



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

TEORIA DE REPRESENTACIONS DE QUIVERS. EL TEOREMA DE GABRIEL

Autor: Heimdall Amérigo Veys

Director: Dr. Martí Lahoz Vilalta

Realitzat a: Departament de Matemàtiques
i Informàtica

Barcelona, 13 de juny de 2023

Abstract

The main goal of this work is the study of representations of quivers. A representation of a quiver is an algebraic structure that is made up of a directed graph together with vector spaces assigned to the vertices, and linear maps assigned to the arrows.

First of all, basic notions of representations' theory of quivers are given, along with some particular examples. We also define the path algebra of a quiver and some of its more elemental properties.

Next we elaborate on a series of concepts and results of homological algebra (chain complexes, homologies, exact sequences, resolutions, etc.) in order to define the Tits form of a quiver. Then we present various basic definitions of algebraic geometry (affine algebraic varieties, Zariski topology, etc.) that will help us to define the representation variety of a quiver.

Finally, we close this work with Gabriel's theorem. This theorem characterizes the so-called quivers of finite representation type, i.e. those quivers which have only finitely many isomorphism classes of representations.

Resum

Aquest treball està principalment orientat a l'estudi de les representacions de quivers. Una representació d'un quiver és una estructura algebraica formada per un graf dirigit juntament amb espais vectorials assignats als vèrtexs i aplicacions lineals assignades a les fletxes.

En primer lloc es donen les nocions bàsiques de la teoria de representacions de quivers, amb alguns exemples particulars i definint què és l'àlgebra de camins d'un quiver i algunes de les seves propietats més elementals.

Tot seguit es passa a explicar tota una sèrie de conceptes i resultats d'àlgebra homològica (complexos de cadenes, homologies, seqüències exactes, resolucions, etc.) amb l'objectiu de definir la forma de Tits d'un quiver. Després es passa a exposar algunes definicions bàsiques de la geometria algebraica (varietats algebraiques afins, topologia de Zariski, etc.) que permeten definir la varietat de les representacions d'un quiver.

Finalment, s'acaba amb la demostració del Teorema de Gabriel, que caracteritza els anomenats quivers de tipus *finit*: aquells quivers que tenen un nombre finit de classes d'isomorfismes de representacions.

Agraïments

Vull agrair al Dr. Martí Lahoz Vilalta per haver volgut ser el meu tutor d'aquest treball de fi de grau, que suposa el fi d'una etapa molt important en la meua vida. Des de l'inici que va acceptar tutoritzar-me fins als darrers dies abans de l'entrega fent comentaris i suggeriments per ajudar-me a acabar el treball. Sobretot vull agrair les reunions que hem fet gairebé cada setmana. Encara que això suposava estar constantment fent feina, ha estat clau perquè aquest treball pogués tirar endavant. Tots els dubtes que tenia, les idees que em donava, les referències on buscar la informació que necessitava... Moltes gràcies!

També voldria agrair els suport de tota aquella gent del meu entorn més proper, com els meus pares o amics, que sempre han cregut en mi malgrat els daltabaixos que he anat tenint, i sobretot en els moments més durs i que semblaven impossibles de superar.

Finalment, voldria fer un darrer agraïment a tots aquells companys i amics de carrera que m'han acompanyat durant aquests 6 anys fent el doble grau, que sense la seva companyia i ajuda tot hauria estat molt diferent.

Índex

1	Introducció	1
2	Representacions de quivers	3
2.1	El problema de la classificació de les representacions	6
2.1.1	<i>Loops</i>	7
2.1.2	El quiver de Kronecker	8
2.1.3	El quiver estrella, S_r	9
2.2	L'àlgebra del quiver i l'estructura de les representacions	12
2.2.1	L'àlgebra kQ i l'àlgebra de camins	12
2.2.2	(In)descomposabilitat de les representacions	15
3	La resolució estàndard i la forma de Tits	19
3.1	Mòduls projectius	19
3.2	Seqüències exactes i la resolució estàndard	21
3.3	La forma de Tits	26
3.4	Les representacions de Schur, o blocs	31
4	Grups algebraics i la varietat de les representacions	32
4.1	Grups algebraics afins, òrbites i la topologia de Zariski	32
4.2	La varietat de les representacions	35
5	El Teorema de Gabriel	38
6	Conclusions	41

1 Introducció

El projecte

El punt de partida i la base d'aquest treball són els grafs en els quals les arestes són fletxes que van d'un vèrtex a un altre: els *quivers*. A partir d'aquesta senzilla estructura, assignem un espai vectorial a cada un dels vèrtexs, i una aplicació lineal a cada una de les fletxes. Tenim així una *representació* d'un quiver. A més a més entre les representacions es poden establir classes d'equivalència definint bàsicament isomorfismes entre els espais vectorials.

Amb aquestes nocions, podem considerar doncs el conjunt de les classes d'isomorfismes (d'equivalència) per a un quiver Q qualsevol, i aquest conjunt pot ser tant finit com infinit. La part interessant (la motivació final d'aquest treball) és la següent: allò que determinarà si el conjunt és finit o infinit serà el graf del quiver, però sense considerar el sentit de les fletxes. Només per l'estructura dels vèrtexs i les arestes ja es pot saber. Això és el que diu el **Teorema de Gabriel**, i que acabarem demostrant al darrer capítol. En particular, l'estructura del graf ha de ser un diagrama de Dynkin de tipus ADE: E_6 , E_7 , E_8 , A_n i D_m , amb $n \geq 1$ i $m \geq 4$.

Aquests diagrames de Dynkin de tipus ADE no són un element exclusiu de la teoria de representacions de quivers. Es poden fer servir també per a classificar altres objectes matemàtics, com ara els sòlids platònics, singularitats d'hipersuperfícies algebraïques, punts crítics de funcions sense *moduli*, etc. (veure [HHSV77]).

A causa d'aquests paral·lelismes, molts cops els resultats obtinguts en un camp poden servir per a un altre de diferent, i la teoria de representacions de quivers poden ser de gran utilitat per trobar alguns d'aquests resultats d'una forma (no sempre) més senzilla. O viceversa. Per exemple, els diagrames de Dynkin també s'empren en la teoria de *sistemes d'arrels*, i les seves propietats són de gran rellevància per a la classificació d'àlgebres de Lie semisimples, com es pot veure al capítol 18 de [TY05] o al capítol 8 de [Hal15]. En conseqüència, es poden trobar aplicacions en altres àmbits com ara la física de partícules (veure [Ura00]). Per al lector interessat, [MR22] parla sobre la relació de la representació de grups de Lie i la física de partícules.

En aquest treball s'empren conceptes i eines d'algunes branques de les matemàtiques que en general no s'expliquen durant el grau. Per aquesta raó una gran part del que s'explica són definicions i resultats d'aquestes branques que després són necessàries per entendre la teoria de representacions de quivers. Segons el meu coneixement previ i tot allò que he llegit, he hagut de fer necessàriament una tria del que he considerat més rellevant deixar escrit i del que he trobat oportú obviar. Més enllà de conceptes bàsics d'àlgebra lineal, grups, anells, geometria lineal i projectiva, hi ha detalls per exemple de teoria de categories o teoria de mòduls sobre àlgebres no commutatives que no els menciono malgrat que no es donin en gairebé cap assignatura del grau. D'altra banda, en el capítol 3 el lector veurà que un tros important són explicacions d'àlgebra homològica, de forma semblant al capítol 4 amb nocions de geometria algebraica.

Estructura de la memòria

1. El segon capítol del treball comença amb les primeres definicions bàsiques de quivers i les seves representacions, posant èmfasi en els morfismes de representacions. Tot seguit ja s'enuncia el Teorema de Gabriel, que es demostrarà al final del treball. Després s'exposen alguns exemples bàsics de quivers per veure com són les representacions en ells: *loops*, el quiver de Kronecker, el quiver estrella. . . L'última secció del capítol se centra en posar una estructura algebraica a les representacions tot definint l'àlgebra de camins, i relacionant les representacions de quivers amb mòduls sobre k -àlgebres (veient que són equivalents), tot classificant-les en simples, semisimples i indescomponibles.
2. En el tercer capítol s'introdueixen i desenvolupen principalment nocions i resultats de mòduls projectius i d'àlgebra homològica, que serveixen per poder caracteritzar les representacions de quivers i finalment poder definir l'anomenada *Forma de Tits* d'un quiver, que permet relacionar els quivers amb els diagrames de Dynkin mencionats al Teorema de Gabriel. Un resultat d'especial interès en aquest capítol és l'anomenada *Resolució Estàndard*, que serveix per a qualsevol representació (mòdul) d'un quiver. També s'explica el concepte de *Representació de Schur*, i com es relaciona amb les representacions indescomponibles.
3. L'objectiu del capítol 4 és definir l'anomenada *Varietat de les representacions* d'un quiver, per poder establir una bijecció entre les representacions i les òrbites donades pel grup algebraic $GL(\underline{n})$ sobre aquesta varietat. Equipant la varietat a més amb la topologia de Zariski, s'obtenen propietats importants sobre les òrbites segons les seves característiques topològiques. És per aquesta raó que la primera secció d'aquest capítol se centra en recordar què són les varietats algebraiques afins, grups algebraics afins (i les corresponents accions), la topologia de Zariski, etc.
4. Finalment, al darrer capítol es demostra el Teorema de Gabriel amb tot allò que s'ha anat explicant en els capítols anteriors.

2 Representacions de quivers

En aquesta secció i en tot el treball, si no es diu el contrari, fixarem un cos k algebraicament tancat. Així doncs, tots els espais vectorials, aplicacions lineals, àlgebres, etc. que no tinguin altres cossos especificats seran considerats sobre k .

Comencem doncs amb les definicions i nocions bàsiques dels quivers i les seves representacions.

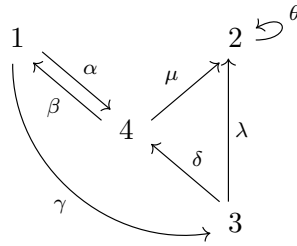
Definició 2.1. Un **quiver** és una quàdrupla $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ donada per:

1. El conjunt (finit) Q_0 , format pels **vèrtexs**.
2. El conjunt (finit) Q_1 , format per les **fletxes**.
3. Dues aplicacions $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$, que identifiquen el vèrtex origen ("source") i el vèrtex destí ("target") per a cada fletxa.

D'aquesta manera, veiem que un quiver és en el fons un graf finit dirigit, on les arestes són fletxes que van d'un vèrtex a un altre (o al mateix vèrtex, obtenint un bucle). Si denotem els vèrtexs amb les lletres $i, j, \dots$, i les fletxes com $\alpha : i \rightarrow j$, llavors, amb aquesta notació, tenim que $s(\alpha) = i$ i $t(\alpha) = j$.

A l'hora de dibuixar un quiver, posarem les fletxes com $i \xrightarrow{\alpha} j$.

Exemple 2.2.



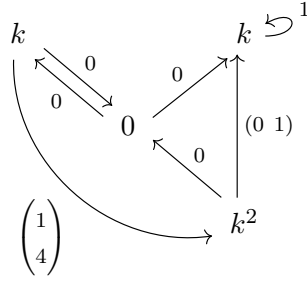
Aquest quiver ve definit pels conjunts $Q_0 = \{1, 2, 3, 4\}$ i $Q_1 = \{\alpha, \beta, \delta, \lambda, \mu, \gamma, \theta\}$, i les aplicacions s i t estan definides com $s(\alpha) = s(\gamma) = 1$, $s(\theta) = 2$, $s(\lambda) = s(\delta) = 3$, $s(\beta) = s(\mu) = 4$; $t(\beta) = 1$, $t(\mu) = t(\lambda) = t(\theta) = 2$, $t(\gamma) = 3$, $t(\alpha) = t(\delta) = 4$.

Passem ara a mirar què és una representació d'un quiver.

Definició 2.3. Una **representació** M d'un quiver Q és una col·lecció d'espais vectorials $\{V_i\}$ i una col·lecció d'aplicacions lineals $\{f_\alpha : V_{s(\alpha)} \rightarrow V_{t(\alpha)}\}$ de manera que a cada vèrtex $i \in Q_0$ del quiver se li assigna un espai vectorial V_i , i a cada fletxa $\alpha \in Q_1$ se li assigna una aplicació lineal f_α .

Una representació M d'un quiver la denotarem com $M = (\{V_i\}_{i \in Q_0}, \{f_\alpha\}_{\alpha \in Q_1})$, o de forma més abreujada $M = (V_i, f_\alpha)$.

Exemple 2.4. Agafem el quiver de l'exemple anterior. Un exemple de representació seria:



La definirem, agafant l'ordre dels índexs dels vèrtexs de l'exemple anterior, com:

$$M = (\{k, k, k^2, 0, \}, \{0, 0, 0, (0 \ 1), 0, \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right), 1\})$$

Amb aquestes definicions, un es pregunta naturalment com es poden relacionar dues representacions a priori diferents d'un mateix quiver, per després poder establir equivalències entre totes les altres representacions i reduir l'estudi a classes d'equivalència.

Definició 2.5. Siguin $M = (V_i, f_\alpha)$ i $N = (W_i, g_\alpha)$ dues representacions d'un mateix quiver Q . Un **morfisme** de representacions $u : M \rightarrow N$ és un conjunt d'aplicacions lineals $\{u_i : V_i \rightarrow W_i\}_{i \in Q_0}$ tal que, per a cada fletxa $\alpha \in Q_1$, el següent diagrama commuta:

$$\begin{array}{ccc} V_{s(\alpha)} & \xrightarrow{f_\alpha} & V_{t(\alpha)} \\ u_{s(\alpha)} \downarrow & & \downarrow u_{t(\alpha)} \\ W_{s(\alpha)} & \xrightarrow{g_\alpha} & W_{t(\alpha)} \end{array}$$

Donada aquesta definició, ja tenim les classes d'equivalències que desitjàvem, en forma d'isomorfismes. Un morfisme u entre dues representacions serà un **isomorfisme** si les aplicacions u_i són bijectives per a tot $i \in Q_0$. Escriurem $M \simeq N$ per indicar que M i N són representacions isomorfes.

A més a més, fàcilment es pot veure que la composició de dos morfismes de representacions està ben definida, això és, per a qualssevol morfismes $u : M \rightarrow N$ i $v : N \rightarrow L$ (d'un mateix quiver Q) obtenim que la col·lecció de composicions² $\{v_i u_i\}_{i \in Q_0}$ és també un morfisme $vu : M \rightarrow L$.

Aleshores, prenent dues representacions M i N d'un mateix quiver, podem definir el conjunt de tots els morfismes que van de M a N . El denotarem com $\text{Hom}_Q(M, N)$, o simplement $\text{Hom}(M, N)$, i $\text{End}_Q(M)$ si $M = N$. Aquest conjunt és també un k -espai vectorial, perquè és el subespai de $\prod_{i \in Q_0} \text{Hom}(V_i, W_i)$.

Definició 2.6. Si considerem dues representacions $M = (V_i, f_\alpha)$ i $N = (W_i, g_\alpha)$ d'un mateix quiver Q , direm que M és una **subrepresentació** de N ($M \subseteq N$) si es compleix que $V_i \subseteq W_i \ \forall i \in Q_0$ i que el conjunt d'aplicacions lineals donades per les inclusions $\{i_i : V_i \hookrightarrow W_i\}_{i \in Q_0}$ és un morfisme de representacions.

Exemple 2.7. Considerem les següents representacions:

$$L : k \xrightarrow{1} k \xleftarrow{1} k \quad ; \quad M : k \longrightarrow 0 \longleftarrow 0 \quad ; \quad N : 0 \longrightarrow k \longleftarrow 0$$

²Una qüestió de notació: denotem la composició d'aplicacions com $v \circ u \equiv vu$.

Tenim que $N \subseteq L$, però $M \not\subseteq L$. Efectivament, fent els següents diagrames

$$\begin{array}{ccccc} k & \longrightarrow & 0 & \longleftarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ k & \longrightarrow & k & \longleftarrow & k \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & k & \longleftarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ k & \longrightarrow & k & \longleftarrow & k \end{array}$$

veiem que el primer no commuta, i el segon sí.

Definició 2.8. Siguin $M = (V_i, f_\alpha)$ i $N = (W_i, g_\alpha)$ dues representacions d'un mateix quiver Q . Definim la **suma directa** de representacions $L = M \oplus N$ com:

$$L = (V_i \oplus W_i, f_\alpha \oplus g_\alpha)$$

$V_i \oplus W_i$ indica la suma directa d'espais vectorials, i $f_\alpha \oplus g_\alpha$ ve definit com:

$$(f_\alpha \oplus g_\alpha)((v, w)) = (f_\alpha(v), g_\alpha(w))$$

Exemple 2.9. Considerem les següents representacions, prenent $f(x) = (x, 0)$:

$$M : k \xrightarrow{f} k^2 \quad ; \quad N : k \xrightarrow{1} k$$

Aleshores, la suma directa $L = M \oplus N$ serà:

$$L : k^2 \xrightarrow{g} k^3 \quad ; \quad g(x, y) = (f \oplus 1)(x, y) = (x, 0, y)$$

Finalment, podem prendre un quiver Q amb el conjunt de les seves representacions i el conjunt dels morfismes d'aquestes representacions per definir la **Categoria de representacions de Q** , que denotarem com $\text{Rep}(Q)$.

