* $a_1, \ldots a_r \in A$. *Si* $(a_1, \ldots, a_r)$ *es* A*-sucesión en* I*, entonces también es* $A[X_1, \ldots, X_n]$*-sucesión en* $I[X]$.

Demostración: Por un paso inductivo sencillo basta con probar el caso $n = 1$, consideramos entonces $X_1 = X$. Es evidente que al tener $a_1 \notin Z(A)$ se tiene $a_1 \notin Z(A[X])$. Definimos $J = (a_1, \ldots, a_{k-1})$ con $1 < k \leq r$. Queremos ver que $a_k \notin Z(A[X]/J[X])$, pero $A[X]/J[X] \cong (A/J)[X]$, y como $a_k \notin Z(A/J)$ es evidente que $a_k \notin Z((A/J)[X])$. Por consiguiente $(a_1, \ldots, a_r)$ es una $A[X_1, \ldots, X_n]$-sucesión. Además está claro que si la sucesión está en I, también está en $I[X]$. $\square$

Lema 7.12. *Sea A un anillo Noetheriano y $\mathfrak{m}$ un maximal de $A[X]$. Entonces tenemos $\mathfrak{m} \not\subset Z(A[X])$.*

Demostración: Supongamos lo contrario. Entonces $X \notin \mathfrak{m}$ y tendríamos $(X) + \mathfrak{m} = A[X]$, por lo que $1 = f + gX$, donde $f \in \mathfrak{m}$ y $g \in A[X]$. Pero entonces $f = 1 - gX$ debe ser divisor de cero, que es absurdo pues $f = 1 - gX$ tiene término constante igual a 1. □

Teorema 7.13. *Sea A un anillo Cohen-Macaulay y $X_1, \ldots, X_n$ indeterminadas. Entonces $A[X_1, \ldots, X_n]$ es Cohen-Macaulay.*

Demostración: Por un paso inductivo sencillo basta con ver el caso $n = 1$, por lo que solo consideramos $X_1 = X$. Por la proposición 7.10 podemos demostrar que $A[X]$ es Cohen-Macaulay probando que para todo $\mathfrak{m}$ ideal maximal en $A[X]$ se cumple $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} A[X] = \operatorname{ht} \mathfrak{m}$. Sea entonces $\mathfrak{m}$ un maximal de $A[X]$ arbitrario y sea $P = \mathfrak{m}^c$ su contracción. Sea $\operatorname{ht} P = s$, por la observación 5.31 $\operatorname{ht} \mathfrak{m} = s+1$. Queremos ver entonces que $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} A[X] = s+1$

Por 7.10, sabemos que $\operatorname{gr}_P A = \operatorname{ht} P = s$. Sea $(a_1, \ldots, a_s)$ una A-sucesión en P, por el lema 7.11 también es $A[X]$-sucesión en $\mathfrak{m}$. Consideramos el ideal $J = (a_1, \ldots, a_s)[X]$ en $A[X]$ y el cociente $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}/J$. Tenemos que $\overline{\mathfrak{m}}$ es maximal en $A[X]/J$, y por el lema 7.12 $\overline{\mathfrak{m}} \not\subset Z(A[X]/J)$, por lo que $\mathfrak{m} \not\subset Z(A[X]/J)$. De esto deducimos que $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} A[X] \geq s + 1$, y por el corolario 6.21, $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} A[X] \leq \operatorname{ht} \mathfrak{m} = s + 1$. Finalmente, $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} A[X] = s + 1 = \operatorname{ht} \mathfrak{m}$. Por lo tanto $A[X]$ es Cohen-Macaulay.

□

Observación 7.14. Todo cuerpo K es trivialmente Cohen-Macaulay, por lo que el anillo $K[X_1, \ldots, X_n]$ es Cohen-Macaulay.

Normalmente la propiedad de Cohen-Macaulay se estudia sobre módulos, y los anillos Cohen-Macaulay son un caso particular en el que se considera un anillo A como A-módulo. Nosotros no lo hemos introducido de esta manera pues no lo necesitamos, y demostrar lo que hemos demostrado para módulos alargaría innecesariamente el trabajo. Sin embargo, sí que vamos a introducir brevemente los módulos Cohen-Macaulay para poder probar un resultado que necesitaremos en el teorema final. Primero definimos el caso local.

Definición 7.15. *Sea $(\mathrm{A}, \mathfrak{m})$ un anillo local Noetheriano y M un A-módulo finitamente generado. Decimos que M es Cohen-Macaulay si $\operatorname{depth} M = \dim M$.*

Proposición 7.16. *Sea $(\mathrm{A}, \mathfrak{m})$ un anillo local Noetheriano y M_1, M_2, M_3 A-módulos finitamente generados tales que $\dim M_2 = \dim M_3 + 1$, y M_2 y M_3 son Cohen-Macaulay. Si tenemos una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

entonces M_1 es Cohen-Macaulay de dimensión $\dim M_1 = \dim M_2$.

Demostración: Es inmediato a partir de las proposiciones 5.4 y 6.25. □

Ahora definimos los módulos Cohen-Macaulay para los casos no locales.

Definición 7.17. *Sea A un anillo Noetheriano y M un A-módulo finitamente generado. Decimos que M es Cohen Macaulay si $M_{\mathfrak{m}}$ es Cohen-Macaulay sobre $A_{\mathfrak{m}}$ para todo $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$.*

Observación 7.18. Si A es un anillo Noetheriano y I es un ideal, A/I es Cohen-Macaulay como anillo si, y solo si A/I lo es como A-módulo.

Queremos probar la proposición 6.16 en el caso no local para poder aplicarlo en el teorema final. A priori se debería localizar por cada maximal de A y comprobar que se mantienen las hipótesis necesarias de la proposición, no obstante esto no tiene por qué ser cierto, ya que al localizar los módulos en la sucesión exacta podríamos perder la hipótesis $\dim(M_2)_{\mathfrak{m}} = \dim(M_3)_{\mathfrak{m}} + 1$. Pero vamos a ver que la proposición deseada es válida para un cierto tipo de anillos; los anillos graduados. Empezamos definiéndolos.

