

TRABAJO FINAL DE MÁSTER

Título: Estudio de los mecanismos de mitigación del riesgo de longevidad en seguros y pensiones

Autoría: Manuel Jesús López Bausan

Tutoría: M^a Mercedes Claramunt Bielsa

Curso académico: 2022-2023



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat d'Economia
i Empresa

Màster
de Ciències
Actuarials
i Financeres

Facultad de Economía y Empresa
Universidad de Barcelona

Trabajo Final de Máster
Máster en Ciencias Actuariales y
Financieras

**Estudio de los mecanismos de
mitigación del riesgo de
longevidad en seguros y
pensiones**

Autoría: Manuel Jesús López Bausan

Tutoría: M^a Mercedes Claramunt Bielsa

Agradecimientos

Quiero agradecer este trabajo a todas aquellas personas que me han apoyado durante el transcurso del mismo:

A la Dra. M^a Mercedes Claramunt, tutora de este TFM, por todo su interés y guía a lo largo del curso en este trabajo. A ella también le he de agradecer la oportunidad que me ha brindado por la concesión de una beca de colaboración en el curso 2021-22 con el departamento en el que ella trabaja.

Al Dr. David Atance, actuuario y profesor en la Universidad de Alcalá de Henares (Madrid) por sus consejos y colaboración en relación a conceptos vinculados con la mortalidad y la longevidad, además de por la cesión del código en R de su tesis doctoral para la extracción de los parámetros usados en el modelo matemático de la Sección 3 a la 5 de este trabajo.

A la Dra. Maite Mármol, por ayudarme a dilucidar conceptos clave en relación a la estructura de este TFM en formato \LaTeX .

A la Dra. Eva Boj, coordinadora de los Trabajos Finales de Máster de Ciencias Actuariales y Financieras (CAF), por la ayuda ofrecida en cuanto al formato de este TFM en \LaTeX y por la resolución de dudas de R.

A Mauricio Huertas, compañero del máster CAF en el periodo 2021-22 y a Carlos y a Xenxo, compañeros de Allianz en el 2022-23 en mi periodo de prácticas, por la preocupación y resolución de dudas en materia de programación y por sus consejos para elaborar un *script* de R más pulcro y meticuloso.

A los miembros del Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial de la Facultad de Economía y Empresa de la UB que me acogieron en el periodo 2021-22 como ayudante de investigación del Grupo de Modelización Financiera y Actuarial y del Observatorio de los Sistemas Europeos de Previsión Social Complementaria.

A la Dra. Manuela Bosch por la resolución de dudas del máster.

A mi hermano, Marcos, por dejarme utilizar su ordenador portátil personal en los momentos de mayor enjundia de procesamiento del código de R necesario para la creación de los gráficos de simulación estocástica.

A mi amiga Carla por la lectura de la parte teórica del trabajo e indicarme qué partes encontraba correctas y cuáles mejorables para futuros lectores.

A mis compañeros del máster y de Allianz por ser tan abnegados conmigo y por sus enseñanzas en materia actuarial.

Y, por último, aunque no menos importante, a mi familia, por todo el soporte emocional dado e ideas propuestas mientras llevaba a cabo este trabajo.

“El contenido de este documento es de exclusiva responsabilidad del autor, quien declara que no ha incurrido en plagio y que la totalidad de referencias a otros autores han sido expresadas en el texto”.

“The content of this document is the sole responsibility of the author, who declares that he has not incurred plagiarism and that all references to other authors have been expressed in the text”.

*Envejecer es como escalar una gran montaña:
mientras se sube las fuerzas disminuyen,
pero la mirada es más libre,
la vista más amplia y serena.*
Ingmar Bergman

Resumen y palabras clave

Resumen

El presente trabajo tiene dos objetivos principales.

El primero es el estudio de los mecanismos de transferencia del riesgo de longevidad en los mercados financieros que se han desarrollado en los últimos años, sus características y ventajas e inconvenientes.

El segundo objetivo es desarrollar modelos de valoración de estos instrumentos según diferentes hipótesis de mortalidad futura y distintos mecanismos de formación de precios.

Palabras clave

Riesgo de longevidad, riesgo de mortalidad, enfoque *tâtonnement*, utilidades equivalentes *CARA* y *CRRA* y bono MLS.

Abstract

This work has two main objectives.

The first goal is the study of the mechanisms for transferring the risk of longevity to the financial markets that have developed in recent years, their characteristics and their advantages and disadvantages.

The second one is to develop valuation models of these instruments according to different hypotheses of future mortality and different mechanisms of price formation.

Keywords

Longevity risk, mortality risk, *tâtonnement* approach, *CARA* and *CRRA* equivalent utilities and MLS bond.

Índice general

Glosario	6
1. Introducción	8
2. Instrumentos de longevidad y de mortalidad	9
2.1. <i>q-forward</i>	11
2.2. <i>S-forward</i> y swap de longevidad	12
2.3. Bono de longevidad	13
2.4. Reaseguro	14
2.5. Otras soluciones de mitigación	15
2.6. Ventajas e inconvenientes de los instrumentos	17
3. Modelo Lee-Carter	20
3.1. Ajuste del modelo Lee-Carter con datos del INE	22
3.2. Gráfico por filas de las probabilidades de fallecimiento, $q_{x,t}$	24
3.3. Gráficos de las diferencias entre cohortes de las $q_{x,t}$	25
3.4. Modelo estocástico de mortalidad	27
4. Modelos de valoración de los instrumentos del riesgo de longevidad	30
4.1. Función de Utilidad <i>CARA</i>	31
4.2. Función de Utilidad <i>CRRA</i>	31
5. Análisis de un bono MLS cupón cero	33
5.1. P^- de un bono cupón cero con las utilidades <i>CARA</i> y <i>CRRA</i>	33
5.2. Análisis del precio de un bono cupón cero mediante ambas utilidades	34
5.3. Variantes de los precios y cantidades óptimas del bono	38
5.4. Análisis de sensibilidad de la Tabla 5	43
6. Conclusiones	46
A. Conceptos matemáticos y estadísticos	48
A.1. Conceptos estadístico-matemáticos	48
A.2. Funciones biométricas	50
B. Resumen de empresas participantes en la Sección 2	51
C. Resultados necesarios obtenidos con R de la Sección 3.1	52
C.1. Resultados de la κ_t	52
C.2. Modelo ARIMA de hombres y mujeres	53
D. Código R y valores resultantes de los gráficos de la Sección 3	54
D.1. Filas de la Sección 3.2	54
D.2. Cohortes de la Sección 3.3	58
D.3. Diferencias por cohortes de la Sección 3.3	62
D.4. Simulación estocástica de la ${}_t p_{65}$ de la Sección 3.4	64
E. Determinación del parámetro de aversión al riesgo de Leung <i>et al.</i>	70

F. Código R y datos de las utilidades <i>CARA</i> y <i>CRRA</i>	71
F.1. Bono cupón cero de la Sección 5.1	71
F.2. Bono cupón cero de la Sección 5.2	72
F.2.1. Código del instrumento 2	72
F.2.2. Valores y resultados de los gráficos de la Sección 5.2	72
F.2.3. <i>CARA</i> Hombres	72
F.2.4. <i>CARA</i> Mujeres	88
F.2.5. <i>CRRA</i> Hombres	101
F.2.6. <i>CRRA</i> Mujeres	108
Referencias bibliográficas	127

Índice de figuras

1. Esperanza de vida al nacer en 2020 de hombres y mujeres	9
2. Estructura de un <i>q-forward</i> en el vencimiento	11
3. Flujos de caja de un LLS	15
4. Estructura de un reaseguro de sidecar	16
5. Parámetros dependientes de la edad	23
6. Parámetro dependiente del tiempo, κ_t	23
7. Gráfico de las probabilidades de fallecimiento $q_{0,t}$, $q_{65,t}$ y $q_{70,t}$	24
8. Diferencias entre las cohortes de 65 años de hombres y mujeres	26
9. Simulación estocástica: media en el 2020 de la ${}_t p_{65}$	28
10. Simulación estocástica: desviación y asimetría en el 2020 de la ${}_t p_{65}$	29
11. P^* y θ^* de un MLS mediante la función de utilidad <i>CARA</i> para hombres	39
12. P^* y θ^* de un MLS mediante la función de utilidad <i>CARA</i> para mujeres	40
13. P^* y θ^* de un MLS mediante la función de utilidad <i>CRRA</i> para hombres	41
14. P^* y θ^* de un MLS mediante la función de utilidad <i>CRRA</i> para mujeres	42
15. Modelo <i>auto.arima</i> de Lee-Carter	53
16. Código de los gráficos por filas	55
17. Datos de las probabilidades de fallecimiento $q_{0,t}$	55
18. Datos de las probabilidades de fallecimiento $q_{65,t}$	56
19. Datos de las probabilidades de fallecimiento $q_{70,t}$	57
20. Gráficos por filas	58
21. Código y datos de las $q_{x,t}$ de la cohorte de 65 años en el 2020	59
22. Código y datos de las $q_{x,t}$ de la cohorte de 65 años dentro de 50 años	60
23. Código y datos de las $q_{x,t}$ de la cohorte de 65 años dentro de 65 años	61
24. Código de las diferencias entre cohortes	62
25. Código y datos de las diferencias entre cohortes	63
26. Código de simulación estocástica a partir de 10000 simulaciones	64
27. 100 primeras simulaciones de ${}_t p_{65}$ con simulación estocástica (hombres)	65
28. 100 primeras simulaciones de ${}_t p_{65}$ con simulación estocástica (mujeres)	65
29. 100 últimas simulaciones de ${}_t p_{65}$ con simulación estocástica (hombres)	65
30. 100 últimas simulaciones de ${}_t p_{65}$ con simulación estocástica (mujeres)	66
31. Código de los momentos centrales de la simulación estocástica	66
32. Momento central de orden 1 de la simulación estocástica	67
33. Momento central de orden 2 de la simulación estocástica	68
34. Momento central de orden 3 de la simulación estocástica	69

35.	Determinación del parámetro de aversión al riesgo	70
36.	Código del bono cupón cero de la función <i>CARA</i>	71
37.	Código del bono cupón cero de la función <i>CRRA</i>	72
38.	Código propio R del instrumento 2	73
39.	Código de hombres del instrumento 2	73
40.	Código de mujeres del instrumento 2	74
41.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CARA</i> - hombres (original)	74
42.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CARA</i> - mujeres (original)	74
43.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CRRA</i> - hombres (original)	75
44.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CRRA</i> - mujeres (original)	75
45.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CARA</i> - hombres (1)	77
46.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CARA</i> - hombres (2)	78
47.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CARA</i> - hombres (3)	79
48.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CARA</i> - hombres (4)	80
49.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CARA</i> - hombres (5)	81
50.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CARA</i> - hombres (6)	82
51.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CARA</i> - hombres (7)	83
52.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CARA</i> - hombres (8)	84
53.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CARA</i> - hombres (9)	85
54.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CARA</i> - hombres (1) . .	86
55.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CARA</i> - hombres (2) . .	86
56.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CARA</i> - hombres (3) . .	86
57.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CARA</i> - hombres (4) . .	87
58.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CARA</i> - hombres (5) . .	87
59.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CARA</i> - hombres (6) . .	87
60.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CARA</i> - hombres (7) . .	88
61.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CARA</i> - hombres (8) . .	88
62.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CARA</i> - hombres (9) . .	88
63.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CARA</i> - mujeres (1)	89
64.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CARA</i> - mujeres (2)	90
65.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CARA</i> - mujeres (3)	92
66.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CARA</i> - mujeres (4)	93
67.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CARA</i> - mujeres (5)	94
68.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CARA</i> - mujeres (6)	95
69.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CARA</i> - mujeres (7)	96
70.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CARA</i> - mujeres (8)	97
71.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CARA</i> - mujeres (9)	98
72.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CARA</i> - mujeres (1) . . .	99
73.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CARA</i> - mujeres (2) . . .	99
74.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CARA</i> - mujeres (3) . . .	99
75.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CARA</i> - mujeres (4) . . .	99
76.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CARA</i> - mujeres (5) . . .	100
77.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CARA</i> - mujeres (6) . . .	100
78.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CARA</i> - mujeres (7) . . .	100
79.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CARA</i> - mujeres (8) . . .	101
80.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CARA</i> - mujeres (9) . . .	101
81.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CRRA</i> - hombres (1)	102
82.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CRRA</i> - hombres (2)	103

83.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CRRA</i> - hombres (3)	104
84.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CRRA</i> - hombres (4)	105
85.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CRRA</i> - hombres (6)	106
86.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CRRA</i> - hombres (7)	107
87.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CRRA</i> - hombres (8)	109
88.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CRRA</i> - hombres (9)	110
89.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CRRA</i> - hombres (1)	. . 111
90.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CRRA</i> - hombres (2)	. . 111
91.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CRRA</i> - hombres (3)	. . 111
92.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CRRA</i> - hombres (4)	. . 112
93.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CRRA</i> - hombres (5)	. . 112
94.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CRRA</i> - hombres (6)	. . 112
95.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CRRA</i> - hombres (7)	. . 113
96.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CRRA</i> - hombres (8)	. . 113
97.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CRRA</i> - hombres (9)	. . 113
98.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CRRA</i> - mujeres (1)	114
99.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CRRA</i> - mujeres (2)	115
100.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CRRA</i> - mujeres (3)	117
101.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CRRA</i> - mujeres (4)	118
102.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CRRA</i> - mujeres (6)	119
103.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CRRA</i> - mujeres (7)	120
104.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CRRA</i> - mujeres (8)	121
105.	P^* y θ^* del MLS mediante la función de utilidad <i>CRRA</i> - mujeres (9)	122
106.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CRRA</i> - mujeres (1)	. . . 123
107.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CRRA</i> - mujeres (2)	. . . 123
108.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CRRA</i> - mujeres (3)	. . . 123
109.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CRRA</i> - mujeres (4)	. . . 124
110.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CRRA</i> - mujeres (5)	. . . 124
111.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CRRA</i> - mujeres (6)	. . . 125
112.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CRRA</i> - mujeres (7)	. . . 125
113.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CRRA</i> - mujeres (8)	. . . 125
114.	Resultados de P^* y θ^* de un MLS mediante <i>CRRA</i> - mujeres (9)	. . . 126

Índice de tablas

1.	Resumen de los instrumentos de longevidad y de mortalidad 18
2.	Resumen de la primera emisión de los instrumentos 19
3.	Valores proyectados de la κ_t 22
4.	R_p del bono cupón cero para las funciones <i>CARA</i> y <i>CRRA</i> 34
5.	Óptimo de la oferta y la demanda de la sensibilidad para las utilidades	38
6.	Valores de la κ_t para hombres 52
7.	Valores de la κ_t para mujeres 52

Glosario

- CAPM** El Modelo de Fijación de Precios de Activos de Capital, CAPM o *Capital Asset Pricing Model* tiene en cuenta la relación inversa entre el riesgo y el rendimiento de los activos, dados un nivel de riesgo y un coste de capital determinados, sobre todo de las acciones (Kenton, 2022). 16, 18, 30, 48
- CCAPM** El Modelo de Fijación de Precios de Activos de Capital basado en el Consumo, CCAPM o *Consumption Capital Asset Pricing Model* tiene en cuenta la relación inversa de las primas de los bonos de longevidad entre el valor esperado del capital y la utilidad marginal del consumo, dados un nivel de riesgo y un coste de capital determinados (Cui, 2008). 30, 48
- cupón cero** Instrumento al que no se cobra un interés periódico durante la vida del mismo, *v. gr.*, bono o swap. La rentabilidad obtenida es la diferencia entre el precio de adquisición y el precio de reembolso (Economipedia, a). 11, 15, 18
- fideicomisario** Persona a la que se le encarga un fideicomiso o *trust*, *i. e.*, la administración del destino de un conjunto de bienes (Fundación Mapfre, a). 17
- ILS** *Insurance-Linked Securities* o valores o títulos vinculados a seguros son instrumentos financieros que se venden a inversores y cuyo valor se ve afectado por un evento de pérdida asegurada. Incluyen, *p. ej.*, bonos de catástrofe e instrumentos de reaseguro (Artemis). 13, 14, 17, 18
- liquidez** Virtud de conversión de un activo en efectivo (Blake *et al.*, 2018a). 7, 16
- LLS** *Longevity-Linked Securities* o valores o títulos vinculados a la longevidad son bonos basados en tasas o índices de supervivencia, del mismo modo que los MLS o *Mortality-Linked Securities* son bonos que se basan en índices de mortalidad, los cuales requieren de múltiples vendedores (Thomsen y Verner, 2007; Cui, 2008; Bauer *et al.*, 2010; Blake *et al.*, 2018a). 6, 10, 13, 15, 18, 30, 49
- mercado de capitales** Mercado financiero al que acuden inversores en un plazo medio o largo, *i. e.*, mayor de 18 meses, para financiarse. Implica aceptar un mayor riesgo por incorporar un lapso temporal mayor que en el mercado monetario (Economipedia, b). En el mercado de vida, *v. gr.*, se negocian activos y pasivos vinculados a la longevidad (Blake *et al.*, 2018a). 9, 11, 13, 16, 17
- MLS** *Mortality-Linked Securities* o valores o títulos vinculados a la mortalidad son bonos basados en tasas o índices de fallecimiento, del mismo modo que los LLS o *Longevity-Linked Securities* son bonos que se basan en índices de supervivencia (Aguilera, 2014). 1–3, 6, 13, 18, 21, 33–37, 39–43, 45–47
- OTC** Un contrato *over the counter* u OTC es un contrato realizado fuera de los mercados organizados. Al contrario que en los mercados bursátiles que el inversor tiene que conformarse con el producto, en estos mercados las operaciones están hechas *taylor made*, es decir, a medida entre las partes. Normalmente se trata de una gran empresa y un banco de inversiones (BBVA). 7, 12

- pension buy-in** Transacciones de seguros que implican la compra masiva de anualidades del plan de pensiones para cubrir los riesgos asociados a un subconjunto de responsabilidades del plan, generalmente asociadas con los miembros jubilados (Blake *et al.*, 2018a). 7, 15
- pension buy-out** El asegurador, además del pension buy-in, asume la responsabilidad legal de pagar las pensiones mensuales directamente a cada miembro individual del plan. El plan de pensiones entonces habrá transferido todos los pasivos al asegurador y podrá liquidarse (Price Waterhouse Coopers). 15
- plain vanilla** Instrumento financiero simple negociado entre dos instituciones en el mercado extrabursátil u OTC (*over-the-counter*). Es un intercambio de tasa de interés fija por tasa de interés variable o viceversa (The definition). 12
- ramo** Conjunto de modalidades de seguro relativas a riesgos de características o naturaleza semejantes. También se denomina *line of insurance* o *line of business* (*lob*). Por ejemplo, existen los ramos de vida, de no-vida, de automóviles, de incendio, etc. (Fundación Mapfre, b). 14, 16
- ratio de Sharpe** Principio de desviación estándar que no usa una transformación de probabilidades de supervivencia y se usa para determinar las primas de riesgo. Ha sido utilizado en la literatura financiero-actuarial por varios autores para fijar el precio de los *q-forwards* (Zeddouk y Devolder, 2019). 30, 49
- riesgo base** Riesgo residual asociado con una cobertura imperfecta donde los movimientos en la exposición subyacente no están perfectamente correlacionados con los movimientos en el instrumento de cobertura (Blake *et al.*, 2018a). 13
- riesgo de longevidad** Riesgo de que las tendencias futuras de mortalidad difieran de las previstas y generen un aumento en el valor de los compromisos contraídos en virtud de los seguros (Zeddouk y Devolder, 2019). 1, 2, 8–17, 30, 46
- riesgo de mortalidad** Riesgo de que las tendencias futuras de mortalidad aumenten más de lo previsto y generen un aumento en el valor de los compromisos contraídos en virtud de los seguros (Barrieu *et al.*, 2010). 1, 10, 11, 13–15, 17
- ruido blanco** Señal cuyas muestras son una secuencia de variables aleatorias no relacionadas, sin media y con varianza limitada (DeepAI). 20
- Solvencia II** Directiva que entró en vigor en enero de 2016 y que cubre a las compañías de seguros domiciliadas en el Espacio Económico Europeo. Se utiliza para establecer requisitos de capital, que es el nivel de fondos propios requerido por la autoridad reguladora de una aseguradora (Solvencia II). 10, 17
- titulización** Proceso de transformación de un activo financiero con poca liquidez en un bono o título de renta fija más líquido a través de la transferencia del riesgo de crédito a un tercero (Economipedia, c). 14–18
- tâtonnement** Enfoque de prueba y error, tanteo walrasiano o *tâtonnement approach* es un planteamiento económico propuesto por Léon Walras (1834–1910) a finales del siglo XIX con el fin de llegar a un acuerdo de competencia perfecta en los bienes del entorno rural (Leung *et al.*, 2018). 35, 37, 45, 129–131

1. Introducción

El fenómeno de la longevidad se refiere a que la población viva más, o en términos más concretos, viva más de lo esperable inicialmente. En las últimas décadas, la población española y, en general, la mundial, ha incrementado su longevidad. Esta evolución se plasma, por ejemplo en la esperanza de vida al nacer y la esperanza de vida en una determinada edad, como la de jubilación.

El riesgo de longevidad se define como el riesgo de pérdidas en los seguros y/o en las pensiones complementarias, derivadas de una disminución de las tasas de mortalidad. Este riesgo de longevidad es muy importante en los seguros que dan prestaciones de supervivencia, es decir, cuando los asegurados viven en determinadas edades. Las repercusiones monetarias de una longevidad no prevista (y por tanto no tarifada) son importantes.

Existen en los mercados financieros mecanismos de transferencia de riesgos que pueden aplicarse al riesgo de longevidad. Así, diversas experiencias iniciales de *q-forward* y *swaps* han aparecido en el mercado en los últimos tiempos, pero existen dificultades en su generalización.

Por otro lado, citando textualmente la definición de Solvencia II, el riesgo de longevidad es el riesgo de pérdida o de modificación adversa del valor de los compromisos contraídos en virtud de los seguros suscritos debido a variaciones en el nivel, la tendencia o volatilidad de las tasas de mortalidad, para aquellos casos en que un descenso de la tasa de mortalidad genere un aumento en el valor de los compromisos contraídos en virtud de los seguros.

En este trabajo se pretende profundizar en estos mecanismos de mitigación del riesgo de longevidad, estudiando las experiencias que se han producido así como los modelos matemáticos que permiten el diseño y cuantificación de estos productos.

De la misma manera, se conforma de secciones de índole teórico (2 y 4) y secciones de índole práctico (3 y 5) en las que se aplican los conocimientos previos a través de una aplicación pragmática.

En concreto, en la Sección 2 se detallan los instrumentos de mitigación de los riesgos de longevidad y de mortalidad más relevantes en el sector; en la Sección 3 se desarrolla el Modelo de Lee y Carter (1992) y las metodologías de la estimación de sus parámetros; en la Sección 4 se especifican los modelos de valoración de los instrumentos del riesgo de longevidad y en la Sección 5 se realizan de forma práctica análisis mediante un bono MLS.

Además, se incluyen unas conclusiones, varios anexos (A-F) que sirven de ayuda a lo largo de todo el trabajo como información adicional y una vasta lista de referencias bibliográficas. Asimismo, con el fin de mejorar la comprensión de ciertas nociones, al inicio se complementa la lectura con un glosario de términos técnicos.

2. Instrumentos de longevidad y de mortalidad

Desde la década de 1960 en Europa y en Estados Unidos la esperanza de vida, según Barrieu *et al.* (2010) y Debonneuil *et al.* (2017), crece un cuarto por año transcurrido, lo que provoca un aumento del riesgo de longevidad. Este riesgo lo afrontan aseguradoras y fondos de pensiones, dependiendo de las tasas de mortalidad, la generación y la edad de la persona que está a punto de jubilarse. Las soluciones más usadas han sido el reaseguro tradicional y las del mercado de capitales (Barrieu *et al.*, 2010).

Durante años se han ido valorando posibles medidas para mitigar este riesgo. En la literatura se ha puesto de manifiesto que los gobiernos y los gestores de riesgo de compañías aseguradoras deberían ser quienes establecieran medidas correctoras, como por ejemplo, bonos o swaps para transferir el riesgo a partes interesadas o al mercado de capitales (Debonneuil *et al.*, 2017). Existen métodos de cobertura natural, como el diseño de productos, las hipotecas inversas o los seguros de protección, los cuales proporcionan cobertura de longevidad, pero parcialmente.

En Atance *et al.* (2021) se realiza un informe completo sobre varios indicadores de longevidad teniendo en cuenta información de tres bases de datos distintas desde 1990 hasta 2020 y con ellos se añaden unas predicciones hasta 2030 de 41 países del planeta. En relación a la esperanza de vida al nacer (E_0), se concluye que se ha producido un mejora en los últimos años de este indicador debido a factores como la calidad de vida, la alimentación y la salud.

En la Figura 1 se puede observar cómo oscilan las esperanzas de vida en la edad de un recién nacido en el año 2020 dependiendo del país de origen y de si son hombres o mujeres. En el mundo existe una oscilación de 51 a 82,5 años aproximadamente en el sexo masculino y de 55 a 88,5 en el sexo femenino. El aumento en las esperanzas de vida tiene asociado un riesgo que crece en la misma proporción que la mejora en la esperanza de vida, no solo al nacer, sino también en la edad de jubilación (E_{65} , por simplificación): el riesgo de longevidad.

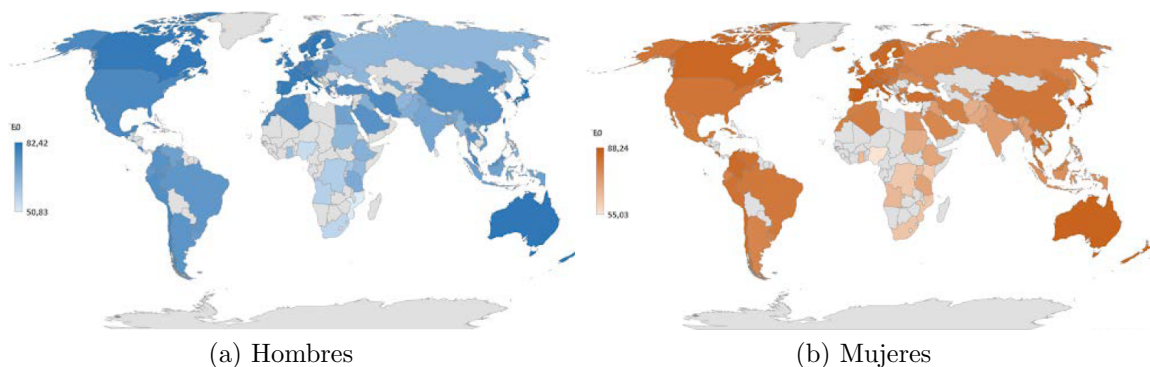


Figura 1: Esperanza de vida al nacer en 2020 de hombres y mujeres

Fuente: Atance *et al.* (2021)

La investigación de Bravo y Vidal (2021) muestra que el riesgo de longevidad tiene varios riesgos asociados: incertidumbre de la tendencia de mortalidad, el riesgo

de difusión de longevidad, el riesgo de salto de mortalidad, así como el riesgo de modelo y parámetro.

Dos buenas definiciones de riesgo las ofrece Cox *et al.* (2010): El riesgo de mortalidad es el riesgo de que se produzcan más muertes de las esperadas y el riesgo de longevidad es el riesgo de que sobreviva más gente de la esperada. Cox *et al.* también señalan que la investigación sobre pensiones y rentas vitalicias se centran en el riesgo de longevidad, riesgo en el que también se focalizará este trabajo.

Cuando la población estudiada vive más de lo esperado se produce el riesgo de longevidad, afectando a las reservas matemáticas constituidas para hacer frente a los flujos futuros, los cuales serán insuficientes, ya que se basarán en tablas de supervivencia inferiores a las reales (Giménez, 2020).

Los derivados tienen como subyacente índices basados en datos de LifeMetrics, en el de Goldman-Sachs y en el de Credit Suisse (Coughlan *et al.*, 2007). Asimismo, Solvencia II se convierte en un requisito de medición y evaluación del riesgo de longevidad de las aseguradoras (Levantesi y Menziatti, 2006). Este hecho provocó que el nivel de capital que se necesitaba para la longevidad fuera superior. La solución que ofrece el mercado es la gestión del riesgo de longevidad.

Los gobiernos europeos están aumentando las edades de jubilación, hecho que provoca una transferencia del riesgo de longevidad a las personas. Blake *et al.* (2006) añaden que, no solo los ciudadanos están expuesto al riesgo de longevidad, sino que también afecta a los planes de pensiones de prestación definida y a todos los agentes involucrados en él: compañías de seguros, accionistas, directores, gobiernos y a empresas privadas.

En las siguientes secciones se resumen los derivados de longevidad y de mortalidad más importantes que se han desarrollado de forma teórica y/o práctica en los últimos 20 años. Actualmente se usan los derivados de la longevidad basados en tasas de mortalidad o longevidad como los swaps de supervivencia o los bonos de longevidad (Zeddouk y Devolder, 2019).

Además también se explican en este estudio los *q-forward* y los *S-forward* emitidos por primera vez en 2006 en Reino Unido con motivo de reducción del riesgo de longevidad (Leung *et al.*, 2018; Blake *et al.*, 2018a) juntamente al reaseguro como un instrumento más tradicional. Existen otros instrumentos menos conocidos en los que este trabajo no ahondará, como opciones de mortalidad, opciones de supervivencia, *K-options* y opciones de *call spread*, entre otros (Bravo y Vidal, 2021).

En Leung *et al.* (2018) se estudian también los bonos de longevidad o LLS EIB-BNP Paribas, los cuales fueron emitidos por el Banco Europeo de Inversiones y por el *Banque Nationale de Paris* en noviembre de 2004 por 540 M€, a cambio de cupones de 50 M€ ponderado por el índice de supervivencia basado en las tasas de mortalidad de hombres galeses e ingleses de 65 años en 2003. Asimismo, actualmente no se negocian en los mercados financieros, ya que la fijación de precios sigue siendo un inconveniente para los LLS (Cui, 2008).

2.1. *q-forward*

Un contrato *q-forward* o de mortalidad a plazo es el tipo de instrumento más simple de cobertura del riesgo de longevidad y de mortalidad (Coughlan *et al.*, 2007). Cox *et al.* (2010); Blake *et al.* (2018a) definen un *q-forward* como un acuerdo entre dos partes para intercambiar en una fecha futura (el vencimiento del contrato) una cantidad proporcional a la tasa de mortalidad a plazo de una determinada población, a cambio de una cantidad proporcional a una mortalidad fija, tasa acordada mutuamente al inicio. Es decir, un *q-forward* es un swap de cupón cero que intercambia mortalidad fija por mortalidad al vencimiento.

Por ende, un fondo de pensiones cubrirá el riesgo de longevidad y esperará a que la contraparte del forward le pague si la mortalidad es superior de lo previsto (es decir, si aumenta el riesgo de mortalidad). En consecuencia, el vendedor del *q-forward* será el fondo de pensiones (contraparte A), mientras que el comprador (contraparte B) será el inversor o banco de inversión, el cual tiene la exposición opuesta, pagando la tasa de mortalidad fija y recibiendo la tasa realizada en el vencimiento, como se ilustra en la Figura 2 (Barrieu *et al.*, 2010; Blake *et al.*, 2018a).

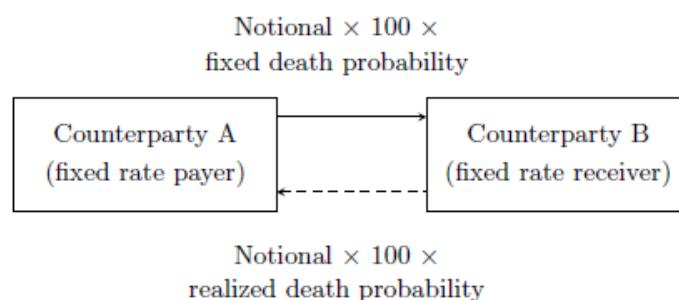


Figura 2: Estructura de un *q-forward* en el vencimiento
Fuente: Barrieu *et al.* (2010)

La primera transacción de derivados del mercado de capitales del mundo de un contrato *q-forward* se dio en enero de 2008 por JP Morgan y la empresa de compra de fondos de pensiones del Reino Unido Lucida a partir del índice LifeMetrics mediante ratios de probabilidad de fallecimiento o supervivencia a 10 años (Barrieu *et al.*, 2010; Blake *et al.*, 2018a,b).

Del mismo modo que los swaps de longevidad, Blake *et al.* (2018a) arguyen que los *q-forward* se vincularon a un índice de longevidad basado en la mortalidad masculina nacional de Inglaterra y Gales para intervalos de diferentes edades. La cobertura fue proporcionada por JP Morgan e incluía cobertura de valor además de cobertura de efectivo.

En resumen, que tenga estructura de **cobertura de valor** quiere decir que cubre los pasivos del coberturista en la fecha de vencimiento del swap. En cambio, si tiene **cobertura de flujo de efectivo** cubre el riesgo de longevidad en cada etapa y, del mismo modo, los pagos y flujos se realizan en cada uno de los periodos. Un ejemplo de cada tipo sería: el swap personalizado de julio de 2008 de JP Morgan con Canada Life y el *q-forward* de enero del mismo año de JP Morgan con Lucida,

respectivamente (Blake *et al.*, 2018a).

La tasa de mortalidad fija a la que se lleva a cabo la transacción define la tasa de mortalidad futura para la población en cuestión. Si el *q-forward* tiene un precio justo, ningún pago cambia de manos al inicio de la operación, pero al vencimiento, una de las dos partes realizará un pago neto (a menos que las tasas de mortalidad fija y real sean las mismas) (Blake *et al.*, 2018a). Blake *et al.* argumentan además, que la liquidación que tiene lugar al vencimiento se basa en la diferencia proporcional de pagos netos entre la tasa de mortalidad fija (la tasa a plazo o *forward* negociada) y la tasa de referencia realizada o variable.

2.2. *S-forward* y swap de longevidad

Según Barrieu *et al.* (2010) un swap de longevidad es un instrumento de cobertura de flujos de caja para la aseguradora de vida. El riesgo de longevidad se transfiere de la aseguradora a los inversores, a cambio de un precio: la prima.

Leung *et al.* (2018), Blake *et al.* (2018a) y Zeddouk y Devolder (2019) definen un contrato *S-forward* o *survivor-forward* como un swap donde el pagador de tasa fija paga una cantidad $K \in (0, 1)$ a cambio de una cantidad variable sujeta a un índice, es decir, un swap de longevidad o de supervivencia (o S-swap). Por tanto, el Swap de longevidad se diseña financieramente como una cartera plain vanilla, *id est*, un contrato a medida u OTC (*over the counter*) con vencimiento a largo plazo, sin transferencia de activos (Blake *et al.*, 2018b). En cualquier swap de longevidad, el plan de pensiones o aseguradora recibe del vendedor del swap los pagos reales (y variables) que debe pagar a los pensionistas y, a cambio, realiza una serie de pagos fijos al vendedor (Barrieu *et al.*, 2010); (Blake *et al.*, 2018a).

Blake *et al.* (2018a) añadieron que su función es pagar las pensiones de las que es responsable el comprador del swap y mitigar el riesgo de longevidad. No se transfieren activos y el plan de pensiones generalmente retiene los riesgos de inversión asociados con la cartera de activos. Dado que el Swap de longevidad basado en índices se construye como una cesta de *S-forwards*, el precio de un Swap de longevidad se puede obtener fácilmente como la suma de los precios individuales de *S-forward* (Bravo y Vidal, 2021). Blake *et al.* (2006) indicaron que los swaps de longevidad resultan muy caros y exclusivos para empresas grandes a no ser que el mercado de swaps se volviera lo suficientemente líquido o si se desarrollaran en un mercado de valores negociados.

A pesar de la vasta literatura de los *S-forward*, no ha arraigado en el mercado porque es muy difícil calcular su precio. Dos soluciones que han tenido éxito en el mercado han sido los swaps de longevidad basados en pensiones y los seguros de longevidad (Blake *et al.*, 2018a).

Existen dos tipos de swaps de longevidad (Barrieu *et al.*, 2010): los basados en un índice y los personalizados:

- **Swap estandarizado o basado en un índice:** en enero de 2008 JP Morgan ejecutó un swap estandarizado a 10 años con la aseguradora Lucida por 100

millones de libras esterlinas. Se acordó mantener el riesgo base.

- **Swap personalizado:** en julio de 2008 JP Morgan ejecutó un swap personalizado de longevidad a 40 años por 500 millones de libras esterlinas. La aseguradora pagaba *fijo* y cobraba *variable*, parecido a una póliza de jubilación.

Hay una pequeña cantidad de valores del mercado de capitales que se han lanzado con éxito desde 2006: bonos con diferencial de longevidad, swaps de longevidad, *q-forwards*, *S-forwards* y protección contra el riesgo de cola. La característica clave de estos es que la mayoría son soluciones indexadas en lugar de personalizadas (Blake *et al.*, 2018a).

El primer Swap de longevidad (aunque fue estructurado como un contrato de seguro del mercado de capitales) tuvo lugar en abril de 2007 por 1.700 millones de libras esterlinas entre Swiss Re y Friends Provident, una aseguradora de vida del Reino Unido, la cual realizaba pagos y asumía el riesgo de longevidad. Por otro lado, el primero basado en los mercados de capitales tuvo lugar en julio de 2008 entre JP Morgan y Canada Life en el Reino Unido. Canada Life cubrió 500 millones de libras esterlinas de rentas vitalicias mediante un swap a 40 años personalizado para la exposición de longevidad de la aseguradora a 125.000 pensionistas. El riesgo de longevidad se transfirió por completo a los inversores, que incluían fondos de cobertura y fondos de valores vinculados a seguros (ILS). JP Morgan actuó como intermediario asumiendo el riesgo de crédito de contraparte (Blake *et al.*, 2018a). Más adelante, entre 2007 y 2016 se ejecutaron 48 swaps de longevidad en el Reino Unido por valor de 75.000 millones de libras esterlinas (Blake *et al.*, 2018b). Por otro lado, desde 2007 hasta 2010 también se realizaron operaciones con swaps entre compañías de seguros y reaseguradoras (Barrieu *et al.*, 2010).

El primer Swap de longevidad del mundo para no pensionistas se ejecutó en enero de 2011, cuando JP Morgan elaboró un contrato *q-forward* a 10 años de 70 millones de libras esterlinas con el fondo de pensiones inglés Pall. Fue un swap de valor diseñado para cubrir el riesgo de longevidad en el valor de los pasivos de pensiones de Pall, en lugar del riesgo de longevidad en sus pagos de pensiones como en el caso de los swaps de flujo de efectivo, que han sido la mayoría de los swaps que hasta ahora han tenido lugar (Blake *et al.*, 2018a).

2.3. Bono de longevidad

En los últimos años, se han propuesto varias soluciones basadas en el mercado de capitales para la gestión del riesgo de mortalidad y del riesgo de longevidad y, algunas, se han lanzado con éxito.

Comprenden instrumentos de deuda vinculados a la mortalidad o a la longevidad, como bonos de mortalidad (MLS) y de longevidad (LLS) o derivados que permiten que los pagos de cupones y/o reembolsos dependan del rendimiento del índice subyacente de mortalidad o longevidad, como el índice suizo unido al bono Swiss Re Kortis, instrumento de protección del riesgo de cola a través de un bono de longevidad adaptado (Bravo y Vidal, 2021). El artículo de Bravo y Vidal continúa

indicando que los bonos de longevidad, los reaseguros y los swaps de longevidad son técnicas de mitigación del riesgo de longevidad, las cuales permiten el control de pérdidas y la cobertura natural.

El bono Swiss Re fue el primer bono vinculado con el riesgo de mortalidad lanzado al mercado en Reino Unido en diciembre de 2003 adaptado en diseño y madurez del bono de mortalidad de Vita. Tuvo éxito, por lo que la operación se repitió en abril y diciembre de 2006. Posteriormente las aseguradoras optaron por reducir sus riesgos y crearon otros bonos (Cox *et al.*, 2010). Uno de ellos fue el bono EIB-BNP Paribas, el cual cubría el riesgo de longevidad, pero quebró en 2005 (Barrieu *et al.*, 2010).

Los bonos Swiss Re Kortis son bonos catastróficos de mortalidad (Aguilera, 2014), llamados de este modo por cubrirse de un futuro acaecimiento de la catástrofe, basados en un índice. Blake *et al.* (2018a) expone un ejemplo exitoso de bono Swiss Re Kortis. Fue emitido en diciembre de 2010 y venció en enero de 2017. El bono pagó cupones trimestrales del 5% por encima del libor con devolución al vencimiento. Asimismo, estos bonos de longevidad estaban diseñados para cubrir la exposición de Swiss Re al riesgo de mortalidad y al riesgo de longevidad.

Leung *et al.* (2018) exponen que el objetivo del bono EIB-BNP Paribas era protegerse contra la exposición al riesgo de longevidad de las personas de 75 a 85 años en el Reino Unido y del riesgo de mortalidad de las personas del mismo intervalo de edades en EE.UU. Blake *et al.* (2018a) argumenta, por otro lado, que falló porque se consideró caro debido a la incorporación de una cobertura de longevidad extremadamente larga e innecesaria, a pesar de ser útil, transparente y relevante en su conjunto.

Los valores relacionados con la longevidad no se negocian ampliamente en los mercados financieros, puesto que es muy difícil fijar precios (Zeddouk y Devolder, 2019). Por este motivo, los modelos de Cox y Lin (2007) permiten a los inversores comprender mejor por qué el bono de Swiss Re es una inversión atractiva a pesar de la incertidumbre asociada con el riesgo de mortalidad, mientras que el bono del EIB-BNP Paribas no se vendió muy bien.

Una de las soluciones estudiadas en los últimos 20 años es la titulización del riesgo de longevidad. En contrapartida a los derivados (como, por ejemplo, swaps o *q-forwards*), los ILS o valores vinculados a seguros están aumentando su importancia en el mercado financiero para transferir ese riesgo de longevidad (Blake *et al.*, 2018a). En la práctica se ha intentado gestionar un mercado de derivados de seguros, como futuros u opciones, pero no ha tenido el éxito esperado en el ramo de vida (Barrieu *et al.*, 2010).

2.4. Reaseguro

El Diccionario de Seguros Allianz define el reaseguro como un contrato con el que una aseguradora (cedente) pasa a ser asegurada de otra (reaseguradora), es decir, distribuye los riesgos y responsabilidades en caso de siniestro, cubriendo parcialmen-

te su coste. Se protege ante la posibilidad que ocurra un siniestro de elevada cuantía, que pudiera ocasionarle graves pérdidas económicas.

Bravo y Vidal (2021) estudiaron que el reaseguro es la solución que predomina en el mercado en formato de rentas vitalicias para transferir su riesgo de longevidad, pero también es de las opciones más costosas, debido a sus primas y al aumento de la longevidad a nivel mundial. Además, no es diversificable, por lo que esta práctica se vuelve insostenible en el tiempo. Por este motivo brotaron nuevas formas de transferir el riesgo de longevidad (Zeddouk y Devolder, 2019), como la titulización (ver Sección 2.5) o el pension buy-in y el pension buy-out.

La primera transacción internacional de Reaseguro de longevidad tuvo lugar en junio de 2011 entre Rothesay Life (Reino Unido) y PICA (EE. UU.) valorada en 100 millones de libras esterlinas. Del mismo modo, el primer swap de Reaseguro de vida desde la crisis financiera mundial de 2007-2008 también se llevó a cabo en junio de 2011 entre Atlanticlux e inversores institucionales y se valoró en 60 millones € (Blake *et al.*, 2018a).

2.5. Otras soluciones de mitigación del riesgo de longevidad y del riesgo de mortalidad

Además de los instrumentos expuestos previamente hay gran variedad de métodos alternativos de mitigación del riesgo de longevidad y/o del riesgo de mortalidad. Algunos de ellos son los swaps de mortalidad, futuros de mortalidad, opciones de mortalidad, bonos de longevidad de cupón cero o bonos de longevidad diferidos, entre muchos otros (Blake *et al.*, 2018a).

En Blake *et al.* (2018a) también se arguyen otros métodos. El primero, del cual se muestran sus flujos de caja en la Figura 3, son los **LLS o valores basados en la longevidad** formados a partir de los bonos de longevidad sin éxito EIB-BNP Paribas (Barrieu *et al.*, 2010; Blake *et al.*, 2018a).

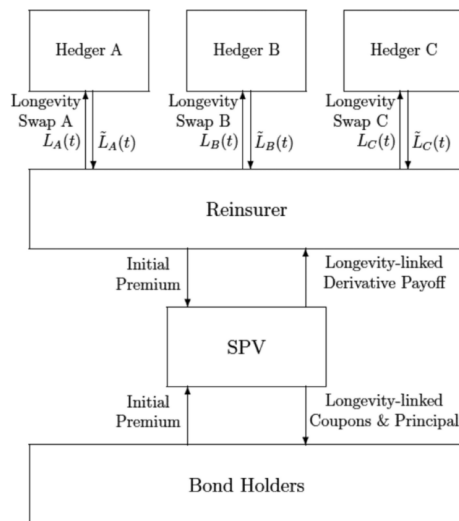


Figura 3: Flujos de caja de un LLS
Fuente: Blake *et al.* (2018a)

Otra opción es el **Reaseguro de sidecar** que consiste en compartir riesgos con nuevos inversores cuando a los inversionistas les preocupa que el reasegurador cedente tenga una ventaja informativa. En la Figura 4 se aprecia cómo este tipo de reaseguro es una estructura financiera que admite que los inversionistas externos asuman los riesgos a largo plazo y se beneficien a corto plazo. Por el mismo motivo, a las aseguradoras les favorece este instrumento, ya que se protegen frente a riesgos máximos de longevidad.

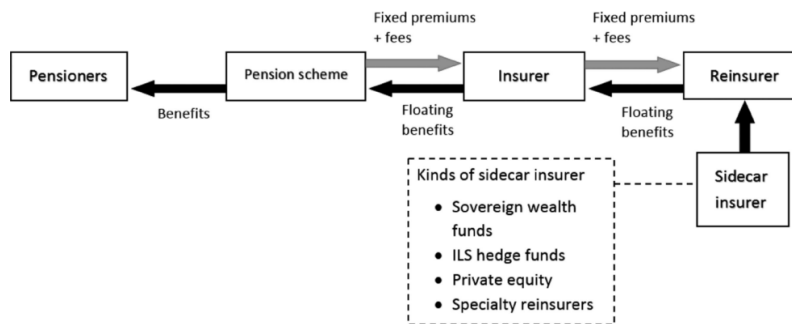


Figura 4: Estructura de un reaseguro de sidecar
Fuente: Blake *et al.* (2018a,b)

Estas soluciones podrían tener éxito en la actualidad debido a la limitación de la industria de seguros y reaseguros: no tienen el capital y el personal suficientes para hacer frente a un riesgo de longevidad ilimitado.

Es posible atraer a nuevos inversores en los mercados de capitales pero, según Blake *et al.* (2018a) es probable que la cobertura del inversionista no sea del todo eficaz ni transparente. A pesar de ello, Blake *et al.* comentan que a comienzos de 2018, el sidecar de reaseguro tuvo éxito con el anuncio de creación de una nueva empresa por parte de RGA Re y Renaissance Re. La nueva empresa se llamó Langhorne Re y se centró en el ramo de vida y en las rentas vitalicias, la cual obtuvo 780 millones de dólares de capital social de sus inversores.

Existe disonancia entre lo que prefieren los inversores del mercado de capitales y las soluciones que han sido más populares. Los inversores se decantan por los bonos de mortalidad a largo plazo, mientras que las más exitosas han sido los swaps de longevidad y los bonos de mortalidad a corto plazo (Blake *et al.*, 2018a).

El análisis de Cox *et al.* (2010) contempla la posibilidad de modelización de la titulización de la mortalidad vinculada a los seguros como alternativa a los métodos tradicionales de cobertura del riesgo, como el análisis CAPM o *Capital Asset Pricing Model* (Modelo de Valoración de Activos Financieros).

Para aumentar la liquidez el artículo de Barrieu *et al.* (2010) informa que se debe cambiar la mentalidad de seguro a la de mercado de capitales. Además, se han creado índices de longevidad para mejorar la visibilidad, la transparencia y la comprensión del riesgo de longevidad en los mercados, a partir de datos nacionales. Estos índices ayudan a mitigar, en parte, el riesgo asociado a la longevidad. Algunos de ellos son: el índice Credit Suisse, el índice JP Morgan con colaboración de LifeMetrics y el

Xpect Data instaurado por la bolsa alemana, fundados entre 2005 y 2008.

Según Barrieu *et al.* (2010), el sector asegurador ha adoptado nuevas regulaciones desde la década del 2000 (*v. g.*, Solvencia II) destinadas a garantizar una mayor precisión en la valoración de riesgos y normas más estrictas en la gestión del riesgo de solvencia. Por este motivo, es necesario disminuir o hacer desaparecer la asimetría entre los agentes del mercado. Así pues, es preciso descubrir metodologías personalizadas adaptables al mercado actual y a las necesidades personales del riesgo de longevidad.

2.6. Ventajas e inconvenientes del uso de los instrumentos de longevidad y de mortalidad

La literatura sobre el estudio de la mitigación del riesgo de longevidad y del riesgo de mortalidad ha proporcionado grandes ventajas en el mercado de capitales, aunque también algún inconveniente inherente que ha provocado la quiebra de alguno de los instrumentos, como el bono EIB-BNP Paribas que dejó de estar activo en 2005.

Los *q-forward* tienen un gran inconveniente: no es tarea sencilla estimar el número de supervivientes de un conjunto de población, el cual equivale al riesgo que cubre este instrumento (Blake *et al.*, 2006).

En cuanto al mercado ILS o titulización vinculada a seguros, los beneficios son múltiples: se transfiere el riesgo, se alivia la tensión de capital y existe aceleración en las ganancias y en la velocidad de liquidación y duración (Bauer *et al.*, 2010).

Los Swaps de longevidad, en cambio, ofrecen una solución de cobertura del riesgo de longevidad más barata, en comparación con el reaseguro que, a pesar de ser la opción predominante en el mercado, es también la más costosa (Bravo y Vidal, 2021). Los Swaps de longevidad, además, tienen la ventaja de que eliminan el riesgo de longevidad sin la necesidad de un pago por adelantado por parte del patrocinador y permiten que los fideicomisarios del plan de pensiones retengan el control de la asignación de activos (Blake *et al.*, 2018a).

En Zeddouk y Devolder (2019) se describe que los swaps de longevidad poseen unas características idóneas para cubrir el riesgo de longevidad, ya que son flexibles, sus costes son bajos, se adaptan a cada individuo y no requieren de un mercado líquido para funcionar.

En la Tabla 1 se muestra un resumen esquematizado de los instrumentos de longevidad y de mortalidad estudiados previamente y en la Tabla 2 se resumen la fecha, las partes implicadas, la cuantía, el vencimiento y el lugar de la primera emisión de los instrumentos más importantes estudiados en la Sección 2 de esta memoria.

