Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

El problema de Yamabe

Autor: Joan Domingo Pasarin

Director:	Dr. Xavier Ros Oton
Realitzat a:	Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 6 de juny de 2023

Abstract

Posed by Hidehiko Yamabe in 1960, the Yamabe problem asks whether it is possible to deform the metric of a given riemannian manifold so that its scalar curvature becomes constant. This problem can be reformulated in terms of a partial differential equation which makes it interesting from an analytical point of view. In this work we aim to study the Yamabe problem in a variational way in order to find a solution when the scalar curvature is non-positive. To do so, we study Sobolev spaces and the critical value of the Rellich-Kondrakov embedding theorem toghether with its close connection with the solution of the Yamabe equation.

Resum

Plantejat per Hidehiko Yamabe l'any 1960, el problema de Yamabe pregunta si es possible deformar la mètrica d'una varietat riemanniana per aconseguir que la seva curvatura escalar esdevingui constant. Aquest problema es pot reformular en termes d'una equació en derivades parcials la qual cosa el fa atractiu des d'un punt de vista analític. En aquest treball estudiem el problema de Yamabe de forma variacional trobant una solució parcial del problema quan la curvatura escalar és no positiva. Per fer-ho, estudiem els espais de Sobolev i el valor crític del teorema de Rellich-Kondrakov juntament amb l'estreta relació que aquest té amb la solució de l'equació de Yamabe.

2020 Mathematics Subject Classification. 35A01, 35A15, 35J60, 58J05, 58J60, 53C21

Agraïments

Vull agrair a en Xavier Ros Oton el seu ajut constant durant l'elaboració d'aquest treball. També vull agrair-li la seva disposició a l'hora de trobar un tema tant interessant que mostra com es poden resoldre problemes d'una àrea de les matemàtiques com és la geometria riemanniana, mitjançant tècniques d'altres àrees com ara l'estudi d'equacions en derivades parcials.

També vull donar les gràcies a la meva família i especialment als meus pares per tot el suport que m'han donat durant el grau. Gràcies a ells he pogut estudiar matemàtiques i arribar fins on sóc ara.

Índex

1 Introducció

La demostració de la conjectura de Poincaré és probablement un dels esdeveniments més importants del segle XXI en l'àmbit de les matemàtiques. Plantejada pel matemàtic francès Henri Poincaré[2] l'any 1904, aquesta conjectura afirma que tota varietat tancada (compacte i sense vora) i simplement connexa de dimensió 3 és homeomorfa a $\mathbb{S}^3$. La versió generalitzada d'aquesta conjectura per a dimensió n arbitrària va ser demostrada per Stephen Smale[3] en el cas $n \geq 4$ l'any 1961, però el cas $n = 3$ va resultar ser particularment difícil de tractar i va quedar sense solucionar. Vint-i-un anys més tard, l'any 1982, el matemàtic americà Richard S. Hamilton[4] va introduir el concepte del flux de Ricci i va ser capaç d'usar-lo per demostrar la conjectura en algúns casos particulars. Durant els anys posteriors Hamilton va seguir treballant en l'ús del flux de Ricci per provar la conjectura de Poincaré, fins que a finals del 2002, el matemàtic rus Grigori Perelman[5] va aconseguir demostrar la conjectura a partir de les idees de Hamilton.

L'any 1960, un any abans de la demostració de Smale del cas $n \geq 4$ i vint-i-dos anys abans de les primeres contribucions de Hamilton, el matemàtic japonès Hidehiko Yamabe[6] publica a la revista *Osaka Journal of Mathematics* un article titulat "On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds" [9]. En ell, Yamabe busca donar un primer pas cap a la demostració de la conjectura de Poincaré i per fer-ho, planteja i demostra afirmativament el problema que estudiarem en aquest treball: donada una varietat riemanniana tancada (M, g) de dimensió $n \geq 3$, existeix una funció diferenciable f de M estrictament positiva tal que la mètrica fg té curvatura escalar constant.

Malauradament, vuit anys després de la publicació de Yamabe, Neil Trudinger[7] descobreix un error en la demostració de Yamabe que la invalida. Aquest esdeveniment provoca que l'enunciat plantejat per Yamabe passi a ser conegut com el problema de Yamabe i atreu l'atenció de diversos matemàtics que durant els anys següents treballen en corregir l'error de la demostració. El primer d'aquests matemàtics és el propi Trudinger que aconsegueix adaptar l'argument de Yamabe perquè sigui vàlid a canvi d'haver d'afegir algunes hipòtesis adicionals al problema. Més endavant, al 1976, Thierry Aubin[8] és capaç de generalitzar els resultats de Trudinger a varietats de dimensió $n \geq 6$ que no siguin localment conformement planes. Finalment, Richard Schoen[9] aconsegueix solucionar els casos restants al 1984 obtenint així una solució completa del problema de Yamabe.

Conceptualment, el problema de Yamabe pregunta si és possible deformar la mètrica g d'una varietat M per aconseguir que la seva curvatura escalar esdevingui constant. La deformació que Yamabe va proposar en el seu article és la que es coneix com una transformació conforme, és a dir, una transformació que preserva angles. Aquest tipus de deformació de la mètrica és una de les més senzilles possibles i ve donada per qualsevol funció diferenciable estrictament positiva. Per altra banda, sabent que Yamabe tenia en ment la conjectura de Poincaré, el motiu pel qual va plantejar aquest problema en varietats tancades és evident, ja que aquestes són justament les varietats de les quals parla la conjectura.

[2] Jules Henri Poincaré (Nancy, França 1854 - París, França 1912)
[3] Stephen Smale (Flint, Michigan 1930)
[4] Richard Streit Hamilton (Cincinnati, Ohio 1943)
[5] Grigori Yakovlevich Perelman (Leningrad, Unió Soviètica 1966)
[6] Hidehiko Yamabe (Ashiya, Hyōgo, Japó 1923 - Evanston, Illinois 1960)
[7] Neil Sidney Trudinger (Ballarat, Victoria, Austràlia 1942)
[8] Thierry Aubin (1942-2009)
[9] Richard Melvin Schoen (Fort Recovery, Ohio 1950)

L'enunciat del problema de Yamabe presenta una pregunta relacionada amb la curvatura escalar, la qual es defineix a partir del tensor de curvatura de Riemann. Introduït pel matemàtic alemany Bernhard Riemann[10] al segle XIX, el tensor de curvatura de Riemann és l'objecte matemàtic que generalitza la curvatura de gauss a varietats de dimensió n qualsevol. La contracció completa d'aquest tensor de rang 4 dona com a resultat una funció diferenciable S que s'anomena curvatura escalar. Geomètricament, la curvatura escalar de M permet comparar volums en la varietat M amb volumns en $\mathbb{R}^n$. Més concretament, donat un punt $p \in M$ i un radi $r > 0$, podem considerem la bola euclidiana $B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$ i la bola geodèsica $B_r(p) \subset M$. Les boles geodèsiques no es tractaran en aquest treball, però intuïtivament es poden entendre com l'equivalent en varietats a les boles en espais euclidians. Aleshores és pot demostrar la següent relació entre els volumns de $B_r(0)$ i $B_r(p)$:

$$\frac{\mathrm{Vol}_M(B_r(p))}{\mathrm{Vol}_{\mathbb{R}^n}(B_r(0))} = 1 - \frac{S(p)}{6(n+2)} r^2 + O(r^3).$$

Aquesta relació mostra que si $S(p) > 0$, aleshores el volum de la bola en M serà més petit que el volum en $\mathbb{R}^n$. Per contra, quan $S(p) < 0$ el volum de $B_r(p)$ és superior al volum de $B_r(0)$.

Tot i ser un enunciat clarament geomètric, el problema de Yamabe ha esdevingut un resultat clàssic en l'anàlisi geomètric i la teoria d'EDPs no lineals. Això es deu al fet que aquest problema es pot reformular en termes d'una equació en derivades parcials. Si $\tilde{g} = fg$ és la mètrica deformada de M i $\tilde{S}$ la curvatura escalar en la mètrica $\tilde{g}$, expressar f com $f = u^{4/(n-2)}$ i calcular una expressió de $\tilde{S}$ en funció de S resulta en una equació de la forma

$$-a\Delta u + S(x)u = \tilde{S}(x)u^{\frac{n+2}{n-2}},$$

on $a \in \mathbb{R}$ és una constant positiva. Tenint en compte que volem que $\tilde{S}$ sigui constant, resoldre el problema de Yamabe és equivalent a trobar alguna solució diferenciable i estrictament positiva de l'equació

$$-a\Delta u + S(x)u = \lambda u^{\frac{n+2}{n-2}} \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Observem que l'únic terme no lineal de (1.1) és $u^{\frac{n+2}{n-2}}$. En general, donat un operador diferencial lineal L, l'existència de solucions d'EDPs no lineals de la forma $Lu = u^p$ depèn fortament del valor p. Resulta que el valor $\frac{n+2}{n-2}$ que trobem en l'equació del problem de Yamabe és justament el valor crític per sota del qual aquest equacions són fàcils de resoldre, i per sobre del qual no tenen cap solució no trivial. Per posar un exemple de la importància de l'exponent p, considerem l'equació

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p & \text{en } \Omega \\ u \geq 0 & \text{en } \overline{\Omega} \\ u = 0 & \text{a } \partial\Omega, \end{cases}$$

on Ω és un domini de $\mathbb{R}^n$ prou regular. Si $p < \frac{n+2}{n-2}$, aleshores usant mètodes semblants als que veurem en aquest treball és pot comprovar que aquesta equació té solucions no trivials per qualsevol domini Ω acotat. Per contra, quan $p > \frac{n+2}{n-2}$ l'equació no té cap solució no trivial. Finalment, quan $p = \frac{n+2}{n-2}$ l'existència de solucions depèn del domini Ω. Per exemple, prenent $\Omega = \mathbb{R}^n$ és fàcil trobar una solució radial de l'equació, però si $\Omega = B_1(0)$ l'equació no té cap solució (no trivial).

[10] Georg Friedrich Bernhard Riemann (Breselenz 1826 - Selasca 1866)

El fet que l'equació (1.1) tingui justament l'exponent crític complica considerablement la resolució del problema de Yamabe. Històricament, l'estudi de l'existència de solucions de (1.1) s'ha dividit en els casos $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ i $\lambda > 0$. El cas $\lambda > 0$ comporta una dificultat molt més gran que els altres dos casos i necessita eines i conceptes que queden fora de l'abast d'aquest treball. Per aquest motiu ens centrarem en solucionar el problema de Yamabe quan $\lambda \leq 0$. El procediment que seguirem per solucionar (1.1) en aquest cas és el mateix que va seguir Yamabe en el seu article. Començarem estudiant l'EDP per valors subcrítics de l'exponent i demostrant l'existència de solucions en aquest cas. A continuació usarem les solucions subcrítiques per trobar per aproximació una solució del cas crític fent un pas al límit. En el seu article Yamabe afirmava que aquest aproximació funciona per qualsevol λ, però Trundinger va trobar contraexemples que mostren que això no sempre és cert. En general, aquest pas al límit no funciona, però en el cas $\lambda < 0$ és possible arreglar la demostració de Yamabe i obtenir un argument vàlid. Aquest argument ens permetrà provar l'existència de solucions en el cas $\lambda < 0$ seguint les idees de Yamabe. Finalment, amb un petit esforç extra serem capaços de solucionar el cas $\lambda = 0$ obtenint així una solució al problema de Yamabe quan $\lambda \leq 0$.

Estructura del treball

Donat que aquest problema requereix conceptes geomètrics i analítics, una part important del treball està dedicada a introduir i desenvolupar tots els conceptes necessaris per entendre i estudiar el problema de Yamabe.

Comencem introduint els espais de Sobolev en la secció 2, els quals són els espais de funcions on habitualment es busquen les solucions d'una EDP. En aquesta secció també demostrem dos resultats de gran importància en la resolució d'EDPs: les desigualtats de Sobolev i el teorema de Rellich-Kondrakov. A continuació, en la secció 3 introduïm el càlcul de variacions que usarem per provar l'existència de solucions de l'equació (1.1). També donem la definició i propietats principals de la convergència feble en espais de Hilbert, la qual és de gran utilitat en el càlcul variacional.

En la secció 4 estudiem tots els conceptes geomètrics que envolten el problema de Yamabe. Per una banda definim què és una mètrica riemanniana i una connexió afí i ho usem per donar la definició del tensor de curvatura de Riemann i la curvatura escalar. Per altra banda, donem les idees de com definir una integral en varietats i veiem com usar aquesta per extendre els espais de Sobolev a varietats riemannianes.

Finalment, en la secció 5 estudiem el problema de Yamabe. Comencem enunciant-lo i deduint la seva reformulació en termes d'una EDP. A continuació usem el càlcul de variacions introduït en la secció 3 per resoldre el cas subcrític de l'equació (1.1). Finalment, tractem el cas crític acabant la secció amb un teorema que recull els resultats que es poden demostrar sobre el problema de Yamabe amb les eines desenvolupades en aquest treball.