Definición 7.19. *Decimos que un anillo A es graduado (positivamente) si descompone en grupos aditivos $A = \bigoplus_{i\geq 0} A_i$ tal que $A_iA_j = A_{i+j}$, para todo $i, j \in \mathbb{Z}$.*

Sea M un A-módulo. Decimos que M es graduado (positivamente) si descompone en grupos aditivos $M = \bigoplus_{i\geq 0} M_i$ tal que $A_iM_j \subset M_{i+j}$. Llamamos a M_i el i-ésimo componente homogéneo de M.

En la notación de la definición anterior, llamamos a los elementos $x \in M_i$ homogéneos de grado i (el 0 es homogéneo de grado arbitrario), y a los elementos de A_i i-formas. Podemos escribir un elemento $x \in M$ de manera única como suma finita de elementos homogéneos, $x = \sum_i x_i$, con $x_i \in M_i$. Los elementos x_i que aparecen en la suma se denominan componentes homogéneas de x.

Ejemplo 7.20. Un anillo de polinomios $A[X_1, \ldots, X_n]$ es un anillo graduado, donde el componente homogéneo i-ésimo está formado por los polinomios homogéneos de grado i.

Proposición 7.21. *Sea A un anillo graduado con una descomposición como en la definición 6.15. Entonces $1 \in A_0$ y A_0 es un subanillo de A.*

Demostración: Por definición, $A_0A_0 \in A_0$, por lo que es cerrado multiplicativamente. Podemos escribir 1 como suma finita de elementos homogéneos $1 = \sum_{i\in I} x_i$, $x_i \in A_i$. Se tiene para todo $n \in I$, $x_n = 1 \cdot x_n = \sum_i x_i x_n$. Comparando los grados de los componentes homogéneos de 1 se observa que $x_n = x_0 x_n$ para todo $n \in I$, por lo que $x_0 = 1$ al ser $1 \neq 0$. Concluimos que A_0 es subanillo de A.

Observación 7.22. Consecuentemente, se tiene para todo i que A_i es A_0-módulo.

Definición 7.23. *Sea M un A-módulo graduado y N un A-submódulo de M. Decimos que N es un submódulo graduado de M si es graduado y además el morfismo de inclusión $\phi : N \hookrightarrow M$ cumple $\phi(N_i) \subset M_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Llamamos a los submódulos graduados de A ideales graduados.*

Proposición 7.24. *Sea A un anillo graduado y I un ideal graduado de A. entonces A/I es un anillo graduado con descomposición $A/I = \bigoplus_{i\geq 0}(A_i/I_i)$.*

Demostración: Veamos primero que $A' :- \bigoplus_{\in\geq 0}(A_i/I_i)$ es un anillo graduado. Basta con comprobar que $A'_iA'_j \subset A'_{ij}$. Sea entonces $a_i + I_i \in A'_i$ y $a_j + I_j \in A'_j$. Entonces $(a_i + I_i)(a_j + I_j) = a_ia_j + a_iI_j + a_jI_i + I_iI_j$. Como A es graduado, $a_ia_j \in A_{ij}$ y como además I es ideal, $a_iI_j \subset I_iI_j$ y $a_jI_i \subset I_iI_j$, por lo que se cumple que $A'_iA'_j \subset A'_{i+j}$, y A' es graduado. Ahora veamos que $A' = A/I$. Definimos un morfismo de A en A' tal que $\phi(a_{k_1} + \cdots + a_{k_n}) = (a_{k_1} + I_{k_1}) + \cdots + (a_{k_n} + I_{k_n})$, donde $a_{k_i} \in A'_{k_i}$. Está claro que $I \subset \ker\phi$, y como I es graduado, la otra inclusión también es cierta. Por el primer teorema de isomorfismo, $A/I = A'$. $\square$

Definición 7.25. *Sea A un anillo graduado y I un ideal de A arbitrario. Definimos $I^* \subset I$ como el ideal graduado generado por los elementos homogéneos de I, es decir,*

$$I^* = \bigoplus_{i \geq 0} (A_i \cap I_i).$$

Observación 7.26. I^* es el ideal graduado más grande contenido en I.

Proposición 7.27. *Sea A un anillo graduado, y M un A-módulo graduado.*

1. *Si $P \in \operatorname{Spec} A$ entonces $P^* \in \operatorname{Spec} A$.*
2. *Si $P \in \operatorname{Supp} M$ entonces $P^* \in \operatorname{Supp} M$.*

Demostración: (1) Sean $a = \sum_i a_i$,$b = \sum_j b_j \in A$ tal que $ab \in P^*$ pero $a, b \notin P^*$. Entonces existen enteros p y q tal que $a_p \notin P^*$ con $a_i \in P^*$ para $i < p$, y $b_q \notin P^*$ con $b_j \in P^*$ para $j < q$. El componente homogéneo $(p+q)$-ésimo de $ab \in P^*$ es

$$x_{p+q} = \sum_{i+j=p+q} a_i b_j$$

y por ser P^* graduado, $x_{p+q} \in P^*$. Todos los sumandos de x_{p+q} están en P^* excepto posiblemente $a_p b_q$, lo que confirma que $a_p b_q \in P^* \subset P$. Al ser P primo se tiene que $ap \in P$ o $bq \in P$, y al ser ambos homogéneos, $a_p \in P^*$ o $b_q \in P^*$.