Además, en el Anexo B se comenta brevemente cuál es el desarrollo profesional principal de las empresas que forman parte en las transacciones de la Sección 2 del presente trabajo.

<u>Instrumento</u>	Riesgo que cubre/mitiga	Ratios que usa	¿Vinculado a un índice?	Alternativas viables	Notas
Swap de longevidad y S-forward	Longevidad	Probabilidades de fallecimiento y supervivencia	Sí, LifeMetrics vinculó la mortalidad masculina de RU y Gales por edades de 75 a 85 años	Exitosas desde 2006: - Bonos con diferencial de longevidad - Swaps y seguros de longevidad basados en pensiones - Protección contra el riesgo de cola	Tiene cobertura de flujo de efectivo
		Basados en un índice	Sí, el swap de longevidad se construye como una cartera <i>S-forward</i>		Entre 2007 y 2010 se lanzaron con éxito al mercado estos instrumentos
		Personalizados	No, pero con cobertura de valor		
		Contrato de reaseguros	Sí, por definición		
Cobertura de pasivos		Índices de mortalidad y longevidad	No, pero con cobertura de valor		
Bonos de longevidad	Longevidad y Mortalidad	Índices de mortalidad y longevidad	Sí, son índices catastróficos	- Reaseguros - Swaps de longevidad - <i>q-forwards</i> - ILS, MLS y LLS	Basado en el bono Vita
	- Longevidad en RU - Mortalidad en EUA	Índices de supervivencia y mortalidad masculina de galeses e ingleses de 65 años en 2003	Sí, son bonos basados en personas de RU y EUA de 75 a 85 años		Quebró en 2005
Reaseguro	Longevidad	Transferencia del riesgo	No	- Titulización - Buy-in y buy-out	Opción más cara y predominante
Otras soluciones		Swaps, futuros y opciones de mortalidad, bonos de sidecar y CAPM.			

Tabla 1: Resumen esquematizado de las características de los instrumentos de longevidad y de mortalidad
Fuente: Elaboración propia

<u>Instrumento</u>	Fecha	Partes implicadas	Cuantía y vencimiento	Lugar	¿Se usa hoy día?	¿Ha tenido éxito?
<i>q-forward</i>	Enero 2008	JP Morgan Lucida	Operación a 10 años	RU	Sí	Sí
	Enero 2008	JP Morgan Lucida	100 millones £ a 10 años	RU	No	No, es muy difícil calcular su precio
Swap de longevidad y <i>S-forward</i>	Julio 2008	JP Morgan Canada Life	500 millones £ a 40 años que cubren el riesgo de 125.000 pensionistas	RU	No	
	Abril 2007	Swiss Re Friends Provident	1700 millones £	RU	No	Sí
Contrato de reaseguros de cobertura de pasivos	Enero 2011	JP Morgan Pall	70 millones £ a 10 años	RU	No	Sí, fue un swap de flujo de efectivo
Bonos de longevidad	Diciembre 2003	Bonos emitidos por Swiss Re		RU	Sí	Sí, y se repitió en 2006 y en 2010
	Noviembre 2004	EIB BNP	540 M€ a cambio de cupones de 50 M€ ponderado por un índice de supervivencia	RU EUA	No	No
Reaseguro	Junio 2011	Rothesay Life PICA	100 millones £	RU EUA	Sí	Sí, pero se valoran nuevas formas menos costosas

Tabla 2: Resumen esquematizado de la primera emisión de los instrumentos de longevidad y de mortalidad
Fuente: Elaboración propia

3. Modelo Lee-Carter

Lee y Carter desarrollaron en 1992 el modelo que lleva su nombre (en adelante, **modelo LC**) con el objetivo de valorar y predecir la mortalidad. Este modelo se basa en una relación aritmética entre la tasa central de mortalidad, $m_{x,t}$ y las variables edad, x , y tiempo, t . Es decir:

$$\log(\hat{m}_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x \cdot \kappa_t + \varepsilon_{x,t}, \quad (1)$$

o, de forma análoga, (1) se puede transformar en:

$$\hat{m}_{x,t} = \exp\{\alpha_x + \beta_x \cdot \kappa_t + \varepsilon_{x,t}\}, \quad (2)$$

donde,

- α_x es un parámetro dependiente de la edad que describe el comportamiento medio de la curva de mortalidad para cada x en el tiempo.
- κ_t es un parámetro dependiente del tiempo y describe qué tendencia sigue la mortalidad. Si este parámetro es creciente significa que la mortalidad empeora. Si fuera decreciente, el comportamiento sería inverso.
- β_x también depende de la edad y recoge la reacción de la tasa de mortalidad para cada año con respecto al parámetro κ_t , es decir, de la tendencia general de mortalidad.
- $\varepsilon_{x,t} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Es decir, $\varepsilon_{x,t}$ representa un error aleatorio o ruido blanco con media 0 y varianza σ_ε^2 , que recoge las desviaciones aleatorias no captadas por el modelo. En el artículo original de Lee y Carter (1992) se especifica que este parámetro debería tener un comportamiento basado en la distribución normal con una varianza pequeña debido a que la varianza de $\hat{m}_{x,t}$ debería explicar el nivel general de mortalidad, κ_t .

El modelo de Lee y Carter (1992) pertenece a la categoría de modelos Edad-Periodo (*Age-Period, A-P*) y resulta ser un modelo indeterminado pues describe la probabilidad de fallecimiento de la edad en función del tiempo y, por tanto, dada una solución cualquiera de α_x , β_x y κ_t , también lo será cualquier transformación de esta. Por tanto, para evitar este problema, los autores restringieron los parámetros normalizándolos del siguiente modo:

$$\sum_x \beta_x = 1 \quad \sum_t \kappa_t = 0 \quad (3)$$

Antes de indicar qué método se usará para estimar los parámetros, previamente se aclararán algunos conceptos:

- Se pone de manifiesto que estas restricciones no son únicas ni aceptadas por todos. En la literatura actuarial se han propuesto varias soluciones a este problema de indeterminación, como las indicadas por Brouhns *et al.* (2002) o Haberman y Renshaw (2011), pero en este trabajo se seguirán las mencionadas en (3), siguiendo el ejemplo de Lee y Carter.

- Los parámetros α_x y β_x son constantes para cada periodo de tiempo, t .
- De forma análoga, κ_t es constante para todas las edades, x .

Principalmente existen 4 metodologías distintas¹ para la estimación de los parámetros α_x , β_x y κ_t :

1. La **Descomposición en Valores Singulares** (SVD) propuesta por Lee y Carter (1992) a través de una transformación realizada con una función *logit*.
2. Mediante **Mínimos Cuadrados Ordinarios** (MCO). Se trata de minimizar una función objetivo preestablecida, derivarla y ajustarla a 0.
3. A través de los **Modelos Lineales Generalizados** o GLM especificado por Currie *et al.* (2004).
4. Por medio de la función de **Máxima Verosimilitud** (MV), el cual será el proceso que se usará para la estimación de los parámetros en el presente estudio. De este modo se hará un resumen más extenso que en el resto. El método de MV consiste en:
 - a) Maximizar el logaritmo de la función de máxima verosimilitud.
 - b) Una vez obtenidos los parámetros $\hat{\alpha}_x^{MV}$, $\hat{\beta}_x^{MV}$ y $\hat{\kappa}_t^{MV}$, se aplican las restricciones mencionadas en (3) y se reestima.
 - c) Por último, se considera que el número observado de fallecimientos con edad x y durante el periodo t , $\tilde{v}_{x,t}$, sigue una distribución Binomial,

$$\tilde{v}_{x,t} \sim B(E_{x,t}^0, q_{x,t}), \quad (4)$$

siendo,

- $E_{x,t}^0$: su media o exposición inicial al riesgo de las personas de x años durante el último periodo t .
- $\hat{q}_{x,t}$: su varianza cuya fórmula es $\hat{q}_{x,t} = \exp\{\alpha_x + \beta_x \cdot \kappa_t\}$

Es preciso acotar de nuevo la función de Máxima Verosimilitud de (4) con la ayuda de las restricciones mencionadas en (3), las cuales son el instrumento para volver a estimar los parámetros $\hat{\alpha}_x^{MV}$, $\hat{\beta}_x^{MV}$ y $\hat{\kappa}_t^{MV}$. Por medio de esta metodología, multitud de autores desde principios de siglo han desarrollado estudios en Inglaterra y Gales, en Canadá y en Estados Unidos.

Mediante el modelo LC a través del método de Máxima Verosimilitud se extraerán los parámetros $\hat{\alpha}_x^{MV}$, $\hat{\beta}_x^{MV}$ y $\hat{\kappa}_t^{MV}$ con un código programado de R cedido por el Dr. Atance².

En la Sección 5 se modelizará el precio de un bono cupón cero MLS con datos españoles en el periodo de 1994 a 2020 para hombres y mujeres e información extraída del INE.

¹Para obtener información más detallada ver, por ejemplo, Atance (2020).

²El código utilizado para la extracción de los parámetros no se adjuntará en ningún Anexo de este trabajo, ya que fue desarrollado por el Dr. Atance en el transcurso de su tesis doctoral en el año 2020.

3.1. Ajuste del modelo Lee-Carter con datos del INE

En la presente sección se explicará el proceso utilizado en el ajuste del modelo Lee-Carter.

1. El ajuste del modelo LC uni-factorial se realiza con las edades de 0 hasta 126 años (ω , infinito actuarial).
2. Se calculan valores iniciales de α_x , β_x y κ_t para que converja el modelo según la función *gnm* del R.
3. Se hacen los cálculos necesarios para que el modelo LC cumpla las restricciones de β_x y κ_t explicadas en (3).
4. Se generan los parámetros en una sola variable para hombres y mujeres mediante la función *logit*, mencionada en (1) y (2) explicadas en el Anexo A.

A continuación, se realiza el proceso para la proyección de las $q_{x,t}$, las cuales son las probabilidades de fallecimiento que se desean modelizar.

1. Se precisa de nuevo de la función logit en relación a la edad.
2. Es necesaria una función que proyecte los valores de $q_{x,t}$ con el modelo LC, a partir de los siguientes parámetros:
 - Número de años para las que se quieren predicciones.
 - Número de edades para las que se predice.
 - Cálculo de las predicciones.
3. Se proyecta el valor de la κ_t . Los valores expulsados del código para hombres y para mujeres son adjuntados en el Anexo C.1 de este trabajo.
4. Se muestran los gráficos de los parámetros dependientes de la edad (α_x y β_x) en las Figuras 5a y 5b, respectivamente.
5. Se resumen los valores mínimos y máximos para hombres y para mujeres de las proyecciones de la κ_t en la Tabla 3.

	<u>Hombres</u>	<u>Mujeres</u>
Mínimo	-362, 11	-314, 81
Máximo	38,33	34,89

Tabla 3: Valores proyectados de la κ_t
Fuente: Elaboración propia

6. Se explicita el gráfico para hombres y mujeres del parámetro dependiente del tiempo, κ_t , en la Figura 6 mediante los datos de 1994 hasta 2020 junto con una predicción hasta 2146³. Asimismo, en la Figura 6b se plasma en un gráfico los valores de κ_t sin las predicciones haciendo *zoom* en los años 1994-2020.

³El año 2146 es el resultado de la predicción de 126 años adicionales a partir de 2020.

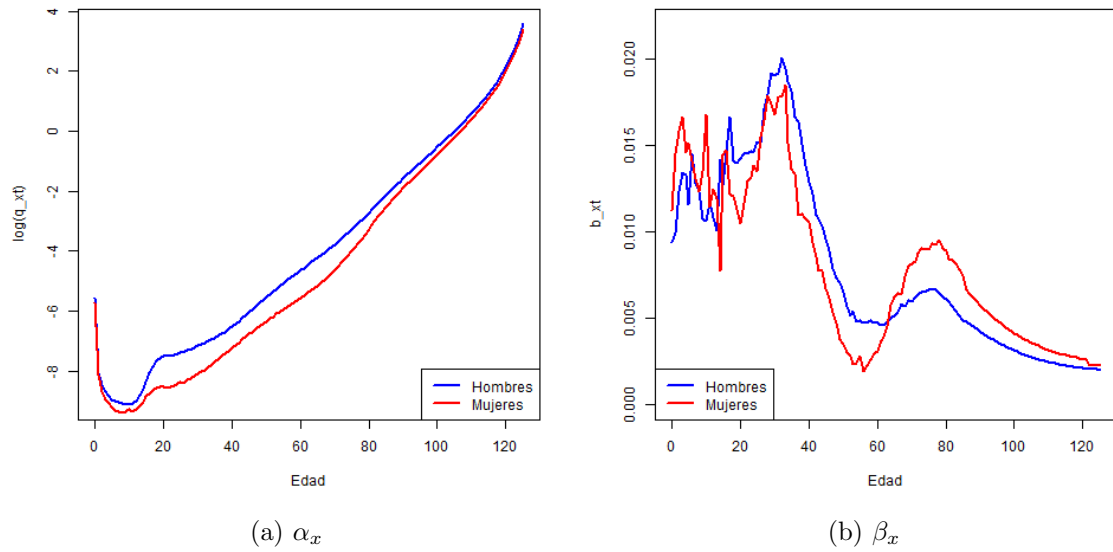


Figura 5: Parámetros dependientes de la edad
Fuente: Elaboración propia

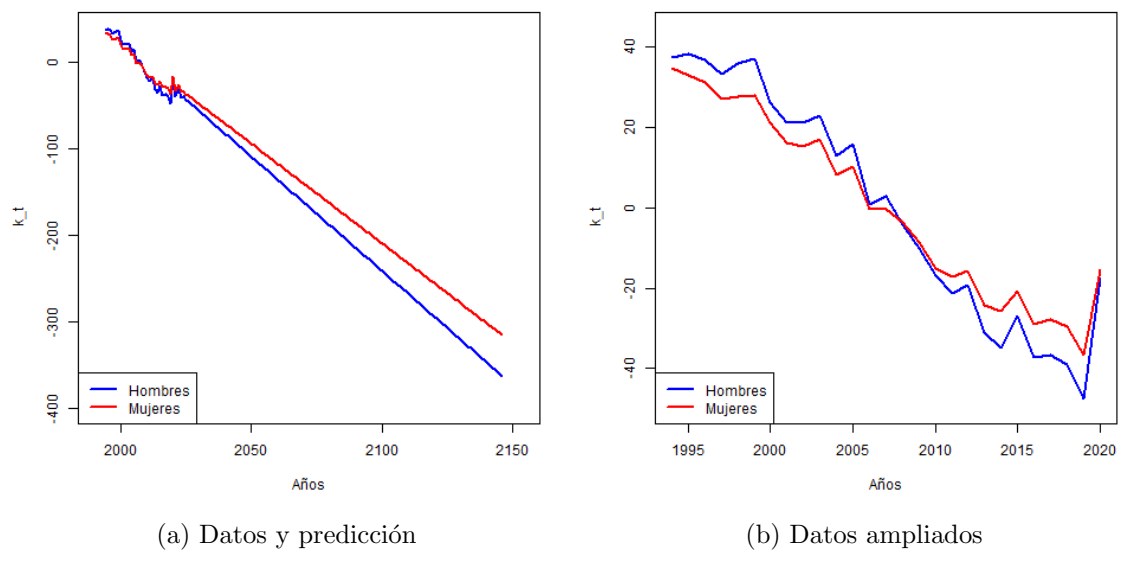


Figura 6: Parámetro dependiente del tiempo, κ_t
Fuente: Elaboración propia

7. Por último, se proyectan los valores de la $q_{x,t}$ o probabilidad de fallecimiento para cada edad, x y para cada año de predicciones, t . Como la matriz resultante tiene dimensión cuadrada 126x126, en el Anexo D de este trabajo se incorporarán los códigos de elaboración propia de R y los valores proyectados utilizados en la generación de los gráficos de las Secciones 3.2 y 3.3.

3.2. Probabilidades de fallecimiento a lo largo del eje temporal de tres edades distintas

En la Figura 16 del Anexo D.1 se visualiza el código de R de elaboración propia utilizado para generar la Figura 7.

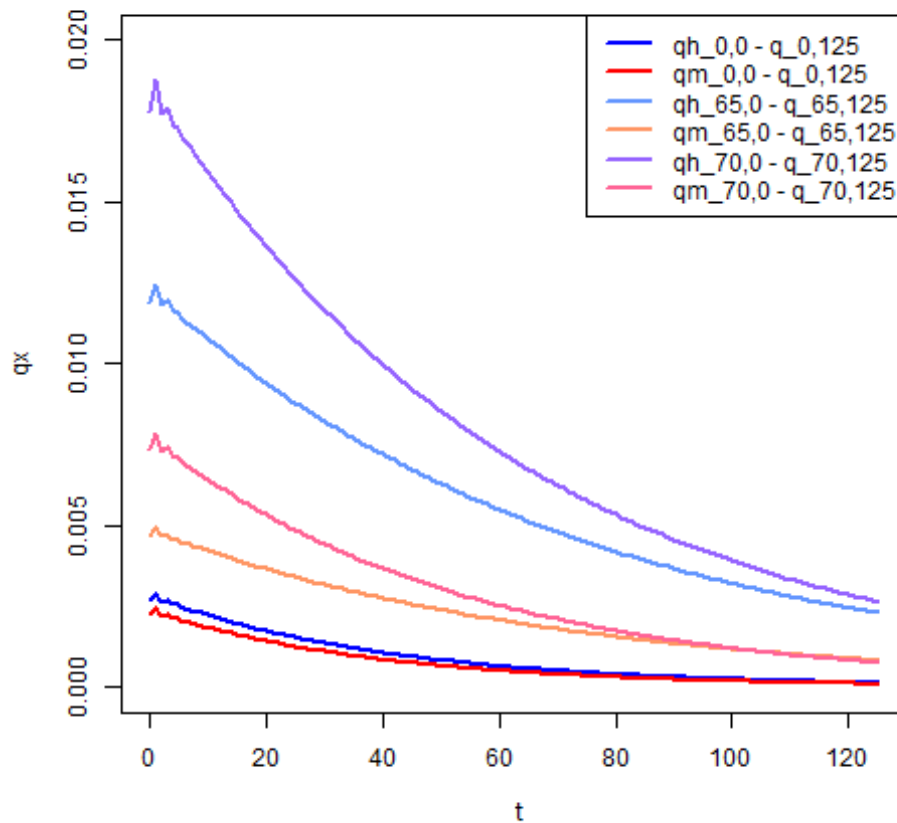


Figura 7: Probabilidades de fallecimiento de hombres y mujeres a lo largo del eje temporal de un recién nacido, de una persona de 65 años y de una persona de 70 años

Fuente: Elaboración propia

Si se elige a un hombre que nació en 1955, en el 2020 tendrá 65 años y las probabilidades $qh_{65,t}$ son las que se corresponden con la función de color azul cian de la Figura 7 (de $qh_{65,0}$ a $qh_{65,125}$). En cambio, si se eligiera a una mujer, *iuris tantum*, se correspondería según la función de color naranja (de $qm_{65,0}$ a $qm_{65,125}$), lo que significaría que, durante todo el periodo temporal (125 años) el sexo masculino tiene una

probabilidad de fallecimiento superior al femenino. Aunque la diferencia entre ellos va disminuyendo, en ningún caso, en el periodo estudiado las mujeres igualarán sus probabilidades con la de los hombres. La argumentación previa es posible ratificarla mediante los datos de las funciones de la Figura 18 del Anexo D.1.

De la misma forma, pero más abruptamente, se comportan las funciones de colores lila y rosa, las cuales corresponden con las probabilidades anuales de fallecimiento de un hombre y una mujer, respectivamente de 70 años a lo largo del eje temporal (desde $q_{70,0}$ hasta $q_{70,125}$), correspondiendo el año 0 al 2020. Sus datos equivalen a la Figura 19 del Anexo D.1. Se aprecia también cómo las probabilidades femeninas decrecen más lentamente que las masculinas. Además, las probabilidades de las mujeres una vez recorridos aproximadamente 80 años son parecidas a las probabilidades de fallecimiento de una persona del mismo sexo que nació 5 años después (función de color naranja).

Por último, se comentarán las probabilidades de fallecimiento de hombres y mujeres recién nacidos y su evolución a lo largo de 125 años (de $q_{0,0}$ a $q_{0,125}$). Sus funciones se corresponden con los colores azul marino y rojo, respectivamente. En cambio, sus datos se representan en la Figura 17 del Anexo D.1. Siguen la misma tendencia a la baja que las anteriores probabilidades y aunque decrecen más levemente, el sexo masculino sigue teniendo un riesgo de fallecimiento superior al femenino, pero su evolución reacciona convergiendo con el sexo opuesto a los 70 años de edad, aproximadamente.

En todas las funciones de probabilidad se aprecia un crecimiento leve pero abrupto al inicio del gráfico de la Figura 7. Es notable este crecimiento cuanto mayor es la persona y dependiendo del sexo, teniendo en cuenta que en los hombres es más exagerado que en las mujeres. Este cambio de tendencia es debido a la estimación intrínseca del modelo LC mediante los datos extraídos del INE.

3.3. Diferencias de probabilidades de fallecimiento entre cohortes a los 65 años

Por otro lado, en la Figura 24 del Anexo D.3 se revela cómo se ha originado la Figura 8 a través de un código de elaboración propia de R. Así pues, sus datos son representados en las variables a , b , c y d a través de la Figura 25.

Además, en la Sección D.2 se representa en un gráfico (Figura 20), el cual es llevado a cabo a través de las Figuras 21, 22 y 23, en el que se presenta el código utilizado y los datos de los gráficos que se precisan para la sección actual, las cuales se refieren a los valores disgregados de las diferencias anteriores.

Debido a que los gráficos por cohortes (Figura 20) son muy parecidos entre sí, se ha realizado un gráfico (Figura 8) en el que se representan las diferencias entre 2 cohortes para hombres y mujeres en 2 años distintos.

En relación a la Figura 8, se dibujan 2 diferencias entre cohortes para cada sexo.

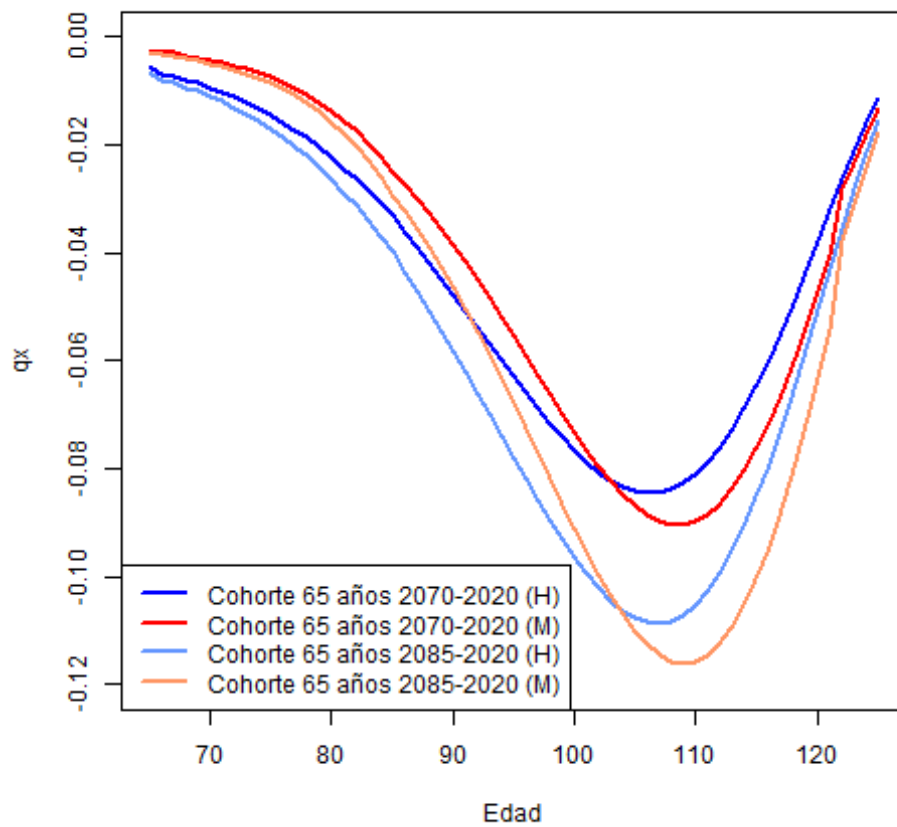


Figura 8: Diferencia entre la probabilidad anual de fallecimiento de la cohorte de 65 años del 2070 y 2085 respecto el 2020 de hombres y de mujeres

Fuente: Elaboración propia

La función de color azul marino representa la diferencia en la cohorte masculina de 65 años del 2070 respecto a la del 2020, en la que se empiezan a realizar las predicciones. En cambio, la función de color rojo, hace referencia a la diferencia en la cohorte femenina, *iuris tantum*.

Por otro lado, la función de color azul cian alude a la diferencia en la cohorte masculina de 65 años del 2085 respecto a la del 2020. Análogamente, la función de color naranja señala la diferencia en la cohorte femenina, *iuris tantum*.

El gráfico sugiere las siguientes conclusiones:

- Todas las diferencias de probabilidades de fallecimiento son negativas.
- Todas las diferencias de probabilidades de fallecimiento empiezan y acaban en aproximadamente 0.
- Las diferencias de probabilidades de fallecimiento entre cohortes y sexos divergen de forma negativa a lo largo del periodo temporal hasta aproximadamente los 110 años, edad en la que la tendencia pasa a ser de convergencia y creciente.
- Las diferencias entre probabilidades son inferiores en los hombres hasta la edad de 105 años, aproximadamente. En ese momento, existe un cruce entre las funciones de ambos sexos. Este hecho se podría deber a la esperanza de vida, ya que la de las mujeres es superior respecto a los hombres, por lo que la probabilidad de fallecimiento femenina también será inferior en edades avanzadas (Debonneuil *et al.*, 2017).
- A medida que la diferencia entre cohortes es mayor, el *gap* existente de las probabilidades de fallecimiento de hombres y mujeres en cualquier intervalo de tiempo, pero sobre todo, entre los 100 y los 115 años de edad, también aumenta.

En resumen, existirá una diferencia menor (en valor absoluto) entre cohortes si el sector estudiado es femenino y se encuentra dentro del intervalo de [65 – 105] años de edad. A partir de los 105 años las probabilidades se reducen y convergen hasta llegar aproximadamente al punto de partida, 0.

3.4. Modelo estocástico de mortalidad

Se supondrá que el proceso ARIMA estimado en la Figura 15 del Anexo C.2 es el proceso real y escogiendo los parámetros de las Figuras 5 y 6a como los estimados a partir del año 2020, es posible simular las probabilidades de supervivencia de hombres o mujeres en el 2021.

La probabilidad de supervivencia a los 65 años, ${}_t p_{65}$, describe la distribución de un conjunto de supervivencia simulada de hombres y mujeres de 65 hasta los 125 años. En las Figuras 9, 10a y 10b se representan tres gráficos estocásticos de la ${}_t p_{65}$: la media, la desviación estándar y la asimetría de hombres y mujeres mediante 10000 simulaciones pseudoaleatorias.

El resultado es pseudoaleatorio, ya que la herramienta utilizada para el desarrollo de los gráficos ha sido el R, al cual se le ha indicado que genere simulaciones a partir de una semilla fijada. Esta información está disponible en el Anexo D.4, en el que se adjunta el código propio necesario para la generación de las Figuras 9, 10a y 10b.

A partir de las tres Figuras mencionadas, es discernible un comportamiento decreciente en la mortalidad. Incluso se detecta una supervivencia distinta entre ambos sexos. Por ejemplo, en la Figura 9 existe un *gap* en las primeras 40 edades simuladas, el cual va disminuyendo hasta converger en 0 a la edad de 105 años, aproximadamente. A partir de esa edad, la supervivencia es prácticamente nula, tal como se puede observar con los datos en la Figura 32b y en la Figura 32c del Anexo 3.4.

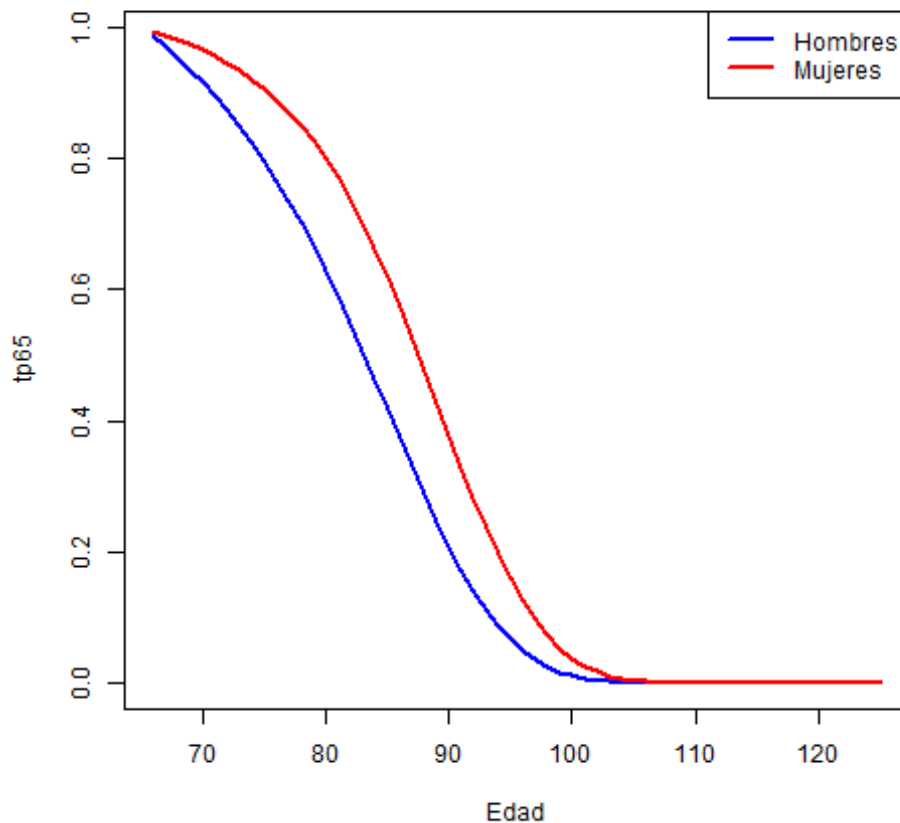
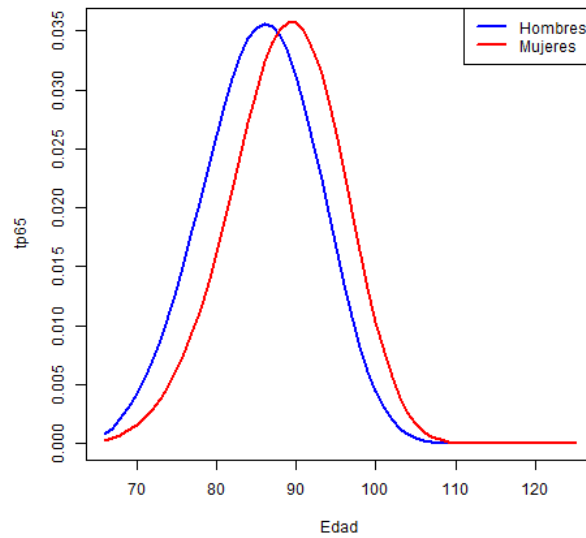


Figura 9: Simulación estocástica de la media de la probabilidad de supervivencia de la cohorte de 65 años en el 2020, tp_{65}

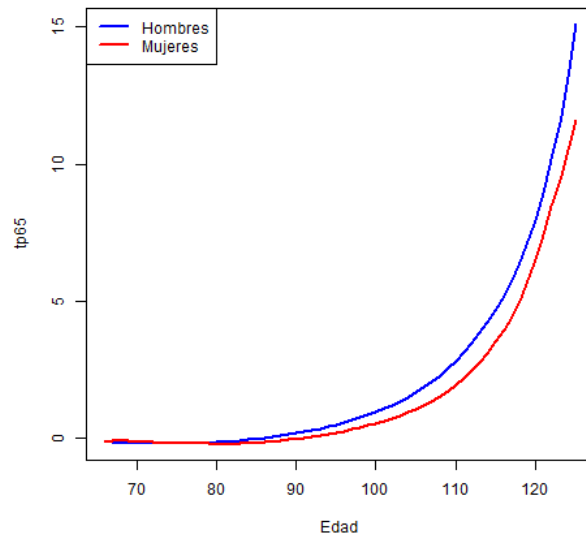
Fuente: Elaboración propia

De la Figura 10a emana el riesgo o la volatilidad de las probabilidades de supervivencia de hombres y mujeres. En ella se exhibe una forma de joroba, lo que significa que la incertidumbre en un horizonte a largo plazo (aproximadamente de unos 40 años) primero aumenta y luego disminuye. Del mismo modo que ocurría en la gráfica anterior, es posible corroborar el actual argumento recurriendo a la

Figura 33b y a la Figura 33c del Anexo 3.4.



(a) Desviación estándar



(b) Asimetría

Figura 10: Simulación estocástica de la desviación estándar y de la asimetría de la probabilidad de supervivencia de la cohorte de 65 años en el 2020, tp_{65}

Fuente: Elaboración propia

Asimismo, tanto en la Figura 10a como en la Figura 10b se observa que la distribución simulada es asimétrica, ya que las probabilidades de supervivencia, tp_{65} no se acercan a 0. Es más, se podría considerar asimétrico por la derecha, debido a que los datos extremos son considerablemente positivos en relación con el resto de datos que se desprenden de las Figuras 34b y 34c del Anexo 3.4.

4. Modelos de valoración de los instrumentos del riesgo de longevidad

Para valorar los instrumentos que mitigan el riesgo de longevidad en la literatura actuarial, *v. gr.*, Geweke (2001); Gollier (2003); Cui (2008); Kaas *et al.* (2009); Leung *et al.* (2018), se plantean varios métodos:

1. El método **CAPM** o el método **CCAPM** como una mejora del anterior, el cual determina la relación del rendimiento esperado y de la utilidad marginal del consumo.
2. Otro principio de valoración del riesgo es la **ratio de Sharpe**, la cual ha de ser equivalente a la carga de riesgo de longevidad.
3. Un tercer principio se basa en la **utilidad equivalente**. Es un método de fijación de precios en mercados incompletos. Este principio se utiliza con los LLS mediante la compensación mínima requerida por el vendedor y el precio máximo aceptable para el comprador. De forma análoga, se puede basar en el salario, en valoración de pasivos de fondos de pensiones u otras magnitudes.

En esta sección nos centraremos en el tercer principio de valoración de riesgos y se estudiarán dos casos de funciones de utilidad: Utilidad del Consumo con Aversión Absoluta al Riesgo Constante o *Consumption with Constant Absolute Risk Aversion Utility* (en adelante, **CARA Utility**) y Utilidad de Aversión al Riesgo Relativa Constante o *Constant Relative Risk Aversion Utility* (en adelante, **CRRRA Utility**). La Ecuación 5 permite calcular el recargo mínimo que iguala la utilidad del vendedor si no emite el instrumento con la utilidad esperada si lo emitiera,

$$U(\omega_t) = E[U(\omega_t + E[S_t] + P^- - S_t)], \quad (5)$$

siendo,

- $U(\cdot)$: la función de utilidad del vendedor.
- S_t : el índice de supervivencia de una cohorte en el año t .
- P^- : el recargo mínimo incluido en la prima.
- $E[S_t] + P^-$: la prima total recibida por la emisión del instrumento, por ejemplo, de un bono de longevidad.
- $S_t - E[S_t]$: el riesgo de longevidad asumido por el vendedor o diferencia entre la longevidad real y la esperada.
- ω_t : la riqueza del vendedor que hace las veces de variable dependiente de la función de utilidad.

4.1. Utilidad del Consumo con Aversión Absoluta al Riesgo Constante (*CARA Utility*)

En la función de utilidad *CARA* se asume que el vendedor tiene una **utilidad de aversión absoluta** al riesgo constante. Es decir,

$$U(w) = \frac{1}{\bar{\alpha}} \cdot (1 - e^{-\bar{\alpha} \cdot w}), \quad (6)$$

siendo $\bar{\alpha}$, el coeficiente de aversión al riesgo absoluto del vendedor.

Si lo que se busca es maximizar la utilidad esperada, (6) resulta equivalente a la siguiente expresión:

$$U(w) = -\frac{1}{\bar{\alpha}} \cdot e^{-\bar{\alpha} \cdot w}. \quad (7)$$

Sustituyendo (7) en (5) se obtiene la expresión del recargo mínimo a incluir en la prima, P^- :

$$\begin{aligned} E [U (\omega_t + E [S_t] + P^- - S_t)] &= -\frac{1}{\bar{\alpha}} \cdot e^{(-\bar{\alpha} \cdot \omega_t)} \\ e^{-\bar{\alpha} \cdot (E[S_t] + P^-)} \cdot E [e^{-\bar{\alpha} \cdot S_t}] &= 1 \\ P^- &= \frac{1}{\bar{\alpha}} \cdot \ln E [e^{\bar{\alpha} \cdot (S_t - E[S_t])}]. \end{aligned} \quad (8)$$

El resultado obtenido se corresponde con la conocida prima de riesgo exponencial como criterio en el cálculo de primas de un seguro (Kaas *et al.*, 2009). En este caso, la prima no se ve afectada por la riqueza del vendedor.

Desarrollando (8):

$$\begin{aligned} P^- &= \frac{1}{\bar{\alpha}} \cdot \ln [e^{-\bar{\alpha} \cdot E[S_t]} \cdot M_{S_t}(\bar{\alpha})] \\ &= \frac{1}{\bar{\alpha}} \cdot [-\bar{\alpha} \cdot E[S_t] + \ln [M_{S_t}(\bar{\alpha})]] \\ &= \frac{1}{\bar{\alpha}} \cdot \ln [M_{S_t}(\bar{\alpha}) - E[S_t]], \end{aligned} \quad (9)$$

siendo, $M_{S_t}(\bar{\alpha}) = E[e^{\bar{\alpha} \cdot S_t}]$, la función generatriz de momentos de la variable aleatoria S_t en el punto $\bar{\alpha}$.

Así, si conocemos la distribución de la variable aleatoria S_t y su función generatriz de momentos, (9) nos proporciona una expresión explícita para el recargo mínimo a incluir en la prima.

4.2. Utilidad de la Aversión al Riesgo Relativa Constante (*CRRA Utility*)

En cambio, en la utilidad *CRRA*, el vendedor tiene una **utilidad de aversión relativa** al riesgo constante denominada utilidad isoelástica. *Id est*,

$$U(w) = \frac{w^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad (10)$$

siendo el parámetro γ no negativo, el cual mide el grado de aversión al riesgo relativo que está implícito en la función de utilidad (Geweke, 2001; Gollier, 2003). El recargo mínimo P^- es el que se obtiene sustituyendo (10) en (5). Así,

$$\begin{aligned}
 E \left[U \left(\omega_t + E[S_t] + P^- - S_t \right) \right] &= \frac{\omega_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\
 E \left[\left(\omega_t + E[S_t] + P^- - S_t \right)^{1-\gamma} \right] &= \omega_t^{1-\gamma} \\
 E \left[\left(1 + \frac{E[S_t] + P^- - S_t}{\omega_t} \right)^{1-\gamma} \right] &= 1.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Existen dos diferencias con ambas funciones de utilidad:

- Aplicando la *CRRA*, el recargo incluido en la prima, P^- , depende de la riqueza, ω_t .
- Además, no existe expresión explícita para dicho recargo y se calcula normalmente mediante simulación.

En la Sección 5 se encontrarán el recargo mínimo incluido en la prima (5.1) y el precio y cantidad óptimas de un bono cupón cero a través de ambas funciones de utilidad *CARA* y *CRRA* (5.2).

5. Análisis de un bono MLS cupón cero

En la actual sección se realizarán dos análisis independientes. Primero se hallará la prima del riesgo de longevidad R_p de un bono cupón cero a partir de los datos recabados del INE siguiendo a Cui (2008). Y en segundo lugar, se realizará el cálculo de pagos con vencimiento a un año de un bono cupón cero a través de la misma base de datos, pero siguiendo a Zhou *et al.* (2015). En ambos modelos se obviarán las unidades monetarias.

5.1. Análisis del recargo mínimo incluido en la prima, P^- , de un bono cupón cero mediante las funciones de utilidad *CARA* y *CRRA*

En la presente sección se ahonda en el recargo mínimo incluido en la prima, P^- y será expresado en términos de la prima de riesgo, R_p , la cual es una tasa de descuento por encima de la tasa libre de riesgo (y que se supondrá que es 0) y una tasa de descuento actuarial, R_a , a partir de la siguiente relación:

$$\frac{1}{(1 + R_a + R_p)^t} = \frac{E[S_t] + P^-}{N} \quad (12)$$

donde la tasa de descuento actuarial, R_a , se define como

$$\frac{1}{(1 + R_a)^t} = \frac{E[S_t]}{N} = E[{}_t p_x], \quad (13)$$

siendo,

- N : el tamaño de la cohorte estudiada.
- $E[{}_t p_x]$: el valor esperado de la probabilidad de supervivencia a la edad x . En la Tabla 4 se han realizado los cálculos en base a $x = 65$.

Tomando como base los datos de la ${}_t p_{65}$ de la Sección 3.4 se determina el recargo mínimo incluido en la prima del bono cupón cero a partir de siete vencimientos distintos y tres tamaños de cohortes diferentes múltiplos de 10. Además, se utilizan dos funciones de utilidad distintas, la *CARA* con $\alpha = 3$ y la *CRRA* con $\gamma = 5$ y riqueza $\omega_0 = \omega_t = 100$. Los valores de las variables se han escogido teniendo en consideración el artículo de Cui (2008).

Antes de presentar la Tabla 4 de la prima de riesgo, R_p , hay que matizar que, tal como se indica en la Figura 37 del Anexo F.1, se ha necesitado de un cálculo previo del recargo mínimo incluido en la prima, P^- de la función de utilidad *CRRA* a partir de la función *uniroot* del R. Los valores expulsados han sido 0,6986071 y 0,6387215, para hombres y mujeres, respectivamente.

Las conclusiones extraídas de este bono con datos españoles son las siguientes:

1. La tasa de descuento adicional R_p aumenta a medida que aumenta el tamaño del riesgo.

	N=10		N=100		N=1000	
	<i>Hombres</i>	<i>Mujeres</i>	<i>Hombres</i>	<i>Mujeres</i>	<i>Hombres</i>	<i>Mujeres</i>
t=5	0,31	0,36	1,24	1,29	2,71	2,76
t=10	0,13	0,15	0,45	0,48	0,87	0,89
t=15	0,08	0,09	0,27	0,29	0,50	0,51
t=20	0,06	0,07	0,20	0,21	0,35	0,36
t=25	0,05	0,05	0,15	0,16	0,27	0,28
t=30	0,04	0,04	0,12	0,13	0,22	0,22
t=35	0,03	0,04	0,10	0,11	0,18	0,19

Tabla 4: La prima de riesgo de longevidad R_p en puntos básicos, para diferentes tamaños de cohorte (N=10, 100, 1000), diferentes vencimientos (t=5,10,15,20,25,30,35) y con valor de aversión al riesgo $CARA(\alpha = 3)$ y $CRRA(\gamma = 5)$ para hombres y mujeres

Fuente: Elaboración propia

2. Cuanto mayor sea la aversión al riesgo del asegurador, mayor será la compensación requerida.
3. En el presente ejemplo, cuanto mayor sea el vencimiento, menor será la compensación requerida por el bono cupón cero, al contrario que la conclusión que indicaban en Cui (2008).

Además, se extrae una conclusión adicional. Para un valor de aversión al riesgo de $CARA(\alpha = 3)$ se obtienen los mismos resultados hasta el sexto decimal que para un valor de aversión al riesgo de $CRRA(\gamma = 5)$. Por este motivo, se ha decidido aproximar a dos decimales la tabla, ya que los resultados son prácticamente idénticos en ambas funciones de utilidad.

Asimismo, en la Sección del Anexo F.1 se incluye el código correspondiente al desarrollo de la Tabla 4 y de la obtención mediante la función de $R_{uniroot}$ (función de búsqueda de ceros) del recargo mínimo incluido en la prima, P^- , a través de la función de utilidad $CRRA$ a partir de las Figuras 36 y 37.

5.2. Análisis del precio y de la cantidad de equilibrio de un bono cupón cero mediante las funciones de utilidad $CARA$ y $CRRA$

Desde la presente sección hasta el final se modelará un bono vinculado a la longevidad o a la mortalidad (MLS) efectuado entre dos Agentes económicos: A y B (Zhou *et al.*, 2015; Leung *et al.*, 2018).

- El Agente A tendrá consideración de entidad financiera o aseguradora y el Agente B será representado por un inversor o fondo de pensiones que compra el instrumento a cambio de una posible prima en el vencimiento ($t = 1$) de la operación (Cui, 2008).
- El Agente A tiene en su pasivo la contingencia de mortalidad o longevidad. Para resolverlo, planea vender un bono MLS o valor vinculado a la mortalidad con vencimiento a un año al Agente B con el fin de cubrir parcialmente el riesgo

de vivir más de lo esperado (longevidad) o menos de lo calculado (mortalidad). Las características de estos bonos se detallan en la Sección 2.3.

- El enfoque utilizado se denomina *tâtonnement* o de tanteo walrasiano, en el que el precio de equilibrio es determinado por el propio enfoque entre oferta y demanda en base a las funciones de utilidad de A y de B.

La cantidad monetaria asociada al riesgo que tiene el plan de pensiones se denotará por $f(q_1) = 10 \times p_{65}$. Es por ello que resulta ser una función determinista de q_1 , representando el índice de supervivencia español a un año cuando 10 asegurados tienen 65 años en el 2020, p_{65} . En cambio, en $t = 0$, q_1 no se conoce y se rige por un proceso estocástico subyacente.

Para mitigar su exposición al riesgo de longevidad, el Agente A vende un bono con vencimiento a un año. El pago de una unidad de este valor en el tiempo 1 es otra función determinista de q_1 , $g(q_1) = \frac{P_0}{p_{65}}$, siendo,

- P_0 el precio inicial de la operación en $t = 0$. Este precio se irá modificando en función de las características del bono de 0,1 a 6 aumentando cada simulación en 0,1.
- r el tipo de interés de mercado. En el ejercicio se fijará, $r = 5\%$.
- p_{65} el índice de longevidad español en el año 2020, q_1 .

Es decir, A vende el MLS a B a cambio de $g(q_1)$ en $t = 1$, mientras que B paga P_0 en $t = 0$ por la compra del bono a cambio de un beneficio esperado futuro.

Siguiendo el proceso de *tâtonnement*, se supondrá que un subastador imaginario indica un precio arbitrario al comienzo de la operación, $P_0 = 0,1$. Fijado este precio, los Agentes A y B deciden entonces su oferta, θ^A y su demanda, θ^B del MLS, respectivamente. Sus elecciones se basarán, siguiendo Zhou *et al.* (2015), en que los agentes elegirán los valores que maximizarán sus utilidades marginales esperadas.

Las riquezas iniciales de los agentes son $\omega_A = 100$ y $\omega_B = 100$. Asimismo, se asume que esta riqueza inicial solo se puede invertir en el MLS o en una cuenta bancaria que genera una capitalización continua con un tipo de interés libre de riesgo de $r = 0,05$ por año. Los agentes solo ingresarán dinero a partir de la cuenta bancaria, del MLS y del pasivo contingente de vida.

Las funciones de utilidad se denotan por U . En la presente sección se seguirán (7) y (10), las cuales se basan en las Utilidades *CARA* y *CRRA*, respectivamente.

Asimismo, el enfoque de *tâtonnement* hace 2 supuestos adicionales:

- Comprador y vendedor son completamente racionales, lo que significa que solo buscan obtener ganancias a través de su función de utilidad y no están interesados en la especulación a largo plazo.
- En algunos escenarios puede no haber equilibrio, es decir, la demanda de B y la oferta de A puede divergir.

Los parámetros de aversión al riesgo, (k_A, k_B) miden cuán adverso u hostil al riesgo es cada uno de los jugadores, agentes o participantes en el mercado. Si ese valor es positivo, será muy adverso; en cambio, si es negativo, será más amante al riesgo. Encontrar estos parámetros no es tarea fácil. Hay diferentes artículos que utilizan un valor concreto para este valor de aversión al riesgo. Leung *et al.* (2018), por ejemplo, siguiendo un algoritmo parecido al de la presente sección, resumen y explican un método matemático posible para su determinación a través de un algoritmo. En la Figura 35 del Anexo E se incluyen los detalles del mismo.

Se asume que el bono se vende, por lo que en $t = 1$, la cartera de B contiene el riesgo de longevidad transferido por el Agente A.

En consecuencia,

- En $t = 0$, A vende θ^A unidades del MLS y deposita los ingresos en la cuenta bancaria junto con ω_A (su riqueza inicial). Análogamente, B utiliza ω_B para comprar θ^B unidades del MLS y deposita el resto en otra cuenta bancaria.
- En $t = 1$, la riqueza final de A es la cantidad ingresada en la cuenta menos el pago del MLS y su responsabilidad contingente de vida (*ver* (14)), mientras que la del B son los ingresos en su cuenta más el pago del MLS vendido por A (*ver* (15)).
- La riqueza se acumula a lo largo del tiempo y devenga una tasa r en cada periodo.

Por consiguiente, en $t = 0$, A y B eligen aquella θ (oferta y demanda) del bono que maximiza su utilidad final esperada. La oferta que maximizará la función de utilidad para A en $t = T = 1$ será θ^A . De forma similar, la demanda θ^B será la que maximizará la función de utilidad de B. Su notación es la siguiente:

$$\text{Agente A : } \sup_{\theta^A} E [U ((\omega_A + \theta^A P_0) e^r - \theta^A g(q_1) - f(q_1))] \quad (14)$$

$$\text{Agente B : } \sup_{\theta^B} E [U ((\omega_B - \theta^B P_0) e^r + \theta^B g(q_1))] \quad (15)$$

Se ha de tener en cuenta que θ^A y θ^B son funciones del precio P . Se suprimirá el argumento de estas funciones por simplicidad.

Con la función de utilidad *CARA*, $\hat{\alpha}=0,75$. En cambio, con la función de utilidad *CRRA*, $\gamma =2$.

Otros productos que podrían ser valorados mediante simulación son los siguientes: *including zeros*, bonos EIB/BNP, *swaps*, *caps*, *floors*, bonos de longevidad diferida y cobertura natural (Cui, 2008).

Usualmente el precio establecido inicialmente no ajusta a los agentes de mercado. Es por ello que se ha de ajustar. Si la demanda excede la oferta (es decir, $\theta^B - \theta^A > 0$), el precio debe aumentar, y viceversa. Analíticamente, la $(k + 1)$ ésima actualización del precio se puede expresar como:

$$P_{k+1} = P_k + h_k (\theta^B - \theta^A), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (16)$$

donde,

- P_0 es la suposición inicial del precio.
- P_{k+1} tomará valores desde 0,1 hasta 6 con saltos de 0,1.
- h_k es una función que siempre tiene el mismo signo que el exceso de demanda, $\theta^B - \theta^A$.