Això ho podem fer perquè:

1. El producte de morfismes és associatiu, és a dir, $\forall u, v, f \in \text{Hom}(M, N)$ es té $(uv)f = u(vf)$.
2. Tenim l'existència del morfisme identitat. Això és, $\forall M \in \text{Rep}(Q) \quad \exists 1_M \in \text{End}_Q(M)$ tal que $u1_M = u$ i $1_M v = v$ per a qualssevol morfismes $u : M \rightarrow N$, $v : L \rightarrow M$.

Definició 2.10. Sigui Q un quiver, n el número de vèrtexs (el cardinal de Q_0) i $M = (V_i, f_\alpha)$ una representació de Q . El **vector de dimensions** $\underline{\dim} M$ de M és el vector de $\mathbb{N}^n$ definit³ com:

$$\underline{\dim} M := (\dim(V_i))_{i \in Q_0} = (\dim(V_1), \dots, \dim(V_n))$$

El vector de dimensions està ben definit només si la representació M és de **dimensió finita**, això és, si tots els espais vectorials V_i són de dimensió finita.

Així doncs, clarament veiem que dues representacions isomorfes tenen el mateix vector de dimensions, però dues representacions amb el mateix vector de dimensions no són necessàriament isomorfes. Com descriure les diferents classes d'isomorfismes de representacions donat un quiver i donat un vector de dimensions suposa un dels principals problemes de la teoria de representacions de quivers, i és un dels objectius principals d'aquest treball.

³Aquí estem considerant el conjunt dels nombres naturals incloent el 0: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

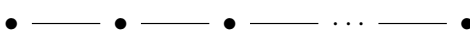
Definició 2.11. Direm que un quiver Q és de **tipus finit** si el nombre de classes d'isomorfismes de representacions per a qualsevol vector de dimensions donat és també finit.

Amb aquestes definicions, ja podem parlar del Teorema de Gabriel, que ens dona una descripció d'aquests quivers:

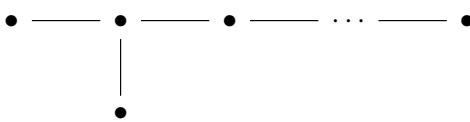
Teorema 2.12. (Teorema de Gabriel) Un quiver (connex) és de tipus finit si i només si el seu graf no dirigit subjacent és un diagrama de Dynkin de tipus ADE, amb $n \geq 1$ i $m \geq 4$ per A_n i D_m .

Tenint en compte que els subíndexs en les lletres A , D i E indiquen el número de vèrtexs, els **diagrames de Dynkin de tipus ADE** són :

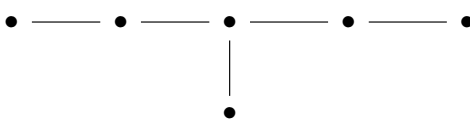
$A_n, n \geq 1$:



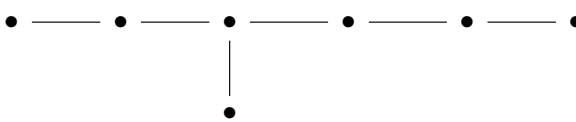
$D_m, m \geq 4$:



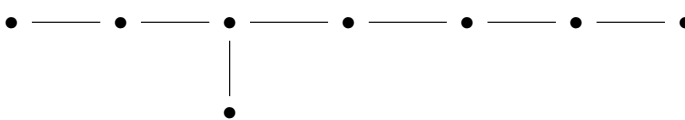
E_6 :



E_7 :



E_8 :



És important remarcar d'aquest teorema que simplement mirant com és el graf sense considerar el sentit de les fletxes podem saber si el quiver és de tipus finit o no.

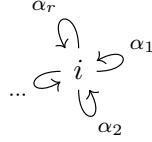
Pràcticament tot el que ve a continuació té com a objectiu principal demostrar aquest teorema tan important de la teoria de representacions de quivers. Abans, però, veurem alguns exemples de quivers per entendre la importància de tenir un teorema com el de Gabriel que ens permeti almenys identificar els quivers de tipus finit.

2.1 El problema de la classificació de les representacions

Per veure la magnitud del problema de descriure, i d'alguna manera classificar, les classes d'isomorfismes de les representacions de quivers de dimensió finita, explicarem amb més detall alguns dels exemples aparentment més senzills que podem tenir. El cas del quiver estrella és d'especial interès.

2.1.1 Loops

El quiver “ r -loop” L_r està definit per un sol vèrtex i amb r fletxes $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ tal que $s(\alpha_1) = \dots = s(\alpha_r) = t(\alpha_1) = \dots = t(\alpha_r) = i$. Si fem el dibuix:



Estudiem primer el cas L_1 : un sol vèrtex i una sola fletxa. Una representació M de L_1 estarà formada per un únic espai vectorial V i una única aplicació lineal f que serà un endomorfisme de V . El vector de dimensions de $M = (V, f)$ serà simplement $\dim(V) = n$.

Si considerem una altra representació $N = (W, g)$, un morfisme $\varphi : M \rightarrow N$ serà una aplicació lineal $u : V \rightarrow W$ tal que $uf = gu$. Aleshores els endomorfismes de M seran els endomorfismes de V tal que $uf = fu$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V \\ u \downarrow & & \downarrow u \\ W & \xrightarrow{g} & W \end{array} \quad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V \\ u \downarrow & & \downarrow u \\ V & \xrightarrow{f} & V \end{array}$$

Així doncs podem escriure f com una matriu A que és $n \times n$, escollint una base $\{v_j\}$ qualsevol de V . Ara bé, podem fer un canvi de base amb una matriu invertible C també $n \times n$ de forma que el conjugat $B = CAC^{-1}$ és la matriu de f en la nova base.

En altres paraules, al canviar de base estem definint una aplicació lineal bijectiva u que identifiquem amb la matriu C de forma que $f = u^{-1}fu$. És a dir, hem descrit un isomorfisme de representacions. Per tant:

Lema 2.13. *Les classes d'isomorfismes de les representacions de L_1 formen una bijecció amb les classes de conjugació de les matrius $n \times n$.*

D'altra banda, sabem que la matriu de qualsevol endomorfisme es pot escriure com una matriu de Jordan. Això implica que per a tota matriu A de f existeix una única matriu invertible C tal que $J = CAC^{-1}$ és una matriu de Jordan, i serà única llevat de permutació dels blocs de Jordan. Tenim doncs el següent resultat:

Corol·lari 2.14. *Dues representacions $M = (V, f)$ i $N = (W, g)$ de L_1 amb $\dim(V) = \dim(W)$ seran isomorfes si i només si f i g tenen la mateixa forma canònica de Jordan.*

Recordem que les matrius de Jordan s'escriuen com:

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1, \lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2, \lambda_2} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{n_r, \lambda_r} \end{pmatrix} \quad ; \quad J_{n_i, \lambda_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Observem doncs que les matrius de Jordan depenen dels valors propis λ_i de cada bloc de Jordan, els quals són paràmetres continus que ens determinaran com són els diferents endomorfismes. Per tant, al ser paràmetres no discrets, tindrem un nombre infinit de classes d'isomorfismes de representacions de L_1 . D'altra banda, si ens fixem en el graf no dirigit subjacent de L_1 (i de L_r), observem que no es correspon a cap dels diagrames de Dynkin. Per tant, pel Teorema de Gabriel (2.12), arribem a la mateixa conclusió: L_r no és de tipus finit.

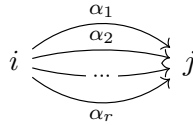
Per al cas general L_r , una representació M estarà formada per un espai vectorial V amb r endomorfismes $f_1, \dots, f_r$. En aquest cas, estenent el resultat anterior per r matrius i fixant el vector de dimensions un cop més com $\dim(V) = n$, obtenim:

Lema 2.15. *Les classes d'isomorfismes de les representacions de L_r formen una bijecció amb les r -tuples de matrius $n \times n$ llevat de conjugació simultània.*

El problema de classificar parells de matrius llevat de conjugació simultània no és un problema fàcil de resoldre, i encara menys si tenim r -tuples amb $r \geq 3$.

2.1.2 El quiver de Kronecker

El quiver de Kronecker de r -fletxes K_r està format per dos vèrtexs i, j amb r fletxes $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ tal que $s(\alpha_1) = \dots = s(\alpha_r) = i$; $t(\alpha_1) = \dots = t(\alpha_r) = j$. Així doncs:



Una representació M de K_r estarà donada per dos espais vectorials V i W , juntament amb r aplicacions lineals $f_k : V \rightarrow W$. És a dir: $M = (\{V, W\}, \{f_1, \dots, f_r\})$. El vector de dimensions serà $\underline{\dim} M = (\dim V, \dim W) = (m, n)$. La idea darrere de les classes d'isomorfismes de representacions és molt semblant a la de L_r . Per al quiver de Kronecker, però, en comptes de tenir una única matriu invertible per fer el canvi de base, en tindrem dues.

Partim del cas senzill K_1 , això és, $M = (\{V, W\}, f)$. Considerem A com la matriu $n \times m$ corresponent a l'aplicació lineal f . Considerem una altra representació $M' = (\{V', W'\}, f')$ tal que $V \simeq V'$ i $W \simeq W'$. Denotem B i C com les matrius $m \times m$ i $n \times n$ de canvi de base respectius, i D la matriu $n \times m$ de l'aplicació lineal f' . Aleshores, per tal que $M \simeq M'$, el següent diagrama ha de commutar:

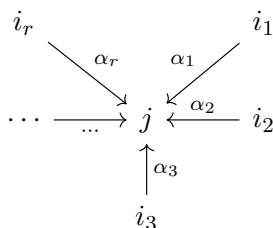
$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{A} & W \\ B \downarrow & & \downarrow C \\ V' & \xrightarrow{D} & W' \end{array}$$

És a dir, $D = CAB^{-1}$. En altres paraules, hem reescrit l'aplicació lineal f en altres bases. De la mateixa manera que L_1 i L_r , això es pot estendre a r aplicacions lineals. Així doncs:

Lema 2.16. *Les classes d'isomorfismes de les representacions de K_r formen una bijecció amb les r -tuples de matrius $n \times m$ llevat de multiplicació simultània de matrius invertibles $m \times m$ per la dreta i de matrius invertibles $n \times n$ per l'esquerra.*

D'altra banda, per K_r amb $r \geq 2$ el quiver ja no és de tipus finit, i classificar les r -tuples de matrius tampoc és fàcil.

El quiver estrella S_r ve donat per $r + 1$ vèrtexs $i_1, \dots, i_r, j$, juntament amb r fletxes $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, de forma que $s(\alpha_1) = i_1, \dots, s(\alpha_r) = i_r$; $t(\alpha_1) = \dots = t(\alpha_r) = j$. Si fem la representació gràfica:



Comencem considerant dues representacions $M = (\{V_1, V_2, W\}, \{f_1, f_2\})$ i $N = (\{A_1, A_2, B\}, \{g_1, g_2\})$ de S_2 amb el mateix vector de dimensions (m_1, m_2, n) . Siguin $E_i = f_i(V_i) \subseteq W$ i $D_i = g_i(A_i) \subseteq B$ els subespais imatge.

$$\begin{array}{ccccc} V_1 & \xrightarrow{f_1} & W & \xleftarrow{f_2} & V_2 \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_w & & \downarrow \varphi_2 \\ A_1 & \xrightarrow{g_1} & B & \xleftarrow{g_2} & A_2 \end{array}$$

Comencem escollint bases $\{v_j^1\}, \{v_j^2\}, \{a_j^1\}, \{a_j^2\}$ de V_1, V_2, A_1, A_2 , respectivament. Com $\dim(V_1) = \dim(A_1)$, podem definir una aplicació lineal bijectiva φ_1 que envii els vectors de la base $\{v_j^1\}$ als vectors de la base $\{a_j^1\}$. De la mateixa manera, definim φ_2 per enviar $\{v_j^2\}$ a $\{a_j^2\}$ perquè $\dim(V_2) = \dim(A_2)$.

Fem el mateix amb D_1 i D_2 , amb bases $\{d_j^1\}$ i $\{d_j^2\}$, que generaran $D_1 + D_2 = B' \subseteq B$, que després ampliïem amb vectors $\{b_j\}$ per generar el que queda de B .

Aleshores, per poder trobar una correspondència bijectiva $\varphi_w : W \rightarrow B$ entre les dues bases anteriors per tal que el diagrama commuti, hem de fer les següents assignacions:

$$\{e_j^1\} \rightarrow \{d_j^1\}; \{e_j^2\}' \rightarrow \{d_j^2\}'; \{w_j\} \rightarrow \{b_j\}$$

On $\{e_j^2\}'$ i $\{d_j^2\}'$ són els vectors necessaris que hem agafat per fer les ampliacions. La quantitat de vectors que caldran dependran en aquest cas de les interseccions $E_1 \cap E_2$ i $D_1 \cap D_2$, i de les dimensions de E_1, E_2, D_1, D_2 .

La idea de tot aquest procés de definir les bijeccions, ampliar bases i assignar vectors es pot ampliar per a $r \geq 2$, i ja veiem que la clau per establir correctament un isomorfisme de representacions de S_r es troba en com són els subespais imatge, tots continguts en un sol espai vectorial assignat al vèrtex j .

Assignem ara $r + 1$ espais vectorials $V_1, \dots, V_r, W$ i r aplicacions lineals $f_i : V_i \rightarrow W$ als vèrtexs i fletxes, respectivament, per tenir una representació qualsevol M de S_r .

Si prenem $E_1, \dots, E_r$ els subespais imatge de W donats per les aplicacions lineals, això és, $E_i = f_i(V_i) \subseteq W$ per a cada i , és obvi que s'ha de complir que $\dim(E_i) \leq \dim(V_i)$. Fixem doncs un vector de dimensions sense especificar els espais vectorials ni les aplicacions lineals: $(m_1, \dots, m_r, n)$.

Considerant la bijecció φ_w com una matriu quadrada invertible de dimensió $\dim(W) = n$, obtenim el següent resultat:

Lema 2.17. *Les classes d'isomorfismes de les representacions de S_r amb igual vector de dimensions formen una bijecció amb les òrbites del grup lineal general $\text{GL}(n)$ actuant sobre r -tuples $(E_1, \dots, E_r)$ de subespais de k^n tal que $\dim(E_i) \leq m_i \forall i$ mitjançant*

$$g \cdot (E_1, \dots, E_r) := (g(E_1), \dots, g(E_r))$$

Hi ha un parell de consideracions però a tenir en compte en aquesta explicació que hem fet per a S_2 (que s'estén per a qualsevol S_r).

En primer lloc, els vectors $\{w_j\}$ i $\{b_j\}$ que emprem per acabar d'ampliar les bases per generar W i B , respectivament, es poden agafar de maneres diferents tot mantenint les assignacions dels subespais imatge i la bijecció φ_w . Això és, la matriu $g \in \text{GL}(n)$ no serà única mentre tinguem aquesta llibertat d'agafar $\{w_j\}$ i $\{b_j\}$. Perquè això passi, s'ha de donar la situació que la suma dels subespais imatge no sigui tot W (i B).

En segon lloc, s'han considerat les aplicacions lineals $\{f_i\}$ i $\{g_i\}$ com si fossin bijectives, i d'aquesta manera les φ_i queden unívocament determinades per φ_w (és a dir, per $g \in \text{GL}(n)$). Ara bé, si tenim que alguna de les f_i (i llavors alguna de les g_i) no és injectiva, també hi ha més llibertat per definir les aplicacions bijectives φ_i tot mantenint l'isomorfisme de representacions entre M i N .

Resumint:

Corol·lari 2.18. *Siguin $M = (\{V_1, \dots, V_r, W\}, \{f_1, \dots, f_r\})$ i $N = (\{A_1, \dots, A_r, B\}, \{g_1, \dots, g_r\})$ dues representacions de S_r amb $\underline{\dim} M = \underline{\dim} N$, i $E_i = f_i(V_i) \subseteq W$ i $D_i = g_i(A_i) \subseteq B$ els subespais imatge. Aleshores:*

1. *Si $M \simeq N \Rightarrow \exists g \in \text{GL}(n)$ tal que $g(E_1), \dots, g(E_r) = D_1, \dots, D_r$. En particular, g no serà única si $E_1 + \dots + E_r \subsetneq W$.*

2. Si $\exists g \in \text{GL}(n)$ tal que $g(E_1), \dots, g(E_r) = D_1, \dots, D_r \Rightarrow M \simeq N$. En particular, aquest isomorfisme no serà únic si $\dim(E_i) < \dim(V_i)$ per algun i .

Amb tot això, observem que el problema de classificar les representacions del quiver estrella es “reduïx” a classificar r -tuples de subespais d’un espai vectorial que hem fixat prèviament. És per aquesta raó que la notació per als subespais de k^n i per als subespais imatges s’ha mantingut igual, ja que els primers ens determinaran com són els segons.

