



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

EL TEOREMA DE KILLING-HOPF

Autor: Josep Atencia San Miguel

Director: Dr. Ricardo García López

Realizado en: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 13 de junio de 2023

Abstract

Driven by the study of the universe's geometry, the Killing-Hopf theorem classifies the riemannian manifolds with constant sectional curvature, identifying them as the quotient of an euclidean space, a spherical space or a hyperbolic space. Starting from a theoretical foundation in differential geometry, in this essay we develop a proof of the theorem, focused on the application of geodesics curves and their metric properties in riemannian manifolds.

Resumen

Motivado por el estudio de la geometría del universo, el teorema de Killing-Hopf clasifica las variedades riemannianas con curvatura seccional constante, identificándolas como el cociente de un espacio euclídeo, un espacio esférico o un espacio hiperbólico. Partiendo de una base teórica establecida en la geometría diferencial, en esta memoria desarrollamos una demostración del teorema, centrada en la aplicación de las propiedades métricas de las curvas geodésicas en variedades riemannianas.

Agradecimientos

A mi tutor Ricardo, por mostrarme la belleza de la topología y la geometría.

A mis padres, por animarme a perseguir mi deseo de estudiar matemáticas.

Y a Sofí, por estar apoyándome a mi lado incluso en los momentos más difíciles.

Índice

1. Introducción	1
2. Geodésicas y distancia	4
2.1. Familias de curvas	4
2.2. Curvas minimizantes	7
2.3. Bolas geodésicas	10
2.4. Completitud	17
3. Campos de Jacobi	22
3.1. Ecuación de Jacobi	22
3.2. Campos de Jacobi que se anulan en un punto	26
3.3. Campos de Jacobi en variedades de curvatura constante	28
4. Recubrimientos riemannianos	33
4.1. Acciones de grupos de isometrías sobre recubrimientos riemannianos	37
5. Teorema de Killing-Hopf	39
5.1. Prolongación de isometrías locales a lo largo de caminos	39
5.2. Teorema de Killing-Hopf	41

1. Introducción

El teorema de Killing-Hopf, nombrado tras los matemáticos Wilhelm Killing (1847-1923), y Heinz Hopf (1894-1971), demuestra, que las variedades riemannianas de dimensión n , con una métrica de curvatura seccional constante, y que sean conexas y completas, son isométricas al cociente por un grupo de automorfismos isométricos, de una de las variedades que en este trabajo denominaremos las **variedades riemannianas estándar**: el espacio euclídeo \mathbb{R}^n , si la curvatura es nula, el espacio esférico \mathbb{S}^n , si la curvatura es positiva, y el espacio hiperbólico \mathbb{H}^n , si la curvatura es negativa. A estos cocientes se les suele denominar **formas espaciales**.

Este teorema es un importante teorema de clasificación, que permite reducir el estudio de las propiedades geométricas de las variedades riemannianas con curvatura constante, al estudio de las formas espaciales.

La motivación histórica² tras la demostración del Teorema de Killing-Hopf, se sitúa a finales del siglo XIX. Con los inicios del desarrollo de las geometrías no euclidianas y la discusión sobre el axioma de Euclides sobre las rectas paralelas, empezó a surgir la duda de si era correcto atribuir al universo las propiedades topológicas y geométricas del espacio euclidiano. Algunas de estas propiedades que se cuestionaban los físicos y matemáticos de la época, eran la dimensión, la continuidad, o la conectividad del universo.

Estas dudas se acrecentaron aún más cuando William Kingdon Clifford (1845-1879), demostró que la geometría local de un espacio podía ser consecuencia de geometrías globales muy distintas. En particular, que un espacio fuera localmente euclidiano, o con curvatura constante, no determinaba sus propiedades geométricas globales. Por otro lado, el físico Hermann v. Helmholtz (1821-1894) enunció que, desde un punto de vista empírico, una suposición necesaria para establecer un modelo matemático del universo era el "libre movimiento de los cuerpos rígidos". Esto inició una rivalidad argumentativa entre Wilhelm Killing y Felix Klein (1849-1925) sobre el estudio de los espacios geométricos localmente euclidianos, que cumplieren la propiedad de libre movimiento enunciada por Helmholtz.

Killing y Klein acabaron concluyendo que la suposición adecuada era considerar sólo el libre movimiento de los cuerpos rígidos de tamaño finito y acotado, que tiene como consecuencia que el espacio tenga una curvatura constante. Klein retó a Killing a enumerar las distintas variedades que cumplieren dicha propiedad. Esta tarea concluyó cuando Killing hizo una primera demostración del teorema de Killing-Hopf en 1891. El problema de Killing fue que esta demostración requería un uso extenso de la teoría de grupos y topología aplicada a variedades, campos que aún se encontraban en proceso de formalización en las matemáticas. Esto hizo que Killing se apoyase en muchos argumentos que apelaban más a la intuición, y eran más coloquiales que formales y rigurosos, y se podía considerar que la demostración tenía agujeros argumentativos.

Esto cambió años más tarde cuando Heinz Hopf completó su versión de la demostración del teorema de Killing-Hopf en 1926. Por ese entonces Albert Einstein (1879-1955) ya había publicado su artículo sobre la relatividad general. Como según esta teoría las masas son las que determinarían la curvatura del universo, si se supone una distribución uniforme de las masas en el universo en gran escala, se puede asumir que el universo tiene una curvatura constante. Esto reforzó la motivación para el estudio de las variedades de curvatura constante. Fue entonces cuando Hopf cogió el testigo al trabajo realizado por Killing y lo extendió. Hopf ya contaba con las suficientes herramientas formales de la to-

²Para el contexto histórico la referencia ha sido [2]

pología algebraica, como la teoría de recubrimientos topológicos, con los que Killing no contaba, y eso le permitió hacer una demostración totalmente rigurosa y formalizada del teorema de Killing-Hopf, incorporando así su nombre al teorema.

La versión de Hopf del teorema se centró en clasificar las variedades riemannianas geodésicamente completas, y con curvatura constante, en función de sus geometrías. Esto resultó en la versión del teorema que conocemos hoy en día, la mencionada al inicio de este trabajo. Toda variedad riemanniana, que cumpliera las condiciones previas, es isométrica a una de las formas espaciales enunciadas, en función del valor de su curvatura constante. Primero estableció una relación entre las propiedades de completitud y completitud geodésica (como se verá en el teorema de Hopf-Rinow), luego estableció isometrías en entornos locales con entornos de las variedades estándar, y finalmente amplió este resultado a una isometría global para variedades simplemente conexas, y luego a las variedades conexas, formando estos dos últimos resultados el teorema de Killing-Hopf.

Estructura de la Memoria

El objetivo principal de este trabajo consiste en demostrar el teorema de Killing-Hopf en esta última forma establecida por Hopf. Primero demostraremos el resultado a nivel local, luego globalmente para variedades simplemente conexas, y luego para las variedades conexas. Hay varias vías para demostrar el teorema, por ejemplo, la demostración de Joseph Wolf (1936-), en [WolfCC], que se apoya principalmente en la topología algebraica. Sin embargo, en este trabajo seguiremos la línea argumental establecida por John M. Lee (1950-) en [LeeRM], la cual es la fuente de investigación bibliográfica principal consultada en este trabajo, y de la que salen la mayoría de enunciados y demostraciones. Se notificará cuando se empleen otras referencias.

Esta demostración es mucho más geométrica, centrada en el uso de las propiedades métricas de las geodésicas, las familias de curvas, y los campos vectoriales a lo largo de curvas.

La base teórica sobre la que parte este trabajo se fundamenta en el material dado en el curso de geometría diferencial de la facultad. En esta base se incluye el estudio de las variedades diferenciables, las conexiones, el transporte paralelo, los tensores de curvatura, las geodésicas, la aplicación exponencial, los entornos coordenados normales y las métricas riemannianas.

El trabajo consiste en cuatro secciones: “Geodésicas y distancia”, “Campos de Jacobi”, “Recubrimientos riemannianos”, y “Teorema de Killing-Hopf”.

En la primera sección, de geodésicas y distancia, establecemos una serie de resultados relativos a las propiedades métricas de las geodésicas, además de definir y mostrar propiedades de familias de curvas. Esta sección servirá de base para obtener los resultados de los sucesivos pasos de la demostración del teorema de Killing-Hopf. Finaliza con la demostración del teorema de Hopf-Rinow, que establece una equivalencia entre los conceptos de completitud métrica y completitud geodésica.

Seguidamente, viene la sección de los Campos de Jacobi. Estos son campos vectoriales a lo largo de curvas que permiten definir familias de curvas geodésicas. Se define formalmente el concepto y se demuestran una serie de propiedades que, al aplicarse sobre variedades de curvatura constante, permiten demostrar que en una tal variedad, existen entornos que son isométricos a entornos de las variedades riemannianas estándar.

Luego viene una sección auxiliar, relativa a los recubrimientos riemannianos. En esta sección, se definen y se enuncian algunos resultados relativos a los recubrimientos topológicos, diferenciables y riemannianos. Estos resultados son empleados en la propia sección para demostrar, como consecuencia de Hopf-Rinow, que una isometría local entre variedades conexas, donde la variedad de salida es completa, es un recubrimiento riemanniano y que además, la variedad de llegada es completa. Principalmente se emplea el contenido de esta sección, para tener la base de topología algebraica necesaria los resultados de la sección siguiente.

Finalmente, se encuentra la sección donde se demuestra el teorema de Killing-Hopf. Se inicia estudiando la prolongación de isometrías locales sobre curvas, que permite globalizar el resultado final obtenido en la sección de los campos de Jacobi, demostrando así la versión del teorema para variedades simplemente conexas. Luego, como corolario, se demuestra que las variedades conexas con curvatura constante, son isométricas a cocientes de las variedades riemannianas estándar (formas espaciales). Finalizando la demostración y con ella el trabajo.

2. Geodésicas y distancia

El objetivo de esta sección consiste en establecer las herramientas y las propiedades métricas de las geodésicas que servirán como base para desarrollar los distintos pasos de la demostración del teorema de Killing-Hopf. El objetivo final de esta sección consiste en demostrar el teorema de Hopf-Rinow, que establece que la completitud, en el sentido métrico, es equivalente a la completitud geodésica en las variedades riemannianas conexas.

En esta sección y en el resto del trabajo supondremos que (M, g) es una variedad riemanniana, así M es una variedad diferenciable de dimensión n y g una métrica riemanniana definida sobre M . Además, asumimos que cuando se utilice una conexión ∇ sobre esta variedad riemanniana, esta será la conexión de Levi-Civita de g , por lo que tendrá las propiedades de compatibilidad con la métrica y simetría. También, siempre que se use una norma o producto escalar en el contexto de variedad riemanniana, se asume que se está usando la métrica g asociada. En caso de que se estén usando diferentes métricas, se indicará cual es la métrica asociada a la operación.

2.1. Familias de curvas

Antes de nada, definimos en que consisten las familias de curvas y demostramos un par de propiedades de estas. Las familias de curvas servirán como una herramienta que nos facilitará la demostración de varias proposiciones de esta sección, y también servirá de base para desarrollar la teoría de los campos de Jacobi en la siguiente.

Definición 2.1. Sea (M, g) variedad riemanniana y sean $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalos, entonces se define una **familia uniparamétrica de curvas** como una aplicación continua $\Gamma : J \times I \rightarrow M$.

Esta familia define dos conjuntos de curvas sobre M :

- Las **curvas principales** $\Gamma_s(t) := \Gamma(s, t)$ donde $s \in J$ es constante, definida para todo $t \in I$.
- Las **curvas transversales** $\Gamma^{(t)}(s) := \Gamma(s, t)$ donde $t \in I$ es constante, definida para todo $s \in J$.

Como solo trataremos con familias de curvas uniparamétricas, de ahora en adelante nos referiremos a ellas simplemente como familias de curvas. Además siempre se considerarán $I, J \subseteq \mathbb{R}$ como intervalos.

Definición 2.2. Sea Γ una familia de curvas como en la definición previa. Se define un **campo vectorial a lo largo de Γ** como una aplicación continua $V : J \times I \rightarrow TM$, donde TM es el fibrado tangente de M , tal que $V(s, t) \in T_{\Gamma(s, t)}M$.

Si además, la familia de curvas es diferenciable (en caso de que la aplicación definitoria Γ sea diferenciable), podemos definir los siguientes campos vectoriales a lo largo de la familia de curvas, dados respectivamente por los vectores de velocidad de las curvas principales y transversales de la familia:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma(s, t) = (\Gamma_s)'(t) \in T_{\Gamma(s, t)}M,$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\Gamma(s, t) = (\Gamma^{(t)})'(s) \in T_{\Gamma(s, t)}M.$$

Para agilizar el uso de estos campos vectoriales, usaremos la siguiente notación

$$T(s, t) := \frac{\partial}{\partial t}\Gamma(s, t); \quad S(s, t) := \frac{\partial}{\partial s}\Gamma(s, t).$$

Definición 2.3. Sea (M, g) variedad riemanniana. Sea V un campo vectorial a lo largo de una curva diferenciable γ en M . Nos referiremos al campo vectorial $\nabla_{\gamma'}V$ como **la derivada covariante de V a lo largo de γ** .

Observación 2.4. Aunque hemos definido el concepto de campo vectorial a lo largo de una familia de curvas, el trato que le daremos, por ejemplo en conexiones, es de campo vectorial a lo largo de una curva, y por tanto tendrá sus mismas propiedades. Por ejemplo, que las curvas principales son todas curvas geodésicas equivale a decir que $\nabla_T T = 0$, la derivada covariante T a lo largo de las curvas principales. Por otro lado $\nabla_S V$, con V un campo vectorial a lo largo de la familia de curvas, se trataría como la derivada covariante de V a lo largo de las curvas transversales.

En demostraciones posteriores vamos a concatenar curvas, y queremos estudiar las curvas resultantes, que no tienen porque ser diferenciables. Así, introducimos las siguientes definiciones.

Definición 2.5. Por brevedad, llamaremos **curva admisible** a una curva regular a trozos en M .

Con la notación anterior, una familia de curvas Γ se llamará una **familia de curvas admisible** si se verifica

1. El intervalo I es cerrado, por tanto el dominio de Γ es de la forma $J \times [a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$.
2. Hay una partición de $[a, b]$, (a_0, \dots, a_k) con $k \in \mathbb{N}_{>0}$, tal que Γ es diferenciable en cada $J \times [a_{i-1}, a_i]$, donde $i \in \{1, \dots, k\}$. A esta se le llama una **partición admisible** de Γ .
3. Cada curva principal $\Gamma_s(t)$ es una curva admisible para todo $s \in J$.

Además, diremos que un campo vectorial V a lo largo de Γ es **diferenciable por partes** si es diferenciable en cada $J \times [a_{i-1}, a_i]$.

A partir de aquí podemos pasar a estudiar las variaciones de curvas.

Definición 2.6. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, con $a, b \in \mathbb{R}$, una curva admisible. Entonces se define una **variación de la curva** γ , como una familia de curvas admisible $\Gamma : J \times [a, b] \rightarrow M$ donde $0 \in J$ y $\Gamma_0 = \gamma$.

Se dirá que es una **variación propia**, si todas las curvas principales tienen los mismos puntos iniciales y finales, es decir $\Gamma_s(a) = \gamma(a)$ y $\Gamma_s(b) = \gamma(b)$ para todo $s \in J$ (Fig. 1)³.

³Todas las figuras en este trabajo se han construido mediante la herramienta de la calculadora gráfica de GeoGebra en <https://www.geogebra.org/calculator>

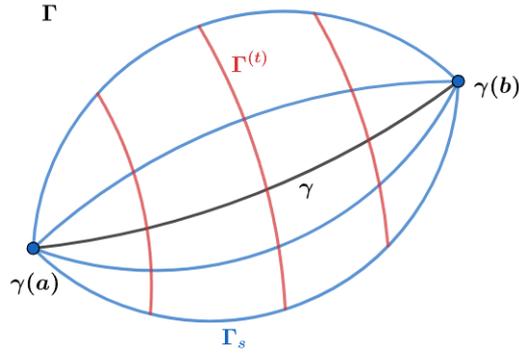


Figura 1: Variación propia de la curva γ .

Por tanto, si tenemos una familia de curvas admisible como en la definición 2.5, los campos vectoriales S y T son diferenciables en cada rectángulo $J \times [a_{i-1}, a_i]$.

El campo S es continuo en todo el dominio, dado que en cada conjunto $J \times \{a_i\}$, con $i \in \{1, \dots, k-1\}$, el valor de S depende solamente de los valores de Γ en ese conjunto, al ser las derivadas respecto s de las curvas transversales. Esto no ocurre para el campo vectorial T , dado que las curvas principales no tienen porque ser diferenciables.

Definición 2.7. Sea Γ una variación de una curva admisible γ . Se define un **campo variacional de Γ** como el campo vectorial diferenciable por partes a lo largo de γ dado por

$$V(t) := S(0, t).$$

Además, si el campo vectorial V cumple que $V(a) = V(b) = 0$, entonces se dice que es un campo vectorial **propio**. Es inmediato, que el campo variacional de una variación propia es un campo vectorial propio. Efectivamente, para $t = a, b$ las curvas transversales son constantes, y por tanto $S(0, a) = S(0, b) = 0$.

Con estas definiciones, pasamos a ver un par de propiedades sobre las familias de curvas admisibles. La primera, nos permitirá definir familias de curvas a partir de campos vectoriales a lo largo de una curva inicial.

Proposición 2.8. Sea γ una curva admisible y V un campo vectorial diferenciable a trozos a lo largo de γ . Entonces V es el campo variacional de alguna variación de γ . Si además V es propio, entonces la variación correspondiente es propia.

Demostración. Definimos la aplicación $\Gamma(s, t) := \exp_{\gamma(t)}(sV(t))$. \exp denota la aplicación exponencial $\exp : TM \rightarrow M$. Suponemos que la curva γ está definida como en 2.6. Entonces por las propiedades de \exp , esta está definida en un entorno de $\gamma([a, b]) \times \{0\} \in TM$ y como $[a, b]$ es compacto, podemos coger un $\varepsilon > 0$ tal que Γ está definido en $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b]$. Como la exponencial es diferenciable por composición, Γ es continua y además es diferenciable en cada rectángulo $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a_{i-1}, a_i]$, donde $[a_{i-1}, a_i]$ son los subintervalos en los que V es diferenciable, por lo que Γ es una familia de curvas admisible. Entonces como $\Gamma(0, t) = \exp_{\gamma(t)}(0) = \gamma(t)$ tenemos que se trata de una variación de γ . Además, si V es propio, se tiene en los extremos que $\Gamma(s, a) = \exp_{\gamma(a)}(0) = \gamma(a)$, para todo $s \in J$, con lo que Γ se trata de una variación propia de γ .