El precio del bono que establece $\theta^A = \theta^B$ será el precio del bono modelo.

En el presente trabajo se supondrá que el subastador ajusta el precio de una manera lineal al exceso de demanda. Siguiendo a Uzawa (1960); Katzner (1999); Kitti (2010), se asumirá que $P_{k+1} = P_k + \lambda|P_k|(\theta^B - \theta^A)$, donde λ es una constante real positiva.

Además, Zhou *et al.* (2015) advierte 2 elementos a tener en cuenta:

- La riqueza inicial de los jugadores es independiente del precio final debido a la elección de la función de utilidad exponencial (*CRRA*).
- λ establece la velocidad de convergencia:
 - Si λ es grande, el precio fluctuaría demasiado lejos del precio de equilibrio, P . De este modo, θ^A y θ^B tenderían a infinito y se perdería el equilibrio.
 - Si λ es pequeña, tardará demasiado en producirse la convergencia, ya que el proceso de ajuste sería lento.
 - Por estas razones, ha de haber equilibrio entre velocidad y precisión. Por tanto, se ha elegido una $\lambda = 0,01$, en un inicio, en este ejemplo.

En resumen, el proceso de *tâtonnement* para fijar el precio de un valor vinculado a la mortalidad o MLS puede ser llevado a cabo por el siguiente algoritmo:

1. Establecer un precio P_0 .
2. Determinar la oferta, θ^A y la demanda, θ^B con la optimización especificada en (14) y (15), respectivamente.
3. Si $\theta^A = \theta^B$, *stop*. De lo contrario, ajustar el precio usando (16).
4. Repetir los pasos 2 y 3 hasta hallar que $\theta^A = \theta^B$.

Finalmente, sea P^* el precio que finaliza el algoritmo. Hay dos posibles situaciones que se pueden obtener:

- $P^* > 0$ y $\theta^A = \theta^B = \theta^*$, lo que significa que el mercado alcanza equilibrio y el intercambio se produce entre los agentes económicos. Este es el caso que se presenta para hombres en las Figuras 11a y 13a en las utilidades *CARA* y *CRRA*, respectivamente. Del mismo modo ocurre con el sector femenino en las Figuras 12a y 14a para ambas utilidades.

- Sin embargo, tal como se matiza en el artículo de Zhou *et al.* (2015) hubiera sido factible que no se hubiera producido intercambio entre los agentes o incluso que se hubiera producido un intercambio múltiple entre cantidades de oferta y demanda. El segundo caso se produjo cambiando el λ original de 0,01, cuando lo variamos a $\lambda = 0,1$ en el sector masculino de la función de utilidad *CARA*. Se puede apreciar en la Figura 48 presentada en el Anexo F.2.

El código R necesario para la generación de los gráficos expuestos en las Figuras 11-14 y sus variantes (Anexo F.2), se adjunta en el Anexo F.2.1 en las Figuras 38-40.

5.3. Variantes de los precios y cantidades óptimas del bono

En la presente sección se muestra de forma resumida en la Tabla 5 las variantes a las variables originales del cálculo del precio del previo bono, dependiendo de la función de utilidad escogida, *CARA* o *CRRA* y de si se trata de hombres o de mujeres. Además, en la primera fila de la misma se encuentran los resultados correspondientes a los valores originales de las variables, los cuales se recogen en la primera columna.

Cada variante se realizará *iuris tantum*, es decir, permaneciendo invariables el resto de argumentos y volviendo al código original salvo por el cambio que se esté realizando ⁴.

VALORES ORIGINALES	VARIANTES	Utilidad <i>CARA</i>				Utilidad <i>CRRA</i>			
		Hombres		Mujeres		Hombres		Mujeres	
		θ^*	P^*	θ^*	P^*	θ^*	P^*	θ^*	P^*
Original		50	0,137	50	0,0753285	61,2	0,11705	50	0,0753285
$r=0,01$	$r=0,3$	50	0,07533	50	0,0753285	50	0,0608625	50	0,05914
$P_0=0,1$	$P_0=1$	49,965	1,2641	38,2	0,3865	50	1,005	50	0,79702
$\omega_A=\omega_B=1$	$\omega_A=\omega_B=10$	50	0,137	50	0,0753285	50	0,1471075	52,223	0,09023
$\lambda=0,01$	$\lambda=0,1$	38,2 (D)	0,718 (D)	(N)	(N)	50,25	0,60255	(N)	(N)
		100 (C)	51,28536 (C)	No hay	No hay			No hay	No hay
$\bar{\alpha}=0,75$	$\bar{\alpha}=1,5$	49,995	0,14144	50	0,0753285	-	-	-	-
$\gamma=2$	$\gamma=5$	-	-	-	-	100 (C)	0,1 (C)	0,1 (C)	0 (C)
$np=30$	$np=50$	50	0,137	50	0,0753285	50	0,103973	50	0,0753275
$nsimul=10000$	$nsimul=5000$	50	0,137	50	0,0753285	61,175	0,117045	50	0,0753275
$lower=0$	$lower=25$	62,5	0,1012915	62,495	0,091325	76,5	0,110885	62,5	0,09267
$upper=100$	$upper=150$	75	0,12278	75	0,09883	90,2	0,11223	75	0,08243

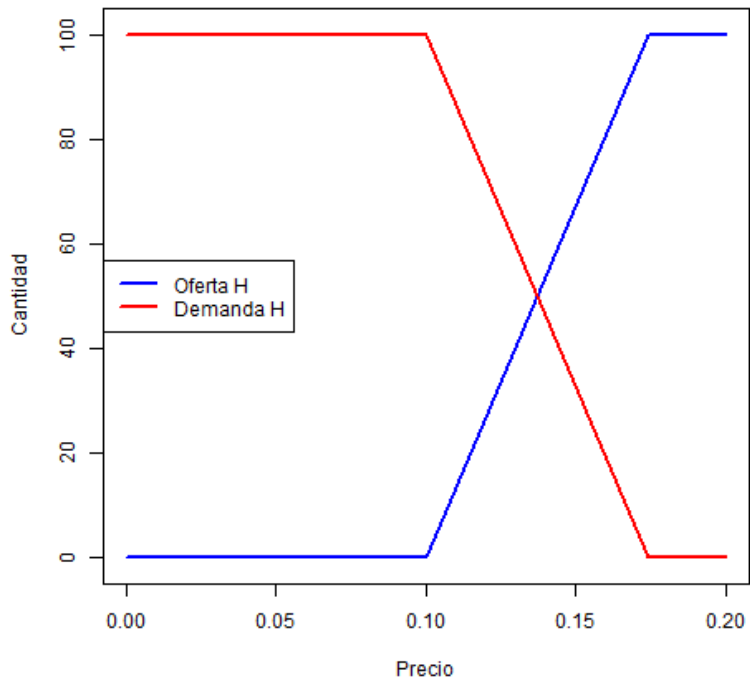
Tabla 5: Óptimo de la oferta y la demanda del análisis de sensibilidad para las utilidades *CARA* y *CRRA* de hombres y mujeres, *iuris tantum*

Fuente: Elaboración propia

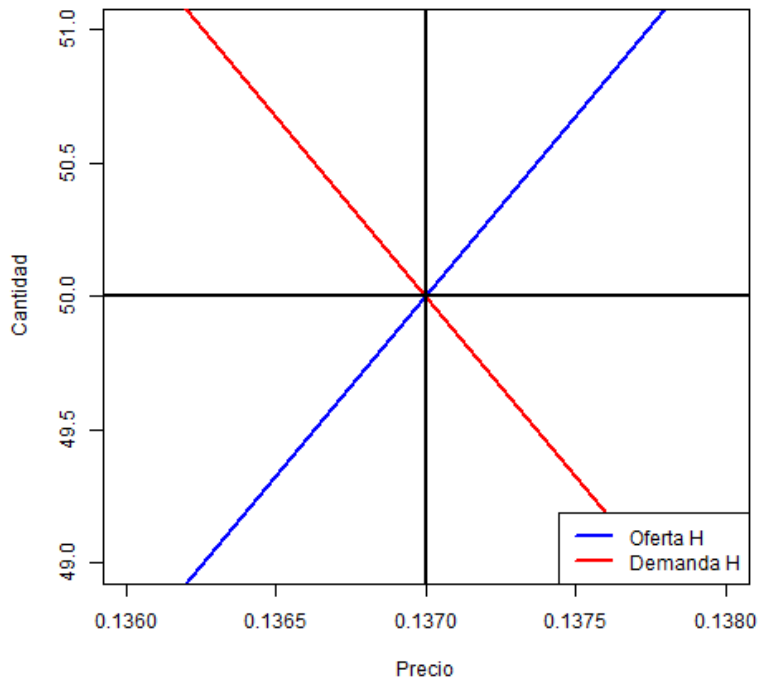
Siendo,

- θ^* la cantidad óptima, donde $\theta_A = \theta_B = \theta^*$.
- P^* el precio óptimo.
- r es el tipo de interés.

⁴Como curiosidad adicional, se matiza que el proceso computacional de cada una de las variantes se demoraba un intervalo de entre 50 y 120 minutos en ejecutarse. *Id est*, un total de unas 40 horas de procesamiento, sin detallar las múltiples pruebas que se realizaron antes de validar el algoritmo escogido como correcto.



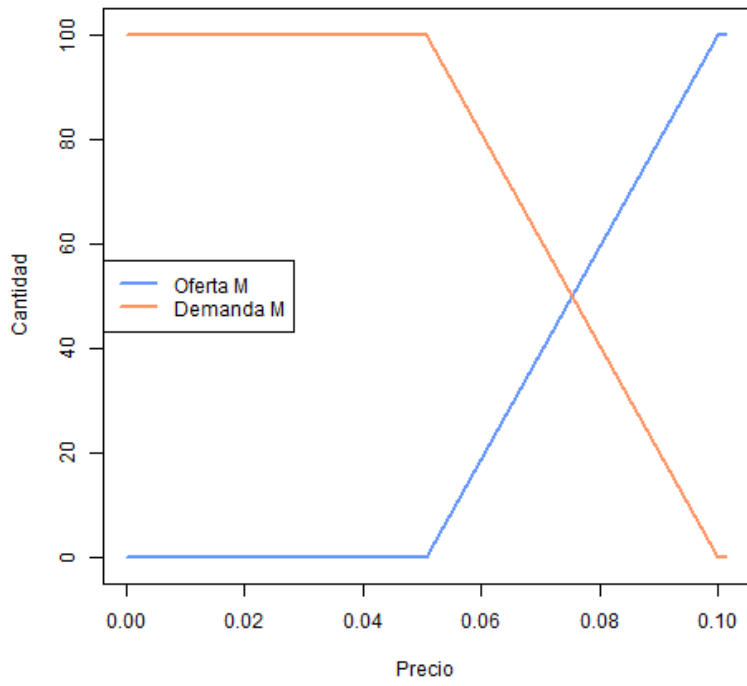
(a) *CARA* hombres



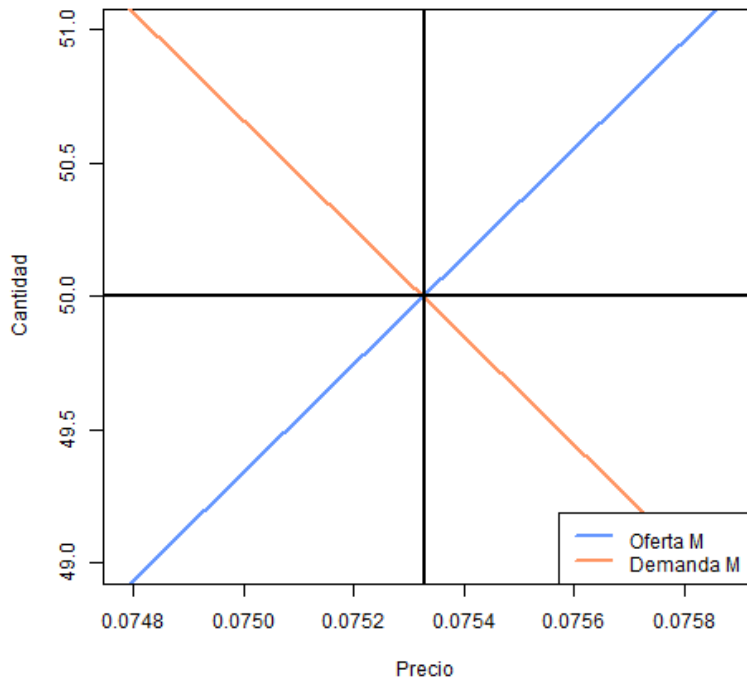
(b) Óptimo ampliado

Figura 11: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector masculino

Fuente: Elaboración propia

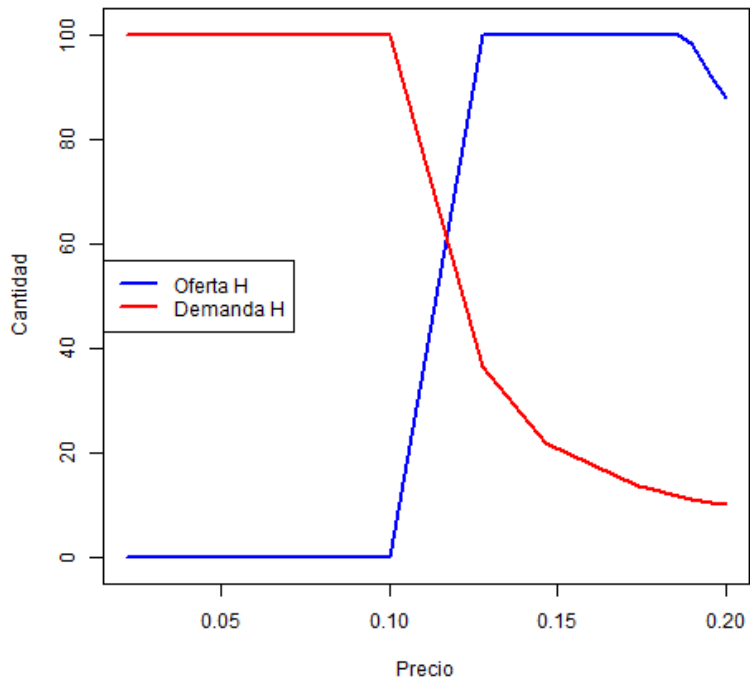


(a) *CARA* mujeres

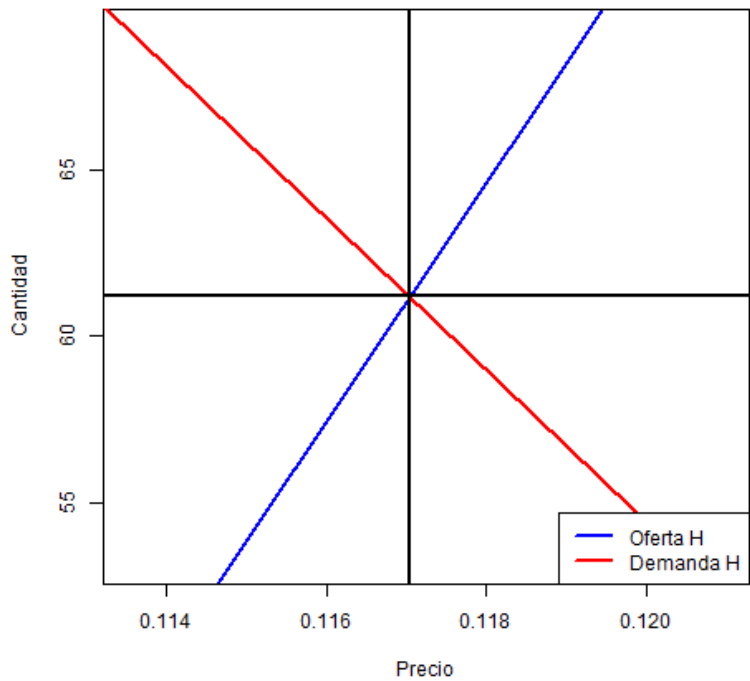


(b) Óptimo ampliado

Figura 12: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector femenino
 Fuente: Elaboración propia



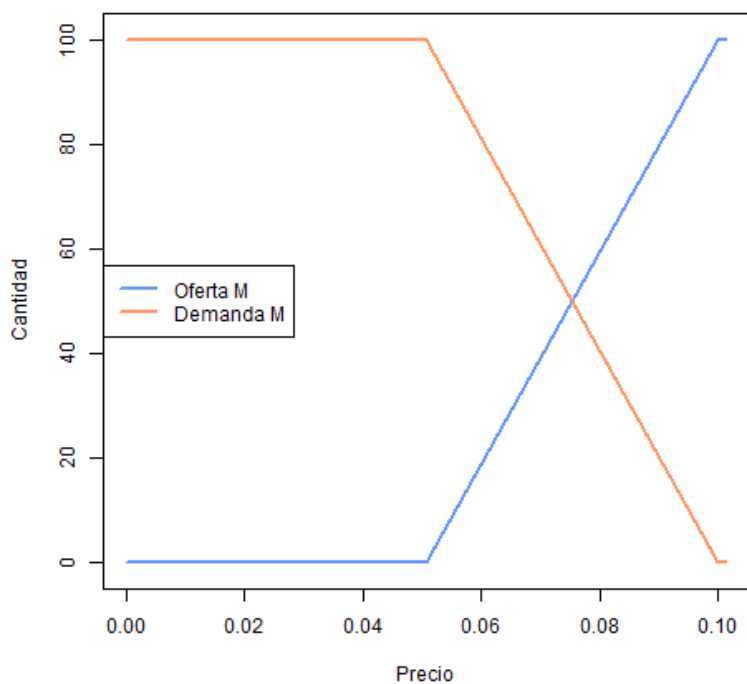
(a) *CRRA* hombres



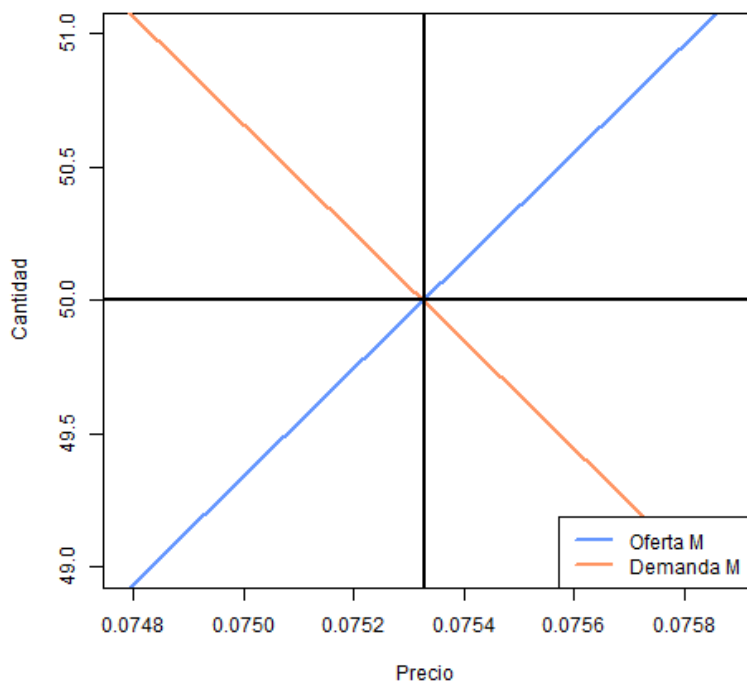
(b) Óptimo ampliado

Figura 13: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector masculino

Fuente: Elaboración propia



(a) *CRRA* mujeres



(b) Óptimo ampliado

Figura 14: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector femenino

Fuente: Elaboración propia

- P_0 es el primer precio que tiene en cuenta el algoritmo de optimización recursivo.
- $\omega_A = \omega_B$ son la riqueza inicial de la oferta y de la demanda, respectivamente.
- λ establece la velocidad de convergencia del precio recursivo.
 - (D): Indica que el óptimo es discreto, como ocurre en la mayoría de los casos que se detallan en la Tabla 5.
 - (C): Indica que el óptimo es continuo, *id est*, el que expulsa el algoritmo, tal como ocurre en los siguientes casos:
 - La variante en que $\lambda = 0, 1$ para hombres en la función de utilidad *CARA* presenta dos óptimos.
 - En el caso de la variante $\gamma = 5$ para la función de utilidad *CRRA* para hombres la solución óptima da un solo óptimo, el cual no se puede mostrar gráficamente.
 - (N): Indica que el óptimo da un precio negativo. Es decir, económicamente no tiene sentido, por lo que en esta variante no hay intercambio entre las cantidades de oferta y de demanda.
- $\bar{\alpha}$ es el coeficiente de aversión al riesgo absoluto del vendedor de la función de utilidad *CARA*.
- γ es el coeficiente de aversión al riesgo relativo del vendedor en la función *CRRA*.
- np son el número de precios por los que pasa el algoritmo de recursión de búsqueda del óptimo de las cantidades.
- $nsimul$ son el número de simulaciones presentadas en el mismo algoritmo.
- $lower$ es el límite inferior interno del algoritmo de optimización.
- $upper$ es el límite superior interno del algoritmo de optimización. Los argumentos $lower$ y $upper$ se adjuntan en el Anexo F.2 como las variantes 8 y 9, respectivamente.

En el Anexo F.2 se adjuntan todos los gráficos y sus ampliaciones además de los resultados generados para todas las variantes propuestas en la Tabla 5 para las funciones de utilidad *CARA* y *CRRA* para ambos sexos con datos españoles para el cálculo del bono MLS.

5.4. Análisis de sensibilidad de la Tabla 5

Para finalizar este Trabajo Final de Máster se analizarán brevemente conclusiones que manifiesta la Tabla 5, en la que se muestran los precios y las cantidades óptimas o de equilibrio para el modelo original escogido y para cada una de sus variantes en sus modalidades de género (Hombre o Mujer) y de función de utilidad (*CARA* o *CRRA*).

- En la Utilidad *CARA* el óptimo original reside en 50 unidades y 0,137 unidades monetarias (en adelante, €) para hombres y 50 unidades y 0,075 € para mujeres. En cambio, en la Utilidad *CRRA* el óptimo original resulta de 61,2 unidades y 0,117 € para hombres y 50 unidades y 0,075 € para mujeres.
- Se realizan 9 variantes para cada uno de las cuatro utilidades que se proponen. Los resultados obtenidos son dispersos, dependiendo de qué variable actúa.
- Si se varía al alza el tipo de interés, r , la cantidad permanece invariante, pero el precio disminuye en todas las posibilidades.
- Al aumentar el precio inicial, P_0 , el precio óptimo final se incrementa, pero la cantidad óptima no se modifica, salvo en la función de utilidad *CARA* en las mujeres, la cual disminuye.
- Incrementando la riqueza inicial, $\omega_A = \omega_B$, la cantidad y precio óptimos permanecen invariantes o aumentan ligeramente.
- En la modificación del parámetro de velocidad de convergencia del precio óptimo, λ , se producen tres conclusiones distintas, dependiendo del sexo y de la utilidad escogida. En este análisis se ha producido un incremento de la variable.
 - En el sector femenino el algoritmo a través de los datos proporcionados no ha podido conseguir el óptimo deseado (ver Figura 66b para la función de utilidad *CARA* o ver Figura 101b para la función de utilidad *CRRA*). En la Tabla 5 se denota con (N) de *Negativo*. Como no pueden existir precios negativos no se produce intercambio entre los agentes económicos.
 - En la función de utilidad *CARA* para hombres el algoritmo de optimización ha encontrado una solución. En la mencionada tabla se denota como (C) de *Continua*, ya que mediante cálculos internos expulsa la solución que considera más adecuada con los parámetros o variables consideradas. La solución son 100 unidades y 51,285 €, muy superiores al original. Es decir, el óptimo corresponde a la cantidad máxima considerada en el código interno, que es 100 (ver Figuras 39a y 40a, las cuales refrendan la previa argumentación a través del código de R de generación de los óptimos). Adicionalmente, mediante la observación directa es posible la extracción de un segundo óptimo. Este caso se plasma a través de (D) de *Discreta*, y se corresponde con 38,2 unidades y 0,718 €, cantidad menor y precio mayor al original.
 - Existe un tercer caso al variar el parámetro λ : una disminución de la cantidad óptima y un aumento de su precio, correspondiente con la función de utilidad *CRRA* para hombres.
- Duplicar el parámetro de aversión al riesgo absoluto del vendedor, $\bar{\alpha}$, de la función de utilidad *CARA* aumenta levemente el precio óptimo y deja invariable la cantidad óptima final.
- En cambio, hacer crecer en un 250% el parámetro de aversión al riesgo relativo del vendedor, γ , para la función de utilidad *CRRA* genera la creación de óptimos *continuos*, es decir, a través del algoritmo de optimización. Para

los hombres la cantidad óptima es la máxima permitida por el programa, 100 unidades, y su precio es parecido al del modelo original, 0,1 €. Análogamente, para las mujeres, su cantidad óptima es la mínima permitida intrínsecamente para que se produzca intercambio, 0,1 unidades, aunque a precio aproximadamente 0. Es decir, se ha de regalar lo poco que se intercambia. Este fenómeno se muestra en las Figuras 110a y 110b.

- Aumentando el número de precios posibles en los que producirse el intercambio del bono, np de 30 a 50, solamente se ha modificado el precio un céntimo menos de la función de utilidad *CRRA* para hombres, quedando las otras 3 utilidades invariantes.
- Haciendo el mismo análisis, prácticamente se ha permanecido constante cantidad y precio en las cuatro modalidades al disminuir a la mitad el número de simulaciones ($nsimul$) necesarias para la obtención del intercambio de este bono MLS. Este fenómeno y el anterior se pueden explicar debido a los topes impuestos desde un inicio a la generación del bono (Figura 38) y a la imposición inicial de las variables sin más recursos que la prueba y error. De ahí el nombre del método utilizado: *tâtonnement* o de tanteo. Por este motivo también se ha decidido cambiar dos de los parámetros internos del algoritmo de optimización de las cantidades de oferta (A) y de demanda (B).
- Al incrementar en un 25 % el tope inferior o *lower* del algoritmo, las cantidades aumentan en la misma proporción. En cambio, los precios de los hombres disminuyen entre 2 y 3 céntimos del modelo original en ambas utilidades, y los de las mujeres aumentan en la misma cantidad.
- Haciendo el paralelismo con la modificación anterior, al incrementar en un 50 % el parámetro superior o *upper* del algoritmo de optimización de las cantidades, las mismas tienen un crecimiento lineal con el correspondiente incremento. El mismo análisis con los precios que en la anterior variante se puede aplicar en la presente: suben ligeramente en las mujeres y proporcionalmente disminuyen en los hombres.

Todos estos casos concuerdan con la información adjuntada en el Anexo F.2, la cual mejora todas las conclusiones presentadas con gráficos y resultados de cada una de las variantes detalladas en la Tabla 5.

6. Conclusiones

Este documento ha puesto de manifiesto que las consecuencias del riesgo de longevidad preocupa no solo al sector asegurador, sino que afecta también a sectores más económicos, políticos e incluso ecológicos.

Se han discutido a nivel teórico diferentes metodologías de sufragar, mitigar o incluso eliminar los riesgos de longevidad y de mortalidad. De todos ellos hay instrumentos que sí se han llevado a término con éxito en el sector asegurador, como el reaseguro, pero es una metodología cara y clásica.

Por este motivo se utilizan también técnicas más simples y eficaces como son los *q-forward*, las cuales tratan del intercambio del riesgo de una parte por el pago de un monto de la contraparte.

Otros elementos del mercado que se han considerado para dar respuesta al primer objetivo mencionado al inicio de este análisis son los *S-forward* o *Swap de longevidad*, los cuales han tenido un éxito relativo o escaso. Análogamente han habido bonos intercambiados entre empresas aseguradoras y/o bancos en las que algunas operaciones finalizaron sin el éxito esperado, aunque mediante bonos o títulos es más sencillo y posible la mitigación del riesgo de longevidad. En la realidad ha habido casos favorables de este intercambio. Por este motivo hemos pensado que, el bono, es un instrumento adecuado para el desarrollo de la parte pragmática de este trabajo.

Adicionalmente, este trabajo consta de una parte práctica que se encadena de principio a fin: desde el ajuste del modelo Lee y Carter (1992) hasta la obtención de precios y cantidades óptimas de un bono de longevidad MLS a través de dos funciones de utilidad distintas mediante datos del INE.

Del modelo de Lee y Carter (1992) obtenemos la probabilidad de supervivencia a los 65 años, p_{65} , para una cohorte desde 1994 hasta 2020 mediante simulación estocástica programada.

De los tres modelos de valoración del riesgo de longevidad que mencionamos, se escoge el de la utilidad equivalente y se presenta teóricamente. Asimismo, se aplica el análisis previo para dos de sus utilidades: la del Consumo con Aversión Absoluta al Riesgo Constante (*CARA Utility*) o la Utilidad de la Aversión al Riesgo Relativa Constante (*CRRA Utility*).

Se fijan los parámetros de aversión al riesgo para cada una de las utilidades y las variables necesarias para su ejecución y se realizan dos análisis independientes.

El primero, es más sencillo y calcula el recargo mínimo necesario a incluir en la prima del bono para ambas utilidades. En esta investigación se concluye lo siguiente:

- La tasa de descuento crece si aumenta el riesgo.
- Cuanto más arriesgado sea la operación, mayor contraprestación se necesitará.

- Cuanto más alejado en el tiempo sea el vencimiento de la operación, menor compensación del bono. Este resultado es contradictorio al que se presenta en la literatura actuarial.
- Asimismo, existe un factor importante: la fijación de variables o parámetros de forma arbitraria genera unos resultados idénticos para ambas funciones de utilidad con factores de riesgo muy similares.

El segundo análisis, más detallado, ha buscado la obtención de la cantidad y precio de equilibrios, es decir, la igualdad entre oferta y demanda o entre los agentes A y B, respectivamente, pudiendo así alcanzar el segundo objetivo propuesto.

Las conclusiones que se extraen del estudio de este bono cupón cero MLS son las siguientes.

- Al modificar las variables externas al algoritmo de optimización en R, los resultados varían levemente.
- En cambio, si se producen cambios en los parámetros internos del algoritmo, las cantidades varían en esa proporción, pero los precios se mantienen muy parecidos al original.
- El óptimo en cada variante está sometido a la determinación de las variables escogidas arbitrariamente.
- Para los hombres el precio es superior al de las mujeres, lo cual resulta coherente con las esperanzas de vida de cada uno de los géneros. A mayor esperanza, menor precio del bono.
- Del mismo modo que con los precios, las cantidades resultan superiores para los hombres en la función de utilidad *CRRA*.
- Los resultados obtenidos en este análisis han sido de 3 tipos.
 - *Discretos*, es decir, a través de la observación directa con los gráficos y la intersección entre oferta y demanda.
 - Por medio del propio algoritmo de optimización de cantidades del bono (indicados como *continuos*).
 - Y por último, se considera como opción factible la ausencia de intercambio entre los agentes, como en el caso de la modificación del parámetro λ en las mujeres en ambas funciones de utilidad *CARA* y *CRRA*.

Estos resultados del análisis de sensibilidad del bono MLS pueden ayudar a disminuir en mayor o menor medida los riesgos en función de los parámetros definidos según su precio y cantidad óptimos en cada proceso.

Pero aunque existen otros instrumentos con los que se hubiera podido llevar a la práctica este estudio de investigación, como los *swaps*, los *q-forward* o los reaseguros, se podría realizar también con otras técnicas que aún no se hayan desarrollado o fomentado y ser tan efectivos como los métodos tradicionales y resolver los objetivos propuestos: mitigar los riesgos de longevidad y de mortalidad.

A. Conceptos matemáticos y estadísticos

En esta sección se pretende poner de manifiesto y dilucidar algunos conceptos del ámbito estadístico-actuarial utilizados a lo largo de este trabajo de investigación.

A.1. Conceptos estadístico-matemáticos

- **Función logit:** es un modelo de elección binaria basada en una distribución acumulada logística⁵ estándar. Su fórmula básica es:

$$\text{logit}(p) = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) = \ln(p) - \ln(1-p). \quad (17)$$

Esta función se menciona en la Sección 3 de esta tesina (Westreicher).

- **CAPM:** El Modelo de Fijación de Precios de Activos de Capital tiene en cuenta el *trade-off* riesgo-rendimiento de los activos. Su fórmula es:

$$E_t(R_b) - R_f = \beta_b \cdot [E(R_m) - R_f], \quad (18)$$

siendo,

- R_b : rendimientos del bono o *bound return*.
- R_f : la tasa libre de riesgo o *risk free return*.
- $\beta_b = \text{cov}\left(\frac{R_b, R_m}{\sigma_m^2}\right)$: la prima de riesgo de longevidad o *longevity risk*.
- R_m : rendimientos del mercado o *market return*.
- $E(R_m) - R_f$: la prima de riesgo del mercado.

Esta función se menciona en la Sección 4.2.

- **CCAPM:** El Modelo de Fijación de Precios de Activos basado en el Consumo tiene en cuenta el *trade-off* valor esperado del capital-utilidad marginal del consumo. Su fórmula es:

$$R = R_f + \beta_c \cdot (R_m - R_f), \quad (19)$$

siendo,

- R : el rendimiento esperado de un valor o *expected return on a security*.
- β_c : la prima de riesgo del consumo β o *consumption β* .

Esta función se menciona en la Sección 4.2 (Kenton, 2021).

⁵La distribución logística es una distribución de probabilidad continua con colas más pesadas (mayor curtosis) que la distribución normal (HMN).

- La **ratio de Sharpe** según Milevsky *et al.* (2005) en finanzas es definida como el exceso de beneficio sobre el pago esperado dividido por su desviación estándar,

$$S^{market} = \frac{r_f - r_p}{\sigma_p}, \quad (20)$$

siendo,

- r_f : tasa libre de riesgo o *risk free rate*.
- r_p : valor esperado de la cartera o *expected return of portfolio*.
- σ_p : volatilidad o desviación estándar del retorno de la cartera.

Mientras que, análogamente, la ratio de Sharpe en seguros se define como el exceso de pago de los valores vinculados a la longevidad o LLS sobre la mejor estimación dividida por su desviación estándar (Zeddouk y Devolder, 2019). Es decir,

$$S^{insurance} = \frac{I(X) - E_{\mathbb{P}}(X)}{\sigma_{\mathbb{P}}(X)}, \quad (21)$$

siendo,

- $I(X)$: pago o valor del instrumento.
- $E_{\mathbb{P}}(X)$: valor esperado del pago del instrumento.
- $\sigma_{\mathbb{P}}(X)$: volatilidad o desviación estándar del pago del instrumento.

A.2. Funciones biométricas

Una función biométrica es aquella que hace referencia a la vida (Ayuso *et al.*, 2007). La variable biométrica principal es la edad de fallecimiento X . Las funciones biométricas principales son:

- l_x : número de supervivientes a la edad x .

- d_x : número de fallecidos que mueren entre la edad x y la edad $x + 1$. Es decir,

$$d_x = l_x - l_{x+1}. \quad (22)$$

- L_x : número medio de personas vivas entre x y $x + 1$. Es decir,

$$L_x = \int_0^1 l_{x+t} dt. \quad (23)$$

- m_x : tanto central de mortalidad o de fallecimiento: número de individuos con edad x que fallecen por tiempo de exposición al tiempo de muerte. Es decir,

$$m_x = \frac{d_x}{L_x}. \quad (24)$$

- q_x : probabilidad de fallecer de un individuo de edad x antes de alcanzar la edad $x + 1$. Es decir:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}. \quad (25)$$

- p_x : probabilidad de una persona de edad x de alcanzar la edad $x + 1$. Es decir,

$$p_x = 1 - q_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}. \quad (26)$$

- Γ_x : número total de años que les queda por vivir a todos los individuos de edad x hasta que fallezca toda la cohorte. Es decir,

$$\Gamma_x = \sum_{k=x}^{\omega} L_k, \quad (27)$$

siendo,

- Cohorte: el conjunto de individuos de cualquier edad x .
- ω : el infinito actuarial o edad máxima en la que en esa cohorte no vivirá ningún individuo porque habrán fallecido los últimos en $\omega - 1$.
- e_x : esperanza de vida o promedio de años de vida que le queda por vivir a un individuo de edad x . Es decir,

$$e_x = \frac{\Gamma_x}{l_x}. \quad (28)$$

Con todos estos conceptos se puede modelizar una tabla de mortalidad o de vida que los resuma, siendo las columnas las funciones biométricas y las filas cada edad x . Los conceptos de este apartado se mencionan en la presente tesina en las Secciones de la 3 a la 5.

B. Breve resumen de las empresas participantes en las transacciones de la Sección 2

En este Anexo se refleja un breve resumen de información acerca de las empresas que realizan las transacciones mencionadas en la Sección 2 de esta tesina:

- **Atlanticlux:** actualmente se denomina FWU Life Lux. Es una multinacional europea consolidada internacionalmente especializada en servicios financieros, muy especialmente en pólizas de vida *unit-linked* (Atlanticlux).
- **BNP Paribas o Banco Nacional de París:** banco clave en la banca europea e internacional. Tiene presencia en 65 países y realiza actividades de servicios financieros (BNP Paribas).
- **Canada Life:** primera compañía de seguros de vida nacional de Canadá fundada en 1847 (Canada Life).
- **EIB o Banco Europeo de Inversiones:** banco principal de la Unión Europea junto con BNP Paribas. Es la institución financiera multilateral más grande del mundo y uno de los mayores proveedores de financiamiento climático (EIB).
- **Friends Provident International:** empresa aseguradora con más de 40 años de experiencia en el mercado internacional de seguros de vida. Brindan soluciones de ahorro, inversión y protección a clientes en Asia y en los Emiratos Árabes Unidos (Friends Provident).
- **JP Morgan Chase:** banco con gran base de clientes y líder a nivel mundial respecto a servicios financieros (JP Morgan).
- **Langhorne Re:** reaseguradora global que se enfoca en grandes bloques de vida y rentas vitalicias vigentes, la cual tiene compromisos con empresas como Renaissance Re o RGA Re (Langhorne Re).
- **Lucida:** empresa de compra de fondos de pensiones del Reino Unido (Blake *et al.*, 2018b).
- **Pall:** fondo de pensiones del Reino Unido (Blake *et al.*, 2018a).
- **PICA:** empresa estadounidense que se dedica al sector asegurador y reasegurador (Blake *et al.*, 2018a).
- **Renaissance Re:** empresa de seguros y reaseguros estadounidense que brinda servicios a particulares y a empresas alrededor del mundo (Renaissance Re).
- **RGA Re:** *Reinsurance Group of America* o Grupo de Reaseguros de América es la única compañía de reaseguros global que se enfoca principalmente en soluciones de reaseguro relacionadas con la vida y la salud (RGA Re).
- **Rothsay Life PLC:** gran empresa aseguradora del Reino Unido que se dedica a la gestión de riesgos (Rothsay).
- **Swiss Re:** empresa proveedora mundial de reaseguros, seguros y otras formas de transferencia de riesgos basados en seguros (Swiss Re).

C. Resultados necesarios obtenidos con R de la Sección 3.1

C.1. Resultados de la κ_t

En esta sección se adjuntan los resultados de ejecución del código de R con los datos españoles obtenidos del INE, estudiados en la Sección 3.1.

En la Tabla 6 se muestran los resultados proyectados para el género masculino.

[1]	-39,87	-30,49	-40,39	-38,64	-43,93	-44,97	-48,57
[8]	-50,63	-53,62	-56,04	-58,81	-61,37	-64,05	-66,66
[15]	-69,32	-71,95	-74,59	-77,22	-79,86	-82,50	-85,14
[22]	-87,78	-90,41	-93,05	-95,69	-98,33	-100,97	-103,60
[29]	-106,24	-108,88	-111,52	-114,16	-116,79	-119,43	-122,07
[36]	-124,71	-127,34	-129,98	-132,62	-135,26	-137,90	-140,53
[43]	-143,17	-145,81	-148,45	-151,09	-153,72	-156,36	-159,00
[50]	-161,64	-164,27	-166,91	-169,55	-172,19	-174,83	-177,46
[57]	-180,10	-182,74	-185,38	-188,02	-190,65	-193,29	-195,93
[64]	-198,57	-201,20	-203,84	-206,48	-209,12	-211,76	-214,39
[71]	-217,03	-219,67	-222,31	-224,95	-227,58	-230,22	-232,86
[78]	-235,50	-238,13	-240,77	-243,41	-246,05	-248,69	-251,32
[85]	-253,96	-256,60	-259,24	-261,88	-264,51	-267,15	-269,79
[92]	-272,43	-275,06	-277,70	-280,34	-282,98	-285,62	-288,25
[99]	-290,89	-293,53	-296,17	-298,81	-301,44	-304,08	-306,72
[106]	-309,36	-311,99	-314,63	-317,27	-319,91	-322,55	-325,18
[113]	-327,82	-330,46	-333,10	-335,74	-338,37	-341,01	-343,65
[120]	-346,29	-348,92	-351,56	-354,20	-356,84	-359,48	-362,11

Tabla 6: Valores de la κ_t para hombres

Fuente: Elaboración propia

Y en la Tabla 7 se muestran los resultados proyectados para el género femenino.

[1]	-33,09	-25,47	-34,23	-32,33	-37,36	-37,89	-41,34
[8]	-42,89	-45,69	-47,67	-50,18	-52,35	-54,73	-56,98
[15]	-59,32	-61,60	-63,91	-66,21	-68,51	-70,81	-73,12
[22]	-75,42	-77,72	-80,02	-82,32	-84,62	-86,93	-89,23
[29]	-91,53	-93,83	-96,13	-98,44	-100,74	-103,04	-105,34
[36]	-107,64	-109,94	-112,25	-114,55	-116,85	-119,15	-121,45
[43]	-123,76	-126,06	-128,36	-130,66	-132,96	-135,26	-137,57
[50]	-139,87	-142,17	-144,47	-146,77	-149,08	-151,38	-153,68
[57]	-155,98	-158,28	-160,58	-162,89	-165,19	-167,49	-169,79
[64]	-172,09	-174,40	-176,70	-179,00	-181,30	-183,60	-185,91
[71]	-188,21	-190,51	-192,81	-195,11	-197,41	-199,72	-202,02
[78]	-204,32	-206,62	-208,92	-211,23	-213,53	-215,83	-218,13
[85]	-220,43	-222,73	-225,04	-227,34	-229,64	-231,94	-234,24
[92]	-236,55	-238,85	-241,15	-243,45	-245,75	-248,05	-250,36
[99]	-252,66	-254,96	-257,26	-259,56	-261,87	-264,17	-266,47
[106]	-268,77	-271,07	-273,38	-275,68	-277,98	-280,28	-282,58
[113]	-284,88	-287,19	-289,49	-291,79	-294,09	-296,39	-298,70
[120]	-301,00	-303,30	-305,60	-307,90	-310,20	-312,51	-314,81

Tabla 7: Valores de la κ_t para mujeres

Fuente: Elaboración propia

C.2. Modelo ARIMA de hombres y mujeres

En la actual sección se presentará el modelo ARIMA utilizado junto con el modelo LC a través de los datos extraídos del INE en la Sección 3.1 de cara a su utilización en Secciones ulteriores, como la 3.4, en la que será necesario para la obtención de resultados del modelo estudiado. Además, en la presente sección tampoco se adjuntará el código generador de las variables, ya que se ha basado en el código prestado por el Dr. Atance.

En resumen, en la Figura 15 se mencionan las variables $kthombresesp.lc1$ y $ktmujeresesp.lc1$, las cuales representan las κ_t del modelo estimado de Lee-Carter. Una vez ejecutado el código es preciso anotar que mediante la función *auto.arima* el modelo resultante óptimo es ARIMA(1,1,0) con constante, para cada sexo, lo cual significa que es un modelo Autorregresivo de orden 1 diferenciado 1 vez, con sus coeficientes.

```
> auto.arima(kthombresesp.lc1)
Series: kthombresesp.lc1
ARIMA(1,1,0) with drift

Coefficients:
      ar1      drift
    -0.6046  -2.6379
s.e.    0.2470   0.9590

sigma^2 = 63.43: log likelihood = -90.03
AIC=186.06  AICc=187.15  BIC=189.83
```

(a) Hombres

```
> auto.arima(ktmujeresesp.lc1)
Series: ktmujeresesp.lc1
ARIMA(1,1,0) with drift

Coefficients:
      ar1      drift
    -0.6504  -2.3018
s.e.    0.2359   0.6496

sigma^2 = 30.89: log likelihood = -80.72
AIC=167.44  AICc=168.53  BIC=171.22
```

(b) Cohorte de 65 años, 2070-2020 (M)

Figura 15: Modelo *auto.arima* de Lee-Carter

Fuente: Elaboración propia

D. Código R y valores resultantes de los gráficos de la Sección 3

En este apartado del anexo se incorpora el código propio de R que se ha desarrollado para la Sección 3.

D.1. Código R y valores de los gráficos a lo largo del eje temporal de la Sección 3.2

Antes de comentar cada una de las Figuras anexadas en esta sección, es preciso indicar que qh y qm de la Figura 7 representan las probabilidades de fallecimiento de hombres y mujeres, respectivamente, calculadas con los datos del INE y mediante el método de Lee-Carter.

La Figura 16 representa el código necesario para la ejecución de la Figura 7. En él, se plasma un vector con colores fríos para hombres y cálidos para mujeres.

Para la generación del gráfico se han usado los siguientes colores:

- Azul marino: probabilidad de fallecimiento de un hombre recién nacido a lo largo del eje temporal, $qh_{0,0} - qh_{0,125}$.
- Rojo: probabilidad de fallecimiento de una mujer recién nacida a lo largo del eje temporal, $qm_{0,0} - qm_{0,125}$.
- Azul cian: probabilidad de fallecimiento de un hombre de 65 años a lo largo del eje temporal, $qh_{65,0} - qh_{65,125}$.
- Naranja: probabilidad de fallecimiento de una mujer de 65 años a lo largo del eje temporal, $qm_{65,0} - qm_{65,125}$.
- Lila: probabilidad de fallecimiento de un hombre de 70 años a lo largo del eje temporal, $qh_{70,0} - qh_{70,125}$.
- Rosa: probabilidad de fallecimiento de una mujer de 70 años a lo largo del eje temporal, $qm_{70,0} - qm_{70,125}$.

A continuación se le asigna al eje de abscisas el eje temporal de 0 a 125 años⁶ y al eje de las ordenadas los datos que se están calculando, los cuales resultan ser la probabilidad de fallecimiento de hombres o mujeres en los tres periodos anteriormente mencionados durante todo el eje temporal.

Finalmente se le asigna a la leyenda cada una de las probabilidades y se ejecuta.

Asimismo, en esta sección se valoran los datos necesarios para la ejecución de la Figura 7 de la Sección 3.2.