Exemple 2.19. Prenem S_2 , i fixem el vector de dimensions $(m_1, m_2, n) = (1, 2, 3)$. Per classificar les classes d’isomorfismes de les representacions s’han de classificar les òrbites per l’acció de $\text{GL}(3)$. Això implica classificar les 2-tuples de subespais de k^3 de dimensions $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, que corresponen a $(\dim(E_1), \dim(E_2)) \leq (m_1, m_2)$.

Bé, encara que haguem fet una caracterització per classificar les classes de S_r , només hem fet un pas. El següent seria veure com classificar aquestes r -tuples de subespais.

Cas $r = 1$: És el mateix cas que K_1 , estudiat abans.

Cas $r = 2$: Per S_2 les 2-tuples de subespais (E_1, E_2) vindran determinades per les tripletes $(\dim(E_1), \dim(E_2), \dim(E_1 \cap E_2))$.

Demostració. La quantitat de vectors $\{e_j^2\}'$ i $\{d_j^2\}'$ (seguint la notació de l’explicació anterior) que caldran per fer les ampliacions de les bases dependran com ja hem dit de les interseccions $E_1 \cap E_2$ i $D_1 \cap D_2$, i de les dimensions de E_1, E_2, D_1, D_2 ja que, en el fons, tot aquest procés d’ampliar bases i assignar vectors per a només 2 subespais és conseqüència de Grassmann:

$$\begin{aligned}\dim(E_1 + E_2) &= \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2) \\ \dim(D_1 + D_2) &= \dim(D_1) + \dim(D_2) - \dim(D_1 \cap D_2)\end{aligned}$$

I és per això que l’isomorfisme de representacions $\varphi : M \rightarrow N$ existirà si i només si $\dim(E_1) = \dim(D_1)$, $\dim(E_2) = \dim(D_2)$ i $\dim(E_1 \cap E_2) = \dim(D_1 \cap D_2)$. $\square$

Per tant, tenim un nombre finit de classes d’isomorfismes de les representacions de S_2 quan fixem un vector de dimensions.

Exemple 2.20. Reprenem l’exemple (2.19) de S_2 . Per a les 2-tuples descrites abans, tindrem les següents tripletes:

$$\begin{array}{ll}(0,0) \rightarrow (0,0,0) & (1,0) \rightarrow (1,0,0) \\ (0,1) \rightarrow (0,1,0) & (1,1) \rightarrow (1,1,0), (1,1,1) \\ (0,2) \rightarrow (0,2,0) & (1,2) \rightarrow (1,2,0), (1,2,1)\end{array}$$

Tenim doncs un total de 8 classes d’isomorfismes de les representacions de S_2 donat el vector de dimensions $(1,2,3)$.

Cas $r = 3$: Per S_3 també es pot demostrar que el quiver és de tipus finit. En aquest cas els arguments utilitzats per S_2 no els podem fer servir, i sense emprar el Teorema de Gabriel la demostració és més complicada a fer.

Cas $r \geq 4$: El nombre total de classes d'isomorfismes deixa de ser finit a partir d'aquí. Si prenem com a exemple el vector de dimensions $(1, \dots, 1, 2)$ amb les aplicacions lineals diferents de 0, es té que les classes d'isomorfismes de S_r formen una bijecció amb les òrbites del grup lineal projectiu $\text{PGL}(2)$ actuant en el producte de r còpies de la recta projectiva: $\mathbb{P}^1(k) \times \dots \times \mathbb{P}^1(k)$.

Considerem el cas $r = 4$ amb el vector de dimensions $(1, 1, 1, 2)$. Si ens situem en la recta projectiva $\mathbb{P}^1(k)$, estem prenent els subespais de k^2 de les quàdruples (E_1, E_2, E_3, E_4) com a punts de $\mathbb{P}^1(k)$.

Aleshores, agafem com a referència projectiva⁴ $\mathcal{R} = (E_1, E_2; E_3)$, suposant el cas general en què E_1, E_2 i E_3 són diferents. Tenim $E_1 = [1 : 0], E_2 = [0 : 1], E_3 = [1 : 1]$. L'últim punt, però, no el podem determinar amb exactitud en aquesta referència. L'hem d'escriure amb un paràmetre indeterminat $\lambda \in k$, de manera que $E_4 = [1 : \lambda]$.

Per la bijecció de les òrbites amb les classes d'isomorfismes, hem definit en realitat la següent família (uniparamètrica) infinita de classes de S_4 , que dependrà del paràmetre λ :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & k & \\
 & & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \\
 k & \longrightarrow & k^2 & \longleftarrow & k \\
 & & \uparrow k & & \\
 & & k & &
 \end{array}
 \implies
 \begin{array}{ccccc}
 & & & k & \\
 & & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} & \\
 k & \longrightarrow & k^2 & \longleftarrow & k \\
 & & \uparrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & & \\
 & & k & &
 \end{array}$$

A més a més, veim que si prenem uns altres subespais (E'_1, E'_2, E'_3, E'_4) (és a dir, una altra representació i per tant una altra referència), existeix una única projectivitat $\varphi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ assignant $\varphi(E_1) = \varphi(E'_1), \varphi(E_2) = \varphi(E'_2), \varphi(E_3) = \varphi(E'_3)$ pel Teorema Fonamental de la Geometria Projectiva, però no necessàriament $\varphi(E_4) = \varphi(E'_4)$.

Del Teorema de Gabriel es dedueix també que S_1, S_2 i S_3 són de tipus finit perquè els seus grafs no dirigits subjacents es corresponen als diagrames de Dynkin $\mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3$ i $\mathbb{D}_4$, respectivament.

2.2 L'àlgebra del quiver i l'estructura de les representacions

El següent pas que farem és donar-li als quivers una certa estructura algebraica que ens permetrà emprar resultats de mòduls sobre k -àlgebres per als quivers.

2.2.1 L'àlgebra kQ i l'àlgebra de camins

Fixem un quiver qualsevol $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ i una representació $M = (V_i, f_\alpha)$ de Q . Definim el següent espai vectorial:

$$V := \bigoplus_{i \in Q_0} V_i$$

⁴Aquí escriurem de forma indistinta els punts de $\mathbb{P}^1(k)$ i els subespais.

I les aplicacions lineals d'aquest espai vectorial en ell mateix:

$$\begin{aligned} f_i : V &\xrightarrow{p} V_i \xhookrightarrow{i} V \quad ; \quad i \in Q_0 \\ f'_\alpha : V &\xrightarrow{p} V_{s(\alpha)} \xrightarrow{f_\alpha} V_{t(\alpha)} \xhookrightarrow{i} V \quad ; \quad \alpha \in Q_1 \end{aligned}$$

Les aplicacions p són projeccions, les aplicacions i són inclusions i les aplicacions f_α són aquelles definides per la pròpia definició (2.3) de representació de quiver. Aleshores, podem veure que aquestes aplicacions compleixen:

$$f_i f_j = \delta_{ij} f_i \quad ; \quad f_{t(\alpha)} f'_\alpha = f'_\alpha f_{s(\alpha)} = f'_\alpha \quad (2.1)$$

Qualsevol altre producte és igual a 0. Això vol dir que:

$$f_i f'_\alpha = \begin{cases} f'_\alpha, & i = t(\alpha) \\ 0, & \text{altrament} \end{cases} \quad f'_\alpha f_i = \begin{cases} f'_\alpha, & i = s(\alpha) \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

Definició 2.21. *L'àlgebra associativa del quiver Q , que anomenarem kQ_1 , és l'àlgebra determinada pels generadors $\{f_i\}_{i \in Q_0}$ i $\{f'_\alpha\}_{\alpha \in Q_1}$, juntament amb les relacions (2.1).*

Un cop més, fixem un quiver qualsevol Q .

Definició 2.22. *Un camí p ("path") de longitud l d'un quiver Q és una successió de fletxes $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ tal que $t(\alpha_j) = s(\alpha_{j+1})$ per $j = 1, \dots, l-1$. L'origen del camí és $s(p) = s(\alpha_1)$ i el destí del camí és $t(p) = t(\alpha_l)$.*

Considerarem també els camins de longitud 0 (**camins trivials**), que denotarem per e_i , de manera que per a qualsevol vèrtex $i \in Q_0$ es té $s(e_i) = t(e_i) = i$. Direm que un camí p és un **cicle orientat** si és no trivial i $s(p) = t(p)$. Clarament els camins de longitud 1 es corresponen a les fletxes.

Siguin ara $p = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ i $p' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_m)$ dos camins diferents d'un mateix quiver. De forma natural podem definir la multiplicació de camins fent la seva concatenació:

$$p'p = \begin{cases} (\alpha_1, \dots, \alpha_l, \alpha'_1, \dots, \alpha'_m), & s(\alpha'_1) = t(\alpha_l) \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

I considerant els camins de longitud 0:

$$e_i p = \begin{cases} p, & i = t(p) \\ 0, & \text{altrament} \end{cases} \quad p e_i = \begin{cases} p, & i = s(p) \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

Considerant doncs només les fletxes i els vèrtexs, obtenim:

$$e_i e_j = \delta_{ij} e_i \quad ; \quad e_{t(\alpha)} \alpha = \alpha e_{s(\alpha)} = \alpha \quad (2.2)$$

Definició 2.23. *L'àlgebra de camins de Q , que anomenarem kQ_2 , és l'àlgebra determinada pels generadors $\{e_i\}_{i \in Q_0}$ i $\{\alpha\}_{\alpha \in Q_1}$, juntament amb les relacions (2.2)*

Veiem que aquestes dues àlgebres són essencialment la mateixa, ja que els camins de kQ_2 generen kQ_1 , són linealment independents i satisfan les mateixes relacions que els generadors de kQ_1 . Parlarem d'elles, doncs, de forma indistinta ja estiguem considerant una o l'altra. Per tant, les denotarem igual: $kQ_1 = kQ_2 \equiv kQ$. De la mateixa manera, $f_i \equiv e_i$; $f'_\alpha \equiv \alpha$.

Hi ha una propietat rellevant a considerar de kQ que farem servir més endavant: els generadors $\{e_i\}_{i \in Q_0}$ formen un **conjunt complet d'idempotents ortogonals** de kQ :

1. Idempotents ortogonals: perquè $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$.
2. Complet: perquè $\sum_{i \in Q_0} e_i = 1$.

En la secció 3 veurem que aquests idempotents són també **primitius**, això és, per a qualsevol idempotent e_i no existeixen idempotents e_1, e_2 no nuls tals que $e_i = e_1 + e_2$. Serà quelcom important per caracteritzar les representacions indescomponibles.

Finalment, obtenim el següent resultat:

Teorema 2.24. *Sigui Q un quiver qualsevol. La categoria de les representacions $\text{Rep}(Q)$ és equivalent a la categoria $kQ\text{-Mod}$ dels kQ -mòduls esquerra.*

Una demostració més detallada sobre aquest teorema es pot veure a la secció 4.3 de [MD18]. Bàsicament s'han de definir dos functors $F : \text{Rep}(Q) \rightarrow kQ\text{-Mod}$ i $G : kQ\text{-Mod} \rightarrow \text{Rep}(Q)$ que siguin inversos entre sí de forma que $\text{Rep}(Q) \cong kQ\text{-Mod}$.

Per procedir a definir F es fa amb la construcció que hem fet de l'àlgebra kQ (en particular, de kQ_1). Si s'agafa una representació M qualsevol de Q i l'espai V associat, el mòdul corresponent a $kQ\text{-Mod}$ vindrà donat per l'acció dels operadors e_i sobre $V = \bigoplus_{i \in Q_0} V_i$.

En el cas de G , es defineix $M_i = e_i M$ per a un mòdul M qualsevol de $kQ\text{-Mod}$. Per a cada fletxa $\alpha : i \rightarrow j$ es té que $\alpha(M_i) \subset M_j$ perquè $\alpha = e_j \alpha$, obtenint així una aplicació lineal $f_\alpha : V_i \rightarrow V_j$ per a cada $\alpha \in Q_1$. És a dir, tenim una representació de Q .

Finalment, per als morfismes de representacions de Q i per als morfismes de mòduls de $kQ\text{-Mod}$ els functors estaran definits com:

1. Sigui $h : M \rightarrow N$ un morfisme de representacions de $M = (V_i, f_\alpha)$ i $N = (U_i, t_\alpha)$. $F(h) : F(M) \rightarrow F(N)$ estarà definida per $F(h)_i = F(h)|_{V_i}$, aplicant la suma directa donada per $V = \bigoplus_{i \in Q_0} V_i$ (que anirà a parar a la imatge de $U = \bigoplus_{i \in Q_0} U_i$).
2. Sigui $g : M \rightarrow N$ un morfisme de mòduls. $G(g) : G(M) \rightarrow G(N)$ estarà definida per $G(g)_i = G(g)|_{e_i M}$.

Per tant, parlarem també de forma indistinta de mòduls esquerra de kQ o de representacions de Q (com de la categoria $\text{Rep}(Q)$ o de la categoria $kQ\text{-Mod}$). Amb això, tota la teoria de mòduls sobre àlgebres no commutatives es pot portar aquí per caracteritzar les representacions de quivers, amb tots els resultats i propietats que això comporta.

Exemple 2.25. Considerem el quiver de Kronecker $Q = K_2$, i una representació qualsevol $M = (V_1, V_2, f_\alpha, f_\beta)$ de K_2 :

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} 2 \quad ; \quad V_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{f_\alpha} \\ \xleftarrow{f_\beta} \end{array} V_2$$

L'àlgebra de camins kQ tindrà com a base $\{e_1, e_2, \alpha, \beta\}$, i per tant:

$$kQ = \langle e_1, e_2, \alpha, \beta \rangle \text{ tal que } \begin{cases} e_1^2 = e_1, & \alpha e_1 = e_2 \alpha = \alpha \\ e_2^2 = e_2, & \beta e_1 = e_2 \beta = \beta \end{cases}$$

I el mòdul corresponent a la representació M estarà determinat per l'espai $V_1 \oplus V_2 = e_1 M \oplus e_2 M$, juntament amb els generadors i les relacions anteriors. Si considerem un element $(v_1, v_2) \in V_1 \oplus V_2$, pel que acabem de dir es té per exemple que:

$$e_1^2(v_1, v_2) = (v_1, 0) = e_1(v_1, v_2) \quad ; \quad \alpha(v_1, v_2) = (0, f_\alpha(v_1))$$

Exemple 2.26. Prenem el quiver loop L_1 , format per un sol vèrtex 1 i una sola fletxa α . Aleshores, veiem que l'àlgebra kL_1 tindrà com a base $\{e_1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots\} = \{\alpha^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (on hem abusat de notació considerant $\alpha^0 = e_1$). Així doncs, veiem que és isomorfa a l'àlgebra de polinomis en una sola variable: $kL_1 \simeq k[X]$.

De forma més general, per al quiver L_r tindrem que $kL_r \simeq k\langle X_1, \dots, X_r \rangle$. És a dir, els camins són paraules (o monomis no commutatius) en les variables $X_1, \dots, X_r$.

A arrel d'aquest exemple, observem que L_r té una base amb infinits elements: és de dimensió infinita. Aquest fet es pot estendre a quivers amb cicles orientats. Si prenem un cicle orientat γ de Q veiem que, de forma semblant al loop, el conjunt $\{\gamma^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ estarà contingut dins la base de kQ , i per tant kQ és de dimensió infinita. Arribem així al següent resultat:

Corol·lari 2.27. *L'àlgebra kQ d'un quiver Q és de dimensió finita si i només si no té cicles orientats.*

2.2.2 (In)descomposabilitat de les representacions

En aquesta secció parlarem d'alguns resultats de mòduls sobre àlgebres per estructurar les representacions de quivers. En particular, quan i com es poden descompondre les representacions en d'altres més petites.

Per qüestió d'espai, i pel fet que molts d'ells provenen de la teoria de mòduls, no tots els resultats que es mencionin els demostrarem en detall. No obstant això, sí que hi ha definicions i propietats de mòduls que recordarem perquè són essencials per caracteritzar les representacions de quivers i tot el que vindrà més endavant.

Així doncs, considerarem una àlgebra associativa A qualsevol fixada, amb els seus A -mòduls esquerra⁵ corresponents, que considerarem finitament generats.

Definició 2.28. *Un mòdul M és:*

1. **Simple (o irreducible):** *si els seus únics submòduls són el 0 i ell mateix.*
2. **Semisimple (o completament reductible):** *si es pot descompondre en una suma directa de submòduls simples.*
3. **Indescomponible:** *si $M \neq 0$ i no es pot escriure com la suma directa de submòduls diferents de 0.*

⁵Notació: Si no s'indica el contrari, a partir d'ara quan s'escrigui *mòdul* estarem parlant d'un A -mòdul (esquerra).

Amb aquestes definicions veiem que tot mòdul simple és també indescomponible. Però l'invers no sempre és cert. Veiem algun exemples de representacions:

Exemple 2.29. Considerem les següents representacions:

$$A : k \longrightarrow 0 \quad ; \quad B : 0 \longrightarrow k \quad ; \quad C : k \xrightarrow{1} k \quad ; \quad D : k \xrightarrow{0} k$$

Tenim que:

1. A, B són simples, i per tant indescomposables.
2. $D = A \oplus B$ és semisimple.
3. C és indescomponible, però no és simple.