2 Espais de Sobolev

Dediquem aquesta secció a l'estudi del espais de Sobolev. Com veurem més endavant, aquests espais són una eina essencial en la resolució d'EDPs ja que permeten controlar la "mida" d'una funció i les seves derivades. El nostre objectiu principal és demostrar les desigualtats de Sobolev i el teorema de Rellich-Kondrakov. Per fer-ho, començarem definint els espais de Sobolev mitjançant el concepte de derivada feble i els espais de Lebesgue L^p. Veurem que aquests mantenen moltes de les propietats de L^p com per exemple el fet que són espais de Banach. A continuació estudiarem alguns resultats auxiliars d'aproximació i extensió de funcions, els quals ens serviran per demostrar les desigualtats de Sobolev. Finalment, usarem les desigualtats de Sobolev per provar el teorema de Rellich-Kondrakov.

Durant tota aquesta secció seguirem a Evans [4]. Les lletres Ω, Ω' denotaran oberts de $\mathbb{R}^n$. Escriurem $\Omega' \subset\subset \Omega$ per denotar que la inclusió de Ω' en Ω és compacte, és a dir, $\Omega' \subset\subset \Omega$ si $\Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega$ i $\overline{\Omega'}$ és compacte. La lletra C denotarà una constant positiva que pot canviar de valor entre igualtats i desigualtats. Això ens servirà per absorbir en C totes les constants que ens apareixin en acotacions i mantenir una notació més neta. Quan sigui necessari es recordaran els paràmetres dels quals depèn la constant C.

2.1 Definició dels espais de Sobolev a $\mathbb{R}^n$

Donada una funció $u \in C^1(\Omega)$, per tota $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ se satisfà la fórmula d'integració per parts

$$\int_\Omega u\varphi_{x_i}\,dx = -\int_\Omega u_{x_i}\varphi\,dx \quad i = 1, \dots, n \tag{2.1}$$

on no hi ha terme de frontera ja que φ té suport compacte i per tant és idènticament 0 a $\partial\Omega$. Aquesta mateixa igualtat se satisfà més en general per derivades de qualsevol ordre. En efecte, donat un enter $k \geq 1$ i un multi-índex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ amb $|\alpha| = \sum_i \alpha_i = k$, es compleix

$$\int_\Omega uD^\alpha\varphi\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D^\alpha u\varphi\,dx \tag{2.2}$$

ja que

$$D^\alpha\varphi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}\varphi$$

i podem aplicar (2.1) $|\alpha|$ vegades.

Observem que el membre esquerra de (2.2) té sentit fins i tot si u només és localment integrable. Per contra, el membre de la dreta només té sentit si $u \in C^k(\Omega)$. Amb la finalitat de generalitzar la fórmula (2.2) per funcions localment integrables introduïm la següent definició:

Definició 2.1. *Donades dues funcions $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ i un multi-índex α, diem que v és la α-èssima derivada feble de u en sentit feble i ho denotem*

$$D^\alpha u = v$$

si se satisfà

$$\int_\Omega uD^\alpha\varphi\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\varphi\,dx$$

per tota funció test $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Notem que si u és $C^k(\Omega)$, aleshores les derivades febles de u coincideixen amb les seves derivades clàssiques. Per tant, la definició anterior generalitza la noció de derivada. El següent lema ens assegura que la derivada feble d'una funció está ben definida.

Lema 2.2. *Si la α-èssima derivada feble de u existeix, aleshores és única.*

Demostració. Siguin $v, \tilde{v} \in L^1_{loc}(\Omega)$ tals que

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \tilde{v}\varphi \, dx$$

per tota funció test $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Aleshores

$$\int_\Omega (v - \tilde{v})\varphi \, dx = 0$$

per tota $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, i per tant $v - \tilde{v} = 0$ g.p.t. □

Fixem $1 \leq p \leq \infty$ i considerem un enter $k \geq 0$. Ara podem definir els espais de Sobolev a partir de les derivades febles de funcions localment integrables.

Definició 2.3. *L'espai de Sobolev*

$$W^{k,p}(\Omega)$$

és l'espai de funcions $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tals que per tot multi-índex α amb $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ existeix en sentit feble i pertany a l'espai $L^p(\Omega)$.

Notació 1. *En el cas $p = 2$ escriurem*

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega).$$

S'usa la lletra H perquè com veurem, $H^k(\Omega)$ és un espai de Hilbert.

Definició 2.4. *Donada $u \in W^{k,p}(\Omega)$, definim la següent norma en $W^{k,p}(\Omega)$*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p} & 1 \leq p \leq \infty \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & p = \infty. \end{cases}$$

Clarament

$$\|\lambda u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = |\lambda| \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

i

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0 \text{ si i només si } u = 0 \text{ g.p.t.}$$

També és clar que $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ compleix la desigualtat triangular per $p = \infty$. Donades $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$, si $1 \leq p < \infty$ la desigualtat de Minkowski ens dona

$$\begin{aligned} \|u + v\|_{W^{k,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} (\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)})^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} + \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} \\ &= \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Per tant, $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ és efectivament una norma a $W^{k,p}(\Omega)$. De les dues definicions anteriors s'obté immediatament que

$$\begin{aligned} W^{k,p}(\Omega) &= \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ per tot } |\alpha| \leq k\} \\ &= \{u \in L^p(\Omega) : \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \infty\}. \end{aligned}$$

Definició 2.5. *Sigui $(u_m)_{m=1}^\infty$ una successió de $W^{k,p}(\Omega)$. Diem que u_m convergeix a u en $W^{k,p}(\Omega)$ i escrivim*

$$u_m \to u \quad en \ W^{k,p}(\Omega),$$

si

$$\lim_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0.$$

Escriurem

$$u_m \to u \quad en \ W^{k,p}_{loc}(\Omega)$$

quan $u_m \to u$ en $W^{k,p}(\Omega')$ per tot $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Definició 2.6. *Denotarem per $W_0^{k,p}(\Omega)$ la clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^{k,p}(\Omega)$. En el cas $p = 2$ escriurem $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$*

Tenim doncs que $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ si i només si existeixen funcions $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_m \to u$ en $W^{k,p}(\Omega)$. Més endavant veurem un resultat que permetrà interpretar $W_0^{k,p}(\Omega)$ com l'espai d'aquelles funcions $u \in W^{k,p}(\Omega)$ que, en un cert sentit, satisfan que

$$\text{“}D^\alpha u = 0 \text{ a } \partial\Omega\text{” per tot } |\alpha| \leq k-1.$$

La proposició següent dona les propietats bàsiques de les derivades febles, les quals són similars a les de les derivades clàssiques. Es pot consultar una demostració d'aquestes propietats a Evans [4, pàg. 261].

Proposició 2.7. *Siguin $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$ i $|\alpha| \leq k$. Aleshores*

(i) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$ i $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta}u$ per tota parella de multi-índexs α, β tals que $|\alpha| + |\beta| \leq k$.

(ii) La derivada feble és lineal, és a dir, si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, aleshores $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(\Omega)$ i $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$.

(iii) Si Ω' és un obert de Ω, aleshores $u \in W^{k,p}(\Omega')$.

(iv) (Fórmula de Leibniz) Si $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$, aleshores $\zeta u \in W^{k,p}(\Omega)$ i

$$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \zeta D^{\alpha-\beta} u$$

on $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$.

Acabem aquesta introducció als espais de Sobolev veient que $W^{k,p}(\Omega)$ hereta la completesa de l'espai $L^p(\Omega)$ i per tant és espai de Banach.

Teorema 2.8. *Per cada enter $k \geq 1$ i $1 \leq p \leq \infty$, l'espai de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ és un espai de Banach.*

Demostració. La proposició anterior mostra que $W^{k,p}(\Omega)$ és un subespai vectorial de $L^p(\Omega)$. Com ja hem vist que $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ és una norma, només hem de comprovar que $W^{k,p}(\Omega)$ és complet respecte la seva norma.

Sigui $(u_m)_{m=1}^{\infty}$ una successió de Cauchy de $W^{k,p}(\Omega)$. Aleshores per tot $|\alpha| \leq k$, $(D^\alpha u_m)_{m=1}^{\infty}$ és una successió de Cauchy en $L^p(\Omega)$ ja que

$$\|D^\alpha u_m - D^\alpha u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u_m - u_n\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

per tot $1 \leq p \leq \infty$ i $k \geq 1$. Com $L^p(\Omega)$ és complet, existeixen funcions $u_\alpha \in L^p(\Omega)$ tals que

$$D^\alpha u_m \to u_\alpha \quad \text{en } L^p(\Omega)$$

per cada $|\alpha| \leq k$. En particular,

$$u_m \to u_{(0,\dots,0)} =: u \quad \text{en } L^p(\Omega).$$

Si provem que

$$u \in W^{k,p}(\Omega),\ D^\alpha u = u_\alpha \quad |\alpha| \leq k \tag{2.3}$$

haurem acabat, ja que tindrem que $D^\alpha u_m \to D^\alpha u$ en $L^p(\Omega)$ per tot $|\alpha| \leq k$ d'on es dedueix que $u_m \to u$ en $W^{k,p}(\Omega)$. Per comprovar (2.3), fixem $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Aleshores

$$\begin{aligned}\int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx &= \lim_{m\to\infty} \int_\Omega u_m D^\alpha \varphi \, dx \\ &= \lim_{m\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u_m \varphi \, dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha \varphi \, dx,\end{aligned}$$

on en la primera igualtat hem usat la convergència de u_m en $L^p(\Omega)$, en la segona hem usat que $u_m \in W^{k,p}(\Omega)$ i en la tercera hem usat la convergència de $D^\alpha u_m$ en $L^p(\Omega)$. □

Observació 2.9. Si definim

$$(u,v)_{H^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v \, dx,$$

és fàcil comprovar que $(\cdot,\cdot)_{H^k(\Omega)}$ és un producte escalar a $H^k(\Omega)$ i $\|u\|_{H^k(\Omega)} = (u,u)_{H^k(\Omega)}^{1/2}$. La completesa de $W^{k,p}(\Omega)$ en el cas particular $p = 2$ ens dona que $H^k(\Omega)$ és un espai de Hilbert.

2.2 Aproximació, extensions i traça de funcions de $W^{k,p}(\Omega)$

Dediquem aquesta secció a enunciar sense demostració els resultats auxiliars necessaris per provar les desigualtats de Sobolev i el teorema de Rellich-Kondrakov. Es poden trobar demostrats a Evans [4, pàg. 264 - 275].

Comencarem per un resultat d'aproximació de funcions de $W^{k,p}(\Omega)$. Considerem la funció $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\varphi(x) := \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

On prenem la constant $C > 0$ de manera que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, dx = 1$.

Definició 2.10. *Per cada $\varepsilon > 0$, definim*

$$\varphi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Anomenem φ_ε els mol·lificadors estàndard. Les funcions φ_ε són C^∞ i satisfan

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon \, dx = 1, \quad \operatorname{supp}(\varphi_\varepsilon) \subset B(0, \varepsilon).$$

Definició 2.11. *Sigui $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Definim la mol·lificació de u com*

$$u^\varepsilon(x) := (u * \varphi_\varepsilon)(x) = \int_\Omega \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)\, dy$$

per $x \in \Omega_\varepsilon$, on Ω_ε és l'obert

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Observació 2.12. Notem que si $\Omega = \mathbb{R}^n$, aleshores $\Omega_\varepsilon = \mathbb{R}^n$ i per tant u^ε està ben definida per tot $x \in \mathbb{R}^n$.

La proposició següent ens dona les propietats principals de regularitat i aproximació de les funcions u^ε.

Proposició 2.13. *Sigui $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ i $\varepsilon > 0$.*

(i) $u^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ i per tot multi-índex α,

$$D^\alpha u^\varepsilon = u * D^\alpha \varphi_\varepsilon.$$

(ii) $u^\varepsilon(x) \to u(x)$ g.p.t. $x \in \Omega$ quan $\varepsilon \to 0$.

(iii) Si $u \in C(\Omega)$, aleshores $u^\varepsilon \to u$ uniformement en compactes de Ω.

(iv) Si $1 \le p < \infty$ i $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, aleshores $u^\varepsilon \to u$ en $L^p_{loc}(\Omega)$.

(v) Per cada $1 \le p < \infty$ i $k \ge 1$ enter, si $u \in W^{k,p}(\Omega)$, aleshores

$$D^\alpha u^\varepsilon = D^\alpha u * \varphi_\varepsilon \quad \text{en } \Omega_\varepsilon$$

si $|\alpha| \le k$ i $u^\varepsilon \to u$ en $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$.

El següent resultat que ens fa falta és el teorema d'extensió. L'objectiu d'aquest teorema és extendre funcions de $W^{k,p}(\Omega)$ a funcions de $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$. Fixem-nos en què no podem fer aquesta extensió de manera directa (extenent la funció per 0 a $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ per exemple) perquè en el procés podríem crear una discontinuïtat massa forta a $\partial\Omega$ i que l'extensió perdés les derivades febles. Per evitar aquest problema haurem de suposar una certa regularitat del domini Ω.