□

Sea V un campo vectorial sobre Γ diferenciable a trozos sobre las curvas principales, entonces podemos calcular la derivada covariante de V a lo largo de las curvas principales (donde V sea diferenciable) y a lo largo de las curvas transversales. Estos son, respectivamente, los campos vectoriales

$$\nabla_T V := \nabla_{(\Gamma_s)'(t)} V; \quad \nabla_S V := \nabla_{(\Gamma^{(t)})'(s)} V.$$

Proposición 2.9 (Lema de simetría). *Sea $\Gamma : J \times [a, b] \rightarrow M$ una familia de curvas admisible en una variedad riemanniana (M, g) . Entonces, en todo rectángulo $J \times [a_{i-1}, a_i]$ donde Γ es diferenciable se cumple*

$$\nabla_S T = \nabla_T S.$$

Demostración. Consideramos coordenadas locales (x_i) , $i \in \{1, \dots, n\}$ en un entorno alrededor de un punto cualquiera $\Gamma(s_o, t_o)$. Escribimos las componentes locales de Γ en el entorno como $\Gamma(s, t) = (x_1(s, t), \dots, x_n(s, t))$, con lo que

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_k}; \quad S = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Entonces, por la fórmula del cálculo de derivadas covariantes a lo largo de una curva en coordenadas locales obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla_S T &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 x_k}{\partial s \partial t} + \sum_{i,j} \frac{\partial x_j}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial s} \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k}, \\ \nabla_T S &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 x_k}{\partial t \partial s} + \sum_{i,j} \frac{\partial x_j}{\partial s} \frac{\partial x_i}{\partial t} \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k}, \end{aligned}$$

donde $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Por la propiedad de simetría de la conexión de Levi-Civita, $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Por tanto, podemos intercambiar los índices i y j de la segunda ecuación, obteniendo así que $\nabla_S T = \nabla_T S$. \square

2.2. Curvas minimizantes

Definición 2.10. *Sea (M, g) una variedad riemanniana y sea $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, $a, b \in \mathbb{R}$ una curva admisible en M . Se dice que γ es **minimizante** si para toda otra curva admisible $\tilde{\gamma}$ con los mismos extremos se tiene que $L(\gamma) \leq L(\tilde{\gamma})$, donde L es la función longitud asociada a la métrica g .*

Equivalentemente, la curva γ es minimizante si su longitud es igual a la distancia riemanniana entre los dos extremos.

En esta subsección demostramos que toda curva minimizante entre dos puntos es de hecho una geodésica. Para ello, emplearemos los conceptos sobre familias de curvas mencionados en la subsección anterior.

La idea consiste, en que, si tenemos una curva minimizante $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, con $a, b \in \mathbb{R}$, y si $\Gamma : J \times [a, b] \rightarrow M$ es una variación propia de esta, entonces podemos definir la función $L(\Gamma_s)$ respecto a s que asigna a s la longitud de la curva Γ_s . Así, como $\Gamma_0 = \gamma$

es minimizante, $s = 0$ es un mínimo de $L(\Gamma_s)$, por lo que si esta fuese una función diferenciable, tendríamos que $\frac{\partial}{\partial s}|_{s=0} L(\Gamma_s) = 0$. Esta diferenciablez la veremos en el siguiente teorema.

Teorema 2.11 (Fórmula de la primera variacional). *Sea (M, g) una variedad riemanniana, $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, con $a, b \in \mathbb{R}$, una curva admisible parametrizada por el arco, $\Gamma : J \times [a, b] \rightarrow M$ una variación propia de γ , y V el campo variacional de Γ . Entonces, $L(\Gamma_s)$ es una aplicación diferenciable con respecto a s y obtenemos que*

$$\frac{\partial}{\partial s}|_{s=0} L(\Gamma_s) = - \int_a^b \langle V, \nabla_{\gamma'} \gamma' \rangle(t) dt - \sum_{i=1}^{k-1} \langle V(a_i), \gamma'(a_i^+) - \gamma'(a_i^-) \rangle, \quad (2.1)$$

donde (a_0, \dots, a_k) , $k \in \mathbb{N}_{>0}$ es una partición admisible de Γ .

Demostración. En cada rectángulo $J \times [a_{i-1}, a_i]$, $i \in \{1, \dots, k\}$, donde Γ es diferenciable, tenemos que, por la definición de la longitud de una curva, $L(\Gamma_{s|[a_{i-1}, a_i]}) = \int_{a_{i-1}}^{a_i} |T(s, t)| dt$, y como $|T(s, t)|$ es diferenciable en $[a_{i-1}, a_i]$, que es compacto, tenemos que $L(\Gamma_{s|[a_{i-1}, a_i]})$ es diferenciable y podemos pasar la derivación al interior de la integral. Entonces, como $L(\Gamma_s) = \sum_{i=1}^k L(\Gamma_{s|[a_{i-1}, a_i]})$, obtenemos que es diferenciable en J .

Para cada $[a_{i-1}, a_i]$ calculamos la derivada parcial respecto a s :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} L(\Gamma_{s|[a_{i-1}, a_i]}) &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{\partial}{\partial s} (\langle T, T \rangle(s, t))^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{1}{2|T(s, t)|} \frac{\partial}{\partial s} \langle T, T \rangle(s, t) dt \\ &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{1}{|T(s, t)|} \langle \nabla_S T, T \rangle(s, t) dt \\ &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{1}{|T(s, t)|} \langle \nabla_T S, T \rangle(s, t) dt, \end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad usamos las propiedades de la compatibilidad con la métrica, y en la última igualdad usamos el lema de simetría 2.9.

Entonces, si $s = 0$ se tiene que $S(0, t) = V(t)$ y $T(0, t) = \gamma'(t)$, donde $|\gamma'(t)| = 1$ por la hipótesis. Con esto en cuenta, junto con la igualdad anterior cuando $s = 0$, queda:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}|_{s=0} L(\Gamma_s) &= \sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0} L(\Gamma_s|_{[a_{i-1}, a_i]}) \\
&= \sum_{i=1}^k \int_{a_{i-1}}^{a_i} \langle \nabla_{\gamma'} V, \gamma' \rangle(t) dt \\
&= \sum_{i=1}^k \int_{a_{i-1}}^{a_i} \left(\frac{\partial}{\partial t} \langle \gamma', V \rangle(t) - \langle V, \nabla_{\gamma'} \gamma' \rangle(t) \right) dt \\
&= \sum_{i=1}^k \left[\langle \gamma'(a_i^-), V(a_i) \rangle - \langle \gamma'(a_{i-1}^+), V(a_{i-1}) \rangle - \int_{a_{i-1}}^{a_i} \langle V, \nabla_{\gamma'} \gamma' \rangle(t) dt \right] \\
&= \langle \gamma'(b), V(b) \rangle - \langle \gamma'(a), V(a) \rangle - \int_a^b \langle V, \nabla_{\gamma'} \gamma' \rangle(t) dt - \sum_{i=1}^{k-1} \langle V(a_i), \gamma'(a_i^+) - \gamma'(a_i^-) \rangle \\
&= - \int_a^b \langle V, \nabla_{\gamma'} \gamma' \rangle(t) dt - \sum_{i=1}^{k-1} \langle V(a_i), \gamma'(a_i^+) - \gamma'(a_i^-) \rangle,
\end{aligned}$$

donde en la tercera igualdad usamos de nuevo la compatibilidad con la métrica, en la cuarta el teorema fundamental del cálculo, y en la última usamos que V es un campo variacional propio. Obtenemos así la fórmula deseada. \square

Y así, podemos demostrar el resultado principal de la sección.

Teorema 2.12. *En una variedad riemanniana toda curva minimizante parametrizada por el arco es una geodésica.*

Demostración. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una curva admisible minimizante parametrizada por el arco y con una partición admisible (a_0, \dots, a_k) , $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Sea Γ es una variación propia cualquiera de γ . Entonces, $\frac{\partial}{\partial s}|_{s=0} L(\Gamma_s) = 0$, al ser γ minimizante.

Crearemos variaciones propias de γ para demostrar que esta es una geodésica.

Primero demostraremos que para cada intervalo $[a_{i-1}, a_i]$, $i \in 1, \dots, k$, en el que γ es diferenciable, $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$ es una geodésica. Para ello, podemos tomar una función meseta $\rho : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\rho > 0$ en (a_{i-1}, a_i) y es 0 en caso contrario. Definimos el campo variacional $V(t) := \rho(t) \nabla_{\gamma'} \gamma'(t)$, entonces (2.1) nos da que

$$0 = - \int_a^b \langle V, \nabla_{\gamma'} \gamma' \rangle(t) dt = - \int_{a_{i-1}}^{a_i} \rho(t) |\nabla_{\gamma'} \gamma'(t)|^2 dt,$$

y como el integrando es no negativo, y por la elección de ρ esta no se anula, obtenemos que $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$ en $t \in (a_{i-1}, a_i)$, luego $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$ es una geodésica.

Por otro lado vemos que γ no tiene esquinas. Es decir, que para todo $i \in \{1, \dots, k-1\}$ se tiene que $\gamma'(a_i^+) = \gamma'(a_i^-)$. Aquí, para i se puede usar de nuevo una función meseta tal que podemos construir un campo vectorial V diferenciable por partes a lo largo de γ , tal que $V(a_i) = \gamma'(a_i^+) - \gamma'(a_i^-)$ y que $V(a_j) = 0$ para $j \neq i$. Repetimos el proceso generando una variación de γ usando V como campo variacional, y en este caso, el resultado anterior de que $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$ y (2.1), nos dan que

$$0 = \langle V(a_i), \gamma'(a_i^+) - \gamma'(a_i^-) \rangle = \langle \gamma'(a_i^+) - \gamma'(a_i^-), \gamma'(a_i^+) - \gamma'(a_i^-) \rangle,$$

y por tanto que $\gamma'(a_i^+) = \gamma'(a_i^-)$.

Como cada segmento $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$ es una geodésica, estas restricciones de γ tienen la misma velocidad $\gamma'(a_i)$ en el punto común a_i . Por la unicidad de las geodésicas en un mismo punto con misma velocidad, se tiene que cada segmento de la curva es la extensión geodésica de la anterior, con que al final γ es una geodésica. □

2.3. Bolas geodésicas

En esta sección trataremos algunas de las propiedades métricas de las bolas geodésicas, y de las geodésicas dentro de ellas, aprovechando las herramientas proporcionadas por las familias de curvas. Esto nos servirá primeramente para demostrar el teorema de Hopf-Rinow, y luego, para demostrar el teorema de Killing-Hopf.

Primero, recordamos la definición de bola geodésica.

Definición 2.13. Sea (M, g) una variedad Riemanniana y $p \in M$. Sea $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño para que \exp_p esté definida en la bola abierta $B_\varepsilon(0) \subseteq T_pM$. Nos referimos a $\exp_p(B_\varepsilon(0))$ como la **bola geodésica abierta de radio ε y centro p** .

Análogamente definimos las bolas geodésicas cerradas, y las esferas geodésicas. Como \exp_p está definido en un abierto de T_pM , toda bola geodésica cerrada y esfera geodésica está dentro de una bola geodésica abierta de radio mayor.

Observación 2.14. En el contexto de la definición, las bolas geodésicas de radio lo suficientemente pequeño son entornos normales centrados en p .

Definimos unos conceptos que nos serán de utilidad al trabajar con bolas geodésicas.

Definición 2.15. Sea U un entorno normal abierto de $p \in M$, y sean (x_i) coordenadas normales en U , centradas en p . Definimos:

1. La **distancia radial**, como la aplicación $r : U \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$r(x) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}. \quad (2.2)$$

2. El **campo vectorial radial**, definido en $U \setminus \{p\}$, denotado como ∂_r , y dado por

$$\partial_r|_x = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{r(x)} \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (2.3)$$

∂_r es el campo vectorial que da el vector unitario en cada punto de U , que apunta, de forma opuesta, al origen.

Observación 2.16. Se puede comprobar de forma rutinaria que tanto la aplicación radial como el campo vectorial radial, están bien definidos independientemente de la base vectorial de T_pM usada para fijar coordenadas en el entorno U . Además, son diferenciables en $U \setminus \{p\}$.

Empezamos demostrando un importante teorema, el **lema de Gauss**.

Teorema 2.17 (Lema de Gauss). *Sea (M, g) una variedad riemanniana, y sea U una bola geodésica centrada en un punto $p \in M$. Entonces, ∂_r es un campo vectorial unitario, ortogonal a las esferas geodésicas centradas en p en $U \setminus \{p\}$.*

Demostración. Consideramos unas coordenadas normales (x_i) en U , centradas en p .

Primero, probamos que ∂_r es unitario: Sea $q \in U \setminus \{p\}$, con coordenadas (q_1, \dots, q_n) y sea $b = r(q)$, con lo que

$$\partial_r|_q = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{b} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_q.$$

Sea $v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \in T_p M$ el vector tangente a p con componentes $v_i = \frac{q_i}{b}$. Entonces, por la representación de las geodésicas radiales en coordenadas normales, la geodésica radial con velocidad inicial v y punto inicial p es

$$\gamma_v(t) := (tv_1, \dots, tv_n).$$

Por la elección de v , $\gamma_v(b) = q$ y $\gamma'_v(b) = \partial_r|_q$. Como la métrica g en el punto p en coordenadas normales es equivalente a la métrica euclidiana, tenemos que

$$|\gamma'_v(0)| = |v| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} = \frac{1}{b} \sqrt{q_1^2 + \dots + q_n^2} = \frac{1}{b} r(q) = 1.$$

Como v es unitario, γ_v es una geodésica parametrizada por el arco, ya que toda geodésica tiene velocidad con norma constante. Por tanto $\partial_r|_q = \gamma'_v(b)$ es un vector unitario.

Sea $\Sigma_b := \exp_p(\partial B_b(0))$ la esfera geodésica de radio b y centro p . Entonces Σ_b contiene a q . Como r^2 es una submersión en $U \setminus \{p\}$ y Σ_b es la antiimagen de b^2 por r^2 , tenemos, por el teorema del valor regular, que se trata de una subvariedad diferencial de $U \setminus \{p\}$, por lo que su espacio tangente está bien definido. Sea pues $w \in T_q M$, vector tangente a Σ_b . Vemos que $\langle w, \partial_r|_q \rangle = 0$, y por tanto, que $\partial_r|_q$ es ortogonal a Σ_b .

Como además, con la métrica inducida Σ_b es una variedad riemanniana, existe una geodésica $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma_b$, con punto inicial $\sigma(0) = q$ y velocidad inicial $\sigma'(0) = w$. En el sistema de coordenadas escogido, ponemos $\sigma(s) = (\sigma_1(s), \dots, \sigma_n(s))$. Como $\sigma(s) \in \Sigma_b$ para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, tenemos

$$(\sigma_1(s))^2 + \dots + (\sigma_n(s))^2 = b^2. \tag{2.4}$$

Definimos la siguiente familia de curvas $\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, b] \rightarrow U$:

$$\Gamma(s, t) = \left(\frac{t}{b} \sigma_1(s), \dots, \frac{t}{b} \sigma_n(s) \right).$$

Como en coordenadas normales las semirrectas radiales que salen del origen p se aplican por \exp_p en geodésicas. Se tiene que Γ_s es una geodésica para cada s . Además, tiene velocidad inicial

$$\Gamma'_s(0) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{b} \sigma_i(s) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p,$$

que es unitario debido a la igualdad (2.4), y a que la métrica g en coordenadas normales es igual a métrica euclidiana en el punto de origen p . Con lo que Γ_s está parametrizada por el arco (Fig. 2).

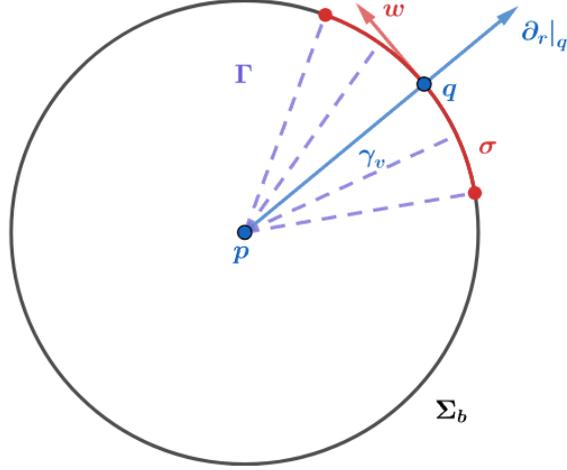


Figura 2: Demostración del lema de Gauss.

Entonces, tenemos los siguientes valores de los campos S y T :

$$\begin{aligned}
 S(0, 0) &= \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0} 0 = 0, \\
 T(0, 0) &= \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} \gamma_v(t) = v, \\
 S(0, b) &= \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0} \sigma(s) = w, \\
 T(0, b) &= \frac{\partial}{\partial t}|_{t=b} \gamma_v(t) = \partial_r|_q.
 \end{aligned}$$

Tenemos que $\langle S, T \rangle(0, 0) = \langle 0, v \rangle = 0$ y $\langle S, T \rangle(0, b) = \langle w, \partial_r|_q \rangle$. Para demostrar la ortogonalidad es suficiente probar que $\langle S, T \rangle(0, t)$ es constante para todo $t \in [0, b]$. Esto lo podemos comprobar viendo que su derivada parcial respecto a t es nula:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \langle S, T \rangle &= \langle \nabla_T S, T \rangle + \langle S, \nabla_T T \rangle \\
 &= \langle \nabla_S T, T \rangle + \langle S, \nabla_T T \rangle \\
 &= \langle \nabla_S T, T \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} |T|^2 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

La primera y penúltima desigualdad son debidas a la compatibilidad con la métrica de la conexión de Levi-Civita. La segunda es debida al lema 2.9 de simetría para familias de curvas. La tercera es debida a que todas las curvas principales Γ_s son geodésicas y por tanto $\nabla_T T = 0$. Finalmente, la última igualdad es consecuencia de que $|T| = |\Gamma'_s| = 1$, por estar las curvas principales parametrizadas por el arco.

□

El lema de Gauss lo usaremos principalmente en la forma del siguiente corolario.

Corolario 2.18. *Sea U una bola geodésica centrada en $p \in M$, entonces, tenemos que para $q \in U \setminus \{p\}$ y $v \in T_qM$, entonces $d_q r(v) = \langle \partial_r|_q, v \rangle$.*

Para demostrarlo se requiere el siguiente lema [LeeRM](Prob. 2-10).