(2) Por el contrarrecíproco, supongamos que $M_{P^*} = 0$ y sea $x \in M$ un elemento homogéneo. Entonces existe $a \in A \backslash P^*$ tal que $ax = 0$. Pongamos que $a = \sum_i a_i$, entonces $a_i x = 0$ para todo i, y además existe un entero n tal que $a_n \in A \backslash P^*$, por lo que en M_P, $\frac{x}{1} = \frac{a_n}{a_n} \cdot \frac{x}{1} = 0$. Como esto ocurre para todo componente homogéneo de M, $M_P = 0$. $\square$

Ahora definimos los anillos *locales

Definición 7.28. *Sea A un anillo graduado. Un ideal graduado $\mathfrak{m}$ de A es *maximal si todo ideal graduado que contiene a $\mathfrak{m}$ estrictamente es igual a A. Decimos que A es *local si posee un único ideal *maximal $\mathfrak{m}$, y lo denotamos $(\mathrm{A}, \mathfrak{m})$.*

Ejemplo 7.29. Consideramos el anillo $A = K[X_1, \ldots . X_n]$, donde K es un cuerpo. Ya hemos visto que es un anillo graduado. Es evidente que el ideal $(X_1, \ldots, X_n)$ es un ideal graduado, y que además no puede haber otro ideal graduado que no esté contenido en este, por lo que A es un anillo **local* con *maximal $\mathfrak{m} = (X_1, \ldots, X_n)$. En este caso, nuestro *maximal es un maximal en el sentido corriente. De hecho, se puede probar que en un anillo graduado positivamente, todo *maximal es maximal.

Si además I es un ideal graduado de A, tenemos por la proposición 7.24 que A/I es un anillo graduado, y como $I \subset \mathfrak{m}$ tenemos que sigue siendo *local con *maximal $\overline{\mathfrak{m}} = (\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_n})$.

El siguiente resultado será el que nos permite demostrar el teorema final. La demostración utiliza métodos homológicos, por lo que no la daremos aquí. Una demostración se puede encontrar en [2].

Teorema 7.30. *Sea $(\mathrm{A}, \mathfrak{m})$ un anillo Noetheriano *local y M un A-módulo graduado finitamente generado. Entonces*

1. $\dim_A M = \dim_{A_\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m}$.

2. $\operatorname{gr}_I M = \operatorname{gr}_{I_\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m}$*. En particular* $\operatorname{gr}_\mathfrak{m} M = \operatorname{depth} M_\mathfrak{m}$.

3. M es Cohen-Macaulay sobre A si, y solo si $M_\mathfrak{m}$ es Cohen-Macaulay sobre $A_\mathfrak{m}$.

Habíamos visto que no se podía generalizar por completo la proposición 7.16 porque al localizar perdíamos las hipótesis necesarias. Sin embargo, este teorema afirma que en el caso graduado este problema desaparece, pues nos dice que basta con localizar por el *maximal $\mathfrak{m}$, y al hacerlo se mantienen las hipótesis tanto del grado como de la dimensión. Hemos justificado la siguiente proposición.

Proposición 7.31. *Sean* $(\mathrm{A}, \mathfrak{m})$ *un anillo Noetheriano *local y M_1, M_2, M_3 tres A-módulos graduados finitamente generados tales que M_2 y M_3 son Cohen-Macaulay y además* $\dim M_2 = \dim M_3 + 1$. *Si tenemos una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

entonces M_1 es Cohen-Macaulay de dimensión $\dim M_1 = \dim M_2$.

8. Anillos de Stanley-Reisner

Estudiamos los anillos de Stanley-Resiner, el foco principal de este trabajo. Estos anillos son un pilar del álgebra conmutativa combinatoria, y fueron objetos culminantes en la demostración de Stanley del *Upper Bound Theorem* para esferas simpliciales. Empezamos el capítulo definiendo los monomios e ideales monomiales. Seguido definiremos los complejos simpliciales, a los cuales asignaremos un anillo; el anillo de Stanley-Reisner del complejo.

Definición 8.1. *Sea K un cuerpo y $A = K[X_1, \dots, X_n]$. Un monomio en A es un elemento $X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n}$ con $a_i \in \mathbb{N}$ para todo i. Decimos que es un monomio libre de cuadrados si para todo i se tiene $a_i \leq 1$.*

Definición 8.2. *Decimos que un ideal I de A es monomial si está generado por monomios. Decimos que es un ideal monomial libre de cuadrados si está generado por monomios libres de cuadrado.*

Observación 8.3. Hemos visto en el ejemplo 7.20 que $K[X_1, \dots, X_n]$ es un anillo graduado, y es evidente que un ideal monomial es un ideal graduado pues está generado por elementos homogéneos.

Observación 8.4. El conjunto de todos los monomios de $A = K[X_1, \dots, X_n]$ forman una K-base de A.

Proposición 8.5. *Sea I un ideal monomial y $f \in K[X_1, \dots, X_n]$. Si $\alpha = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ denotamos $X^\alpha = X_1^{m_1} \cdots X_n^{m_n}$. Pongamos entonces*

$$f = \sum_{j=1}^{s} a_j \cdot X^{\alpha_j}$$

donde $a_j \in K$ y $\alpha_j \in \mathbb{N}^n$. Si $f \in I$, entonces cada término de la suma está en I.

Demostración: Si $f \in I$ tenemos en particular que f está generado por los monomios que generan I. Por lo tanto podemos escribir f como una combinación lineal de los monomios generadores de I. Es evidente que esta suma debe ser idéntica a la del enunciado por la observación anterior, por lo que concluimos que cada término de f pertenece a I.□

Definición 8.6. *Consideramos un monomio $X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$. Definimos su radical como*

$$\sqrt{X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}} = \prod_{i \,|\, \alpha_i \neq 0} X_i$$

Definimos ahora los complejos.

Definición 8.7. *Sea $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ un conjunto finito. Un complejo simplicial Δ sobre V es una familia de subconjuntos de V, cumpliendo que si $F \in \Delta$ entonces para todo $G \subset F$ se tiene $G \in \Delta$.*

A los elementos de Δ se les llama caras. Si $F \in \Delta$ es una cara, se define la dimensión de F como $\dim F = |F| - 1$, *y la dimensión de Δ como* $\dim \Delta = \max\{\dim F \mid F \in \Delta\}$. *Llamamos vértices a las caras de dimensión* 0 *y aristas a las caras de dimensión* 1.