⁶Es equivalente con los datos de R del 1 al 126, ya que siempre se le ha de sumar un valor al no existir el 0 como numerador.

```

> # TODOS LOS GRÁFICOS POR FILAS JUNTOS:
> color<-c(rgb(0, 0, 255, maxColorValue = 255),
+         rgb(255, 0, 0, maxColorValue = 255),
+         rgb(100, 150, 255, maxColorValue = 255),
+         rgb(255, 150, 100, maxColorValue = 255),
+         rgb(150, 100, 255, maxColorValue = 255),
+         rgb(255, 100, 150, maxColorValue = 255))
> png(filename = "Gráficos por filas.png")
> plot(c(0:125), qh[1,], type="l", xlab="Años", ylab="qx", ylim=c(0,0.18), col=color[1], lwd=2)
> lines(c(0:125), qm[1,], col=color[2], lwd=2)
> lines(c(0:125), qh[66,], col=color[3], lwd=2)
> lines(c(0:125), qm[66,], col=color[4], lwd=2)
> lines(c(0:125), qh[71,], col=color[5], lwd=2)
> lines(c(0:125), qm[71,], col=color[6], lwd=2)
> legend("topleft", c("qh_0,0 - q_0,125", "qm_0,0 - q_0,125",
+                   "qh_65,0 - q_65,125", "qm_65,0 - q_65,125",
+                   "qh_70,0 - q_70,125", "qm_70,0 - q_70,125"), lwd=2, col=color)
> dev.off()

```

Figura 16: Código de los gráficos por filas

Fuente: Elaboración propia

En la Figura 17a se representan los datos necesarios de la probabilidad de fallecimiento de un hombre recién nacido a lo largo de la línea temporal establecida (del nacimiento hasta los 125 años). De forma análoga, se ponen de manifiesto en la Figura 17b los datos de la misma probabilidad para una recién nacida en el mismo periodo temporal.

```

> qh[1,]
[1] 0.0026544068 0.0028971696 0.0026413507 0.0026849351 0.0025554404 0.0025309026 0.0024470150
[8] 0.0024005716 0.0023343827 0.0022821210 0.0022238628 0.0021713071 0.0021174994 0.0020664911
[15] 0.0020158422 0.0019669435 0.0019189270 0.0018722585 0.0018266178 0.0017821497 0.0017387258
[22] 0.0016963796 0.0016550504 0.0016147339 0.0015753936 0.0015370128 0.0014995642 0.0014630276
[29] 0.0014273794 0.0013925988 0.0013586645 0.0013255560 0.0012932532 0.0012617367 0.0012309872
[36] 0.0012009863 0.0011717156 0.0011431576 0.0011152948 0.0010881103 0.0010615878 0.0010357111
[43] 0.0010104645 0.0009858327 0.0009618008 0.0009383541 0.0009154785 0.0008931601 0.0008713853
[50] 0.0008501409 0.0008294140 0.0008091921 0.0007894627 0.0007702141 0.0007514344 0.0007331123
[57] 0.0007152366 0.0006977964 0.0006807813 0.0006641807 0.0006479847 0.0006321834 0.0006167671
[64] 0.0006017266 0.0005870526 0.0005727363 0.0005587689 0.0005451420 0.0005318471 0.0005188764
[71] 0.0005062218 0.0004938757 0.0004818306 0.0004700791 0.0004586141 0.0004474285 0.0004365157
[78] 0.0004258689 0.0004154817 0.0004053478 0.0003954609 0.0003858151 0.0003764044 0.0003672232
[85] 0.0003582659 0.0003495270 0.0003410012 0.0003326833 0.0003245682 0.0003166510 0.0003089268
[92] 0.0003013911 0.0002940391 0.0002868663 0.0002798685 0.0002730414 0.0002663808 0.0002598825
[99] 0.0002535428 0.0002473577 0.0002413235 0.0002354364 0.0002296929 0.0002240894 0.0002186227
[106] 0.0002132893 0.0002080859 0.0002030095 0.0001980569 0.0001932251 0.0001885111 0.0001839122
[113] 0.0001794254 0.0001750480 0.0001707774 0.0001666110 0.0001625463 0.0001585806 0.0001547117
[120] 0.0001509372 0.0001472548 0.0001436622 0.0001401572 0.0001367377 0.0001334017 0.0001301470

```

(a) Hombres

```

> qm[1,]
[1] 2.226401e-03 2.424429e-03 2.198390e-03 2.245510e-03 2.122690e-03 2.110264e-03 2.030276e-03
[8] 1.995398e-03 1.934116e-03 1.891694e-03 1.839381e-03 1.795348e-03 1.748025e-03 1.704696e-03
[15] 1.660695e-03 1.618933e-03 1.577519e-03 1.537606e-03 1.498421e-03 1.460411e-03 1.423250e-03
[22] 1.387106e-03 1.351833e-03 1.317484e-03 1.283989e-03 1.251356e-03 1.219544e-03 1.188544e-03
[29] 1.158329e-03 1.128882e-03 1.100182e-03 1.072212e-03 1.044952e-03 1.018384e-03 9.924909e-04
[36] 9.672557e-04 9.426614e-04 9.186920e-04 8.953314e-04 8.725644e-04 8.503758e-04 8.287510e-04
[43] 8.076756e-04 7.871358e-04 7.671179e-04 7.476087e-04 7.285953e-04 7.100651e-04 6.920059e-04
[50] 6.744056e-04 6.572527e-04 6.405358e-04 6.242438e-04 6.083660e-04 5.928917e-04 5.778109e-04
[57] 5.631134e-04 5.487895e-04 5.348299e-04 5.212251e-04 5.079662e-04 4.950445e-04 4.824513e-04
[64] 4.701782e-04 4.582173e-04 4.465605e-04 4.352001e-04 4.241286e-04 4.133386e-04 4.028231e-04
[71] 3.925749e-04 3.825874e-04 3.728539e-04 3.633679e-04 3.541231e-04 3.451135e-04 3.363330e-04
[78] 3.277759e-04 3.194364e-04 3.113090e-04 3.033883e-04 2.956691e-04 2.881463e-04 2.808148e-04
[85] 2.736698e-04 2.667065e-04 2.599204e-04 2.533068e-04 2.468616e-04 2.405802e-04 2.344587e-04
[92] 2.284929e-04 2.226789e-04 2.170127e-04 2.114908e-04 2.061093e-04 2.008647e-04 1.957535e-04
[99] 1.907723e-04 1.859179e-04 1.811870e-04 1.765765e-04 1.720832e-04 1.677043e-04 1.634368e-04
[106] 1.592779e-04 1.552247e-04 1.512747e-04 1.474252e-04 1.436737e-04 1.400176e-04 1.364545e-04
[113] 1.329821e-04 1.295980e-04 1.263001e-04 1.230860e-04 1.199537e-04 1.169012e-04 1.139263e-04
[120] 1.110271e-04 1.082017e-04 1.054481e-04 1.027647e-04 1.001495e-04 9.760085e-05 9.511706e-05

```

(b) Mujeres

Figura 17: Datos de las probabilidades de fallecimiento de un recién nacido a lo largo del eje temporal

Fuente: Elaboración propia

En la Figura 18 se muestran las probabilidades de fallecimiento de una persona de 65 años, de un hombre (Figura 18a) y de una mujer (Figura 18b) durante 126 años.

```
> qh[66,]
[1] 0.011858295 0.012436573 0.011826519 0.011932315 0.011615605 0.011554768 0.011344706
[8] 0.011226984 0.011057388 0.010921912 0.010769201 0.010629854 0.010485573 0.010347236
[15] 0.010208315 0.010072667 0.009937951 0.009805528 0.009674548 0.009545483 0.009418014
[22] 0.009292297 0.009168203 0.009045775 0.008924953 0.008805739 0.008688098 0.008572018
[29] 0.008457474 0.008344449 0.008232921 0.008122872 0.008014282 0.007907132 0.007801403
[36] 0.007697077 0.007594136 0.007492561 0.007392334 0.007293439 0.007195856 0.007099570
[43] 0.007004563 0.006910819 0.006818321 0.006727053 0.006636998 0.006548140 0.006460465
[50] 0.006373956 0.006288597 0.006204375 0.006121274 0.006039280 0.005958377 0.005878551
[57] 0.005799788 0.005722075 0.005645397 0.005569741 0.005495093 0.005421441 0.005348770
[64] 0.005277068 0.005206322 0.005136520 0.005067649 0.004999696 0.004932650 0.004866499
[71] 0.004801231 0.004736834 0.004673297 0.004610608 0.004548756 0.004487730 0.004427519
[78] 0.004368113 0.004309500 0.004251670 0.004194613 0.004138318 0.004082776 0.004027977
[85] 0.003973910 0.003920565 0.003867934 0.003816007 0.003764775 0.003714228 0.003664356
[92] 0.003615152 0.003566607 0.003518711 0.003471456 0.003424833 0.003378835 0.003333452
[99] 0.003288676 0.003244501 0.003200916 0.003157915 0.003115491 0.003073634 0.003032338
[106] 0.002991595 0.002951398 0.002911739 0.002872612 0.002834009 0.002795924 0.002758349
[113] 0.002721277 0.002684703 0.002648618 0.002613017 0.002577894 0.002543242 0.002509054
[120] 0.002475324 0.002442047 0.002409216 0.002376826 0.002344870 0.002313343 0.002282238
```

(a) Hombres

```
> qm[66,]
[1] 0.0046762183 0.0049018792 0.0046435854 0.0046983748 0.0045544514 0.0045396852 0.0044436877
[8] 0.0044012988 0.0043260105 0.0042732669 0.0042074906 0.0041514742 0.0040905819 0.0040341792
[15] 0.0039762414 0.0039206130 0.0038648102 0.0038104075 0.0037563772 0.0037033606 0.0036509290
[22] 0.0035993399 0.0035484112 0.0034982429 0.0034487543 0.0033999809 0.0033518837 0.0033044718
[29] 0.0032577237 0.0032116379 0.0031662000 0.0031214042 0.0030772394 0.0030336981 0.0029907707
[36] 0.0029484491 0.0029067246 0.0028655889 0.0028250336 0.0027850508 0.0027456322 0.0027067701
[43] 0.0026684565 0.0026306838 0.0025934444 0.0025567309 0.0025205357 0.0024848516 0.0024496716
[50] 0.0024149883 0.0023807950 0.0023470847 0.0023138505 0.0022810859 0.0022487842 0.0022169389
[57] 0.0021855436 0.0021545919 0.0021240776 0.0020939945 0.0020643367 0.0020350980 0.0020062727
[64] 0.0019778548 0.0019498386 0.0019222186 0.0018949890 0.0018681445 0.0018416795 0.0018155887
[71] 0.0017898670 0.0017645089 0.0017395095 0.0017148637 0.0016905665 0.0016666130 0.0016429983
[78] 0.0016197177 0.0015967664 0.0015741398 0.0015518334 0.0015298425 0.0015081629 0.0014867899
[85] 0.0014657195 0.0014449472 0.0014244688 0.0014042803 0.0013843776 0.0013647565 0.0013454131
[92] 0.0013263435 0.0013075439 0.0012890104 0.0012707392 0.0012527267 0.0012349693 0.0012174632
[99] 0.0012002050 0.0011831911 0.0011664182 0.0011498827 0.0011335814 0.0011175109 0.0011016680
[106] 0.0010860495 0.0010706521 0.0010554728 0.0010405085 0.0010257562 0.0010112128 0.0009968753
[113] 0.0009827410 0.0009688069 0.0009550701 0.0009415280 0.0009281777 0.0009150165 0.0009020417
[120] 0.0008892508 0.0008766411 0.0008642100 0.0008519551 0.0008398738 0.0008279637 0.0008162223
```

(b) Mujeres

Figura 18: Datos de las probabilidades de fallecimiento de una persona de 65 años a lo largo del eje temporal

Fuente: Elaboración propia

Por último, en la Figura 19 se muestran las probabilidades de fallecimiento de una persona de 70 años, de un hombre (Figura 19a) y de una mujer (Figura 19b) durante 126 años.


```

> qh[71,]
[1] 0.017792498 0.018798448 0.017737426 0.017920868 0.017372436 0.017267335 0.016905068
[8] 0.016702478 0.016411170 0.016178941 0.015917680 0.015679761 0.015433908 0.015198656
[15] 0.014962881 0.014733123 0.014505404 0.014282009 0.014061496 0.013844643 0.013630908
[22] 0.013420535 0.013213301 0.013009263 0.012808312 0.012610439 0.012415577 0.012223693
[29] 0.012034736 0.011848666 0.011665438 0.011485012 0.011307343 0.011132393 0.010960119
[36] 0.010790482 0.010623442 0.010458961 0.010297000 0.010137522 0.009980488 0.009825863
[43] 0.009673610 0.009523693 0.009376078 0.009230729 0.009087613 0.008946696 0.008807945
[50] 0.008671326 0.008536809 0.008404360 0.008273949 0.008145546 0.008019118 0.007894638
[57] 0.007772075 0.007651399 0.007532583 0.007415599 0.007300418 0.007187013 0.007075357
[64] 0.006965424 0.006857186 0.006750620 0.006645698 0.006542397 0.006440690 0.006340555
[71] 0.006241967 0.006144902 0.006049338 0.005955250 0.005862618 0.005771418 0.005681629
[78] 0.005593228 0.005506196 0.005420510 0.005336151 0.005253097 0.005171330 0.005090828
[85] 0.005011574 0.004933547 0.004856730 0.004781102 0.004706647 0.004633345 0.004561180
[92] 0.004490134 0.004420190 0.004351331 0.004283539 0.004216799 0.004151095 0.004086410
[99] 0.004022730 0.003960037 0.003898318 0.003837557 0.003777740 0.003718851 0.003660877
[106] 0.003603804 0.003547617 0.003492303 0.003437849 0.003384240 0.003331465 0.003279510
[113] 0.003228363 0.003178011 0.003128442 0.003079644 0.003031604 0.002984312 0.002937755
[120] 0.002891922 0.002846803 0.002802385 0.002758658 0.002715612 0.002673236 0.002631519

```

(a) Hombres

```

> qm[71,]
[1] 0.0073739951 0.0078426077 0.0073067852 0.0074197090 0.0071239367 0.0070937495 0.0068982249
[8] 0.0068122936 0.0066602873 0.0065542748 0.0064226235 0.0063109982 0.0061901751 0.0060787473
[15] 0.0059647794 0.0058558292 0.0057470096 0.0056413803 0.0055369284 0.0054348808 0.0053343969
[22] 0.0052359570 0.0051391991 0.0050443001 0.0049510938 0.0048596339 0.0047698345 0.0046817001
[29] 0.0045951781 0.0045102533 0.0044268875 0.0043450582 0.0042647335 0.0041858884 0.0041084944
[36] 0.0040325260 0.0039579564 0.0038847605 0.0038129130 0.0037423893 0.0036731652 0.0036052170
[43] 0.0035385212 0.0034730550 0.0034087958 0.0033457216 0.0032838106 0.0032230416 0.0031633935
[50] 0.0031048459 0.0030473786 0.0029909717 0.0029356059 0.0028812620 0.0028279212 0.0027755652
[57] 0.0027241759 0.0026737354 0.0026242265 0.0025756319 0.0025279349 0.0024811190 0.0024351680
[64] 0.0023900660 0.0023457973 0.0023023467 0.0022596991 0.0022178398 0.0021767541 0.0021364279
[71] 0.0020968473 0.0020579984 0.0020198678 0.0019824423 0.0019457089 0.0019096549 0.0018742677
[78] 0.0018395350 0.0018054448 0.0017719852 0.0017391446 0.0017069117 0.0016752751 0.0016442240
[85] 0.0016137474 0.0015838349 0.0015544759 0.0015256603 0.0014973781 0.0014696194 0.0014423746
[92] 0.0014156341 0.0013893887 0.0013636291 0.0013383466 0.0013135322 0.0012891772 0.0012652733
[99] 0.0012418121 0.0012187853 0.0011961850 0.0011740034 0.0011522325 0.0011308650 0.0011098932
[106] 0.0010893099 0.0010691080 0.0010492803 0.0010298200 0.0010107202 0.0009919743 0.0009735757
[113] 0.0009555181 0.0009377951 0.0009204005 0.0009033282 0.0008865723 0.0008701270 0.0008539865
[120] 0.0008381451 0.0008225973 0.0008073377 0.0007923610 0.0007776619 0.0007632352 0.0007490760

```

(b) Mujeres

Figura 19: Datos de las probabilidades de fallecimiento de una persona de 70 años a lo largo del eje temporal

Fuente: Elaboración propia

D.2. Código R y valores de los gráficos por cohortes de la Sección 3.3

En esta sección se valorarán los gráficos por filas de la Sección 3.3. Para la realización del gráfico Figura 8 ha sido necesaria la realización de tres gráficos representados en la Figura 20, los cuales muestran la cohorte de 65 años de hombres y mujeres a día de hoy, en 50 años y dentro de 65 años.

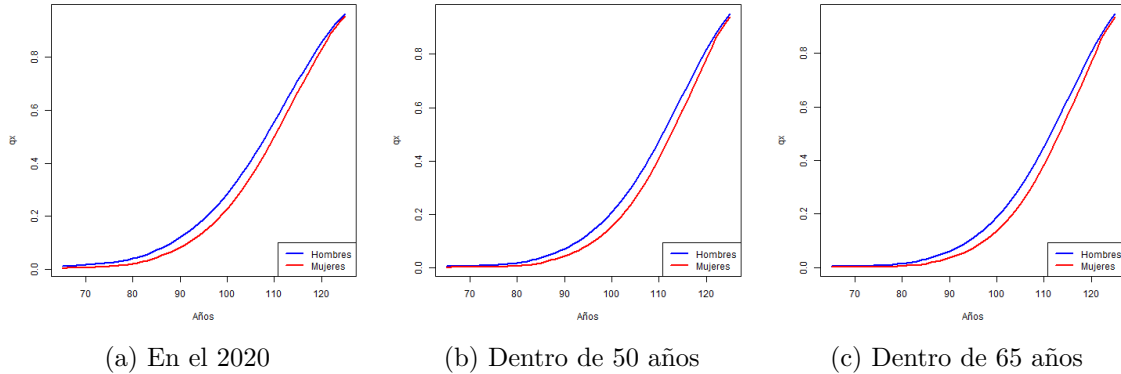


Figura 20: Gráficos por filas
Fuente: Elaboración propia

El código necesario para la creación de estos tres gráficos se adjunta en las Figuras 21a, 22a y 23a.

Asimismo, los datos que se le piden al programa son 60 valores por cada sexo y cohorte, los cuales representan las generaciones de una persona de 65 años, hombre o mujer, en el año 2020, dentro de 50 años (es decir, en el 2070) y dentro de 65 años (*id est*, en el 2085).

Los datos en tiempo presente de una persona de la generación de 65 años son plasmados en la Figura 21b para hombres y en la Figura 21c para mujeres.

Asimismo, los datos de una persona de 65 años de edad en el 2020 dentro de 50 años son plasmados en la Figura 22b para hombres y en la Figura 22c para mujeres.

Por último, los datos de una persona de 65 años de edad en el 2020 dentro de 65 años son representados en las Figuras 23b para hombres y 23c para mujeres.

```

> #Gráficos por diagonales (cohortes)
>
> #GRÁFICO 1:
> # De $q_{65,0}$ a $q_{125,(125-65)}$
> # 60 valores: de 0 a 60
> # 66, 1 a 126, 61
> # png(filename = "qh.m65,0-125,60.png")
> plot(c(65:125), diag(qh[66:126,1:61]), type="l", xlab="Años", ylab="qx", col="blue", lwd=2)
> lines(c(65:125), diag(qm[66:126,1:61]), col="red", lwd=2)
> legend("bottomright", c("Hombres", "Mujeres"), col=c("blue", "red"), lwd=2)
> # dev.off()

```

(a) Código de las probabilidades de la cohorte de 65 años en el 2020

```

> diag(qh[66:126,1:61])
[1] 0.01185829 0.01341337 0.01361082 0.01502693 0.01577401 0.01726734 0.01825800 0.01984062
[9] 0.02125269 0.02323694 0.02511175 0.02729202 0.03008464 0.03318866 0.03698602 0.04130433
[17] 0.04586943 0.05142327 0.05760147 0.06475084 0.07322168 0.08092761 0.08954791 0.09892655
[25] 0.10910747 0.12013468 0.13205094 0.14489773 0.15871435 0.17353746 0.18940024 0.20633175
[33] 0.22435604 0.24349138 0.26374937 0.28513402 0.30764091 0.33125622 0.35595583 0.38170449
[41] 0.40845494 0.43614716 0.46470765 0.49404885 0.52406868 0.55465018 0.58566141 0.61695546
[49] 0.64837075 0.67973156 0.71084879 0.74152111 0.77153628 0.80067295 0.82870265 0.85539218
[57] 0.88050630 0.90381069 0.92507520 0.94407730 0.96060572

```

(b) Datos de las probabilidades de hombres

```

> diag(qm[66:126,1:61])
[1] 0.004676218 0.005364577 0.005644889 0.006039545 0.006485868 0.007093749 0.007730966
[8] 0.008381944 0.009147710 0.010413111 0.011589381 0.012742693 0.014393887 0.016038892
[15] 0.018712129 0.021460829 0.025016942 0.028713557 0.033038521 0.038450929 0.044628601
[22] 0.052721335 0.059297853 0.066573169 0.074600689 0.083437133 0.093138725 0.103763015
[29] 0.115366648 0.128005796 0.141734600 0.156604834 0.172664568 0.189957380 0.208521040
[36] 0.228386418 0.249576121 0.272103206 0.295969755 0.321165492 0.347666346 0.375433059
[43] 0.404409832 0.434523050 0.465680131 0.497768519 0.530654889 0.564184594 0.598181412
[50] 0.632447639 0.666764580 0.700893498 0.734577044 0.767541230 0.799497962 0.830148151
[57] 0.859185410 0.890553683 0.912858257 0.933948643 0.953028028

```

(c) Datos de las probabilidades de mujeres

Figura 21: Código y datos de las probabilidades de fallecimiento de la cohorte de 65 años en el 2020

Fuente: Elaboración propia

```

> #GRÁFICO 2:
> # De $q_{65,50}$ a $q_{125,(125-65+50)}$
> # 60 valores: de 50 a 110
> # 66, 51 a 126, 111
> # png(filename = "qh.m65,50-125,110.png")
> plot(c(65:125), diag(qh[66:126,51:111]), type="l", xlab="Años", ylab="qx",
+      col="blue", lwd=2)
> lines(c(65:125), diag(qm[66:126,51:111]), col="red", lwd=2)
> legend("bottomright", c("Hombres", "Mujeres"), col=c("blue", "red"), lwd=2)
> # dev.off()

```

(a) Código de las probabilidades de la cohorte de 65 años dentro de 50 años

```

> #DATOS:
> diag(qh[66:126,51:111])
[1] 0.006288597 0.006529175 0.006445224 0.007071221 0.007201240 0.007894638 0.008131053
[8] 0.008653924 0.009091396 0.009969334 0.010600866 0.011506119 0.012717094 0.014530109
[15] 0.016580267 0.018972957 0.021482119 0.025006073 0.029058909 0.033873547 0.040068282
[22] 0.044526397 0.050437275 0.057010306 0.064300646 0.072365293 0.081262732 0.091052503
[29] 0.101794690 0.113549320 0.126375675 0.140331509 0.155472162 0.171849570 0.189511177
[36] 0.208498730 0.228846987 0.250582307 0.273721160 0.298268545 0.324216348 0.351541639
[43] 0.380204955 0.410148574 0.441294849 0.473544614 0.506775745 0.540841920 0.575571657
[50] 0.610767705 0.646206878 0.681640415 0.716794966 0.751374277 0.785061676 0.817523394
[57] 0.848412796 0.877375500 0.904055385 0.928101391 0.949174993

```

(b) Datos de las probabilidades de hombres

```

> diag(qm[66:126,51:111])
[1] 0.002380795 0.002495570 0.002767500 0.002545510 0.002620976 0.002775565 0.002996252
[8] 0.003068115 0.003255860 0.003740052 0.004157288 0.004387837 0.005008307 0.005423094
[15] 0.006686174 0.007788722 0.009623929 0.011210903 0.013234118 0.016066300 0.019371904
[22] 0.025338965 0.029332051 0.033868485 0.039006771 0.044809179 0.051341585 0.058673226
[29] 0.066876365 0.076025855 0.086198579 0.097472774 0.109927210 0.123640221 0.138688575
[36] 0.155146173 0.173082566 0.192561284 0.213637969 0.236358319 0.260755829 0.286849357
[43] 0.314640518 0.344110937 0.375219394 0.407898920 0.442053901 0.477557289 0.514248010
[50] 0.551928718 0.590364028 0.629279414 0.668360959 0.707256149 0.745575935 0.782898235
[57] 0.818773043 0.862404477 0.889678525 0.915743030 0.939901900

```

(c) Datos de las probabilidades de mujeres

Figura 22: Código y datos de las probabilidades de fallecimiento de la cohorte de 65 años dentro de 50 años

Fuente: Elaboración propia

```

> #GRÁFICO 3:
> # De $q_{65,65}$ a $q_{125,125}$
> # 60 valores: de 65 a 125
> # 66, 66 a 126, 126
> # png(filename = "qh.m65,65-125,125.png")
> plot(c(65:125), diag(qh[66:126,66:126]), type="l", xlab="Años", ylab="qx",
+      col="blue", lwd=2)
> lines(c(65:125), diag(qm[66:126,66:126]), col="red", lwd=2)
> legend("bottomright", c("Hombres", "Mujeres"), col=c("blue", "red"), lwd=2)
> # dev.off()

```

(a) Código de las probabilidades de la cohorte de 65 años dentro de 65 años

```

> # DATOS
> diag(qh[66:126,66:126])
[1] 0.005136520 0.005294553 0.005121489 0.005650462 0.005675376 0.006241967 0.006366387
[8] 0.006739891 0.007033538 0.007721612 0.008167331 0.008861059 0.009798396 0.011313227
[15] 0.012998682 0.014981093 0.017057387 0.020078119 0.023587684 0.027793184 0.033320512
[22] 0.037075480 0.042285626 0.048116960 0.054625784 0.061870881 0.069913234 0.078815660
[29] 0.088642374 0.099458450 0.111329200 0.124319437 0.138492629 0.153909938 0.170629135
[36] 0.188703381 0.208179881 0.229098403 0.251489663 0.275373582 0.300757426 0.327633837
[43] 0.355978782 0.385749444 0.416882093 0.449289985 0.482861351 0.517457543 0.552911431
[50] 0.589026142 0.625574263 0.662297630 0.698907826 0.735087537 0.770492881 0.804756838
[57] 0.837493851 0.868305662 0.896788371 0.922540637 0.945172890

```

(b) Datos de las probabilidades de hombres

```

> diag(qm[66:126,66:126])
[1] 0.001922219 0.001997983 0.002223154 0.001970612 0.001990951 0.002096847 0.002250573
[8] 0.002269442 0.002384798 0.002748964 0.003052427 0.003183017 0.003643040 0.003910736
[15] 0.004900830 0.005734737 0.007209376 0.008433393 0.010029087 0.012327335 0.015029967
[22] 0.020270756 0.023663360 0.027548002 0.031981938 0.037026708 0.042748078 0.049215902
[29] 0.056503910 0.064689383 0.073852724 0.084076905 0.095446768 0.108048177 0.121966991
[36] 0.137287858 0.154092797 0.172459567 0.192459798 0.214156873 0.237603563 0.262839388
[43] 0.289887738 0.318752731 0.349415861 0.381832468 0.415928081 0.451594733 0.488687358
[50] 0.527020413 0.566364916 0.606446116 0.646942052 0.687483290 0.727654143 0.766995682
[57] 0.805010813 0.852846716 0.881737398 0.909449123 0.935336442

```

(c) Datos de las probabilidades de mujeres

Figura 23: Código y datos de las probabilidades de fallecimiento de la cohorte de 65 años dentro de 65 años

Fuente: Elaboración propia

D.3. Código R y valores de los gráficos por diferencias entre cohortes de la Sección 3.3

Para la generación del gráfico de la Figura 8 se han elegido los siguientes colores y variables en el código representado en la Figura 24:

- Azul marino = a : diferencia entre la cohorte masculina de 65 años de edad en el año 2070 y en el 2020.
- Rojo = b : diferencia entre la cohorte femenina de 65 años de edad en el año 2070 y en el 2020.
- Azul cian = c : diferencia entre la cohorte masculina de 65 años de edad en el año 2085 y en el 2020.
- Naranja = d : diferencia entre la cohorte femenina de 65 años de edad en el año 2085 y en el 2020.

```
> # TODOS LOS GRÁFICOS POR DIFERENCIAS ENTRE COHORTES JUNTAS:
> color<-c(rgb(0, 0, 255, maxColorValue = 255),
+         rgb(255, 0, 0, maxColorValue = 255),
+         rgb(100, 150, 255, maxColorValue = 255),
+         rgb(255, 150, 100, maxColorValue = 255))
> png(filename = "Gráficos por diferencias entre cohortes.png")
> a<-diag(qh[66:126,51:111])-diag(qh[66:126,1:61])
> b<-diag(qm[66:126,51:111])-diag(qm[66:126,1:61])
> c<-diag(qh[66:126,66:126])-diag(qh[66:126,1:61])
> d<-diag(qm[66:126,66:126])-diag(qm[66:126,1:61])
> plot(c(65:125), a, type="l", xlab="Años", ylab="qx", col=color[1], lwd=2, ylim=c(-.12,0))
> lines(c(65:125), b, col=color[2], lwd=2)
> lines(c(65:125), c, col=color[3], lwd=2)
> lines(c(65:125), d, col=color[4], lwd=2)
> legend("bottomleft", c("Cohorte 65 años 2070-2020 (H)", "Cohorte 65 años 2070-2020 (M)",
+                       "Cohorte 65 años 2085-2020 (H)", "Cohorte 65 años 2085-2020 (M)"),
+       lwd=2, col=color)
> dev.off()
```

Figura 24: Código de las diferencias entre cohortes

Fuente: Elaboración propia

Asimismo, los datos son representados en las variables a , b , c y d a través de las Figuras 25a, 25b, 25c y 25d, respectivamente.


```

> # DATOS:
> a
[1] -0.005569697 -0.006884192 -0.007165600 -0.007955713 -0.008572768 -0.009372697 -0.010126950
[8] -0.011186700 -0.012161290 -0.013267604 -0.014510887 -0.015785897 -0.017367549 -0.018658552
[15] -0.020405748 -0.022331374 -0.024387313 -0.026417197 -0.028542561 -0.030877291 -0.033153393
[22] -0.036401214 -0.039110636 -0.041916245 -0.044806828 -0.047769390 -0.050788204 -0.053845223
[29] -0.056919657 -0.059988138 -0.063024569 -0.066000243 -0.068883881 -0.071641813 -0.074238189
[36] -0.076635292 -0.078793925 -0.080673908 -0.082234669 -0.083435946 -0.084238597 -0.084605524
[43] -0.084502697 -0.083900279 -0.082773829 -0.081105565 -0.078885660 -0.076113536 -0.072799094
[50] -0.068963854 -0.064641917 -0.059880692 -0.054741315 -0.049298672 -0.043640973 -0.037868787
[57] -0.032093504 -0.026435189 -0.021019813 -0.015975912 -0.011430725

```

(a) Cohorte de 65 años, 2070-2020 (H)

```

> b
[1] -0.002295423 -0.002869007 -0.002877389 -0.003494035 -0.003864892 -0.004318184 -0.004734714
[8] -0.005313829 -0.005891850 -0.006673059 -0.007432092 -0.008354856 -0.009385580 -0.010615798
[15] -0.012025955 -0.013672106 -0.015393013 -0.017502654 -0.019804403 -0.022384628 -0.025256697
[22] -0.027382370 -0.029965802 -0.032704684 -0.035593918 -0.038627954 -0.041797140 -0.045089790
[29] -0.048490283 -0.051979942 -0.055536022 -0.059132060 -0.062737358 -0.066317160 -0.069832465
[36] -0.073240245 -0.076493555 -0.079541922 -0.082331785 -0.084807173 -0.086910517 -0.088583703
[43] -0.089769314 -0.090412113 -0.090460737 -0.089869599 -0.088600988 -0.086627306 -0.083933403
[50] -0.080518921 -0.076400552 -0.071614084 -0.066216085 -0.060285081 -0.053922026 -0.047249916
[57] -0.040412368 -0.028149207 -0.023179732 -0.018205613 -0.013126128

```

(b) Cohorte de 65 años, 2070-2020 (M)

```

> c
[1] -0.006721775 -0.008118814 -0.008489335 -0.009376471 -0.010098632 -0.011025368 -0.011891616
[8] -0.013100732 -0.014219148 -0.015515325 -0.016944422 -0.018430958 -0.020286248 -0.021875434
[15] -0.023987334 -0.026323238 -0.028812045 -0.031345151 -0.034013786 -0.036957654 -0.039901163
[22] -0.043852130 -0.047262285 -0.050809591 -0.054481690 -0.058263801 -0.062137702 -0.066082066
[29] -0.070071974 -0.074079008 -0.078071043 -0.082012315 -0.085863414 -0.089581445 -0.093120231
[36] -0.096430642 -0.099461032 -0.102157812 -0.104466166 -0.106330908 -0.107697518 -0.108513326
[43] -0.108728869 -0.108299409 -0.107186584 -0.105360193 -0.102800054 -0.099497913 -0.095459320
[50] -0.090705418 -0.085274532 -0.079223477 -0.072628454 -0.065585413 -0.058209768 -0.050635343
[57] -0.043012449 -0.035505026 -0.028286828 -0.021536666 -0.015432828

```

(c) Cohorte de 65 años, 2085-2020 (H)

```

> d
[1] -0.002754000 -0.003366594 -0.003421735 -0.004068932 -0.004494916 -0.004996902 -0.005480392
[8] -0.006112502 -0.006762911 -0.007664147 -0.008536953 -0.009559676 -0.010750847 -0.012128156
[15] -0.013811298 -0.015726092 -0.017807566 -0.020280164 -0.023009435 -0.026123594 -0.029598635
[22] -0.032450579 -0.035634493 -0.039025167 -0.042618750 -0.046410425 -0.050390647 -0.054547113
[29] -0.058862737 -0.063316413 -0.067881876 -0.072527929 -0.077217800 -0.081909203 -0.086554049
[36] -0.091098561 -0.095483324 -0.099643638 -0.103509957 -0.107008619 -0.110062783 -0.112593671
[43] -0.114522093 -0.115770320 -0.116264270 -0.115936051 -0.114726808 -0.112589861 -0.109494055
[50] -0.105427226 -0.100399664 -0.094447382 -0.087634992 -0.080057940 -0.071843818 -0.063152469
[57] -0.054174597 -0.037706968 -0.031120859 -0.024499520 -0.017691586

```

(d) Cohorte de 65 años, 2085-2020 (M)

Figura 25: Código y datos de las diferencias entre cohortes
Fuente: Elaboración propia

D.4. Código R y valores de los gráficos de la simulación estocástica de la ${}_t p_{65}$ de la Sección 3.4

En la presente sección se adjunta el código de elaboración propia utilizado para la generación de los gráficos de las Figuras 9, 10a y 10b de la Sección 3.4.

En la Figura 26 se representa el código generado para la creación de los datos pseudoaleatorios. Con el único fin de no obtener datos distintos con cada ejecución al programa se le ha aplicado de forma arbitraria a la simulación de los hombres el 1 y a la de las mujeres el 2 mediante el comando *sed.seed()*.

simul.h o *simul.m* representan las k_t simuladas del modelo LC de los datos extraídos del INE, para hombres y mujeres, respectivamente. Para ello se genera una matriz con 126 filas, las cuales representan los años de predicción y 10000 columnas, ya que es el número arbitrario también escogido para la generación de los gráficos de los momentos estocásticos.

El siguiente paso consiste en la creación de las matrices necesarias para el bucle que se usará para predecir los datos mediante el modelo LC, previamente generado. Estas matrices son las probabilidades de fallecimiento (*qh* y *qm*), las probabilidades de supervivencia necesarias (*ph* y *pm*) para el cálculo de las probabilidad resultante de supervivencia ${}_t p_{65}$ (*rh* y *rm*), para ambos sexos.

Por último, anotar que en el bucle las variables *q.h* y *q.m* tienen 3 dimensiones con una extensión de 126x126x10000. De este modo se rellenan las 3 matrices vacías para cada sexo a partir de la tercera dimensión, la cual es la utilizada para la iteración, ya que se trata del número de simulaciones.

```
> # 10.000 SIMULACIONES:
> nsimul<-10000
> set.seed(1)
> simul.h<-replicate(nsimul,arima.sim(list(order=c(1,1,0),ar=auto.arima(kthombresesp.lc1)$coef[1]),
sd=sqrt(auto.arima(kthombresesp.lc1)$sigma2),n=126));simul.h<-simul.h[2:127,]
> set.seed(2)
> simul.m<-replicate(nsimul,arima.sim(list(order=c(1,1,0),ar=auto.arima(ktmujeresesp.lc1)$coef[1]),
sd=sqrt(auto.arima(ktmujeresesp.lc1)$sigma2),n=126));simul.m<-simul.m[2:127,]
> qh<-qm<-array(numeric(),dim=c(126,126,nsimul))
> ph<-pm<-array(numeric(),dim=c(60,nsimul))
> rh<-rm<-array(numeric(),dim=c(60,nsimul))
> for (i in 1:nsimul){
+ q.h<-funcion.predict(126, 126, axhombresesp.lc1, bxhombresesp.lc1.ns, simul.h[,i],1)$pred; q.h
+ q.m<-funcion.predict(126, 126, axmujeresesp.lc1, bxmujeresesp.lc1.ns, simul.m[,i],1)$pred; q.m
+
+ qh[, ,i]<-q.h
+ qm[, ,i]<-q.m
+
+ ph[,i]<-1-diag(qh[66:126,1:60,i])
+ pm[,i]<-1-diag(qm[66:126,1:60,i])
+
+ rh[,i]<-cumprod(ph[,i])
+ rm[,i]<-cumprod(pm[,i])
+ }
```

Figura 26: Código de simulación estocástica a partir de 10000 simulaciones
Fuente: Elaboración propia

En la Figura 27 se muestran los 100 primeros resultados de la ${}_t p_{65}$ para hombres.

Id est, las probabilidades de supervivencia de un hombre de 65 años en el 2021⁷ para las primeras 100 simulaciones.

```
> head(rh[1,],100)
[1] 0.9866626 0.9854020 0.9848808 0.9865800 0.9846148 0.9848039 0.9858046 0.9860053 0.9867022 0.9855071
[11] 0.9858891 0.9856869 0.9844880 0.9853163 0.9851799 0.9843577 0.9861467 0.9858222 0.9851736 0.9855907
[21] 0.9861542 0.9844187 0.9864053 0.9863244 0.9849668 0.9852671 0.9858849 0.9844795 0.9848270 0.9844648
[31] 0.9857550 0.9855365 0.9861183 0.9863123 0.9855846 0.9867525 0.9857314 0.9855419 0.9854369 0.9862977
[41] 0.9857630 0.9842628 0.9859513 0.9856338 0.9836856 0.9856851 0.9858706 0.9854066 0.9851594 0.9859748
[51] 0.9858336 0.9852629 0.9851034 0.9843305 0.9856665 0.9839953 0.9854303 0.9852398 0.9857728 0.9856692
[61] 0.9861519 0.9854276 0.9862610 0.9847216 0.9850596 0.9860976 0.9849298 0.9856962 0.9851439 0.9865035
[71] 0.9844217 0.9852749 0.9855480 0.9861280 0.9849750 0.9852858 0.9858817 0.9859850 0.9858635 0.9865167
[81] 0.9856895 0.9868191 0.9852751 0.9840465 0.9857582 0.9847176 0.9857103 0.9853545 0.9859886 0.9845267
[91] 0.9855846 0.9859182 0.9849496 0.9858269 0.9848089 0.9839578 0.9852625 0.9848272 0.9864834 0.9849199
```

Figura 27: 100 primeras simulaciones de $t p_{65}$ para hombres mediante simulación estocástica

Fuente: Elaboración propia

De forma análoga, en la Figura 28 se plasman las probabilidades de supervivencia de una mujer de 65 años en el 2021 para las primeras 100 simulaciones.

```
> head(rm[1,],100)
[1] 0.9949670 0.9937144 0.9948102 0.9943782 0.9942268 0.9942113 0.9944035 0.9944860 0.9942300 0.9937611
[11] 0.9938928 0.9947935 0.9945831 0.9941545 0.9938304 0.9940891 0.9943385 0.9940210 0.9941892 0.9938336
[21] 0.9942486 0.9943220 0.9940880 0.9940804 0.9944495 0.9940575 0.9942858 0.9941146 0.9942513 0.9938658
[31] 0.9943144 0.9941869 0.9943170 0.9937214 0.9945015 0.9942482 0.9944932 0.9940345 0.9940141 0.9939671
[41] 0.9945396 0.9940762 0.9938848 0.9942319 0.9944480 0.9942220 0.9943688 0.9942965 0.9939996 0.9937130
[51] 0.9939865 0.9943362 0.9939431 0.9946373 0.9942996 0.9944571 0.9941619 0.9945084 0.9941324 0.9940821
[61] 0.9945109 0.9940880 0.9943155 0.9940937 0.9942398 0.9940182 0.9941987 0.9937213 0.9943565 0.9942755
[71] 0.9941543 0.9940764 0.9942166 0.9942931 0.9940270 0.9942820 0.9945620 0.9947013 0.9945466 0.9941950
[81] 0.9940708 0.9935879 0.9944158 0.9938976 0.9941000 0.9937978 0.9942672 0.9943302 0.9939075 0.9940811
[91] 0.9945691 0.9941369 0.9942447 0.9943781 0.9937350 0.9941902 0.9944031 0.9945294 0.9946520 0.9941943
```

Figura 28: 100 primeras simulaciones de $t p_{65}$ para mujeres mediante simulación estocástica

Fuente: Elaboración propia

Con el fin de tener una muestra de las últimas simulaciones, se le pide al programa que expulse las 100 últimas simulaciones de la probabilidad de supervivencia de un hombre (Figura 29) y de una mujer (Figura 30) de 65 años de edad en el 2021, lo cual ha ayudado a corroborar la tendencia bajista de los datos de ambos sexos.

```
> tail(rh[1,],100)
[1] 0.9862360 0.9863284 0.9846050 0.9848066 0.9854739 0.9849679 0.9842695 0.9852528 0.9842088 0.9850406
[11] 0.9862375 0.9864694 0.9845990 0.9866961 0.9855222 0.9854200 0.9855448 0.9845640 0.9844065 0.9847611
[21] 0.9849963 0.9856673 0.9857514 0.9854993 0.9873801 0.9850699 0.9857114 0.9850928 0.9852917 0.9852116
[31] 0.9851682 0.9852126 0.9860299 0.9842503 0.9854560 0.9852025 0.9854604 0.9863754 0.9862931 0.9856003
[41] 0.9855537 0.9861437 0.9842880 0.9858834 0.9849592 0.9863957 0.9842664 0.9856995 0.9855110 0.9858050
[51] 0.9847404 0.9865358 0.9847642 0.9852170 0.9847313 0.9866144 0.9861879 0.9836435 0.9851794 0.9847592
[61] 0.9864773 0.9846666 0.9853019 0.9848934 0.9849091 0.9859933 0.9867174 0.9851409 0.9854886 0.9863350
[71] 0.9850851 0.9851420 0.9865935 0.9861804 0.9842364 0.9844879 0.9851050 0.9845063 0.9852482 0.9845713
[81] 0.9846170 0.9859987 0.9847993 0.9854999 0.9851743 0.9861589 0.9861722 0.9855090 0.9849617 0.9867939
[91] 0.9854520 0.9860735 0.9843744 0.9853120 0.9855322 0.9847392 0.9845366 0.9853850 0.9847408 0.9855073
```

Figura 29: 100 últimas simulaciones de $t p_{65}$ para hombres mediante simulación estocástica

Fuente: Elaboración propia

⁷Se le pide al programa el año 2021, porque resulta ser el primer año en el que se usan datos simulados, pero se podría haber escogido cualquier año del intervalo del 2021 al 2080 para que mostrara los datos.

```

> tail(rm[1,],100)
[1] 0.9942319 0.9947492 0.9939989 0.9942880 0.9938074 0.9942223 0.9941587 0.9942283 0.9944712 0.9944033
[11] 0.9946114 0.9945598 0.9945240 0.9940350 0.9940069 0.9942810 0.9941882 0.9945387 0.9942073 0.9936462
[21] 0.9942841 0.9943660 0.9946499 0.9942038 0.9943037 0.9943608 0.9943560 0.9938463 0.9942798 0.9941941
[31] 0.9942186 0.9941524 0.9943157 0.9940697 0.9948899 0.9944437 0.9944043 0.9944076 0.9943515 0.9942378
[41] 0.9948425 0.9937717 0.9944803 0.9943424 0.9943571 0.9942443 0.9943881 0.9942714 0.9944976 0.9945116
[51] 0.9945191 0.9941259 0.9944599 0.9941430 0.9942692 0.9944928 0.9941128 0.9943001 0.9942138 0.9944727
[61] 0.9935350 0.9942722 0.9940190 0.9940860 0.9943378 0.9948210 0.9942801 0.9948630 0.9944178 0.9943534
[71] 0.9937625 0.9935598 0.9941256 0.9940928 0.9944067 0.9944018 0.9942354 0.9937224 0.9946182 0.9944879
[81] 0.9941705 0.9941244 0.9941214 0.9943483 0.9941871 0.9943044 0.9944790 0.9945768 0.9946431 0.9942016
[91] 0.9942947 0.9936260 0.9941068 0.9940279 0.9944124 0.9942342 0.9946455 0.9940026 0.9944391 0.9944083

```

Figura 30: 100 últimas simulaciones de t_{p65} para mujeres mediante simulación estocástica

Fuente: Elaboración propia

Para que resulte más práctico el análisis previo de las probabilidades de supervivencia, se ha programado además la generación de los datos de los momentos de primer, segundo y tercer orden de la simulación estocástica previa.

```

> mediah<-mediam<-array(numeric(),dim=60)
> desvh<-desvm<-array(numeric(),dim=60)
> asimh<-asimm<-array(numeric(),dim=60)
> install.packages("moments")
> library(moments)
> for(i in 1:60){
+ mediah[i]<-mean(rh[i,])
+ mediam[i]<-mean(rm[i,])
+ desvh[i]<-sd(rh[i,])
+ desvm[i]<-sd(rm[i,])
+ asimh[i]<-skewness(rh[i,])
+ asimm[i]<-skewness(rm[i,])
+ }

```

Figura 31: Código de los momentos centrales de orden 1, 2 y 3 de la simulación estocástica

Fuente: Elaboración propia

Las Figuras 32, 33 y 34 representan los códigos propios de la media, desviación estándar y asimetría, junto con los valores de hombres y mujeres necesarios para la concepción de las Figuras 9, 10a y 10b.

El momento central de orden 1 representa la media estocástica generada a partir de datos extraídos del INE. La Figura 32a representa el código de la media de hombres y mujeres para 60 edades distintas a partir de los 65 años. En cambio, la Figura 32b reproduce los datos de la media de los hombres. Análogamente, la Figura 32c plasma los datos de la media de las mujeres para el mismo intervalo de edades.

El momento central de orden 2, en nuestros datos, representa la desviación típica estocástica generada a partir de datos extraídos del INE. La Figura 33a representa el código de la desviación de hombres y mujeres para 60 edades distintas a partir de los 65 años. En cambio, la Figura 33b reproduce los datos de la desviación estándar de los hombres. Análogamente, la Figura 33c plasma los datos de la desviación estándar de las mujeres para el mismo intervalo de edades.

El momento central de orden 3 representa la asimetría estocástica generada a partir de datos extraídos del INE. La Figura 34a representa el código de la asimetría producida de hombres y mujeres para 60 edades distintas a partir de los 65 años. En

```

> png(filename = "Media tp65.png")
> plot(c(66:125), mediah, type="l", xlab="Años", ylab="tp65", col="blue", lwd=2)
> lines(c(66:125), mediam, col="red", lwd=2)
> legend("topright", c("Hombres", "Mujeres"), col=c("blue", "red"), lwd=2)
> dev.off()

```

(a) Código de la media estocástica

```

> print(mediah)
 [1] 9.854598e-01 9.699254e-01 9.532310e-01 9.354001e-01 9.161840e-01
 [6] 8.955313e-01 8.734595e-01 8.496376e-01 8.241359e-01 7.966918e-01
[11] 7.673438e-01 7.360710e-01 7.025455e-01 6.672850e-01 6.298808e-01
[16] 5.904134e-01 5.491774e-01 5.065683e-01 4.629312e-01 4.186036e-01
[21] 3.740786e-01 3.298721e-01 2.869924e-01 2.460963e-01 2.077020e-01
[26] 1.723208e-01 1.403535e-01 1.120456e-01 8.753411e-02 6.679567e-02
[31] 4.970821e-02 3.599765e-02 2.532133e-02 1.726067e-02 1.137916e-02
[36] 7.235177e-03 4.425493e-03 2.596863e-03 1.457175e-03 7.796247e-04
[41] 3.962198e-04 1.906190e-04 8.646115e-05 3.680455e-05 1.463605e-05
[46] 5.410137e-06 1.848084e-06 5.799596e-07 1.660462e-07 4.301292e-08
[51] 9.998984e-09 2.066196e-09 3.753726e-10 5.916872e-11 7.979918e-12
[56] 9.041759e-13 8.435508e-14 6.309262e-15 3.666915e-16 1.586604e-17

```

(b) Media de los hombres

```

> print(mediam)
 [1] 9.942577e-01 9.879691e-01 9.810312e-01 9.734862e-01 9.649590e-01
 [6] 9.556197e-01 9.451763e-01 9.336194e-01 9.206843e-01 9.059683e-01
[11] 8.894749e-01 8.710115e-01 8.502208e-01 8.268557e-01 8.005492e-01
[16] 7.710061e-01 7.383339e-01 7.021055e-01 6.624123e-01 6.192731e-01
[21] 5.729138e-01 5.247722e-01 4.755300e-01 4.258190e-01 3.763858e-01
[26] 3.279603e-01 2.813089e-01 2.372074e-01 1.963014e-01 1.591981e-01
[31] 1.262669e-01 9.775681e-02 7.373647e-02 5.405521e-02 3.843369e-02
[36] 2.643408e-02 1.753869e-02 1.119478e-02 6.852622e-03 4.009541e-03
[41] 2.234258e-03 1.181499e-03 5.903126e-04 2.774391e-04 1.220700e-04
[46] 5.001307e-05 1.897428e-05 6.621597e-06 2.111168e-06 6.101736e-07
[51] 1.584948e-07 3.663098e-08 7.451457e-09 1.316514e-09 1.991030e-10
[56] 2.531706e-11 2.651941e-12 2.223664e-13 1.473262e-14 7.330443e-16

```

(c) Media de las mujeres

Figura 32: Momento central de orden 1 de la simulación estocástica

Fuente: Elaboración propia

```

> png(filename = "Desviación típica tp65.png")
> plot(c(66:125), desvh, type="l", xlab="Años", ylab="tp65", col="blue", lwd=2)
> lines(c(66:125), desvm, col="red", lwd=2)
> legend("topright", c("Hombres", "Mujeres"), col=c("blue", "red"), lwd=2)
> dev.off()

```

(a) Código de la desviación estándar estocástica

```

> print(desvh)
 [1] 7.420405e-04 1.239087e-03 2.142381e-03 3.033750e-03 4.209238e-03
 [6] 5.493832e-03 7.045833e-03 8.798319e-03 1.081310e-02 1.299733e-02
[11] 1.542326e-02 1.802885e-02 2.079452e-02 2.347982e-02 2.610332e-02
[16] 2.862078e-02 3.093278e-02 3.288951e-02 3.433705e-02 3.528083e-02
[21] 3.555244e-02 3.535114e-02 3.456681e-02 3.316395e-02 3.121524e-02
[26] 2.877394e-02 2.597359e-02 2.290804e-02 1.972080e-02 1.654085e-02
[31] 1.350054e-02 1.069837e-02 8.218628e-03 6.109426e-03 4.385401e-03
[36] 3.032786e-03 2.013937e-03 1.282206e-03 7.799904e-04 4.525386e-04
[41] 2.490578e-04 1.298116e-04 6.375323e-05 2.939212e-05 1.265299e-05
[46] 5.066154e-06 1.875284e-06 6.375116e-07 1.981143e-07 5.563517e-08
[51] 1.403488e-08 3.152245e-09 6.226240e-10 1.067748e-10 1.567319e-11
[56] 1.936325e-12 1.977059e-13 1.618342e-14 1.034255e-15 4.935199e-17

```

(b) Desviación estándar de los hombres

```

> print(desvm)
 [1] 2.609905e-04 4.264869e-04 7.242753e-04 1.082402e-03 1.604097e-03
 [6] 2.198467e-03 2.934748e-03 3.823054e-03 4.920285e-03 6.182628e-03
[11] 7.654451e-03 9.384302e-03 1.134664e-02 1.365940e-02 1.610010e-02
[16] 1.877443e-02 2.149198e-02 2.434204e-02 2.721980e-02 2.994393e-02
[21] 3.239537e-02 3.404190e-02 3.518327e-02 3.576025e-02 3.570721e-02
[26] 3.500467e-02 3.364418e-02 3.169752e-02 2.920648e-02 2.628998e-02
[31] 2.309177e-02 1.973728e-02 1.639892e-02 1.320535e-02 1.029365e-02
[36] 7.745178e-03 5.611552e-03 3.906031e-03 2.602559e-03 1.655164e-03
[41] 1.001508e-03 5.746487e-04 3.112932e-04 1.585436e-04 7.558590e-05
[46] 3.354402e-05 1.378266e-05 5.207756e-06 1.797265e-06 5.628176e-07
[51] 1.584292e-07 3.969604e-08 8.764355e-09 1.685290e-09 2.775486e-10
[56] 3.845862e-11 4.408037e-12 3.999261e-13 2.878426e-14 1.556175e-15

```

(c) Desviación estándar de las mujeres

Figura 33: Momento central de orden 2 de la simulación estocástica

Fuente: Elaboración propia

cambio, la Figura 34b reproduce los datos de la asimetría de los hombres. Análogamente, la Figura 34c plasma los datos de la asimetría de las mujeres para el mismo intervalo de edades.

```
> png(filename = "Asimetría tp65.png")
> plot(c(66:125), asimh, type="l", xlab="Años", ylab="tp65", col="blue", lwd=2)
> lines(c(66:125),asimm,col="red", lwd=2)
> legend("topleft", c("Hombres", "Mujeres"), col=c("blue", "red"), lwd=2)
> dev.off()
```

(a) Código de la asimetría estocástica

```
> print(asimh)
 [1] -0.144626652 -0.120454680 -0.154691743 -0.156458672 -0.153552418
 [6] -0.156816782 -0.169155927 -0.175402391 -0.186553818 -0.177453144
[11] -0.180252599 -0.172511948 -0.173142136 -0.161146732 -0.150182772
[16] -0.130160314 -0.110984264 -0.084882093 -0.056607612 -0.024817380
[21]  0.006666942  0.046039096  0.084474349  0.130891299  0.180673538
[26]  0.233434894  0.291607905  0.354931070  0.422397361  0.496415655
[31]  0.575568678  0.660796765  0.753685843  0.855888771  0.963542418
[36]  1.083036908  1.207018387  1.347109243  1.499118617  1.674962304
[41]  1.858808403  2.069006705  2.299058242  2.558204910  2.832953149
[46]  3.145136030  3.476303311  3.832247396  4.246289826  4.676140167
[51]  5.178170364  5.763386525  6.412761634  7.171701345  7.952775604
[56]  8.950774700 10.168971101 11.514496102 13.133379222 15.081464577
```

(b) Asimetría de los hombres

```
> print(asimm)
 [1] -0.13307754 -0.07744459 -0.08601289 -0.07703869 -0.10759649 -0.12759668
 [7] -0.13728630 -0.15592425 -0.16368853 -0.17218401 -0.18455461 -0.18351509
[13] -0.19181004 -0.19709950 -0.20620844 -0.20630132 -0.20727226 -0.19705102
[19] -0.18763308 -0.16589438 -0.14609339 -0.11612917 -0.08842990 -0.05365901
[25] -0.02177411  0.01903022  0.05946353  0.10574463  0.15542256  0.20908006
[31]  0.26791232  0.33148899  0.40130434  0.47635275  0.55718575  0.64485055
[37]  0.73768008  0.84203250  0.95267565  1.07502162  1.20853660  1.36010899
[43]  1.53208844  1.72085421  1.93715634  2.18142982  2.46183115  2.77104381
[49]  3.11607986  3.50734472  3.94010123  4.43608359  5.00628490  5.74093891
[55]  6.52473761  7.39967126  8.44954884  9.40311694 10.48875964 11.58275763
```

(c) Asimetría de las mujeres

Figura 34: Momento central de orden 3 de la simulación estocástica

Fuente: Elaboración propia

E. Determinación del parámetro de aversión al riesgo según Leung *et al.* (2018)

En la Figura 35 se plasma el método para encontrar el parámetro óptimo de aversión al riesgo extraído del artículo de Leung *et al.* (2018).