Lema 2.19. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y V un campo vectorial diferenciable en M que no se anula en ningún punto. Entonces, para todo $p \in M$ y $w \in T_pM$ se cumple que $d_p f(w) = \langle V(p), w \rangle$, si, y solo si, $V(f) = |V|^2$ y V es ortogonal a las antiimágenes por f de todos los puntos regulares de f .*

Demostración del corolario 2.18. En la demostración del lema de Gauss hemos visto que las antiimágenes de los puntos regulares de r son las esferas geodésicas. Por el lema, como ∂_r es unitario, es suficiente ver que ∂_r es ortogonal a las antiimágenes de cada valor de r y que $\partial_r(r) = |\partial_r|^2$. Lo primero es consecuencia directa del lema de Gauss 2.17, y calculando rutinariamente en coordenadas normales, obtenemos que $\partial_r(r) = 1 = |\partial_r|^2$. \square

Ahora ya se puede demostrar una proposición que es una herramienta crucial en demostraciones posteriores. Esto se debe a que nos permite asegurar que en una bola geodésica, las geodésicas radiales, son minimizantes entre el centro y cualquier punto en la bola. Y a su vez, que en este entorno la función radial equivale a la distancia riemanniana al centro.

Proposición 2.20. *Sea (M, g) una variedad riemanniana, y sea $p \in M$ y q un punto dentro de una bola geodésica con p como centro, entonces, la geodésica radial de p a q es la única curva geodésica minimizante de p a q , en M . Por tanto, la función r da la distancia riemanniana de q a p .*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\exp_p(B_\varepsilon(0))$ es una bola geodésica que contiene q . Sea $\gamma : [0, c] \rightarrow M$ la geodésica radial de p a q , con velocidad inicial unitaria $v \in T_pM$. Entonces γ está parametrizada por el arco y por tanto $L(\gamma) = c$.

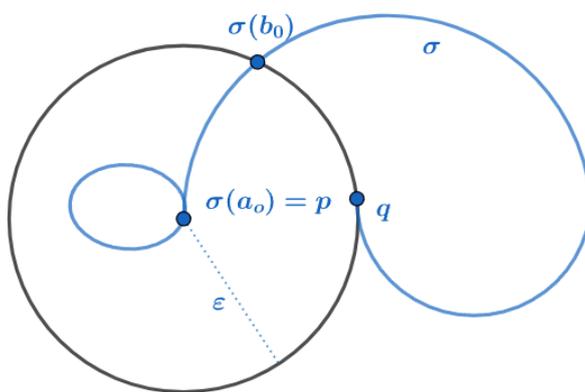


Figura 3: Elección de a_0 y b_0 .

Tenemos que demostrar que γ es minimizante, por tanto, que toda otra curva admisible que une a p y q tiene una longitud mayor o igual a c . $\sigma : [0, b] \rightarrow M$ otra curva con extremos p y q , que podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que está parametrizada por el arco,

para facilitar cálculos. Sean $a_0, b_0 \in [0, b]$, donde, para $t \in [a, b]$, a_0 es el mayor valor por el que $\sigma(t) = p$, y b_0 es el menor valor por el cual $\sigma(t)$ se encuentra en la frontera de la bola geodésica (Fig. 3). Entonces, la composición $r \circ \sigma$ es continua y diferenciable por partes en (a_0, b_0) , $r(a_0) = 0$ y $r(\sigma(b_0)) = c$. Por tanto podemos sacar la siguiente desigualdad aprovechando el teorema fundamental del cálculo, y el anterior corolario 2.18:

$$\begin{aligned}
c = r(\sigma(b_0)) - r(\sigma(a_0)) &= \int_{a_0}^{b_0} \frac{\partial}{\partial t} r(\sigma(t)) dt \\
&= \int_{a_0}^{b_0} d_{\sigma(t)} r(\sigma'(t)) dt \\
&= \int_{a_0}^{b_0} \langle \partial_r|_{\sigma(t)}, \sigma'(t) \rangle dt \\
&\leq \int_{a_0}^{b_0} |\partial_r|_{\sigma(t)}| |\sigma'(t)| dt \\
&= \int_{a_0}^{b_0} |\sigma'(t)| dt \\
&= L(\sigma|_{[a_0, b_0]}) \leq L(\sigma),
\end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad hemos usado la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Como $L(\sigma) \geq c$, tenemos que γ es minimizante.

Ahora supongamos que $L(\sigma) = c = b$. Entonces las desigualdades anteriores se vuelven igualdades. Como σ está parametrizada por el arco, tenemos, por la segunda de estas igualdades, que $a_0 = 0$ y $b_0 = c$, ya que cualquier segmento más de σ aumentaría positivamente la longitud. Por otro lado, tenemos que al ser

$$|\partial_r|_{\sigma(t)}| |\sigma'(t)| - \langle \partial_r|_{\sigma(t)}, \sigma'(t) \rangle \geq 0$$

por la primera igualdad, la integral definida daría 0, con lo que de hecho

$$|\partial_r|_{\sigma(t)}| |\sigma'(t)| = \langle \partial_r|_{\sigma(t)}, \sigma'(t) \rangle$$

para todo $t \in [0, c]$. Por tanto, en ese mismo intervalo, $\sigma'(t)$ es un múltiplo positivo de $\partial_r|_{\sigma(t)}$, y como σ está parametrizada por el arco, y ∂_r es unitario, tenemos que $\partial_r|_{\sigma(t)} = \sigma'(t)$ en todo $[0, c]$. Esto significa que ambas, σ y γ , son curvas integrales de ∂_r pasando por q en $t = c$. Entonces, por la unicidad de las curvas integrales de un campo vectorial, tenemos que $\sigma = \gamma$, probando así la unicidad de la geodésica minimizante. □

Observación 2.21. Como consecuencia de que en una bola geodésica las geodésicas radiales son minimizantes, obtenemos que una bola geodésica abierta, cerrada, o una esfera geodésica, de radio ε , es respectivamente una bola métrica abierta, cerrada, o una esfera métrica.

Por esta observación, nos referiremos una bola geodésica de centro p y radio $\varepsilon > 0$, $\exp_p(B_\varepsilon(0))$, como $B_\varepsilon(p)$, usando la misma notación que para las bolas métricas.

Definimos una variante de los entornos normales, relacionado con las bolas geodésicas de sus puntos.

Definición 2.22. Sea (M, g) una variedad riemanniana, y sea un subconjunto $W \subseteq M$. Diremos que W es un subconjunto **uniformemente normal** si existe un real $\delta > 0$ tal que para todo punto $p \in W$ se tiene que W está contenido en la bola geodésica de radio δ y centro p .

Para demostrar el siguiente resultado sobre entornos uniformemente normales, se ha usado como referencia principal [1](Teo. 2.1).

Proposición 2.23. Sea (M, g) una variedad riemanniana, y un punto $p \in M$. Existe un entorno uniformemente normal de p .

Demostración. Como tratamos con entornos, podemos pasar la demostración a una carta local. Cogemos un entorno normal coordinado U centrado en p , con coordenadas (x_i) , $i \in \{1, \dots, n\}$. Sea $\pi : TM \rightarrow U$ la proyección del fibrado tangente a los puntos de U , podemos expresar localmente $\pi^{-1}(U)$ con las coordenadas (x_i, v_i) , $i \in \{1, \dots, n\}$ en $U \times \mathbb{R}^n$, donde las x_i son las coordenadas locales de un punto $x \in U$ y v_i las coordenadas locales de un vector $v \in T_x M$. Por las propiedades de la exponencial \exp , podemos escoger un subconjunto abierto ξ de TM , cumpliendo $U \times \{0\} \subseteq \xi \subseteq U \times \mathbb{R}^n$ en su expresión local, tal que \exp está definida en todo ξ , y para todo $(x, v) \in \xi$ se tiene que $\exp_x(v) \in U$.

Definimos una aplicación $\Xi : \xi \rightarrow U \times U$ como $\Xi(x, v) = (x, \exp_x(v))$. Entonces, la representación matricial del diferencial de Ξ en el punto $(p, 0) \in \xi$, es la matriz en bloques:

$$d_{(p,0)}(\Xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} x_i & \frac{\partial}{\partial v_j} x_i \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \exp_i & \frac{\partial}{\partial v_j} \exp_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id_n & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \exp_i & Id_n \end{pmatrix},$$

donde $i, j \in \{1, \dots, n\}$, y hemos usado que $d_0 \exp_p = Id$. En consecuencia, la matriz tiene determinante 1, por lo tanto es invertible. Es se traduce en que $(p, 0)$, Ξ es un difeomorfismo local. Como $\Xi(p, 0) = (p, p)$, por el teorema de la función inversa de variedades diferenciables, existen entornos abiertos $\mathcal{U} \subseteq U \times \mathbb{R}^n$ de $(p, 0)$ y $\mathcal{W} \subseteq U \times U$ de (p, p) tal que Ξ es un difeomorfismo. Reduciéndolo si hace falta, podemos considerar que \mathcal{U} tiene la forma $V \times B_\delta(0)$, donde V es un entorno p y $B_\delta(0)$ una bola métrica por g en \mathbb{R}^n en las coordenadas (v_i) , con $\delta > 0$.

Por otro lado, también podemos coger un entorno W de p tal que el rectángulo $W \times W \subseteq \mathcal{W}$. Vemos que en tal caso W es un entorno uniformemente normal de p . Efectivamente, por su elección y la de δ tenemos que si dos puntos $q, q' \in W$ entonces $(q, q') \in \mathcal{W}$. Por tanto existe un vector $v \in B_\delta(0) \subseteq T_q M$ tal que $q' = \exp_q(v)$. En consecuencia, q' pertenece a la bola geodésica de radio δ y centro q .

□

Definición 2.24. Sea (M, g) una variedad riemanniana. Diremos que un subconjunto abierto U de M es **geodésicamente convexo**, si para todo par de puntos $p, q \in U$ existe una geodésica minimizante de p a q que está contenida dentro de U .

Si además esta geodésica minimizante es única en M , diremos que U es **fuertemente convexo**.

El siguiente resultado trivial sobre conjuntos fuertemente convexos se usa en [LeeRM], pero queda implícito, por lo que es conveniente ponerla por escrito. En consecuencia esta es una demostración propia.

Proposición 2.25. *Sean dos conjuntos fuertemente convexos. Si su intersección no es vacía, es fuertemente convexa.*

Demostración. Sean dos puntos que pertenecen a la intersección, existe una geodésica minimizante entre los dos puntos en cada conjunto, pero además es única, por lo que tiene que ser la misma y entonces está contenida en la intersección. \square

Para acabar esta subsección dedicada a propiedades de las bolas geodésicas, vemos un último resultado que nos permitirá obtener entornos fuertemente convexos alrededor de cualquier punto. Esta demostración se deja como ejercicio en [LeeRM](Prob. 6-5), donde se dejan las pautas para resolverlo. En consecuencia, la demostración también es propia, usando como comparativa [1](Teo. 2.3, Lema. 2.4).

Teorema 2.26. *Sea (M, g) una variedad riemanniana. Para todo punto $p \in M$, existe un valor real $\alpha > 0$, tal que toda bola geodésica centrada en p y con radio menor que α , es fuertemente convexa.*

Demostración. Sea un punto $p \in M$. Por 2.23, sabemos que existe un entorno W δ -uniformemente normal de p . Cogemos un $\varepsilon > 0$ tal que la bola geodésica $B_\varepsilon(p) \subseteq W$ y que $2\varepsilon < \delta$.

Definimos el conjunto

$$W_\varepsilon := \{(q, v, t) \in TM \times \mathbb{R} : q \in B_\varepsilon(p), v \in T_qM, |v| = 1, |t| < 2\varepsilon\},$$

y en W_ε definimos una aplicación $f : W_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(q, v, t) := d(p, \exp_q(tv))^2.$$

Por la elección de ε , tenemos que \exp_q esta bien definida sobre la bola métrica $B_{2\varepsilon}(0) \subseteq T_qM$, luego f está bien definida y es diferenciable.

Tenemos que para cualquier v, t tales que $(p, v, t) \in W_\varepsilon$, por 2.20 se cumple $f(p, v, t) = d(p, \exp_p(tv))^2 = t^2$, al ser $\exp_p(tv)$ geodésica radial con velocidad inicial v y que $|v| = 1$. Como resultado, se obtiene que $\frac{\partial}{\partial t^2} f(p, v, t) = 2 > 0$.

Al ser f es continua, existe $0 < \alpha < \varepsilon$ tal que para todo punto $(q, v, t) \in W_\alpha$ se tiene $\frac{\partial}{\partial t^2} f(q, v, t) > 0$, ya que $W_\alpha \subseteq W_\varepsilon$. Los v no se ven afectados porque son los vectores unitarios de cada espacio tangente de los puntos en la bola geodésica, y por tanto independientes de la elección de ε o α .

Ahora, sean dos puntos $q_1, q_2 \in B_\alpha(p)$, entonces $q_1, q_2 \in W$. Como W es δ -uniformemente normal, q_2 pertenece a la bola geodésica $B_\delta(q_1)$. Por 2.20, existe una única geodésica minimizante γ en M , de q_1 a q_2 , que podemos asumir parametrizada por el arco. Como γ es una geodésica radial de $B_\delta(q_1)$, por definición $\gamma(t) = \exp_{q_1}(tv_1)$ con $t \in [0, b]$ y $v_1 := \gamma'(0)$. Sea $b := d(q_1, q_2)$, tenemos por la desigualdad triangular

$$b = d(q_1, q_2) \leq d(q_1, p) + d(p, q_2) < 2\alpha.$$

Por tanto, tenemos que para todo $t \in [0, b]$ se cumple $(q, v_1, t) \in W_\alpha$.

Definimos ahora otra aplicación $F : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como $F(t) := f(q_1, v_1, t)$, que es claramente diferenciable. Entonces $F''(t) = \frac{\partial}{\partial t^2} f(q_1, v_1, t) > 0$. F tiene un valor máximo en $[0, b]$ debido a que este es un intervalo compacto, pero como la segunda derivada es positiva no puede alcanzar un máximo en $(0, b)$, por tanto F obtiene el valor máximo en $q_1 = \gamma(0)$ o $q_2 = \gamma(b)$. Por la definición de f , esto implica que

$$f(q_1, v_1, t) = d(p, \gamma(t))^2 < \alpha.$$

Por lo que toda la geodésica está contenida en $B_\alpha(p)$. Hemos probado así que $B_\alpha(p)$ es una bola geodésica fuertemente convexa. \square

2.4. Completitud

Con esto, ya tenemos las herramientas para demostrar el resultado principal de esta sección. El teorema de Hopf-Rinow, que relaciona la completitud métrica con la completitud geodésica.

Definimos primero este último concepto.

Definición 2.27. Decimos que una variedad riemanniana (M, g) es **geodésicamente completa** si toda geodésica maximal en M esta definida en todo \mathbb{R} .

Observación 2.28. Por la definición de la aplicación exponencial, que una variedad riemanniana (M, g) sea geodésicamente completa equivale a decir que en cada punto $p \in M$, \exp_p está definida en todo $T_p M$. Efectivamente, si M es geodésicamente completa, sea $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño para que \exp_p este definida en la bola abierta $B_\varepsilon(0) \subseteq T_p M$. Si $v \in B_\varepsilon(0)$, por las propiedades de la aplicación exponencial, $\exp_p(tv) = \gamma_v(t)$ donde γ es la geodésica con velocidad v en p , y como está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, se tiene que que \exp_p está definida para toda la recta $\{tv; t \in \mathbb{R}\}$. Consecuentemente, \exp_p está definida en toda $T_p M$. El recíproco es claro, ya que toda geodésica se podría definir como una geodésica radial definida en todo \mathbb{R} .

Nos referiremos a (M, g) como un espacio **métricamente completo**, si es completo como espacio métrico con la distancia riemanniana asociada a g , para distinguir así los dos tipos distintos de completitud.

Con esta aclaración procedemos a demostrar el teorema de Hopf-Rinow. Pero antes, una última definición auxiliar que nos servirá en la demostración.

Definición 2.29. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ un segmento de geodésica, que empieza en un punto $p \in M$, y sea $q \in M$ otro punto cualquiera. Entonces, diremos que γ **apunta hacia** q si γ es minimizante y se cumple

$$d(p, q) = d(p, \gamma(b)) + d(\gamma(b), q), \tag{2.5}$$

donde d es la distancia riemanniana asociada a la métrica.

Teorema 2.30. (Teorema de Hopf-Rinow) Sea una variedad riemanniana (M, g) . Si M es conexa, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. (M, g) es geodésicamente completa.

2. (M, g) es geodésicamente convexa.

3. (M, g) es métricamente completa.

Demostración. **(1) \implies (2).** Supongamos primero que (M, g) es geodésicamente completa, y vemos que entonces es geodésicamente convexa.

Probamos que para un punto cualquiera $p \in M$, para todo otro punto $q \in M$ existe un segmento de geodésica minimizante de p a q . Para ello, es suficiente ver que existe un segmento de geodésica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ que empieza en p , apunta hacia q y que $L(\gamma) = d(p, q)$. En tal caso, al ser γ minimizante se tiene que $L(\gamma) = d(p, \gamma(b)) = d(p, q)$, y como apunta hacia q , se cumple $d(p, q) = d(p, \gamma(b)) + d(\gamma(b), q)$. Como consecuencia $d(\gamma(b), q) = 0$. por tanto $\gamma(b) = q$ y γ es un segmento de geodésica minimizante de p a q .

Cogemos $\varepsilon > 0$ tal que la bola geodésica cerrada $\bar{B}_\varepsilon(p)$ alrededor de p no contenga el punto q . Por la continuidad de la distancia en un espacio métrico y por la compacidad de las esferas geodésicas, existe un punto $x \in \partial B_\varepsilon(p)$ donde $d(x, q)$ alcanza el mínimo en la propia esfera. Nombramos γ a la geodésica maximal parametrizada por el arco, cuya restricción a $[0, \varepsilon]$ es la geodésica radial de p a x en $\bar{B}_\varepsilon(p)$. Como (M, g) es geodésicamente completa, γ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Vemos que $\gamma|_{[0, \varepsilon]}$ apunta a q . Por la proposición 2.20, sabemos que es minimizante. Falta ver que se cumple

$$d(p, q) = d(p, x) + d(x, q).$$

Al ser M una variedad conexa, es arco-conexa. Entonces, podemos suponer que existe una curva admisible $\sigma : [a_0, b_0] \rightarrow M$ cualquiera de p a q . Sea t_0 el primer valor en el que $\sigma(t_0) \in \partial B_\varepsilon(p)$. Entonces, como todo punto de $\partial B_\varepsilon(p)$, se encuentra a una distancia ε de p , por tanto $L(\sigma|_{[a_0, t_0]}) \geq d(p, \sigma(t_0)) = d(p, x)$, y por la elección de x tenemos que $L(\sigma|_{[t_0, b_0]}) \geq d(\sigma(t_0), q) \geq d(x, q)$. Obtenemos así

$$L(\sigma) = L(\sigma|_{[a_0, t_0]}) + L(\sigma|_{[t_0, b_0]}) \geq d(p, x) + d(x, q).$$

Pasando el lado izquierdo de la desigualdad al ínfimo respecto todas las curvas σ de p a q , nos da que $d(p, q) \geq d(p, x) + d(x, q)$. Luego, por la desigualdad triangular obtenemos la igualdad buscada.