A las caras de Δ maximales respecto la inclusión se les llama caras maximales.

Observación 8.8. Tal y como los hemos definido, todo complejo simplicial está determinado por sus caras maximales. Recíprocamente, dados $\{F_1, \dots, F_n\} \subset V$ determinan un complejo simplicial. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 8.9. *Sea $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Dados subconjuntos $\{F_1, \dots, F_n\} \subset V$ definimos el complejo simplicial generado por $F_1, \dots, F_n$ como el más pequeño conteniendo $F_1, \dots, F_n$, es decir, el complejo que contiene todo los subconjuntos de F_i para todo i, y lo denotamos por $\langle F_1, \dots, F_n \rangle$. Llamamos a un complejo generado por una sola cara maximal un simplex.*

Ejemplo 8.10. Consideramos un conjunto de vértices $V = \{v_1, \dots, v_5\}$. Un posible complejo simplicial sobre V es la familia

$$\{v_1\},\ \{v_2\},\ \{v_3\},\ \{v_4\},\ \{v_5\},\ \{v_1, v_2\},\ \{v_2, v_3\},\ \{v_2, v_4\},\ \{v_3, v_5\},\ \{v_4, v_5\}$$

Es decir, el complejo $\langle \{v_1, v_2\},\ \{v_2, v_3\},\ \{v_2, v_4\},\ \{v_3, v_5\},\ \{v_4, v_5\} \rangle$.

Todo complejo simplicial tiene una realización geométrica en un espacio afín de dimensión finita. Por ejemplo, la realización geométrica del complejo del ejemplo anterior es

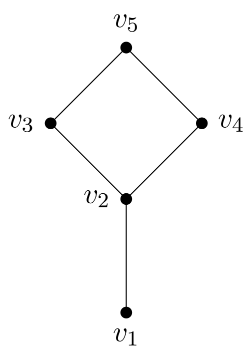

Figura 1

Queremos definir los anillos de Stanley-Reisner de un complejo Δ sobre un conjunto $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Para ello consideramos el anillo $K[X_1, \dots, X_n]$, donde K es un cuerpo, y vamos a estudiar qué ocurre al identificar los vértices v_i con las indeterminadas X_i, lo que nos conducirá a las definiciones básicas de la teoría de Stanley-Reisner.

Proposición 8.11. *Sea $I \subset K[X_1, \dots, X_n]$ un ideal monomial libre de cuadrados. en particular, es generado por un número finito de monomios libres de cuadrados. Entonces los monomios libres de cuadrados fuera de I definen un complejo simplicial Δ_I.*

Demostración: Basta con observar que los monomios libres de cuadrados fuera de I son aquellos no divisibles por algún monomio en I. Es evidente que si $X_{i_1} \dots X_{i_s}$ está fuera de I entonces todo divisor está fuera de I. Por lo tanto, está claro que identificando $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_s}\}$ con $X_{i_1} \dots X_{i_s}$ obtenemos un complejo simplicial Δ_I cuyas caras maximales corresponden a los monomios libres de cuadrados maximales (respecto divisibilidad) no divisibles por I. $\square$

Esta proposición motiva las dos definiciones siguientes.

Definición 8.12. *En la situación de la proposición anterior, llamamos a Δ_I el complejo simplicial de Stanley-Reisner de I.*

Definición 8.13. *Sea Δ un complejo simplicial sobre V. Definimos el ideal de Stanley-Reisner de Δ como el generado por los monomios correspondientes a los subconjuntos de V minimales (respecto inclusión) fuera de Δ, y lo denotamos por I_Δ.*

Observación 8.14. Los dos objetos definidos son inversos el uno del otro, en el sentido de que $\Delta_{I_{\Delta'}} = \Delta'$ y $I_{\Delta_{I'}} = I'$. Esto induce una correspondencia biyectiva entre complejos simpliciales e ideales monomiales libres de cuadrados. Como consecuencia, al hablar de caras del complejo y sus correspondientes monomios libres de cuadrados no se suele distinguir entre el conjunto de vértices $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de un complejo y las indeterminadas $X_1, \ldots, X_n$. Con esto, podemos reformular la definición de ideal de Stanley-Reisner del complejo como el generado por sus no caras minimales.

Tenemos entonces que podemos asignar a cada complejo simplicial un ideal monomial libre de cuadrados, y este será único. Esta correspondencia, la llamada correspondencia de Stanley-Reisner, nos lleva a definir los anillos de Stanley-Reisner.

Definición 8.15. *Sea Δ un complejo simplicial sobre $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, y K un cuerpo. El anillo de Stanley-Reisner de Δ respecto K es*

$$K[\Delta] = K[X_1, \ldots, X_n]/I_\Delta.$$

Observación 8.16. Ya sabemos que $K[X_1, \ldots, X_n]$ es un anillo graduado, y como I_Δ es generado por monomios tenemos que es un ideal graduado. Sabemos entonces por el ejemplo 7.29 que $K[\Delta]$ es un anillo graduado con *maximal $(\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_n})$.

Ejemplo 8.17. Recuperemos el ejemplo 8.10 En este caso el ideal de Stanley-Reisner del complejo es

$$I_\Delta = (X_1X_3, X_1X_4, X_1X_5, X_2X_5, X_3X_4)$$

y su anillo de Stanley-Reisner es

$$K[\Delta] = K[X_1, \ldots, X_5]/I_\Delta$$

A continuación probamos dos resultados de ideales de Stanley-Reisner que utilizaremos para demostrar el teorema final del trabajo.