Definició 2.14. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un obert acotat. Diem que la frontera $\partial\Omega$ és C^k si per cada punt $x_0 \in \partial\Omega$ existeix $r > 0$ i una funció $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ de classe C^k tal que (reanomenant i reordenant els eixos si és necessari)*

$$\Omega \cap B(x_0, r) = \{x \in B(x_0, r) : x_n > \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1})\}.$$

Teorema 2.15 (Teorema d'extensió)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un obert acotat i amb frontera C^1. Sigui Ω' un obert acotat tal que $\Omega \subset\subset \Omega'$ i sigui $1 \le p \le \infty$. Aleshores existeix un operador lineal acotat*

$$E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

tal que per cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$:

(i) $E(u) = u$ *g.p.t. en* Ω

(ii) $E(u)$ *té suport a* Ω'

(iii)

$$\|E(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

on la constant C només depèn de p, Ω i Ω'.

Acabem aquesta secció parlant de la traça d'una funció $u \in W^{1,p}(\Omega)$. En l'estudi d'EDPs és habitual imposar condicions de frontera a la funció incògnita de la nostra equació i parlar de la restricció de u a $\partial\Omega$. Ara bé, tenint en compte que les funcions de $W^{1,p}(\Omega)$ estan definides g.p.t. i $\partial\Omega$ té mesura n-dimensional 0, no podem parlar directament de la restricció de u a $\partial\Omega$. La noció d'operador traça i traça d'una funció soluciona aquest problema.

Notació 2. *Escriurem $C(\bar{\Omega})$ per denotar el conjunt de funcions $u \in C(\Omega)$ tals que u és uniformement contínua en subconjunts acotats de Ω.*

Teorema 2.16 (Teorema de la traça)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un obert acotat tal que $\partial\Omega$ és C^1 i sigui $1 \le p < \infty$. Aleshores existeix un operador lineal acotat*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

tal que

(i) $T(u) = u|_{\partial\Omega}$ *si* $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$

(ii)

$$\|T(u)\|_{L^p(\partial\Omega)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

per tota funció $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on C només depèn de p i Ω.

Teorema 2.17 (Caracterització de les funcions de traça zero)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un obert acotat tal que $\partial\Omega$ és C^1 i $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Aleshores*

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \iff T(u) = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

Notació 3. *Escriurem $u|_{\partial\Omega}$ per denotar la traça de qualsevol funció $u \in W^{1,p}(\Omega)$. En particular, si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, aleshores $u|_{\partial\Omega} = 0$.*

2.3 Desigualtats de Sobolev

És clar a partir de la definició de la norma de $W^{k,p}(\Omega)$ que per qualsevol $1 \le p \le \infty$, $W^{k,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ ja que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}. \tag{2.4}$$

Una pregunta natural que sorgeix és si és possible trobar inclusions i embeddings més generals dels espais de Sobolev. La resposta és afirmativa i la dona la desigualtat de Sobolev general, però l'espai en què està inclòs $W^{k,p}(\Omega)$ depèn de'n quin dels següents casos ens trobem:

(i) $k < n/p$

(ii) $k = n/p$

(iii) $k > n/p$

En aquest treball no tractarem la versió general d'aquesta pregunta sinó que ens limitarem a estudiar-la en el cas particular $k = 1$. A més a més, per l'equació del problema de Yamabe només necessitarem l'embedding del primer cas i per tant ens centrarem en l'estudi d'aquest. Tot i així, abans d'entrar en detall donem una idea intuïtiva dels embeddings en cadscun dels casos quan $k = 1$. La idea que hem de tenir és que, depenent del cas, saber que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ens permet guanyar més integrabilitat o més regularitat en u. Més concretament tenim el següent:

(i) En aquest cas s'obté l'embedding $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ amb $p^* = \frac{np}{n-p}$. El motiu pel qual p^* ha de ser aquest valor concret quedarà clar quan tractem aquest cas. Si Ω és acotat, aleshores immediatament obtenim l'embedding $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ per tota $1 \leq q \leq p^*$.

(ii) Aquest és el cas més delicat i inclou l'ús dels espais $BMO(\mathbb{R}^n)$ de funcions amb mitjana d'oscil·lació acotada. Observem que quan $p \to n$ tenim que $p^* \to \infty$. Basant-nos en el cas anterior, això ens podria fer esperar que si $u \in W^{1,n}(\Omega)$, aleshores $u \in L^\infty(\Omega)$. Aquesta conclusió però no és certa i se'n poden trobar contraexemples. El que si que es pot demostrar és que si $u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$, aleshores $u \in BMO(\mathbb{R}^n)$.

(iii) En el cas $n < p$ es pot veure que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, aleshores existeix una funció u^* Hölder contínua amb exponent $\gamma = 1 - \frac{n}{p} > 0$ tal que $u = u^*$ g.p.t. Així doncs, podem pensar que en aquest cas la nostra funció u guanya regularitat i passa a ser Hölder contínua.

Passem doncs a estudiar el cas $1 \leq p < n$. Comencem preguntant-nos si podem trobar acotacions de la forma

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.5}$$

amb $C > 0$ i $1 \leq q < \infty$, per tota funció $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. El nostre objectiu és que C i q no depenguin de la funció u.

Observació 2.18. Suposem que existeixen C i q tals que es compleix l'acotació (2.5). Aleshores el valor de q no pot ser arbitrari pel motiu següent: sigui $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $u \not\equiv 0$ i considerem el reescalament

$$u_\lambda(x) \coloneqq u(\lambda x) \quad x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda > 0.$$

Aplicant (2.5) a u_λ obtenim

$$\|u_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla u_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.6}$$

Com que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_\lambda|^q \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\lambda x)|^q \, dx = \frac{1}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q \, dy,$$

i

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\lambda|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(\lambda x)|^p \, dx = \frac{\lambda^p}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(y)|^p \, dy,$$

substituïnt aquestes igualtats a (2.6) s'obté

$$\frac{1}{\lambda^{n/q}}\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\frac{\lambda}{\lambda^{n/p}}\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

o equivalentment,

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\lambda^{1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}}\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Si $1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q} \neq 0$, fent tendir λ a 0 o ∞ obtenim una contradicció. Per tant, si tenim una acotació de la forma (2.5), necessàriament $1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}=0$ i ens queda $q=\frac{np}{n-p}$.

Definició 2.19. *Sigui $1 \leq p < n$. El conjugat de Sobolev de p és*

$$p^* := \frac{np}{n-p}.$$

Observem que

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \quad p^* > p$$

i per l'observació 2.18, l'acotació (2.5) només pot ser vàlida per $q = p^*$.

Teorema 2.20 (Desigualtat de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)**.** *Sigui $1 \leq p < n$. Existeix una constant $C > 0$ que només depèn de p i n tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.7}$$

per tota funció $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$.

Demostració. Considerem primer el cas $p = 1$.

Com u té suport compacte, per cada $i = 1, \ldots, n$ i $x \in \mathbb{R}^n$ tenim

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} u_{x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)\, dy_i$$

i per tant

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n)|\, dy_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Aleshores

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n)|\, dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Integrant la desigualtat anterior respecte x_1 s'obté

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}}\, dx_1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dx_1\, dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}},
\end{aligned}$$

on l'últim pas s'obté de la desigualtat de Hölder general.

Ara podem integrar respecte x_2:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}}\,dx_1\,dx_2 \\
&\qquad\qquad \le \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\,dx_1\,dy_2\right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{n} I_i^{\frac{1}{n-1}}\,dx_2
\end{aligned}$$

on

$$I_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\,dy_1, \quad I_i := \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\,dx_1\,dy_i \quad i = 3,\ldots,n.$$

Tornant a aplicar la desigualtat de Hölder general tal i com hem fet abans ens queda

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}}\,dx_1\,dx_2 \\
&\quad \le \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\,dx_1\,dy_2\right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\,dy_1\,dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}} \\
&\qquad \prod_{i=3}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\,dx_1\,dx_2\,dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}.
\end{aligned}$$

Repetint aquest procés amb les variables restants $x_3,\ldots,x_n$ finalment s'obté

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}}\,dx &\le \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\,dx_1\cdots dy_i\cdots dx_n\right)^{\frac{1}{n-1}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|\,dx\right)^{\frac{n}{n-1}}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

que és la desigualtat (2.7) per $p = 1$.

Queda demostrar el cas $1 < p < n$. Apliquem la desigualtat (2.8) a la funció $v := |u|^\gamma$ on $\gamma > 1$ i determinarem el seu valor més endavant.

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}}\,dx\right)^{\frac{n-1}{n}} &\le \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(|u|^\gamma)|\,dx = \gamma\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma-1}|\nabla u|\,dx \\
&\le \gamma\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}}\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Ara escollim γ de manera que $\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma-1)\frac{p}{p-1}$, és a dir, prenem

$$\gamma := \frac{p(n-1)}{n-p} > 1.$$

Aleshores l'acotació anterior es pot reescriure com

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*}\,dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \le \gamma\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$\square$

Teorema 2.21 (Desigualtat de Sobolev a $W^{1,p}$, $1 \le p < n$)**.** *Sigui Ω un obert acotat de $\mathbb{R}^n$ i suposem que $\partial\Omega$ és C^1. Suposem que $1 \le p < n$ i $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Aleshores $u \in L^{p^*}(\Omega)$ i se satisfà l'acotació*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

on la constant C només depèn de p, n i Ω.

Demostració. Com que $\partial\Omega$ és C^1, podem usar el teorema d'extensió 2.15 per obtenir una extensió $\bar{u} := E(u) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ de u tal que

$$\begin{cases} \bar{u} = u \text{ a } \Omega \\ \bar{u} \text{ té suport compacte} \\ \|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Donat que $\bar{u}$ té suport compacte, pel teorema d'aproximació local 2.13 les funcions $u_m = \bar{u} * \varphi_{\varepsilon_m}$ amb $\varepsilon_m = \frac{1}{m}$ satisfan que $u_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ i

$$u_m \to \bar{u} \quad \text{en } W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Aplicant la desigualtat de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev a les funcions $u_m - u_l \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ tenim que

$$\|u_m - u_l\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le C\|\nabla u_m - \nabla u_l\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

per tot m, $l \ge 1$. Per tant, u_m és una successió de Cauchy a $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ d'on deduïm que existeix $v \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_m \to v$ en $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$.

Com que $u_m \to \bar{u}$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, en particular tenim que $u_m \to \bar{u}$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ i passant a una parcial si és necessari podem suposar que $u_m \to \bar{u}$ puntualment g.p.t. A continuació, usant que $u_m \to v$ en $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ i tornant a passar a una parcial si és necessari, podem suposar que u_m també convergeix puntualment g.p.t. a v. En conseqüència, $\bar{u} = v$ i

$$u_m \to \bar{u} \quad \text{en } L^{p^*}(\mathbb{R}^n).$$

Per la desigualtat de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, $\|u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le C\|\nabla u_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ i obtenim

$$\begin{aligned} \|\bar{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} &\le \|\bar{u} - u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} + \|u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \\ &\le \|\bar{u} - u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} + C\|\nabla u_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Prenent el límit quan $m \to \infty$ ens queda

$$\|\bar{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le C\|\nabla \bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

i usant (2.9) deduïm

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} = \|\bar{u}\|_{L^{p^*}(\Omega)} \le \|\bar{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le C\|\nabla \bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

□

Teorema 2.22 (Desigualtat de Sobolev a $W_0^{1,p}$, $1 \le p < n$)**.** *Sigui Ω un obert acotat de $\mathbb{R}^n$. Suposem que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ per algún $1 \le p < n$. Aleshores*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

per tot $q \in [1, p^*]$ on la constant C només depèn de p, q, n i Ω. En particular, per tot $1 \le p \le \infty$,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demostració. Com que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, existeix una successió de funcions $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que

$$u_m \to u \quad \text{en} \;\; W^{1,p}(\Omega).$$

Degut a que les funcions u_m s'anul·len a $\partial\Omega$ perquè tenen suport compacte, l'extensió d'aquestes per 0 a $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ és $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Aleshores, aplicant la desigualtat de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev obtenim

$$\begin{aligned} \|u_m\|_{L^{p^*}(\Omega)} &\leq C\|\nabla u_m\|_{L^p(\Omega)} \\ \|u_m - u_l\|_{L^{p^*}(\Omega)} &\leq C\|\nabla u_m - \nabla u_l\|_{L^p(\Omega)} \end{aligned}$$

per m, $l \geq 1$. Ara, argumentant igual que en la demostració anterior deduïm que

$$u_m \to u \quad \text{en} \;\; L^{p^*}(\Omega).$$

En conseqüència, donat que

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} &\leq \|u - u_m\|_{L^{p^*}(\Omega)} + \|u_m\|_{L^{p^*}(\Omega)} \\ &\leq \|u - u_m\|_{L^{p^*}(\Omega)} + C\|\nabla u_m\|_{L^p(\Omega)}, \end{aligned}$$

podem prendre el límit quan $m \to \infty$ i ens queda la desigualtat

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Finalment, $|\Omega| < \infty$ ja que Ω és acotat. Per tant, per tota $1 \leq q \leq p^*$

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

□

Observació 2.23. L'acotació

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

per funcions $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ també s'anomena a vegades desigualtat de Poincaré. Gràcies a aquesta tenim

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq (1 + C)\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Com

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

la desigualtat de Poincaré prova que la norma $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ és una norma equivalent a $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$. En el cas particular de $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$, la desigualtat de Poincaré també ens dona que en $H_0^1(\Omega)$ el producte escalar $(\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$ és equivalent al producte escalar $(u, v)_{H^1(\Omega)}$.