Ahora definimos $D := d(p, q)$ y la aplicación $f : [0, D] \rightarrow \mathbb{R}$, definida como

$$f(t) = d(p, \gamma(t)) + d(\gamma(t), q).$$

Entonces, $\mathcal{A} := f^{-1}(\{D\})$ se trata del conjunto de valores de $b \in [0, D]$ para los que $\gamma|_{[0, b]}$ apunta hacia q . Hemos visto antes que $\varepsilon \in \mathcal{A}$. f es continua por la continuidad de la distancia riemanniana, y por la definición de \mathcal{A} este conjunto es cerrado en $[0, D]$ y por tanto compacto. En esta situación podemos definir $A := \max(\mathcal{A}) \geq \varepsilon$.

En el caso de que $A = D$, entonces $\gamma|_{[0, D]}$ sería un segmento de geodésica que tiene longitud $d(p, q)$ y que apunta hacia q , por tanto, como se ha visto antes, $\gamma(D) = q$ y ya estaría.

En caso contrario, con $A \neq D$, reducimos al absurdo suponiendo que $A < D$. Llamamos $y := \gamma(D)$ y escogemos $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño para que la bola geodésica cerrada $\bar{B}_\delta(y)$ no contenga a q . Siguiendo el mismo razonamiento que antes, cogemos el punto $z \in \partial B_\delta(y)$ tal que la distancia a q , $d(z, q)$, sea la mínima en la esfera. Ya hemos

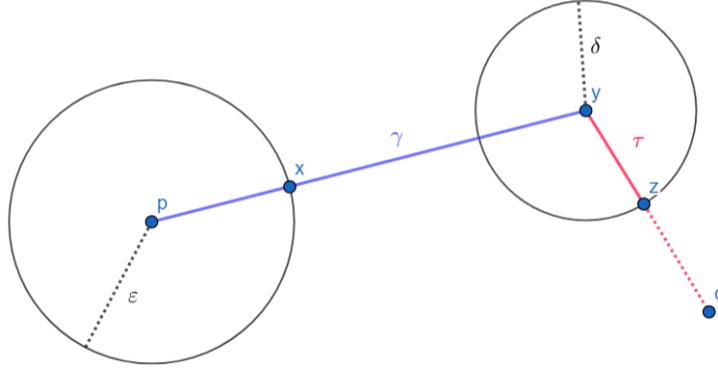


Figura 4: Completitud geodésica implica convexidad geodésica.

visto que en tal caso la geodésica radial parametrizada por el arco $\tau : [0, \delta] \rightarrow M$, donde $\tau(\delta) = z$, apunta hacia q (Fig. 4).

Como $A \in \mathcal{A}$, tenemos que

$$d(y, q) = d(p, q) - d(p, y) = D - A.$$

Y como τ apunta hacia q , se obtiene

$$d(z, q) = d(y, q) - d(y, z) = (D - A) - \delta.$$

En consecuencia, por la desigualdad triangular

$$d(p, z) \geq d(p, q) - d(z, q) = D - (D - A - \delta) = A + \delta. \quad (2.6)$$

Creamos una nueva curva admisible de p a z , concatenando $\gamma|_{[0, A]}$ con τ . La curva en total tiene una longitud de $A + \delta$ por lo que por (2.6) se trata de una curva minimizante que además está parametrizada por el arco. Por el teorema 2.12 esta se trata de una geodésica minimizante, y por la unicidad de las geodésicas en y con misma velocidad inicial, τ es la prolongación geodésica de $\gamma|_{[0, A]}$, y $z = \gamma(A + \delta)$. Pero con las igualdades anteriores se tiene que

$$d(p, q) = D = (A + \delta) + d(z, q) = d(p, z) + d(z, q).$$

Por lo que $\gamma|_{[0, A + \delta]}$ apunta hacia q , y $(A + \delta) \in \mathcal{A}$, lo cual es una contradicción porque A era el máximo por definición. Por tanto existe una curva geodésica minimizante por cada par de puntos $p, q \in M$, con lo que (M, g) es geodésicamente convexa.

(2) \implies (3). Supongamos ahora que (M, g) es geodésicamente convexa, y vemos que en tal caso también es métricamente completa. Es decir, que toda sucesión de Cauchy (respecto la distancia riemanniana) converge.

Sea $p \in M$ un punto cualquiera, y $(q_n), n \in \mathbb{N}$ una sucesión de Cauchy de puntos en M . Definimos $d_n := d(p, q_n)$, y sean entonces γ_n las geodésicas minimizantes, parametrizadas por el arco, de p a q_n , y v_n los vectores de velocidad unitarios de γ_n en p , con lo que $\gamma_n(t) = \exp_p(tv_n)$ y $q_n = \gamma_n(d_n) = \exp_p(d_nv_n)$ (Fig. 5). Como (q_n) es de Cauchy, es

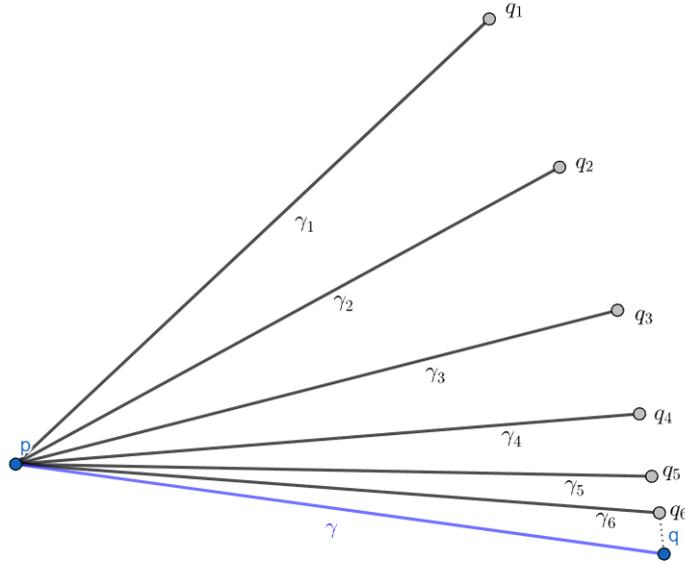


Figura 5: Convexidad geodésica implica completitud métrica.

acotada, y por tanto la sucesión (d_n) es acotada. Como los vectores (v_n) son unitarios, también es una sucesión acotada, y así la sucesión $(d_n v_n)$ también es acotada en $T_p M$, por lo que está contenida en un subconjunto compacto. Entonces, hay una sucesión parcial $(d_{n_k} v_{n_k})$ que converge a un vector v . Por la continuidad de la aplicación exponencial la sucesión parcial (q_{n_k}) converge a un punto $q := \exp_p(v)$, y como (q_n) es de Cauchy con una sucesión parcial convergente, esta converge al mismo punto q .

(3) \implies (1). Finalmente, suponemos que (M, g) es métricamente completa y probamos que es geodésicamente completa.

Supongamos que no lo es. Entonces existe alguna geodésica parametrizada por el arco, $\gamma : [0, b) \rightarrow M$, con $b \in \mathbb{R}$, que no se puede extender a una geodésica sobre $[0, c)$, para todo $c > b$. Sea una sucesión creciente cualquiera $(t_n) \subset [0, b)$ que converge a b , consecuentemente es de Cauchy. Sea $q_n := \gamma(t_n)$, para cualquier $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene que $d(q_n, q_m) \leq |t_n - t_m|$, con lo que (q_n) también es una sucesión de Cauchy, y como M es métricamente completo (q_n) converge a un punto q .

Ahora, sea W un entorno δ -uniformemente normal alrededor de q , donde $\delta > 0$. Por la convergencia existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $q_k \in W$, y por tanto que $t_k > b - \delta$. Por la definición de W , se tiene que $W \subset \bar{B}_\delta(q_k)$ (Fig. 6). Cogemos la geodésica radial $\sigma : [0, \delta] \rightarrow M$ en $\bar{B}_\delta(q_k)$, con $\sigma(0) = q_k$ y $\sigma'(0) = \gamma'(t_k)$. Podemos prolongar la geodésica $\gamma|_{[0, t_k]}$ con σ . Entonces, como en q_k las velocidades coinciden, por la unicidad de las geodésicas σ es una extensión geodésica de $\gamma|_{[0, t_k]}$, con lo que la curva formada es de hecho $\gamma|_{[0, t_k + \delta]}$, pero como $t_k + \delta > b$ obtenemos una contradicción. En conclusión, (M, g) es geodésicamente completa. \square

Debido al teorema de Hopf-Rinow, cuando una variedad riemanniana conexa cumpla alguna de estas propiedades, diremos que se trata de una variedad riemanniana **completa**.

Observación 2.31. A lo largo de la demostración del teorema hemos podido observar

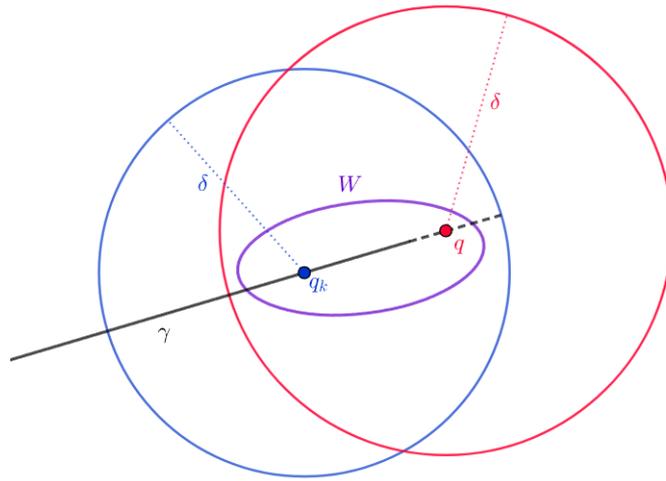


Figura 6: Completitud métrica implica completitud geodésica.

que para demostrar que una variedad riemanniana conexa es completa, es suficiente ver que existe un punto $p \in M$ tal que la aplicación exponencial \exp_p esta definida en todo T_pM .

3. Campos de Jacobi

En esta sección aprovecharemos la teoría de familias de curvas desarrollada en la subsección 2.1, junto con algunos de los resultados sobre geodésicas y distancia de la sección anterior, para definir y estudiar los campos de Jacobi. Estos son campos vectoriales a lo largo de una curva en una variedad riemanniana, tales que, bajo ciertas condiciones, son el campo variacional de una variación donde todas las curvas principales son geodésicas. En este caso diremos que la variación se trata de una **variación a través de geodésicas**.

Además, si la variedad tiene curvatura seccional constante, los campos de Jacobi adquieren ciertas propiedades que nos permiten demostrar que en cada punto de la variedad existe un entorno isométrico a un subconjunto abierto de un espacio euclidiano, una esfera, o un espacio hiperbólico de su misma dimensión, en función del valor de la curvatura. Este resultado es el objetivo final de esta sección, y es una pieza clave para demostrar el teorema de Killing-Hopf, ya que este resultará de la ampliación de la isometría local mencionada, a una isometría global.

3.1. Ecuación de Jacobi

Veremos en esta sección una forma de determinar que campos vectoriales a lo largo de una geodésica son campos variacionales de una variación a través de geodésicas.

Teorema 3.1 (Ecuación de Jacobi). *Sea (M, g) una variedad riemanniana, γ una geodésica en M , y J un campo vectorial diferenciable a lo largo de γ . Si J es un campo variacional de una variación a través de geodésicas, entonces J satisface la llamada **ecuación de Jacobi**:*

$$\nabla_{\gamma'}(\nabla_{\gamma'}J) + R(J, \gamma')\gamma' = 0. \quad (3.1)$$

Donde R es el tensor de curvatura asociado a la métrica g .

Antes de demostrar el teorema es necesario enunciar el siguiente lema [LeeRM](Prop. 7.5), para usar el tensor de curvatura sobre familias de curvas.

Lema 3.2. *Sea (M, g) una variedad riemanniana, y sea Γ una familia de curvas diferenciable en M . Entonces, para todo campo vectorial diferenciable a lo largo de Γ se cumple que*

$$\nabla_S(\nabla_TV) - \nabla_T(\nabla_SV) = R(S, T)V.$$

Demostración del teorema 3.1. Sea Γ la variación determinada por el campo variacional J . Al ser una variación a través de geodésicas, obtenemos que $\nabla_T T = 0$, y por tanto también $\nabla_S(\nabla_T T) = 0$. Entonces, a partir del lema enunciado obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_S(\nabla_T T) \\ &= \nabla_T(\nabla_S T) + R(S, T)T \\ &= \nabla_T(\nabla_T S) + R(S, T)T. \end{aligned}$$

Donde en la última igualdad empleamos el lema de simetría 2.9. Si fijamos $s = 0$ tenemos que $S(0, t) = J(t)$ y $T(0, t) = \gamma'(t)$, y esto aplicado a la igualdad anterior nos da la ecuación de Jacobi.

□

Hemos concluido que los campos variacionales de variaciones a través de geodésicas cumplen esta ecuación, pero no hemos demostrado el recíproco. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 3.3. Si un campo vectorial diferenciable a lo largo de una geodésica γ cumple la ecuación de Jacobi, diremos que se trata de un **campo de Jacobi**.

Podemos observar que la ecuación de Jacobi en coordenadas locales es una ecuación diferencial ordinaria (a las cuales nos referiremos como EDO a partir de ahora), y por tanto, bajo ciertas condiciones iniciales, podemos asegurar la existencia y unicidad de un campo de Jacobi a lo largo de una curva, como demuestra la siguiente proposición.

Proposición 3.4. Sea (M, g) una variedad riemanniana, y sea $\gamma : I \rightarrow M$ una geodésica donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo. Sea $p = \gamma(t_0)$, con $t_0 \in I$, y vectores $v, w \in T_p M$. Entonces existe un único campo de Jacobi a lo largo de γ , tal que

$$J(t_0) = v; \quad \nabla_{\gamma'} J(t_0) = w.$$

Demostración. Por la compatibilidad de la métrica, el transporte paralelo a lo largo de γ es trata de una isometría entre los espacios tangentes de los puntos en la curva. Por tanto, podemos definir una base ortonormal (E_i) , $i \in \{1, \dots, n\}$, de campos vectoriales diferenciables paralelos a lo largo de γ . Entonces los campos vectoriales diferenciables a lo largo de γ son combinación lineal de los campos E_i con coeficientes funciones diferenciables. Escribimos pues

$$J(t) = \sum_{i=1}^n J_i(t) E_i(t); \quad \gamma'(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) E_i(t).$$

Con $t \in I$ y donde J_i, y_i son funciones diferenciables de I a \mathbb{R} que actúan como los coeficientes mencionados.

Entonces, como los E_i son paralelos a lo largo de γ se simplifican los cálculos de las conexiones respecto la velocidad de la curva, porque en tal caso

$$\nabla_{\gamma'} J(t) = \sum_{i=1}^n J'_i(t) E_i(t).$$

Luego

$$\nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} J = J''_i(t) E_i(t). \quad (3.2)$$

Por otro lado, definimos los símbolos $R^i_{jkl} : I \rightarrow \mathbb{R}$ de R , respecto la base escogida, como

$$R(E_j, E_k) E_l(t) = \sum_{i=1}^n R^i_{jkl}(t) E_i(t), \quad j, k, l \in \{1, \dots, n\}.$$

Como el tensor de curvatura R es trilineal respecto funciones diferenciables, tenemos que

$$R(J, \gamma') \gamma'(t) = \sum_{i,j,k,l} R^i_{jkl}(t) J_j(t) y_k(t) y_l(t) \quad i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.3)$$

Aplicando (3.2) y (3.3) a la ecuación de Jacobi obtenemos el siguiente sistema lineal de n EDOs, donde el campo J es la incógnita

$$J''_i(t) + \sum_{j,k,l} R^i_{jkl}(t) J_j(t) y_k(t) y_l(t) = 0.$$

Definimos el campo a lo largo de γ , $W(t) := \nabla_{\gamma'} J = \sum_{i=1}^n J'_i(t) E_i(t)$. Si añadimos la sustitución $W_i := J'_i$, convertimos el sistema en uno de $2n$ EDOs lineales, con los campos W, J por incógnitas

$$W'_i(t) = - \sum_{j,k,l} R_{jkl}^i(t) J_j(t) y_k(t) y_l(t) = 0,$$

$$J'_i(t) = W_i(t).$$

Añadiendo las condiciones iniciales en t_0 de la hipótesis, por la unicidad de las soluciones de los sistema de EDOs, existen únicos campos vectoriales diferenciables a lo largo de γ , J, W , tal que $v = J(t_0)$, y $w = W(t_0) = \nabla_{\gamma'} J(t_0)$. □

Observación 3.5. Como los campos de Jacobi a lo largo de una geodésica γ son la solución de un sistema lineal de EDOs de $2n$ ecuaciones, tenemos que los campos de Jacobi forman un subespacio vectorial de los campos vectoriales a lo largo de γ , de dimensión $2n$. Si fijásemos una condición inicial para J o para W , las soluciones pasarían a ser un espacio vectorial de dimensión n .

Ahora podemos probar que, bajo ciertas condiciones, todos los campos de Jacobi son de hecho campos variacionales de una variación a través de geodésicas.

Proposición 3.6. *Sea (M, g) una variedad riemanniana, y $\gamma : I \rightarrow M$ una geodésica, con $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Si M es completa, entonces todo campo de Jacobi J a lo largo de γ , es un campo variacional de una variación de γ a través de geodésicas.*

Demostración. Sea J un campo de Jacobi a lo largo de γ . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $0 \in I$, ya que podemos reparametrizar por traslación del parámetro $t \in I$, y esta conserva la propiedad de geodésica y de campo de Jacobi, al ser estas propiedades consecuencia de ser soluciones de EDOs. Ponemos $p := \gamma(0)$ y $v := \gamma'(0)$. Entonces tenemos que $\gamma = \exp_p(tv)$ para $t \in I$. Para $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño, podemos considerar la geodésica $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, tal que $\sigma(0) = p$ y $\sigma'(0) = J(0)$, y por la proposición anterior podemos definir un campo vectorial diferenciable V a lo largo de σ , como el campo de Jacobi tal que $V(0) = v$ y $\nabla_{\sigma'} V(0) = \nabla_{\gamma'} J(0)$.

Definimos una familia de curvas Γ por

$$\Gamma(s, t) = \exp_{\sigma(s)}(tV(s)). \tag{3.4}$$

Vemos que está definida sobre $(-\varepsilon, \varepsilon) \times I$, ya que al ser M completa, la aplicación exponencial está definida en todo $T_{\sigma(s)}M$ para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. También, por la definición, es diferenciable y tenemos que

$$\Gamma(0, t) = \exp_{\sigma(0)}(tV(0)) = \exp_p(tv) = \gamma(t),$$

$$\Gamma(s, 0) = \exp_{\sigma(s)}(0) = \sigma(s).$$

La primera igualdad nos dice que Γ es una variación de la curva γ , y por su definición, cada curva principal Γ_s es una geodésica con velocidad inicial $V(s)$, con lo que Γ es una variación a través de geodésicas (Fig. 7). Por tanto, por 3.1 su campo variacional $W(t) := S(0, t)$ es un campo de Jacobi. Además tenemos que

$$W(0) = S(0, 0) = \sigma'(0) = J(0),$$

$$\nabla_{\gamma'} W(0) = \nabla_T S(0, 0) = \nabla_S T(0, 0) = \nabla_{\sigma'} V(0) = \nabla_{\gamma'} J(0)$$

Donde en la segunda igualdad, hemos empleado el lema de simetría 2.9.