Proposición 8.18. *Sean Δ_1 y Δ_2 dos complejos simpliciales sobre un mismo conjunto de vértices $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Entonces*

$$I_{\Delta_1 \cap \Delta_2} = I_{\Delta_1} + I_{\Delta_2}.$$

Demostración: Por definición de ideal de Stanley-Reisner basta con estudiar los generadores de los ideales en cuestión, y por la observación 8.14 esto es equivalente a comprobar las no caras minimales de los complejos correspondientes a los ideales. Entonces, si F no es cara en $\Delta_1 \cap \Delta_2$, en particular no es cara en Δ_1 o Δ_2, lo que nos da la inclusión de derecha a izquierda. Recíprocamente, si F no es cara en Δ_1, tampoco lo es de $\Delta_1 \cap \Delta_2$. El caso Δ_2 es análogo. Tenemos entonces ambas inclusiones, y por lo tanto igualdad. $\square$

Notación 8.19. *Sea K un cuerpo. Consideramos $K[X_1, \ldots, X_n]$ y $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un conjunto finito. Para $F \subset V$ denotamos el ideal $\mathfrak{m}_F = (X_i \mid v_i \in F)$. También denotamos $\overline{F} = V \backslash F$, así, $\mathfrak{m}_{\overline{F}} = (X_i \mid v_i \notin F)$.*

Teorema 8.20. *Sea Δ un complejo simplicial sobre $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y K un cuerpo. Entonces*

$$I_\Delta = \bigcap_{F \in \operatorname{Max}(\Delta)} \mathfrak{m}_{\overline{F}}.$$

donde $\operatorname{Max}(\Delta)$ *son las caras maximales de* Δ.

Demostración: Vamos a ver ambas inclusiones. Para demostrar la inclusión $\subseteq$ basta con ver que todos los generadores de I_Δ pertenecen a la intersección enunciada. Sea entonces $f = X_{i_1} \ldots X_{i_r}$ un generador de I_Δ. Por definición de I_Δ se tiene que $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}\} \notin \Delta$, es decir, no es cara en Δ. En particular, para cada cara maximal $F \in \Delta$ existe $1 \leq k \leq r$ tal que $v_{i_k} \notin F$, por lo que $f = X_{i_1} \ldots X_{i_r} \in \mathfrak{m}_{\overline{F}}$ para toda cara $F \in \Delta$. Concluimos entonces que todo generador de I_Δ está en la intersección deseada.

Probemos la otra inclusión. Sea

$$f = \sum_{j=1}^{s} a_j X^{\alpha_j} \in \bigcap_{F \in \operatorname{Max}(\Delta)} \mathfrak{m}_{\overline{F}}.$$

Por lo proposición 8.5 $X^{\alpha_j} \in \mathfrak{m}_{\overline{F}}$ para todo j y para toda cara maximal F de Δ. En particular, para toda cara maximal $F \in \Delta$ hay algún factor X_i de X^{α_j} tal que $v_i \notin F$. Se sigue que $\sqrt{X^{\alpha_j}}$ no corresponde a ninguna cara de Δ, por lo que $\sqrt{X^{\alpha_j}} \in I_\Delta \Rightarrow X^{\alpha_j} \in I_\Delta$. Entonces todo término de la suma de f está en I_Δ, por lo que $f \in I_\Delta$. $\square$

Nota 8.21. No se estudia en este trabajo, pero esta es en realidad la descomposición primaria de I_Δ.

Corolario 8.22. *Sea Δ un complejo simplicial sobre $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Entonces*

$$\dim K[\Delta] = \dim \Delta + 1.$$

Demostración: Sabemos por 7.29 y 7.30 que $\dim K[\Delta] = \dim(K[\Delta])_{{}^*\mathfrak{m}}$, donde ${}^*\mathfrak{m} = (\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_n})$, por lo que podemos localizar y tenemos que el único maximal es ${}^*\mathfrak{m}$. Buscamos entonces la cadena más larga de primos conteniendo a I_Δ y contenido en ${}^*\mathfrak{m}$. Observamos que por el primer lema de evitación de primos no existe un primo Q tal que $I_\Delta \subset Q \subsetneq \mathfrak{m}_{\overline{F}}$ para ninguna cara maximal, y ningún primo Q minimal sobre I_Δ distinto de $\mathfrak{m}_{\overline{F}}$ para todo $F \in \operatorname{Max}(\Delta)$. Por lo tanto está claro que las únicas cadenas de primos que debemos considerar son las que van de $\mathfrak{m}_{\overline{F}}$ a ${}^*\mathfrak{m}$, y entre estas coger la que tiene mayor longitud. Consideramos una cara maximal F_i de dimensión $d_i - 1$. Entonces $\dim \mathfrak{m}_{\overline{F_i}} = n - d$. Sabemos también que $\dim {}^* \mathfrak{m} = n$. Tenemos que $\mathfrak{m}_{\overline{F_i}} = (X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})$ para $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$. Podemos construir una cadena de primos que va de $\mathfrak{m}_{\overline{F_i}}$ a ${}^*\mathfrak{m}$ adjuntando inductivamente una indeterminada nueva hasta llegar a ${}^*\mathfrak{m}$. Esta cadena es de longitud d. Si hubiera una cadena más larga entre $\mathfrak{m}_{\overline{F_i}}$ y ${}^*\mathfrak{m}$ se tendría que $\dim {}^* \mathfrak{m} > n$, contradicción. Por lo tanto las cadenas que estamos considerando son precisamente de longitud igual al número de vértices en una cara maximal. Está claro entonces que la longitud máxima será el mayor número de vértices en una cara maximal, que es precisamente uno más que la dimensión del complejo, es decir, $\dim K[\Delta] = \dim \Delta + 1$. $\square$

Ejemplo 8.23. Siguiendo con el ejemplo 6.9, aplicando el teorema al complejo Δ obtenemos que

$$I_\Delta = (X_3, X_4, X_5) \cap (X_1, X_3, X_5) \cap (X_1, X_4, x_5) \cap (X_1, X_2, X_4) \cap (X_1, X_2, X_3).$$

Demostrado este teorema, necesitamos definir las propiedades protagonistas del teorema final. En particular, vamos a definir el *shellability* de un complejo y los complejos Cohen-Macaulay.