Notació 4. *Anomenarem* desigualtat de Sobolev *a qualsevol de les desigualtats d'aquesta secció sense especificar a quina d'elles estem fent referència. La desigualtat particular que estiguiem usant quedarà clara a partir del context en què ens trobem.*

2.4 El teorema de Rellich-Kondrakov

En la secció anterior hem vist com la desigualtat de Sobolev ens dona l'embedding $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ per oberts Ω de $\mathbb{R}^n$ acotats i amb frontera prou regular. Com que Ω és acotat i per tant té mesura finita, obtenim automàticament l'embedding $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ per qualsevol $q \in [1, p^*]$ ja que

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}$$

on C depèn només de p^*, q i Ω. El teorema de Rellich-Kondrakov que veurem a continuació ens diu que aquest embedding és compacte si $q \in [1, p^*)$. La propietat de compacitat resultarà ser d'una gran importància en l'estudi d'EDPs.

Definició 2.24. *Siguin X i Y espais de Banach tals que $X \subset Y$. Diem que X està inclòs de manera compacte en Y o que l'embedding de X en Y és compacte i ho denotarem*

$$X \subset\subset Y,$$

si

(i) $\|u\|_Y \leq C\|u\|_X$ *per tot* $u \in X$ *on* C *és una constant positiva.*

(ii) Tota successió acotada de X és precompacte en Y, és a dir, tota successió acotada $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ de X té alguna parcial $(u_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ convergent en Y:

$$\lim_{j\to\infty} \|u_{k_j} - u\|_Y = 0.$$

Teorema 2.25 (Teorema de compacitat de Rellich-Kondrakov)**.** *Sigui Ω un obert acotat de $\mathbb{R}^n$ amb frontera C^1. Suposem que $1 \leq p < n$. Aleshores*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$$

per tota $1 \leq q < p^*$.

Demostració. Sigui $1 \leq q < p^*$. Com que Ω és acotat, la desigualtat de Sobolev ens dona

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Ens queda provar que l'embedding és compacte, és a dir, que tota successió acotada de $W^{1,p}(\Omega)$ té una parcial convergent a $L^q(\Omega)$. Farem la demostració en diversos pasos:

1. Sigui $(u_m)_{m=1}^{\infty}$ una successió acotada de $W^{1,p}(\Omega)$. Aplicant el teorema d'extensió 2.15 podem suposar sense perdre generalitat que $\Omega = \mathbb{R}^n$ i que les funcions u_m tenen totes suport compacte en un obert acotat $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$. A més a més, també podem suposar que
$$\sup_m \|u_m\|_{W^{1,p}(\Omega')} < \infty. \tag{2.10}$$

2. Considerem les funcions C^∞
$$u_m^\varepsilon := u_m * \varphi_\varepsilon \quad \varepsilon > 0, \;\; m = 1, 2, \ldots$$

on φ_ε són els mol·lificadors estàndard. Com que $\text{supp}(u_m) \subset \Omega'$ per tot m, ampliant l'obert Ω' si és necessari podem suposar que les funcions u_m^ε també tenen totes suport a Ω'. Afirmem que

$$u_m^\varepsilon \to u_m \quad \text{en } L^q(\Omega') \text{ quan } \varepsilon \to 0, \text{ uniformement en } m. \tag{2.11}$$

Per demostrar-ho, observem que si u_m és C^∞, aleshores

$$\begin{aligned} u_m^\varepsilon(x) - u_m(x) &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(x,\varepsilon)} \varphi\left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right)(u_m(z) - u_m(x))\, dz \\ &= \int_{B(0,1)} \varphi(y)(u_m(x - \varepsilon y) - u_m(x))\, dy \\ &= \int_{B(0,1)} \varphi(y) \int_0^1 \frac{d}{dt}(u_m(x - \varepsilon t y))\, dt dy \\ &= -\varepsilon \int_{B(0,1)} \varphi(y) \int_0^1 \nabla u_m(x - \varepsilon t y) \cdot y\, dt dy. \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} |u_m^\varepsilon(x) - u_m(x)|\, dx &\leq \varepsilon \int_{B(0,1)} \varphi(y) \int_0^1 \int_{\Omega'} |\nabla u_m(x - \varepsilon t y)|\, dx dt dy \\ &\leq \varepsilon \int_{\Omega'} |\nabla u_m(z)|\, dz. \end{aligned}$$

En el cas general $u_m \in W^{1,p}(\Omega')$, aproximant u_m per funcions C^∞ obtenim que u_m també satisfà aquesta última acotació. En conseqüència,

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(\Omega')} \leq \varepsilon \|\nabla u_m\|_{L^1(\Omega')} \leq \varepsilon C \|\nabla u_m\|_{L^p(\Omega')}$$

ja que Ω' és acotat. Per (2.10) deduïm

$$u_m^\varepsilon \to u_m \quad \text{en } L^1(\Omega') \text{ quan } \varepsilon \to 0, \text{ uniformement en } m. \tag{2.12}$$

Sigui $0 < \theta < 1$ tal que $\frac{1}{q} = \theta + \frac{1-\theta}{p^*}$. Aleshores tenim

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} |u_m^\varepsilon - u_m|^q\, dx &= \int_{\Omega'} |u_m^\varepsilon - u_m|^{\theta q} |u_m^\varepsilon - u_m|^{(1-\theta) q}\, dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega'} |u_m^\varepsilon - u_m|^{\theta q \frac{1}{\theta q}}\, dx\right)^{\theta q} \left(\int_{\Omega'} |u_m^\varepsilon - u_m|^{(1-\theta) q \frac{p^*}{(1-\theta) q}}\, dx\right)^{\frac{(1-\theta) q}{p^*}} \end{aligned}$$

i per tant

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(\Omega')} \leq \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(\Omega')}^\theta \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^{p^*}(\Omega')}^{1-\theta}.$$

La desigualtat de Sobolev i (2.10) ens permet obtenir l'acotació

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(\Omega')} \leq C \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(\Omega')}^\theta$$

la qual juntament amb (2.12) impliquen l'afirmació (2.11).

3. A continuació demostrem que fixat $\varepsilon > 0$, la successió $(u_m^\varepsilon)_{m=1}^\infty$ és equicontínua i uniformement acotada.

Sigui $x \in \mathbb{R}^n$. Aleshores

$$\begin{aligned}|u_m^\varepsilon(x)| &\leq \int_{B(x,\varepsilon)} \varphi_\varepsilon(x-y)|u_m(y)|\,dy \\ &\leq \|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|u_m\|_{L^1(\Omega')} \leq \frac{C}{\varepsilon^n} < \infty\end{aligned}$$

per tota $m \geq 1$. Això ens dona l'acotació uniforme de la successió. Per veure l'equicontinuïtat, observem que

$$\begin{aligned}|\nabla u_m^\varepsilon(x)| &\leq \int_{B(x,\varepsilon)} |\nabla\varphi_\varepsilon(x-y)||u_m(y)|\,dy \\ &\leq \|\nabla\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|u_m\|_{L^1(\Omega')} \leq \frac{C}{\varepsilon^{n+1}} < \infty\end{aligned}$$

per tota $m \geq 1$. Per tant, ∇u_m^ε està uniformement acotat per tota m d'on deduïm que la successió $(u_m^\varepsilon)_{m=1}^\infty$ és equicontínua.

4. Fixem ara $\delta > 0$ i demostrem que existeix una parcial $(u_{m_j})_{j=1}^\infty$ de $(u_m)_{m=1}^\infty$ tal que

$$\limsup_{j,k\to\infty} \|u_{m_j} - u_{m_k}\|_{L^q(\Omega')} \leq \delta. \tag{2.13}$$

Per (2.11), existeix $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(\Omega')} \leq \frac{\delta}{2} \tag{2.14}$$

per tota $m \geq 1$. Com que les funcions u_m^ε tenen suport en l'obert acotat $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$, podem usar el pas 3 i el teorema d'Arzela-Ascoli per obtenir una parcial $(u_{m_j}^\varepsilon)_{j=1}^\infty$ de $(u_m^\varepsilon)_{m=1}^\infty$ que convergeixi uniformement en Ω'. En particular,

$$\limsup_{j,k\to\infty} \|u_{m_j}^\varepsilon - u_{m_k}^\varepsilon\|_{L^q(\Omega')} = 0. \tag{2.15}$$

Però aleshores (2.14) i (2.15) impliquen

$$\limsup_{j,k\to\infty} \|u_{m_j} - u_{m_k}\|_{L^q(\Omega')} \leq \delta$$

com volíem veure.

5. Finalment, usem l'afirmació (2.13) per obtenir una successió parcial convergent en $L^q(\Omega')$ fent un argument diagonal.

Comencem prenent $\delta = 1$. Per (2.13), existeix una parcial $(u_{1,k})_{k=1}^\infty$ de $(u_m)_{m=1}^\infty$ tal que

$$\limsup_{j,k\to\infty} \|u_{1,j} - u_{1,k}\|_{L^q(\Omega')} \leq 1$$

i per tant, existeix $k_1 \geq 1$ tal que per tot $j, k \geq k_1$,

$$\|u_{1,j} - u_{1,k}\|_{L^q(\Omega')} \leq 2.$$

Eliminant els k_1 primers termes de $(u_{1,k})_{k=1}^\infty$ podem suposar que l'acotació anterior es compleix per tot $j, k \geq 1$. Ara iterem aquest argument per construir successions parcials de la següent manera: construïda la successió $(u_{l,k})_{k=1}^{\infty}$, apliquem (2.13) amb $\delta = \frac{1}{l+1}$ per obtenir una parcial $(u_{l+1,k})_{k=1}^{\infty}$ de $(u_{l,k})_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$\limsup_{j,k\to\infty} \|u_{l+1,j} - u_{l+1,k}\|_{L^q(\Omega')} \leq \frac{1}{l+1}.$$

En conseqüència, existeix $k_{l+1} \geq 1$ tal que per tot $j, k \geq k_{l+1}$,

$$\|u_{l+1,j} - u_{l+1,k}\|_{L^q(\Omega')} \leq \frac{2}{l+1}$$

i eliminant els k_{l+1} primers termes de la successió podem suposar que aquesta acotació es compleix per tot $j, k \geq 1$.

Per acabar la demostració, considerem la successió $(u_{k,k})_{k=1}^{\infty}$. Per construcció, aquesta successió és una parcial de $(u_m)_{m=1}^{\infty}$ i satisfà que per tot $j \geq k \geq 1$,

$$\|u_{j,j} - u_{k,k}\| \leq \frac{2}{k}.$$

Per tant,

$$\limsup_{j,k\to\infty} \|u_{j,j} - u_{k,k}\|_{L^q(\Omega')} = 0$$

i $(u_{k,k})_{k=1}^{\infty}$ és convergent en $L^q(\Omega')$.

$\square$

Observació 2.26. Notem que

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$$

per $q \in [1, p^*)$ fins i tot si la frontera de Ω no és C^1. En efecte, com que les funcions $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tenen traça zero, la seva extensió a $\mathbb{R}^n$ per zero pertany a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. En conseqüència, no necessitem usar el teorema d'extensió 2.15 i podem eliminar la hipòtesi que $\partial\Omega$ sigui C^1.

3 Càlcul de variacions

Després d'haver definit i estudiat els espais de Sobolev, el següent pas per poder tractar el problema de Yamabe és introduir el càlcul de variacions. El càlcul de variacions és un seguit de tècniques i mètodes usats per provar l'existència de solucions d'EDPs. Hi ha un gran nombre de tècniques diferents segons el tipus d'equació que s'estigui tractant, però per l'equació de Yamabe només necessitarem els anomenats mètodes directes. Dediquem aquesta secció a introduir-los començant per definir un nou tipus de convergència en espais de Hilbert que, com veurem, serà imprescindible en l'aplicació dels mètodes directes. A continuació estudiarem de manera resumida dues EDPs clàssiques en $\mathbb{R}^n$ amb l'objectiu de mostrar en què consisteixen conceptualment els mètodes directes i com s'apliquen. No seguim cap referència concreta però una bona referència sobre mètodes variacionals que s'ha consultat per aquest treball és Struwe [8].