Una propietat rellevant dels mòduls simples és la següent:

Lema 2.30. (Lema de Schur) *Siguin M i N dos mòduls simples. Llavors qualsevol morfisme $f : M \rightarrow N$ diferent de 0 és un isomorfisme.*

Demostració. Tenim que el nucli de f és un submòdul de M i la imatge de f un submòdul de N . Si $f \neq 0$, ni el nucli és M , ni la imatge és 0. Aleshores, com M i N són simples, el nucli i la imatge són 0 i N , respectivament. És a dir, f és injectiva i exhaustiva. $\square$

Una conseqüència d'aquest lema, afegint el fet que A sigui una k -àlgebra de dimensió finita sobre un cos k algebraicament tancat, és que⁶ $\text{End}_A(M) = k \text{id}_M$.

Per als mòduls semisimples tenim d'altra banda que, per la seva pròpia definició:

$$M \simeq \bigoplus_{i=1}^m a_i M_i \tag{2.3}$$

Els valors a_i són nombres naturals diferents de 0, i els mòduls M_i són simples no isomorfs dos a dos, unívocament determinats pel lema (2.30) llevat de l'ordre de la suma directa. Això és, si tenim dues descomposicions de M en mòduls simples $M \simeq \bigoplus_{i=1}^m a_i M_i \simeq \bigoplus_{j=1}^n b_j N_j$, aleshores es té que $m = n$ i existeix una permutació σ de $\{1, \dots, m\}$ tal que $M_i \simeq N_{\sigma(j)}$.

A més a més, com $\text{End}_A(M_i) = k \text{id}_{M_i}$ per a tot $i \in \{1, \dots, m\}$, es té que:

$$\text{End}_A(M) \simeq \prod_{i=1}^m \text{End}_A(a_i M_i) \simeq \prod_{i=1}^m \text{Mat}_{a_i \times a_i}(\text{End}_A(M_i)) \simeq \prod_{i=1}^m \text{Mat}_{a_i \times a_i}(k) \tag{2.4}$$

On $\text{Mat}_{a_i \times a_i}$ serveix per indicar matrius de a_i files i a_i columnes en aquest cas.

Havent definit tot això, comencem ara ja fent una primera caracterització de les representacions (mòduls) simples. Considerem així la següent representació simple $S(i)$, definida com:

$$S(i)_{j \in Q_0} = \begin{cases} k, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad ; \quad f_\alpha = 0 \quad \forall \alpha \in Q_1 \tag{2.5}$$

⁶Per l'equivalència de mòduls i representacions, es compleix que $\text{End}_A(M) = \text{End}_Q(M)$.

Proposició 2.31. *Segui Q un quiver sense cicles orientats. Aleshores qualsevol representació simple de Q és isomorfa a $S(i)$, per a un únic $i \in Q_0$.*

Demostració. En primer lloc, fixem-nos que l'àlgebra kQ es pot escriure, emprant les definicions i la notació de l'àlgebra de camins, sempre com:

$$kQ = kQ_{\geq 1} \oplus \bigoplus_{i \in Q_0} ke_i$$

$kQ_{\geq n}$ denota l'espai generat en kQ per tots els camins de longitud n o superior. En particular, $kQ_{\geq 1}$ denota l'espai generat per les fletxes del quiver, que també podem considerar com un ideal de kQ , i a més es té que $(kQ_{\geq 1})^n = kQ_{\geq n}$.

Ara, fixem-nos que un quiver sense cicles orientats sempre tindrà almenys un vèrtex que no sigui el destí d'una fletxa, això és, $\exists j \in Q_0 \mid \forall \alpha \in Q_1, t(\alpha) \neq j$, cosa la qual implica que $e_j \notin kQ_{\geq 1}$. Prenent un kQ -mòdul M qualsevol, es té doncs que $M \neq kQ_{\geq 1}M \subseteq M$. A més a més, si M és simple, tindrem doncs que $kQ_{\geq 1}M = \{0\}$.

Aleshores, podem considerar M com un mòdul sobre l'àlgebra quocient següent:

$$kQ/kQ_{\geq 1} \simeq \bigoplus_{i \in Q_0} ke_i \simeq \prod_{i \in Q_0} k$$

D'aquesta manera, els subespais donats per $e_i M$ seran tots submòduls de M . Al ser M simple, M haurà de ser isomorf a un sol $e_i M$ que sigui diferent de 0. En altres paraules, $\exists! i \in Q_0 \mid M \simeq S(i)$.

□

Exemple 2.32. Considerem el quiver loop L_1 format per un sol vèrtex i , i les següents representacions:

$$M : k \overset{1}{\curvearrowright} \quad ; \quad N : k \overset{0}{\curvearrowright}$$

$N \simeq S(i)$ és clarament simple. Tanmateix, $M \not\simeq S(i)$ també ho és. Un podria creure que $N \subseteq M$, però observem que el següent diagrama no commuta:

$$\begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{0} & k \\ \downarrow & & \downarrow \\ k & \xrightarrow{1} & k \end{array}$$

Lema 2.33. *Qualsevol representació semisimple M de dimensió finita està unívocament determinada pel seu vector de dimensions, llevat d'isomorfisme.*

Demostració. Tenim que es compleix:

$$M \simeq \bigoplus_{i \in Q_0} a_i M_i \simeq \bigoplus_{i \in Q_0} a_i S(i)$$

El primer isomorfisme ve donat per la descomposició en mòduls simples (2.3), i el segon per la proposició anterior.

Com el vector de dimensions de $S(i)$ és de la forma $\underline{\dim} S(i) = (0, \dots, \dim(k), \dots, 0) = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, on $\dim(k)$ es troba en la posició i -èssima del vector, aleshores el vector de dimensions de M serà:

$$\underline{\dim} M = (a_1, \dots, a_m) \quad ; \quad \{1, \dots, m\} = Q_0.$$

□

És important remarcar que aquest darrer resultat per representacions semisimples, que hem demostrat de forma relativament ràpida i senzilla, és també cert per a representacions indescomponibles. No obstant això, per a les representacions indescomponibles necessitarem molt més esforços per fer-ho, i serà quelcom clau per demostrar el Teorema de Gabriel. Fins pràcticament al final de tot aquest treball no ho podrem demostrar.

Malauradament, no totes les representacions són només simples o semisimples, i no és suficient amb el que hem fet. Tanmateix, el següent teorema ens porta un pas més a prop del que volem, per classificar qualsevol representació (finita).

Teorema 2.34. (Teorema de Krull-Schmidt) *Segui M un A -mòdul de dimensió finita. Aleshores, M es pot descompondre com:*

$$M \simeq \bigoplus_{i=1}^m a_i M_i \tag{2.6}$$

*Els valors a_i són nombres naturals diferents de 0, i els mòduls M_i són **indescomponibles** no isomorfs dos a dos. Tant els mòduls M_i com els nombres a_i estan unívocament determinats llevat de l'ordre de la suma directa.*

Una demostració d'aquest teorema es pot veure al teorema 1.4.6 de [Ben91] o al teorema 2.2 de [ARS95].

Gràcies a aquest teorema, veiem que caracteritzant les representacions indescomponibles de forma semblant al que hem fet per les simples i semisimples ja en tenim suficient per veure com és una representació finita qualsevol.

3 La resolució estàndard i la forma de Tits

En aquest capítol entra en joc l'àlgebra homològica, una part de l'àlgebra que va aparèixer en el context de la topologia i que permet “desplegar” la complexitat d'un mòdul en un complex, és a dir, en una cadena de mòduls més senzills (projectius o lliures). Els morfismes entre aquests mòduls més senzills venen “control·lats” per la (co)homologia (considerem que són el més senzills possibles quan $\text{Ker } d_i = \text{Im } d_{i+1}$, i la (co)homologia mesura com de lluny estan d'això). En el cas dels mòduls sobre l'àlgebra de camins, veurem que els complexos que necessitem per “desplegar” els nostre mòduls són molt senzills (cosa que indica que els mòduls també ho són), i amb això podrem definir la forma de Tits d'un quiver.

3.1 Mòduls projectius

Recordem primer la definició de mòdul projectiu (que en el fons és una definició que es fa servir per a qualsevol objecte d'una categoria abeliana qualsevol).

Definició 3.1. *Un mòdul P s'anomena **projectiu** si per a tot morfisme exhaustiu $f : M \rightarrow N$ i per a tot morfisme $g : P \rightarrow N$ existeix un morfisme $h : P \rightarrow M$ tal que $g = fh$. El morfisme h no és necessàriament únic.*

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \exists h \swarrow & \downarrow \forall g & \\ M & \xrightarrow{\forall f(\text{exhaustiu})} & N \end{array}$$

Mencionarem ara algunes propietats rellevants dels mòduls projectius que ens seran útils. Les demostracions d'aquestes propietats poden veure's principalment a la secció 5.1 de [HGK04] i a la secció 4.5 de [Bar15] :

Proposició 3.2. *Sigui A una àlgebra. Aleshores:*

1. *Els mòduls lliures⁷ són projectius.*
2. *Un mòdul P que es pot escriure com la suma directa $P \simeq \bigoplus_i P_i$ és projectiu si i només si cada P_i és projectiu. En particular, tot sumand directe d'un mòdul projectiu és també projectiu.*
3. *Un mòdul P és projectiu si i només si P és un sumand directe d'un mòdul lliure.*
4. *Tot mòdul projectiu que sigui a més a més indescomponible és isomorf a un sumand directe de A .*

Prenem l'àlgebra $A = kQ$ i el conjunt complet d'idempotents ortogonals $\{e_i\}_{i \in Q_0}$ que hem definit a la secció anterior. Considerant kQ com un kQ -mòdul en sí mateix s'obtenen les següents descomposicions:

$$1 = \sum_{i \in Q_0} e_i \implies kQ \simeq \bigoplus_{i \in Q_0} P(i) \quad (3.1)$$

⁷Un mòdul és lliure bàsicament quan té una base.

Cada mòdul $P(i)$ és l'espai generat per tots els camins amb origen en el vèrtex $i \in Q_0$, és a dir, és l'ideal $P(i) := kQe_i$.

D'aquesta descomposició veiem doncs que tots els $P(i)$ són projectius perquè són sumands directes de kQ , que és un mòdul lliure.

A part d'això, els mòduls $P(i)$ són també indescomponibles. Necessitem però els dos lemes que venen a continuació, que podem trobar enunciats en el lema 1.3.5 de [Bri08].

Una qüestió de notació abans de seguir: $P(e) := Ae$ (aquí emprarem idempotents d'àlgebres qualssevol sense afegir el subíndex i cada cop, per comoditat). És a dir, $P(i)$ i $P(e)$ són essencialment el mateix.

Lema 3.3. *Sigui A una àlgebra qualsevol, també vista com un A -mòdul. Considerem un A -mòdul M i un idempotent e qualsevol de A . Llavors existeixen isomorfismes*

$$\mathrm{Hom}_A(M, P(e)) \simeq Me \quad ; \quad \mathrm{Hom}_A(P(e), M) \simeq eM$$

En particular, existeix un isomorfisme d'àlgebres

$$\mathrm{End}_A(P(e)) \simeq eAe \tag{3.2}$$

L'enunciat i la demostració es poden veure en el lema 1.3.3. de [Ben91].

Lema 3.4. *Agafant les mateixes condicions del lema anterior, tenim que les següents condicions són equivalents:*

1. *e és l'únic idempotent de eAe .*
2. *$P(e)$ és indescomponible.*
3. *e és primitiu.*

Demostració. Emprarem els negats d'aquestes condicions per demostrar les equivalències.

1) $\Rightarrow$ 2) Suposem que $P(e)$ és descomponible. Això és, tenim submòduls M i N tals que $P(e) = M \oplus N$. Aleshores, veiem que els morfismes projeccions (amb la inclusió)

$$\begin{array}{ccc} p_M : M \oplus N \rightarrow M \oplus N & & p_N : M \oplus N \rightarrow M \oplus N \\ m + n \mapsto m & & m + n \mapsto n \end{array}$$

són clarament idempotents. Aleshores, tenim més d'un idempotent en $\mathrm{End}_A(P(e))$, que és isomorf a eAe pel lema anterior.

2) $\Rightarrow$ 3) Suposem que e no és primitiu. Existeixen doncs idempotents f i g tals que $e = f + g$. Llavors, $P(e) = Ae = A(f + g) = Af + Ag$. És a dir, $P(e)$ és descomponible.

3) $\Rightarrow$ 1) Suposem que existeix un altre idempotent en eAe a part de e . Sigui $efe \in eAe$ aquest idempotent. Provem primer que $e - efe$ és també idempotent:

$$\begin{aligned} (e - efe)^2 &= e^2 - e^2fe - efe^2 + (efe)^2 \\ &= e - 2efe + efe \\ &= e - efe \end{aligned}$$

Per tant, com $e = efe + (e - efe)$, e no és primitiu. □

En aquest cas, tornant a la notació de quivers, l'àlgebra $e_j kQ e_i$ tindrà com a base els camins amb origen en el vèrtex $i \in Q_0$ i destí en el vèrtex $j \in Q_0$. És a dir, $e_i kQ e_i$ estarà generat pels camins que comencin i acabin a i (i.e. els cicles orientats de i).

Per tant, si demostrem que els e_i són idempotents primitius, tindrem que els $P(i)$ són indescomponibles pel lema anterior.

Suposem doncs que e_i no és primitiu. Pel lema (3.4) existirà un idempotent $f \in e_i kQ e_i$, $f \neq e_i$, que s'escriurà com a combinació lineal de cicles orientats del vèrtex i :

$$f = \sum_j a_j \gamma_j \quad ; \quad \gamma_j = \text{cicle orientat de } i$$

Com $f \neq e_i$, hi haurà un cicle $\alpha \in \{\gamma_j\}_j$, $\alpha \neq e_i$, que tindrà longitud màxima.

Ara bé, si calculem f^2 veiem que α^2 haurà d'aparèixer a l'expressió de f^2 , i aleshores $f^2 \neq f$, la qual cosa és una contradicció amb el fet d'haver suposat que f és idempotent:

$$f = a_j \alpha_j + \dots \neq a_j^2 \alpha_j^2 + \dots = f^2$$

Conclusió: e_i és primitiu $\forall i \in Q_0 \Rightarrow P(i)$ és indescomponible $\forall i \in Q_0$.

Observació 3.5. El terme α^2 no desapareix (no es cancel·la) quan calculem f^2 . Si α^2 es cancel·lés, llavors tindríem que $\alpha^2 = xy$ amb x, y dos cicles orientats de i que han d'aparèixer també a l'expressió de f ($x, y \in \{\gamma_j\}_j$). Com α és de longitud màxima⁸, s'ha de complir que $l(x) = l(y) = l(\alpha)$, i per tant del mateix fet que $\alpha^2 = xy$ s'obté que $\alpha = x = y$. Per exemple, considerem el cas $f = -\alpha^2 + 2\alpha + 1$, i considerem el cicle α de longitud no màxima. Calculem f^2 :

$$f^2 = (-\alpha^2 + 2\alpha + 1)^2 = \alpha^4 - 4\alpha^3 + 8\alpha + 4 - 2\alpha^2 + 4\alpha^2 - 2\alpha^2 = \alpha^4 - 4\alpha^3 + 8\alpha + 4$$

Els termes α^2 s'han cancel·lat entre ells. Si ens fixem en el terme $2\alpha^2 = 2(\alpha^2)(1)$ veiem que està generat per cicles orientats de longitud diferent.

I així arribem a un resultat semblant a la de la proposició (2.31) (proposició 1.3.7 (iv) de [Bri08]):

Proposició 3.6. *Sigui Q un quiver sense cicles orientats. Aleshores qualsevol representació projectiva indescomponible de Q és isomorfa a $P(i)$, per a un únic $i \in Q_0$.*

Demostració. La demostració es pot veure al corol·lari 4.18 de [Bar15]. Emprant el punt 4 de la proposició (3.2), la descomposició en indescomponibles (3.1) i el teorema de Krull-Schmidt (perquè kQ és de dimensió finita al no haver-hi cicles orientats en Q) veiem que tot mòdul projectiu indescomponible és isomorf a $P(i)$, per a un únic $i \in Q_0$. $\square$

3.2 Seqüències exactes i la resolució estàndard

En aquesta secció trobarem una propietat molt important de l'àlgebra kQ que ens ajudarà en gran mesura a demostrar el Teorema de Gabriel, tot emprant eines i resultats d'àlgebra homològica. Farem un breu repàs d'alguns d'ells abans de poder seguir endavant.

⁸Recordatori de notació: Denotem com $l(p)$ la longitud d'un camí p qualsevol.

Definició 3.7. Un **complex de cadenes** S és una seqüència de mòduls i morfismes de mòduls⁹

$$\cdots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} M_i \xrightarrow{d_i} M_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

tal que $d_i d_{i+1} = 0 \quad \forall i$. És a dir, es compleix que $\text{Im } d_{i+1} \subseteq \text{Ker } d_i \quad \forall i$. Als mòduls quocient $H_i(S) = \text{Ker } d_i / \text{Im } d_{i+1}$ els anomenarem **grups d'homologia** de S , i als morfismes d_i **diferencials**.