Como $W(0) = J(0)$ y $\nabla_{\gamma'} W(0) = \nabla_{\gamma'} J(0)$, por la unicidad de los campos de Jacobi a lo largo de una misma geodésica γ tenemos que $W = J$, y por tanto J es el campo variacional de una variación a través de geodésicas. \square

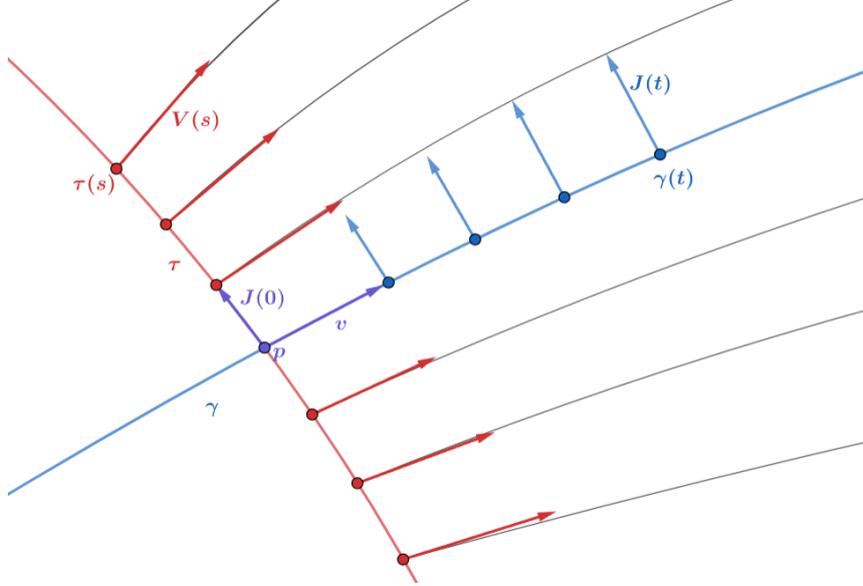


Figura 7: Construcción de la familia de curvas Γ como en (3.4).

Observación 3.7. Por la demostración, hemos visto que si tenemos un campo de Jacobi J a lo largo de una geodésica γ , la expresión (3.4) nos da una variación de γ a través de geodésicas, que tiene J como campo variacional.

A partir de ahora, aunque algunas de las proposiciones sean válidas más en general, asumiremos en el resto de la sección que (M, g) es una variedad riemanniana completa, debido a que esa es una de las hipótesis principales del Teorema de Killing-Hopf. En este contexto, un campo de Jacobi equivale a un campo variacional de una variación a través de geodésicas.

Se pueden hacer diversas clasificaciones de los campos de Jacobi, nos es de interés sólo la siguiente definición.

Definición 3.8. Sea (M, g) variedad riemanniana, y sea $\gamma : I \rightarrow M$ una curva regular, con I un intervalo y V un campo vectorial a lo largo de γ . Diremos que V es un **campo vectorial normal** a lo largo de γ , si para todo $t \in I$, se tiene que $V(t)$ es ortogonal a $\gamma'(t)$.

Para los campos de Jacobi normales a lo largo de una geodésica, tenemos una caracterización más sencilla de comprobar.

Proposición 3.9. Sea (M, g) una variedad riemanniana, $\gamma : I \rightarrow M$ una geodésica, con I intervalo, y sea J un campo de Jacobi a lo largo de γ . Entonces son equivalentes

1. J es un campo de Jacobi normal.
2. J es ortogonal a γ' en dos puntos distintos de γ .
3. J y $\nabla_{\gamma'} J$ son ortogonales a γ' en un mismo punto de γ .

Demostración. Definimos una aplicación $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ como $f(t) = \langle J(t), \gamma'(t) \rangle$. Al ser composición de aplicaciones diferenciables, f es diferenciable. Vemos que f'' es nulo de la manera siguiente

$$\begin{aligned}
 f'' &= \frac{\partial}{\partial t^2} \langle J, \gamma' \rangle \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} (\langle \nabla_{\gamma'} J, \gamma' \rangle + \langle J, \nabla_{\gamma'} \gamma' \rangle) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \langle \nabla_{\gamma'} J, \gamma' \rangle \\
 &= \langle \nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} J, \gamma' \rangle \\
 &= -\langle R(J, \gamma') \gamma', \gamma' \rangle \\
 &= -R_m(J, \gamma', \gamma', \gamma') = 0.
 \end{aligned}$$

Donde, en la segunda igualdad se usa la compatibilidad con la métrica. En la tercera, que $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$ al ser γ geodésica. En la cuarta los anteriores pasos de nuevo. En la quinta aplicamos la ecuación de Jacobi, y lo que queda es la definición del tensor de curvatura de Riemann R_m , que por la propiedad de simetría verifica $R_m(J, \gamma', \gamma', \gamma') = -R_m(J, \gamma', \gamma', \gamma')$, y por tanto es nulo. En consecuencia, f' es constante.

(1) \iff (2). Es inmediato que si J es normal, por la propia definición, J será ortogonal a γ' en dos puntos distintos cualesquiera. Por tanto nos centramos en el recíproco.

Supongamos que J es ortogonal a γ' en dos puntos distintos $a, b \in I$. Queremos ver que $f(t) = 0$ para todo $t \in I$. Como $f(a) = f(b) = 0$, por el teorema del valor medio existe un punto entre a y b donde f' se anula. Al ser f' es constante, es nulo. Consecuentemente f es constante y nulo, y J es un campo normal.

(1) \iff (3). Si J es normal, f es nulo en I , y al ser constante, $f' = \langle \nabla_{\gamma'} J, \gamma' \rangle$ también es nulo, por tanto J y $\nabla_{\gamma'} J$ son ortogonales a γ' en todo I . En particular, lo son en un mismo punto.

Para demostrar el recíproco, supongamos que para un punto $a \in I$, se cumple que $f(a) = \langle J(a), \gamma'(a) \rangle = 0$ y $f'(a) = \langle \nabla_{\gamma'} J(a), \gamma'(a) \rangle = 0$. Como f' es constante, es nulo, y análogamente, f es nulo, lo que significa que J es ortogonal a γ' en I y por tanto es normal. \square

3.2. Campos de Jacobi que se anulan en un punto

Tratamos en esta subsección un tipo específico de campos de Jacobi, aquellos que se anulan en un punto de la geodésica.

Proposición 3.10. Sea (M, g) una variedad riemanniana completa. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo tal que $0 \in I$. Sean $\gamma : I \rightarrow M$ una geodésica y $J : I \rightarrow M$ un campo de Jacobi a lo

largo de γ tal que $J(0) = 0$. Entonces J es el campo variacional de una variación a través de geodésicas de γ , definida como

$$\Gamma(s, t) = \exp_p(t(v + sw)),$$

donde s pertenece a un intervalo que contiene 0 y $p := \gamma(0)$, $v := \gamma'(0)$ y $w := \nabla_{\gamma'} J(0)$.

Demostración. (3.4) Sea $\varepsilon > 0$, definimos la curva diferenciable $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ como $\sigma(s) = p$ constante para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. También definimos un campo vectorial diferenciable a lo largo de σ , $V : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow T_p M$ como $V(s) = v + sw$. Al ser σ constante se tiene que $V(s) \in T_p M$ para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Entonces, el cálculo de la derivada covariante de V a lo largo de σ es sencillo,

$$\nabla_{\sigma'} V(0) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} V(s) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} (v + sw) = w.$$

Como $\sigma(0) = p$, $\sigma'(0) = 0$, $V(0) = v$ y $\nabla_{\sigma'} V(0) = w$, por la demostración de la proposición 3.6 y (3.4) obtenemos que $\Gamma(s, t) = \exp_p(t(v + sw))$ es una variación a través de geodésicas de γ con campo variacional J . \square

Este nos sirve para poder expresar en coordenadas locales un campo de Jacobi que se anula en un punto.

Proposición 3.11. *Sea (M, g) una variedad riemanniana completa, con $p \in M$. Sea $\gamma : I \rightarrow M$ una curva geodésica donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo tal que $0 \in I$ y $p = \gamma(0)$. Entonces, para todo $w \in T_p M$, el campo de Jacobi J a lo largo de γ tal que $J(0) = 0$ y $\nabla_{\gamma'} J(0) = w$ se puede escribir en un entorno normal centrado en p con coordenadas normales (x_i) , $i \in \{1, \dots, n\}$ como*

$$J(t) = \sum_{i=1}^n t w_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\gamma(t)}, \quad (3.5)$$

donde $w = \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0$ es la expresión de w en la base $(\frac{\partial}{\partial x_i})$.

Demostración. Como M es completa, por la proposición 3.10, obtenemos la variación que tiene a J como campo variacional. Su representación local en las coordenadas normales descritas en el enunciado serían, por la propia definición de coordenadas normales

$$\Gamma(s, t) = (t(v_1 + sw_1), \dots, t(v_n + sw_n)),$$

y entonces, en representación local, tenemos

$$J(t) = S(0, t) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \Gamma(s, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} (t(v_i + sw_i)) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\Gamma(s, t)} = \sum_{i=1}^n t w_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\gamma(t)},$$

que es lo que buscábamos (Fig. 8). \square

Corolario 3.12. *Sea (M, g) una variedad riemanniana completa, U un entorno normal coordinado centrado en $p \in M$. Entonces para todo punto $q \in M$ y para todo vector $w \in T_q M$, existe un campo de Jacobi a lo largo de la geodésica radial de p a q que se anula en p , tal que su valor en q es w .*

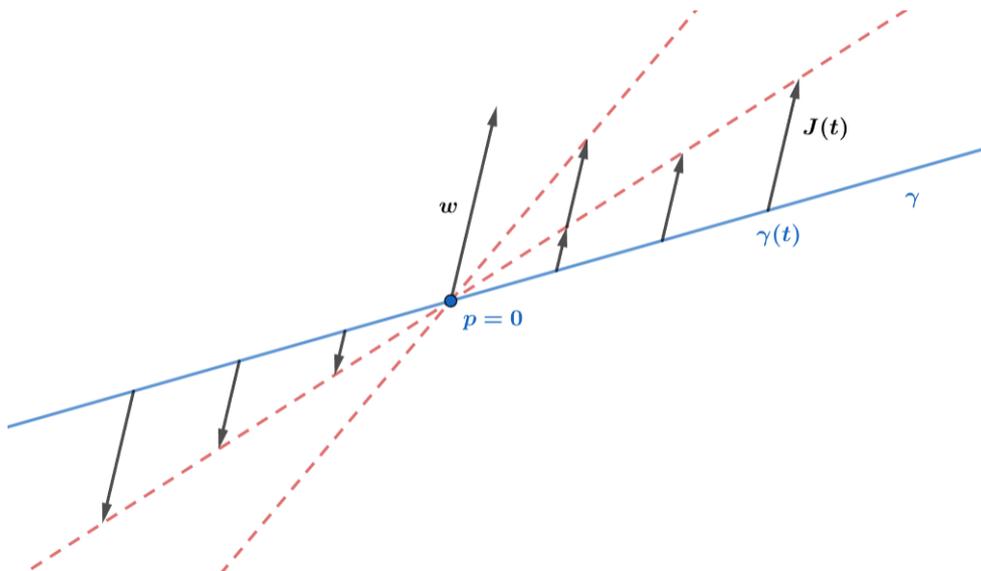


Figura 8: Campo de Jacobi que se anula en un punto en coordenadas normales.

Demostración. Tomamos coordenadas normales $(x_i), i \in \{1, \dots, n\}$ de U . Entonces $q = (q_1, \dots, q_n) \in U \setminus \{p\}$, y tenemos una geodésica radial γ de p a q , $\gamma(t) = (tq_1, \dots, tq_n)$, donde $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$. Sea $w = \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_q$ la expresión local de w . Entonces, por la proposición anterior, si definimos el campo vectorial J a lo largo de γ como $J(t) = \sum_{i=1}^n tw_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\gamma(t)}$, este es de hecho un campo de Jacobi a lo largo de γ que cumple $J(0) = 0$. Vemos que $J(1) = w$, por lo que este es el campo de Jacobi buscado. \square

3.3. Campos de Jacobi en variedades de curvatura constante

En esta subsección vemos que en variedades riemannianas con curvatura seccional constante los campos de Jacobi a lo largo de geodésicas, que son normales y que además se anulan en un punto, se pueden expresar con una fórmula explícita, que nos proporciona información suficiente para demostrar el resultado sobre isometrías entre entornos de la variedad, y entornos de una variedad estándar.

Definimos una aplicación $s_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, por cada $c \in \mathbb{R}$, como

$$s_c(t) = \begin{cases} t, & \text{si } c = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{c}} \sin t\sqrt{c}, & \text{si } c > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-c}} \sinh t\sqrt{-c}, & \text{si } c < 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ (Fig. 9).

Para el uso que se le da a esta aplicación, el valor c corresponde al valor de la curvatura constante de la variedad. El porqué de esta definición se hace aparente en el siguiente resultado, y su correspondiente demostración.

Proposición 3.13. *Sea (M, g) una variedad riemanniana completa con curvatura seccional constante $c \in \mathbb{R}$, y sea $\gamma : I \rightarrow M$, una geodésica parametrizada por el arco, con I un intervalo y $0 \in I$. Entonces, un campo de Jacobi normal a lo largo de γ que se anula en el punto $t = 0$, tiene la forma*

$$J(t) = ks_c(t)E(t),$$

donde $k \in \mathbb{R}$ y E es un campo vectorial paralelo unitario a lo largo de γ , y

$$|k| = |\nabla_{\gamma'} J(0)|.$$

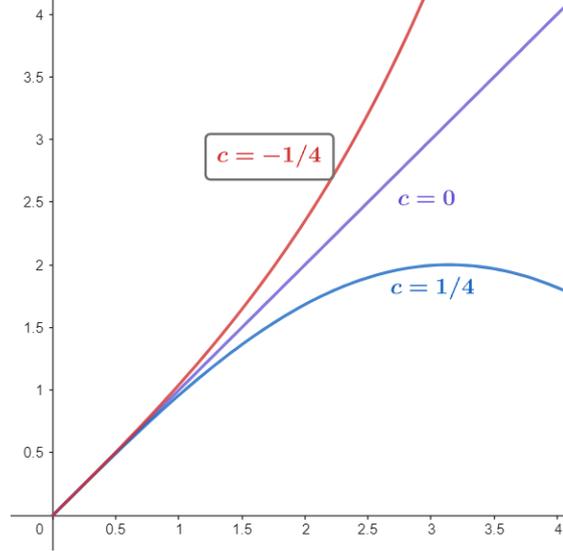


Figura 9: Gráfica de s_c dependiendo de c .

Para demostrar la proposición, se empleará el siguiente lema sacado de [LeeRM](Prop. 8.36).

Lema 3.14. *Sea (M, g) una variedad riemanniana con curvatura seccional constante $c \in \mathbb{R}$, entonces para el tensor de curvatura R se cumple*

$$R(u, v)w = c(\langle v, w \rangle u - \langle u, w \rangle v),$$

siendo u, v, w vectores pertenecientes al mismo espacio tangente. Esto se aplica también para campos vectoriales.

Demostración de la proposición 3.13. Como (M, g) tiene curvatura constante, podemos aplicar el lema anterior a la ecuación de Jacobi, que queda

$$0 = \nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} J + c(\langle \gamma', \gamma' \rangle J - \langle J, \gamma' \rangle \gamma') = \nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} J + cJ, \quad (3.7)$$

donde en la segunda igualdad usamos que γ' está parametrizada por el arco, y que J es normal y por tanto ortogonal a γ' .

Por la proposición 3.9, tenemos que para que un campo de Jacobi sea normal, solo hace falta que su valor y el de su derivada covariante, sean ortogonales a γ' en un mismo punto. Por la unicidad de un campo de Jacobi en función de estos valores iniciales, tenemos que el espacio de campos de Jacobi normales a lo largo de γ es de dimensión $2n - 2$, y como fijamos la condición inicial $J(0) = 0$, el espacio de campos de Jacobi normales que cumplen esta condición es de dimensión $n - 1$.

Por otro lado, supongamos que queremos encontrar una solución para la ecuación (3.7), que tenga la forma

$$J(t) = u(t)E(t), \quad (3.8)$$

con $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ aplicación diferenciable, y E un campo vectorial diferenciable, paralelo y unitario a lo largo γ . En este caso (3.7), queda

$$u''(t)E(t) + cu(t)E(t) = 0,$$

y como E no se anula, podemos reducir la ecuación a la EDO lineal de dimensión 2

$$u''(t) = -cu(t).$$

Como buscamos soluciones con condición inicial $u(0) = 0$, se puede comprobar de forma rutinaria, que las soluciones son $ks_c(t)$, para $k \in \mathbb{R}$.

Ahora queremos aplicar imponer que el campo vectorial resultante sea normal a la curva. Como por la compatibilidad con la métrica el transporte paralelo es una isometría, tenemos que el espacio vectorial de campos vectoriales normales paralelos a lo largo de γ , es de dimensión $n - 1$, por tanto, también es la dimensión del espacio de los campos de Jacobi normales a lo largo de γ que tienen la forma (3.8), y que se anulan en $t = 0$. Esta es la misma dimensión que la del espacio vectorial del total de campos de Jacobi normales a lo largo de γ , que se anulan en $t = 0$, por tanto, ambos espacios son el mismo y estos campos son de la forma

$$J(t) = ks_c(t)E(t).$$

Entonces la derivada covariante a lo largo de γ queda

$$\nabla_{\gamma'} J(t) = ks'_c(t)E(t),$$

y como para $t = 0$ se tiene que $s'_c(0) = 1$ para todo $c \in \mathbb{R}$, y E es unitario, obtenemos, usando las propiedades de la norma, que

$$|\nabla_{\gamma'} J(0)| = |k|s'_c(0)|E(0)| = |k|.$$

□

Gracias a esta proposición, podemos concretar características específicas de las métricas riemannianas en variedades con curvatura seccional constante.

Teorema 3.15. *Sea (M, g) una variedad riemanniana completa con curvatura seccional constante c . Sea $p \in M$, y U un entorno normal centrado en p , con coordenadas normales (x_i) . Entonces, en $U \setminus \{p\}$ la métrica g en se puede expresar como*

$$g = dr^2 + \frac{s_c(r)^2}{r^2} (\bar{g} - dr^2), \quad (3.9)$$

donde r es la distancia radial (2.2), y \bar{g} es la métrica euclidiana en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ en las coordenadas (x_i) .