Algorithm 4 Determining the risk aversion parameter (k_A, k_B)

- 1: Set ω_0^A, ω_0^B as the initial wealth.
- 2: Set $\bar{\Pi}_{\text{model}}^1 = \bar{\Pi}_0$ as the initial model price.
- 3: Set ρ as the bond price searching parameter.
- 4: **for** $n = 1, \dots, N$ **do**
- 5: **for** $t = 1, \dots, T$ **do**
- 6: **if** $t = 1$ **then**
- 7: $\omega_t^A = (\omega_{t-1}^A) + \theta_A \bar{\Pi}_{\text{model}}^n$
- 8: $\omega_t^B = (\omega_{t-1}^B) - \theta_B \bar{\Pi}_{\text{model}}^n$
- 9: **else**
- 10: $\omega_t^A = \omega_{t-1}^A e^r - \theta_A I(t)$
- 11: $\omega_t^B = \omega_{t-1}^B e^r + \theta_B I(t) - I(t)$
- 12: **end if**
- 13: **end for**
- 14: Determine (θ^B, θ^A) based on the optimization of:

$$\theta_A = \sup_{\theta_A} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [U(\omega_T^A, k_A)]$$

$$\theta_B = \sup_{\theta_B} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [U(\omega_T^B, k_B)],$$
- 15: **if** $\theta_A = \theta_B$ **then**
- 16: Stop and set $\bar{\Pi}_{\text{model}}^n = \bar{\Pi}_{\text{model}}$
- 17: **else** Set $\bar{\Pi}_{\text{model}}^{n+1} = \bar{\Pi}_{\text{model}}^n + h_n$ where $h_n = \rho |\bar{\Pi}_{\text{model}}^n| (\theta_A - \theta_B)$
- 18: **end if**
- 19: **end for**
- 20: $(k_A, k_B) = \underset{(k_A, k_B)}{\text{argmin}} (\bar{\Pi}_{\text{model}} - \bar{\Pi}_0)$

Figura 35: Determinación del parámetro de aversión al riesgo
Fuente: Leung *et al.* (2018)

F. Código R y valores resultantes de las funciones de utilidad *CARA* y *CRRA* de los bonos de la Sección 5

En este apartado del anexo se incorpora el código propio de R que se ha desarrollado para la Sección 5 partiendo como base de los resultados de la Figura 31.

F.1. Código R, valores de las funciones de utilidad *CARA* y *CRRA* y obtención de su recargo mínimo incluido en la prima, P^- , del bono cupón cero de la Sección 5.1

A continuación, se adjunta en la Figura 36 el bucle de creación propia necesario para la obtención de la prima de riesgo, R_p , de hombres y mujeres a través de la función de utilidad *CARA*. Sus ejes van de 5 en 5 desde 5 a 35 años. Arbitrariamente α se fija en 3 y el tamaño de la cohorte, N , es calculado en base a 10, 100 o 1000 individuos.

```
> # CÁLCULO DEL PRECIO DEL INSTRUMENTO:
> #Función de utilidad CARA:
> # 7 t x 3 N:
> Rp.h<-Rp.m<-array(numeric(),c(7,3))
> Ra.h<-Ra.m<-array(numeric())
> t<-c(5,10,15,20,25,30,35)
> alpha<-3
> N<-c(10,100,1000)
> St.h<-rh[1,] #Simulación tp65 (h)
> St.m<-rm[1,] #Simulación tp65 (m)
> esp.h<-mean(mediah) #Media de los datos (h)
> esp.m<-mean(mediam) #Media de los datos (m)
> Pmin.h<-1/alpha*log(mean(exp(alpha*(St.h-esp.h))))
> Pmin.m<-1/alpha*log(mean(exp(alpha*(St.m-esp.m))))
> for (i in 1:7){
+   for (j in 1:3){
+     Ra.h[i]<-(1-esp.h^(1/t[i]))/(esp.h^(1/t[i]))
+     Ra.m[i]<-(1-esp.m^(1/t[i]))/(esp.m^(1/t[i]))
+     Rp.h[i,j]<-(N[j]/(esp.h+Pmin.h))^(1/t[i])-1-Ra.h[i]
+     Rp.m[i,j]<-(N[j]/(esp.m+Pmin.m))^(1/t[i])-1-Ra.m[i]
+   }
+ }
> print(round(Rp.h,2))
```

Figura 36: Código de la función de utilidad *CARA* del cálculo de la prima de riesgo a partir del recargo mínimo incluido en la prima, P^- , del bono cupón cero

Fuente: Elaboración propia

De forma análoga, en la Figura 37 se muestran los mismos cálculos que en la anterior figura, pero de la función de utilidad *CRRA*. Anteriormente ha sido necesaria la obtención del recargo mínimo, P^- , para hombres y mujeres a través de la función de obtención de ceros *uniroot* del R en base a la igualdad 11. Además, en este caso, es preciso matizar que se establece (igual que ocurre con la función de utilidad *CARA*), siguiendo a Cui (2008), de forma arbitraria, una $\gamma = 5$ y una riqueza inicial equivalente a la final de 100, porque se asume que la tasa libre de riesgo es nula.

```

> Rp.h.crra<-Rp.m.crra<-array(numeric(),c(7,3))
> Ra.h.crra<-Ra.m.crra<-array(numeric())
> w0<-wt<-100 #Se asume que la tasa libre de riesgo es 0.
> gamma<-5
> Pmin.h.crra<-uniroot(function(Pmin.h.crra) mean((1+(esp.h+Pmin.h.crra-St.h)/wt)
^(1-gamma))-1, lower = 0, upper = 20, tol = 1e-9)$root;Pmin.h.crra
[1] 0.6986071
> Pmin.m.crra<-uniroot(function(Pmin.m.crra) mean((1+(esp.m+Pmin.m.crra-St.m)/wt)
^(1-gamma))-1, lower = 0, upper = 20, tol = 1e-9)$root;Pmin.m.crra
[1] 0.6387215
> for (i in 1:7){
+   for (j in 1:3){
+     Ra.h.crra[i]<-(1-esp.h^(1/t[i]))/(esp.h^(1/t[i]))
+     Ra.m.crra[i]<-(1-esp.m^(1/t[i]))/(esp.m^(1/t[i]))
+     Rp.h.crra[i,j]<-(N[j]/(esp.h+Pmin.h.crra))^(1/t[i])-1-Ra.h.crra[i]
+     Rp.m.crra[i,j]<-(N[j]/(esp.m+Pmin.m.crra))^(1/t[i])-1-Ra.m.crra[i]
+   }
+ }

```

Figura 37: Código de la función de utilidad *CRRA* del cálculo de la prima de riesgo a partir del recargo mínimo incluido en la prima, P^- , del bono cupón cero

Fuente: Elaboración propia

F.2. Código R, valores de la función de utilidad *CARA* y *CRRA* para hombres y mujeres y obtención del precio y cantidad del bono cupón cero de la Sección 5.2

F.2.1. Código del instrumento 2

A través de las Figuras 38-40 se materializa el código necesario para la obtención del P^* , precio óptimo y de θ^* , cantidad óptima, para las funciones de utilidad *CARA* y *CRRA*, tanto para hombres como para mujeres, así como 9 variantes para cada caso. Es decir, en las subsiguientes secciones se presentan un total de 40 posibles óptimos, incluyendo los originales.

F.2.2. Valores y resultados de los gráficos presentados en la Sección 5.2

En esta sección se muestran los resultados de las Figuras 11-14 de la Sección 5.2.

F.2.3. *CARA* Hombres

En la presente y en las 3 siguientes secciones del anexo se muestran detalladamente los gráficos y resultados de cada una de las 9 variantes en cada una de las casuísticas: *CARA*-Hombres, *CARA*-Mujeres, *CRRA*-Hombres y *CRRA*-Mujeres. Salvo indicación contraria no se ahondará en la explicación de cada gráfico, a no


```

# CÁLCULO DEL PRECIO DEL INSTRUMENTO 2:
#### FUNCIÓN DE UTILIDAD CARA ####
U <- function(w){return((1-exp(-alpha*w))/alpha)} #CARA.

#### FUNCIÓN DE UTILIDAD CRRA ####
U <- function(w){return(w^(1-gamma)/(1-gamma))} #CRRA.

#HOMBRES:
r<-.01 #Tipo de interés = 0.01.
# r<-.3

P0<-.1 #Precio inicial = 0.1.
# P0<-1

omegaA<-omegaB<-1 #Riqueza inicial=1.
# omegaA<-omegaB<-10

lambda<-.01 #Factor de actualización de precios=0.01.
# lambda<-0.1

alpha<-.75 #Valor de aversión al riesgo de CARA=0.75.
# alpha<-1.5

gamma<-2 #Valor de aversión al riesgo de CRRA=2.
# gamma<-5

np<-30 #30 precios
# np<-50

nsimul<-10000 # 10.000 simulaciones.
# nsimul<-5000

```

Figura 38: Código propio R del instrumento 2
Fuente: Elaboración propia

```

Ph<-c(P0,rep(0,np-1))
cantidadeshA<-cantidadeshB<-array(numeric(),dim=np-1)
candthdef<-prehdef<-0

for(k in 1:(np-1)){
  for(i in 1:nsimul){
    q.h<-funcion.predict(126, 126, axhombresresp.lc1, bxhombresresp.lc1.ns, simul.h[,i],1)$pred#; q.h
    qh[,i]<-q.h
    ph[,i]<-1-diag(qh[66:126,1:60,i])
    rh[,i]<-cumprod(ph[,i])

    print(k); print(i)
  }
  opt_fun_A <- function(parsA){ return(-1*mean(U((omegaA + parsA*Ph[k]) * exp(r) - parsA * P0/rh[1,] - 10^rh[1,]))) }
  opt_fun_B <- function(parsB){ return(-1*mean(U((omegaB - parsB*Ph[k]) * exp(r) + parsB * P0/rh[1,]))) }

  opt_mod_A <- optim(30, opt_fun_A , method='Brent', lower = 0, upper = 100) #lower=0; upper=100
  opt_mod_B <- optim(70, opt_fun_B , method='Brent', lower = 0, upper = 100) #lower=0; upper=100

  cantidadeshA[k]<-opt_mod_A$par #Son las cantidades maximizadas de la Oferta
  cantidadeshB[k]<-opt_mod_B$par #Son las cantidades maximizadas de la Demanda
  if (cantidadeshA[k]==cantidadeshB[k]){
    candthdef<-cantidadeshA[k]
    prehdef<-Ph[k]
    print("CANTIDAD HOMBRES"); print(candthdef)
    print("PRECIO HOMBRES"); print(prehdef)
    break
  }else{
    Ph[k+1]<-Ph[k]+lambda*abs(Ph[k])*(cantidadeshB[k]-cantidadeshA[k])
    candthdef<-prehdef<-0
  }
}

```

(a) Bucle

```

color<-c(rgb(0, 0, 255, maxColorValue = 255),
         rgb(255, 0, 0, maxColorValue = 255))

# GRÁFICO OFERTA/DEMANDA HOMBRES:
Phdef<-sort(head(Ph,-1)); ChA<-cantidadeshA[order(head(Ph,-1))]; ChB<-cantidadeshB[order(head(Ph,-1))] #Se ordenan precios y cantidades
# png(filename = "Gráfico hombres.png")
plot(Phdef, ChA, xlab="Precio", ylim=c(-1,101), ylab="Cantidad",col=color[1], lwd=2, type="l")
lines(Phdef, ChB, col=color[2],lwd=2)
legend("left", c("Oferta H", "Demanda H"), col=color, lwd=2)
# dev.off()

# png(filename = "Gráfico hombres ampliado.png")
plot(Phdef, ChA, xlab="Precio", xlim=c(0.13,.14), ylim=c(49,51), ylab="Cantidad",col=color[1], lwd=2, type="l")
lines(Phdef, ChB, col=color[2],lwd=2)
abline(h=50, lwd=2)
abline(v=.137, lwd=2)
legend("bottomright", c("Oferta H", "Demanda H"), col=color, lwd=2)
# dev.off()

```

(b) Gráficos

Figura 39: Código de hombres del instrumento 2
Fuente: Elaboración propia

```

Pm<-c(P0,rep(0,np-1))
cantidadesMA<-cantidadesMB<-array(numeric(),dim=np-1)
cantmdef<-premedf<-0

for(k in 1:(np-1)){
  for (i in 1:nsimu){
    q.m<-funcion.predict(126, 126, axmujeresesp.lc1, bxmujeresesp.lc1.ns, simul.m[,i,1]$pred#; q.m
    qm[,i]<-q.m
    pm[,i]<-1-diag(qm[66:126,1:60,i])
    rm[,i]<-cumprod(pm[,i])

    print(k); print(i)
  }
  opt_fun_A <- function(parsA){ return(-1*mean(U((omegaA + parsA*Pm[k]) * exp(r) - parsA * P0/rm[1,] - 10*rm[1,]))) }
  opt_fun_B <- function(parsB){ return(-1*mean(U((omegaB - parsB*Pm[k]) * exp(r) + parsB * P0/rm[1,]))) }

  opt_mod_A <- optim(30, opt_fun_A , method='Brent', lower = 0, upper = 100) #lower=0; upper=100
  opt_mod_B <- optim(70, opt_fun_B , method='Brent', lower = 0, upper = 100)

  cantidadesMA[k]<-opt_mod_A$par #Son las cantidades maximizadas de la Oferta
  cantidadesMB[k]<-opt_mod_B$par #Son las cantidades maximizadas de la Demanda
  if (cantidadesMA[k]==cantidadesMB[k]){
    cantmdef<-cantidadesMA[k]
    premedf<-Pm[k]
    print("CANTIDAD MUJERES"); print(cantmdef)
    print("PRECIO MUJERES"); print(premdef)
    break
  }else{
    Pm[k+1]<-Pm[k]+lambda*abs(Pm[k])*(cantidadesMB[k]-cantidadesMA[k])
    cantmdef<-premedf<-0
  }
}

```

(a) Bucle

```

color<-c(rgb(100, 150, 255, maxColorValue = 255),
         rgb(255, 150, 100, maxColorValue = 255))

# GRÁFICO CARA: OFERTA/DEMANDA MUJERES:
Pmdef<-sort(head(Pm,-1)); CmA<-cantidadesMA[order(head(Pm,-1))]; CmB<-cantidadesMB[order(head(Pm,-1))] #Se ordenan precios y cantidades
# png(filename = "Gráfico mujeres.png")
plot(Pmdef, CmA, xlab="Precio", ylim=c(-1,101), ylab="Cantidad",col=color[1], lwd=2, type="l")
lines(Pmdef, CmB, col=color[2],lwd=2)
legend("left", c("Oferta M", "Demanda M"), col=color, lwd=2)
# dev.off()

# png(filename = "Gráfico mujeres ampliado.png")
plot(Pmdef, CmA, xlab="Precio", xlim=c(0.07,.08), ylim=c(49,51), ylab="Cantidad",col=color[1], lwd=2, type="l")
lines(Pmdef, CmB, col=color[2],lwd=2)
abline(h=50, lwd=2)
abline(v=.0753285, lwd=2)
legend("bottomright", c("Oferta M", "Demanda M"), col=color, lwd=2)
# dev.off()

```

(b) Gráficos

Figura 40: Código de mujeres del instrumento 2
Fuente: Elaboración propia

```

> Ph1;ChA1;ChB1
[1] 4.756485e-09 5.185441e-09 1.037088e-08 2.074176e-08 4.148352e-08 8.296704e-08 1.659341e-07 3.318682e-07 6.637363e-07
[10] 1.327473e-06 2.654945e-06 5.309890e-06 1.061978e-05 2.123956e-05 4.247912e-05 8.495824e-05 1.699165e-04 3.398330e-04
[19] 6.796659e-04 1.359332e-03 2.718664e-03 5.437327e-03 1.087465e-02 2.174931e-02 4.349861e-02 8.699723e-02 1.000000e-01
[28] 1.739945e-01 2.000000e-01
[1] 8.183995e-09 8.183995e-09 8.183994e-09 8.183992e-09 8.183989e-09 8.183982e-09 8.183968e-09 8.183940e-09 8.183885e-09
[10] 8.183774e-09 8.183553e-09 8.183110e-09 8.182224e-09 8.180452e-09 8.176907e-09 8.169813e-09 8.155604e-09 8.127107e-09
[19] 8.069797e-09 7.902622e-09 7.519067e-09 6.716260e-09 9.919556e-09 8.423856e-09 5.655413e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[28] 1.000000e+02 1.000000e+02
[1] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[10] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[19] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[28] 8.463548e-09 8.021060e-09

```

Figura 41: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector masculino (versión original)

Fuente: Elaboración propia

```

> Pm11;CmA11;CmB11
[1] 1.509551e-09 1.529239e-09 3.019102e-09 6.038204e-09 1.207641e-08 2.415282e-08 4.830563e-08 9.661126e-08 1.932225e-07
[10] 3.864450e-07 7.728901e-07 1.545780e-06 3.091560e-06 6.183120e-06 1.236624e-05 2.473248e-05 4.946496e-05 9.892992e-05
[19] 1.978598e-04 3.957197e-04 7.914393e-04 1.582879e-03 3.165757e-03 6.331515e-03 1.266303e-02 2.532606e-02 5.065211e-02
[28] 1.000000e-01 1.013042e-01
[1] 8.032737e-09 8.032737e-09 8.032737e-09 8.032736e-09 8.032734e-09 8.032731e-09 8.032724e-09 8.032711e-09 8.032684e-09
[10] 8.032631e-09 8.032525e-09 8.032312e-09 8.031887e-09 8.031036e-09 8.029335e-09 8.025931e-09 8.019121e-09 8.005490e-09
[19] 7.978183e-09 7.923393e-09 7.813098e-09 7.589607e-09 7.130693e-09 6.162255e-09 8.963894e-09 8.525452e-09 8.318399e-09
[28] 1.000000e+02 1.000000e+02
[1] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[10] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[19] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[28] 9.302363e-09 9.302363e-09

```

Figura 42: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector femenino (versión original)

Fuente: Elaboración propia

```

> Ph21;ChA21;ChB21
[1] 0.02175677 0.02325740 0.02368957 0.02447876 0.03196499 0.03659903 0.04351353 0.04413877
[9] 0.04651481 0.04672196 0.04737914 0.04895751 0.06392998 0.07319806 0.08702706 0.08827754
[17] 0.09302961 0.09344392 0.09475829 0.09791502 0.10000000 0.12785996 0.14639612 0.17405412
[25] 0.17655507 0.18605922 0.18951657 0.19583004 0.20000000
[1] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[8] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[15] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[22] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 9.833051e+01 9.182002e+01
[29] 8.796741e+01
[1] 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000
[10] 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000
[19] 100.00000 100.00000 100.00000 36.54151 21.83459 13.61046 13.17289 11.69346 11.24693
[28] 10.50920 10.03680

```

Figura 43: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector masculino (versión original)

Fuente: Elaboración propia

```

> Pm31;CmA31;CmB31
[1] 1.509551e-09 1.529239e-09 3.019102e-09 6.038204e-09 1.207641e-08 2.415282e-08 4.830563e-08
[8] 9.661127e-08 1.932225e-07 3.864451e-07 7.728901e-07 1.545780e-06 3.091560e-06 6.183121e-06
[15] 1.236624e-05 2.473248e-05 4.946496e-05 9.892993e-05 1.978598e-04 3.957197e-04 7.914394e-04
[22] 1.582879e-03 3.165757e-03 6.331515e-03 1.266303e-02 2.532606e-02 5.065212e-02 1.000000e-01
[29] 1.013042e-01
[1] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[8] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[15] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[22] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 1.000000e+02
[29] 1.000000e+02
[1] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[8] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[15] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[22] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 9.302363e-09
[29] 9.302363e-09

```

Figura 44: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector femenino (versión original)

Fuente: Elaboración propia

ser que contenga información relevante, distinta al resto o carezca de ella.

Se matiza que cada cambio producido en el *input* (datos iniciales) para la extracción del *output* (resultados) es independiente del siguiente. Es decir, se hace un solo cambio cada vez y se vuelve a los datos de partida para la generación del siguiente cambio en otra variable distinta, por lo que son movimientos *iuris tantum*.

En la Figura 45 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para hombres del tipo de interés de $r = 0,01$ a $r = 0,3$.

En la Figura 46 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para hombres del precio inicial de $P_0 = 0,1$ a $P_0 = 1$.

En la Figura 47 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para hombres de la riqueza inicial de $\omega_A = \omega_B = 1$ a $\omega_A = \omega_B = 10$.

En la Figura 48 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para hombres de la velocidad de convergencia de $\lambda = 0,01$ a $\lambda = 0,1$.

En la Figura 49 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para hombres de su coeficiente de aversión al riesgo de $\bar{\alpha} = 0,75$ a $\bar{\alpha} = 1,5$.

En la Figura 50 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para hombres del número de precios por el que pasa el bucle de $np = 30$ a $np = 50$.

En la Figura 51 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para hombres del número de simulaciones por el que pasa el bucle de $nsimul = 10000$ a $nsimul = 5000$.

En la Figura 52 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para hombres del límite inferior del algoritmo de optimización por el que pasa el programa de $lower = 0$ a $lower = 25$.

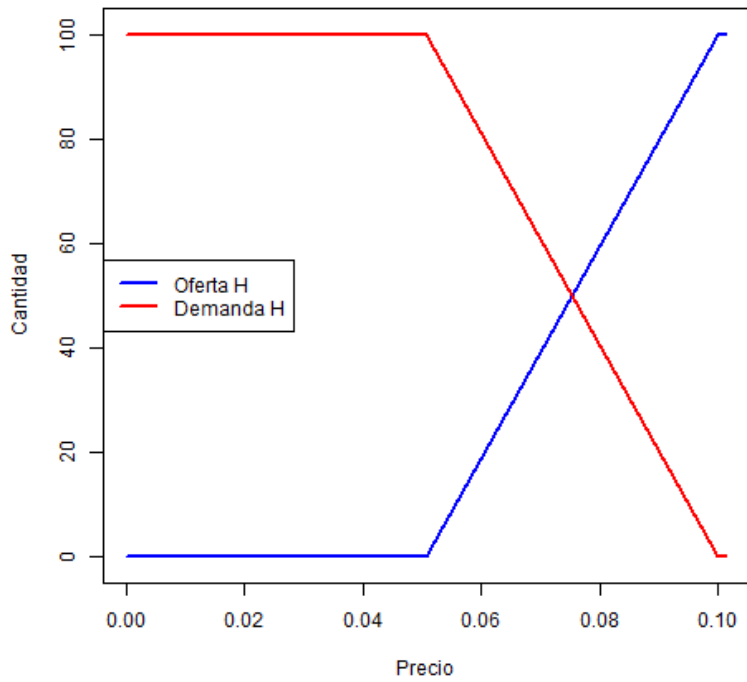
En la Figura 53 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para hombres del límite superior del algoritmo de optimización por el que pasa el programa de $upper = 100$ a $upper = 150$.

En la Figura 54 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para hombres del tipo de interés de $r = 0,01$ a $r = 0,3$.

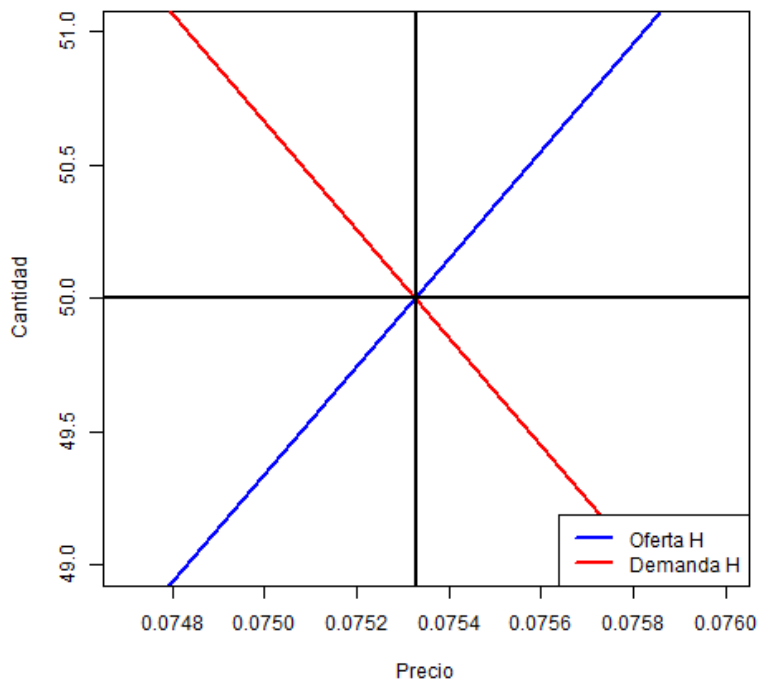
En la Figura 55 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para hombres del precio inicial de $P_0 = 0,1$ a $P_0 = 1$.

En la Figura 56 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para hombres de la riqueza inicial de $\omega_A = \omega_B = 1$ a $\omega_A = \omega_B = 10$.

En la Figura 57 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para hombres de la velocidad de convergencia de $\lambda = 0,01$ a $\lambda = 0,1$.



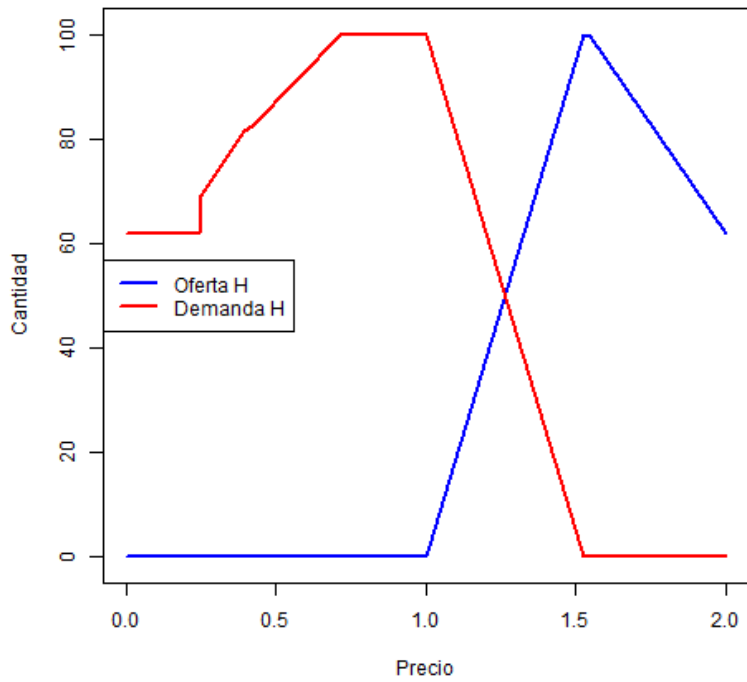
(a) P^* y θ^* del MLS - *CARA*, hombres (variante 1)



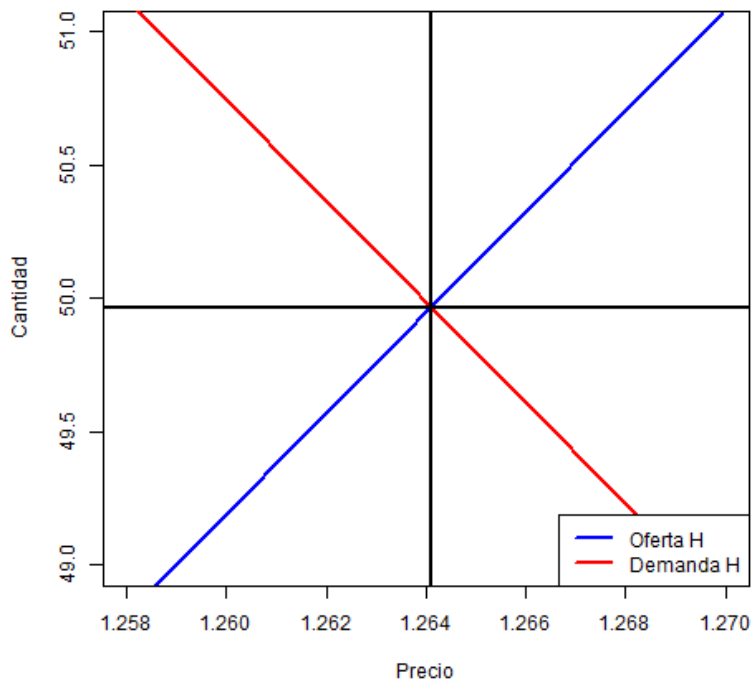
(b) Ampliado

Figura 45: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector masculino (variante 1)

Fuente: Elaboración propia



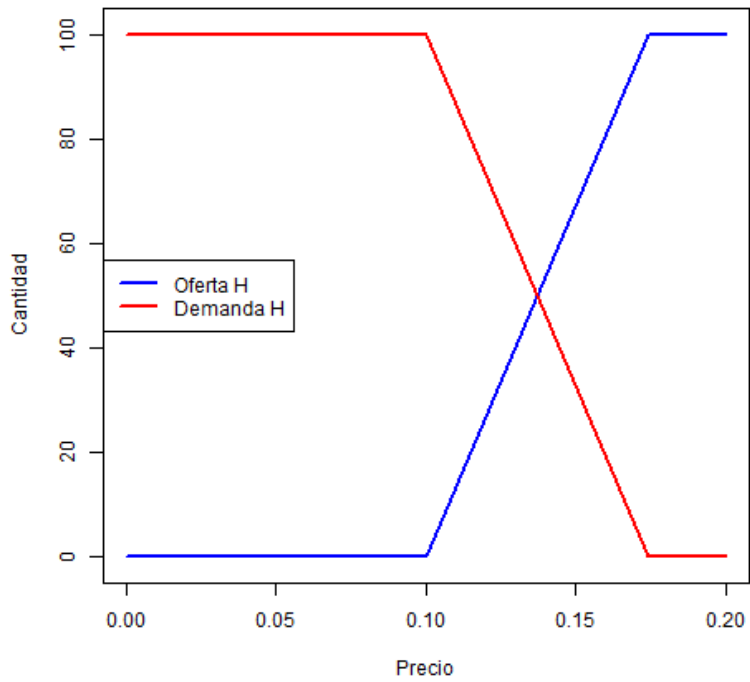
(a) P^* y θ^* del MLS - *CARA*, hombres (variante 2)



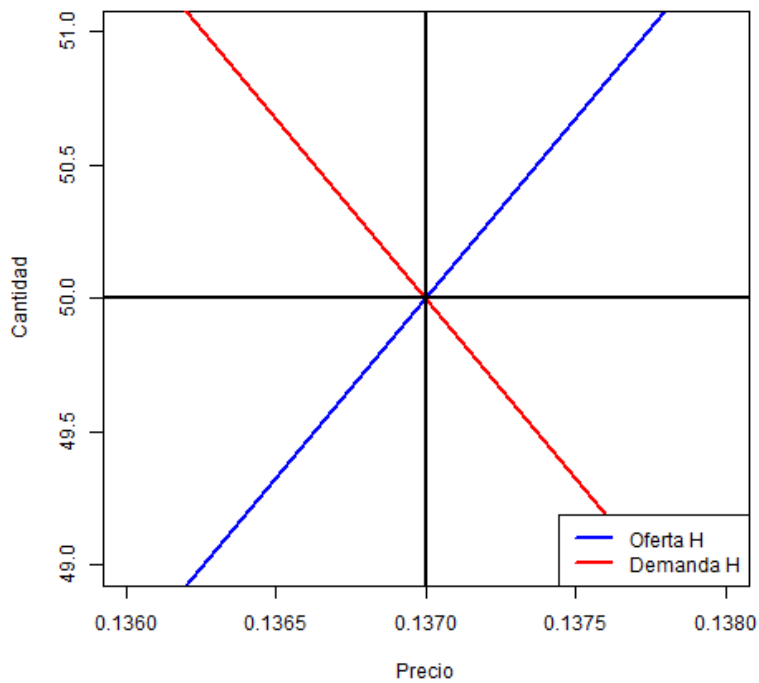
(b) Ampliado

Figura 46: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector masculino (variante 2)

Fuente: Elaboración propia



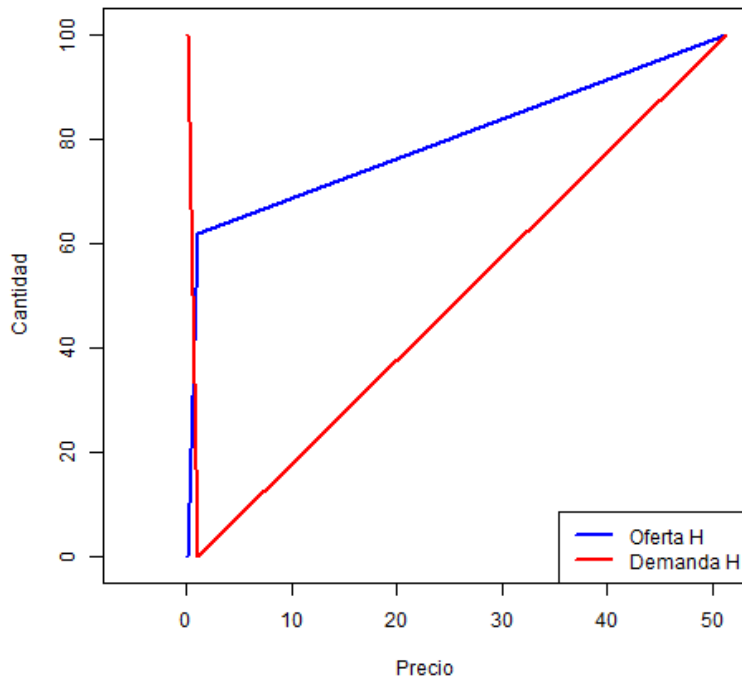
(a) P^* y θ^* del MLS - *CARA*, hombres (variante 3)



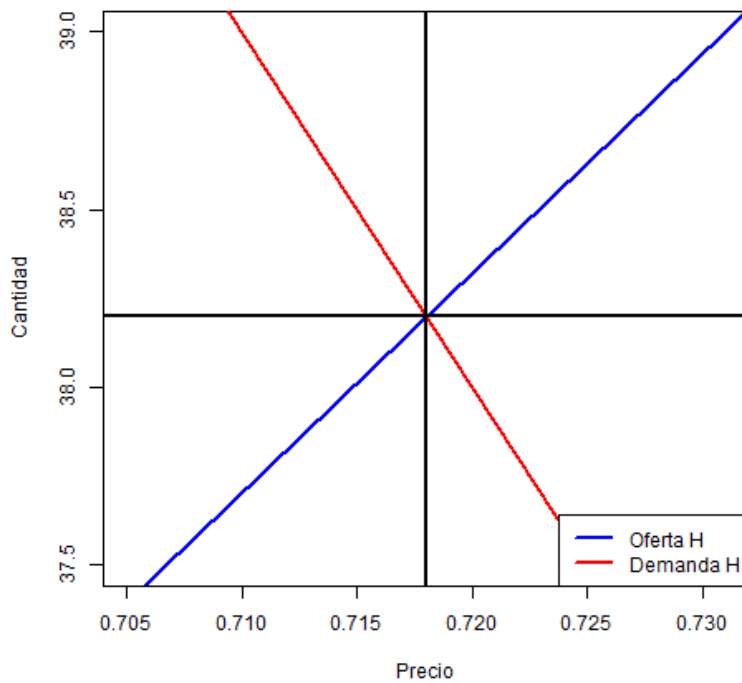
(b) Ampliado

Figura 47: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector masculino (variante 3)

Fuente: Elaboración propia



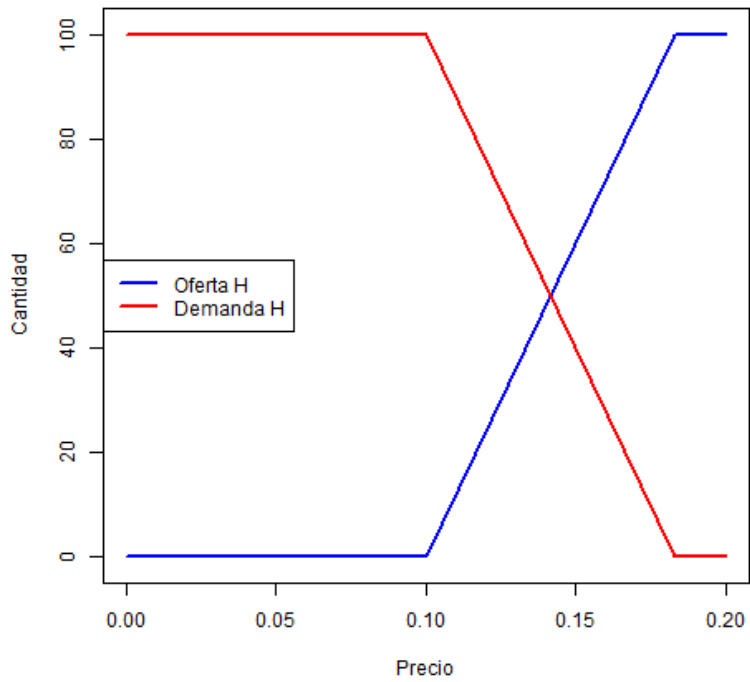
(a) P^* y θ^* del MLS - *CARA*, hombres (variante 4)



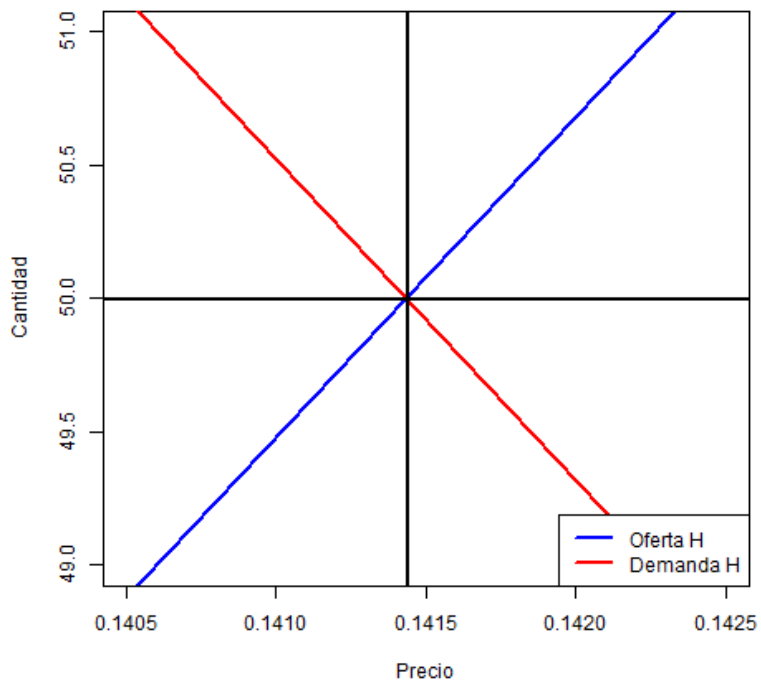
(b) Ampliando la solución *discreta*

Figura 48: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector masculino (variante 4)

Fuente: Elaboración propia



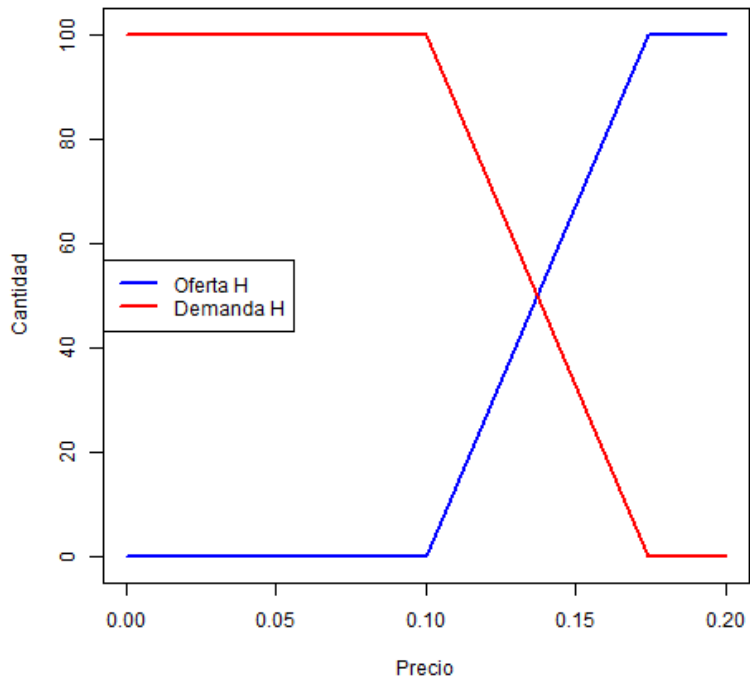
(a) P^* y θ^* del MLS - *CARA*, hombres (variante 5)



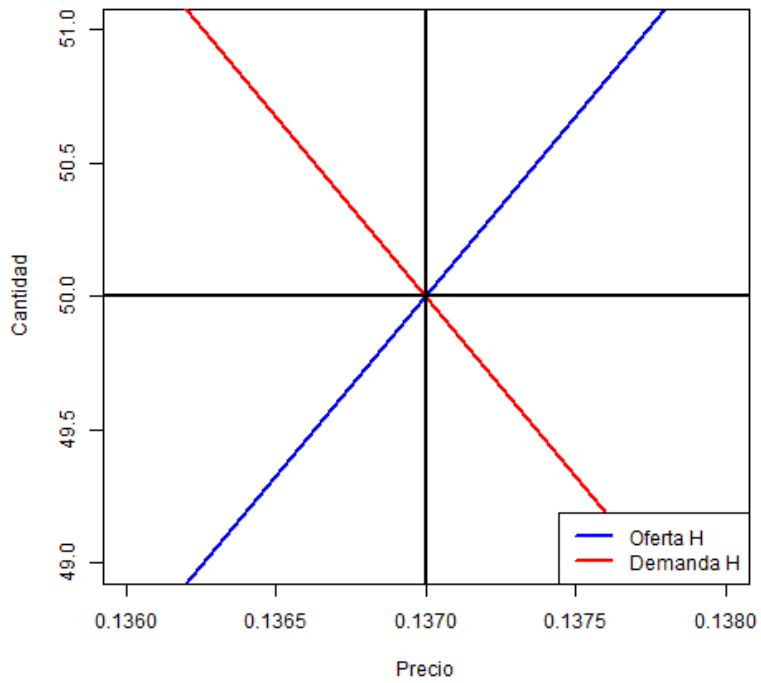
(b) Ampliado

Figura 49: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector masculino (variante 5)

Fuente: Elaboración propia



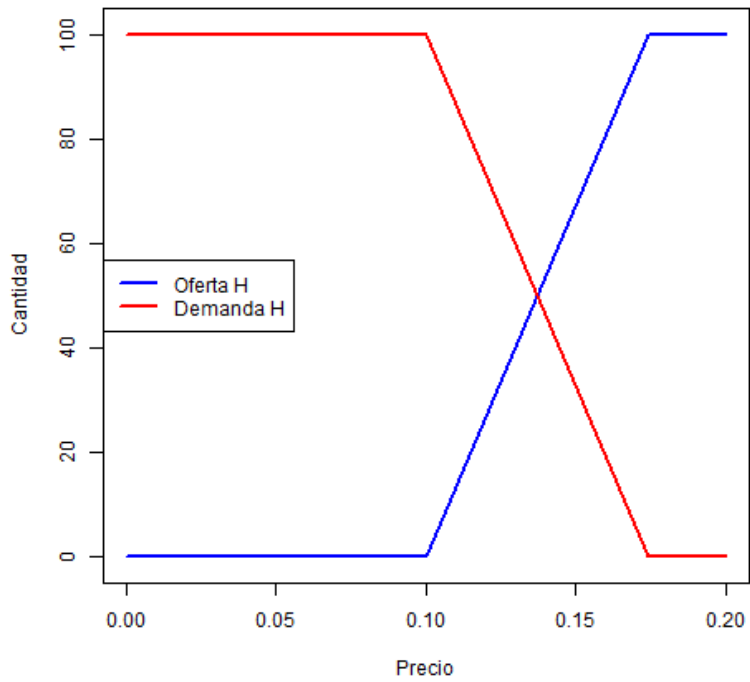
(a) P^* y θ^* del MLS - *CARA*, hombres (variante 6)



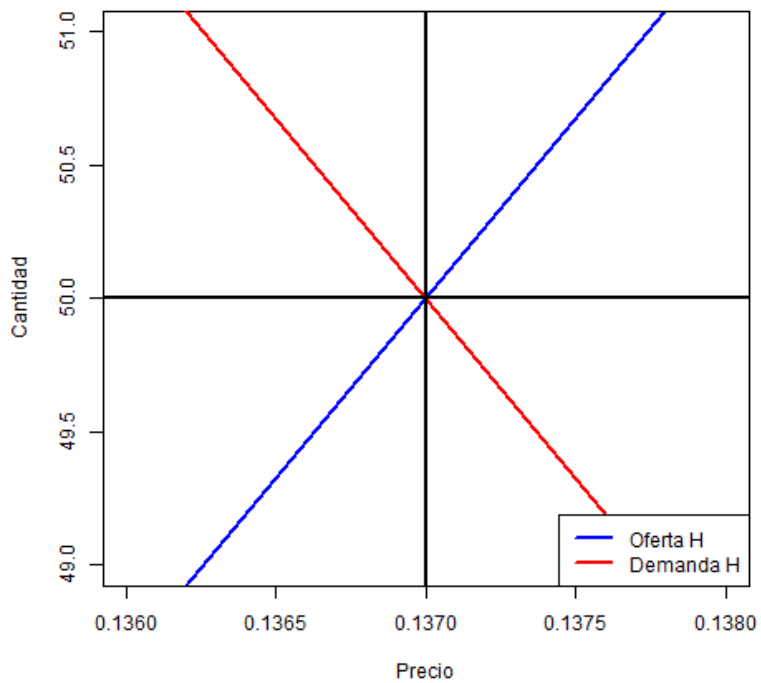
(b) Ampliado

Figura 50: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector masculino (variante 6)

Fuente: Elaboración propia



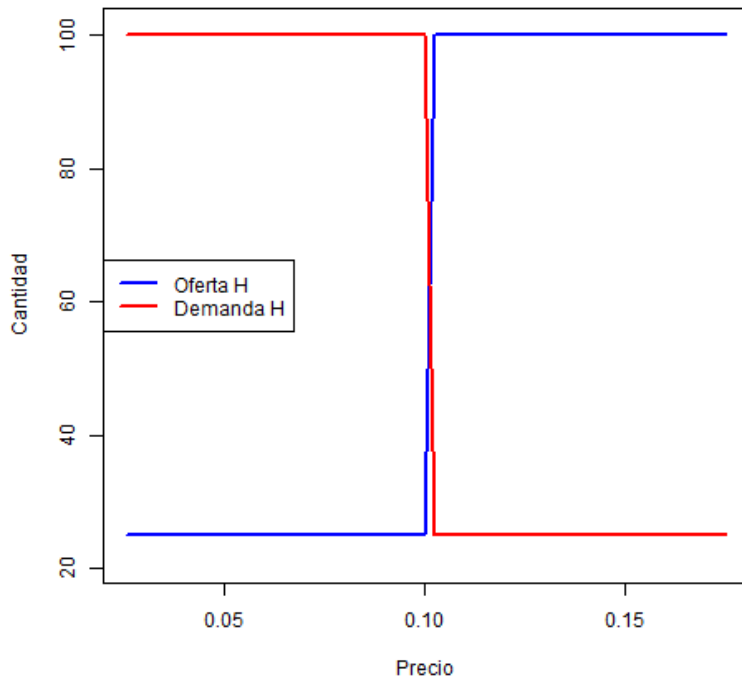
(a) P^* y θ^* del MLS - *CARA*, hombres (variante 7)



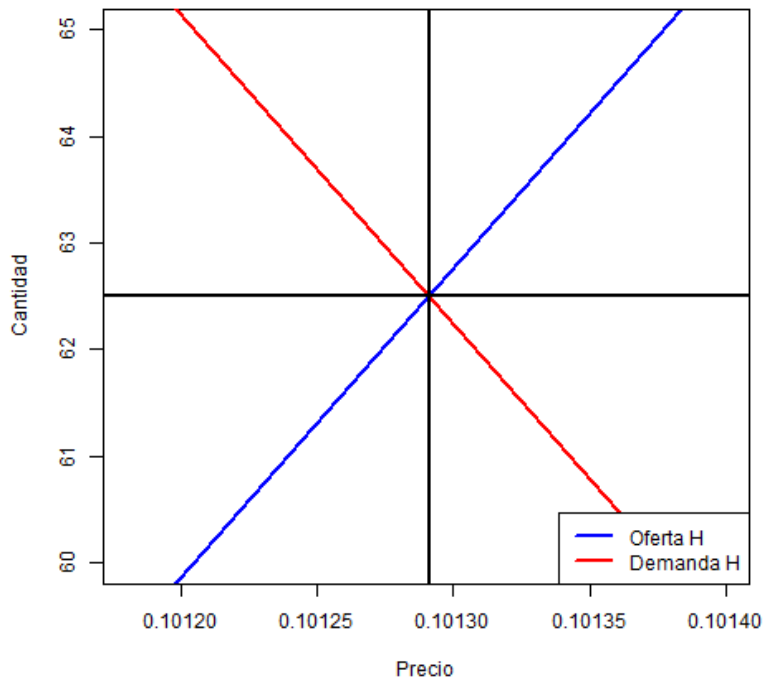
(b) Ampliado

Figura 51: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector masculino (variante 7)