D'altra banda, també podem definir el **complex de cocadenes** S' , on la seqüència és de la forma

$$\cdots \longleftarrow M_{i+1} \xleftarrow{d_i} M_i \xleftarrow{d_{i-1}} M_{i-1} \longleftarrow \cdots$$

En aquest cas $d_i d_{i-1} = 0$, $\text{Im } d_{i-1} \subseteq \text{Ker } d_i \quad \forall i$. Als mòduls quocients $H^i(S') = \text{Ker } d_i / \text{Im } d_{i-1}$ els anomenarem **grups de cohomologia** de S' , i als morfismes d_i **(co)diferencials**.

Si a més a més es compleix que $\text{Im } d_{i+1} = \text{Ker } d_i \quad \forall i$ (i per tant $H_i(S) = 0$), direm que S és una **seqüència exacta**. Equivalentment, $\text{Im } d_{i-1} = \text{Ker } d_i$ per S' .

Definició 3.8. Una seqüència exacta direm que és **curta** si és de la forma:

$$0 \xrightarrow{d_4} L \xrightarrow{d_3} M \xrightarrow{d_2} N \xrightarrow{d_1} 0 \quad (3.3)$$

Per a les seqüències curtes fixem-nos que com $0 = \text{Im}(d_4) = \text{Ker}(d_3)$ i $\text{Im}(d_2) = \text{Ker}(d_1) = N$, aleshores el morfisme d_3 és sempre injectiu i el morfisme d_2 és sempre exhaustiu. En particular, obtenim la següent igualtat de dimensions de mòduls per a una seqüència curta:

$$\dim M = \dim(\text{Im } d_2) + \dim(\text{Ker } d_2) = \dim N + \dim(\text{Im } d_3) = \dim N + \dim L \quad (3.4)$$

Aquesta igualtat de dimensions es pot estendre a seqüències més llargues. Si afegim un mòdul més a la seqüència curta, obtenim el següent resultat que ens serà de gran utilitat per després:

Corol·lari 3.9. Per a una seqüència exacta (**llarga**) de la forma

$$0 \xrightarrow{d_5} M_4 \xrightarrow{d_4} M_3 \xrightarrow{d_3} M_2 \xrightarrow{d_2} M_1 \xrightarrow{d_1} 0 \quad (3.5)$$

es té la següent igualtat de dimensions:

$$\dim M_1 + \dim M_3 = \dim M_2 + \dim M_4$$

Demostració. Una manera de demostrar-ho és separant aquesta seqüència en dues de curtes:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \text{Ker } d_2 \xrightarrow{i} M_2 \longrightarrow M_1 \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow M_4 \longrightarrow M_3 \xrightarrow{p} \text{Im } d_3 \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

El morfisme i denota la inclusió, i el morfisme p denota la projecció sobre la imatge de d_3 . Clarament i és injectiu i p és exhaustiu: les dues seqüències curtes són exactes. Per

⁹Aquesta definició es pot generalitzar a altres estructures algebraiques diferents a mòduls. Poden ser grups, anells...

tant, apliquem la igualtat de dimensions (3.4) a cada seqüència, juntament amb el fet que $\dim(\text{Ker } d_2) = \dim(\text{Im } d_3)$ (perquè (3.5) és exacta):

$$\left. \begin{array}{l} \dim M_2 = \dim M_1 + \dim(\text{Ker } d_2) \\ \dim M_3 = \dim M_4 + \dim(\text{Im } d_3) \end{array} \right\} \implies \dim M_1 + \dim M_3 = \dim M_2 + \dim M_4$$

□

D'aquestes definicions un es pot preguntar com es poden construir aquestes cadenes exactes de mòduls a partir d'un mòdul qualsevol M . O, abans del com, saber si es poden construir en primera instància. Si existeixen o no. I també fins on poden arribar, això és, si per alguns casos es pot trobar sempre alguna seqüència finita o no. Estem parlant de les resolucions.

Definició 3.10. *Sigui M un A -mòdul (esquerra) qualsevol. Una **resolució (a esquerra)** de M és una seqüència exacta de mòduls (esquerra) de la forma*

$$\cdots \longrightarrow L_i \xrightarrow{d_i} L_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0 \quad (3.6)$$

*Si tots els mòduls L_i són lliures, tindrem una **resolució lliure**. Equivalentment, si tots els mòduls L_i són projectius, tindrem una **resolució projectiva**. En aquest segon cas, generalment denotarem els mòduls com P_i .*

Anem a veure ara que existeix una resolució lliure per a qualsevol mòdul (seguirem la línia de la demostració de la proposició 6.1.4 que fa [HGK04]). Sigui doncs M un A -mòdul qualsevol. En primer lloc demostrem que existeix una seqüència exacta

$$0 \longrightarrow K_0 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

on L_0 és lliure, però K_0 no ho és necessàriament. Per fer-ho, prenem un conjunt de generadors $\{m_i\}_i$ de M , de manera que $M = \sum_i Am_i$. Definim el següent morfisme:

$$\varphi : A \supseteq \bigoplus_i Am_i \rightarrow M \quad ; \quad \varphi_i(a) = am_i$$

És a dir, hem definit φ en diverses parts segons i . La suma de tots ells és clarament exhaustiva perquè els m_i formen un conjunt de generadors i, per tant, tot element $m \in M$ es pot escriure com $m = \sum a_i m_i$ per cert $a_i \in A \Rightarrow \varphi$ serà exhaustiu. Aleshores, podem definir la seqüència exacta

$$0 \longrightarrow \text{Ker } \varphi \hookrightarrow \bigoplus_i Am_i \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0 \quad (3.7)$$

on $\bigoplus_i Am_i \equiv L_0$ és un mòdul lliure per la forma en què s'ha definit. Tanmateix, el mòdul $\text{Ker } \varphi \equiv K_0$ no podem assegurar que ho sigui també.

Malgrat tot, podem definir una nova seqüència curta per al mòdul K_0

$$0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow L_1 \longrightarrow K_0 \longrightarrow 0$$

tal que L_1 sigui lliure. Un cop més, però, no podem assegurar que K_1 sigui lliure. I així podem anar fent i fent, trobant inductivament seqüències exactes $\forall i \in \mathbb{N}$

$$0 \longrightarrow K_i \xrightarrow{f_i} L_i \xrightarrow{g_i} K_{i-1} \longrightarrow 0$$

amb L_i lliure, però K_i potser no.

Amb tot això, podem anar “encadenant” les seqüències exactes una darrere de l'altra per obtenir el següent diagrama commutatiu:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & L_i & \xrightarrow{d_i} & \cdots & \longrightarrow & L_2 & \xrightarrow{d_2} & L_1 & \xrightarrow{d_1} & L_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & \nearrow & & & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & & & & & \\ K_i & & K_{i-1} & & & & K_1 & & K_0 & & & & & & \end{array}$$

Les aplicacions d_i s'obtenen de compondre les aplicacions f_i i g_i de les seqüències curtes. Això és, $d_i = f_{i-1}g_i$, seguint la notació indicada. Llavors s'observa que $\text{Im } d_{i+1} = K_i = \text{Ker } d_i$: la seqüència dels mòduls L_i amb el mòdul M és exacta. En altres paraules, hem obtingut una resolució lliure per a un mòdul qualsevol M .

En particular, qualsevol mòdul M té una resolució projectiva, ja que per la proposició (3.2) tot mòdul lliure és també projectiu.

Veiem doncs que la resolució (lliure o projectiva) d'un mòdul qualsevol pot anar-se fins a l'infinit. Tanmateix, l'àlgebra kQ té una propietat molt interessant i important: tot mòdul M de kQ té una resolució projectiva que és una seqüència exacta curta.

Teorema 3.11. *Sigui M un kQ -mòdul d'un quiver qualsevol Q . Es té la següent seqüència exacta curta de kQ -mòduls:*

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in Q_1} P(t(\alpha)) \otimes e_{s(\alpha)} M \xrightarrow{u} \bigoplus_{i \in Q_0} P(i) \otimes e_i M \xrightarrow{v} M \rightarrow 0 \quad (3.8)$$

Els morfismes u i v estan definits com:

$$\begin{aligned} u(a \otimes m) &= a\alpha \otimes m - a \otimes \alpha m \quad ; \quad a \in P(t(\alpha)), \quad m \in e_{s(\alpha)} M \\ v(a \otimes m) &= am \quad ; \quad a \in P(i), \quad m \in e_i M \end{aligned}$$

Per abreviar, denotarem la seqüència així en alguns casos:

$$0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{u} P_0 \xrightarrow{v} M \longrightarrow 0 \quad (3.9)$$

Demostració. Seguirem el procediment que es fa a la proposició 1.4.1 de [Bri08] i al teorema 4.2 de [LT19]. Hem de demostrar que v és exhaustiu ($\text{Im } v = M$), u és injectiu ($\text{Ker } u = 0$) i que $\text{Ker } v = \text{Im } u$.

1) v exhaustiu. Sigui $m \in M$. Veiem que

$$m = 1m = \left(\sum_{i \in Q_0} e_i \right) m = v \left(\sum_{i \in Q_0} e_i \otimes e_i m \right) \quad ; \quad \sum_{i \in Q_0} e_i \otimes e_i m \in P_0$$

2) u injectiu. Suposem que u no és injectiu, i prenem $X \in \text{Ker } u \subseteq P_1$ diferent de 0. Definint el conjunt $A_i = \{\text{camins } p \text{ tals que } s(p) = i\}$, podem escriure X com

$$X = \sum_{\alpha \in Q_1} \sum_{\pi \in A_{t(\alpha)}} \pi \otimes m_{\alpha, \pi}$$

ja que $P(t(\alpha))$ està generat per tots els camins π amb origen en $t(\alpha)$. Fem la imatge per u :

$$u(X) = \sum_{\alpha \in Q_1} \sum_{\pi \in A_{t(\alpha)}} (\pi \alpha \otimes m_{\alpha, \pi} - \pi \otimes \alpha m_{\alpha, \pi})$$

Com $X \neq 0$, podem prendre per a un cert $\alpha' \in Q_1$ un camí π' de longitud màxima tal que $m_{\alpha', \pi'} \neq 0$. Així doncs, la component $\pi' \alpha' \otimes m_{\alpha', \pi'}$ serà diferent de 0, i llavors $u(X) \neq 0$, una contradicció amb el fet de suposar que $X \in \text{Ker } u$.

3) $\text{Im } u \subseteq \text{Ker } v$. Sigui $X = a \otimes m \in P_1$. Tindrem:

$$\begin{aligned} v(u(X)) &= v(u(a \otimes m)) = v(a\alpha \otimes m - a \otimes \alpha m) = a\alpha m - a\alpha m = 0 \\ \implies u(X) &\in \text{Ker } v \quad \forall u(X) \in \text{Im } u \end{aligned}$$

4) $\text{Ker } v \subseteq \text{Im } u$. Els detalls d'aquesta darrera inclusió es poden trobar a les referències anteriors.

□

Aquesta resolució de M és projectiva. Efectivament, podem veure un mòdul $P(i) \otimes e_i M$ com la suma directa de $\dim(e_i M)$ còpies de $P(i)$. Com $P(i)$ és projectiu, per la proposició (3.2) tindrem que $P(i) \otimes e_i M$ també ho serà i, en particular, ho seran tant P_1 com P_0 (per ser al seu torn sumes directes de mòduls projectius).

Una propietat de kQ que es deriva d'aquest teorema és que kQ és una **àlgebra hereditària**.

Definició 3.12. Una àlgebra A és diu **hereditària (per l'esquerra)** si tot submòdul (esquerra) d'un mòdul (esquerra) projectiu és també projectiu.

Per veure-ho, farem servir els següents dos resultats.

Lema 3.13. (Lema de Schanuel). Considerem les seqüències exactes curtes

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow P_1 \rightarrow M \rightarrow 0 \quad ; \quad 0 \rightarrow M_2 \rightarrow P_2 \rightarrow M \rightarrow 0$$

tal que P_1 i P_2 són mòduls projectius. Aleshores $M_1 \oplus P_2 \simeq P_1 \oplus M_2$.

L'enunciat i la demostració d'aquest lema es poden veure al lema 1.5.3 de [Ben91].

Corol·lari 3.14. Una àlgebra A qualsevol és hereditària si i només si per a tot A -mòdul M existeix una resolució projectiva curta, això és, una seqüència exacta $0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ amb P_0 i P_1 projectius.

Demostració. Suposem que A és hereditària. Per a un mòdul M qualsevol podem definir una seqüència exacta curta de la forma (3.7). Com A és hereditària, el nucli $K_0 \subseteq L_0$ serà projectiu per ser L_0 projectiu, i ja ho tenim.

Suposem ara que $\forall M$ existeix una resolució projectiva curta. Sigui P un mòdul projectiu qualsevol, i $N \subseteq P$ un submòdul. Llavors podem considerar el mòdul quocient $M = P/N$ i la seqüència exacta

$$0 \longrightarrow N \hookrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

emprant la inclusió en el primer morfisme i la projecció en el segon morfisme. Per hipòtesi, tindrem també una resolució projectiva curta de M . Per tant, pel Lema de Schanuel:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0 \end{array} \right\} \implies P_1 \oplus P \simeq P_0 \oplus N \implies N \text{ és projectiu}$$

□

Així doncs, gràcies a la resolució estàndard i aquest darrer corol·lari, deduïm que efectivament kQ és una àlgebra hereditària.

3.3 La forma de Tits

Un cop tenim la resolució estàndard per a qualsevol mòdul de kQ , farem ús del functor contravariant $\text{Hom}_Q(-, N)$ per construir una nova seqüència exacta, de 4 termes en aquest cas, que ens donarà, entre d'altres coses, algunes igualtats de dimensions que ens ajudaran per més endavant. En particular, podrem caracteritzar el que anomenarem la **forma de Tits** amb això.

Gran part del que es mencioni a continuació (on no es donaran tots els detalls) es pot veure principalment al capítol 6 de [HGK04], la secció 4.3 de [HGK04] i al capítol 5 de [Bar15], per a informació més detallada.

Partim d'una resolució projectiva d'un A -mòdul M qualsevol:

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

Si s'aplica el functor $\text{Hom}_A(-, N)$ (amb N un A -mòdul qualsevol) als diversos mòduls de la resolució, es pot obtenir el següent complex de cocadenes S' (no necessàriament una seqüència exacta!):

$$\cdots \longleftarrow \text{Hom}_A(P_2, N) \xleftarrow{d_2'} \text{Hom}_A(P_1, N) \xleftarrow{d_1'} \text{Hom}_A(P_0, N) \xleftarrow{d_0'} \text{Hom}_A(M, N) \longleftarrow 0$$

Denotarem com $\text{Ext}_A^i(M, N)$ a l' i -èssim grup de cohomologia d'aquest complex de cocadenes. És a dir:

$$\text{Ext}_A^i(M, N) = H^i(S') = \frac{\text{Ker } d_i'}{\text{Im } d_{i-1}'} \quad (3.10)$$

Observació 3.15. El diferencial que va del 0 a $\text{Hom}_A(M, N)$ es correspondria a d_{-1}' . El functor $\text{Hom}_A(-, N)$ és exacte per l'esquerra (veure la secció 4.3 de [HGK04] per més informació sobre els functors Hom , en particular la proposició 4.3.3). Llavors es té que $\text{Ext}_A^0(M, N) = \text{Hom}_A(M, N)$ (veure proposició 6.4.2 de [HGK04]).

Observació 3.16. Els grups de cohomologia $\text{Ext}_A^i(M, N)$ són independents de la resolució projectiva que escollim per al mòdul M . És conseqüència de la proposició 6.2.3 de [HGK04].

D'aquestes definicions i observacions, arribem als següents resultats:

Proposició 3.17. *Sigui P un mòdul projectiu. Aleshores per a tot mòdul N i per a tot $i > 0$ es té $\text{Ext}_A^i(P, N) = 0$.*

Demostració. Escollim la resolució projectiva de P

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P \xrightarrow{id} P \longrightarrow 0$$

pel fet que $\text{Ext}_A^i(P, N)$ és independent de la resolució que escollim. Clarament veiem doncs que $\text{Ext}_A^i(P, N) = 0 \quad \forall i > 0$. $\square$

Proposició 3.18. *Sigui A una àlgebra hereditària per l'esquerra. Llavors, per a qualssevol mòduls esquerra M i N es té $\text{Ext}_A^i(M, N) = 0, \forall i \geq 2$.*

Demostració. Pel corol·lari (3.14), per a un mòdul M qualsevol de A tindrem una resolució projectiva

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Que podem entendre-la com

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Així doncs, s'obté que $\text{Ext}_A^i(M, N) = 0, \forall i \geq 2$, per a qualsevol mòdul esquerra N . $\square$

Hi ha un cas particular dels grups de cohomologia $\text{Ext}_A^i(M, N)$ del qual ens interessa parlar abans de continuar. Es tracta del grup $\text{Ext}_A^1(M, N)$, que anomenarem **grup d'extensió**, que es pot definir d'una altra manera, i que ens serà de utilitat per més endavant.