Demostración. Denominamos g_c a la expresión de la derecha de (3.9), que se puede comprobar fácilmente que es \mathbb{R} -bilineal. Sean v, w vectores de un espacio vectorial cualquiera, y un productor escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, se tiene la identidad

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4} (\langle v + w, v + w \rangle - \langle v - w, v - w \rangle).$$

Esta identidad implica que una métrica está determinada por su norma. Por tanto, es suficiente ver que $g(w, w) = g_c(w, w)$ para todo $w \in T_q M$ y todo $q \in U \setminus \{p\}$. Por el lema

de Gauss 2.17, sabemos el campo vectorial ∂_r en $U \setminus \{p\}$ es unitario y ortogonal a las esferas geodésicas para g , cosa que también es cierto para \bar{g} . Por tanto, si $r = b > 0$,

$$g_c(\partial_r, \partial_r) = dr(\partial_r)^2 + \frac{s_c(b)^2}{b^2} (\bar{g}(\partial_r, \partial_r) - dr(\partial_r)^2) = 1 = g(\partial_r, \partial_r),$$

donde en la segunda igualdad se usa que por el corolario 2.18, $dr(\partial_r) = g(\partial_r, \partial_r) = 1$. Por la bilinealidad de g y g_c , también coinciden en todos los múltiplos de ∂_r .

Como T_qM es suma directa del subespacio generado por $\partial_r|_q$, y su subespacio ortogonal, es suficiente ver que $g = g_c$ para todos los vectores del subespacio ortogonal.

Sea $\gamma : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la geodésica radial de p a q , parametrizada por el arco, donde $b = r(q)$. Entonces, sobre γ tenemos $\gamma'(t) = \partial_r|_{\gamma(t)}$ para $t \in [0, b]$. Sea $w \in T_qM$, ortogonal a $\gamma'(b)$, queremos ver que $g(w, w) = g_c(w, w)$. De nuevo por 2.18, tenemos que $dr(w) = g(\partial_r, w) = 0$. Entonces queda

$$g_c(w, w) = \frac{s_c(t)^2}{r^2} \bar{g}(w, w).$$

En las coordenadas (x_i) escribimos $w = \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_q$ y también ponemos $q = (q_1, \dots, q_n)$, con $q_i, w_i \in \mathbb{R}$. Entonces por como hemos definido γ , y por las propiedades de los entornos normales, la expresión local de γ es

$$\gamma(t) = \left(\frac{t}{b} q_1, \dots, \frac{t}{b} q_n \right).$$

Por el corolario 3.12 y la proposición 3.11, existe un campo de Jacobi J sobre γ que se anula en $t = 0$, $J(b) = w$ y que tiene expresión

$$J(t) = \sum_{i=1}^n \frac{t w_i}{b} \frac{\partial}{\partial x_i}|_{\gamma(t)},$$

con

$$\nabla_{\gamma'} J(0) = \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{b} \frac{\partial}{\partial x_i}|_p.$$

Como J es ortogonal a γ' en p y en q , por la proposición 3.9 J es un campo de Jacobi normal a lo largo de γ . Finalmente, por 3.13 tenemos

$$|w|_g^2 = |J(b)|_g^2 = s_c(t)^2 |\nabla_{\gamma'} J(0)|_g^2 = s_c(t)^2 \left| \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{b} \frac{\partial}{\partial x_i}|_p \right|_g^2 = \frac{s_c(t)^2}{b^2} |w|_{\bar{g}}^2 = |w|_{g_c}^2,$$

donde en la penúltima igualdad usamos que en p , $g = \bar{g}$, por las propiedades de coordenadas normales. \square

Finalmente, como corolario, obtenemos el resultado deseado de esta sección.

Corolario 3.16. Sean (M, g) y (\tilde{M}, \tilde{g}) variedades riemannianas completas de una misma dimensión n y con curvatura seccional constante $c \in \mathbb{R}$. Para todo par de puntos $p \in M$ y $\tilde{p} \in \tilde{M}$, existen entornos U de p y \tilde{U} de \tilde{p} que son isométricos.

Demostración. Sean $p \in M$, y $\tilde{p} \in \tilde{M}$, y sean U y \tilde{U} bolas geodésicas de un radio lo suficientemente pequeño $\varepsilon > 0$ para estar definidas en ambos puntos. Sean los difeomorfismos de paso a coordenadas locales $\psi : U \rightarrow B_\varepsilon(0)$ y $\tilde{\psi} : \tilde{U} \rightarrow B_\varepsilon(0)$, donde $B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^n$ una bola métrica euclidiana. Por el teorema anterior, ambas métricas g en U y \tilde{g} en \tilde{U} tienen la misma expresión (3.9), y por tanto $\tilde{\psi}^{-1} \circ \psi : U \rightarrow \tilde{U}$ es la isomería buscada. \square

Observación 3.17. Ahora, podemos usar este corolario para decir que una variedad riemanniana completa, con curvatura constante c , es localmente isométrica a un espacio euclidiano con la métrica euclidiana, si $c = 0$, a una esfera con la métrica esférica si $c > 0$, o a un espacio hiperbólico con la métrica hiperbólica si $c < 0$, de la misma dimensión. Ya que estas variedades riemannianas son conocidas por ser de curvatura constante con las respectivas condiciones de c , y son completas.

Este resultado va a ser ampliado a un teorema de clasificación cuya demostración es el objetivo principal de este trabajo.

4. Recubrimientos riemannianos

En esta sección auxiliar tratamos algunos conceptos y resultados de topología algebraica. Primero, para demostrar un teorema, consecuencia de Hopf-Rinow, que dice que la propiedad de completitud de una variedad riemanniana se mantiene por isometrías locales. Y luego, para tener las herramientas necesarias para demostrar la versión del teorema de Killing-Hopf para variedades conexas.

Como este trabajo se fundamenta en la geometría diferencial, el desarrollo de la teoría de topología algebraica necesaria se escapa del alcance de este trabajo. Por lo que nos limitamos a definir los conceptos y enunciar los resultados justos que se requieran sin demostrarlos, excepto el teorema 4.12.

Nos alejamos también de la referencia principal, para incorporar las fuentes [RotmanAT], [MasseyAT] introductorias a la topología algebraica, y [LeeTM] y [LeeSM] predecesoras de [LeeRM].

Las diferentes fuentes⁴ difieren en los detalles de la definición de recubrimiento topológico, aunque acaban llegando a mismos resultados. Usamos una definición que facilita la celeridad para mostrar los resultados que nos interesan.

Definición 4.1. Sean \hat{N}, N espacios topológicos, y $\pi : \hat{N} \rightarrow N$ una aplicación $\pi : \hat{N} \rightarrow N$ continua. Sea $U \subseteq N$ abierto y conexo. Diremos que U está **uniformemente recubierto por** π , si cada componente conexa de $\pi^{-1}(U)$ es homeomorfa a U por π . Se dice que cada uno de estas componentes conexas es una **hoja** de U por π .

Observación 4.2. Por la definición, las hojas de un abierto conexo U son disjuntas.

Definición 4.3. Sea N espacio topológico. Definimos un **recubrimiento topológico** como un par (\hat{N}, π) , donde \hat{N} es otro espacio topológico y $\pi : \hat{N} \rightarrow N$ una aplicación continua, que cumplen las siguientes condiciones.

1. \hat{N}, N son conexos y localmente arco conexos.
2. π es continua y exhaustiva.
3. para todo punto $p \in N$ existe un entorno conexo U de p que está recubierto uniformemente por π (Fig. 10).

Hay un tipo de recubrimiento topológico que hace falta destacar.

Definición 4.4. Sea N espacio topológico. Diremos que un recubrimiento topológico (\hat{N}, π) es un **recubrimiento universal** si \hat{N} es simplemente conexo.

Tenemos el siguiente resultado sobre recubrimientos universales para **variedades** topológicas, sacado como conclusión de [RotmanAT](Corol. 10.41) y [MasseyAT](Teo. 6.6).

Teorema 4.5. Sea M variedad topológica conexa, entonces existe un recubrimiento universal (\hat{M}, π) de M , que es único salvo homeomorfismo. Es decir, sea otro recubrimiento universal (\hat{M}', π') de M , entonces existe un homeomorfismo $h : \hat{M} \rightarrow \hat{M}'$ tal que $\pi = \pi' \circ h$.

Y otro resultado sobre los recubrimientos topológicos de espacios simplemente conexos [LeeTM](Corol. 11.24).

⁴[RotmanAT](pg. 273), [MasseyAT](pg. 118), [LeeTM](pg. 234).

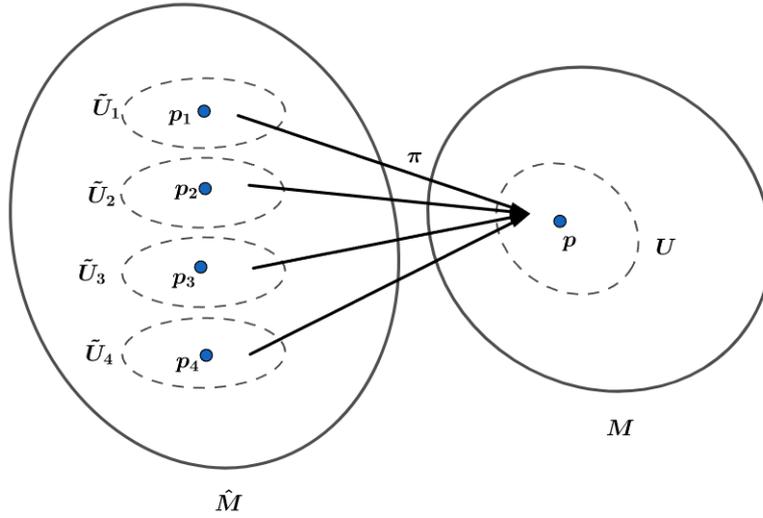


Figura 10: Hojas de U por el recubrimiento π .

Proposición 4.6. Sea (\hat{N}', π') un recubrimiento topológico de un espacio topológico N simplemente conexo. Entonces π es un homeomorfismo.

Volvemos al campo de la geometría diferencial y riemanniana definimos las siguientes variantes de los recubrimientos topológicos.

Definición 4.7. Sean (\hat{M}, π) un recubrimiento topológico de un espacio topológico M . Diremos que se trata de un **recubrimiento diferenciable** si \hat{M} y M son variedades diferenciables, y para todo punto $p \in M$, existe un entorno conexo U de p , tal que para cada hoja \hat{U} de U por π , la aplicación $\pi|_{\hat{U}} : \hat{U} \rightarrow U$ es un difeomorfismo.

Además, si π es un recubrimiento diferenciable, y \hat{M}, M son variedades riemannianas. Diremos que π es un **recubrimiento riemanniano**, si es una isometría local. Es decir, que $\pi|_{\hat{U}} : \hat{U} \rightarrow U$ es una isometría.

Observación 4.8. Al aplicar la proposición 4.6 a un recubrimiento diferenciable π , obtenemos que este es un difeomorfismo.

Hay una versión diferenciable del teorema de existencia de un recubrimiento universal [LeeSM](Corol. 4.43).

Proposición 4.9. Sea M variedad diferenciable conexa y su recubrimiento universal (\hat{M}, π) . Entonces \hat{M} tiene una estructura de variedad diferenciable y (\hat{M}, π) es un recubrimiento diferenciable, único salvo difeomorfismos en el mismo sentido que en 4.5.

Con esta introducción a los recubrimientos riemannianos, ya podemos pasar a demostrar un teorema, consecuencia del Teorema de Hopf-Rinow, que será de importancia para poder ampliar el resultado 3.16 de un ámbito local, a uno global, y por tanto para demostrar el teorema de Killing-Hopf. Pero antes, se requiere la siguiente definición.

Definición 4.10. Sean espacios topológico N y \hat{N} , y Sea B otro espacio topológico y $F : B \rightarrow N$ una aplicación continua, entonces definimos una **elevación de F** , como una aplicación continua $\hat{F} : B \rightarrow \hat{N}$ tal que $\pi \circ \hat{F} = F$.

Y el siguiente lema.

Lema 4.11. Sean (\hat{M}, \hat{g}) y (M, g) variedades riemannianas conexas con \hat{M} completa, y sea $\pi : \hat{M} \rightarrow M$ una isometría local. Entonces, para todo punto $p \in \pi(\hat{M}) \subseteq M$ y geodésica $\gamma : I \rightarrow M$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo tal que $0 \in I$ y $\gamma(0) = p$. Sea $\hat{p} \in \pi^{-1}(p)$, existe una única elevación $\hat{\gamma} : I \rightarrow \hat{M}$ de γ por π que sea una geodésica en \hat{M} y que $\hat{\gamma}(0) = \hat{p}$. Además, M es completa.

Demostración. Sean p , γ y \hat{p} como en el enunciado y $v = \gamma'(0)$. Como π es isometría local, es entonces un difeomorfismo local, y por tanto $d_{\hat{p}}\pi : T_{\hat{p}}\hat{M} \rightarrow T_pM$, es un isomorfismo, y de hecho una isometría. Por tanto podemos considerar el vector $\hat{v} := (d_{\hat{p}}\pi)^{-1}(v)$ y la geodésica $\hat{\gamma}$ con punto inicial \hat{p} y velocidad inicial \hat{v} en \hat{M} . Como \hat{M} es completa, tenemos que $\hat{\gamma}$ está definida en todo \mathbb{R} .

Como la imagen por isometría local de una geodésica es geodésica, $\pi(\hat{\gamma})$ es una geodésica en M . Por su definición, tiene punto inicial $\pi(\hat{\gamma}(0)) = \pi(\hat{p}) = p$, y velocidad inicial $d_p\pi(\hat{\gamma}'(0)) = d_p\pi(\hat{v}) = v$. Por la unicidad de las geodésicas respecto un punto y velocidad iniciales, tenemos que esta geodésica es de hecho una extensión de γ , por tanto γ se puede definir en todo \mathbb{R} , y por el teorema de Hopf-Rinow M es completa.

Por las observaciones del anterior párrafo, si restringimos $\hat{\gamma}$ a I , esta es una elevación de γ . Si existiese alguna otra elevación $\hat{\sigma} : I \rightarrow \hat{M}$ geodésica en \hat{M} tal que $\hat{\sigma}(0) = \hat{p}$, se cumple que $v = \gamma'(0) = d_p\pi(\hat{\sigma}'(0))$. Como $d_p\pi$ es una isometría, tenemos que $\hat{\sigma}'(0) = \hat{v}$. Por la unicidad de las geodésicas, obtenemos que $\hat{\sigma} = \hat{\gamma}$ en todo \mathbb{R} . Por tanto, una elevación de γ que sea geodésica y que tenga punto inicial \hat{p} es única. □

Teorema 4.12. Sean (\hat{M}, \hat{g}) y (M, g) variedades riemannianas conexas, con \hat{M} completa, y sea $\pi : \hat{M} \rightarrow M$ una isometría local. Entonces, M es completa y π es un recubrimiento riemanniano.

Demostración. Por el lema anterior, M es completa. Queda ver que π es un recubrimiento riemanniano. Como es una isometría local, tan solo hace falta demostrar que es un recubrimiento diferenciable. Como \hat{M} y M son variedades conexas, son arco-conexas. Faltaría ver que π es exhaustiva, y que todo punto de M tiene un entorno U , cuya antiimagen por π es la unión de subconjuntos abiertos conexos y disjuntos a pares $\hat{U} \subseteq \hat{M}$, tal que $\pi|_{\hat{U}} : \hat{U} \rightarrow U$ es un difeomorfismo para cada \hat{U} .

Es importante recordar para la demostración que una isometría local preserva la longitud de una curva cualquiera, ya que el diferencial de la aplicación en cualquier punto es una isometría, por tanto preserva la norma de los vectores de velocidad de una curva, y en consecuencia, por la definición de la longitud riemanniana, preserva su longitud.

Vemos primero que π es exhaustiva. Sean puntos $p, q \in M$ con $p \in \pi(\hat{M})$. Al ser M completa, existe una geodésica minimizante γ de p a q , que podemos suponer que esta parametrizada por el arco. Si ponemos $l := d(p, q)$, γ esta definida sobre $[0, l]$. Entonces por el lema anterior, existe una elevación $\hat{\gamma}$ de γ por π donde $\pi(\hat{\gamma}(0)) = p$ y $\pi(\hat{\gamma}(l)) = \gamma(l) = q$. Por tanto π es exhaustiva.

Debemos ahora demostrar la existencia de entornos de los puntos de M , que estén recubiertos uniformemente. Veamos que las bolas geodésicas cumplen esas condiciones.

Sea $p \in M$, y sea $\varepsilon > 0$, ponemos $U := B_\varepsilon(p)$, una bola abierta centrada en p . Por otro lado sean $\hat{p}_1, \hat{p}_2 \in \pi^{-1}(p)$, y definimos $U_{\hat{p}_1}, U_{\hat{p}_2}$ como las bolas **métricas** (no

necesariamente geodésicas) abiertas de radio ε , centradas respectivamente en \hat{p}_1 y \hat{p}_2 . Veamos primero que estas bolas métricas son disjuntas. Al ser \hat{M} completa, existe una curva geodésica minimizante de \hat{p}_1 a \hat{p}_2 , su imagen por π es una geodésica que empieza y acaba en p , y tiene la misma longitud. Los segmentos de geodésica que contienen p dentro de una bola geodésica, son geodésicas radiales que no se pueden cerrar sobre si mismas dado que la aplicación exponencial es un difeomorfismo en una bola geodésica de p . Por tanto, la geodésica debe salir y volver a entrar en U donde cuyos segmentos son geodésicas radiales, y en consecuencia, tiene una longitud mayor o igual a 2ε . Entonces $d(\hat{p}_1, \hat{p}_2) > 2\varepsilon$. Sea un punto $\hat{q} \in U_{\hat{p}_1} \cap U_{\hat{p}_2}$, por la desigualdad triangular

$$2\varepsilon \leq d(\hat{p}_1, \hat{p}_2) \leq d(\hat{p}_1, \hat{q}) + d(\hat{q}, \hat{p}_2) < 2\varepsilon,$$

y esto es una clara contradicción, con lo que $U_{\hat{p}_1} \cap U_{\hat{p}_2} = \emptyset$.