Fuente: Elaboración propia



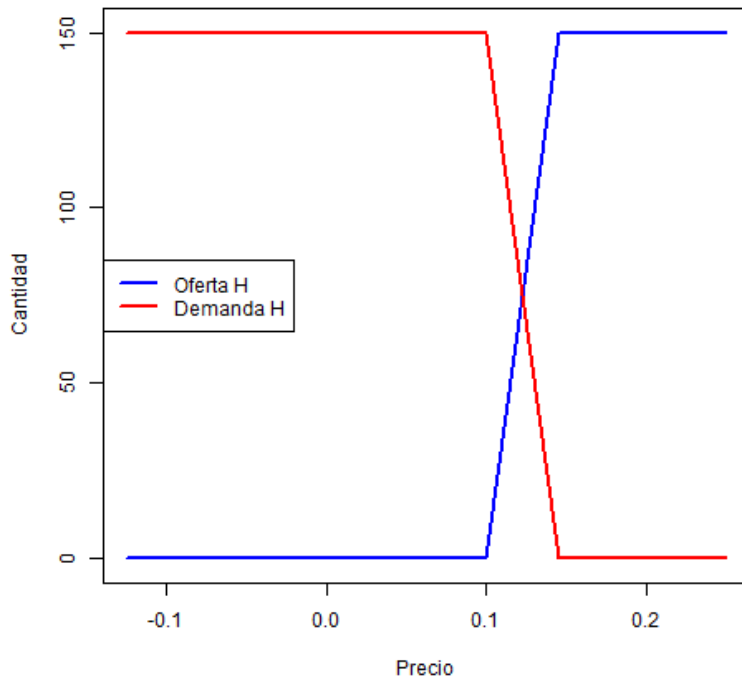
(a) P^* y θ^* del MLS - *CARA*, hombres (variante 8)



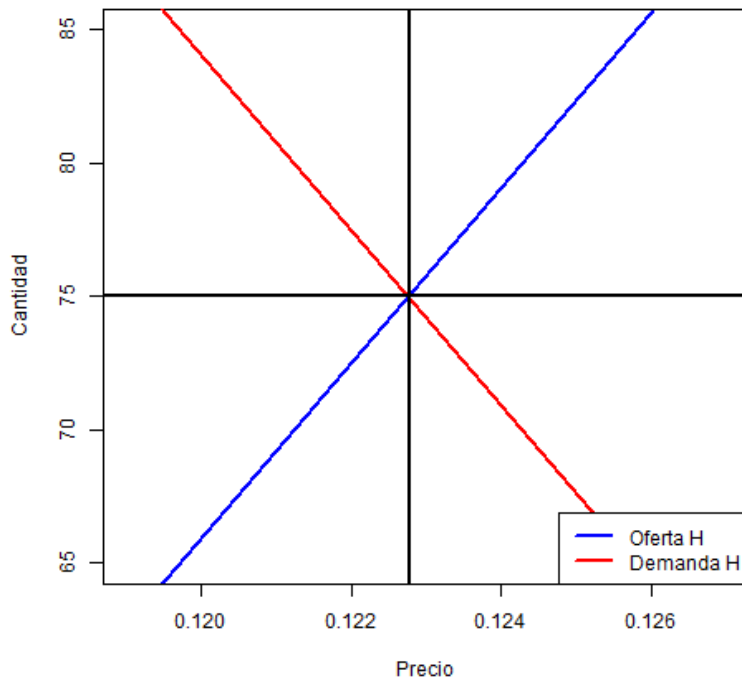
(b) Ampliado

Figura 52: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector masculino (variante 8)

Fuente: Elaboración propia



(a) P^* y θ^* del MLS - *CARA*, hombres (variante 9)



(b) Ampliado

Figura 53: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector masculino (variante 9)

Fuente: Elaboración propia

```

> Ph2;ChA2;ChB2
[1] 1.509551e-09 1.529239e-09 3.019102e-09 6.038204e-09 1.207641e-08 2.415282e-08 4.830563e-08 9.661126e-08 1.932225e-07
[10] 3.864450e-07 7.728901e-07 1.545780e-06 3.091560e-06 6.183120e-06 1.236624e-05 2.473248e-05 4.946496e-05 9.892992e-05
[19] 1.978598e-04 3.957197e-04 7.914393e-04 1.582879e-03 3.165757e-03 6.331514e-03 1.266303e-02 2.532606e-02 5.065211e-02
[28] 1.000000e-01 1.013042e-01
[1] 8.183995e-09 8.183995e-09 8.183995e-09 8.183994e-09 8.183993e-09 8.183990e-09 8.183985e-09 8.183974e-09 8.183952e-09
[10] 8.183909e-09 8.183823e-09 8.183651e-09 8.183306e-09 8.182617e-09 8.181239e-09 8.178481e-09 8.172962e-09 8.161913e-09
[19] 8.139766e-09 8.095283e-09 7.986190e-09 7.690704e-09 7.078592e-09 5.762910e-09 7.306713e-09 7.646640e-09 9.302363e-09
[28] 1.000000e+02 1.000000e+02
[1] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[10] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[19] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[28] 9.302363e-09 9.302363e-09

```

Figura 54: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector masculino (variante 1)

Fuente: Elaboración propia

```

> Ph3;ChA3;ChB3
[1] 0.002039547 0.003300057 0.005171755 0.005339604 0.008368075 0.008639661 0.013539831 0.013979266 0.021907906 0.022618927
[11] 0.035447737 0.036598194 0.057355644 0.059217122 0.092803382 0.095815316 0.150159028 0.155032440 0.242962414 0.250847759
[21] 0.393121447 0.424179385 0.713020075 0.763931987 0.774271657 1.000000000 1.527863960 1.548543293 1.999999985
[1] 5.469251e-09 5.339425e-09 5.145943e-09 5.128550e-09 8.145794e-09 8.129765e-09 7.716419e-09 7.673939e-09 6.899939e-09
[10] 6.829824e-09 5.544344e-09 5.427146e-09 8.223295e-09 8.014855e-09 9.789272e-09 9.481979e-09 6.968026e-09 5.740255e-09
[19] 6.190942e-09 5.224595e-09 8.407621e-09 8.552866e-09 7.716843e-09 5.112767e-09 8.557964e-09 9.302363e-09 9.986651e+01
[28] 9.966602e+01 6.180340e+01
[1] 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01
[10] 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01
[19] 6.180340e+01 6.909834e+01 8.137400e+01 8.253401e+01 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 8.268194e-09
[28] 5.987240e-09 8.090010e-09

```

Figura 55: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector masculino (variante 2)

Fuente: Elaboración propia

```

> Ph4;ChA4;ChB4
[1] 4.756485e-09 5.185441e-09 1.037088e-08 2.074176e-08 4.148352e-08 8.296704e-08 1.659341e-07 3.318682e-07 6.637363e-07327
[10] 1.327473e-06 2.654945e-06 5.309890e-06 1.061978e-05 2.123956e-05 4.247912e-05 8.495824e-05 1.699165e-04 3.398330e-04759
[19] 6.796659e-04 1.359332e-03 2.718664e-03 5.437327e-03 1.087465e-02 2.174931e-02 4.349861e-02 8.699723e-02 1.000000e-01
[28] 1.739945e-01 2.000000e-01
[1] 8.183995e-09 8.183995e-09 8.183994e-09 8.183992e-09 8.183989e-09 8.183982e-09 8.183968e-09 8.183940e-09 8.183885e-09
[10] 8.183774e-09 8.183553e-09 8.183110e-09 8.182224e-09 8.180452e-09 8.176907e-09 8.169813e-09 8.155604e-09 8.127107e-09
[19] 8.069797e-09 7.902622e-09 7.519067e-09 6.716260e-09 9.919556e-09 8.423856e-09 5.655413e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[28] 1.000000e+02 1.000000e+02
[1] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[10] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[19] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[28] 8.463548e-09 8.021060e-09

```

Figura 56: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector masculino (variante 3)

Fuente: Elaboración propia

```

> Ph5;ChA5;ChB5
[1] -5.698374 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000
[13] 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000
[25] 0.000000 0.000000 0.100000 1.100000 51.285365
[1] 5.262940e-09 NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA
[10] NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA
[19] NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA
[28] 6.180340e+01 1.000000e+02
[1] 1.000000e+02 NA NA NA NA NA NA NA NA NA
[10] NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA
[19] NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA
[28] 5.150885e-09 1.000000e+02

```

Figura 57: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector masculino (variante 4)

Fuente: Elaboración propia

En la Figura 58 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para hombres de su coeficiente de aversión al riesgo de $\bar{\alpha} = 0,75$ a $\bar{\alpha} = 1,5$.

```

> Ph6;ChA6;ChB6
[1] 4.345634e-09 5.449823e-09 1.089965e-08 2.179929e-08 4.359858e-08 8.719716e-08 1.743943e-07 3.487886e-07 6.975773e-07
[10] 1.395154e-06 2.790309e-06 5.580618e-06 1.116124e-05 2.232247e-05 4.464494e-05 8.928988e-05 1.785798e-04 3.571595e-04
[19] 7.143190e-04 1.428638e-03 2.857276e-03 5.714552e-03 1.142910e-02 2.285821e-02 4.571641e-02 9.143283e-02 1.000000e-01
[28] 1.828656e-01 2.000000e-01
[1] 8.862959e-09 8.862958e-09 8.862956e-09 8.862951e-09 8.862941e-09 8.862921e-09 8.862882e-09 8.862803e-09 8.862644e-09
[10] 8.862328e-09 8.861695e-09 8.860429e-09 8.857896e-09 8.852831e-09 8.842696e-09 8.822412e-09 8.781784e-09 8.700292e-09
[19] 8.536355e-09 8.204616e-09 7.209108e-09 9.869620e-09 7.532028e-09 5.267452e-09 7.616405e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[28] 1.000000e+02 1.000000e+02
[1] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[10] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[19] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[28] 7.034488e-09 8.436351e-09

```

Figura 58: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector masculino (variante 5)

Fuente: Elaboración propia

En la Figura 59 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para hombres del número de precios por el que pasa el bucle de $np = 30$ a $np = 50$.

```

> Ph7;ChA7;ChB7
[1] 4.756485e-09 5.185441e-09 9.512970e-09 1.037088e-08 1.902594e-08 2.074176e-08 3.805188e-08 4.148352e-08 7.610376e-08
[10] 8.296704e-08 1.522075e-07 1.659341e-07 3.044150e-07 3.318682e-07 6.088300e-07 6.637363e-07 1.217660e-06 1.327473e-06
[19] 2.435320e-06 2.654945e-06 4.870640e-06 5.309890e-06 9.741280e-06 1.061978e-05 1.948256e-05 2.123956e-05 3.896512e-05
[28] 4.247912e-05 7.793024e-05 8.495824e-05 1.558605e-04 1.699165e-04 3.117209e-04 3.398330e-04 6.234419e-04 6.796659e-04
[37] 1.246884e-03 1.359332e-03 2.493767e-03 2.718664e-03 4.987535e-03 5.437327e-03 1.087465e-02 2.174931e-02 4.349861e-02
[46] 8.699723e-02 1.000000e-01 1.739945e-01 2.000000e-01
[1] 8.183995e-09 8.183995e-09 8.183994e-09 8.183994e-09 8.183992e-09 8.183992e-09 8.183989e-09 8.183989e-09 8.183983e-09
[10] 8.183982e-09 8.183970e-09 8.183968e-09 8.183945e-09 8.183940e-09 8.183894e-09 8.183885e-09 8.183792e-09 8.183774e-09
[19] 8.183589e-09 8.183553e-09 8.183183e-09 8.183110e-09 8.182371e-09 8.182224e-09 8.180745e-09 8.180452e-09 8.177494e-09
[28] 8.176907e-09 8.170987e-09 8.169813e-09 8.157956e-09 8.155604e-09 8.131829e-09 8.127107e-09 8.079308e-09 8.069797e-09
[37] 7.933841e-09 7.902622e-09 7.583322e-09 7.519067e-09 6.852494e-09 6.716260e-09 9.919556e-09 8.423856e-09 5.65413e-09
[46] 9.302363e-09 9.302363e-09 1.000000e+02 1.000000e+02
[1] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[10] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[19] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[28] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[37] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[46] 1.000000e+02 1.000000e+02 8.463548e-09 8.021060e-09

```

Figura 59: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector masculino (variante 6)

Fuente: Elaboración propia

En la Figura 60 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para hombres del número de simulaciones por el que pasa el bucle de $nsimul = 10000$ a $nsimul = 5000$.

```

> Ph8;ChA8;ChB8
[1] 4.756485e-09 5.185441e-09 1.037088e-08 2.074176e-08 4.148352e-08 8.296704e-08 1.659341e-07 3.318682e-07 6.637363e-07
[10] 1.327473e-06 2.654945e-06 5.309890e-06 1.061978e-05 2.123956e-05 4.247912e-05 8.495824e-05 1.699165e-04 3.398330e-04
[19] 6.796659e-04 1.359332e-03 2.718664e-03 5.437327e-03 1.087465e-02 2.174931e-02 4.349861e-02 8.699723e-02 1.000000e-01
[28] 1.739945e-01 2.000000e-01
[1] 8.183995e-09 8.183995e-09 8.183994e-09 8.183992e-09 8.183989e-09 8.183982e-09 8.183968e-09 8.183940e-09 8.183885e-09
[10] 8.183774e-09 8.183553e-09 8.183110e-09 8.182224e-09 8.180452e-09 8.176907e-09 8.169813e-09 8.155604e-09 8.127107e-09
[19] 8.069797e-09 7.902622e-09 7.519067e-09 6.716260e-09 9.919556e-09 8.423856e-09 5.655413e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[28] 1.000000e+02 1.000000e+02
[1] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[10] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[19] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[28] 8.463548e-09 8.021060e-09

```

Figura 60: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector masculino (variante 7)

Fuente: Elaboración propia

En la Figura 61 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para hombres del límite inferior del algoritmo de optimización por el que pasa el programa de $lower = 0$ a $lower = 25$.

```

> Ph9;ChA9;ChB9
[1] 0.02564545 0.02630757 0.02698678 0.03349610 0.03436090 0.03524803 0.03615807 0.04375000 0.04487954
[10] 0.04603824 0.04722686 0.05861817 0.06013158 0.06168406 0.06327662 0.07656251 0.07853920 0.08056692
[19] 0.08264700 0.10000000 0.10258180 0.10523026 0.10794710 0.11073408 0.13398439 0.13744360 0.14099212
[28] 0.14463225 0.17500000
[1] 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 100 100 100 100 100
[26] 100 100 100 100
[1] 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 25 25 25 25 25
[26] 25 25 25 25

```

Figura 61: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector masculino (variante 8)

Fuente: Elaboración propia

En la Figura 62 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para hombres del límite superior del algoritmo de optimización por el que pasa el programa de $upper = 100$ a $upper = 150$.

```

> Ph10;ChA10;ChB10
[1] -0.12499999 -0.12206936 -0.11920755 -0.11641292 -0.07812441 -0.07629284 -0.07450429 -0.07275795 0.03637897
[10] 0.03725214 0.03814642 0.03906220 0.05820636 0.05960343 0.06103428 0.06249953 0.09094743 0.09313035
[19] 0.09536605 0.09765550 0.10000000 0.14551591 0.14900858 0.15258570 0.15624882 0.23282587 0.23841511
[28] 0.24413874 0.25000000
[1] 9.484496e-09 8.389730e-09 6.827384e-09 5.038472e-09 7.828488e-09 7.514537e-09 7.200960e-09 6.887901e-09 6.171077e-09
[10] 5.805144e-09 5.418884e-09 5.010766e-09 6.175979e-09 5.785203e-09 5.354085e-09 9.843584e-09 8.623764e-09 8.623764e-09
[19] 8.623764e-09 8.623764e-09 8.623764e-09 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02
[28] 1.500000e+02 1.500000e+02
[1] 1.499999e+02 1.499997e+02 1.499999e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02
[10] 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02
[19] 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 6.878559e-09 7.634388e-09 6.980745e-09 6.503219e-09 7.503438e-09 9.437120e-09
[28] 5.854610e-09 7.131021e-09

```

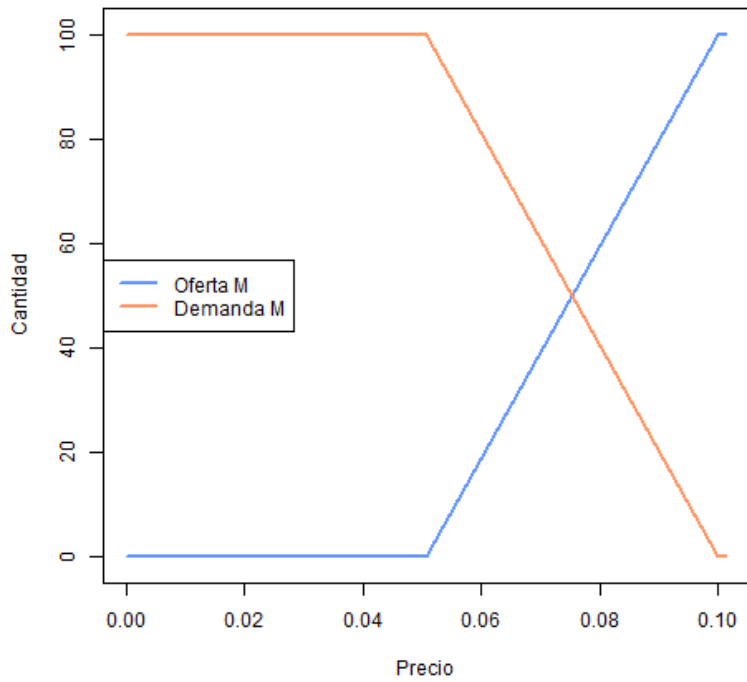
Figura 62: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector masculino (variante 9)

Fuente: Elaboración propia

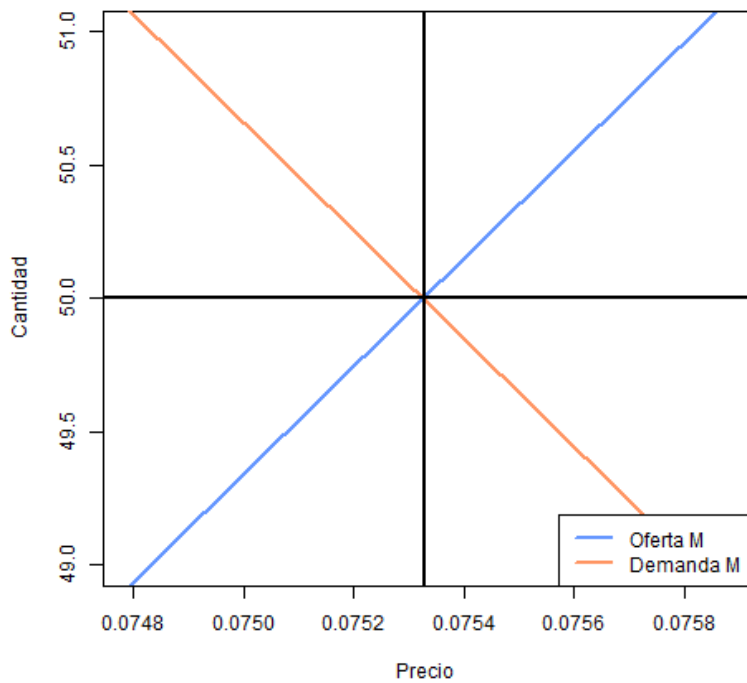
F.2.4. *CARA* Mujeres

En la Figura 63 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para mujeres del tipo de interés de $r = 0,01$ a $r = 0,3$.

En la Figura 64 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para mujeres del precio inicial de $P_0 = 0,1$ a $P_0 = 1$.



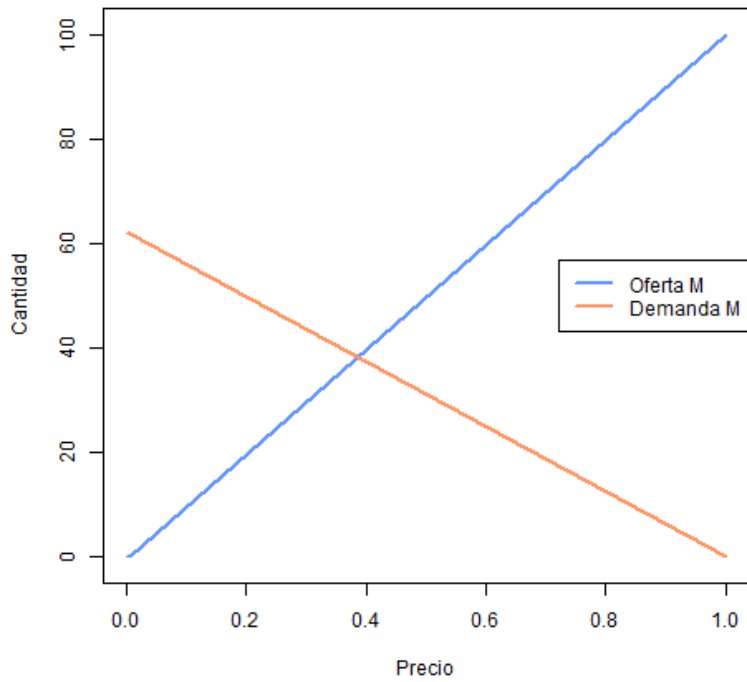
(a) P^* y θ^* del MLS - *CARA*, mujeres (variante 1)



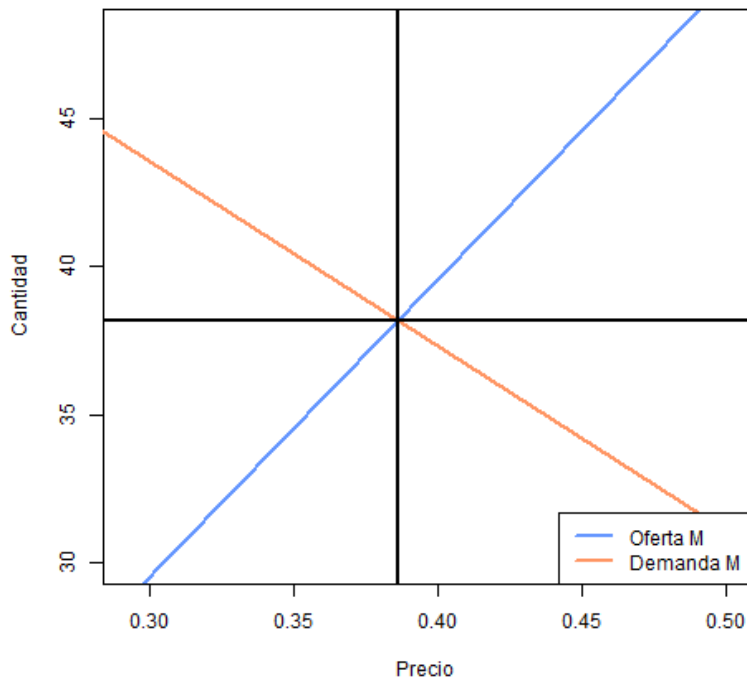
(b) Ampliado

Figura 63: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector femenino (variante 1)

Fuente: Elaboración propia



(a) P^* y θ^* del MLS - *CARA*, mujeres (variante 2)



(b) Ampliado

Figura 64: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector femenino (variante 2)

Fuente: Elaboración propia

En la Figura 65 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para mujeres de la riqueza inicial de $\omega_A = \omega_B = 1$ a $\omega_A = \omega_B = 10$.

En la Figura 66 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para mujeres de la velocidad de convergencia de $\lambda = 0,01$ a $\lambda = 0,1$.

En la Figura 67 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para mujeres de su coeficiente de aversión al riesgo de $\bar{\alpha} = 0,75$ a $\bar{\alpha} = 1,5$.

En la Figura 68 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para mujeres del número de precios por el que pasa el bucle de $np = 30$ a $np = 50$.

En la Figura 69 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para mujeres del número de simulaciones por el que pasa el bucle de $nsimul = 10000$ a $nsimul = 5000$.

En la Figura 70 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para mujeres del límite inferior del algoritmo de optimización por el que pasa el programa de $lower = 0$ a $lower = 25$.

En la Figura 71 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para mujeres del límite superior del algoritmo de optimización por el que pasa el programa de $upper = 100$ a $upper = 150$.

En la Figura 72 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para mujeres del tipo de interés de $r = 0,01$ a $r = 0,3$.

En la Figura 73 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para mujeres del precio inicial de $P_0 = 0,1$ a $P_0 = 1$.

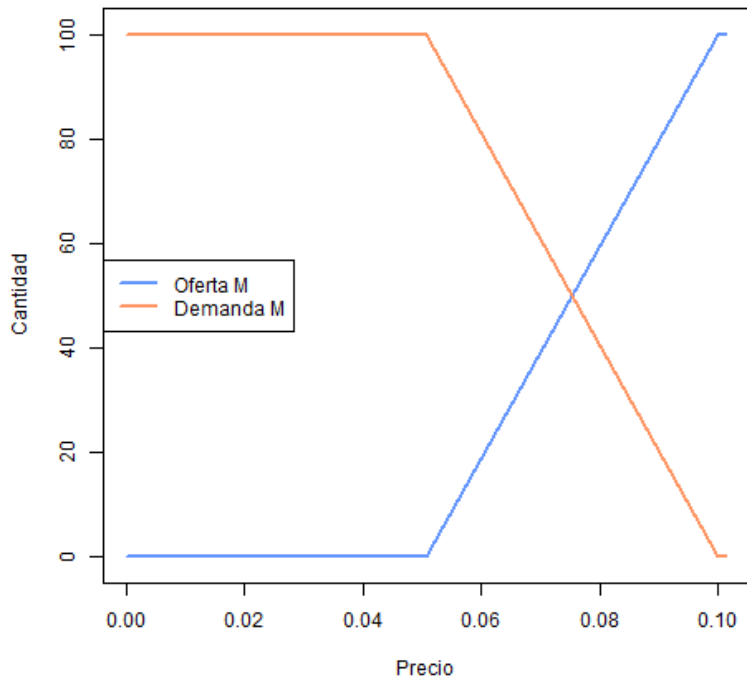
En la Figura 74 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para mujeres de la riqueza inicial de $\omega_A = \omega_B = 1$ a $\omega_A = \omega_B = 10$.

En la Figura 75 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para mujeres de la velocidad de convergencia de $\lambda = 0,01$ a $\lambda = 0,1$.

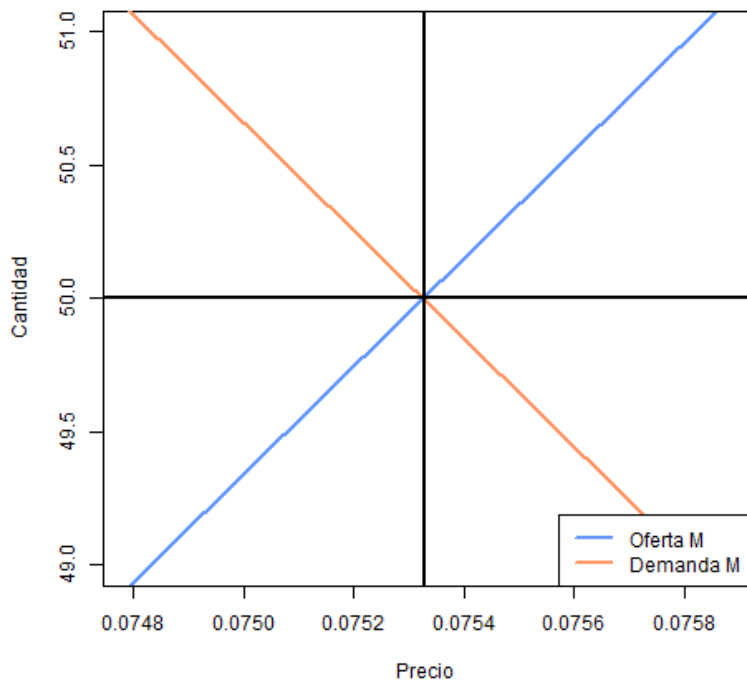
En la Figura 76 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para mujeres de su coeficiente de aversión al riesgo de $\bar{\alpha} = 0,75$ a $\bar{\alpha} = 1,5$.

En la Figura 77 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para mujeres del número de precios por el que pasa el bucle de $np = 30$ a $np = 50$.

En la Figura 78 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para mujeres del número de simulaciones por el que pasa el bucle de $nsimul = 10000$ a $nsimul = 5000$.



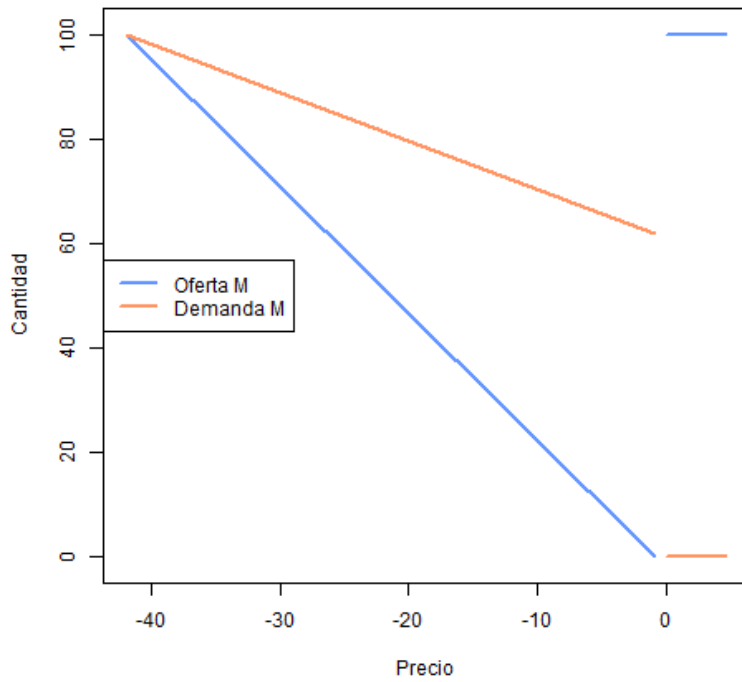
(a) P^* y θ^* del MLS - *CARA*, mujeres (variante 3)



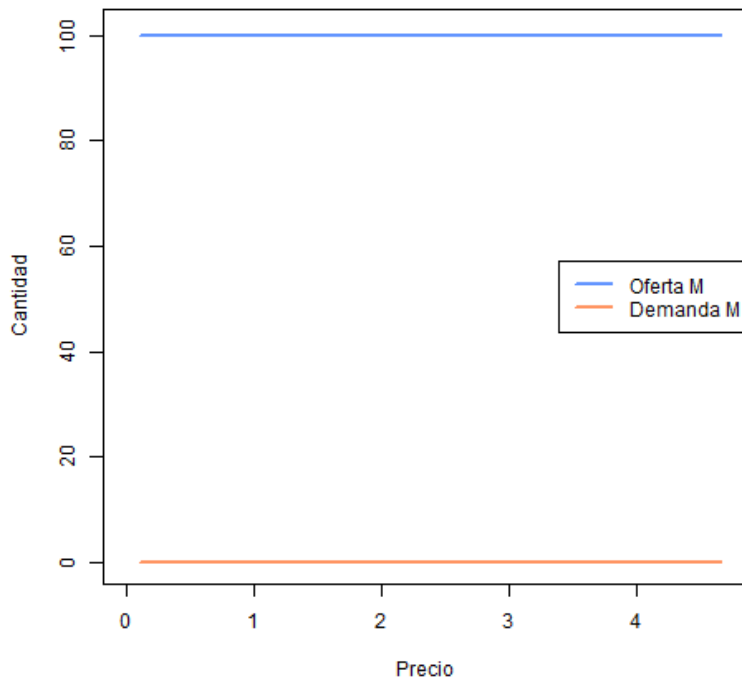
(b) Ampliado

Figura 65: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector femenino (variante 3)

Fuente: Elaboración propia



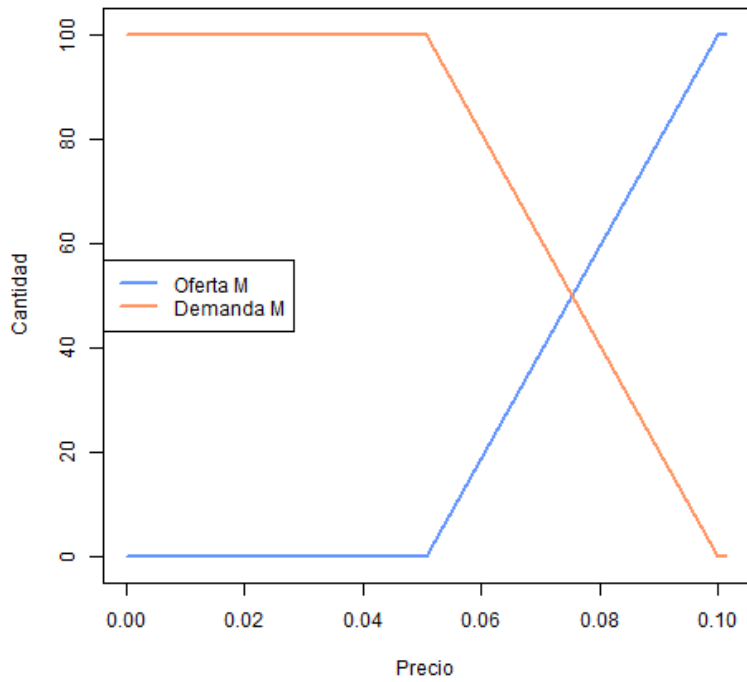
(a) P^* y θ^* del MLS - *CARA*, mujeres (variante 4)



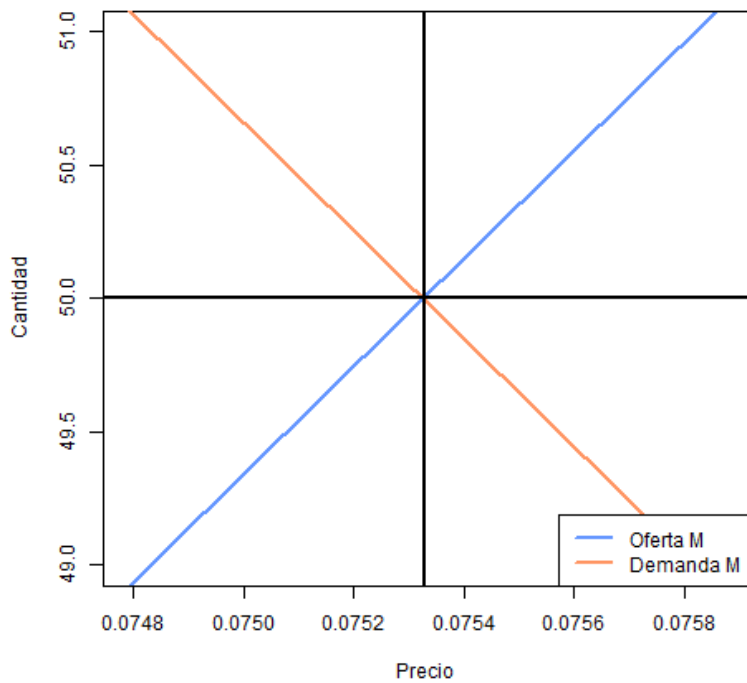
(b) Ampliando la solución *discreta*

Figura 66: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector femenino (variante 4)

Fuente: Elaboración propia



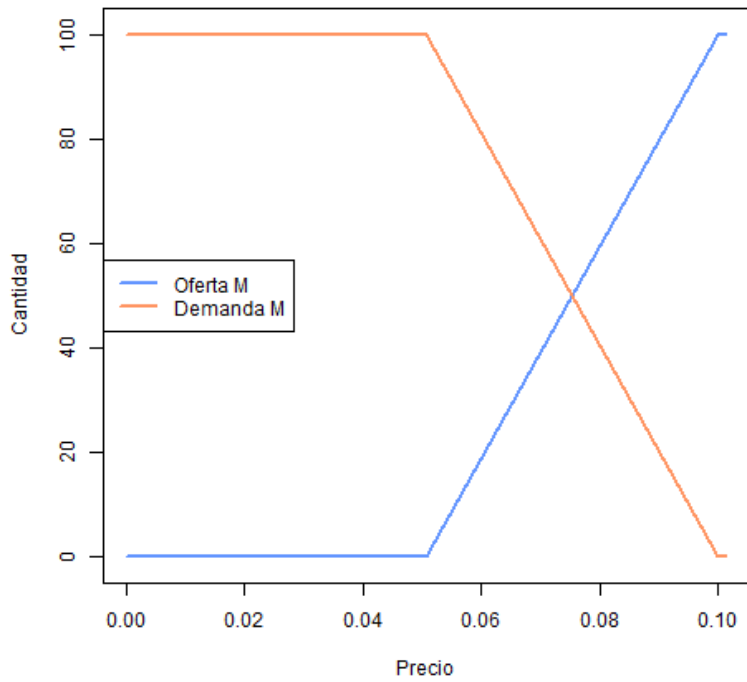
(a) P^* y θ^* del MLS - *CARA*, mujeres (variante 5)



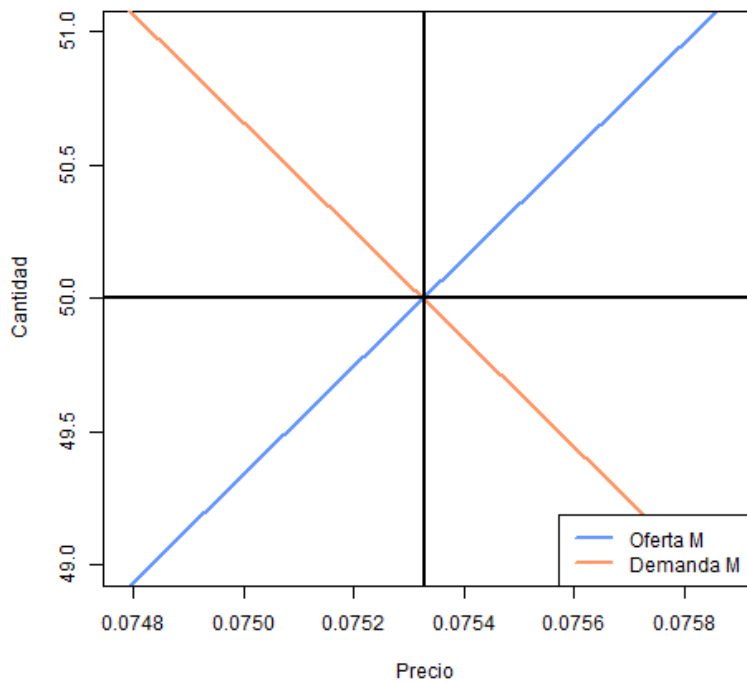
(b) Ampliado

Figura 67: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector femenino (variante 5)

Fuente: Elaboración propia



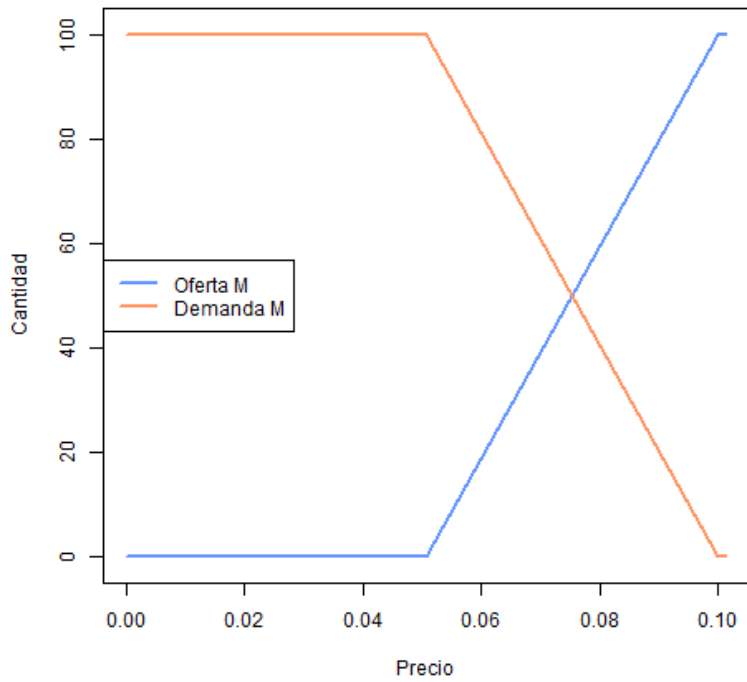
(a) P^* y θ^* del MLS - *CARA*, mujeres (variante 6)



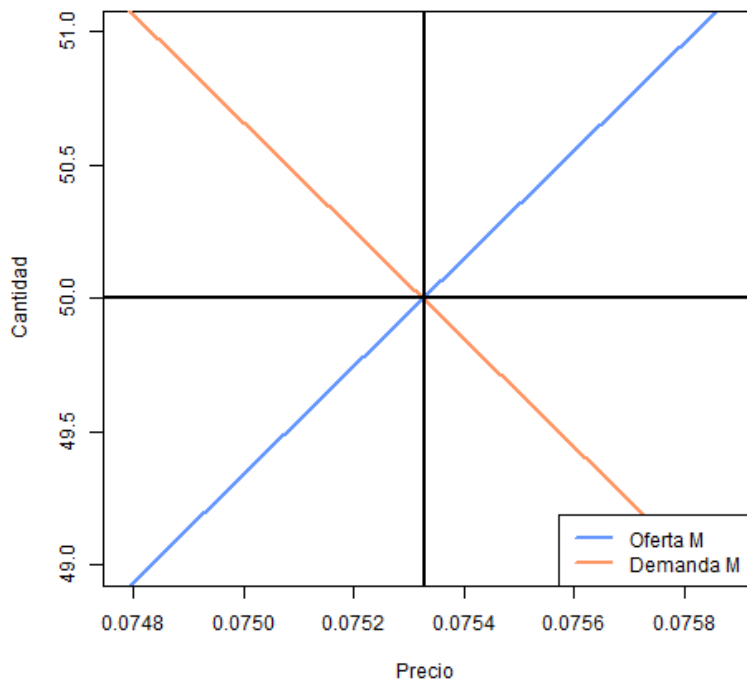
(b) Ampliado

Figura 68: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector femenino (variante 6)

Fuente: Elaboración propia



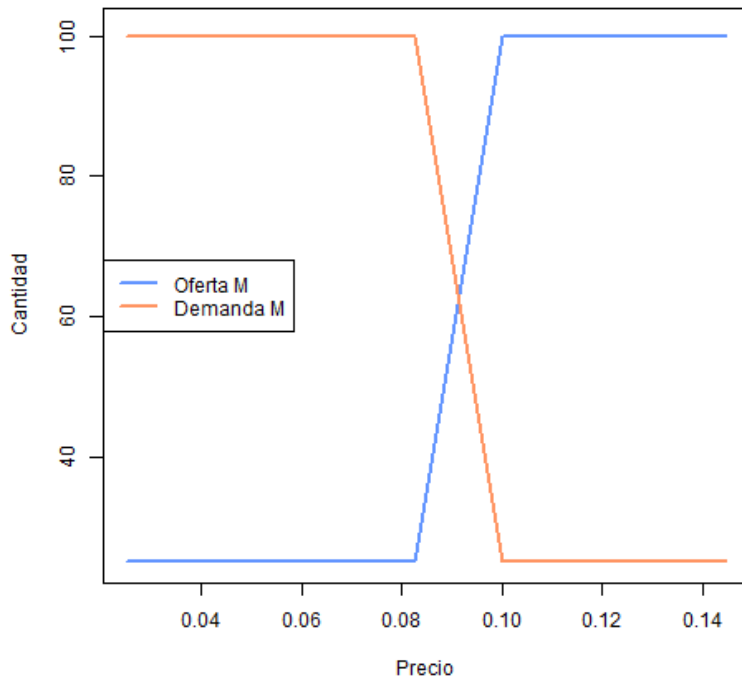
(a) P^* y θ^* del MLS - *CARA*, mujeres (variante 7)



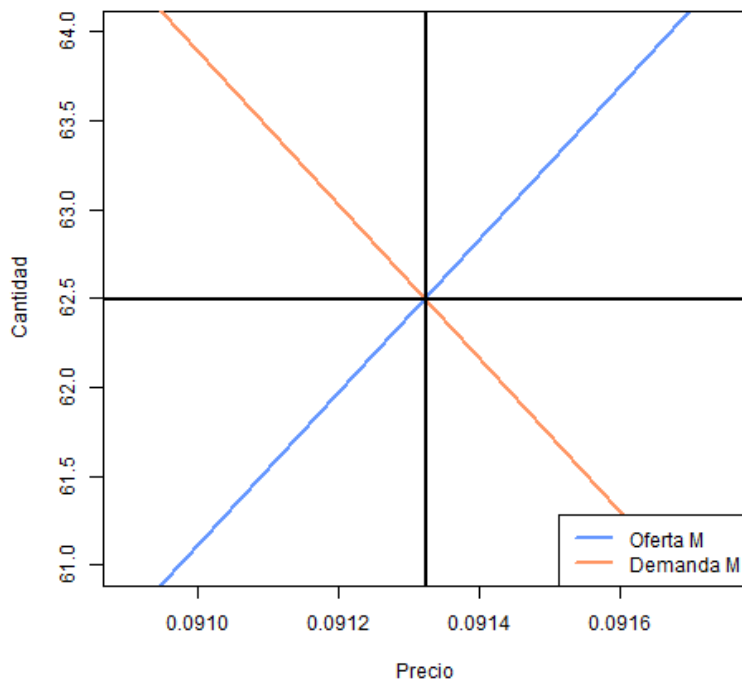
(b) Ampliado

Figura 69: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector femenino (variante 7)

Fuente: Elaboración propia



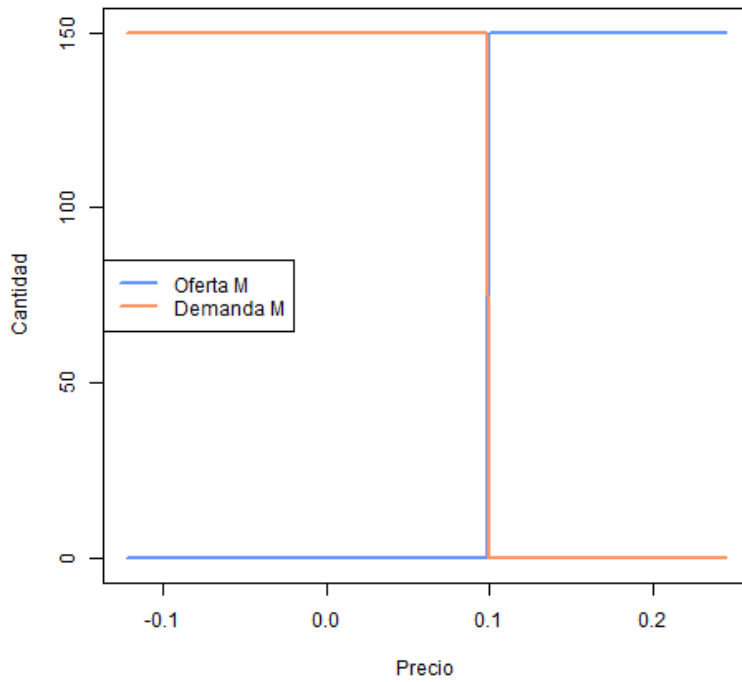
(a) P^* y θ^* del MLS - *CARA*, mujeres (variante 8)



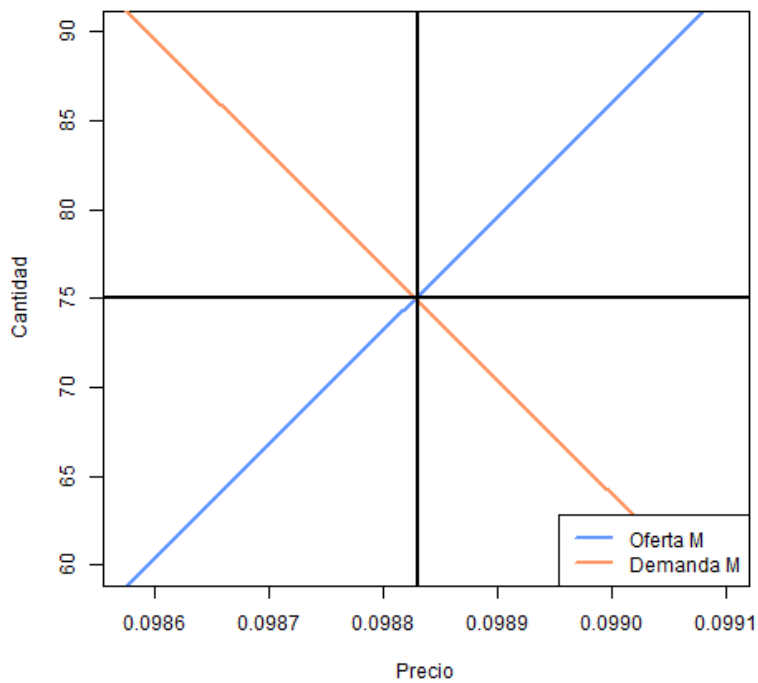
(b) Ampliado

Figura 70: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector femenino (variante 8)

Fuente: Elaboración propia



(a) P^* y θ^* del MLS - *CARA*, mujeres (variante 9)



(b) Ampliado

Figura 71: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector femenino (variante 9)

Fuente: Elaboración propia

```

> Pm12;CmA12;CmB12
[1] 1.509551e-09 1.529239e-09 3.019102e-09 6.038204e-09 1.207641e-08 2.415282e-08 4.830563e-08 9.661126e-08 1.932225e-07
[10] 3.864450e-07 7.728901e-07 1.545780e-06 3.091560e-06 6.183120e-06 1.236624e-05 2.473248e-05 4.946496e-05 9.892992e-05
[19] 1.978598e-04 3.957197e-04 7.914393e-04 1.582879e-03 3.165757e-03 6.331515e-03 1.266303e-02 2.532606e-02 5.065211e-02
[28] 1.000000e-01 1.013042e-01
[1] 8.032737e-09 8.032737e-09 8.032736e-09 8.032735e-09 8.032733e-09 8.032729e-09 8.032720e-09 8.032702e-09 8.032667e-09
[10] 8.032595e-09 8.032453e-09 8.032169e-09 8.031601e-09 8.030464e-09 8.028190e-09 8.023640e-09 8.014537e-09 7.996310e-09
[19] 7.959777e-09 7.886393e-09 7.738344e-09 7.437016e-09 6.812627e-09 5.469760e-09 6.633365e-09 7.489523e-09 9.302363e-09
[28] 1.000000e+02 1.000000e+02
[1] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[10] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[19] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[28] 9.302363e-09 9.302363e-09

```

Figura 72: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector femenino (variante 1)