Definim un nou conjunt, en el qual els elements són seqüències exactes curtes de la forma

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{u} X \xrightarrow{v} M \longrightarrow 0 \quad (3.11)$$

on els mòduls M i N estan sempre fixats (llevat d'isomorfisme). El que pot variar entre un element i un altre és el mòdul X i els morfismes u i v . Denotem doncs un element d'aquest conjunt com (u, X, v) . Si considerem un altre element (u', X', v') , definim la següent relació d'equivalència:

$$(u, X, v) \sim (u', X', v') \iff \exists f : X \rightarrow X' \mid fu = u' \text{ i } v'f = v$$

És a dir, que el següent diagrama commuti:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & X & & & \\ & & u \nearrow & \downarrow f & \searrow v & & \\ 0 & \longrightarrow & N & & M & \longrightarrow & 0 \\ & & u' \searrow & \downarrow f & \nearrow v' & & \\ & & & X' & & & \end{array}$$

En particular, f és un isomorfisme. Aleshores, al conjunt de classes d'equivalències l'anomenarem $\text{Ext}_A^1(M, N)$, i té estructura de grup abelià amb la *suma de Baer*¹⁰, i coincideix amb el primer grup de cohomologia definit a (3.10).

¹⁰Per a més informació sobre la suma de Baer, el lector interessat pot consultar la secció 7.2.1 de [Rot09], o la secció 5.2 de [Bar15].

Definició 3.19. Sigui (u, X, v) una seqüència exacta curta de la forma (3.11). Direm que és una **seqüència “split” (divisible/escindible)** si $(u, X, v) \sim (i, N \oplus M, p)$. Els morfismes

$$i : N \hookrightarrow N \oplus M \quad ; \quad p : N \oplus M \longrightarrow M$$

defineixen els morfismes inclusió i projecció, respectivament.

Clarament, que (u, X, v) sigui split implica que $X \simeq N \oplus M$. Es pot demostrar que l'invers també és cert, com es pot veure al lema 2.6.2 de [Ben91] o a la proposició 4.2.1 de [HGK04]:

Lema 3.20. Amb la notació de la definició anterior, la seqüència (u, X, v) és split si i només si $X \simeq N \oplus M$.

A més a més, es tindrà que $(u, X, v) \sim (i, N \oplus M, p) \sim 0$. És a dir, aquesta seqüència representa l'element neutre (l'element zero) del grup $\text{Ext}_A^1(M, N)$.

Finalment, hi ha un darrer teorema sobre aquests grups de cohomologia i les seqüències exactes que ens servirà per aconseguir el que ens proposàvem en aquesta secció. Es tracta del teorema 6.4.5 de [HGK04], o la proposició 2.5.2 (ii) de [Ben91]. En el teorema 5.20 de [Bar15] hi ha una demostració més detallada, però ho prova per al functor $\text{Hom}_A(N, -)$. La idea i la construcció per al functor $\text{Hom}_A(-, N)$ és semblant.

Teorema 3.21. Sigui $0 \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow 0$ una seqüència exacta curta de mòduls. Aleshores per a qualsevol mòdul N existeix una seqüència exacta llarga de la forma:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(A, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(B, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(C, N) \\
& & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
& & \text{Ext}_A^1(A, N) & \longrightarrow & \text{Ext}_A^1(B, N) & \longrightarrow & \text{Ext}_A^1(C, N) \\
& & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
& & \text{Ext}_A^2(A, N) & \longrightarrow & \dots & & \\
& & & & & & \\
& & & & \dots & \longrightarrow & \text{Ext}_A^{i-1}(C, N) \\
& & & & \searrow & & \searrow \\
& & & & \text{Ext}_A^i(A, N) & \longrightarrow & \text{Ext}_A^i(B, N) & \longrightarrow & \text{Ext}_A^i(C, N) \\
& & & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
& & & & \text{Ext}_A^{i+1}(A, N) & \longrightarrow & \dots & &
\end{array}$$

Per a l'àlgebra kQ denotarem els grups de cohomologia com $\text{Ext}_Q^i(M, N)$. Com kQ és hereditària, aleshores $\text{Ext}_Q^i(M, N) = 0 \quad \forall i \geq 2$. Per tant, utilitzant el teorema anterior a la resolució estàndard (emprant la notació de (3.9)), obtenim la següent seqüència exacta llarga de 4 termes (sense comptar els zeros) per a qualssevol mòduls (representacions) M i N de kQ :

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_Q(M, N) \longrightarrow \text{Hom}_Q(P_0, N) \longrightarrow \text{Hom}_Q(P_1, N) \longrightarrow \text{Ext}_Q^1(M, N) \longrightarrow 0$$

Reescriurem aquesta seqüència d'una altra manera que ens interessarà molt més. Considerem dues representacions (mòduls) $M = (V_i, f_\alpha)$ i $N = (W_i, g_\alpha)$ d'un mateix quiver Q . Tindrem:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_Q(P_0, N) &= \mathrm{Hom}_Q \left(\bigoplus_{i \in Q_0} P(i) \otimes e_i M, N \right) \\ &\simeq \prod_{i \in Q_0} \mathrm{Hom}_Q(P(i) \otimes e_i M, N) \\ &\simeq \prod_{i \in Q_0} \mathrm{Hom}(e_i M, \mathrm{Hom}_Q(P(i), N)) \\ &\simeq \prod_{i \in Q_0} \mathrm{Hom}(e_i M, e_i N) \simeq \prod_{i \in Q_0} \mathrm{Hom}(V_i, W_i) \end{aligned}$$

El primer isomorfisme és conseqüència de la proposició 4.3.4 de [HGK04], el segon isomorfisme de la proposició 4.6.3 de [HGK04] i el tercer isomorfisme del lema (3.3).

De forma equivalent per a $\mathrm{Hom}_Q(P_1, N)$ arribem a:

$$\mathrm{Hom}_Q(P_1, N) = \mathrm{Hom}_Q \left(\bigoplus_{\alpha \in Q_1} P(t(\alpha)) \otimes e_{s(\alpha)} M, N \right) \simeq \prod_{\alpha \in Q_1} \mathrm{Hom}(V_{s(\alpha)}, W_{t(\alpha)})$$

Així doncs, es té la següent seqüència exacta:

$$0 \rightarrow \mathrm{Hom}_Q(M, N) \rightarrow \prod_{i \in Q_0} \mathrm{Hom}(V_i, W_i) \rightarrow \prod_{\alpha \in Q_1} \mathrm{Hom}(V_{s(\alpha)}, W_{t(\alpha)}) \rightarrow \mathrm{Ext}_Q^1(M, N) \rightarrow 0 \quad (3.12)$$

I, en particular, prenent $M = N$:

$$0 \rightarrow \mathrm{End}_Q(M) \rightarrow \prod_{i \in Q_0} \mathrm{End}(V_i) \rightarrow \prod_{\alpha \in Q_1} \mathrm{Hom}(V_{s(\alpha)}, V_{t(\alpha)}) \rightarrow \mathrm{Ext}_Q^1(M, M) \rightarrow 0 \quad (3.13)$$

Considerem ara els vectors de dimensions de M i N , amb la següent notació (per comoditat):

$$\begin{aligned} \underline{m} &:= \underline{\dim} M = (\dim(V_i))_{i \in Q_0} := (m_i)_{i \in Q_0} \\ \underline{n} &:= \underline{\dim} N = (\dim(W_i))_{i \in Q_0} := (n_i)_{i \in Q_0} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Emprant el corol·lari (3.9) a les seqüències exactes anteriors obtenim, respectivament, les següents igualtats de dimensions:

$$\dim \mathrm{Hom}_Q(M, N) - \dim \mathrm{Ext}_Q^1(M, N) = \sum_{i \in Q_0} m_i n_i - \sum_{\alpha \in Q_1} m_{s(\alpha)} n_{t(\alpha)} \quad (3.15)$$

$$\dim \mathrm{End}_Q(M) - \dim \mathrm{Ext}_Q^1(M, M) = \sum_{i \in Q_0} m_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_1} m_{s(\alpha)} m_{t(\alpha)}$$

Exemple 3.22. Per a la representació simple $S(i)$ definida a (2.5) es té que $\dim \mathrm{Ext}_Q^1(S(i), S(j))$ és igual al nombre de fletxes que van del vèrtex i al vèrtex j . Anem a comprovar-ho. Denotem com Δ al nombre de fletxes $i \rightarrow j$. En primer lloc, tenim que:

$$\sum_{\alpha \in Q_1} m_{s(\alpha)} n_{t(\alpha)} = \Delta$$

D'altra banda:

$$\dim \operatorname{Hom}_Q(S(i), S(j)) = \sum_{k \in Q_0} m_k n_k = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Per tant, per l'equació (3.15), tindrem:

$$\dim \operatorname{Ext}_Q^1(S(i), S(j)) = \dim \operatorname{Hom}_Q(S(i), S(j)) - \sum_{k \in Q_0} m_k n_k + \sum_{\alpha \in Q_1} m_{s(\alpha)} n_{t(\alpha)} = \Delta$$

En particular, $\dim \operatorname{Ext}_Q^1(S(i), S(i))$ indicarà el nombre de loops en el vèrtex i .

Definició 3.23. Es defineix la **forma d'Euler** d'un quiver qualsevol Q amb n vèrtexs com la forma bilineal $\langle _, _ \rangle_Q$ en $\mathbb{Z}^n$ donada per:

$$\langle \underline{m}, \underline{n} \rangle_Q := \sum_{i \in Q_0} m_i n_i - \sum_{\alpha \in Q_1} m_{s(\alpha)} n_{t(\alpha)}$$

D'altra banda, es defineix la **forma de Tits** com la forma quadràtica q_Q en $\mathbb{Z}^n$ associada a la forma d'Euler, definida doncs com:

$$q_Q(\underline{n}) := \langle \underline{n}, \underline{n} \rangle_Q := \sum_{i \in Q_0} n_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_1} n_{s(\alpha)} n_{t(\alpha)} \quad (3.16)$$

Per tant, per les igualtats de dimensions anteriors, tenim:

$$\langle \underline{m}, \underline{n} \rangle_Q = \dim \operatorname{Hom}_Q(M, N) - \dim \operatorname{Ext}_Q^1(M, N) \quad (3.17)$$

$$q_Q(\underline{m}) = \dim \operatorname{End}_Q(M) - \dim \operatorname{Ext}_Q^1(M, M) \quad (3.18)$$

I hem arribat així a la caracterització de la forma de Tits que volíem trobar, que ens servirà per demostrar el Teorema de Gabriel.

Acabarem la secció amb un darrer resultat sobre la forma de Tits també clau per a provar el Teorema de Gabriel. Aquí no el demostrarem. Tanmateix, el lector interessat pot trobar els detalls al teorema 7.7 de [LT19], o bé a la proposició 4.6.3 de [Ben91]. També es troba enunciat a altres fonts, com a la proposició 1.4.6 de [Bri08] o al teorema 1.28 de [KJ16].

Teorema 3.24. El graf no dirigit subjacent d'un quiver qualsevol Q amb n vèrtexs és un diagrama de Dynkin de tipus ADE si i només si la forma de Tits de Q és definida positiva, això és, $q_Q(\underline{n}) > 0 \quad \forall \underline{n} \in \mathbb{N}^n \setminus (0, \dots, 0)$.

Aleshores, el Teorema de Gabriel ens està dient que **un quiver és de tipus finit si i només si la seva forma de Tits és definida positiva**.

3.4 Les representacions de Schur, o blocs

Després d'haver definit els grups de cohomologia $\text{Ext}_Q^i(M, N)$, parlarem d'un tipus de representació de quivers en particular, que anomenarem **representacions de Schur**. Aquestes representacions ens seran de gran utilitat per caracteritzar les representacions indescomponibles en funció de $\text{Ext}_Q^1(M, M)$ i de la forma de Tits.

Definició 3.25. *Sigui M una representació d'un quiver qualsevol Q . Direm que M és una **representació de Schur**, o un **bloc**, si compleix que $\text{End}_Q(M) = k \text{id}_M$.*

Amb aquesta definició, observem que qualsevol representació simple és de Schur. D'altra banda, malgrat que totes les representacions de Schur són indescomponibles, no totes les representacions indescomponibles són de Schur. El següent lema, que podem veure demostrat al lema 2.4.2 de [Bri08] i al lema 5.6 de [LT19], ens ajudarà a caracteritzar-los:

Lema 3.26. *Sigui M una representació indescomponible d'un quiver qualsevol Q . Si M no és una representació de Schur, llavors existeix una subrepresentació $N \subseteq M$ de Schur tal que $\text{Ext}_Q^1(N, N) \neq 0$.*

I amb aquest lema podem provar el següent resultat:

Proposició 3.27. *Sigui Q un quiver tal que la seva forma de Tits és definida positiva. Llavors tota representació indescomponible M de Q és de Schur i compleix que $\text{Ext}_Q^1(M, M) = 0$. En particular, $q_Q(\underline{\dim} M) = 1$.*

Demostració. Suposem que M és una representació indescomponible que no és de Schur. Pel lema anterior, existirà una subrepresentació $N \subseteq M$ de Schur tal que $\text{Ext}_Q^1(N, N) \neq 0 \Rightarrow \dim \text{Ext}_Q^1(N, N) > 0$. Per definició, $\text{End}_Q(N) = k \text{id}_N \Rightarrow \dim \text{End}_Q(N) = 1$. Si prenem la igualtat (3.18) obtinguda a la secció anterior, obtenim:

$$q_Q(\underline{\dim} N) = \dim \text{End}_Q(N) - \dim \text{Ext}_Q^1(N, N) = 1 - \dim \text{Ext}_Q^1(N, N) \leq 0$$

I, per tant, la forma de Tits no és definida positiva, que és contradictori.

Així doncs, al ser M de Schur i la forma de Tits definida positiva, i considerant un cop més la igualtat (3.18), tindrem:

$$\left. \begin{array}{l} q_Q(\underline{\dim} M) = 1 - \dim \text{Ext}_Q^1(M, M) \\ q_Q(\underline{\dim} M) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \dim \text{Ext}_Q^1(M, M) = 0 \iff q_Q(\underline{\dim} M) = 1$$

□

Com veurem al darrer capítol, aquesta equivalència entre representacions indescomponibles i representacions de Schur ens ajudarà a provar el Teorema de Gabriel.

4 Grups algebraics i la varietat de les representacions

En aquesta secció començarem recordant algunes nocions de grups algebraics afins, accions per aquests grups (i les seves òrbites), com s'empra la topologia de Zariski d'espais afins i algunes propietats de tot plegat. Un cop fet això, definirem el que anomenarem *La varietat de les representacions*, en la qual aplicarem aquestes eines per trobar uns darrers resultats necessaris per provar el Teorema de Gabriel.

4.1 Grups algebraics afins, òrbites i la topologia de Zariski

La definició d'una varietat algebraica qualsevol no és quelcom que estigui completament consensuat. Partirem de la definició de varietats algebraiques afins donada en [OV90], al principi del capítol 2, i amb aquesta tindrem suficient per procedir amb tot el que ve a continuació.

Definició 4.1. *Sigui $\mathbb{A}^n$ un espai afí de dimensió n . Una **varietat algebraica (afí)**¹¹ $Z(S)$ en $\mathbb{A}^n$ és un subconjunt de $\mathbb{A}^n$ que ve definit pel sistema d'equacions*

$$f(X_1, \dots, X_n) = 0, \quad f \in S$$

on $S \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ és un conjunt finit o infinit de polinomis. En altres paraules:

$$Z(S) = \{x \in \mathbb{A}^n \mid f(x) = 0 \quad \forall f \in S\} \quad (4.1)$$

Un subconjunt $Z'(S) \subseteq Z(S)$ serà una **subvarietat** si és en sí mateix una varietat en $\mathbb{A}^n$.

Observació 4.2. L'espai afí $\mathbb{A}^n$ és en sí mateix una varietat algebraica afí, ja que el podem considerar com el conjunt de zeros del polinomi zero $f = 0$.

Equiparem l'espai afí $\mathbb{A}^n$ amb la **topologia de Zariski**, en la qual es defineixen els tancats (no els oberts!) com les varietats algebraiques de $\mathbb{A}^n$. A més a més, a partir d'ella es pot definir una topologia induïda en una varietat algebraica qualsevol de $\mathbb{A}^n$, obtenint:

Definició 4.3. La **topologia de Zariski** d'una varietat algebraica $Z(S) \subseteq \mathbb{A}^n$ és la topologia on els tancats estan definits per zeros de polinomis (són les subvarietats de $Z(S)$). És a dir:

$$Z'(S) \subseteq Z(S) \text{ tancat} \iff Z'(S) = \{x \in Z(S) \mid f(x) = 0 \quad \forall f \in S\} \quad (4.2)$$

Aquesta definició és clarament redundant amb l'anterior, però és important deixar clar com es defineix la topologia de Zariski d'una varietat algebraica a part de l'espai afí. Veiem, en conseqüència de la definició, que els subconjunts oberts estaran caracteritzats per les equacions polinomials diferents de 0.