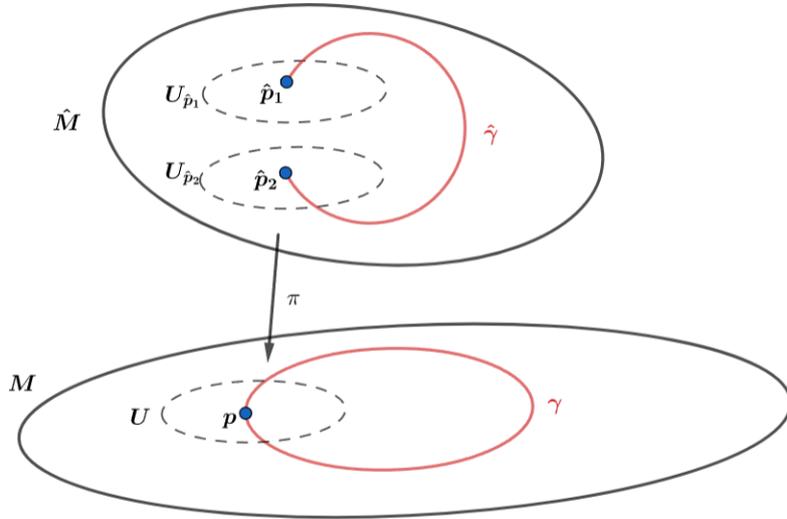


Figura 11: Demostración de que $U_{\hat{p}_1} \cap U_{\hat{p}_2} = \emptyset$.

Ahora, siguiendo con las definiciones del anterior párrafo, veamos que $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\hat{p} \in \pi^{-1}(p)} U_{\hat{p}}$. Sea $q \in U$, existe una geodésica radial minimizante parametrizada por el arco γ de p a q . Sea un $\hat{p} \in \pi^{-1}(p)$, la elevación $\hat{\gamma}$ de γ por π y que empieza en \hat{p} también es una geodésica de igual longitud, que es menor que ε . Sea \hat{q} el otro extremo de $\hat{\gamma}$, entonces $\pi(\hat{q}) = q$ y $d(\hat{p}, \hat{q}) \leq d(p, q) < \varepsilon$. Por lo que $\hat{q} \in U_{\hat{p}}$, y por tanto $\pi^{-1}(U) \subseteq \bigcup_{\hat{p} \in \pi^{-1}(p)} U_{\hat{p}}$. Por otro lado, sea $\hat{p} \in \pi^{-1}(U)$, y sea $\hat{q} \in U_{\hat{p}}$. La geodésica minimizante de \hat{p} a \hat{q} tendrá longitud menor que ε . La imagen por π de dicha geodésica, preserva la longitud ε , empieza p y acaba en otro punto $q := \pi(\hat{q})$, entonces $d(p, q) < \varepsilon$, al ser U bola geodésica, que es también bola métrica, $q \in U$. Obtenemos así que $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\hat{p} \in \pi^{-1}(U)} U_{\hat{p}}$, como queríamos.

Sea ahora $\hat{p} \in \pi^{-1}(p)$, vemos que la restricción $\pi|_{U_{\hat{p}}} : U_{\hat{p}} \rightarrow U$, es un difeomorfismo. Ya sabemos que π es un difeomorfismo local. Además, $\pi|_{U_{\hat{p}}}$ es biyectivo, ya que por la unicidad de elevación geodésica del lema anterior y las observaciones hechas a lo largo de la demostración, su inverso es la aplicación que envía cada geodésica radial de U a su elevación geodésica unívoca en $U_{\hat{p}}$. Es decir, sea $q \in U$, γ la geodésica radial de p a q parametrizada por el arco, $\hat{\gamma}$ su elevación geodésica única por π , y $l = d(p, q)$. Entonces

$\pi|_{U_p^{-1}}(q) := \hat{\gamma}(l)$. Ya que al ser $\hat{\gamma}$ elevación, $\pi(\hat{\gamma}(l)) = \gamma(l) = q$, y por la unicidad de la elevación geodésica, esta bien definido.

En conclusión, hemos probado todas las condiciones, y por tanto π es un recubrimiento riemanniano. \square

4.1. Acciones de grupos de isometrías sobre recubrimientos riemannianos

El desarrollo de la teoría de acciones de grupos de isometrías sobre un recubrimiento riemanniano, nos permitirá demostrar la versión del teorema de Killing-Hopf para variedades riemannianas conexas.

La susodicha demostración requiere de un mayor desarrollo de herramientas relativas a la topología algebraica y los grupos de Lie, que se escapa del margen de este trabajo. Por lo mencionado al inicio de la sección, también nos limitaremos a enunciar las definiciones y los resultados que nos son necesarios.

Antes, se ha de aclarar a lo que se refiere con un grupo de isometrías: sea (M, g) una variedad riemanniana, el conjunto de isometrías $M \rightarrow M$ forman un grupo con la operación de composición de aplicaciones, que notaremos $Iso(M)$.

Primero, damos un paso atrás, volviendo a los recubrimientos topológicos y diferenciables, para tratar algunas definiciones y resultados fundamentales, empezando por la definición de algunas propiedades de una acción de un grupo.

Definición 4.13. *Sea un grupo G , con una acción sobre un conjunto X , entonces*

1. *Diremos que la acción de G sobre X es **libre**, si para un elemento $\phi \in G$ existe un punto tal que la acción $\phi \cdot p = p$, entonces ϕ es el elemento neutro de G .*
2. *Diremos que la acción de G sobre X es **propia**, si la aplicación $G \times X \rightarrow X \times X$, definida como $(\phi, p) \mapsto (\phi \cdot p, p)$, es propia.*
3. *Diremos que la acción de G sobre X es **transitiva**, si para todo par de puntos $p, q \in X$, existe un $\phi \in G$ tal que $\phi \cdot p = q$.*
4. *Diremos que la acción de G sobre X es continua, diferenciable, difeomorfa, o isométrica, si la aplicación $M \rightarrow M$, definida $p \mapsto \phi \cdot p$, con $\phi \in G$ y $p \in X$, es respectivamente, continua, diferenciable, difeomorfa o isométrica.*

También recordamos la definición de la órbita de la acción de un grupo.

Definición 4.14. *Sea un grupo G , con una acción sobre un conjunto X , definimos la **órbita** de un punto $p \in X$, como el conjunto $\{\phi \cdot p : \phi \in G\}$.*

*Por las propiedades de las acciones de grupos, las órbitas de una acción de un grupo sobre X forman una partición de X . El conjunto cociente de X respecto a G , denotado X/G es el conjunto de las órbitas de la acción de G en X , también llamado el **espacio de orbitas de la acción**.*

Volviendo a los recubrimientos, tenemos la siguiente definición

Definición 4.15. Sea $\pi : \hat{M} \rightarrow M$ un recubrimiento diferenciable. Definimos un **automorfismo del recubrimiento** π , como un difeomorfismo $\phi : \hat{M} \rightarrow \hat{M}$, tal que $\pi \circ \phi = \pi$.

El conjunto de automorfismos del recubrimiento ϕ , forma un grupo, que notaremos como $Aut_{\pi}(\hat{M})$.

Tenemos la siguiente propiedad del grupo de automorfismos de un recubrimiento diferenciable [LeeSM](Prop. 21.12).

Proposición 4.16. Sea $\pi : \hat{M} \rightarrow M$ un recubrimiento diferenciable. Entonces, con la topología discreta, $Aut_{\pi}(\hat{M})$ es un grupo de Lie discreto que actúa diferenciablemente, libremente y propiamente sobre \hat{M} .

Definición 4.17. Diremos que un recubrimiento diferenciable $\pi : \hat{M} \rightarrow M$, es un **recubrimiento normal** si para cada $p \in M$, $Aut_{\pi}(\hat{M})$ actúa transitivamente sobre $\pi^{-1}(p)$.

Los recubrimientos universales diferenciables son normales por la siguiente proposición [LeeTM](Def. normal pg.245, Prop. 11.29)⁵.

Proposición 4.18. Sea M una variedad diferenciable, con (\hat{M}, π) su recubrimiento universal. Entonces π es un recubrimiento normal.

Finalmente, enunciamos un resultado que nos permitirá demostrar isometrías con el espacio de orbitas de una variedad riemanniana [LeeRM](Prop. 2.33).

Proposición 4.19. Sean $(\hat{M}, \hat{g}), (M, g)$ variedades riemannianas conexas y $\pi : \hat{M} \rightarrow M$ un recubrimiento riemanniano normal. Entonces \hat{M}/Aut_{π} tiene una estructura de variedad riemanniana, con una métrica determinada unívocamente, isométrica a M .

⁵Utiliza una definición distinta de normal, con la cual la demostración se hace trivial. Esta proposición demuestra que su definición es equivalente a la que hemos dado.

5. Teorema de Killing-Hopf

5.1. Prolongación de isometrías locales a lo largo de caminos

La última herramienta necesaria para demostrar el Teorema de Killing-Hopf es la prolongación de isometrías locales a lo largo de caminos, que nos permite ampliar la isometría del corolario 3.16 a toda la variedad M , convirtiendo un resultado local en uno global.

Definimos en que consiste y demostramos algunas propiedades resultados.

Definición 5.1. Sean (M, g) y (\tilde{M}, \tilde{g}) variedades riemannianas de la misma dimensión n , sea $U \subseteq M$ un subconjunto abierto y conexo, y sea una isometría local $\phi : U \rightarrow \tilde{M}$. Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ un camino continuo tal que $\gamma(0) \in U$. Entonces, definimos una **prolongación de ϕ a lo largo de γ** (Fig. 12) como una familia de pares $\{(U_t, \phi_t) : t \in [0, 1]\}$, donde U_t es un entorno conexo de $\gamma(t)$ y ϕ_t es una isometría local $\phi_t : U_t \rightarrow \tilde{M}$ de manera que

1. $\phi_0 = \phi$ en $U \cap U_0$.
2. Para todo $t \in [0, 1]$, existe un $\delta_t > 0$ tal que si para un $t_0 \in [0, 1]$ se cumple que $|t - t_0| < \delta_t$, entonces $\gamma(t_0) \in U_t$ y $\phi_t = \phi_{t_0}$ en $U_t \cap U_{t_0}$.

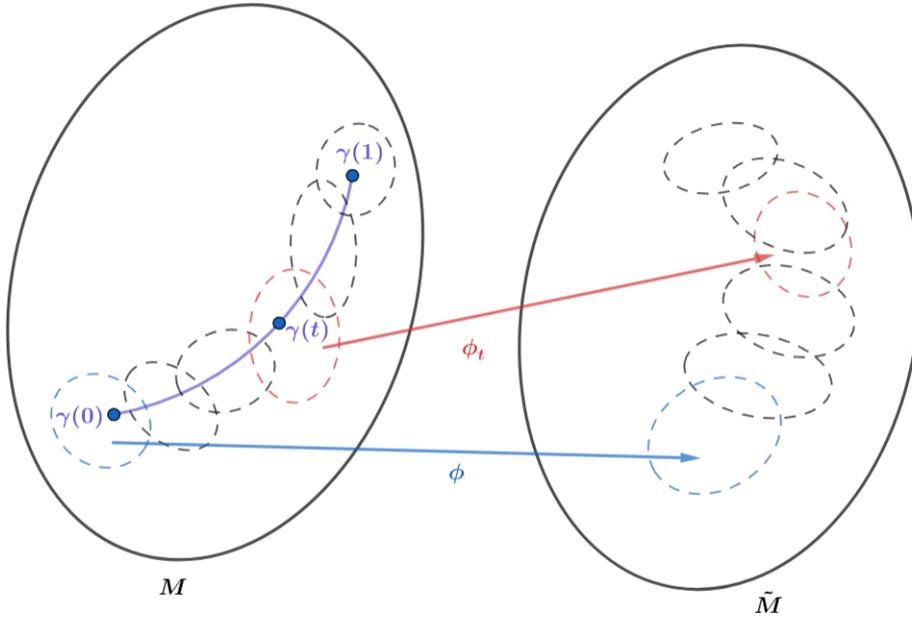


Figura 12: Prolongación de ϕ a lo largo de γ .

Vemos que independientemente de la prolongación que se escoja a lo largo de un mismo camino, esta va a tomar los mismos valores en un entorno del extremo del camino.

Proposición 5.2. Sean $(M, g), (\tilde{M}, \tilde{g})$ variedades riemannianas y sean ϕ, γ como en la definición de prolongación de una isometría local. Si tenemos dos prolongaciones $\{(U_t, \phi_t)\}$ y $\{(U'_t, \phi'_t)\}$ de ϕ a lo largo γ , entonces $\phi_1 = \phi'_1$ en un entorno de $\gamma(1)$.

Demostración. Definimos un conjunto $\mathcal{A} \subseteq [0, 1]$ como los $t \in [0, 1]$ tal que $\phi_t = \phi'_t$ en un entorno de $\gamma(t)$. Tenemos que $0 \in \mathcal{A}$, ya que por la definición de prolongación de

una función, $\phi = \phi_0 = \phi'_0$ en $U \cap U_0 \cap U'_0$, entorno de $\gamma(0)$. Entonces, como $[0, 1]$ es conexo, si vemos que \mathcal{A} es abierto y cerrado, tendremos que $\mathcal{A} = [0, 1]$ y por tanto $1 \in \mathcal{A}$, demostrando así la proposición.

Primero vemos que \mathcal{A} es abierto. Sea $t \in \mathcal{A}$, y V el entorno de $\gamma(t)$ donde $\phi_t = \phi'_t$. Por la definición de prolongación de una función, existe $\delta_t > 0$ lo suficientemente pequeño tal que para todo $t_0 \in (t - \delta_t, t + \delta_t)$, se tiene que $\gamma(t_0) \in V$ y $\phi_t = \phi_{t_0}$ en $V \cap U_{t_0}$, y que $\phi'_t = \phi'_{t_0}$ en $V \cap U'_{t_0}$. Entonces $\phi_{t_0} = \phi_t = \phi'_t = \phi'_{t_0}$ en $V \cap U_{t_0} \cap U'_{t_0}$, que no es vacío, ya que $\gamma(t_0)$ pertenece al conjunto. Por tanto tenemos que el conjunto abierto $[0, 1] \cap (t - \delta_t, t + \delta_t) \subseteq \mathcal{A}$, probando que \mathcal{A} es abierto.

Ahora, vemos que \mathcal{A} es cerrado, viendo que es cerrado por sucesiones. Sea $t \in [0, 1]$ un punto de acumulación de \mathcal{A} , y sea $(t_i), i \in \mathbb{N}$ una sucesión en \mathcal{A} que converge en t . Por la definición de prolongación de una función, sea $\delta_t > 0$ relativo a t el que cumple la condición de la definición. Por la convergencia de (t_i) , existe i lo suficientemente grande tal que $|t - t_i| < \delta_t$ y por tanto $\gamma(t_i) \in U_t \cap U_{t_i} \cap U'_{t_i} \cap U'_t$ y $\phi_t = \phi_{t_i} = \phi'_{t_i} = \phi'_t$ en un entorno de $\gamma(t_i)$, ya que $t_i \in \mathcal{A}$. Por tanto, aparte de que $\phi_t(\gamma(t_i)) = \phi'_{t_i}(\gamma(t_i))$, tenemos para los diferenciales que $d_{\gamma(t_i)}\phi_t = d_{\gamma(t_i)}\phi'_{t_i}$ para todo i tal que $|t - t_i| < \delta_t$. Entonces, por continuidad, al pasar al límite $i \rightarrow \infty$, tenemos que $\phi_t(\gamma(t)) = \phi'_t(\gamma(t))$ y $d_{\gamma(t)}\phi_t = d_{\gamma(t)}\phi'_t$.

Como $U_t \cap U'_t$ es conexo y ϕ_t, ϕ'_t son isometrías locales, por la definición de prolongación de una función, podemos tomar $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño, tal que la bola geodésica $B_\varepsilon(\gamma(t)) \subset U_t \cap U'_t$, y por tanto, para todo $q \in B_\varepsilon(\gamma(t))$ existe $v \in T_{\gamma(t)}M$ tal que $q = \exp_{\gamma(t)}(v)$. Consecuentemente, por las propiedades de la aplicación exponencial respecto a una isometría local, tenemos

$$\phi(q) = \phi(\exp_{\gamma(t)}(v)) = \exp_{\phi_t(\gamma(t))}(d_{\gamma(t)}\phi_t) = \exp_{\phi'_t(\gamma(t))}(d_{\gamma(t)}\phi'_t) = \phi'_t(\exp_{\gamma(t)}(v)) = \phi'_t(q),$$

Por lo que $\phi_t = \phi'_t$ en un entorno de $\gamma(t)$ y $t \in \mathcal{A}$, por lo que \mathcal{A} es cerrado. Demostramos así que $\mathcal{A} = [0, 1]$. \square

Vemos ahora una propiedad sobre prolongaciones de una isometría local a lo largo de dos caminos distintos, pero con mismos extremos.

Proposición 5.3. Sean $(M, g), (\tilde{M}, \tilde{g})$ variedades riemannianas conexas, U entorno conexo de un punto $p \in M$, y $\phi : U \rightarrow \tilde{M}$ una isometría local que tiene una prolongación de ϕ para cada camino en M que empiece en p . Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow M$ caminos homótopos que van de p a un punto $q \in M$. Entonces las prolongaciones de ϕ a lo largo de γ_0 y γ_1 coinciden en un entorno de q .

Demostración. Sea $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ la homotopía entre γ_0 y γ_1 , tal que $H(t, 0) = \gamma_0(t)$ y $H(t, 1) = \gamma_1(t)$ para todo $t \in [0, 1]$, y $H(0, s) = p$ y $H(1, s) = q$ para todo $s \in [0, 1]$. Por hipótesis, por cada $s \in [0, 1]$, existe una prolongación de ϕ a lo largo de $H(\cdot, s)$, que denotaremos $\{(U_t^{(s)}, \phi_t^{(s)}) : t \in [0, 1]\}$.

Sea $P : [0, 1] \rightarrow M$ la aplicación definida por $P(s) = \phi_1^{(s)}(q)$. Como H es continua P también es continua, y además $H([0, 1] \times [0, 1])$ es un compacto. Si consideramos por cada $s \in [0, 1]$ la unión de los entornos $V^{(s)} := \bigcup_{t \in [0, 1]} U_t^{(s)}$, entonces estos forman un recubrimiento de $H([0, 1] \times [0, 1])$, y al ser compacto, podemos coger un conjunto finito de $\mathcal{S} := \{s_1, \dots, s_k\} \subset [0, 1], k \in \mathbb{N}_{>0}$, tal que los $V^{(s')}$ con $s' \in \mathcal{S}$ forman un recubrimiento de $H([0, 1] \times [0, 1])$.

Si tomamos $s' \in \mathcal{S}$, para un $s \in [0, 1]$ lo suficientemente cercano a s' , el camino $H(\cdot, s)$ puede tener la misma prolongación de ϕ que para s' . En tal caso $P(s) = P(s')$, con lo que P es localmente constante, y al ser continua es constante. Entonces tenemos que

$$P(0) = \phi_1^{(0)}(q) = \phi_1^{(1)}(q) = P(1).$$

Además, para q' lo suficientemente cercano a q , se pueden ampliar los caminos hasta q' , tal que se puedan usar las mismas prolongaciones de ϕ , y por el mismo argumento que antes tenemos que $\phi_1^{(0)}(q') = \phi_1^{(1)}(q')$, probando así que las prolongaciones de ϕ a lo largo de γ_0 y γ_1 coinciden en un entorno de q . \square

Vemos un corolario de la proposición anterior que es el resultado final de esta subsección.