Fuente: Elaboración propia

```

> Pm13;CmA13;CmB13
[1] 1.509551e-08 2.442505e-08 3.952056e-08 6.394561e-08 1.034662e-07 1.674118e-07 2.708780e-07 4.382898e-07 7.091678e-07
[10] 1.147458e-06 1.856625e-06 3.004083e-06 4.860708e-06 7.864791e-06 1.272550e-05 2.059029e-05 3.331579e-05 5.390608e-05
[19] 8.722188e-05 1.411280e-04 2.283498e-04 3.694778e-04 5.978277e-04 9.673055e-04 1.565133e-03 2.532439e-03 4.097572e-03
[28] 6.630011e-03 1.000000e+00
[1] 8.114984e-09 8.114984e-09 8.114983e-09 8.114982e-09 8.114979e-09 8.114975e-09 8.114969e-09 8.114959e-09 8.114943e-09
[10] 8.114918e-09 8.114876e-09 8.114808e-09 8.114698e-09 8.114521e-09 8.114234e-09 8.113769e-09 8.113017e-09 8.111801e-09
[19] 8.109833e-09 8.106647e-09 8.101493e-09 8.093150e-09 8.079646e-09 8.057781e-09 8.013400e-09 7.920504e-09 7.769750e-09
[28] 7.524658e-09 1.000000e+02
[1] 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01
[10] 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01
[19] 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01 6.180340e+01
[28] 6.180340e+01 9.302363e-09

```

Figura 73: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector femenino (variante 2)

Fuente: Elaboración propia

```

> Pm14;CmA14;CmB14
[1] 1.509551e-09 1.529239e-09 3.019102e-09 6.038204e-09 1.207641e-08 2.415282e-08 4.830563e-08 9.661126e-08 1.932225e-07
[10] 3.864450e-07 7.728901e-07 1.545780e-06 3.091560e-06 6.183120e-06 1.236624e-05 2.473248e-05 4.946496e-05 9.892992e-05
[19] 1.978598e-04 3.957197e-04 7.914393e-04 1.582879e-03 3.165757e-03 6.331515e-03 1.266303e-02 2.532606e-02 5.065211e-02
[28] 1.000000e-01 1.013042e-01
[1] 8.032737e-09 8.032737e-09 8.032736e-09 8.032735e-09 8.032734e-09 8.032731e-09 8.032724e-09 8.032711e-09 8.032684e-09
[10] 8.032631e-09 8.032525e-09 8.032312e-09 8.031887e-09 8.031036e-09 8.029335e-09 8.025931e-09 8.019121e-09 8.005490e-09
[19] 7.978183e-09 7.923393e-09 7.813098e-09 7.589607e-09 7.130693e-09 6.162255e-09 8.963894e-09 8.525452e-09 8.318399e-09
[28] 1.000000e+02 1.000000e+02
[1] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[10] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[19] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[28] 9.302363e-09 9.302363e-09

```

Figura 74: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector femenino (variante 3)

Fuente: Elaboración propia

```

[1] "CANTIDAD MUJERES"
[1] 100
[1] "PRECIO MUJERES"
[1] -41.96075

```

(a) Solución *continua* de P^* y θ^* del MLS - *CARA*, mujeres (variante 4)

```

> Pm15;CmA15;CmB15
[1] -41.960753 -0.900000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000
[12] 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000
[23] 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.100000 4.662306
[1] 1.000000e+02 5.155291e-09 NA NA NA NA NA NA NA NA
[10] NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA
[19] NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA
[28] 1.000000e+02 1.000000e+02 NA NA NA NA NA NA NA NA
[1] 1.000000e+02 6.180340e+01 NA NA NA NA NA NA NA NA
[10] NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA
[19] NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA
[28] 9.302363e-09 6.580474e-09

```

(b) Resultados de la solución *continua*

Figura 75: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector femenino (variante 4)

Fuente: Elaboración propia

```

> Pm16;CmA16;CmB16
[1] 1.509551e-09 1.529239e-09 3.019102e-09 6.038204e-09 1.207641e-08 2.415282e-08 4.830563e-08
[8] 9.661126e-08 1.932225e-07 3.864450e-07 7.728901e-07 1.545780e-06 3.091560e-06 6.183120e-06
[15] 1.236624e-05 2.473248e-05 4.946496e-05 9.892992e-05 1.978598e-04 3.957197e-04 7.914393e-04
[22] 1.582879e-03 3.165757e-03 6.331514e-03 1.266303e-02 2.532606e-02 5.065211e-02 1.000000e-01
[29] 1.013042e-01
[1] 8.455939e-09 8.455939e-09 8.455938e-09 8.455937e-09 8.455934e-09 8.455928e-09 8.455917e-09
[8] 8.455895e-09 8.455850e-09 8.455761e-09 8.455582e-09 8.455224e-09 8.454509e-09 8.453079e-09
[15] 8.450219e-09 8.444496e-09 8.433047e-09 8.410130e-09 8.364221e-09 8.272104e-09 8.086666e-09
[22] 7.509447e-09 6.260882e-09 8.592635e-09 8.318425e-09 5.262964e-09 7.548336e-09 1.000000e+02
[29] 1.000000e+02
[1] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[8] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[15] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[22] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 9.302363e-09
[29] 9.302363e-09

```

Figura 76: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector femenino (variante 5)

Fuente: Elaboración propia

```

> Pm17;CmA17;CmB17
[1] 1.509551e-09 1.529239e-09 3.019102e-09 3.058478e-09 6.038204e-09 6.116956e-09 1.207641e-08 1.223391e-08 2.415282e-08
[10] 2.446782e-08 4.830563e-08 4.893565e-08 9.661126e-08 9.787130e-08 1.932225e-07 1.957426e-07 3.864450e-07 3.914852e-07
[19] 7.728901e-07 7.829703e-07 1.545780e-06 1.565941e-06 3.091560e-06 3.131881e-06 6.183120e-06 6.263762e-06 1.236624e-05
[28] 1.252752e-05 2.473248e-05 2.505505e-05 4.946496e-05 5.011010e-05 9.892992e-05 1.002202e-04 1.978598e-04 2.004404e-04
[37] 3.957197e-04 4.008808e-04 7.914393e-04 8.017615e-04 1.582879e-03 1.603523e-03 3.165757e-03 6.331515e-03 1.266303e-02
[46] 2.532606e-02 5.065211e-02 1.000000e-01 1.013042e-01
[1] 8.032737e-09 8.032737e-09 8.032737e-09 8.032737e-09 8.032736e-09 8.032736e-09 8.032734e-09 8.032734e-09 8.032731e-09
[10] 8.032731e-09 8.032724e-09 8.032724e-09 8.032711e-09 8.032711e-09 8.032684e-09 8.032684e-09 8.032631e-09 8.032630e-09
[19] 8.032525e-09 8.032522e-09 8.032312e-09 8.032307e-09 8.031887e-09 8.031876e-09 8.031036e-09 8.031014e-09 8.029335e-09
[28] 8.029290e-09 8.025931e-09 8.025842e-09 8.019121e-09 8.018943e-09 8.005490e-09 8.005134e-09 7.978183e-09 7.977470e-09
[37] 7.923393e-09 7.921961e-09 7.813098e-09 7.810208e-09 7.589607e-09 7.583725e-09 7.130693e-09 6.162255e-09 8.963894e-09
[46] 8.525452e-09 8.318399e-09 1.000000e+02 1.000000e+02
[1] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[10] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[19] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[28] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[37] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[46] 1.000000e+02 1.000000e+02 9.302363e-09 9.302363e-09

```

Figura 77: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector femenino (variante 6)

Fuente: Elaboración propia

```

> Pm18;CmA18;CmB18
[1] 1.509551e-09 1.529239e-09 3.019102e-09 6.038204e-09 1.207641e-08 2.415282e-08 4.830563e-08 9.661126e-08 1.932225e-07
[10] 3.864450e-07 7.728901e-07 1.545780e-06 3.091560e-06 6.183120e-06 1.236624e-05 2.473248e-05 4.946496e-05 9.892992e-05
[19] 1.978598e-04 3.957197e-04 7.914393e-04 1.582879e-03 3.165757e-03 6.331515e-03 1.266303e-02 2.532606e-02 5.065211e-02
[28] 1.000000e-01 1.013042e-01
[1] 8.032737e-09 8.032737e-09 8.032737e-09 8.032736e-09 8.032734e-09 8.032731e-09 8.032724e-09 8.032711e-09 8.032684e-09
[10] 8.032631e-09 8.032525e-09 8.032312e-09 8.031887e-09 8.031036e-09 8.029335e-09 8.025931e-09 8.019121e-09 8.005490e-09
[19] 7.978183e-09 7.923393e-09 7.813098e-09 7.589607e-09 7.130693e-09 6.162255e-09 8.963894e-09 8.525452e-09 8.318399e-09
[28] 1.000000e+02 1.000000e+02
[1] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[10] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[19] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[28] 9.302363e-09 9.302363e-09

```

Figura 78: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector femenino (variante 7)

Fuente: Elaboración propia

En la Figura 79 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para mujeres del límite inferior del algoritmo de optimización por el que pasa el programa de $lower = 0$ a $lower = 25$.

```
> Pm19;CmA19;CmB19
[1] 0.02500000 0.02564545 0.02630757 0.02698678 0.03349610 0.03436090 0.03524803 0.03615807 0.04375000 0.04487954 0.04603824
[12] 0.04722686 0.05861817 0.06013158 0.06168405 0.06327661 0.07656251 0.07853920 0.08056692 0.08264700 0.10000000 0.10258180
[23] 0.10523026 0.10794709 0.11073407 0.13398438 0.13744359 0.14099211 0.14463225
[1] 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25
[1] 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100 100
```

Figura 79: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector femenino (variante 8)

Fuente: Elaboración propia

En la Figura 80 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CARA* para mujeres del límite superior del algoritmo de optimización por el que pasa el programa de $upper = 100$ a $upper = 150$.

```
> Pm20;CmA20;CmB20
[1] -0.12207026 -0.11920875 -0.11641452 -0.07812498 -0.07629361 -0.07450531 -0.07275895 -0.05000000 0.02500000 0.03637947
[11] 0.03725265 0.03814680 0.03906249 0.05820717 0.05960425 0.06103490 0.06249999 0.09094868 0.09313163 0.09536701
[21] 0.09765622 0.10000000 0.14551792 0.14901063 0.15258724 0.15624998 0.23282906 0.23841751 0.24414054
[1] 8.051710e-09 6.264701e-09 9.426902e-09 7.677125e-09 7.359720e-09 7.042674e-09 6.726069e-09 7.139871e-09 7.774659e-09
[10] 5.798235e-09 5.421016e-09 5.022755e-09 9.568828e-09 5.930363e-09 5.520971e-09 5.068740e-09 9.534048e-09 8.623764e-09
[19] 8.623764e-09 8.623764e-09 8.623764e-09 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02
[28] 1.500000e+02 1.500000e+02
[1] 1.499999e+02 1.499999e+02 1.499999e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02
[10] 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02
[19] 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 8.623764e-09 7.083292e-09 7.808395e-09 8.432204e-09 7.400573e-09 7.967380e-09
[28] 9.681860e-09 6.055774e-09
```

Figura 80: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CARA* para el sector femenino (variante 9)

Fuente: Elaboración propia

F.2.5. *CRRA* Hombres

En la Figura 81 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CRRA* para hombres del tipo de interés de $r = 0,01$ a $r = 0,3$.

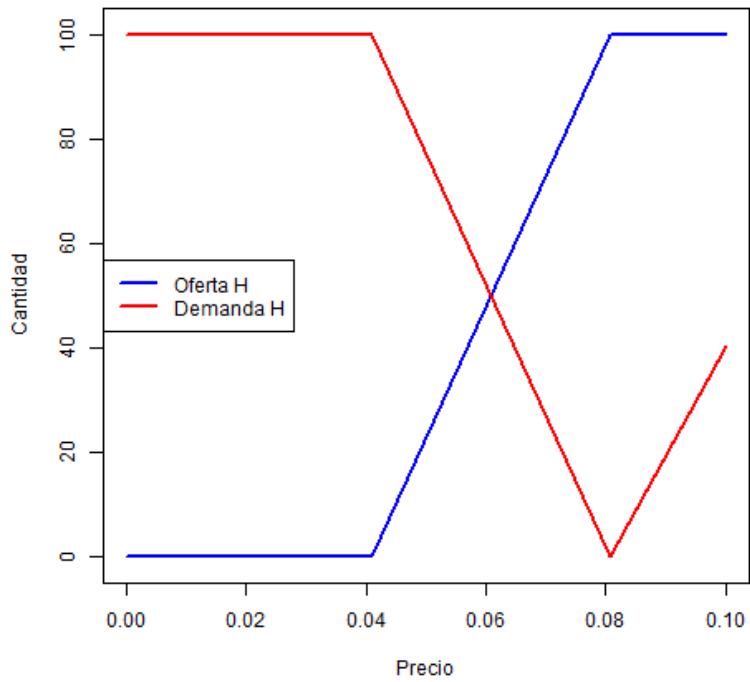
En la Figura 82 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CRRA* para hombres del precio inicial de $P_0 = 0,1$ a $P_0 = 1$.

En la Figura 83 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CRRA* para hombres de la riqueza inicial de $\omega_A = \omega_B = 1$ a $\omega_A = \omega_B = 10$.

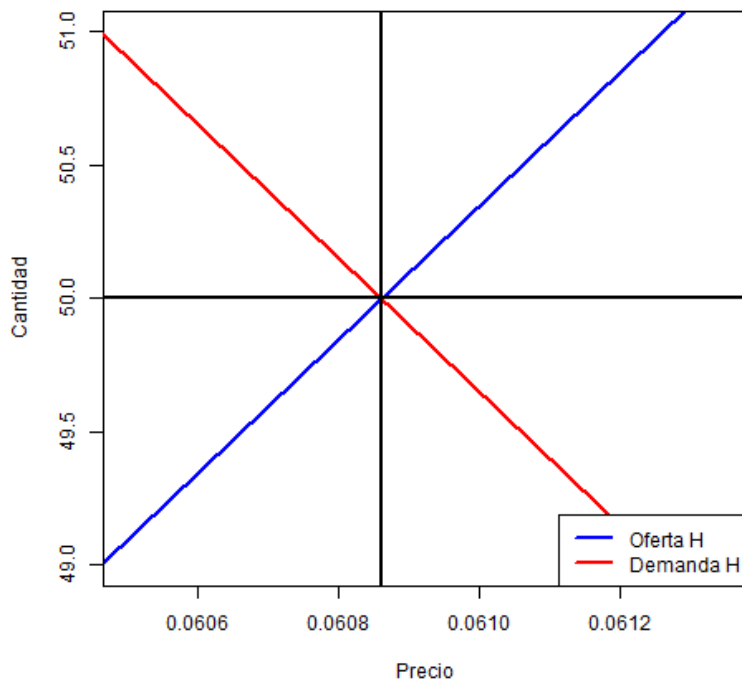
En la Figura 84 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CRRA* para hombres de la velocidad de convergencia de $\lambda = 0,01$ a $\lambda = 0,1$.

En la Figura 85 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CRRA* para hombres del número de precios por el que pasa el bucle de $np = 30$ a $np = 50$.

En la Figura 86 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CRRA* para hombres del número de simulaciones por el que pasa el bucle de $nsimul = 10000$ a $nsimul = 5000$.



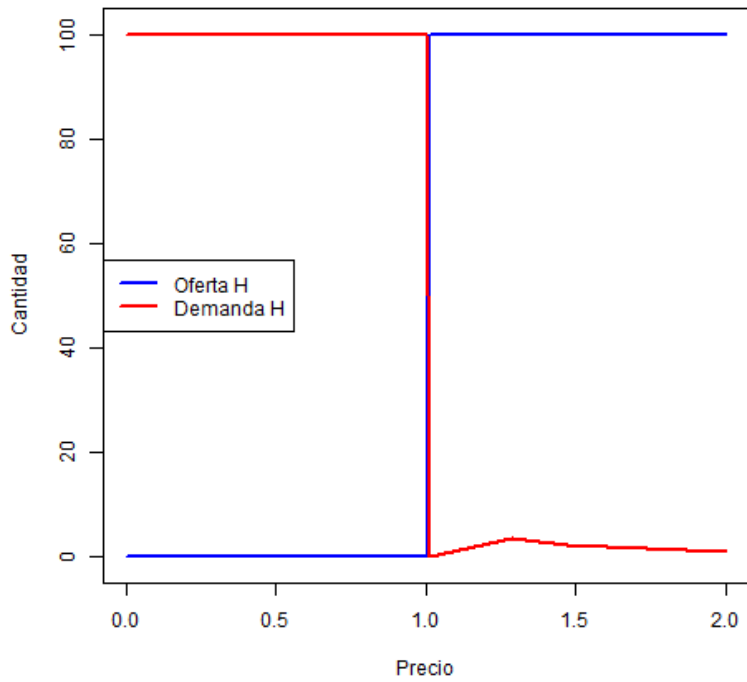
(a) P^* y θ^* del MLS - *CRRA*, hombres (variante 1)



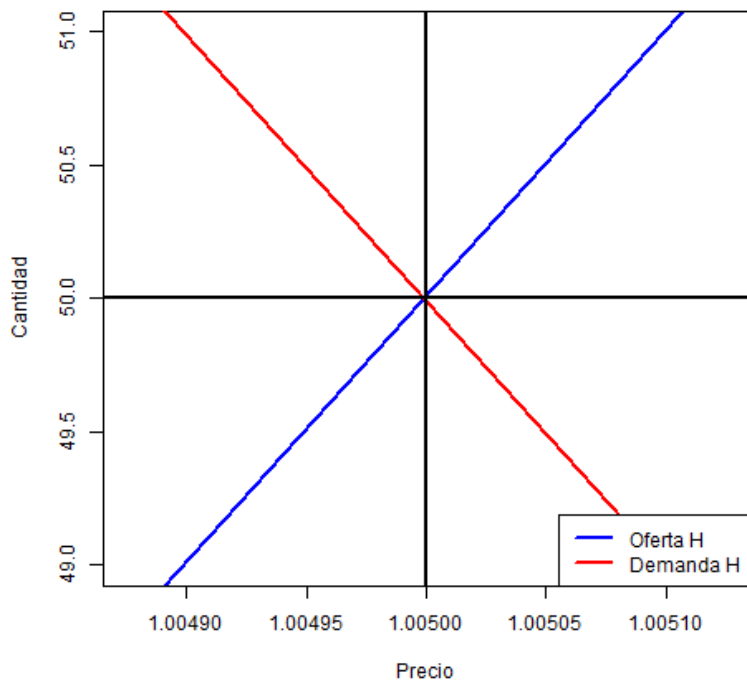
(b) Ampliado

Figura 81: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector masculino (variante 1)

Fuente: Elaboración propia



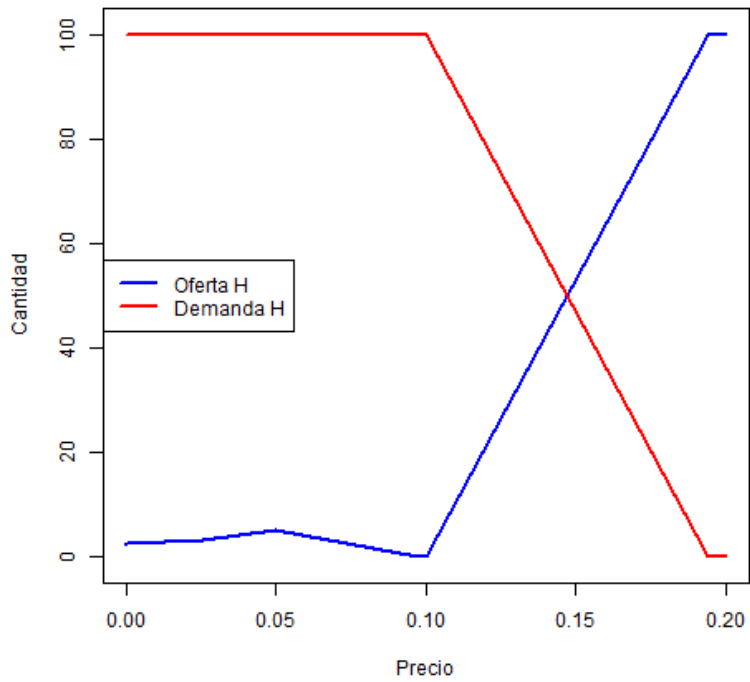
(a) P^* y θ^* del MLS - *CRRA*, hombres (variante 2)



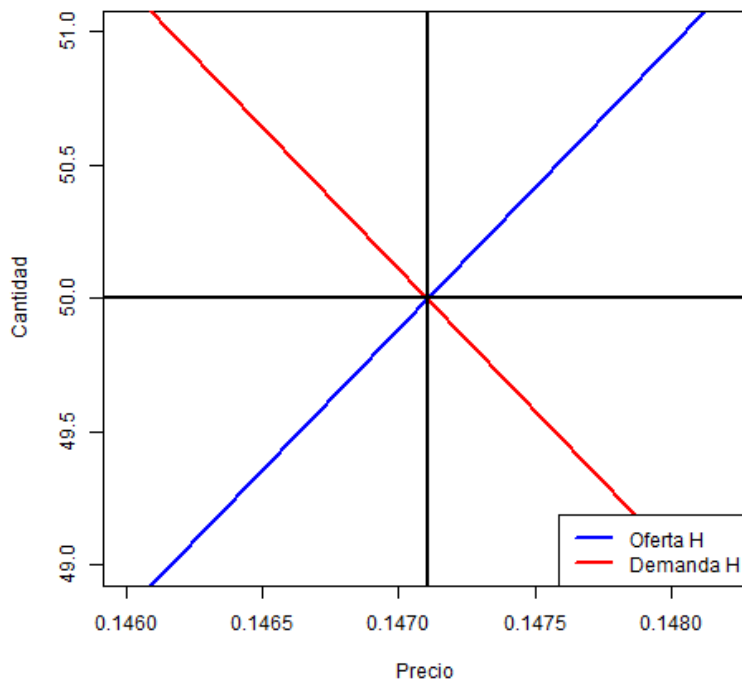
(b) Ampliado

Figura 82: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector masculino (variante 2)

Fuente: Elaboración propia



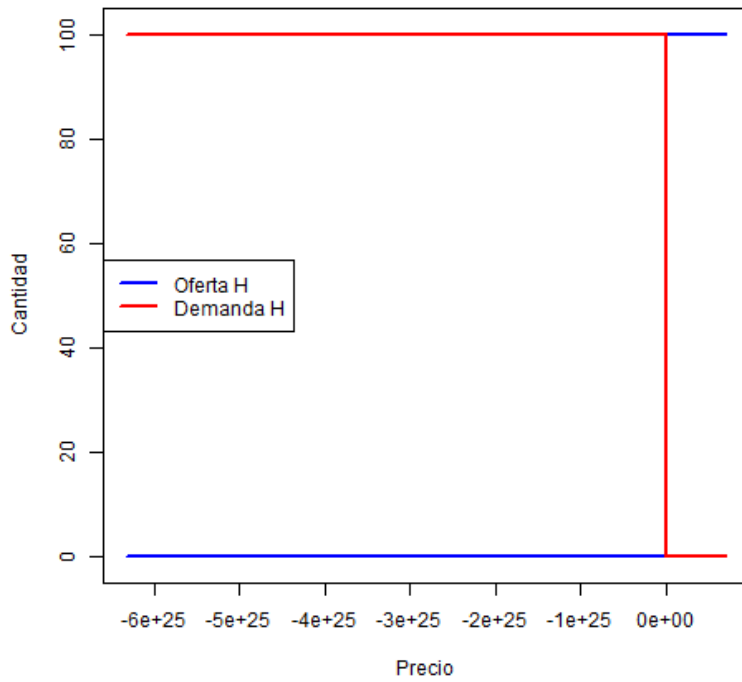
(a) P^* y θ^* del MLS - *CRRA*, hombres (variante 3)



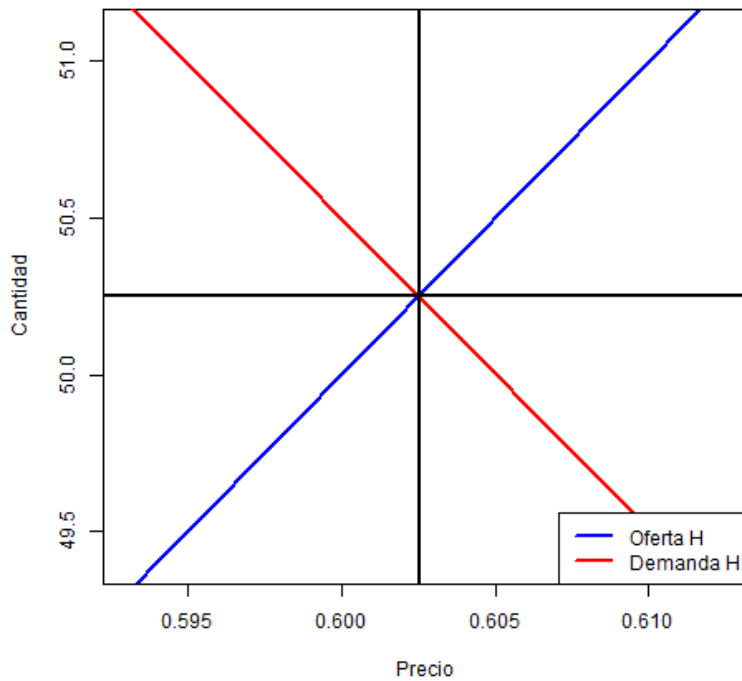
(b) Ampliado

Figura 83: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector masculino (variante 3)

Fuente: Elaboración propia



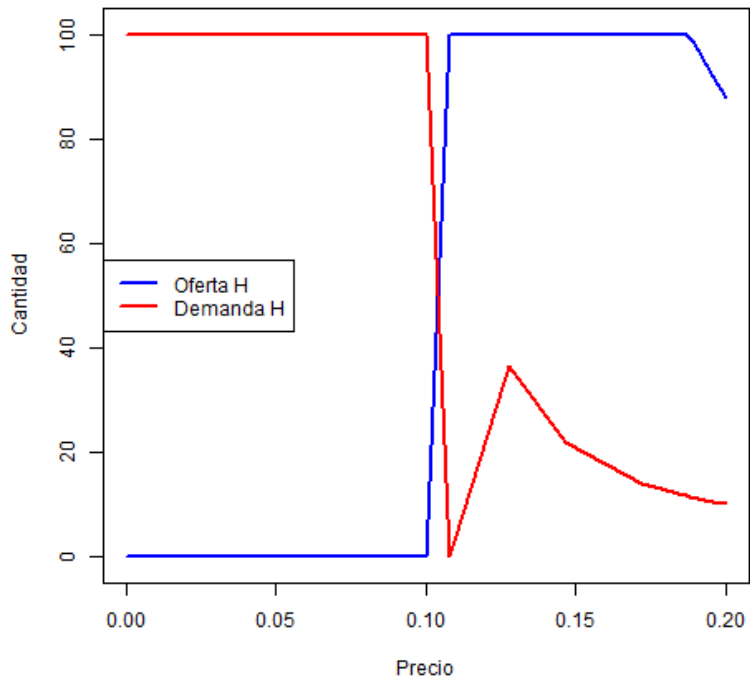
(a) P^* y θ^* del MLS - *CRRA*, hombres (variante 4)



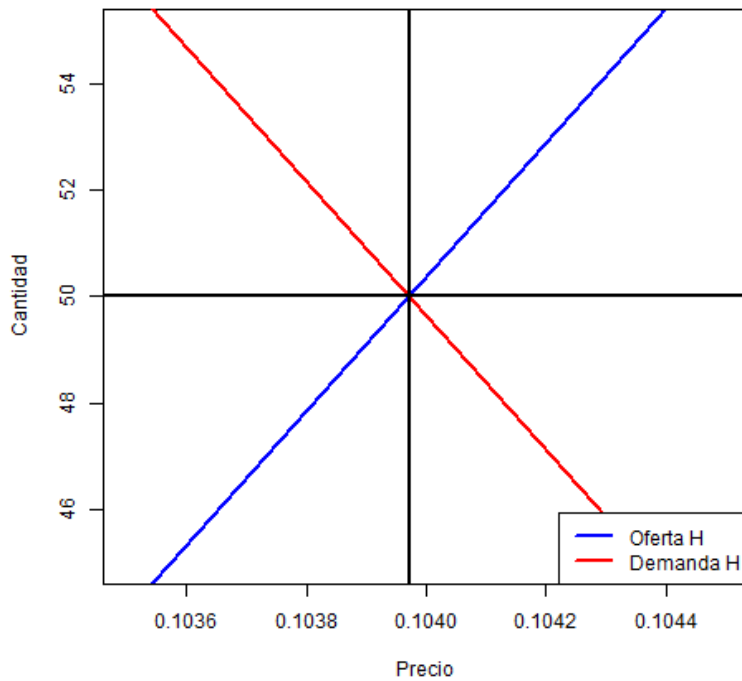
(b) Ampliado

Figura 84: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector masculino (variante 4)

Fuente: Elaboración propia



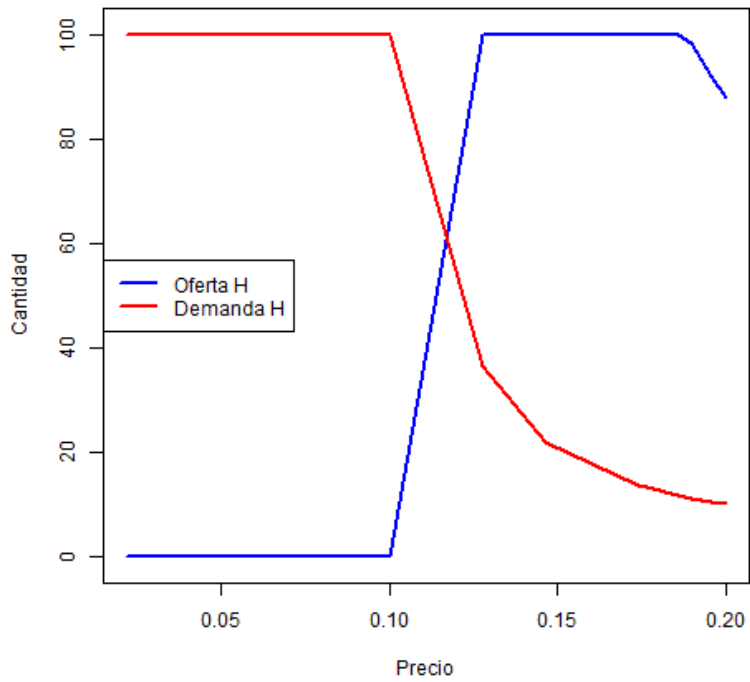
(a) P^* y θ^* del MLS - *CRRA*, hombres (variante 6)



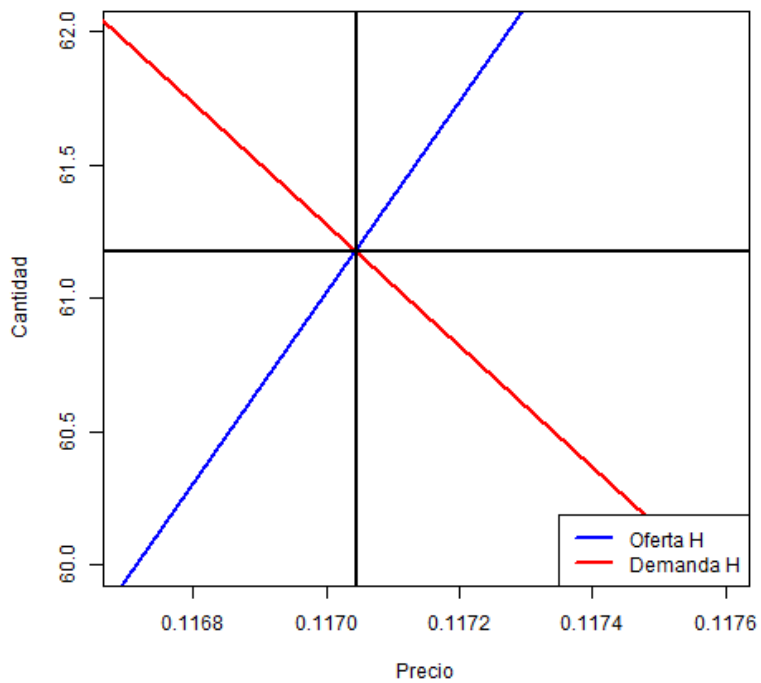
(b) Ampliado

Figura 85: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector masculino (variante 6)

Fuente: Elaboración propia



(a) P^* y θ^* del MLS - *CRRA*, hombres (variante 7)



(b) Ampliado

Figura 86: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector masculino (variante 7)

Fuente: Elaboración propia

En la Figura 87 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CRRA* para hombres del límite inferior del algoritmo de optimización por el que pasa el programa de $lower = 0$ a $lower = 25$.

En la Figura 88 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CRRA* para hombres del límite superior del algoritmo de optimización por el que pasa el programa de $upper = 100$ a $upper = 150$.

En la Figura 89 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CRRA* para hombres del tipo de interés de $r = 0,01$ a $r = 0,3$.

En la Figura 90 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CRRA* para hombres del precio inicial de $P_0 = 0,1$ a $P_0 = 1$.

En la Figura 91 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CRRA* para hombres de la riqueza inicial de $\omega_A = \omega_B = 1$ a $\omega_A = \omega_B = 10$.

En la Figura 92 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CRRA* para hombres de la velocidad de convergencia de $\lambda = 0,01$ a $\lambda = 0,1$.

En la Figura 93 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CRRA* para hombres de su coeficiente de aversión al riesgo de $\gamma = 2$ a $\gamma = 5$.

En la Figura 94 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CRRA* para hombres del número de precios por el que pasa el bucle de $np = 30$ a $np = 50$.

En la Figura 95 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CRRA* para hombres del número de simulaciones por el que pasa el bucle de $nsimul = 10000$ a $nsimul = 5000$.

En la Figura 96 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CRRA* para hombres del límite inferior del algoritmo de optimización por el que pasa el programa de $lower = 0$ a $lower = 25$.

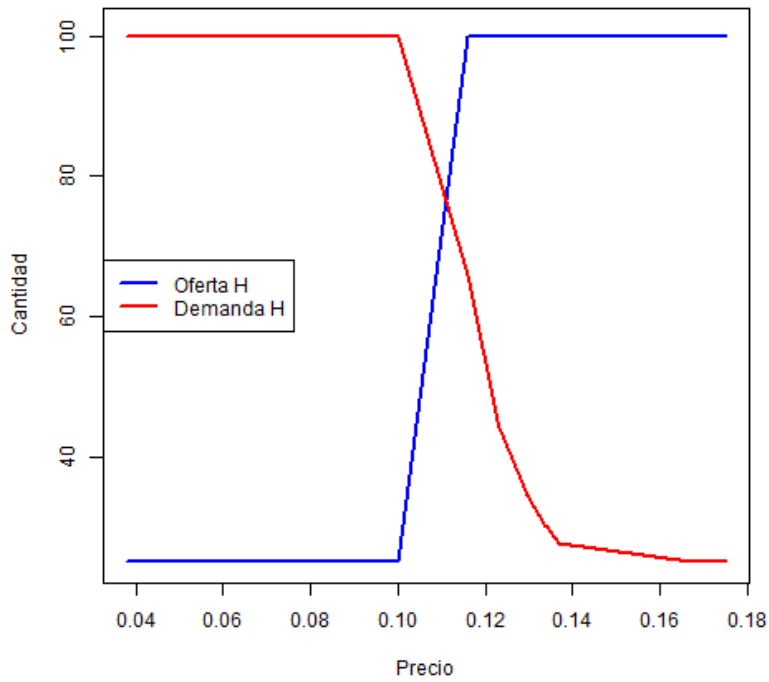
En la Figura 97 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CRRA* para hombres del límite superior del algoritmo de optimización por el que pasa el programa de $upper = 100$ a $upper = 150$.

F.2.6. *CRRA* Mujeres

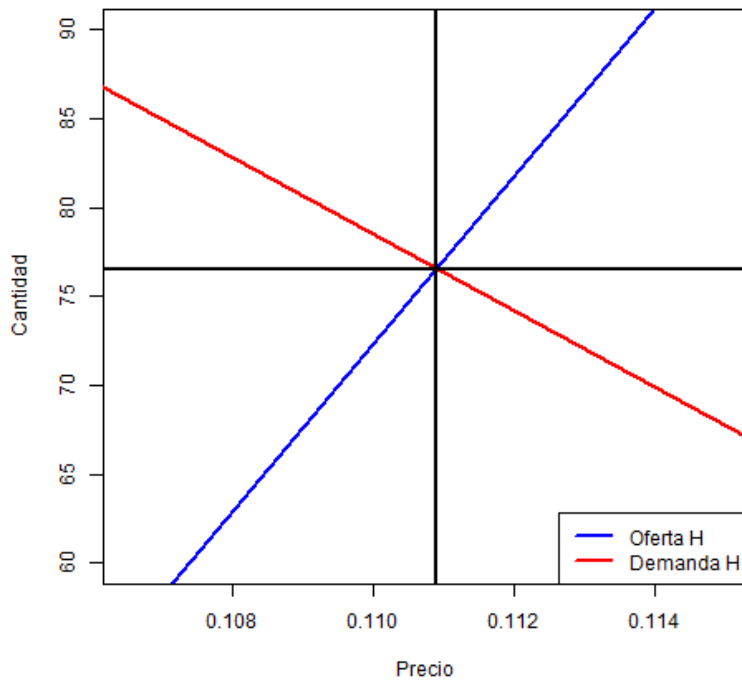
En la Figura 98 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CRRA* para mujeres del tipo de interés de $r = 0,01$ a $r = 0,3$.

En la Figura 99 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CRRA* para mujeres del precio inicial de $P_0 = 0,1$ a $P_0 = 1$.

En la Figura 100 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CRRA*



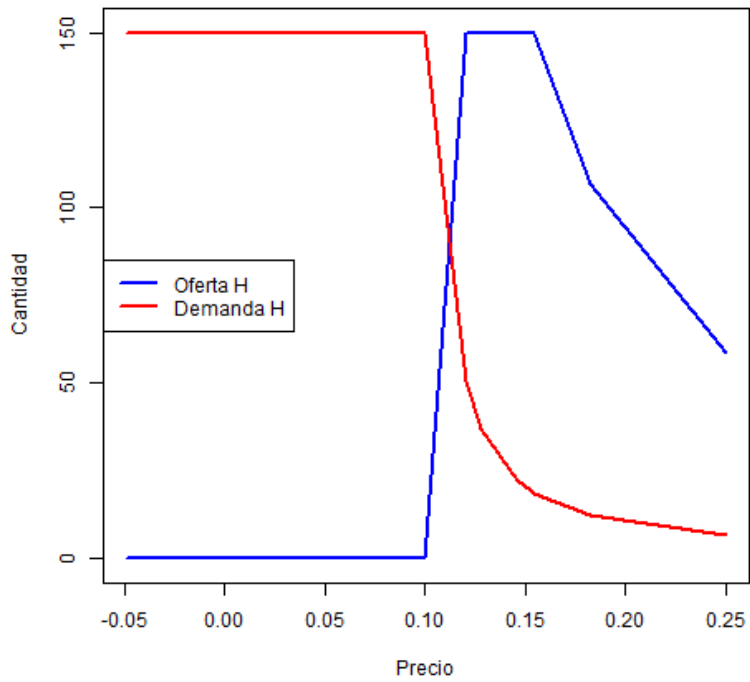
(a) P^* y θ^* del MLS - *CRRA*, hombres (variante 8)



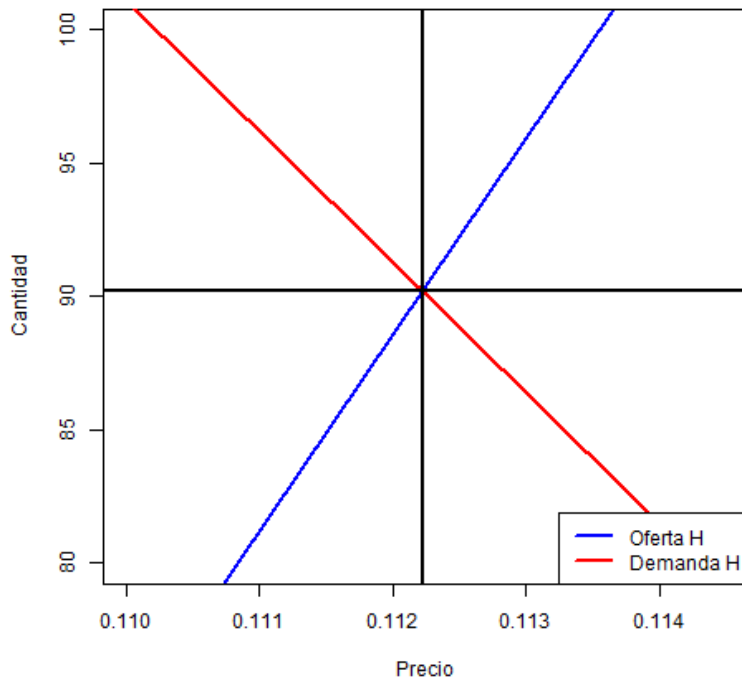
(b) Ampliado

Figura 87: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector masculino (variante 8)

Fuente: Elaboración propia



(a) P^* y θ^* del MLS - *CRRA*, hombres (variante 9)



(b) Ampliado

Figura 88: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector masculino (variante 9)

Fuente: Elaboración propia

```

> Ph22;ChA22;ChB22
[1] 1.219673e-09 2.439346e-09 4.878692e-09 9.757385e-09 1.951477e-08 3.902954e-08 7.805907e-08
[8] 1.561181e-07 3.122363e-07 6.244726e-07 1.248945e-06 2.497890e-06 4.995780e-06 9.991560e-06
[15] 1.998312e-05 3.996624e-05 7.993248e-05 1.598650e-04 3.197299e-04 6.394598e-04 1.278920e-03
[22] 2.557839e-03 5.115678e-03 1.023136e-02 2.046271e-02 4.039854e-02 4.092543e-02 8.079707e-02
[29] 1.000000e-01
[1] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[8] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[15] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[22] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 1.000000e+02
[29] 1.000000e+02
[1] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[8] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[15] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[22] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 9.302363e-09
[29] 4.039854e+01

```

Figura 89: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector masculino (variante 1)
Fuente: Elaboración propia

```

> Ph23;ChA23;ChB23
[1] 1.524644e-08 3.049289e-08 6.098577e-08 1.219715e-07 2.439431e-07 4.878862e-07 9.757723e-07
[8] 1.951545e-06 2.009827e-02 3.156245e-02 4.019654e-02 4.596561e-02 6.312491e-02 8.039307e-02
[15] 9.193123e-02 1.262498e-01 1.607861e-01 1.838625e-01 2.524996e-01 3.215723e-01 3.677249e-01
[22] 5.049992e-01 6.431446e-01 7.354498e-01 1.000000e+00 1.009998e+00 1.286289e+00 1.470900e+00
[29] 2.000000e+00
[1] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[8] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[15] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[22] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[29] 1.000000e+02
[1] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[8] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[15] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[22] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 9.302363e-09 3.573504e+00 2.145790e+00
[29] 1.004912e+00

```

Figura 90: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector masculino (variante 2)
Fuente: Elaboración propia

```

> Ph24;ChA24;ChB24
[1] 4.053195e-09 8.004134e-09 1.580547e-08 3.121087e-08 6.163423e-08 1.217088e-07 2.403388e-07
[8] 4.746016e-07 9.372789e-07 1.851009e-06 3.655190e-06 7.218123e-06 1.426048e-05 2.819002e-05
[15] 5.567248e-05 1.098553e-04 2.170164e-04 4.283608e-04 8.454074e-04 1.670132e-03 3.298371e-03
[22] 6.512376e-03 1.285052e-02 2.532883e-02 4.983353e-02 9.710513e-02 1.000000e-01 1.942103e-01
[29] 2.000000e-01
[1] 2.522840e+00 2.533635e+00 2.531239e+00 2.523196e+00 2.530440e+00 2.529747e+00 2.528066e+00
[8] 2.512487e+00 2.512499e+00 2.529790e+00 2.524038e+00 2.435009e+00 2.320702e+00 2.509984e+00
[15] 2.675791e+00 2.452420e+00 2.613642e+00 2.641294e+00 2.446437e+00 2.508412e+00 2.557809e+00
[22] 2.675469e+00 2.896360e+00 3.253753e+00 5.140965e+00 9.302363e-09 9.302363e-09 1.000000e+02
[29] 1.000000e+02
[1] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[8] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[15] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[22] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 8.734970e-09
[29] 6.968588e-09

```

Figura 91: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector masculino (variante 3)
Fuente: Elaboración propia

```

> Ph25;ChA25;ChB25
[1] -6.324547e+25 -7.808083e+23 -9.639610e+21 -1.190075e+20 -1.469229e+18 -1.813863e+16
[7] -2.239337e+14 -2.764614e+12 -3.413104e+10 -4.213708e+08 -5.202109e+06 -6.422358e+04
[13] -7.928850e+02 -9.789940e+00 1.000000e-01 1.100000e+00 8.810945e+01 7.135964e+03
[19] 5.780122e+05 4.681898e+07 3.792337e+09 3.071793e+11 2.488152e+13 2.015403e+15
[25] 1.632477e+17 1.322306e+19 1.071068e+21 8.675648e+22 7.027275e+24
[1] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[8] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[15] 9.302363e-09 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[22] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[29] 1.000000e+02
[1] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[8] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[15] 1.000000e+02 1.000546e+00 1.136248e-02 1.401373e-04 1.733001e-06 2.435390e-08 9.302363e-09
[22] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[29] 9.302363e-09

```

Figura 92: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector masculino (variante 4)

Fuente: Elaboración propia

```

[1] "CANTIDAD HOMBRES"
[1] 100
[1] "PRECIO HOMBRES"
[1] 0.1

```

(a) Óptimo - *CRRA*, hombres (variante 5)

```

[1] 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
[24] 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.1
[1] NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA
[24] NA NA NA NA NA NA 100
[1] NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA
[24] NA NA NA NA NA NA 100

```

(b) P^* y θ^* del MLS - *CRRA*, hombres (variante 5)

Figura 93: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector masculino (variante 5)

Fuente: Elaboración propia

```

> Ph27;ChA27;ChB27
[1] 1.629451e-09 3.258902e-09 6.517804e-09 1.303561e-08 2.607122e-08 5.214243e-08 1.042849e-07
[8] 2.085697e-07 2.164571e-02 2.175677e-02 2.325740e-02 2.368957e-02 2.384951e-02 2.447876e-02
[15] 2.698569e-02 3.196499e-02 3.659903e-02 4.329143e-02 4.351353e-02 4.413877e-02 4.651481e-02
[22] 4.672196e-02 4.737914e-02 4.769903e-02 4.895751e-02 5.397138e-02 6.392998e-02 7.319806e-02
[29] 8.658286e-02 8.702706e-02 8.827754e-02 9.302961e-02 9.344392e-02 9.475829e-02 9.539805e-02
[36] 9.791502e-02 1.000000e-01 1.079428e-01 1.278600e-01 1.463961e-01 1.731657e-01 1.740541e-01
[43] 1.765551e-01 1.860592e-01 1.868878e-01 1.895166e-01 1.907961e-01 1.958300e-01 2.000000e-01
[1] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[8] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[15] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[22] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[29] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[36] 9.302363e-09 9.302363e-09 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[43] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 9.833051e+01 9.693904e+01 9.182002e+01 8.796741e+01
[1] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[8] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[15] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[22] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[29] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[36] 1.000000e+02 1.000000e+02 9.302363e-09 3.654151e+01 2.183459e+01 1.377265e+01 1.361046e+01
[43] 1.317289e+01 1.169346e+01 1.158219e+01 1.124693e+01 1.108277e+01 1.050920e+01 1.003680e+01

```

Figura 94: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector masculino (variante 6)

Fuente: Elaboración propia


```

> Ph28;ChA28;ChB28
[1] 0.02175677 0.02325740 0.02368957 0.02447876 0.03196499 0.03659903 0.04351353 0.04413877
[9] 0.04651481 0.04672196 0.04737914 0.04895751 0.06392998 0.07319806 0.08702706 0.08827754
[17] 0.09302961 0.09344392 0.09475829 0.09791502 0.10000000 0.12785996 0.14639612 0.17405412
[25] 0.17655507 0.18605922 0.18951657 0.19583004 0.20000000
[1] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[8] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[15] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[22] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 9.833051e+01 9.182002e+01
[29] 8.796741e+01
[1] 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000
[10] 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000
[19] 100.00000 100.00000 100.00000 36.54151 21.83459 13.61046 13.17289 11.69346 11.24693
[28] 10.50920 10.03680

```

Figura 95: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector masculino (variante 7)
Fuente: Elaboración propia

```

> Ph29;ChA29;ChB29
[1] 0.03782550 0.04010512 0.04023843 0.04175770 0.04236561 0.04375000 0.04463411 0.05454066
[9] 0.05533467 0.06619463 0.07018395 0.07041725 0.07413982 0.07635400 0.07656251 0.07810969
[17] 0.09544616 0.09683568 0.10000000 0.11584060 0.12282192 0.12323018 0.12974469 0.13361950
[25] 0.13398438 0.13669196 0.16703078 0.16946244 0.17500000
[1] 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 100 100 100 100
[24] 100 100 100 100 100 100
[1] 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000
[10] 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000
[19] 100.00000 65.91299 45.05277 44.25917 34.40149 30.11419 29.93268 27.67207 25.00000
[28] 25.00000 25.00000

```

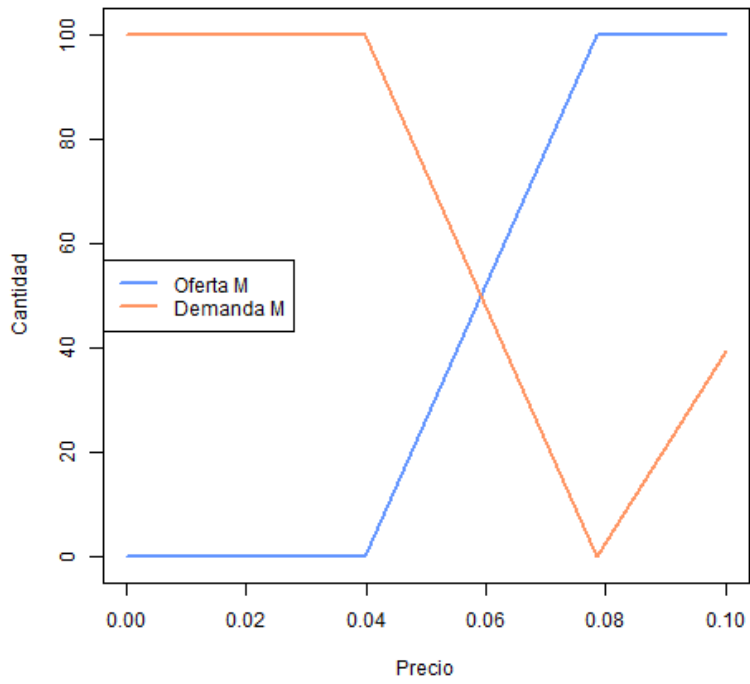
Figura 96: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector masculino (variante 8)
Fuente: Elaboración propia

```

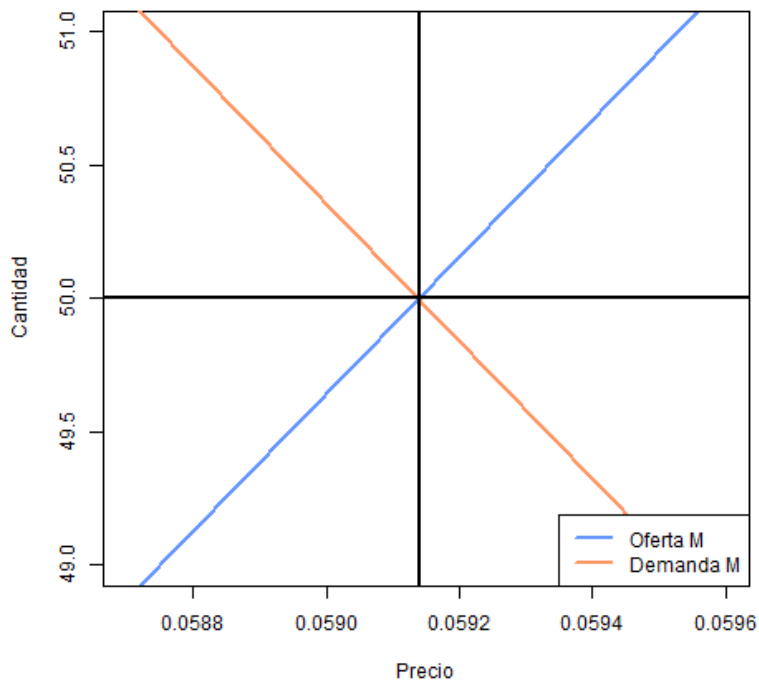
> Ph30;ChA30;ChB30
[1] -0.0487566962 -0.0467217847 -0.0408514426 -0.0167214614 0.0007473375 0.0018683437
[7] 0.0046708592 0.0083607300 0.0098946676 0.0116771477 0.0204257203 0.0209018246
[13] 0.0233608912 0.0243783469 0.0247366685 0.0291928689 0.0510642999 0.0584022270
[19] 0.0609458663 0.0618416704 0.0729821712 0.1000000000 0.1203198866 0.1276607477
[25] 0.1460055663 0.1523646644 0.1546041745 0.1824554263 0.2499999977
[1] 8.623764e-09 8.623764e-09 8.623764e-09 8.623764e-09 8.623764e-09 8.623764e-09 8.623764e-09
[8] 8.623764e-09 8.623764e-09 8.623764e-09 8.623764e-09 8.623764e-09 8.623764e-09 8.623764e-09
[15] 8.623764e-09 8.623764e-09 8.623764e-09 8.623764e-09 8.623764e-09 8.623764e-09 8.623764e-09
[22] 8.623764e-09 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.067904e+02
[29] 5.856187e+01
[1] 149.999997 149.999997 149.999998 149.999996 149.999996 149.999996 149.999996 149.999996 149.999996
[9] 149.999996 149.999996 149.999996 149.999996 149.999996 149.999996 149.999996 149.999996 149.999996
[17] 149.999996 149.999998 149.999998 149.999998 149.999998 149.999998 50.621123 36.901640
[25] 22.020624 19.335549 18.463530 12.213419 6.689822

```

Figura 97: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector masculino (variante 9)
Fuente: Elaboración propia



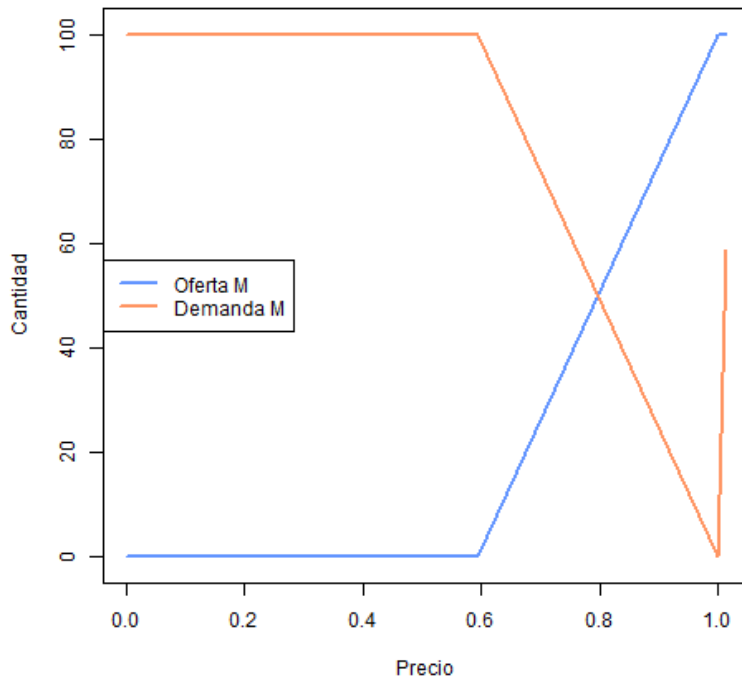
(a) P^* y θ^* del MLS - *CRRA*, mujeres (variante 1)



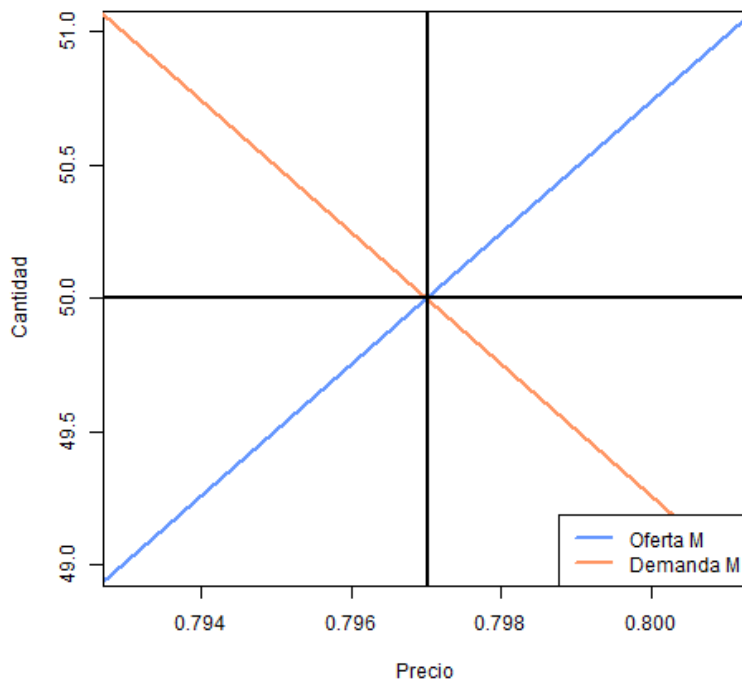
(b) Ampliado

Figura 98: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector femenino (variante 1)

Fuente: Elaboración propia



(a) P^* y θ^* del MLS - *CRRA*, mujeres (variante 2)



(b) Ampliado

Figura 99: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector femenino (variante 2)

Fuente: Elaboración propia

para mujeres de la riqueza inicial de $\omega_A = \omega_B = 1$ a $\omega_A = \omega_B = 10$.