Recordem un parell de conceptes més de topologia abans de continuar. Prenem un espai topològic qualsevol X . Un subconjunt $A \subseteq X$ és **localment tancat** si és obert en la seva clausura $\overline{A}$, és a dir, si $\overline{A} \setminus A$ és tancat en X . Si considerem la topologia de Zariski en X , això implica que bàsicament hi haurà “trossos” de A on els polinomis no s'anul·laren. D'altra banda, direm que $A \subseteq X$ és **irreductible** si tota intersecció finita d'oberts diferents del buit és diferent del buit. La següent caracterització dels conjunts irreductibles, que podem trobar a la proposició 1.1.3 de [TY05], ens serà de utilitat:

¹¹O simplement, espai afí. En tota aquesta secció molts cops obviarem el terme “afí”, o el posarem entre parèntesis. Per exemple: un subconjunt obert/tancat (afí), un espai (afí), una subvarietat (afí), un grup algebraic (afí), etc.

Proposició 4.4. Considerem un espai topològic X diferent del buit. Les següents afirmacions són equivalents entre elles:

1. X és irreductible.
2. X no és pot escriure com la unió finita de subconjunts tancats propis diferents.
3. X no és pot obtenir com a unió de dos subconjunts tancats propis no trivials diferents.
4. Qualsevol subconjunt obert $Y \subseteq X$ diferent del buit és dens en X , això és, $\overline{Y} = X$.
5. Tot subconjunt obert de X és connex.

En particular, un espai X irreductible és també connex, i un subconjunt obert $Y \subseteq X$ diferent del buit és també irreductible. L'espai afí $\mathbb{A}^n$ amb la topologia de Zariski és irreductible.

Passem a veure ara què són els grups algebraics i les accions algebraiques.

Definició 4.5. Un **grup algebraic (afi)** G és una varietat algebraica a la qual associem una estructura de grup de forma que les aplicacions

$$\begin{aligned}\mu : G \times G &\longrightarrow G, & (g, h) &\longmapsto gh \\ l : G &\longrightarrow G, & g &\longmapsto g^{-1}\end{aligned}$$

són morfismes de varietats.

Definició 4.6. Una **acció algebraica** φ d'un grup algebraic G en una varietat X és un morfisme de varietats que és al mateix temps una acció del grup G en X , definida doncs com:

$$\varphi : G \times X \longrightarrow X, \quad (g, x) \longmapsto g \cdot x$$

Direm que X és una **G -varietat**, i que φ és una **G -acció algebraica**.

Observació 4.7. Una aplicació $f : X \rightarrow Y$ entre dues varietats és un morfisme de varietats si és una aplicació polinomial (les coordenades venen determinades per polinomis).

Fixem-nos doncs que podem parlar **d'òrbites obertes o tancades** de X per l'acció de G . La següent proposició ens dona unes propietats rellevants de les varietats algebraiques, les seves òrbites per l'acció d'un grup algebraic i com es relacionen amb els diversos elements de la topologia de Zariski (tancats, oberts, irreductibles, etc). Aquesta proposició està enunciada a l'inici de la secció 6 de [LT19] i a l'inici de la secció 2.2 de [KJ16]. La demostració més detallada es pot consultar a la proposició 2.1.7 de [Bri08], a la proposició 1.11 de [Bri10] i, finalment, a les proposicions 21.4.2 i 21.4.3 de [TY05].

Proposició 4.8. Sigui X una G -varietat, i prenem $x \in X$. Considerem el **grup d'isotropia**

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

i l'òrbita que passa per x

$$G \cdot x = \{g \cdot x, \ g \in G\}$$

Aleshores:

1. G_x és tancat en G .

2. $G \cdot x$ és localment tancat en X , i també és una subvarietat no singular de X . A més a més, per a tota component connexa $H \cdot x$ de $G \cdot x$ es compleix que

$$\dim(H \cdot x) = \dim G - \dim G_x \quad (4.3)$$

3. $\overline{G \cdot x}$ està formada per la unió de $G \cdot x$ i òrbites de dimensió estrictament menor a $\dim(G \cdot x)$. D'altra banda, $\overline{G \cdot x}$ conté almenys una òrbita tancada.
4. G és connex si i només si és irreductible. En aquest cas, $G \cdot x$ i $\overline{G \cdot x}$ són també irreductibles.

Observació 4.9. Per al punt (2) de la proposició es fa ús d'un resultat de *dimensions de fibres* que enunciem a continuació. És important remarcar que definir la **dimensió** d'una varietat algebraica és quelcom complicat, i hi ha tota una teoria de la dimensió per a les varietats algebraiques. En el nostre cas, si suposem que el cos base són els complexos $\mathbb{C}$, podem centrar-nos d'ara en endavant a emprar la definició de dimensió per a *varietats diferenciables*, que és més clara, ja que totes les que emprarem seran *no singulars* (“smooth”). No obstant això, aquest resultat de dimensions de fibres no és cert en general per a varietats diferenciables, però en aquest cas el podem fer servir. Aquest teorema es pot veure enunciat de diverses maneres al teorema 1.25 de [Sha13], al teorema 3 del capítol 8 de [Mum99] i al corol·lari 15.5.5 de [TY05].

Teorema 4.10. (Teorema de dimensió de les fibres) *Sigui $f : X \rightarrow Y$ un morfisme de varietats algebraiques. Suposem que f és dominant, això és, que $\overline{f(X)} = Y$. Llavors:*

1. $\dim X \geq \dim Y$
2. Existeix un obert U de Y tal que $\forall y \in U$ es té que $f^{-1}(\{y\}) = \dim X - \dim Y$.

Hi ha un grup algebraic (afí) del qual ens interessa parlar particularment: el **grup lineal general** $\mathrm{GL}(n)$.

EL grup $\mathrm{GL}(n)$ està format per les matrius quadrades $n \times n$ invertibles, això és, tal que el seu determinant és diferent de zero. Considerant això, al fer el determinant de la matriu s'obté un polinomi en els coeficients de la matriu. Prenem com a exemple $\mathrm{GL}(2)$ perquè es vegi clar:

$$\mathrm{GL}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc \neq 0 \right\} \subseteq \mathbb{A}^4$$

Veient això, segons les definicions anteriors, tindrem que $\mathrm{GL}(n)$ és un obert afí de l'espai afí format per les matrius $n \times n$: $\mathbb{A}^{n^2} \simeq \mathrm{Mat}_{n \times n}(k)$. Llavors per què diem que és un grup algebraic si segons això no és una varietat algebraica?

Per poder considerar-lo un grup algebraic, situem $\mathrm{GL}(n)$ en l'espai afí $\mathbb{A}^{n^2+1} := \mathbb{A}^{n^2} \times \mathbb{A}$. En aquest cas, afegim la recta afí com un paràmetre t a l'equació polinomial que ens dóna el determinant de les matrius, i tindrem (reprement l'exemple de $\mathrm{GL}(2)$):

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(2) &\cong \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2 \times 2}(k), t \in \mathbb{A} \mid (ad - bc)t = 1 \right\} \\ &= \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2 \times 2}(k), t \in \mathbb{A} \mid (ad - bc)t - 1 = 0 \right\} \subseteq \mathbb{A}^5 \end{aligned}$$

L'isomorfisme ve donat per la projecció sobre el primer factor, que té com inversa la gràfica de la funció $\frac{1}{\det A}$.

De forma més general per a una matriu qualsevol $A \in \text{GL}(n)$ tindrem el polinomi $(\det A) \cdot t - 1 = 0$. I d'aquesta forma veiem que $\text{GL}(n)$ és efectivament una varietat algebraica i, en particular, un grup algebraic. La dimensió d'aquest grup és $\dim \text{GL}(n) = n^2$.

4.2 La varietat de les representacions

A partir d'ara considerarem un quiver qualsevol Q de n vèrtexs, i hi fixarem un vector de dimensions $\underline{n} \in \mathbb{N}^n$, utilitzant la notació de (3.14): $\underline{n} = (n_i)_{i \in Q_0}$.

Definició 4.11. *Definirem l'espai (o varietat) de les representacions $\text{Rep}(Q, \underline{n})$ d'un quiver Q amb vector de dimensions $\underline{n}$ com l'espai vectorial donat per:*

$$\text{Rep}(Q, \underline{n}) = \bigoplus_{\alpha \in Q_1} \text{Hom}(V_{s(\alpha)}, V_{t(\alpha)}) = \bigoplus_{\alpha \in Q_1} \text{Hom}(k^{n_{s(\alpha)}}, k^{n_{t(\alpha)}}) \quad (4.4)$$

Observació 4.12. En aquesta definició, els V_i de la primera igualtat es corresponen als espais vectorials d'una representació qualsevol $M = (V_i, f_\alpha)$ de Q amb dimensions fixades per $\underline{n}$. Així doncs, canviant bases, podem considerar k^{n_i} per a cada V_i .

D'altra banda, $\text{Hom}(k^{n_{t(\alpha)}}, k^{n_{s(\alpha)}})$ denota el morfisme corresponent a l'aplicació lineal $f_\alpha : k^{n_{s(\alpha)}} \rightarrow k^{n_{t(\alpha)}}$, que podem considerar com una matriu. Tenim:

$$\text{Rep}(Q, \underline{n}) = \prod_{\alpha \in Q_1} \text{Mat}_{n_{t(\alpha)} \times n_{s(\alpha)}}(k)$$

L'espai $\text{Rep}(Q, \underline{n})$ tindrà doncs dimensió:

$$\dim \text{Rep}(Q, \underline{n}) = \sum_{\alpha \in Q_1} n_{t(\alpha)} n_{s(\alpha)} := m \quad (4.5)$$

I per tant $\text{Rep}(Q, \underline{n}) \simeq \mathbb{A}^m$. És per aquesta raó que podem considerar aquest espai com una varietat algebraica, que podem equipar amb la topologia de Zariski. A més a més, es tracta d'una varietat irreductible per ser isomorfa a $\mathbb{A}^m$.

Partint del grup lineal general $\text{GL}(n)$, definim el següent grup algebraic $\text{GL}(\underline{n})$, com a subconjunt de $\text{End}(\underline{n})$:

$$\begin{aligned} \text{GL}(\underline{n}) &:= \prod_{i \in Q_0} \text{GL}(n_i) \subseteq \text{End}(\underline{n}) \\ \text{End}(\underline{n}) &:= \prod_{i \in Q_0} \text{End}(k^{n_i}) = \prod_{i \in Q_0} \text{Mat}_{n_i \times n_i}(k) \simeq \mathbb{A}^t \\ t &= \sum_{i \in Q_0} n_i^2 \end{aligned}$$

Dit d'una altra manera:

$$\text{GL}(\underline{n}) = \left\{ (g_i)_{i \in Q_0} , g_i \in \text{Mat}_{n_i \times n_i}(k) \mid \prod_{i \in Q_0} \det(g_i) \neq 0 \right\}$$

De forma semblant a $\text{Rep}(Q, \underline{n})$, $\text{End}(\underline{n})$ serà també una varietat irreductible per ser isomorfa a $\mathbb{A}^t$. Així doncs, $\text{GL}(\underline{n})$ és un obert de $\text{End}(\underline{n})$ (per tant dens en $\text{End}(\underline{n})$ per la proposició (4.4), a més de ser irreductible), i aleshores:

$$\dim \text{GL}(\underline{n}) = \dim \overline{\text{GL}(\underline{n})} = \dim \text{End}(\underline{n}) = \sum_{i \in Q_0} n_i^2 \quad (4.6)$$

Fem actuar $\text{GL}(\underline{n})$ sobre $\text{Rep}(Q, \underline{n})$ per conjugació. Si prenem $x \in \text{Rep}(Q, \underline{n})$, que denotarem com $x = (x_\alpha)_{\alpha \in Q_1}$ per indicar els diversos trossos de la varietat de representacions, l'acció algebraica de $\text{GL}(\underline{n})$ en la varietat $\text{Rep}(Q, \underline{n})$ serà:

$$\text{GL}(\underline{n}) \times \text{Rep}(Q, \underline{n}) \longrightarrow \text{Rep}(Q, \underline{n}), \quad (g, x) \longmapsto g \cdot x = \left(g_{t(\alpha)} x_\alpha g_{s(\alpha)}^{-1} \right)_{\alpha \in Q_1} \quad (4.7)$$

Fixem-nos que podem identificar una representació qualsevol M de Q (que tingui vector de dimensions $\underline{n}$) amb un element $x \in \text{Rep}(Q, \underline{n})$, ja que per la pròpia definició de la varietat ens queden determinats com són tant els espais vectorials com les aplicacions lineals de M . Denotarem $M(x)$ la representació, i així podrem considerar ambdues notacions en una de sola.

A més a més, si prenem dues representacions qualssevol $M(x)$ i $N(y)$, veiem que seran isomorfes si i només si estan en la mateixa òrbita. En altres paraules, si $\mathcal{O}_x = \text{GL}(\underline{n}) \cdot x$ és l'òrbita de x :

$$M(x) \simeq N(y) \iff \exists g \in \text{GL}(\underline{n}) \mid g \cdot x = y \iff y \in \mathcal{O}_x$$

Arribem al següent resultat (el lector pot trobar-lo enunciat i explicat de forma semblant en el lema 2.1.2 de [Bri08], en el teorema 2.1 de [KJ16] i a la pàgina 17 de [LT19]):

Teorema 4.13. *Segui Q un quiver qualsevol amb un vector de dimensions fixat $\underline{n}$. Aleshores existeix una bijecció entre el conjunt de les classes d'isomorfismes de representacions de Q i el conjunt de les òrbites donades per l'acció algebraica de $\text{GL}(\underline{n})$ en $\text{Rep}(Q, \underline{n})$.*

D'aquest fet veiem que, per la seva pròpia definició, el grup d'isotropia $\text{GL}(\underline{n})_x$ serà isomorf al grup d'automorfismes $\text{Aut}_Q(M(x))$ de $M(x)$. Com $\text{Aut}_Q(M(x))$ és un obert (afí) de $\text{End}_Q(M(x))$, serà dens en $\text{End}_Q(M(x))$ i tindran igual dimensions per la proposició (4.4). Per tant:

$$\dim \text{GL}(\underline{n})_x = \{g \in \text{GL}(\underline{n}) \mid g \cdot x = x\} = \dim \text{Aut}_Q(M(x)) = \dim \text{End}_Q(M(x)) \quad (4.8)$$

Amb tot això s'obté:

Corol·lari 4.14. *Per a $x \in \text{Rep}(Q, \underline{n})$ es té la següent igualtat de dimensions:*

$$\dim \text{Ext}_Q^1(M(x), M(x)) = \dim \text{Rep}(Q, \underline{n}) - \dim \mathcal{O}_x \quad (4.9)$$

Demostració. Partim de la igualtat dimensions (4.3) que ens dóna la proposició (4.8) per al grup $\text{GL}(\underline{n})$, que és connex al ser irreductible:

$$\dim \mathcal{O}_x = \dim \text{GL}(\underline{n}) - \dim \text{GL}(\underline{n})_x$$

Substituïm en ella les igualtats (4.6) i (4.8):

$$\dim \mathcal{O}_x = \sum_{i \in Q_0} n_i^2 - \dim \text{End}_Q(M(x))$$

Prenem ara l'equació (3.18):

$$\sum_{i \in Q_0} n_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_1} n_{s(\alpha)} n_{t(\alpha)} = q_Q(\underline{n}) = \dim \text{End}_Q(M(x)) - \dim \text{Ext}_Q^1(M(x), M(x))$$

Sumem aquesta equació a l'anterior i obtenim:

$$\begin{aligned} \dim \text{Ext}_Q^1(M(x), M(x)) &= \sum_{\alpha \in Q_1} n_{s(\alpha)} n_{t(\alpha)} - \dim \mathcal{O}_x \\ &= \dim \text{Rep}(Q, \underline{n}) - \dim \mathcal{O}_x \end{aligned}$$

A la darrera igualtat hem emprat (4.5). $\square$

Amb tot això, arribem al següent resultat, que es pot veure al corol·lari 2.2.5 de [Bri08], al corol·lari 6.5 de [LT19] i al corol·lari 2.6 de [KJ16]:

Lema 4.15. *Segui $x \in \text{Rep}(Q, \underline{n})$, i $\mathcal{O}_x$ la seva òrbita. Es compleix que:*

$$\mathcal{O}_x \text{ obert en } \text{Rep}(Q, \underline{n}) \iff \text{Ext}_Q^1(M(x), M(x)) = 0 \quad (4.10)$$

En aquest cas l'òrbita $\mathcal{O}_x$ està unívocament determinada pel vector de dimensions $\underline{n}$.

Demostració. $\Rightarrow$ Suposem que $\mathcal{O}_x$ és obert en $\text{Rep}(Q, \underline{n})$. Com $\text{Rep}(Q, \underline{n})$ és irreductible, un cop més per la proposició (4.4) tindrem que $\overline{\mathcal{O}_x} = \text{Rep}(Q, \underline{n})$ i llavors $\dim \text{Rep}(Q, \underline{n}) = \dim \mathcal{O}_x$. És a dir, $\dim \text{Ext}_Q^1(M(x), M(x)) = 0$, pel corol·lari anterior.

$\Leftarrow$ Suposem $\text{Ext}_Q^1(M(x), M(x)) = 0$. Aleshores, pel corol·lari anterior, $\dim \text{Rep}(Q, \underline{n}) = \dim \mathcal{O}_x = \dim \overline{\mathcal{O}_x}$. Per la proposició (4.8), $\mathcal{O}_x$ és localment tancat, és a dir $\mathcal{O}_x$ és obert a $\overline{\mathcal{O}_x}$. Com $\text{Rep}(Q, \underline{n})$ és irreductible, per la proposició (4.4) s'ha de complir $\overline{\mathcal{O}_x} = \text{Rep}(Q, \underline{n})$. En particular, tindrem que $\mathcal{O}_x$ és obert en $\text{Rep}(Q, \underline{n})$.