3.1 Convergència feble en espais de Hilbert

És fàcil comprovar que en un espai vectorial normat de dimensió finita tota successió acotada té una parcial convergent. Ara bé, en espais de dimensió infinita el mateix resultat ja no és vàlid. Això suposa un problema quan treballem amb espais de funcions com per exemple els espais de Sobolev. A continuació introduirem una noció de convergència més feble que ens permetrà obtenir un resultat semblant al que tenim en dimensió finita, però per a espais de dimensió infinita. Tot i que aquesta convergencia feble es pot definir en un context més general d'espais de Banach, ens limitarem a estudiar-la en espais de Hilbert que seran el context en què la usarem. Tots els espais de Hilbert que considerarem seran reals.

Definició 3.1. *Sigui H un espai de Hilbert. Donada una successió $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ de H, diem que x_m convergeix feblement a $x \in H$ quan $m \to \infty$ i ho denotem*

$$x_m \rightharpoonup x,$$

si per tot $y \in H$

$$\langle x_m, y \rangle \to \langle x, y \rangle \quad \text{quan } m \to \infty.$$

Observació 3.2. El límit d'una successió $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ convergent feblement és únic. En efecte, donats $x, x' \in H$ tals que $x_m \rightharpoonup x$ i $x_m \rightharpoonup x'$, aleshores per tot $y \in H$

$$\langle x, y \rangle = \lim_{m \to \infty} \langle x_m, y \rangle = \langle x', y \rangle$$

i per tant $x = x'$.

Observació 3.3. Si $x_m \to x$, aleshores per la desigualtat de Cauchy-Schwarz

$$|\langle x_m - x, y \rangle| \leq \|x_m - x\| \cdot \|y\|$$

per tant $x_m \rightharpoonup x$. En altres paraules, la convergència en norma en H implica convergència feble.

Observació 3.4. En l'espai ℓ^2 de successions de quadrat sumable, considerem la successió $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ de successions de ℓ^2 on $a_n = (\delta_n^k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$. En altres paraules, a_n és la successió que és 1 en el terme n-èssim i 0 en la resta de termes. Clarament a no convergeix a cap successió en ℓ^2, però per qualsevol $b = (b_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$ tenim

$$\langle a_n, b \rangle_{l^2} = \sum_{k \geq 1} \delta_n^k b_k = b_n \to 0 \quad \text{quan } n \to \infty$$

ja que $\sum_n |b_n|^2 < \infty$ i per tant $b_n \to 0$. En conseqüència $a_n \rightharpoonup 0$ en ℓ^2 però no convergeix fortament.

Les observacions anteriors mostren que la noció de convergència que hem definit fa justícia al seu nom i és realment més feble que la convergència en norma de l'espai. A continuació veiem que aquesta convergència feble sí que ens permet assegurar que les successions acotades són convergents.

Proposició 3.5. *Sigui H un espai de Hilbert i sigui $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ una successió acotada de H, és a dir, tal que*

$$\sup_{m \geq 1} \|x_m\| < \infty.$$

Aleshores existeix una parcial $(x_{m_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ i $x \in H$ tal que

$$x_{m_k} \xrightharpoonup[k \to \infty]{} x.$$

Demostració. Considerem l'espai Y generat pels vectors de la successió $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ i $H_0 = \overline{Y}$. Clarament H_0 és un subespai tancat de H i a més a més és separable ja que el conjunt de combinacions lineals finites de $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ amb coeficients racionals és numerable i dens en H_0. Sigui $\{y_j : j \geq 1\}$ un conjunt numerable i dens en H_0.

Per cada y_j, la successió $(\langle x_m, y_j \rangle)_{m=1}^{\infty}$ està acotada en $\mathbb{R}$ i per tant té una parcial convergent. Fent un argument diagonal amb $y_1, y_2, \ldots$, obtenim una parcial $(x_{m_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} \langle x_{m_k}, y_j \rangle = a_j \in \mathbb{R}$$

per cada $j \leq k$. Comprovem que $(\langle x_{m_k}, y \rangle)_{k=1}^{\infty}$ convergeix en $\mathbb{R}$ per tot $y \in H_0$. Posem

$$M = \sup_{m \geq 1} \|x_m\| < \infty.$$

Donat $\varepsilon > 0$, existeix $N > 0$ tal que

$$\|y - y_N\| < \varepsilon$$

ja que $\{y_j : j \geq 1\}$ és dens en H_0. Com que $(\langle x_{m_k}, y_N \rangle)_{k=1}^{\infty}$ és una successió convergent en $\mathbb{R}$, en particular és de Cauchy. Per tant, existeix $k_0 \geq 1$ tal que per tot $k, l \geq k_0$

$$|\langle x_{m_k}, y_N \rangle - \langle x_{m_l}, y_N \rangle| = |\langle x_{m_k} - x_{m_l}, y_N \rangle| < \varepsilon.$$

Aleshores per tot $k, l \geq k_0$

$$\begin{aligned}
|\langle x_{m_k}, y \rangle - \langle x_{m_l}, y \rangle| &= |\langle x_{m_k} - x_{m_l}, y - y_N + y_N \rangle| \\
&\leq |\langle x_{m_k}, y - y_N \rangle| + |\langle x_{m_l}, y_N - y \rangle| + |\langle x_{m_k} - x_{m_l}, y_N \rangle| \\
&\leq 2M \|y - y_N\| + |\langle x_{m_k} - x_{m_l}, y_N \rangle| \\
&< (2M + 1)\varepsilon.
\end{aligned}$$

En conseqüència, $(\langle x_{m_k}, y\rangle)_{k=1}^{\infty}$ és una successió de Cauchy en $\mathbb{R}$ per tot $y \in H_0$ d'on deduïm que és convergent per tot $y \in H_0$. Sigui $f : H_0 \to \mathbb{R}$ la funció definida puntualment com

$$f(y) := \lim_{k\to\infty} \langle x_{m_k}, y\rangle.$$

Clarament f és lineal i per la desigualtat de Cauchy-Schwarz

$$|f(y)| \leq \|x_m\|\|y\| \leq M\|y\|$$

per tot $y \in H_0$. Per tant, $f \in H_0^*$ i pel teorema de representació de Riesz existeix $x \in H_0$ tal que $f(y) = \langle x, y\rangle$. En altres paraules,

$$\langle x_{m_k}, y\rangle \xrightarrow[k\to\infty]{} \langle x, y\rangle$$

per tot $y \in H_0$.

Per acabar, sigui P la projecció ortogonal de H en el subespai tancat H_0. Aleshores per tot $y \in H$ i $k \geq 1$ tenim que

$$\langle x_{m_k}, y - P(y)\rangle = 0 = \langle x, y - P(y)\rangle.$$

Per tant, com que $P(y) \in H_0$

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \langle x_{m_k}, y\rangle &= \lim_{k\to\infty} \langle x_{m_k}, y - P(y) + P(y)\rangle \\
&= \langle x, y - P(y)\rangle + \lim_{k\to\infty} \langle x_{m_k}, P(y)\rangle \\
&= \langle x, y\rangle.
\end{aligned}$$

□

Aprofitem per acabar aquesta secció introduint un concepte de semicontinuïtat que és de gran importància en l'estudi variacional d'EDPs i que usarem quan veiem l'equació de Yamabe.

Definició 3.6. *Sigui H un espai de Hilbert i $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$ una funció amb valors en la recta real ampliada. Diem que f és semicontínua inferiorment en sentit feble si*

$$f(x) \leq \liminf_{m\to\infty} f(x_m)$$

per tota successió $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ de H i $x \in H$ tal que $x_m \rightharpoonup x$.

Observació 3.7. En un espai de Hilbert la norma és semicontínua inferiorment en sentit feble. En efecte, sigui $x \in H$ i $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ una successió de H tal que $x_m \rightharpoonup x$. Per la desigualtat de Cauchy-Schwarz

$$\langle x_m, x\rangle \leq |\langle x_m, x\rangle| \leq \|x_m\| \cdot \|x\|.$$

Per tant, com que $x_m \rightharpoonup x$,

$$\|x\|^2 = \liminf_{m\to\infty} \langle x_m, x\rangle \leq \|x\| \cdot \liminf_{m\to\infty} \|x_m\|$$

i obtenim

$$\|x\| \leq \liminf_{m\to\infty} \|x_m\|.$$

3.2 Mètodes variacionals

Suposem que tenim una equació en derivades parcials que escrivim en forma abstracte com

$$A(u) = 0 \tag{3.1}$$

on A és un operador diferencial (possiblement no lineal) i u és la funció incògnita. En general no hi ha un mètode únic per buscar la solució d'aquesta equació, però per certes famílies d'equacions sí que tenim una mètode "general" per resoldre-les. Aquest és el cas dels mètodes variacionals, els quals permeten demostrar l'existència de solucions d'un gran nombre d'EDPs on A és la "derivada" d'alguna funció I. En aquest cas s'obté

$$I'(u) = A(u) = 0.$$

En altres paraules, buscar la solució u de (3.1) és equivalent a trobar punts crítics de I que en la majoria dels casos són mínims I. A la funció I també se l'anomena funcional perquè la seva variable és una funció. A continuació mostrem dos exemples d'equacions en $\mathbb{R}^n$ per veure de manera més concreta com es poden usar tècniques variacionals per resoldre EDPs.

Exemple 3.8. El primer exemple és el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{a } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

on $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ és un domini acotat amb frontera prou regular (C^1 per exemple) i la funció g és coneguda. Usarem aquest primer exemple senzill per veure com s'associa un funcional I a (3.2) i com els mínims d'aquest funcional es relacionen amb les solucions de l'equació.

Considerem el funcional

$$I(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx$$

definit en el conjunt $\mathcal{A} = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = g\}$. Notem que si $u \in \mathcal{A}$, aleshores $u + \varepsilon v \in \mathcal{A}$ per qualsevol $v \in H_0^1(\Omega)$ perquè $v|_{\partial\Omega} = 0$. Suposem que u és un mínim de I. Aleshores $I(u) \leq I(u + \varepsilon v)$ per qualsevol $v \in H_0^1(\Omega)$ o equivalentment, per cada $v \in H_0^1(\Omega)$ fixada, la funció $I(u + \varepsilon v)$ té un mínim en $\varepsilon = 0$. Per tant,

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} I(u + \varepsilon v) = 0.$$

En conseqüència,

$$\begin{aligned} 0 = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} I(u + \varepsilon v) &= \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 + 2\varepsilon \nabla u \cdot \nabla v + \varepsilon^2 |\nabla v|^2)\, dx \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx. \end{aligned}$$

Així doncs, si u és un mínim de I, aleshores

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx = 0 \quad \text{per tota } v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.3}$$

Fàcilment es comprova que el recíproc també és cert i per tant u satisfà (3.3) si i només si u és un mínim de I. Anomenem a qualsevol funció $u \in \mathcal{A}$ que compleixi (3.3) solució feble o generalitzada. El motiu d'aquest nom és que si u és una solució feble prou regular (per exemple $u \in C^2$), integrant per parts s'obté

$$\int_\Omega \Delta u v \, dx = 0 \quad \text{per tota } v \in H_0^1(\Omega).$$

En particular, l'equació anterior es compleix per tota $v \in C_c^\infty(\Omega)$ i deduïm que $\Delta u = 0$ en Ω. D'aquesta manera hem obtingut un mètode per trobar solucions de (3.2). Primer busquem funcions $u \in \mathcal{A}$ que minimitzin I, les quals seran automàticament solucions febles de l'equació. Un cop trobada alguna solució feble, provem la seva regularitat i així obtenim una solució de (3.2).

Acabem aquest exemple donant una idea de com es demostra l'existència d'un mínim de I (amb la hipòtesi que $\mathcal{A} \neq \emptyset$ ja que en cas contrari no hi ha res a minimitzar). Sigui

$$\mu := \inf_{u \in \mathcal{A}} I(u).$$

Notem que $\mu \geq 0$ ja que $I(u) \geq 0$ per tot $u \in \mathcal{A}$. Per provar que l'ínfim s'assoleix es considera una successió $(u_m)_{m=1}^\infty$ que minimitzi I, és a dir, tal que

- $u_m \in H^1(\Omega)$
- $u_m|_{\partial\Omega} = g$
- $I(u_m) \to \mu$ quan $m \to \infty$.

A continuació es demostra que la successió està uniformement acotada en $H^1(\Omega)$ per obtenir l'existència d'una parcial $(u_{m_k})_{k=1}^\infty$ convergent feblement a $u \in H^1(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$. Pel teorema de Rellich-Kondrakov, l'embedding $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ és compacte i d'aqui es dedueix que $u_{m_k} \to u$ fortament en $L^2(\Omega)$. La compacitat de l'operador traça (no s'ha vist en aquest treball) implica que $u_{m_k}|_{\partial\Omega} \to u|_{\partial\Omega}$ en $L^2(\partial\Omega)$ i per tant $u|_{\partial\Omega} = g$. Combinant les convergencies en $H^1(\Omega)$ i $L^2(\Omega)$ de u_{m_k} i el fet que la norma $H^1(\Omega)$ és semicontínua inferiorment en sentit feble s'obté

$$I(u) \leq \liminf_{k \to \infty} I(u_{m_k}) = \mu.$$

Finalment, com que $u \in H^1(\Omega)$ i $u|_{\partial\Omega} = g$, $u \in \mathcal{A}$. En particular, $\mu \leq I(u) \leq \mu$ i u és un mínim de I.