En la Figura 101 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CRRA* para mujeres de la velocidad de convergencia de $\lambda = 0,01$ a $\lambda = 0,1$.

En la Figura 102 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CRRA* para mujeres del número de precios por el que pasa el bucle de $np = 30$ a $np = 50$.

En la Figura 103 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CRRA* para mujeres del número de simulaciones por el que pasa el bucle de $nsimul = 10000$ a $nsimul = 5000$.

En la Figura 104 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CRRA* para mujeres del límite inferior del algoritmo de optimización por el que pasa el programa de $lower = 0$ a $lower = 25$.

En la Figura 105 se muestra el cambio realizado en la función de utilidad *CRRA* para mujeres del límite superior del algoritmo de optimización por el que pasa el programa de $upper = 100$ a $upper = 150$.

En la Figura 106 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CRRA* para mujeres del tipo de interés de $r = 0,01$ a $r = 0,3$.

En la Figura 107 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CRRA* para mujeres del precio inicial de $P_0 = 0,1$ a $P_0 = 1$.

En la Figura 108 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CRRA* para mujeres de la riqueza inicial de $\omega_A = \omega_B = 1$ a $\omega_A = \omega_B = 10$.

En la Figura 109 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CRRA* para mujeres de la velocidad de convergencia de $\lambda = 0,01$ a $\lambda = 0,1$.

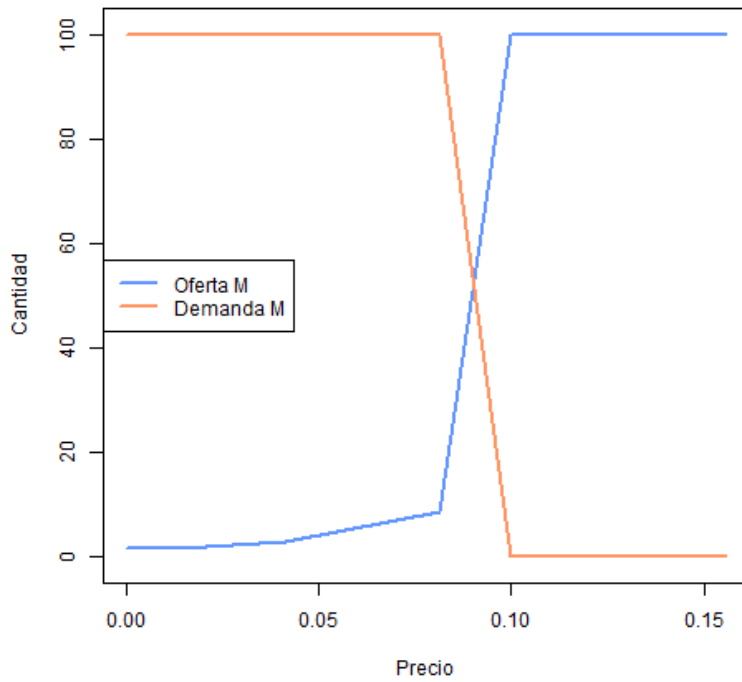
En la Figura 110 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CRRA* para mujeres de su coeficiente de aversión al riesgo de $\gamma = 2$ a $\gamma = 5$.

En la Figura 111 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CRRA* para mujeres del número de precios por el que pasa el bucle de $np = 30$ a $np = 50$.

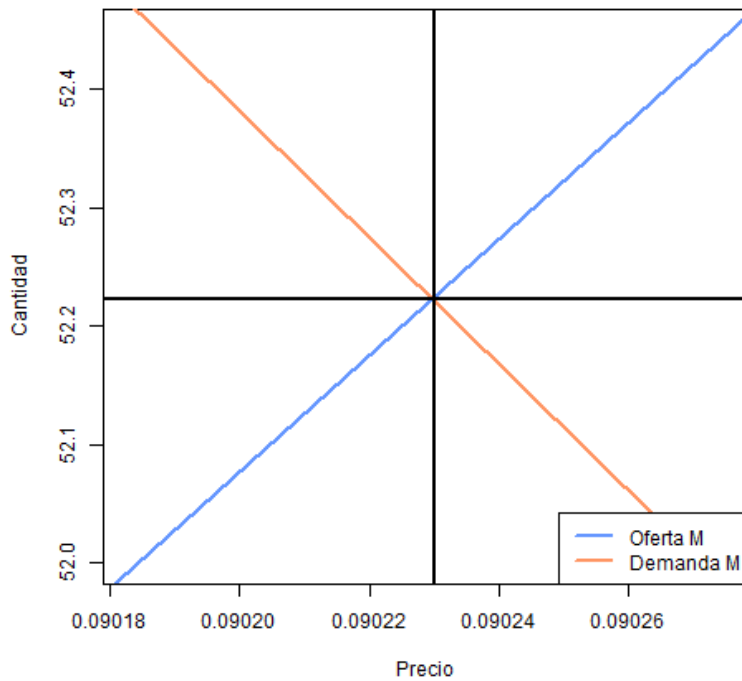
En la Figura 112 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CRRA* para mujeres del número de simulaciones por el que pasa el bucle de $nsimul = 10000$ a $nsimul = 5000$.

En la Figura 113 se muestran los resultados del cambio realizado en la función de utilidad *CRRA* para mujeres del límite inferior del algoritmo de optimización por el que pasa el programa de $lower = 0$ a $lower = 25$.

Y en la Figura 114 se muestran los resultados del cambio realizado en la función



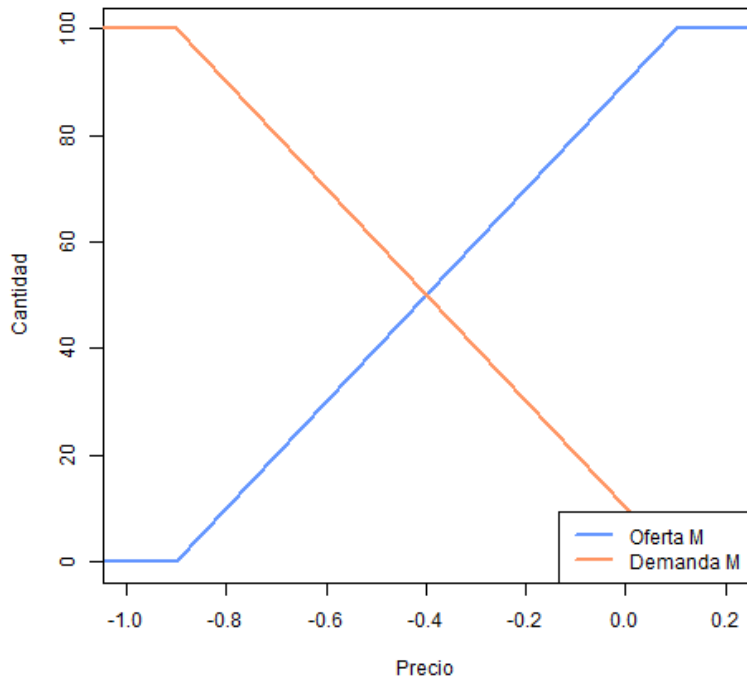
(a) P^* y θ^* del MLS - *CRRA*, mujeres (variante 3)



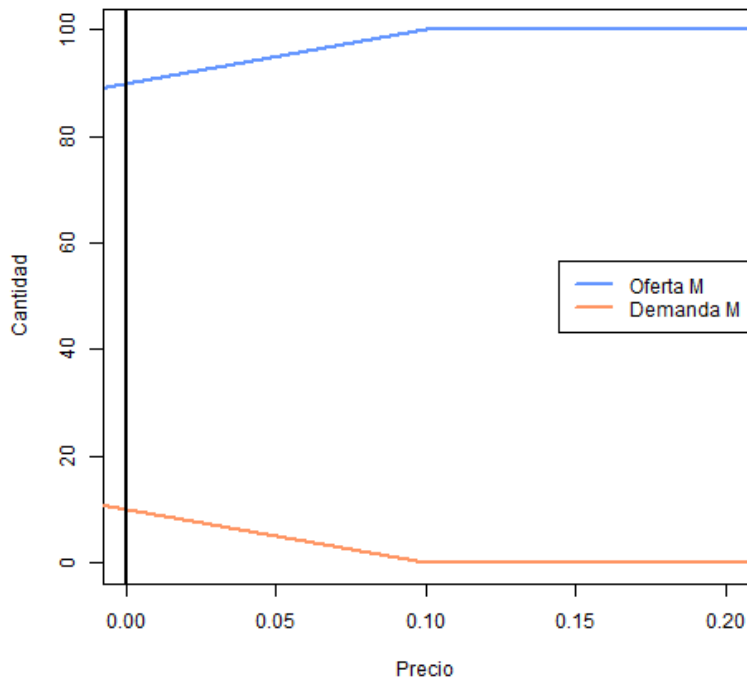
(b) Ampliado

Figura 100: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector femenino (variante 3)

Fuente: Elaboración propia



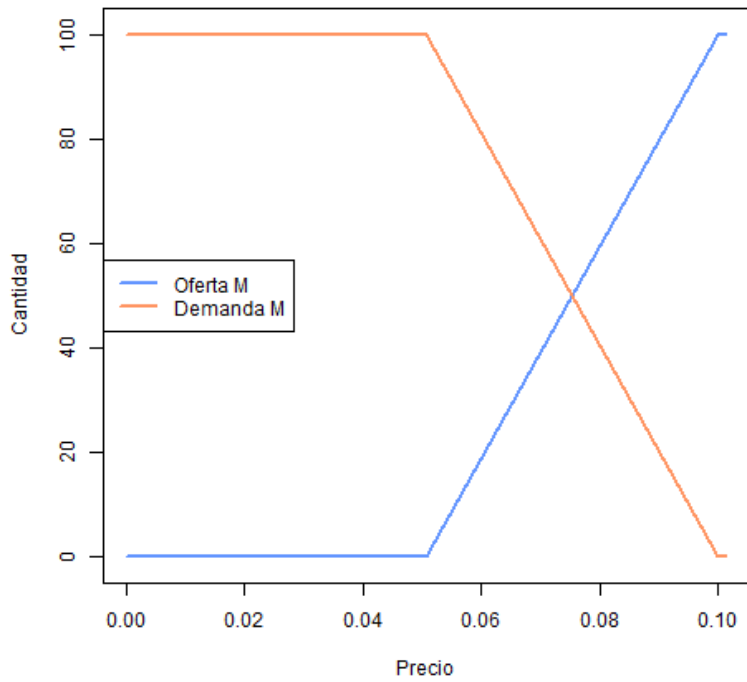
(a) P^* y θ^* del MLS - *CRRA*, mujeres (variante 4)



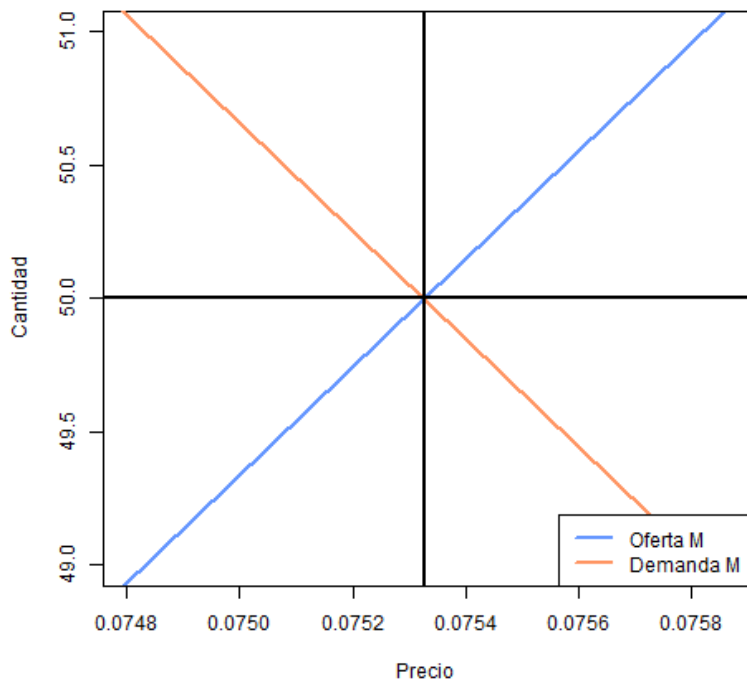
(b) Ampliado

Figura 101: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector femenino (variante 4)

Fuente: Elaboración propia



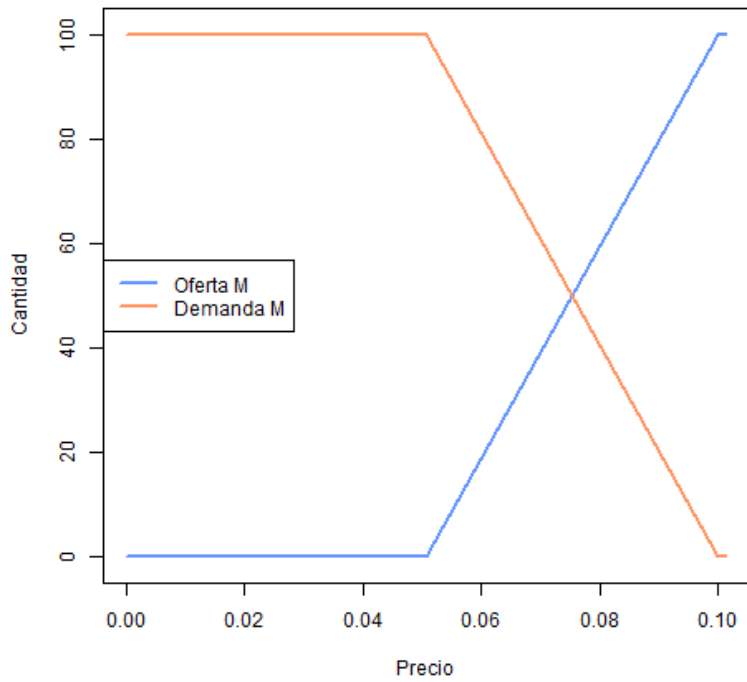
(a) P^* y θ^* del MLS - *CRRA*, mujeres (variante 6)



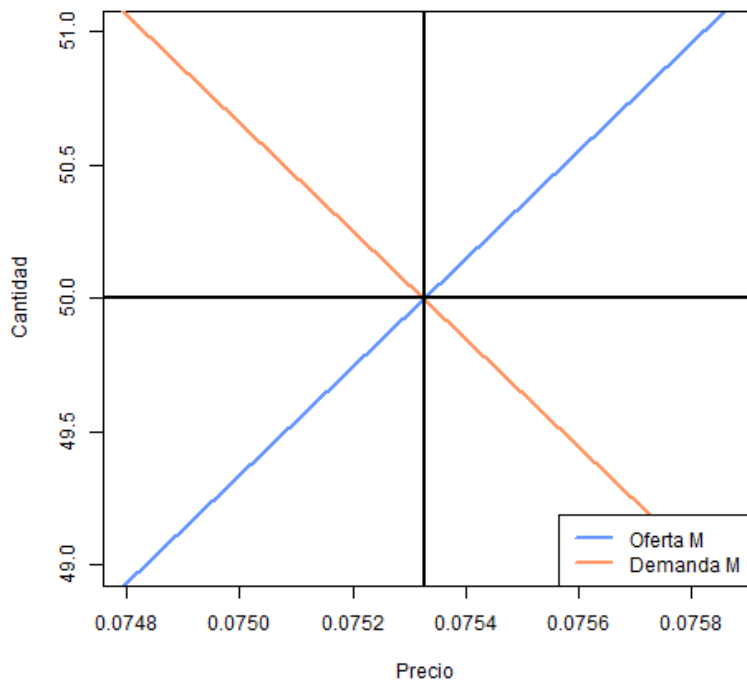
(b) Ampliado

Figura 102: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector femenino (variante 6)

Fuente: Elaboración propia



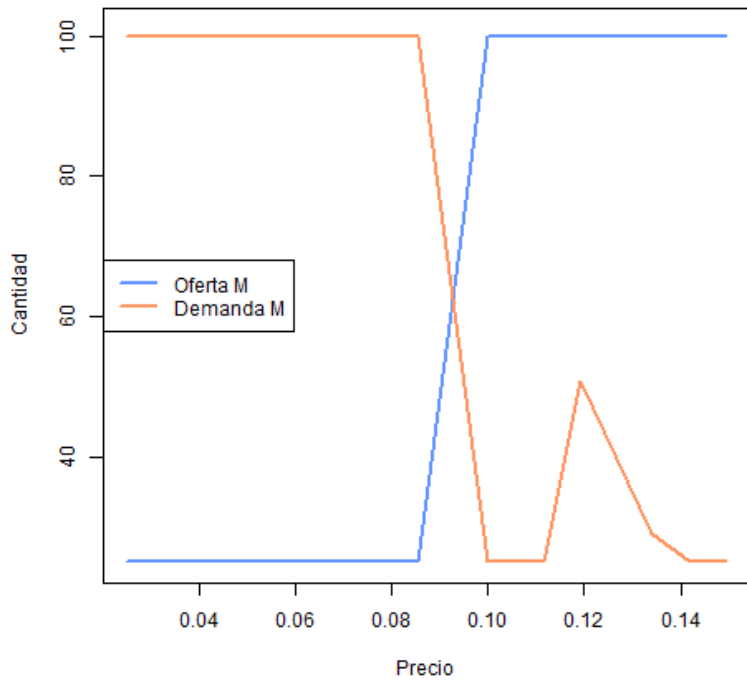
(a) P^* y θ^* del MLS - *CRRA*, mujeres (variante 7)



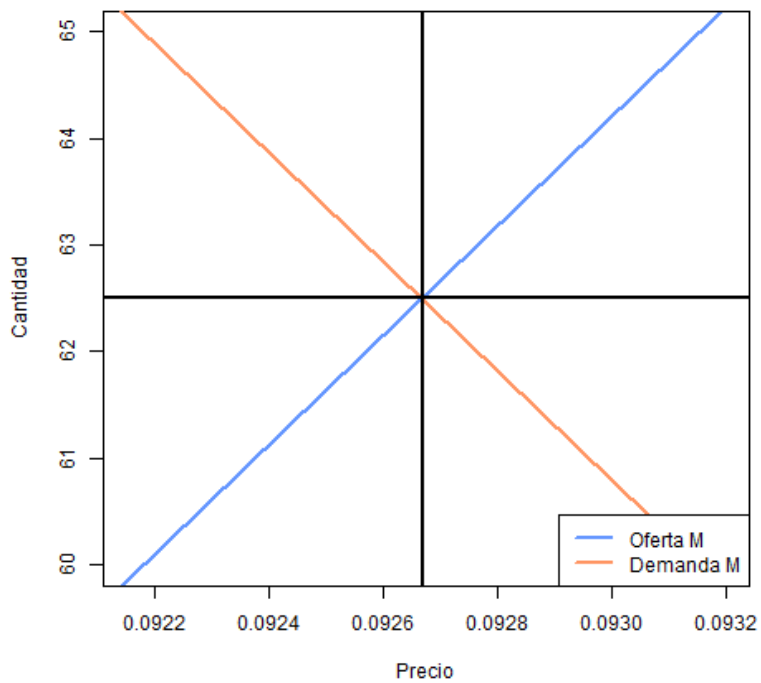
(b) Ampliado

Figura 103: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector femenino (variante 7)

Fuente: Elaboración propia



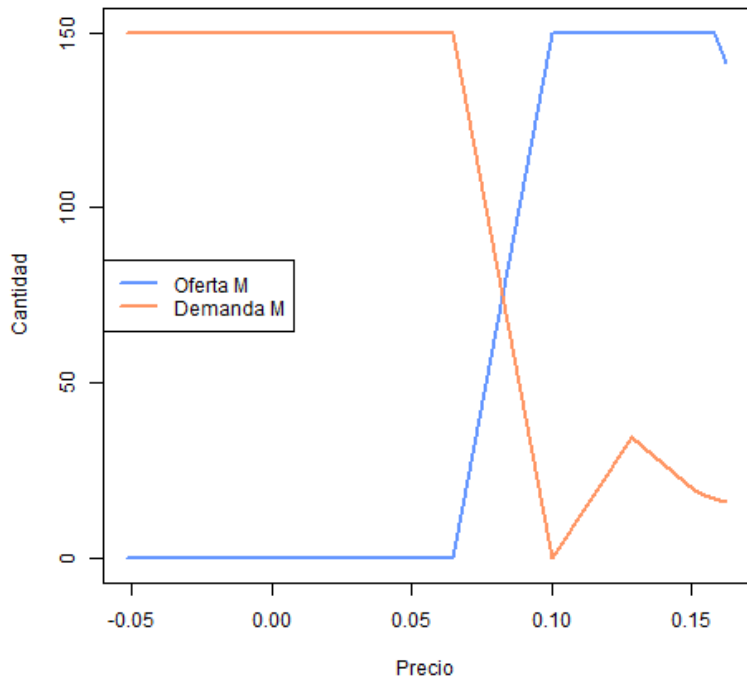
(a) P^* y θ^* del MLS - *CRRA*, mujeres (variante 8)



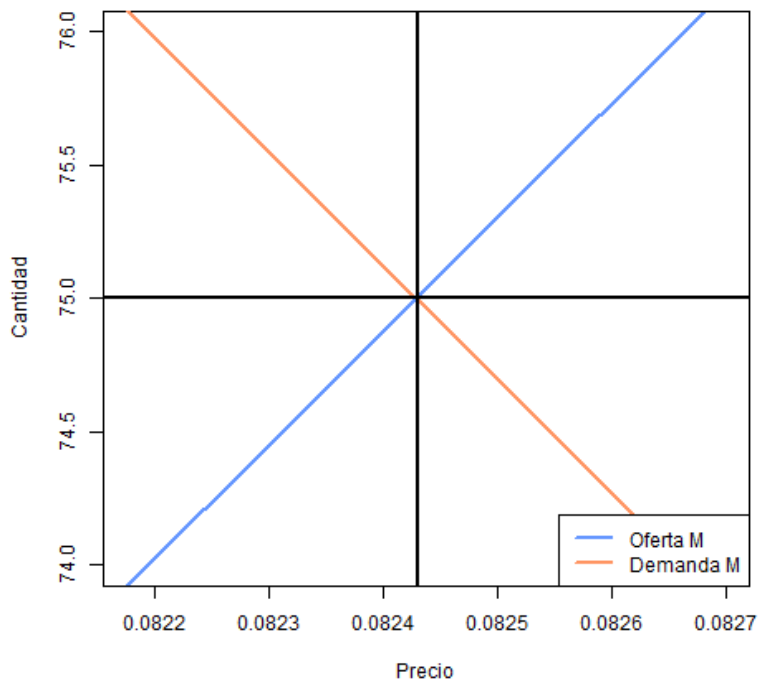
(b) Ampliado

Figura 104: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector femenino (variante 8)

Fuente: Elaboración propia



(a) P^* y θ^* del MLS - *CRRA*, mujeres (variante 9)



(b) Ampliado

Figura 105: Precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector femenino (variante 9)

Fuente: Elaboración propia

```

> Pm32; CmA32; CmB32
[1] 1.185166e-09 2.370331e-09 4.740662e-09 9.481324e-09 1.896265e-08 3.792530e-08 7.585059e-08
[8] 1.517012e-07 3.034024e-07 6.068047e-07 1.213609e-06 2.427219e-06 4.854438e-06 9.708875e-06
[15] 1.941775e-05 3.883550e-05 7.767100e-05 1.553420e-04 3.106840e-04 6.213679e-04 1.242736e-03
[22] 2.485472e-03 4.970943e-03 9.941887e-03 1.988377e-02 3.925556e-02 3.976755e-02 7.851113e-02
[29] 1.000000e-01
[1] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[8] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[15] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[22] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 1.000000e+02
[29] 1.000000e+02
[1] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[8] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[15] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[22] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 9.302363e-09
[29] 3.925556e+01

```

Figura 106: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector femenino (variante 1)
Fuente: Elaboración propia

```

> Pm33; CmA33; CmB33
[1] 1.509551e-08 3.019102e-08 6.038204e-08 1.207641e-07 2.415282e-07 4.830563e-07 9.661127e-07
[8] 1.932225e-06 3.864451e-06 7.728901e-06 1.545780e-05 3.091560e-05 6.183121e-05 1.236624e-04
[15] 2.473248e-04 4.946496e-04 9.892992e-04 1.978598e-03 3.957197e-03 7.914394e-03 1.582879e-02
[22] 3.165757e-02 6.331515e-02 1.266303e-01 2.532606e-01 5.065212e-01 5.940107e-01 1.000000e+00
[29] 1.013042e+00
[1] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[8] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[15] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[22] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 1.000000e+02
[29] 1.000000e+02
[1] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[8] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[15] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[22] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 9.302363e-09
[29] 5.863631e+01

```

Figura 107: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector femenino (variante 2)
Fuente: Elaboración propia

```

> Pm34; CmA34; CmB34
[1] 1.509551e-09 2.994340e-09 5.939558e-09 1.178188e-08 2.337084e-08 4.635763e-08 9.195864e-08
[8] 1.824116e-07 3.618878e-07 7.179464e-07 1.424544e-06 2.825933e-06 5.606404e-06 1.112067e-05
[15] 2.205929e-05 4.376331e-05 8.680451e-05 1.722128e-04 3.416535e-04 6.778052e-04 1.344895e-03
[22] 2.668064e-03 5.293058e-03 1.049618e-02 2.080879e-02 4.121458e-02 8.129146e-02 1.000000e-01
[29] 1.556614e-01
[1] 1.640352 1.640496 1.637149 1.637342 1.643322 1.632134 1.637344 1.609197
[9] 1.610802 1.580738 1.625439 1.608729 1.643414 1.637092 1.610477 1.650056
[17] 1.608504 1.609643 1.610342 1.580945 1.615362 1.614319 1.699206 1.748833
[25] 1.936678 2.760443 8.514473 99.999998 99.999998
[1] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[8] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[15] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[22] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 9.302363e-09
[29] 9.302363e-09

```

Figura 108: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector femenino (variante 3)
Fuente: Elaboración propia

```

> Pm35;CmA35;CmB35
[1] -5.806794e+24 -7.168882e+22 -8.850472e+20 -1.092651e+19 -1.348952e+17 -1.665373e+15 -2.056016e+13
[8] -2.538291e+11 -3.133693e+09 -3.868757e+07 -4.776243e+05 -5.896598e+03 -7.279875e+01 -9.000000e-01
[15] 1.000000e-01 8.100000e+00 6.551887e+02 5.306938e+04 4.298619e+06 3.481881e+08 2.820324e+10
[22] 2.284462e+12 1.850414e+14 1.498835e+16 1.214057e+18 9.833858e+19 7.965424e+21 6.451993e+23
[29] 5.226114e+25
[1] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[8] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[15] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[22] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[29] 1.000000e+02
[1] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[8] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[15] 9.302363e-09 1.249938e-01 1.526515e-03 1.884602e-05 2.399858e-07 9.302363e-09 9.302363e-09
[22] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[29] 9.302363e-09

```

Figura 109: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector femenino (variante 4)

Fuente: Elaboración propia

```

[1] "CANTIDAD MUJERES"
[1] 9.302363e-09
[1] "PRECIO MUJERES"
[1] 0.1

```

(a) Óptimo - *CRRA*, mujeres (variante 5)

```

> Pm36;CmA36;CmB36
[1] 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
[26] 0.0 0.0 0.0 0.1
[1] NA NA NA NA NA NA NA
[8] NA NA NA NA NA NA NA
[15] NA NA NA NA NA NA NA
[22] NA NA NA NA NA NA NA
[29] 9.302363e-09
[1] NA NA NA NA NA NA NA
[8] NA NA NA NA NA NA NA
[15] NA NA NA NA NA NA NA
[22] NA NA NA NA NA NA NA
[29] 9.302363e-09

```

(b) P^* y θ^* del MLS - *CRRA*, mujeres (variante 5)

Figura 110: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector femenino (variante 5)

Fuente: Elaboración propia

```

> Pm37; CmA37; CmB37
[1] 1.509551e-09 1.529239e-09 3.019102e-09 3.058478e-09 6.038204e-09 6.116957e-09 1.207641e-08
[8] 1.223391e-08 2.415282e-08 2.446783e-08 4.830563e-08 4.893565e-08 9.661127e-08 9.787130e-08
[15] 1.932225e-07 1.957426e-07 3.864451e-07 3.914852e-07 7.728901e-07 7.829704e-07 1.545780e-06
[22] 1.565941e-06 3.091560e-06 3.131881e-06 6.183121e-06 6.263763e-06 1.236624e-05 1.252753e-05
[29] 2.473248e-05 2.505505e-05 4.946496e-05 5.011010e-05 9.892993e-05 1.002202e-04 1.978598e-04
[36] 2.004404e-04 3.957197e-04 4.008808e-04 7.914394e-04 8.017616e-04 1.582879e-03 1.603523e-03
[43] 3.165757e-03 6.331515e-03 1.266303e-02 2.532606e-02 5.065212e-02 1.000000e-01 1.013042e-01
[1] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[8] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[15] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[22] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[29] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[36] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[43] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 1.000000e+02 1.000000e+02
[1] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[8] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[15] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[22] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[29] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[36] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[43] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 9.302363e-09 9.302363e-09

```

Figura 111: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector femenino (variante 6)

Fuente: Elaboración propia

```

> Pm38; CmA38; CmB38
[1] 1.509551e-09 1.529239e-09 3.019102e-09 6.038204e-09 1.207641e-08 2.415282e-08 4.830563e-08
[8] 9.661127e-08 1.932225e-07 3.864451e-07 7.728901e-07 1.545780e-06 3.091560e-06 6.183121e-06
[15] 1.236624e-05 2.473248e-05 4.946496e-05 9.892993e-05 1.978598e-04 3.957197e-04 7.914394e-04
[22] 1.582879e-03 3.165757e-03 6.331515e-03 1.266303e-02 2.532606e-02 5.065212e-02 1.000000e-01
[29] 1.013042e-01
[1] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[8] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[15] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[22] 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09 9.302363e-09
[29] 1.000000e+02
[1] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[8] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[15] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02
[22] 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 1.000000e+02 9.302363e-09
[29] 9.302363e-09

```

Figura 112: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector femenino (variante 7)

Fuente: Elaboración propia

```

> Pm39; CmA39; CmB39
[1] 0.02500000 0.02647943 0.02716308 0.02786437 0.03547830 0.03639428 0.03733391 0.03896548
[9] 0.04375000 0.04633900 0.04753538 0.04876265 0.06052441 0.06208703 0.06368999 0.06818959
[17] 0.07656251 0.08109325 0.08318692 0.08533464 0.10000000 0.10591771 0.10865229 0.11145748
[25] 0.11933178 0.13398438 0.14191319 0.14557710 0.14933561
[1] 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 25 100 100 100
[24] 100 100 100 100 100 100
[1] 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000
[10] 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000
[19] 100.00000 100.00000 25.00000 25.00000 25.00000 25.00000 50.71943 29.08210 25.00000
[28] 25.00000 25.00000

```

Figura 113: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector femenino (variante 8)

Fuente: Elaboración propia

de utilidad *CRRA* para mujeres del límite superior del algoritmo de optimización por el que pasa el programa de $upper = 100$ a $upper = 150$.

```
> Pm40; CmA40; CmB40
[1] -0.051886976 -0.050538325 -0.049999998 -0.048409912 -0.046364112 -0.041089928 -0.019668712
[8] 0.009834355 0.020544963 0.023182055 0.024204955 0.024585888 0.024999998 0.025269161
[15] 0.025943487 0.051362407 0.057955136 0.060512387 0.061464719 0.062499993 0.063172902
[22] 0.064858716 0.100000000 0.128406016 0.151280965 0.153661796 0.156249981 0.157932253
[29] 0.162146788
[1] 8.623764e-09 8.623764e-09 8.623764e-09 8.623764e-09 8.623764e-09 8.623764e-09 8.623764e-09
[8] 8.623764e-09 8.623764e-09 8.623764e-09 8.623764e-09 8.623764e-09 8.623764e-09 8.623764e-09
[15] 8.623764e-09 8.623764e-09 8.623764e-09 8.623764e-09 8.623764e-09 8.623764e-09 8.623764e-09
[22] 8.623764e-09 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02
[29] 1.413268e+02
[1] 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02
[8] 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02
[15] 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02 1.500000e+02
[22] 1.500000e+02 8.623764e-09 3.468240e+01 1.935231e+01 1.849580e+01 1.765547e+01 1.714605e+01
[29] 1.598563e+01
```

Figura 114: Resultados del precio y cantidad óptimos de un bono MLS mediante la función de utilidad *CRRA* para el sector femenino (variante 9)

Fuente: Elaboración propia

Referencias bibliográficas

- Aguilera, E., 2014. *Instrumentos financieros vinculados a la mortalidad: Análisis del mercado y medición del riesgo de crédito*. Trabajo Final de Máster. Universidad de Málaga.
- Artemis. What are insurance-linked securities (or ILS)? URL: <https://www.artemis.bm/library/what-are-insurance-linked-securities/>. Última consulta: 22 de febrero de 2022.
- Atance, D., 2020. *Un nuevo modelo dinámico de mortalidad basado en la edad clave y uso de técnicas de remuestreo para su evaluación*. Tesis doctoral. Universidad de Alcalá.
- Atance, D., Varea, X., Claramunt, M., 2021. Atlas mundial de la longevidad 2021. *Longevity Future* , 1–141.
- Atlantclux. Información corporativa de FWU. URL: <https://www.forwardyou.com/es/conocenos/informacion-corporativa/>. Última consulta: 24 de junio de 2022.
- Ayuso, M., Bravo, J., Holzmann, R., 2021. Getting life expectancy estimates right for pension policy: Period versus cohort approach. *Journal of Pension Economics & Finance* 20(2), 212–231.
- Ayuso, M., Corrales, H., Guillén, M., Martín, A.P., Rojo, J., 2007. *Estadística actuarial vida*. Publicacions i Edicions UB.
- Barrieu, P., Bensusan, H., El Karoui, N., Hillairet, C., Loisel, S., Ravanelli, C., Salhi, Y., 2010. Understanding, Modeling and Managing Longevity Risk: Key Issues and Main Challenges. *HAL: open science* , 1–26.
- Bauer, D., Börger, M., Russ, J., 2010. On the Pricing of Longevity-Linked Securities. *Insurance: Mathematics and Economics* 46, 139–149.
- BBVA. ¿Qué son operaciones Over The Counter (OTC)? URL: <https://www.bbva.com/es/operaciones-over-the-counter-otc/>. Última consulta: 10 de marzo de 2022.
- Blake, D., Cairns, A.J.G., Dowd, K., 2006. Living with mortality: longevity bonds and other Mortality-Linked Securities. *Cambridge University Press* , 153–228.
- Blake, D., Cairns, A.J.G., Dowd, K., Kessler, A.R., 2018a. Still living with mortality: the longevity risk transfer market after one decade. *British Actuarial Journal* , 1–80.
- Blake, D., El Karoui, N., Loisel, S., MacMinn, R., 2018b. Longevity risk and capital markets: The 2015–16 update. *Insurance: Mathematics and Economics* , 157–173.
- BNP Paribas. Sobre nosotros. URL: <https://www.bnpparibas.es/es/sobre-nosotros/>. Última consulta: 11 de abril de 2022.

- Bravo, J., Vidal, J., 2021. Pricing longevity derivatives via Fourier transforms. *Insurance: Mathematics and Economics* , 81–97.
- Brouhns, N., Denuit, M., Vermunt, J.K., 2002. A poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables. *Insurance. Mathematics and Economics* 31(3), 373–393.
- Canada Life. About us. URL: <https://www.canadalife.com/about-us.html>. Última consulta: 11 de abril de 2022.
- Chen, H., Cox, S., 2009. Modeling Mortality with Jumps: Applications to Mortality Securitization. *The Journal of Risk and Insurance* 76, 727–751.
- Claramunt, M., Mármol, M., Varea, X., 2022. Facing a risk: to insure or not to insure. An analysis with the constant relative risk aversion utility function. *Working paper* , 1–14.
- Coughlan, G., Epstein, D., Honig, P., Sinha, A., 2007. q-Forwards: Derivatives for transferring longevity and mortality risk. *North American Actuarial Journal* , 1–5.
- Cox, S., Lin, Y., 2007. Securitization of Catastrophe Mortality Risks. *Insurance: Mathematics and Economics* , 628–637.
- Cox, S.H., Lin, Y., Pedersen, H., 2010. Mortality risk modeling: Applications to insurance securitization. *Insurance: Mathematics and Economics* , 242–253.
- Cui, J. Longevity Risk Pricing. URL: <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.972038>. Última consulta: 27 de abril de 2022.
- Currie, I., Kirkby, J., Durban, M., Eilers, P. Smooth Lee-Carter models and beyond.
- Debonneuil, E., Loisel, S., Planchet, F., 2017. Do actuaries believe in longevity deceleration? *HAL: open science* , 1–31.
- Debón, A., Atance, D., Fuente, I., 2021. Reverse mortgage: impact of longevity risk in the spanish case. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles* 27, 135–159.
- DeepAI. White Noise (Statistics). URL: <https://deepai.org/machine-learning-glossary-and-terms/white-noise>. Última consulta: 30 de abril de 2022.
- Diccionario de Seguros Allianz. ¿Qué es un **Reaseguro**? URL: <https://www.allianz.es/descubre-allianz/mediadores/diccionario-de-seguros/r/que-es-un-reaseguro.html>. Última consulta: 26 de diciembre de 2022.
- Economipedia. Bono cupón cero. URL: <https://economipedia.com/definiciones/bono-cupon-cero.html>. Última consulta: 15 de febrero de 2022.
- Economipedia. Mercado de capitales. URL: <https://economipedia.com/definiciones/mercado-de-capitales.html>. Última consulta: 21 de febrero de 2022.

- Economipedia. Titulización. URL: <https://economipedia.com/definiciones/titulizacion.html>.
Última consulta: 18 de marzo de 2022.
- EIB. Who we are. URL: <https://www.eib.org/en/about/index.htm>. Última consulta: 11 de abril de 2022.
- Friends Provident. About us. URL: <https://www.fpinternational.com/about-us/index.htm>. Última consulta: 11 de abril de 2022.
- Fundación Mapfre. Diccionario de seguros: fideicomisario (trustee). URL: <https://www.fundacionmapfre.org/publicaciones/diccionario-mapfre-seguros/fideicomisario/>. Última consulta: 24 de febrero de 2022.
- Fundación Mapfre. Diccionario de seguros: ramo (line of insurance; line of business). URL: <https://www.fundacionmapfre.org/publicaciones/diccionario-mapfre-seguros/ramo/>. Última consulta: 22 de febrero de 2022.
- Fundación Mapfre. Diccionario de seguros: riesgo de longevidad (longevity risk). URL: <https://www.fundacionmapfre.org/publicaciones/diccionario-mapfre-seguros/riesgo-de-longevidad/>. Última consulta: 03 de mayo de 2022.
- Geweke, J., 2001. A note on some limitations of CRRA utility. *Economics Letters* 71, 341–345.
- Giménez, I., 2020. *La Renta Hipotecaria: una solución eficaz para el riesgo de longevidad en la población española*. Trabajo Final de Máster. Universitat de Barcelona.
- Gollier, C., 2003. To Insure or Not to Insure?: An Insurance Puzzle. *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory* 28(1), 5–24.
- Haberman, S., Renshaw, A., 2011. A comparative study of parametric mortality projection models. *Insurance. Mathematics and Economics* 48(1), 35–55.
- HMN. Distribución logística. URL: https://hmn.wiki/es/Logistic_distribution. Última consulta: 09 de abril de 2022.
- INE. Tablas de mortalidad por año, sexo, edad y funciones. URL: <https://www.ine.es/jaxiT3/Tabla.htm?t=27153>. Última consulta: 07 de abril de 2022.
- JP Morgan. JP Morgan en España. URL: <https://www.jpmorgan.com/ES/en/about-us>. Última consulta: 11 de abril de 2022.
- Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., Denuit, M., 2009. *Modern Actuarial Risk Theory: Using R*. Second edition. Springer.
- Katzner, D., 1999. Methodological Individualism and the Walrasian Tâtonnement. *Journal of Economic and Social Research* , 5–33.
- Kenton, W. Consumption Capital Asset Pricing Model (CCAPM). URL: <https://www.investopedia.com/terms/c/ccapm.asp>. Última consulta: 30 de abril de 2022.

- Kenton, W. Capital Asset Pricing Model (CAPM). URL: <https://www.investopedia.com/terms/c/capm.asp>. Última consulta: 22 de febrero de 2022.
- Kitti, M., 2010. Convergence of Iterative Tâtonnement without Price Normalization. *Journal of Economic Dynamics and Control* 34, 1077–1091.
- Langhorne Re. Langhorne RE. URL: <https://langhornere.com/>. Última consulta: 24 de junio de 2022.
- Lee, R.D., Carter, L.R., 1992. Modeling and forecasting US mortality. *Journal of the American Statistical Association* 87, 659–671.
- Leung, M., Fung, M.C., O'Hare, C., 2018. A comparative study of pricing approaches for longevity instruments. *Insurance: Mathematics and Economics* , 95–116.
- Levantesi, S., Menzietti, M., 2006. Maximum Market Price of Longevity Risk under Solvency Regimes: The Case of Solvency II. *Risks: MDPI* , 1–21.
- Milevsky, M., Promislow, D., Young, V., 2005. Financial valuation of mortality risk via the instantaneous sharpe ratio: Application to pricing pure endowments. *Working paper* 33(3), 676–691.
- Price Waterhouse Coopers. Pension risk transfer: buy-ins, buy-outs, longevity swaps and consolidators: A risk transfer project could help secure certainty about your scheme's future liabilities and member benefits. URL: <https://www.pwc.co.uk/pensions/risk-transactions.html>. Última consulta: 14 de febrero de 2022.
- Renaissance Re. RenaissanceRe. URL: <https://www.renre.com/>. Última consulta: 24 de junio de 2022.
- RGA Re. About RGA. URL: <https://www.rgare.com/about-rga>. Última consulta: 24 de junio de 2022.
- Rothsay. About us. URL: <https://www.rothesay.com/about-us/>. Última consulta: 11 de abril de 2022.
- Solvencia II. *Solvencia II (2^a ed.)*. URL: <http://hdl.handle.net/2445/107502>. En OMADO (Objectes i materials docents). (pp. 1-161). Dipòsit Digital de la UB. Col·lecció Omado
Última consulta: 20 de junio de 2022.
- Swiss Re. About us. URL: <https://www.swissre.com/about-us.html>. Última consulta: 11 de abril de 2022.
- The definition. Plain Vanilla Swap. URL: <https://the-definition.com/term/plain-vanilla-swap>. Última consulta: 13 de febrero de 2022.
- Thomsen, J., Verner, J., 2007. Longevity Bonds: a Financial Market Instrument to Manage Longevity Risk. *OCDE* , 29–44.
- Universidad de Oslo. CRRA-utility. URL: <https://www.uio.no/studier/emner/sv/oekonomi/ECON4310/h11/undervisningsmateriale/CRRAutility.pdf>.
Última consulta: 01 de mayo de 2022.

- Uzawa, H., 1960. Walras' Tâtonnement in the Theory of Exchange. *The Review of Economic Studies* 27, 182–194.
- Westreicher, G. Modelo Logit. URL: <https://economipedia.com/definiciones/modelo-logit.html>. Última consulta: 08 de abril de 2022.
- Yang, S., 2011. Securitisation and tranching longevity and house price risk for reverse mortgage products. *The Geneva Papers on Risk and Insurance–Issues and Practice* 36, 648–674.
- Zeddouk, F., Devolder, P., 2019. Pricing of Longevity Derivatives and Cost of Capital. *Risks: MDPI* , 1–29.
- Zhou, R., Li, J., Tan, K., 2015. Economic Pricing of Mortality-Linked Securities: A Tâtonnement Approach. *Journal of Risk and Insurance* 82(1), 65–96.