Definición 8.24. *Sea Δ un complejo simplicial. Decimos que es puro si todas sus caras maximales tienen la misma dimensión.*

Definición 8.25. *Consideramos un complejo simplicial puro Δ. Decimos que el complejo es shellable si existe un orden de sus caras maximales $F_1, \ldots, F_m$ de tal manera que para todo $2 \leq i \leq m$*

$$\langle F_i \rangle \cap \langle F_1, \ldots, F_{i-1} \rangle$$

esté generado por caras maximales propias de $\langle F_i \rangle$. A un orden de las caras maximales de un complejo cumpliendo estas propiedades lo llamamos shelling de Δ.

Ejemplo 8.26. Retomando el ejemplo 8.10, si miramos la Figura 1 está claro que todas las caras maximales son de la misma dimensión, 2, por lo que Δ es puro. Además es un complejo *shellable*. En efecto, tenemos por ejemplo el orden de las caras maximales

$$F_{12}, F_{23}, F_{35}, F_{45}, F_{24},$$

donde $F_{ij} = \{v_i, v_j\}$. Se tiene que, en el orden definido, la intersección de una cara F_{ij} con todas las anteriores es uno de los vértices que componen F_{ij}, es decir, una cara maximal propia de F_{ij}. Por ende, Δ es *shellable* y el orden de las caras definido es un *shelling* de Δ.

Ejemplo 8.27. Veamos también un ejemplo de un complejo simplicial no *shellable*. Consideremos el conjunto de vértices $V = \{v_1, \ldots, v_5\}$, y el complejo simplicial puro sobre V $\Delta = \langle v_1v_2v_3, v_3v_4v_5 \rangle$. Este complejo se suele llamar el complejo "*Bow-Tie*", ya que como se ve en Figura 2, su realización geométrica se asemeja a una pajarita.

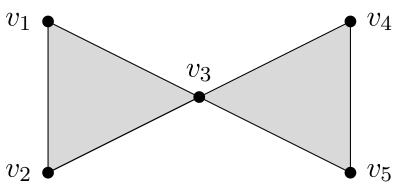

Figura 2: Complejo *Bow-Tie*

Este complejo solo tiene las caras maximales $v_1v_2v_3$ y $v_3v_4v_5$, así en este caso el orden de la caras maximales es irrelevante por simetría. Observemos que

$$\{v_1v_2v_3\} \cap \{v_3v_4v_5\} = \{v_3\},$$

que no puede ser generado por ninguna de las caras maximales propias de $v_1v_2v_3$ o $v_3v_4v_5$, por lo que el complejo simplicial *Bow-Tie* no es *shellable.*

Definición 8.28. *Decimos que un complejo simplicial Δ es Cohen-Macaulay sobre un cuerpo K si $K[\Delta]$ es un anillo Cohen-Macaulay. Decimos que un complejo Δ es Cohen-Macaulay si lo es para algún cuerpo.*

Nota 8.29. Un complejo no es, en general, Cohen-Macaulay sobre cualquier cuerpo. Un ejemplo de ello se puede encontrar en el libro de Bruns y Herzog [2, Página 236], donde consideran un complejo simplicial que es una triangulación del plano proyectivo real $\mathbb{P}^2$, y demuestran que no es Cohen-Macaulay sobre cuerpos de característica 2, y sí lo es para cualquier otro cuerpo.

Lema 8.30. *Sea el conjunto de vértices $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Pongamos $F_i = V \backslash \{v_i\}$. Definimos el complejo Δ como el que tiene caras maximales F_i. Entonces*

$$K[\Delta] = K[X_1, \ldots, X_n]/(X_1 \cdots X_n).$$

Demostración: Por definición de $K[\Delta]$ basta con verificar que $I_\Delta = (X_1 \cdots X_n)$. Observamos que todo subconjunto de V que no esté en Δ debe contener $\{v_1, \ldots, v_m\}$, de lo contrario estaría contenido en alguna de las caras maximales F_i, así que $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es el único subconjunto minimal de V fuera de Δ. Por lo tanto está claro $(X_1 \cdots X_m)$ genera I_Δ. □

Lema 8.31. *Sea K un cuerpo y $A = K[X_1, \ldots, X_n]$ su anillo Noetheriano de polinomios en n indeterminadas. Sean I_1, I_2 ideales graduados de A tales que A/I_1 y A/I_2 son Cohen-Macaulay de dimensión d y $A/(I_1 + I_2)$ es Cohen-Macaulay de dimensión $d-1$. Entonces $A/(I_1 \cap I_2)$ es Cohen-Macaulay de dimensión d.*

Demostración: Observamos primero que por la proposición 7.24 A/I_1 y A/I_2 son anillos graduados. También es evidente que

$$A/(I_1 + I_2) = \bigoplus_i (A_i/(I_{1_i} + I_{2_i})) \quad y \quad A/(I_1 \cap I_2) = \bigoplus_i (A_i/(I_{1_i} \cap I_{2_i}))$$

son graduados (para ver la igualdad aplicamos el primer teorema de isomorfia como en la demostración de la propositiópn 7.24). Sabemos que existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A/(I_1 \cap I_2) \xrightarrow{f} A/I_1 \bigoplus A/I_2 \xrightarrow{g} A/(I_1 + I_2) \longrightarrow 0$$

donde $f(a + I_1 \cap I_2) = (a + I_1, -a + I_2)$ y $g(a + I_1, b + I_2) = (a + b) + I_1 + I_2)$. Por el ejemplo 7.29 sabemos que A es *local, entonces si consideramos los anillos de la sucesión como A-módulos, por el Teorema 7.31 tenemos que $A/(I_1 \cap I_2)$ es Cohen-Macaulay de dimensión $\dim A/(I_1 \cap I_2) = \dim(A/I_1 \bigoplus A/I_2) = d$. □

Finalmente hemos obtenido todas las herramientas que usaremos para demostrar el teorema objetivo de este trabajo. Vamos a demostrar que todo complejo simplicial *shellable* es un complejo Cohen-Macaulay.