Exemple 3.9. En aquest segon exemple veurem l'equació

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{a } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.4}$$

on de nou $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ és un domini acotat i amb frontera prou regular i $\lambda \in \mathbb{R}$ és un valor desconegut. L'objectiu d'aquest exemple és veure el funcional d'una equació on tenim un paràmetre desconegut. Veurem que si u és un mínim del funcional associat a (3.4), el valor del funcional en u serà exactament el valor λ amb el qual u és solució de (3.4).

Considerem el funcional

$$I(u) := \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx}{\int_\Omega u^2 \, dx} = \frac{\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2}$$

definit en el conjunt $\{u \in H^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\} = H_0^1(\Omega)$ i suposem que u és un mínim de I. Aleshores com en l'exemple anterior, per tota funció $v \in H_0^1(\Omega)$ tenim $I(u) \leq I(u + \varepsilon v)$ o equivalentment,

$$\frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} I(u + \varepsilon v) = 0$$

per cada $v \in H_0^1(\Omega)$ fixada. Per tant,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} I(u + \varepsilon v) \\
&= \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \frac{\int_\Omega (|\nabla u|^2 + 2\varepsilon \nabla u \cdot \nabla v + \varepsilon^2 |\nabla v|^2)\, dx}{\int_\Omega (u^2 + 2\varepsilon uv + \varepsilon^2 v^2)\, dx} \\
&= \frac{\left(\int_\Omega u^2\, dx\right)\left(2\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx\right) - \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)\left(2\int_\Omega uv\, dx\right)}{\left(\int_\Omega u^2\, dx\right)^2} \\
&= \frac{2\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx - 2I(u)\int_\Omega uv\, dx}{\int_\Omega u^2\, dx}.
\end{aligned}$$

En conseqüència, si u és un mínim de I, aleshores

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx = I(u) \int_\Omega uv\, dx \quad \text{per tot } v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.5}$$

En aquest cas una solució feble de (3.4) és qualsevol funció que compleixi (3.5). Suposant que hem demostrat la regularitat de u, integrant per parts obtenim

$$-\int_\Omega \Delta uv\, dx = I(u) \int_\Omega uv\, dx \quad \text{per tot } v \in H_0^1(\Omega)$$

i com en l'exemple anterior, deduïm que $-\Delta u = I(u)u$ en Ω. Per tant, u és solució de (3.4) amb $\lambda = I(u)$.

Com veurem més endavant, l'equació de Yamabe té la forma

$$-a\Delta u + h(x)u = \lambda u^{p-1},$$

on $a > 0$, h és una funció C^∞ i $\lambda \in \mathbb{R}$ és un valor desconegut. Aquesta equació té un funcional associat que s'obté de manera semblant al que acabem de veure. No aprofundirem més en com es minimitza I ja que veurem un procés de resolució semblant quan estudiem el problema de Yamabe.

4 Geometria riemanniana

Ara que ja hem definit i estudiat tots els conceptes analítics necessaris, passem a introduir els conceptes geomètrics que usarem per enunciar i tractar el problema de Yamabe. Per un costat definirem el concepte de mètrica riemanniana i a partir d'aquesta podrem definir la curvatura escalar. Per un altre costat, necessitarem introduir una manera d'integrar funcions en varietats a fi de poder extendre els espais de Sobolev a varietats riemannianes. Per últim, també ens caldrà introduir el gradient i el laplacià en varietats perquè són els operadors diferencials que trobem en l'equació de Yamabe. Durant la primera part de la secció seguirem principalment a Carmo [3] i Lee [5]. A partir de la secció d'integració en varietats seguim Aubin [2] i Amann i Escher [1].

Aprofitem aquesta secció per introduir el conveni de sumació d'Einstein que usarem durant la resta del treball. Si en qualsevol terme d'una expressió trobem un mateix índex repetit dos cops, un com a subíndex i l'altre com a superíndex, aleshores s'entén que el terme s'està sumant sobre el rang de l'índex en qüestió. Per exemple, les expressions

$$v^i e_i \qquad \sum_{i=1}^{n} v^i e_i$$

són equivalents. Sempre usarem subíndexs per denotar vectors i superíndexs per a les seves components i per contra, usarem superíndexs per les formes lineals (o covectors) i subíndexs per les seves components. Per mantenir una notació consistent amb aquest conveni denotarem les coordenades amb superíndexs en comptes de subíndex com és més habitual.

4.1 Tensors i camps tensorials

Un objecte central en l'estudi de la geometria riemanniana son els camps tensorials. A continuació repassem els conceptes més importants de tensors i camps tensorials que necessitarem més endavant.

Definició 4.1. *Sigui V un espai vectorial real de dimensió finita i $k, l \in \mathbb{N}$. Un tensor de tipus (k, l) o (k, l)-tensor és una aplicació multilineal*

$$T : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ còpies}} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l \text{ còpies}} \to \mathbb{R}.$$

Denotem per $T^k_l(V)$ l'espai de tensors (k, l) i per conveni $T^0_0(V) = \mathbb{R}$. Si T és un (k, l)-tensor, el nombre $k + l$ s'anomena rang del tensor.

Tenim algunes identificacions evidents com $T^1_0(V) = V^*$, $T^0_1(V) = V^{**} \cong V$. Una altra identificació menys evident és $T^1_1(V) \cong \mathrm{End}(V)$. En general, es demostra fàcilment que $T^k_{l+1}(V)$ és isomorf a l'espai d'aplicacions multilineals

$$\underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l} \to V.$$

Hi ha un producte natural de tensors anomenat producte tensorial que ens relaciona els espais de tensors de V. Si $T \in T^k_l(V)$ i $S \in T^p_q(V)$, aleshores $T \otimes S \in T^{k+p}_{l+q}(V)$ es defineix com

$$T \otimes S(v_1, \ldots, v_{k+p}, \omega^1, \ldots, \omega^{l+q})$$
$$= T(v_1, \ldots, v_k, \omega^1, \ldots, \omega^l) S(v_{k+1}, \ldots, v_{k+p}, \omega^{l+1}, \ldots, \omega^{l+q}).$$

Amb aquest producte s'obté que si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ és una base de V i $\{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$ és la seva base dual, aleshores el conjunt $\{\varphi^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l}\}_{1 \leq i_p, j_q \leq n}$ és una base de $T_l^k(V)$. En altres paraules, tot tensor $T \in T_l^k(V)$ es pot escriure en aquesta base com

$$T = T_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_l} \varphi^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l}$$

on

$$T_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_l} = T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}, \varphi^{j_1}, \ldots, \varphi^{j_l}).$$

Si una aplicació multilineal té k vectors i l formes com a arguments la seguirem anomenant tensor encara que els arguments no estiguin en l'ordre de la definició. En aquest cas la posició dels índexs de les seves components indica quins arguments són vectors i quins són formes. Per exemple, si B és un tensor $(2,1)$ i el seu primer argument és un vector, el segon és una forma i el tercer és un vector, aleshores les seves components s'escriuen.

$$B_i{}^j{}_k = B(e_i, \varphi^j, e_k). \tag{4.1}$$

Podem extendre la traça d'un endomorfisme a una operació natural anomenada traça o contracció que redueix el rang d'un tensor. Més concretament, definim $\operatorname{tr} : T_{l+1}^{k+1}(V) \to T_l^k(V)$ de manera que $\operatorname{tr} T(v_1, \ldots, v_k, \omega^1, \ldots, \omega^l)$ és la traça de l'endomorfisme

$$T(v_1, \ldots, v_k, \cdot, \omega^1, \ldots, \omega^l, \cdot) \in T_1^1(V) \cong \operatorname{End}(V).$$

Donada una base, $\operatorname{tr} T$ té components

$$(\operatorname{tr} T)_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_l} = T_{i_1 \ldots i_k m}^{j_1 \ldots j_l m}.$$

En general podem contreure qualsevol tensor en qualsevol parella d'índexs sempre i quan un correspongui a un vector i l'altre a una forma. Per exemple, si fem la contracció del tensor B amb les components donades per (4.1) en el primer i segon índex, obtenim el tensor A de rang 1 i amb components $A_k = B_i{}^i{}_k$.

Definició 4.2. *Sigui M una varietat diferenciable. Un camp tensorial de tipus (k,l) en M és una assignació T que envia cada punt $p \in M$ a un tensor $T(p) = T_p \in T_l^k(T_pM)$. Donada una carta $(U, (x^i))$ de M podem expressar localment T com*

$$T = T_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_l} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k} \otimes \partial_{j_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{j_l}$$

on $T_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_l}$ són funcions anomenades components de T en la carta $(U, (x^i))$. Direm que T és diferenciable si per cada carta les components de T són funcions diferenciables.

Denotarem l'espai de camps tensorials diferenciables de tipus (k,l) per $\mathcal{T}_l^k(M)$. Similar a l'espai de camps vectorials $\mathfrak{X}(M)$, l'espai $\mathcal{T}_l^k(M)$ és un $\mathbb{R}$-espai vectorial i un $C^\infty(M)$-mòdul. Observem que $\mathcal{T}_0^1(M)$ és l'espai de 1-formes $\Omega^1(M)$, $\mathcal{T}_1^0(M)$ és l'espai de camps vectorials $\mathfrak{X}(M)$ i per conveni $\mathcal{T}_0^0(M) = C^\infty(M)$.

Una manera alternativa i molt habitual d'entendre els camps tensorials és pensant-los com a aplicacions $C^\infty(M)$-multilineals de $\mathfrak{X}(M)$ i $\Omega^1(M)$ a $\mathfrak{X}(M)$ o $C^\infty(M)$. Més concretament, donat un camp tensorial $T \in \mathcal{T}^k_l(M)$, la condició de diferenciabilitat de T és equivalent a que la funció $T(X_1, \ldots, X_k, \omega^1, \ldots, \omega^l) : M \to \mathbb{R}$ definida per

$$T(X_1, \ldots, X_k, \omega^1, \ldots, \omega^l)(p) = T_p((X_1)_p, \ldots, (X_k)_p, \omega^1_p, \ldots, \omega^l_p)$$

sigui diferenciable per qualssevol $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ i $\omega^j \in \Omega^1(M)$. Per tant, T indueix una aplicació

$$T : \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \times \Omega^1(M) \times \cdots \times \Omega^1(M) \to C^\infty(M)$$

que és multilineal sobre $C^\infty(M)$. Recíprocament, tenim el següent lema (per a una demostració vegeu Lee [6, pàg. 318]):

Lema 4.3. *Una aplicació*

$$\tau : \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \times \Omega^1(M) \times \cdots \times \Omega^1(M) \to C^\infty(M)$$

determina un camp tensorial (k, l) si i només si és $C^\infty(M)$-multilineal. Similarment, una aplicació

$$\tau : \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \times \Omega^1(M) \times \cdots \times \Omega^1(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

determina un camp tensorial $(k, l+1)$ si i només si és $C^\infty(M)$-multilineal.

4.2 Varietats riemannianes

Definició 4.4. *Sigui M una varietat diferenciable. Una mètrica riemanniana en M és un camp tensorial $g \in \mathcal{T}^2_0(M)$ simètric i definit positiu, és a dir, un camp tensorial tal que g_p és simètric i definit positiu en T_pM per tot $p \in M$. En altres paraules, g_p és un producte escalar en T_pM per tot $p \in M$.*

Definició 4.5. *Una varietat riemanniana és una parella (M, g) on M és una varietat diferencial i g és una mètrica riemanniana en M.*

Si no hi ha perill de confusió, eliminarem el subíndex p i escriurem $g(X, Y)$ per denotar el producte escalar de dos vectors $X, Y \in T_pM$. A més a més, és habitual usar la notació $\langle X, Y\rangle$ en lloc de $g(X, Y)$. Igual que en un espai euclidià, la mètrica g indueix una norma $|X| = \langle X, X\rangle^{1/2}$ en T_pM i ens permet definir l'angle entre dos vectors $X, Y \in T_pM$ com l'únic valor $\theta \in [0, \pi]$ tal que $\cos\theta = \langle X, Y\rangle/(|X||Y|)$. Pel que fa a l'expressió local de g, donat un obert coordenat U la mètrica té la forma

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

on les components g_{ij} formen una matriu simètrica i definida positiva.

Una propietat important de la mètrica riemanniana és que ens permet obtenir un isomorfisme natural entre TM i T^*M. En efecte, podem definir l'aplicació $\flat : TM \to T^*M$ que envia un vector X a la forma $X^\flat$ definida per

$$X^\flat(Y) \coloneqq \langle X, Y\rangle.$$

En coordenades,

$$X^\flat = \langle X^i\partial_i, \cdot\rangle = g_{ij}X^i dx^j.$$

És habitual escriure aquesta expressió com $X^\flat = X_j dx^j$ on $X_j \coloneqq g_{ij}X^i$ i es diu que $X^\flat$ s'obté de X baixant un índex. Aquest és el motiu pel qual s'usa la notació $\flat$ = "bemoll" que en música baixa qualsevol nota un semitò.