Considerem ara dues òrbites obertes $\mathcal{O}_x$ i $\mathcal{O}_y$ diferents. Per ser $\text{Rep}(Q, \underline{n})$ irreductible, tindrem $\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y \neq \emptyset$ (per la pròpia definició d'irreductible), i per tant les dues òrbites han de ser la mateixa: $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_y$. $\square$

Finalment, hi ha un últim teorema que relaciona seqüències exactes i la clausura d'òrbites que servirà al darrer capítol per poder demostrar un teorema més a part del de Gabriel. Diu el següent:

Teorema 4.16. *Considerem tres representacions de dimensió finita L, M, N i la seqüència exacta curta següent:*

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0 \quad (4.11)$$

Llavors es té que:

$$1. \mathcal{O}_{L \oplus N} \subseteq \overline{\mathcal{O}_M}$$

2. *La seqüència exacta és split si i només si $\mathcal{O}_M = \mathcal{O}_{L \oplus N}$. En altres paraules:*

$$M \simeq L \oplus N \iff \mathcal{O}_M = \mathcal{O}_{L \oplus N} \quad (4.12)$$

La demostració d'aquest teorema es pot veure al lema 6.6 de [LT19], al teorema 2.3.1 de [Bri08] i al teorema 2.7 de [KJ16].

Observació 4.17. En aquest teorema hem canviat la notació de les òrbites, per comoditat. Quan tinguem una representació M qualsevol tal que $M = M(x)$, per a un element $x \in \text{Rep}(Q, \underline{n})$, emprarem de forma indistinta la següent notació: $\mathcal{O}_x \equiv \mathcal{O}_M$.

5 El Teorema de Gabriel

Després de tot el que hem anat definint i explicant en aquest treball, després de tots els resultats obtinguts en cada un dels capítols, podem amb tot plegat demostrar el Teorema de Gabriel. Recordem què deia el teorema:

Teorema 5.1. (Teorema de Gabriel) *Un quiver (connex) Q és de tipus finit si i només si el seu graf no dirigit subjacent és un diagrama de Dynkin de tipus ADE, amb $n \geq 1$ i $m \geq 4$ per A_n i D_m .*

Demostració. Considerem un quiver Q amb n vèrtexs.

$\Rightarrow$) Suposem que Q és de tipus finit. Tindrem doncs un nombre finit de classes d'isomorfismes de representacions per a tot vector de dimensions $\underline{n} \in \mathbb{N}^n$. Pel teorema (4.13), això vol dir que hi haurà un nombre finit d'òrbites en $\text{Rep}(Q, \underline{n})$, $\forall \underline{n} \in \mathbb{N}^n$. Si considerem doncs un $\underline{n}$ qualsevol, a l'haver-hi finites òrbites, pel punt (3) de la proposició (4.8) existirà una òrbita oberta $\mathcal{O}_x$ tal que $\dim \mathcal{O}_x = \dim \text{Rep}(Q, \underline{n})$.

Pel corol·lari (4.14) (o pel lema (4.15)), tindrem $\text{Ext}_Q^1(M(x), M(x)) = 0$. Utilitzant la igualtat (3.18):

$$q_Q(\underline{n}) = \dim \text{End}_Q(M(x)) - \dim \text{Ext}_Q^1(M(x), M(x)) = \dim \text{End}_Q(M(x)) \geq 1$$

És a dir, la forma de Tits q_Q és definida positiva. Per tant, pel teorema (3.24), el graf no dirigit subjacent de Q és un diagrama de Dynkin de tipus ADE.

$\Leftarrow$) Suposem que el graf no dirigit subjacent de Q és un diagrama de Dynkin de tipus ADE i volem veure que hi ha un nombre finit de classes d'isomorfismes de representacions. Pel teorema de Krull-Schmidt (2.34), tota representació de Q és pot escriure com una suma directa finita de representacions indescomponibles. Si demostrem doncs que hi ha un nombre finit de classes d'isomorfismes de representacions indescomponibles, aleshores Q serà de tipus finit.

Pel teorema (3.24), si el graf no dirigit subjacent de Q és un diagrama de Dynkin de tipus ADE la seva forma de Tits q_Q és definida positiva. Per la proposició (3.27) qualsevol representació indescomponible M és de Schur, a més que $\text{Ext}_Q^1(M, M) = 0$. Aleshores, pel lema (4.15), l'òrbita $\mathcal{O}_M$ és oberta en $\text{Rep}(Q, \underline{\dim} M)$ i està unívocament determinada pel vector de dimensions $\underline{\dim} M$ (i per tant la representació M també estarà unívocament determinada per $\underline{\dim} M$ pel teorema (4.13)). D'altra banda, també per la proposició (3.27), tenim $q_Q(\underline{\dim} M) = 1$.

Així doncs, hem obtingut que les representacions indescomponibles estan unívocament determinades pel seu vector de dimensions (llevat d'isomorfisme) i, per tant, hi ha una injecció entre les classes d'isomorfismes de les representacions indescomponibles i els vectors de dimensions $\underline{n} \in \mathbb{N}^n$ tals que $q_Q(\underline{n}) = 1$.

Fixem-nos ara que, al ser q_Q definida positiva, podem considerar-la com una norma i associar-hi una distància. D'aquesta manera, el conjunt dels vectors complint $q_Q(\underline{n}) = 1$ estarà acotat i serà doncs finit per ser vectors sobre els naturals. Ho podem veure també com la intersecció de $\mathbb{N}^n$ sobre una hipersfera de $\mathbb{R}^n$ de radi 1, que està acotada.

En definitiva, el nombre de vectors de dimensions tal que $q_Q(\underline{n}) = 1$ serà finit i, per tant, el nombre de classes d'isomorfismes de les representacions indescomponibles serà finit. És a dir, Q és de tipus finit. $\square$

En la demostració del Teorema de Gabriel hem provat que existeix una injecció entre les descomposicions indescomponibles i els vectors $\underline{n}$ tals que $q_Q(\underline{n}) = 1$. Tanmateix, es pot provar que aquesta injecció és de fet una bijecció:

Teorema 5.2. *Siqui Q un quiver tal que la seva forma de Tits és definida positiva. Aleshores, existeix una bijecció entre les representacions indescomponibles de Q i els vectors de dimensions $\underline{n}$ tals que $q_Q(\underline{n}) = 1$*

Demostració. Ens queda provar doncs l'exhaustivitat de la bijecció, això és, que $\forall \underline{n} \in \mathbb{N}^n$ tal que $q_Q(\underline{n}) = 1$ existeix una representació indescomponible M complint $\underline{n} = \underline{\dim} M$.

Suposem que tenim una representació M amb $\underline{n} = \underline{\dim} M$ de forma que $q_Q(\underline{n}) = 1$, i tal que l'òrbita $\mathcal{O}_M$ és de dimensió màxima en la varietat de representacions $\text{Rep}(Q, \underline{n})$. Això vol dir que $\mathcal{O}_M$ no està estrictament continguda en la clausura de qualsevol altra òrbita que sigui diferent a ella, pel punt (3) de la proposició (4.8):

$$\mathcal{O}_M \not\subseteq \overline{\mathcal{O}_A}, \quad \forall \text{ representació } A \neq M \quad (5.1)$$

Suposem ara que M no és indescomponible. Llavors podem escriure M com la suma directa de dos submòduls diferents de 0: $M = L \oplus N$. Si considerem el grup d'extensió $\text{Ext}_Q^1(N, L)$, i una seqüència exacta curta de mòduls qualsevol que hi pertanyi com

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M' \longrightarrow N \longrightarrow 0 \quad ; \quad M' \neq M$$

aleshores, pel punt (1) del teorema (4.16), es té $\mathcal{O}_M = \mathcal{O}_{L \oplus N} \subseteq \overline{\mathcal{O}_{M'}}$. Això implica, per (5.1), que $\mathcal{O}_{L \oplus N} = \mathcal{O}_{M'}$ i, pel punt (2) del teorema (4.16), que la seqüència anterior és split. Per tant, pel lema (3.20), la seqüència pertany a la classe del zero de $\text{Ext}_Q^1(N, L)$, $\forall M' \implies \text{Ext}_Q^1(N, L) = 0$. De forma equivalent s'obté que $\text{Ext}_Q^1(L, N) = 0$.

Recordem ara la igualtat de la forma d'Euler obtinguda en (3.17). Tenim el següent:

$$\begin{aligned} \langle \underline{\dim} L, \underline{\dim} N \rangle_Q &= \dim \text{Hom}_Q(L, N) - \dim \text{Ext}_Q^1(L, N) = \dim \text{Hom}_Q(L, N) \geq 0 \\ \langle \underline{\dim} N, \underline{\dim} L \rangle_Q &= \dim \text{Hom}_Q(N, L) - \dim \text{Ext}_Q^1(N, L) = \dim \text{Hom}_Q(N, L) \geq 0 \end{aligned}$$

D'altra banda, com la forma de Tits és definida positiva, tenim:

$$q_Q(\underline{\dim} L) \geq 1 \quad ; \quad q_Q(\underline{\dim} N) \geq 1$$

Per tant:

$$\begin{aligned} q_Q(\underline{n}) &= q_Q(\underline{\dim} L + \underline{\dim} N) \\ &= q_Q(\underline{\dim} L) + q_Q(\underline{\dim} N) + \langle \underline{\dim} L, \underline{\dim} N \rangle_Q + \langle \underline{\dim} N, \underline{\dim} L \rangle_Q \\ &= q_Q(\underline{\dim} L) + q_Q(\underline{\dim} N) + \dim \text{Hom}_Q(L, N) + \dim \text{Hom}_Q(N, L) \\ &\geq 2 \end{aligned}$$

La segona igualtat ve simplement de les propietats de les formes bilineals. Arribem doncs a una contradicció amb $q_Q(\underline{n}) = 1 \implies M$ ha de ser indescomponible. $\square$

Observació 5.3. Fixem-nos que en el teorema considerem que el quiver Q és connex. Si Q no és connex, el teorema simplement canvia dient que Q és de tipus finit si i només si el graf no dirigit subjacent de cada component connexa de Q és un diagrama de Dynkin de tipus ADE.

Peter Gabriel va publicar l'enunciat del teorema que ara porta el seu nom i la seva demostració l'any 1972. És tracta de l'article [Gab72]. La demostració que hem fet aquí, però, segueix principalment les idees de les demostracions fetes al teorema 3.3 de [KJ16], al teorema 2.4.3 de [Bri08] i als teoremes 8.1 i 8.2 de [LT19].

6 Conclusions

Després de tota la feina feta per demostrar el Teorema de Gabriel i caracteritzar els quivers de tipus finit, un es pot preguntar: i què passa amb els quivers de tipus *infinit*, és a dir, quivers amb un nombre infinit de classes d'isomorfismes de representacions?

Tot i que en el fons podem dir que la gran majoria de quivers són de tipus infinit (com hem pogut observar en els exemples del capítol 2), l'estudi i la caracterització dels quivers de tipus infinit és molt més complicada. No obstant això, els quivers de tipus infinit es poden separar en dues classes: els quivers **dòcils/mans** (*tame* en anglès) i els quivers **salvatges** (*wild*). Els dòcils són aquells quivers que permeten una parametrització de les classes d'isomorfismes de representacions indescomponibles en una família de dimensió 1 com a molt. Un exemple de quiver infinit dòcil és el *loop* L_1 . Si el quiver infinit no compleix aquesta condició, direm doncs que és salvatge. El quiver L_r per $r \geq 2$ és salvatge.

Doncs resulta que els quivers dòcils tenen el seu propi Teorema de Gabriel (que no s'anomena Teorema de Gabriel): un quiver Q que no és de tipus finit serà dòcil si i només si el seu graf subjacent no dirigit és la unió de diagrames de Dynkin i diagrames euclidis¹²(veure el teorema 10 de [DW05] o el teorema 8.3 de [LT19]). En el capítol 7 de [KJ16] hi ha informació més detallada sobre els quivers dòcils i salvatges.

Per als quivers salvatges, la classificació de les representacions és un problema pràcticament impossible segons molts matemàtics, per culpa de la dependència de les classes d'isomorfismes de les representacions de molts paràmetres continus que són arbitraris, als quals no s'apliquen moltes de les eines clàssiques de la teoria de representacions. Tanmateix, és important destacar [Rei08], que mira d'abordar el problema de la classificació geomètricament amb els anomenats espais de *moduli*, i buscant condicions d'estabilitat per a les representacions segons com es puguin parametritzar.

A part de tot això, cal remarcar que en aquest treball hem emprat un resultat clau per al Teorema de Gabriel: el teorema (3.24). Aquest teorema que relaciona la forma de Tits i els diagrames de Dynkin no l'hem demostrat aquí per qüestions de temps i espai. Per obtenir aquest resultat ens hem d'endinsar en la teoria de sistemes d'arrels que hem mencionat en la introducció d'aquest treball, i si hagués pogut hauria mirat de poder donar més detalls sobre el tema. Ara bé, com he dit també a la introducció, he hagut de destriar què posar i què no posar.

A tall de conclusió, aquest ha estat un treball que m'ha permès utilitzar molts dels coneixements que he anat adquirint durant aquests anys de carrera universitària, particularment d'àlgebra. Entre àlgebra lineal, geometria lineal o projectiva, estructures algebraiques i topologia, més d'un cop m'he trobat rellegant els apunts de les assignatures per recordar bé alguns dels conceptes que necessitava. Ha estat molt satisfactori també adonar-me que molts d'aquests conceptes els tenia ben interioritzats, i això permetia llegir amb més facilitat tots els llibres i articles que necessitava. D'aquesta manera, a més a més, he pogut introduir-me en nous camps de les matemàtiques, com l'àlgebra homològica o la geometria algebraica, en els quals potser en un futur decideixo interioritzar més.

¹²També anomenats diagrames de Dynkin *ampliats*.

Referències

- [ARS95] Maurice Auslander, Idun Reiten, and Sverre O. Smalø. *Representation Theory of Artin Algebras*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1995.
- [Bar15] Michael Barot. *Introduction to the representation theory of algebras*. Springer, 2015.
- [Ben91] D. J. Benson. *Representations and Cohomology I: Basic representation theory of finite groups and associative algebras*, volume 30 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, 1991.
- [Bri08] Michel Brion. *Representations of quivers*, 2008. Lectures given at the summer school “Geometric methods in representation theory”.
- [Bri10] Michel Brion. Introduction to actions of algebraic groups. *Les cours du CIRM*, 1:1–22, 2010.
- [DW05] Harm Derksen and Jerzy Weyman. Quiver representations. *Notices of the AMS*, 52(2):200–206, 2005.
- [Eis95] David Eisenbud. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, volume 150 of *Graduate Text in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [Gab72] Peter Gabriel. Unzerlegbare darstellungen I. *Manuscripta Mathematica*, 6:71–103, 1972.
- [Hal15] Brian Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*, volume 22 of *Graduate Text in Mathematics*. Springer International Publishing Switzerland, 2015.
- [HGK04] Michiel Hazewinkel, Nadiya Gubarenii, and Vladimir V. Kirichenko. *Algebras, Rings and Modules: Volume 1*, volume 575. Springer Science & Business Media, 2004.
- [HHSV77] Michiel Hazewinkel, W. Hesselink, Dirk Siersma, and F.D. Veldkamp. The ubiquity of coxeter dynkin diagrams (an introduction to the ade problem). *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 25:257–307, 01 1977.
- [KJ16] Alexander Kirillov Jr. *Quiver representations and quiver varieties*, volume 174. American Mathematical Soc., 2016.
- [LT19] Javier Linares Torres. *Representaciones de Quivers*, 2019. (Trabajo Fin de Grado Inédito). Universidad de Sevilla, Sevilla.
- [MD18] H. G. Mora Díaz. *Una Introducció a la Teoria de Representaciones de Quivers*. <http://hdl.handle.net/11349/12999>, 2018. Accedit: 19/05/2023.
- [MR22] Marc Miranda Riaza. *Representació de grups de Lie compactes i la seva aplicació en física de partícules*. <http://hdl.handle.net/2445/192120>, 2022. Accedit: 31/05/2023. Treball de final de grau. Universitat de Barcelona.

- [Mum99] David Mumford. *The Red Book of Varieties and Schemes, 2nd expanded ed.*, volume 1358 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1999.
- [OV90] A. L. Onishchik and E. B. Vinberg. *Lie groups and algebraic groups*, traduït del rus i amb un prefaci de D. A. Leites. Springer Series in Soviet Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [Rei08] Markus Reineke. *Moduli of representations of quivers*, 2008. arXiv: 0802.2147.
- [Rot09] Joseph J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [Sha13] Igor R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry 1, Varieties in Projective Space, 3rd ed.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2013.
- [TY05] Peter Tauvel and R.W.T. Yu. *Lie Algebras and Algebraic Groups*. Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [Ura00] Angel M. Uranga. *From quiver diagrams to particle physics*, 2000. arXiv: hep-th/0007173.