Corolario 5.4. *Sean $(M, g), (\tilde{M}, \tilde{g})$ variedades riemannianas completas y simplemente conexas, y sea $U \subset M$ entorno conexo de un punto $p \in M$, y $\phi : U \rightarrow \tilde{M}$ una isometría local, que puede ser prolongada a lo largo de cualquier camino que empiece en el punto p . Entonces, existe una isometría global $\Phi : M \rightarrow \tilde{M}$, que coincide con ϕ en U .*

Demostración. Sea un punto $q \in M$ cualquiera, diferente de p . Como M es simplemente conexa, es arco-conexa y por tanto existen caminos continuos de p a q y todos ellos son homotópicos entre sí. Entonces por la proposición anterior, todas las prolongaciones de ϕ a lo largo de caminos cualquiera de p a q , coinciden en un entorno de q , y por tanto podemos definir la aplicación $\Phi : M \rightarrow \tilde{M}$, donde $\Phi(q)$ es el valor en q de las prolongaciones anteriores. Además también por el teorema anterior, Φ es continua y es una isometría local.

Como M es completa por el teorema 4.12, tenemos que Φ es un recubrimiento riemanniano. Como \tilde{M} es simplemente conexo, por la proposición 4.6 todo recubrimiento de \tilde{M} es biyectivo. Al ser Φ biyectivo y una isometría local, es una isometría. \square

Este resultado es el que nos permite ampliar la proposición 3.16 a un resultado global, para variedades simplemente conexas.

Con esto ya podemos dar el paso final, y llegar al objetivo principal del trabajo, demostrar el teorema de Killing-Hopf.

5.2. Teorema de Killing-Hopf

Como se ha mencionado anteriormente, primero demostramos la clasificación de las variedades riemannianas de curvatura seccional constante que son simplemente conexas.

Teorema 5.5 (Teorema de Killing-Hopf para variedades simplemente conexas). *Sea (M, g) una variedad riemanniana completa, simplemente conexa, de dimensión $n \geq 2$ y de curvatura seccional constante c . Entonces M es isométrica a alguna de las variedades riemannianas estándar:*

1. El espacio euclídeo \mathbb{R}^n con la métrica euclidiana, si $c = 0$.
2. El espacio esférico \mathbb{S}^n con la métrica esférica, si $c > 0$.
3. El espacio hiperbólico \mathbb{H}^n con la métrica hiperbólica, si $c < 0$.

Antes de pasar a la demostración, hace falta enunciar un último lema sobre las isometrías locales en las variedades riemannianas estándar [LeeRM](Prob. 5-11(c)).

Lema 5.6. *Sea (M, g) una variedad riemanniana estándar como se han descrito en el enunciado del teorema. Sea $U \subseteq M$ un abierto conexo y $\phi : U \rightarrow \tilde{M}$ una isometría local. Entonces ϕ es la restricción a U de una isometría $\Phi : M \rightarrow \tilde{M}$.*

Demostración del teorema 5.5. Sea (M, g) variedad riemanniana que cumple las hipótesis, y sea c el valor de su curvatura seccional. Es sabido que las variedades riemannianas estándar tienen curvatura constante con las mismas condiciones que en la hipótesis. Entonces, llamamos (\tilde{M}, \tilde{g}) , a la variedad estándar de la misma dimensión n y curvatura constante c . Por el corolario 3.16, para un punto $p \in M$ cualquiera existe un entorno abierto $V \subseteq M$ de p , un subconjunto abierto $\tilde{V} \subseteq \tilde{M}$ y una isometría $\phi : V \rightarrow \tilde{V}$. Por el corolario 5.4, si demostramos que ϕ puede ser prolongado a lo largo de todo camino continuo que empieza en el punto p , obtendremos una isometría global $\Phi : M \rightarrow \tilde{M}$, demostrando así el teorema. Por tanto, en el resto de la demostración se centrará en probar este punto.

Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ un camino continuo tal que $\gamma(0) = p$. De nuevo, por el corolario 3.16, para todo $t \in [0, 1]$ existe un entorno de $\gamma(t)$ isométrico a un subconjunto abierto de \tilde{M} . Por 2.26, podemos reducir estos entornos a bolas geodésicas lo suficientemente pequeñas para que estas sean fuertemente convexas. Por la compacidad de $\gamma([0, 1])$, podemos escoger un subconjunto finito de puntos $\{t_0, \dots, t_{k+1}\} \subset [0, 1]$ con $k \in \mathbb{N}$ y $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = 1$ tal que existen bolas geodésicas fuertemente convexas B_0, \dots, B_k donde $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subseteq B_i$ para $i \in \{0, \dots, k\}$. Podemos reducir más aún las bolas geodésicas sin que pierdan la convexidad y añadir más puntos a la partición para asegurar que $B_0 \subseteq V$.

Ya tenemos los entornos. Ahora pasamos a definir isometrías locales $\phi_i : B_i \rightarrow \tilde{M}$, tales que $\{(B_i, \phi_i) : i \in \{0, \dots, k\}\}$, sea una prolongación de ϕ a lo largo de γ , donde si $t \in [0, t_1]$ se le asigna el par (B_0, ϕ_0) , y si $t \in (t_i, t_{i+1}]$, para $i > 0$, entonces se le asigna el par (B_i, ϕ_i) (Fig. 13).

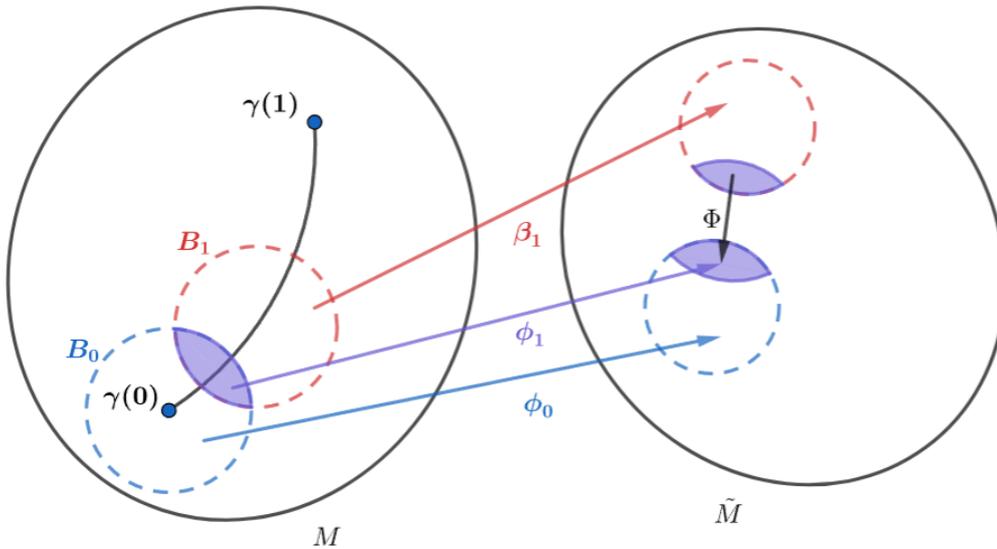


Figura 13: Construcción de ϕ_1 .

Para que se cumpla la primera condición de ser una prolongación de ϕ , empezamos definiendo $\phi_0 = \phi|_{B_0}$. Por las condiciones que verifican los B_i , existe una isometría β_i de B_i a un subconjunto abierto de \tilde{M} . Como cada B_i es fuertemente convexo, por ?? cada $B_i \cap B_{i+1}$ es fuertemente convexo, y por tanto arco-conexo, luego conexo. Además estas intersecciones no son vacías, ya que $\gamma(t_{i+1}) \in B_i \cap B_{i+1}$. Entonces para $i = 0$, la aplicación compuesta $\phi_0 \circ \beta_1^{-1} : \beta(B_0 \cap B_1) \rightarrow \phi_0(B_0, B - 1)$, es una isometría entre subconjuntos abiertos y conexos de \tilde{M} . Como \tilde{M} es una de las variedades riemannianas estándar, por el lema anterior, se tiene que $\phi_0 \circ \beta_1^{-1}$, es de hecho la restricción de una isometría global $\Phi_1 : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$. Entonces podemos definir $\phi_1 := \Phi_1 \circ \beta_1 \rightarrow \tilde{M}$, que al ser composición de isometrías, es isometría, y por su definición coincide con ϕ_0 en $B_0 \cap B_1$.

Podemos repetir el proceso para definir el resto de aplicaciones $\phi_i : B_i \rightarrow \tilde{M}$, de forma que ϕ_i y ϕ_{i-1} coinciden en $B_i \cap B_{i-1}$.

Así obtenemos la familia de pares $\{(B_i, \phi_i) : i \in \{0, \dots, k\}\}$ que hemos mencionado previamente. Ya sabemos que cumple la primera condición de ser una prolongación de ϕ a lo largo de γ . Vemos que cumple la segunda. Sea $t \in (t_i, t_{i+1}]$ que tiene asignado el par (B_i, ϕ_i) . Si $\gamma(t)$ no pertenece a B_{i+1} , podemos asignar un δ_t tal que para los valores $t' \in (t - \delta_t, t + \delta_t)$, $\gamma(t')$ tampoco pertenezca a B_{i+1} , tan solo a B_i , con lo que t' tendría asignado también el par (B_i, ϕ_i) , y el cumplimiento de la segunda condición de ser prolongación de ϕ es evidente. Por otro lado, si $\gamma(t) \in B_i \cap B_{i+1}$ podemos escoger δ_t tal que si $t' \in (t - \delta_t, t + \delta_t)$, entonces $\gamma(t') \in B_i \cap B_{i+1}$ y hemos visto que entonces $\phi_i(\gamma(t')) = \phi_{i+1}(\gamma(t'))$, por lo que también se cumple la segunda condición. En resumen, $\{(B_i, \phi_i) : i \in \{0, \dots, k\}\}$ es una prolongación de ϕ a lo largo de γ .

Obtenemos que existe una isometría global $\Phi : M \rightarrow \tilde{M}$, demostrando así el teorema de Killing-Hopf. \square

Una vez hemos obtenido el teorema de Killing-Hopf para variedades simplemente conexas, podemos ampliarlo, usando la teoría de acciones de grupo sobre recubrimientos riemannianos, a un teorema de clasificación que nos permite identificar las variedades riemannianas conexas con los cocientes de las variedades riemannianas estándar por la acción de un subgrupo de su grupo de isometrías.

Corolario 5.7 (Teorema de Killing-Hopf para variedades conexas). *Una variedad riemanniana (M, g) , completa, conexa, de dimensión n y con curvatura seccional constante, es isométrica a un variedad riemanniana cociente \tilde{M}/Γ , donde \tilde{M} es una de las variedades riemannianas estándar \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n o \mathbb{H}^n , con las mismas condiciones que en el teorema anterior, y Γ es un subgrupo discreto del grupo de isometrías de \tilde{M} , que actúa libremente.*

Demostración. Por la proposición 4.9, M tiene un recubrimiento universal (\tilde{M}, π) , con recubrimiento universal, donde a \tilde{M} le asignamos la métrica inducida por π , $\tilde{g} := \pi^*(g)$. Por el teorema de Killing-Hopf aplicado a variedades simplemente conexas, (\tilde{M}, \tilde{g}) es isométrica a una de las variedades estándar de la misma dimensión y curvatura seccional constante. Por la proposición 4.16, el grupo de automorfismos de π , $Aut_\pi(\tilde{M})$, es un grupo que actúa libre y propiamente sobre \tilde{M} . Por la proposición 4.18, π es un recubrimiento normal, y entonces por 4.19, tenemos que $\tilde{M}/Aut_\pi(\tilde{M})$ es una variedad riemanniana isométrica a M .

Sea $\phi \in Aut_\pi(\tilde{M})$ un automorfismo del recubrimiento π , por definición, $\pi \circ \phi = \pi$, y

entonces

$$\phi^*(\tilde{g}) = \phi^*(\pi^*(g)) = (\pi \circ \phi)^*(g) = \pi^*(g) = \tilde{g}.$$

Por lo que ϕ , al ser difeomorfismo, es una isometría. Luego $Aut_\pi(\tilde{M})$ es un subgrupo de $Iso(M)$.

Falta ver que $Aut_\pi(\tilde{M})$ es discreto en $Iso(\tilde{M})$. Supongamos que existe un subconjunto infinito $\{\phi_i\} \subseteq Aut_\pi(\tilde{M})$, con $i \in \mathbb{N}$, con un punto de acumulación en $Iso(\tilde{M})$. Como $Aut_\pi(\tilde{M})$ actúa libremente sobre \tilde{M} , para todo punto $\tilde{p} \in \tilde{M}$ el conjunto $\{\phi_i(\tilde{p})\}$ sigue siendo infinito, ya que no pueden haber dos valores iguales, y por la continuidad de la acción, tiene un punto de acumulación en \tilde{M} . Al ser los ϕ_i automorfismos de π , obtenemos que $p := \pi(\tilde{p}) = \pi(\phi_i(\tilde{p}))$ para todo i . Pero esto da una contradicción ya que entonces $\{\phi_i(\tilde{p})\} \subseteq \pi^{-1}(p)$, y $\pi^{-1}(p)$ es un conjunto discreto y cerrado. Esto prueba que $Aut_\pi(\tilde{M})$ es discreto. \square

Estos cocientes de las variedades riemannianas estándar son denominados **formas espaciales**. Se dice que estas formas espaciales son euclidianas, esféricas, o hiperbólicas, en función de la variedad estándar de la cual es cociente, que también es determinado por su curvatura seccional constante.

El teorema de Killing-Hopf permite reducir el estudio de las propiedades geométricas de una variedad riemanniana conexa al de la forma espacial a la cual es isométrica. Por tanto, en este punto, el foco pasa a ser la clasificación y estudio de las formas espaciales euclidianas, esféricas e hiperbólicas.

Notación

A

$Aut_\pi(\hat{M})$ Grupo de automorfismos recubridores del recubrimiento (\hat{M}, π)

B

$\bar{B}_\varepsilon(p)$ Bola cerrada métrica o geodésica de centro p y radio ε

$B_\varepsilon(p)$ Bola abierta métrica o geodésica de centro p y radio ε

$\partial B_\varepsilon(p)$ Esfera métrica o geodésica de centro p y radio ε

D

$\nabla_\gamma V$ Derivada covariante del campo V a lo largo de la curva γ

$\nabla_Y X$ Conexión del campo vectorial X respecto el campo vectorial Y

∇ Conexión

$\frac{\partial}{\partial x_i}$ Campo vectorial de la coordenada x_i , en coordenadas (x_i)

∂_r Campo vectorial radial

$d(p, q)$ Distancia riemanniana del punto p al punto q , asociada a una métrica

$d_p f$ Diferencial en el punto p de la aplicación diferenciable f

df Forma diferencial de la aplicación diferenciable $f : M \rightarrow \mathbb{R}$

E

\exp Aplicación exponencial $\exp : TM \rightarrow M$

\exp_p Aplicación exponencial restringida al punto p , $\exp_p : T_p M \rightarrow M$

F

$\phi^*(g)$ Imagen inversa de la métrica g por la aplicación ϕ

G

\bar{g} Métrica euclidiana

γ' Campo vectorial velocidad a lo largo de la curva γ

$\gamma'(a^\pm)$ Velocidad de la curva γ al aproximarse por un lateral al punto a

$\Gamma(s, t)$ Familia de curvas

Γ_{jl}^i Símbolos de Christoffel de una conexión

$\Gamma^{(t)}$ Curva transversal de la familia de curvas Γ

Γ_s Curva principal de la familia de curvas Γ

H

\mathbb{H}^n Espacio hiperbólico de dimensión n

I

$Iso(M)$ Grupo de isometrías de la variedad riemanniana M , con una métrica asociada

L

$L(\gamma)$ Longitud de la curva γ , asociada a una métrica

M

(\hat{M}, π) Recubrimiento topológico de un espacio topológico M , con \hat{M} un espacio topológico y $\pi : \hat{M} \rightarrow M$

(M, g) Variedad riemanniana, donde M es una variedad diferenciable y g una métrica riemanniana

max Función máximo

R

\mathbb{R}^n Espacio euclídeo de dimensión n

R Tensor de curvatura

r Función de la distancia radial

R_m Tensor de curvatura Riemanniana

S

\mathbb{S}^n Espacio esférico de dimensión n

$S(s, t)$ Campo vectorial $\Gamma^{(t)'}(s)$, velocidad de las curvas transversales de Γ

T

$T_p M$ Espacio tangente de la variedad diferenciable M en el punto p

$T(s, t)$ Campo vectorial $\Gamma'_s(t)$, velocidad de las curvas principales de Γ

TM Fibrado tangente de una variedad diferenciable M

Referencias

(2.1) Ecuación en la memoria

(Corol. 2.1) Corolario de la referencia

(Def. x) Definición del concepto x de la referencia

(Fig. 2) Figura en la memoria

(Lema 2.1) Lema de la referencia

(Pg. 200) Pagina de la referencia

(Prob. 2.1) Problema de la referencia

(Prop. 2.1) Proposición de la referencia

(Teo. 2.1) Teorema de la referencia

2.1 Resultado en la memoria

[LeeRM] Referencia bibliográfica

Símbolos

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ Producto escalar

$\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ Producto escalar asociado a una métrica g

$|\cdot|$ Valor absoluto o norma

$|\cdot|_g$ Norma asociada a la métrica g

Referencias

- [LeeRM] John M. Lee, Introduction to riemannian Manifolds (second edition). Graduate Texts in Mathematics, 176. Springer, Cham, 2018.
- [LeeSM] John M. Lee, Introduction to Smooth Manifolds (second edition). Graduate Texts in Mathematics, 218. Springer, New York, 2013.
- [LeeTM] John M. Lee, Introduction to Topological Manifolds (first edition). Graduate Texts in Mathematics, 202. Springer, New York, 2000.
- [RotmanAT] Joseph J. Rotman, An Introduction to Algebraic Topology, (first edition). Graduate text in mathematics, 119. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1988.
- [MasseyAT] William S. Massey, A Basic Course in Algebraic Topology, (first edition). Graduate text in mathematics, 127. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1991.
- [WolfCC] Joseph A. Wolf, Spaces of Constant Curvature (sixth edition). American Mathematical Society, Rhode Island, 2011.
- [1] Zuoquin Wang, Lecture notes on riemannian geometry, University of Science and Technology of China, School of Mathematics. Disponible en <http://staff.ustc.edu.cn/~wangzuoq/Courses/16S-RiemGeom>.
- [2] Moritz Epple, Moritz, From quaternions to cosmology: spaces of constant curvature, ca. 1873–1925. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. III (Beijing, 2002), 935–945, Higher Ed. Press, Beijing, 2002. Disponible en <http://arxiv.org/abs/math/0305023v1>.