Com que la matriu de $\flat$ en coordenades és la matriu de g i aquesta és definida positiva, $\flat$ és invertible. Denotarem per $\sharp$ l'invers de $\flat$ que envia una forma ω a $\omega^\sharp$. A partir de les definicions de $\flat$ i $\sharp$ s'obté que $\omega^\sharp$ és l'únic vector que satisfà

$$\omega(Y) = \langle \omega^\sharp, Y \rangle$$

per tot $Y \in TM$. En coordenades $\omega^\sharp$ té components

$$\omega^i := g^{ij}\omega_j$$

on g^{ij}, per definició, són les components de la matriu inversa $(g_{ij})^{-1}$. Diem que $\omega^\sharp$ s'obté de ω elevant un índex.

Per motius evidents, els isomorfismes $\flat$ i $\sharp$ s'anomenen isomorfismes musicals. Una aplicació important d'aquests que usarem més endavant és la generalització del gradient d'una funció $f \in C^\infty(M)$. Recordem que donada una varietat M, la diferencial de f és la 1-forma definida per

$$df(X) = X(f)$$

per tot $X \in TM$ i s'expressa localment com

$$df = \partial_i f dx^i.$$

El gradient de f es defineix com el camp vectorial $\nabla f := (df)^\sharp$ i és l'únic camp vectorial que compleix

$$df(X) = \langle \nabla f, X \rangle$$

per tot camp vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$. Les seves components que denotem $\nabla^j f$ són $g^{ij}\partial_i f$ i la seva expressió local és $\nabla f = \nabla^j f \partial_j = g^{ij}\partial_i f \partial_j$.

Una altra aplicació dels isomorfismes musicals és transformar arguments d'un tensor de vectors a formes o vice versa. Per exemple, si considerem el tensor B donat per (4.1), podem baixar el seu segon índex definint el tensor $B^\flat$ com

$$B^\flat(X, Y, Z) := B(X, Y^\flat, Z).$$

En coordenades, si denotem per B_{ijk} les components de $B^\flat$ obtenim

$$B_{ijk} = g_{jl} B_i{}^l{}_k.$$

Notem que si el tensor té més d'un índex que poguem baixar o pujar, la notació en coordenades té l'avantatge d'indicar quin argument s'està modificant. En cas que s'usi l'altra notació, caldrà especificar quina posició s'està transformant.

4.3 Connexió de Levi-Civita

Per poder definir la curvatura escalar és necessari parlar de la connexió de Levi-Civita. Aquesta és una connexió natural que s'obté en qualsevol varietat riemanniana pel fet de tenir una mètrica g en la varietat. Comencem recordant el concepte de connexió:

Definició 4.6. *Una connexió afí ∇ en una varietat diferenciable M és una aplicació*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

que denotem $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ i que satisfà les següents propietats:

(i) $\nabla_X Y$ *és lineal sobre* $C^\infty(M)$ *en* X*, és a dir,*

$$\nabla_{fX_1+gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y$$

per tot $f, g \in C^\infty(M)$.

(ii) $\nabla_X Y$ *és lineal sobre* $\mathbb{R}$ *en* Y*, és a dir,*

$$\nabla_X (aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2$$

per tot $a, b \in \mathbb{R}$.

(iii) ∇ *satisfà la següent regla del producte:*

$$\nabla_X (fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y \quad \text{per tot } f \in C^\infty(M).$$

Anomenem $\nabla_X Y$ *la derivada covariant de* Y *en la direcció* X.

Observació 4.7. Notem que no hi ha perill de confondre la notació del gradient d'una funció ∇f amb la d'una connexió $\nabla_X Y$ ja que el gradient actua sobre funcions diferenciables i les connexions actuen sobre camps vectorials.

Malgrat que la definició d'una connexió ∇ és global, és un fet conegut que les propietats de ∇ fan que aquesta sigui un operador local i $(\nabla_X Y)_p$ només depengui del valor de X en p i Y en un entorn de p. Per tant, té sentit estudiar l'expressió local de ∇. Donada una carta $(U, (x^i))$ de M i $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, en U els camps X i Y s'expressen com

$$X = X^i \partial_i \qquad Y = Y^j \partial_j.$$

En conseqüència, per qualsevol connexió ∇ tenim

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_X (Y^j \partial_j) \\ &= X(Y^j)\partial_j + Y^j \nabla_{X^i \partial_i} \partial_j \\ &= X(Y^j)\partial_j + X^i Y^j \nabla_{\partial_i} \partial_j \end{aligned}$$

Com que $\nabla_{\partial_i} \partial_j$ és un camp vectorial definit en U, podem escriure $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$ amb $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$. Substituïnt en l'expressió anterior i reanomenant l'índex del primer terme ens queda

$$\nabla_X Y = (X(Y^k) + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k)\partial_k.$$

Les funcions Γ_{ij}^k s'anomenen símbols de Christoffel de ∇ en l'obert U i el càlcul anterior ens mostra que determinen completament la connexió en U.

Definició 4.8. *Sigui* (M, g) *una varietat riemanniana i* ∇ *una connexió en* M*. Diem que* ∇ *és compatible amb* g *si per qualssevol* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *se satisfà l'equació*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle.$$

Definició 4.9. *Sigui* (M, g) *una varietat riemanniana. Direm que una connexió* ∇ *és simètrica si per tot* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$*,*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Observem que per tota connexió ∇ i $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, en un entorn coordenat podem escriure $X = X^i\partial_i$, $Y = Y^j\partial_j$ i fent un càlcul s'obté

$$\begin{aligned}\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] &= (X^i Y^j \Gamma^k_{ij} - Y^j X^i \Gamma^k_{ji})\partial_k \\ &= X^i Y^j (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji})\partial_k.\end{aligned}$$

Així doncs, ∇ és simètrica si i només si $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

Teorema 4.10. *Donada una varietat riemanniana M, existeix una única connexió afí ∇ simètrica i compatible amb la mètrica de M.*

Demostració. Provarem primer la unicitat trobant una fórmula per ∇. Suposem que existeix una connexió ∇ amb les propietats que busquem. Aleshores, usant la compatibilitat amb la mètrica tenim

$$\begin{aligned}X\langle Y, Z\rangle &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \\ Y\langle Z, X\rangle &= \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle \\ Z\langle X, Y\rangle &= \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle\end{aligned}$$

per qualsevol $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Sumant les dues primeres equacions, restant la tercera i usant la simetria de la connexió s'obté

$$\begin{aligned}&X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ &\qquad = \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle + 2\langle Z, \nabla_X Y\rangle.\end{aligned}$$

En conseqüència,

$$\begin{aligned}\langle Z, \nabla_X Y\rangle = \frac{1}{2}\{&X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ &- \langle [X, Z], Y\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle\}.\end{aligned} \tag{4.2}$$

Siguin ∇^1 i ∇^2 dues connexions simètriques i compatibles amb g. Com que el membre dret de (4.2) no depèn de la connexió, deduïm que $\langle Z, \nabla^1_X Y - \nabla^2_X Y\rangle = 0$ per tot X, Y, Z, és a dir, $\nabla^1 = \nabla^2$.

Per provar l'existència usarem l'expressió (4.2) en coordenades locals. És suficient provar l'existència en cada carta de M, ja que per unicitat les connexions obtingudes coincidiran en les interseccions entre cartes. Així doncs, sigui $(U, (x^i))$ una carta de M qualsevol. Aplicant (4.2) i recordant que $[\partial_i, \partial_j] = 0$ per tot i, j, obtenim

$$\langle \nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_l\rangle = \frac{1}{2}(\partial_i\langle \partial_j, \partial_l\rangle + \partial_j\langle \partial_l, \partial_i\rangle - \partial_l\langle \partial_i, \partial_j\rangle).$$

En conseqüència,

$$\Gamma^m_{ij} g_{ml} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}).$$

Multiplicant aquesta equació per la matriu inversa g^{kl} i usant que $g_{ml}g^{lk} = \delta^k_m$ ens queda l'expressió

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})$$

que defineixen una connexió en U. És evident mirant l'equació anterior que $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ i per tant la connexió és simètrica. La comprovació que aquesta és compatible amb g és un càlcul senzill i es pot trobar a Lee [5, pàg. 68]. $\square$

La connexió del teorema anterior s'anomena connexió de Levi-Civita. La demostració de la seva existència mostra que en coordenades locals, els símbols de Christoffel d'aquesta connexió es poden calcular amb la fórmula

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}).$$

A partir d'ara sempre treballem amb la connexió de Levi-Civita en qualsevol varietat riemanniana que considerem.

4.4 Curvatura

Ara que ja hem vist que tenim una connexió natural en tota varietat riemanniana, el nostre següent objectiu és definir la curvatura escalar. Comencem per definir la curvatura més general que tenim en una varietat.

Definició 4.11. *Donada una varietat riemanniana M, el tensor de curvatura de M és el camp tensorial de tipus $(3,1)$, $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ definit per*

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

És habitual usar la notació $R(X, Y)Z$ en lloc de $R(X, Y, Z)$. Cal comprovar que R és un camp tensorial. Clarament R és multilineal sobre $\mathbb{R}$ i per tant només cal comprovar que R és $C^\infty(M)$-multilineal. Sigui $f \in C^\infty(M)$. Aleshores

$$\begin{aligned} R(fX, Y)Z &= \nabla_{fX} \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{fX} Z - \nabla_{[fX,Y]} Z \\ &= f \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y (f \nabla_X Z) - \nabla_{f[X,Y]-Y(f)X} Z \\ &= f \nabla_X \nabla_Y Z - Y(f) \nabla_X Z - f \nabla_Y \nabla_X Z - f \nabla_{[X,Y]} Z + Y(f) \nabla_X Z \\ &= f R(X, Y)Z \end{aligned}$$

i per tant R és $C^\infty(M)$-lineal en X. La comprovació per Y és semblant. Per Z tenim

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y (fZ) &= \nabla_X (Y(f)Z + f \nabla_Y Z) \\ &= X(Y(f))Z + Y(f) \nabla_X Z + X(f) \nabla_Y Z + f \nabla_X \nabla_Y Z. \end{aligned}$$

En conseqüència

$$\nabla_X \nabla_Y (fZ) - \nabla_Y \nabla_X (fZ) = f(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z) + [X, Y](f)Z$$

i per tant $R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z$.

Com a camp tensor $(3,1)$, podem escriure R en coordenades locals (x^i) com

$$R = R_{ijk}{}^{l} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \partial_l$$

on els coeficients $R_{ijk}{}^{l}$ venen donats per $R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R_{ijk}{}^{l} \partial_l$ i s'expressen en funció del símbols de Christoffel com

$$R_{ijk}{}^{l} = \partial_i \Gamma_{jk}^{l} - \partial_j \Gamma_{ik}^{l} + \Gamma_{im}^{l} \Gamma_{jk}^{m} - \Gamma_{jm}^{l} \Gamma_{ik}^{m}$$

Usant la mètrica podem transformar R en el camp tensorial $Rm := R^\flat$ de tipus $(4,0)$ donat per l'expressió

$$Rm(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle.$$

En coordenades Rm té la forma

$$Rm = R_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l$$

amb $R_{ijkl} = g_{lm} R_{ijk}{}^m$. El tensor Rm s'anomena *tensor de curvatura riemanniana* de M. La proposició següent dona les principals simetries i propietats de R i Rm:

Proposició 4.12. *Els tensors R i Rm satisfan les següents propietats:*

(i) Identitat de Bianchi:

$$\begin{gathered} R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0 \\ Rm(X,Y,Z,W) + Rm(Z,X,Y,W) + Rm(Y,Z,X,W) = 0. \end{gathered}$$

(ii) Rm és antisimètric en els dos primers arguments:

$$Rm(X,Y,Z,W) = -Rm(Y,X,Z,W).$$

(iii) Rm és antisimètric en els dos últims arguments:

$$Rm(X,Y,Z,W) = -Rm(X,Y,W,Z).$$

(iv) Rm és simètric respecte els dos primers arguments i els dos últims:

$$Rm(X,Y,Z,W) = Rm(Z,W,X,Y).$$

Demostració. (i) La segona equació es dedueix immediatament de la primera i la definició de Rm. Usant la definició de R i la simetria de la connexió obtenim

$$\begin{aligned} &R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X \\ &\quad = (\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z) + (\nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]} Y) \\ &\qquad + (\nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]} X) \\ &\quad = \nabla_X [Y,Z] + \nabla_Y [Z,X] + \nabla_Z [X,Y] - \nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_{[Z,X]} Y - \nabla_{[Y,Z]} X \\ &\quad = [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] \end{aligned}$$

que per la identitat de Jacobi del parèntesis de Lie dona 0.

(ii) Evident a partir de la definició de R i Rm.