Teorema 8.32. *Un complejo simplicial shellable es Cohen-Macaulay sobre todo cuerpo.*

Demostración: Sea K un cuerpo y consideramos un complejo simplicial Δ *shellable* de dimensión $d-1$ sobre $V = (v_1, \ldots, v_n)$, y $F_1, \ldots, F_m$ un shelling de Δ. Por el teorema 8.20 sabemos que

$$I_\Delta = \bigcap_{i=1}^{m} \mathfrak{m}_{\overline{F}_i}.$$

Definimos ahora para todo $1 \leq j \leq m$ el complejo $\Delta_j = \langle F_1, \ldots, F_j \rangle$. Por un lado tenemos por definición que $K[\Delta] = K[X_1, \ldots, X_n]/\bigcap_{i=1}^{j} \mathfrak{m}_{\overline{F_i}}$. Por otro lado, si suponemos que Δ_j es un complejo sobre $V_r = \{v_1, \ldots, v_r\} \subset V$, $r \leq n$, podemos definir el ideal $\mathfrak{p}_{\overline{F}_i} \subset K[X_1, \ldots, X_r]$ generado por todo X_s con $s \leq r$ y $X_s \in \overline{F}_i$. Está claro entonces que $\mathfrak{m}_{\overline{F}_i} = \mathfrak{p}_{\overline{F}_i} + (X_{r+1}, \ldots, X_n)$. Por lo tanto (vénase preliminares) tenemos que

$$\bigcap_{i=1}^{j} \mathfrak{m}_{\overline{F}_i} = (\bigcap_{i=1}^{j} \mathfrak{p}_{\overline{F}_i}) + (X_{r+1}, \ldots, X_n)$$

y obtenemos que

$$K[\Delta_j] = K[X_1, \ldots, X_n]/\bigcap_{i=1}^{j} \mathfrak{m}_{\overline{F_i}} \cong K[X_1, \ldots, X_r]/\bigcap_{i=1}^{j} \mathfrak{p}_{\overline{F}_i}.$$

Ahora demostramos por inducción que Δ_j es Cohen-Macaulay de dimensión d. Si $j = 1$ tenemos que $\Delta_1 = \langle F_1 \rangle$ es un simplex, y está claro que en este caso $\mathfrak{p}_{\overline{F}_1} = 0$, y consecuentemente $K[\Delta_1] = K[X_1, \ldots, X_d]$ por ser Δ puro, y es Cohen-Macaulay de dimensión d por la observación 7.14 y el teorema 5.30. Suponemos ahora que $j > 1$. Nuestro objetivo es aplicar el lema 8.31 cogiendo los ideales graduados $I_1 = \cap_{i=1}^{j-1} \overline{\mathfrak{m}}_{F_i}$ y $I_2 = \overline{\mathfrak{m}}_{F_j}$. Notamos que por la proposición 8.18 tenemos que

$$I_1 + I_2 = I_{\langle F_j \rangle \cap \Delta_{j-1}}$$

y por el teorema 8.20, $I_1 \cap I_2 = I_{\Delta_j}$. La sucesión exacta de la demostración del lema 8.31 queda

$$0 \longrightarrow K[\Delta_j] \longrightarrow K[\Delta_{j-1}] \bigoplus K[\langle F_j \rangle] \longrightarrow K[\langle F_j \rangle \cap \Delta_{j-1}] \longrightarrow 0$$

Como Δ es *shellable* (y en particular puro) tenemos que $\langle F_j \rangle \cap \Delta_{j-1}$ está generado por caras maximales propias de F_j, que tienen todas dimensión $d-1$, y por el lema 8.30, $K[\langle F_j \rangle \cap \Delta_{j-1}]$ es un cociente de un anillo de polinomios en d indeterminadas por un monomio libre de cuadrados, y como el monomio es una sucesión regular en $K[X_1, \ldots, X_n]$ sabemos que $K[\langle F_j \rangle \cap \Delta_{j-1}]$ es Cohen-Macaulay de dimensión $d-1$. Ahora, $\langle F_j \rangle$ es un simplex de dimensión d, por lo que $K[\langle F_j \rangle]$ es un anillo de polinomios en d variables sobre un cuerpo, en particular, es Cohen-Macaulay de dimensión d. Por hipótesis de inducción sabemos que $K[\Delta_{j-1}]$ es Cohen-Macaulay de dimensión d. Hemos probado que se cumplen todas las hipótesis necesarias para poder aplicar el lema 8.30, con lo que concluimos que $K[\Delta_j]$ es Cohen-Macaulay de dimensión d para todo j. Como $\Delta_n = \Delta$ queda demostrado el Teorema. □

Observación 8.33. El Teorema 8.32 confirma que el complejo del ejemplo comentado en la nota 8.29 no es *shellable*, de lo contrario sería Cohen-Macaulay sobre cualquier cuerpo.

Para terminar el trabajo veamos un último ejemplo de complejos simpliciales *shellable* que nacen de la combinatoria. Para ello necesitamos primero definir algunas propiedades combinatorias. Consideremos un poset finito Π. Decimos que Π es acotado si tiene un máximo y un mínimo. Sean $u, v \in \Pi$. Decimos que v cubre a u, y escribimos $u \prec v$, si $u < v$ y no existe $w \in \Pi$ tal que $u < w < v$. Decimos que Π es localmente semimodular superior si cuando v_1, v_2 cubren a u y $v_1, v_2 < v_3$ para $v_1, v_2, v_3 \in \Pi$ se tiene que existe $t \in \Pi$ con $t \leq v$ tal que t cubre a v_1 y v_2. Una realización geométrica de esta propiedad se puede ejemplifica en la Figura 3.

Dado un poset Π uno puede definir un complejo simplicial a partir de este: Definimos el complejo orden de Π como el conjunto de cadenas en Π, y lo denotamos $\Delta(\Pi)$.

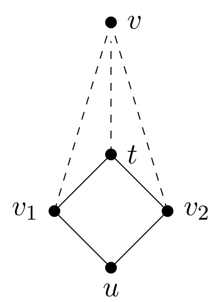

Figura 3: Poset localmente semimodular superior

El siguiente teorema nos proporciona un conjunto muy general y útil de complejos simpliciales *shellable* de ciertos posets. Una demostración detallada se puede encontrar en la página 215 de [2].

Teorema 8.34. (Björner). *El complejo orden de un poset acotado y localmente semimodular superior es shellable.*

En particular, por el teorema 8.32 tenemos que el complejo orden de un poset acotado y localmente semimodular superior es Cohen-Macaulay sobre cualquier cuerpo.

9. Conclusiones

En cuanto a este trabajo se refiere, hemos demostrado el resultado que nos propusimos el Dr. Santiago Zarzuela y yo al principio del semestre de Septiembre del 2022. Para poder hacerlo de la manera más auto-contenida posible hemos estudiado las teorías de primos asociados, de la dimensión y del grado, y se ha visto como estas componen la teoría de los anillos Cohen-Macaulay. La dimensión y el grado juegan un papel muy explícito a lo largo del trabajo, mientras que la teoría de primos asociados se utiliza sutilmente en forma de primos minimales o divisores de cero, por ejemplo, en la definición de sucesión regular. Para probar el objetivo del trabajo hemos tenido que dar unos primeros pasos en combinatoria, introduciendo los complejos simpliciales, y asignándoles un objeto algebraico, los anillos de Stanley-Reisner de un complejo. Con todas esta teoría hemos podido demostrar el Teorema 8.32.

Hemos realizado el trabajo sin utilizar herramientas homológicas, con las que se suele estudiar el tema de anillos Cohen-Macaulay. El único resultado que no hemos demostrado es el teorema 7.30, ya que la demostración requiere homología. Decidimos hacerlo de esta manera pues en el Máster de Matemáticas Avanzadas ya se estudia homología algebraica, y tanto el Dr. Santiago Zarzuela como yo queríamos que aprendiera métodos que no me vayan a enseñar en el Máster.

A lo largo del trabajo han ido surgiendo algunas dudas. Algunas de ellas eran técnicas y relativamente fáciles resolver (el teorema de la dimensión nos dio mucho trabajo en cuanto a fuentes, por ejemplo), sin embargo, otras dudas eran más profundas, y daban lugar a posibles extensiones del trabajo que, desgraciadamente, no hemos tenido tiempo de desarrollar. Una de las dudas más interesantes personalmente surgía de la definición 8.25 de *shellability*. En esta definición se asume que el complejo es puro, pero tras preguntarle, mi tutor reveló que también se puede estudiar el caso no puro y planteamos estudiarlo en caso de que nos sobrara tiempo (no fue así).

Una extensión de este trabajo incluiría la demostración del mencionado *Upper Bound Theorem*, lo que requiere uso de métodos homológicos, dando lugar a un potencial trabajo de fin de máster.

Como última nota, si el lector desea puede leer el artículo [14] donde Stanley describe cómo demostró el UBT para esferas simpliciales. En él relata brevemente el papel que jugó el resultado que hemos probado en su demostración.

Referencias

[1] M. Atiyah. *Introducción al álgebra conmutativa.* Editorial Reverté, Barcelona, 2018.

[2] W. Bruns and J. Herzog. *Cohen-Macaulay rings.* Cambridge studies in advanced mathematics ; 39. Cambridge University Press, Cambridge, second edition edition, 1998.

[3] C. A. Francisco, J. Mermin, and J. Schweig. A survey of stanley–reisner theory. In S. M. Cooper and S. Sather-Wagstaff, editors, *Connections Between Algebra, Combinatorics, and Geometry*, pages 209–234, New York, NY, 2014. Springer New York.

[4] J. M. Giral Silió. *Anillos locales regulares ; Teoría del grado ; Anillos de Cohen-Macaulay.* Notas del Seminario de Álgebra Conmutativa y Geometria Algebraica ; 1. Universidad de Barcelona. Departamento de Álgebra y Fundamentos, Barcelona, DL 1981.

[5] N. S. Gopalakrishnan. *Commutative algebra.* Oxonian Press, New Delhi, 1984.

[6] J. Herzog and T. Hibi. *Monomial ideals.* Graduate texts in mathematics ; 260. Springer, London, 2011.

[7] I. Kaplansky. *Commutative rings.* University of Chicago Press, Chicago [etc, ed. rev edition, 1974.

[8] P. McMullen. The maximum numbers of faces of a convex polytope. *Mathematika*, 17(2):179–184, 1970.

[9] M. Nagata. *Local rings.* Interscience tracts in pure and applied mathematics ; 13. Interscience Publishers, New York, 1962.

[10] R. Okazaki. Introduction to stanley–reisner rings.

[11] G. A. Reisner. Cohen-macaulay quotients of polynomial rings. *Advances in mathematics (New York. 1965)*, 21(1):30–49, 1976.

[12] R. Y. Sharp. *Steps in commutative algebra.* London Mathematical Society student texts ; 51. Cambridge University Press, Cambridge [etc, 2nd ed. edition, 2000.

[13] R. P. Stanley. The upper bound conjecture and cohen-macaulay rings. *Studies in Applied Mathematics*, 54(2):135–142, 1975.

[14] R. P. Stanley. How the upper bound conjecture was proved. *Annals of combinatorics*, 18(3):533–539, 2014.