(iii) Per linealitat és suficient provar $Rm(X,Y,Z,Z) = 0$. Donat que

$$\langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z \rangle = X \langle \nabla_Y Z, Z \rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z \rangle$$

i

$$\langle \nabla_{[X,Y]} Z, Z \rangle = \frac{1}{2} [X,Y] \langle Z, Z \rangle,$$

deduïm

$$\begin{aligned} Rm(X,Y,Z,Z) &= X \langle \nabla_Y Z, Z \rangle - Y \langle \nabla_X Z, Z \rangle - \frac{1}{2} [X,Y] \langle Z, Z \rangle \\ &= \frac{1}{2} X (Y \langle Z, Z \rangle) - \frac{1}{2} Y (X \langle Z, Z \rangle) - \frac{1}{2} [X,Y] \langle Z, Z \rangle \\ &= \frac{1}{2} [X,Y] \langle Z, Z \rangle - \frac{1}{2} [X,Y] \langle Z, Z \rangle = 0. \end{aligned}$$

(iv) Escrivint la identitat de Bianchi quatre cops permutant els arguments tenim

$$\begin{aligned}
Rm(X,Y,Z,W) + Rm(Y,Z,X,W) + Rm(Z,X,Y,W) &= 0 \\
Rm(Y,Z,W,X) + Rm(Z,W,Y,X) + Rm(W,Y,Z,X) &= 0 \\
Rm(Z,W,X,Y) + Rm(W,X,Z,Y) + Rm(X,Z,W,Y) &= 0 \\
Rm(W,X,Y,Z) + Rm(X,Y,W,Z) + Rm(Y,W,X,Z) &= 0.
\end{aligned}$$

Sumant les quatre equacions i aplicant les antisimetries dels apartats ((ii)) i ((iii)) s'obté

$$2Rm(Z,X,Y,W) + 2Rm(W,Y,Z,X) = 0$$

que és equivalent a $Rm(Z,X,Y,W) = Rm(Y,W,Z,X)$.

□

Observació 4.13. En termes de components, les simetries i identitats de la proposició anterior s'escriuen

(i) $R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0$.

(ii) $R_{ijkl} = -R_{jikl}$.

(iii) $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$.

(iv) $R_{ijkl} = R_{klij}$.

Estudiar camps tensorials de rang 4 com R i Rm és bastant complicat. És per això que es defineixen camps tensorials més senzills a partir de R i Rm que resumeixin part de la informació que aquests dos contenen. El més important d'aquests camps tensorials és la *curvatura de Ricci* o *tensor de Ricci* que es denota Ric i es defineix com la traça de R en el primer i l'últim índex. Alternativament, Ric és el camp tensorial de rang 2 que assigna a un punt $p \in M$ el tensor $Ric_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ definit per

$$Ric_p(X,Y) := \operatorname{tr}(Z \mapsto R(Z,X)Y) \quad X,Y \in T_pM.$$

Les components de Ric s'acostumen a denotar per R_{ij} i com Ric és la contracció de R, es té

$$R_{ij} := R_{kij}{}^{k} = g^{km} R_{kijm}.$$

Observem que per les simetries de Rm i g obtenim immediatament que Ric és un tensor simètric ja que

$$R_{ij} = g^{km} R_{kijm} = g^{mk} R_{mjik} = R_{ji}.$$

Finalment, estem en condicions de definir la *curvatura escalar* a partir de Ric. Com que Ric és un camp tensorial de tipus $(2,0)$, fent ús dels isomorfismes musicals podem obtenir el tensor $Ric^\sharp$ de tipus $(1,1)$. Notem que com el tensor de Ricci és simètric no importa quin dels dos índex pujem amb $\sharp$. Definim la curvatura escalar S com la traça del camp tensorial $Ric^\sharp$, és a dir,

$$S := \operatorname{tr} Ric^\sharp.$$

Les components de $Ric^\sharp$ són $R^i{}_j = g^{ik} R_{kj}$ i per tant la curvatura escalar s'escriu com

$$S = R^i{}_i = g^{ij} R_{ij}.$$

Com a observació final, notem que S és la contracció d'un tensor de rang 2 i per tant és un tensor 0. En altres paraules, S és una funció diferenciable en M.

4.5 Integració en varietats riemannianes

La teoria d'espais de Lebesgue i espais de Sobolev fa un ús extens de la integral de Lebesgue a $\mathbb{R}^n$. Per tant, si volem extendre aquests espais a varietats riemannianes serà necessari introduir una manera d'integrar en varietats. A continuació donem les idees principals de com es defineix una σ-àlgebra i una mesura natural en varietats riemannianes fent ús de la mètrica de la varietat. Ens limitarem a exposar tot el que necessitarem més endavant sense entrar en detalls ja que aquest tema pot arribar a ser molt extens i no és l'objectiu principal d'aquest treball. Al final d'aquesta secció també introduirem la divergència, el laplacià i una fórmula d'integració per parts en varietats que seran imprescindibles quan estudiem el problema de Yamabe.

Els detalls sobre el que s'explicarà a continuació pel que fa a integració en varietats es poden trobar a Amann i Escher [1, pàg. 391] i Aubin [2, pàg. 29]. Donada una varietat riemanniana (M, g) de dimensió n, diem que un conjunt $A \subset M$ és mesurable si $\varphi(A \cap U) \subset \mathbb{R}^n$ és mesurable en $\mathbb{R}^n$ per qualsevol carta (U, φ) de M. Es fàcil demostrar que el conjunt

$$\mathcal{L}_M \coloneqq \{A \subset M : A \text{ és mesurable en } M\}$$

és una σ-àlgebra en M que conté la σ-àlgebra de Borel $\mathcal{B}(M)$. Amb aquesta σ-àlgebra tenim que $(M, \mathcal{L}_M)$ és un espai mesurable.

El següent pas és construir una mesura en M definint-la primer en conjunts $A \in \mathcal{L}_M$ continguts en una carta (U, φ) qualsevol. Si denotem per $|g|$ el determinant de la mètrica g en l'obert U, aleshores $\sqrt{|g|} \in C^\infty(U)$ perquè la matriu (g_{ij}) és definida positiva. La mesura de $A \subset U$ es defineix com

$$V_g(A) \coloneqq \int_{\varphi(A)} \left(\sqrt{|g|}\right) \circ \varphi^{-1} \, dx^1 \cdots dx^n$$

i es comprova que aquesta no depèn de la carta (U, φ) escollida. En general, donat un conjunt $A \in \mathcal{L}_M$ qualsevol, es particiona A en subconjunts A_j de manera que cada A_j estigui contingut en una carta i els conjunts A_j siguin disjunts dos a dos. Aleshores es defineix la mesura de A com la suma de les mesures $V_g(A_j)$ dels conjunts A_j de la partició. Amb aquesta construcció s'obté una mesura positiva i completa de Radon que essencialment "eleva" la mesura de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ a M i fa que $(M, \mathcal{L}_M, V_g)$ sigui un espai de mesura.

La mesura de M ens permet transportar immediatament la teoria d'integració i espais de Lebesgue a la varietat M. A més a més, es pot demostrar que la integral d'una funció integrable f qualsevol és

$$\int_M f \, dV_g = \sum_{i \in I} \int_{U_i} \alpha_i f \, dV_g = \sum_{i \in I} \int_{\varphi_i(U_i)} \left(\alpha_i f \sqrt{|g|}\right) \circ \varphi^{-1} \, dx^1 \cdots dx^n, \tag{4.3}$$

on $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ és un atles de M i $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ és una partició de la unitat subordinada a $\{U_i\}_{i \in I}$ (vegeu Lee [6, pàg. 43]). Anomenem element de volum de Riemann a $dV_g = \sqrt{|g|} dx^1 \cdots dx^n$ on fent un abús de notació, se sobreentén que $\sqrt{|g|}$ està escrita en coordenades locals i s'escriu $\sqrt{|g|}$ en lloc de $\sqrt{|g|} \circ \varphi^{-1}$. A Aubin [2] es dona (4.3) com a definició i s'usa un teorema de teoria de la mesura per obtenir una mesura en M a partir de (4.3). Tot i així, donat que aquest teorema és més avançat i no s'ha vist en el treball, hem optat per explicar amb més detall la construcció que es fa a Amann i Escher [1] de dV_g a partir d'una σ-àlgebra.

Acabem aquesta secció introduint la divergència i el laplacià en varietats riemannianes.

Definició 4.14. *Donat un camp vectorial* $X \in \mathfrak{X}(M)$*, la divergència de* X *és la funció diferenciable* $\operatorname{div} X : M \to \mathbb{R}$ *definida com*

$$\operatorname{div} X(p) = \operatorname{tr}(Y_p \mapsto (\nabla_Y X)_p).$$

Notem que la divergència està ben definida ja que $(\nabla_Y X)_p$ només depèn del valor de Y en el punt p. També es clar a partir de la definició que $\operatorname{div} X$ és $\mathbb{R}$-lineal respecte X. En coordenades locals la divergència s'expressa com

$$\operatorname{div} X = \partial_i X^i + \Gamma^i_{ij} X^j$$

on $X = X^i \partial_i$. A més a més, la definició de $\operatorname{div} X$ ens dona immediatament la regla del producte

$$\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + \langle \nabla f, X \rangle \tag{4.4}$$

per qualssevol $f \in C^\infty(M)$ i $X \in \mathfrak{X}(M)$. Es pot demostrar que donat $X \in \mathfrak{X}(M)$ amb suport compacte,

$$\int_M \operatorname{div} X \, dV_g = 0.$$

En particular, en una varietat riemanniana compacte, $\operatorname{div} X$ té integral 0 per tot camp vectorial X. Aquest resultat es coneix com a teorema de la divergència i es pot trobar a Lee [6, pàg. 424 i 433].

Definició 4.15. *Sigui* $f \in C^\infty(M)$*. El laplacià de* f *és la funció diferenciable* $\Delta_g f := \operatorname{div}(\nabla f)$*. L'operador* $\mathbb{R}$*-lineal* $\Delta_g : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ *s'anomena operador de Laplace-Beltrami.*

L'expressió en coordenades de la divergència i el gradient ens donen l'expressió local del laplacià

$$\Delta_g f = \partial_i(\nabla^i f) + \Gamma^i_{ij} \nabla^j f.$$

Observem que donades $f, h \in C^\infty(M)$, aplicar la fórmula (4.4) amb $X = \nabla h$ ens dona l'equació

$$\operatorname{div}(f \nabla h) = f \Delta_g h + \langle \nabla f, \nabla h \rangle.$$

A més a més, en una varietat compacte qualsevol funció diferenciable o camp vectorial tenen suport compacte. Això juntament amb l'equació anterior i el teorema de la divergència ens permet deduir la següent identitat de Green o fórmula d'integració per parts per varietats compactes:

$$\int_M f \Delta_g h \, dV_g = -\int_M \langle \nabla f, \nabla h \rangle \, dV_g = \int_M h \Delta_g f \, dV_g.$$

4.6 Espais de Sobolev en varietats riemannianes

Com hem vist en la secció anterior, en una varietat riemanniana podem introduir una mesura natural que ens permet extendre la teoria d'espais de Lebesgue a varietats. A continuació veiem que també podem extendre els espais de Sobolev a varietats riemannianes. Donat que el problema de Yamabe només fa ús de l'equivalent a l'espai $H^1(\Omega)$ en $\mathbb{R}^n$, ens limitarem a construir aquest mateix espai en M. Aquesta limitació també es deguda a que la definició general dels espais de Sobolev requereix extendre la dervida covariant a camps tensorials.

Sigui (M,g) una varietat riemanniana, $p \geq 1$ i $\mathcal{C}_1^p(M)$ l'espai de funcions $u \in C^\infty(M)$ tals que $u \in L^p(M)$ i $\nabla u \in L^p(M)$. Observem que si M és compacte, aleshores $L^p(M) \subset L^q(M)$ per qualsevol $1 \leq p < q \leq \infty$ ja que $V = \int_M dV < \infty$ i per la desigualtat de Hölder

$$\|u\|_{L^p(M)} \leq V^{\frac{q-p}{qp}} \|u\|_{L^q(M)}.$$

En conseqüència, en una varietat compacte tenim $\mathcal{C}_1^p(M) = C^\infty(M)$ per qualsevol $p \geq 1$. Donada $u \in \mathcal{C}_1^p(M)$, definim la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(M)} := (\|u\|_{L^p(M)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(M)}^p)^{1/p}.$$

Definició 4.16. *Donada una varietat riemanniana (M,g) i $p \geq 1$ real, l'espai de Sobolev $W^{1,p}(M)$ és la clausura de $\mathcal{C}_1^p(M)$ respecte la norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(M)}$.*

Es pot comprovar que $(W^{1,p}(M), \|\cdot\|_{W^{1,p}(M)})$ és un espai de Banach tal i com passava amb els espais de Sobolev en $\mathbb{R}^n$. Igual que hem fet amb $H^k(\Omega)$ en $\mathbb{R}^n$, denotem per $H^1(M)$ l'espai $W^{1,2}(M)$ que amb el producte escalar

$$\langle u, v\rangle_{H^1(M)} = \int_M uv\, dV + \int_M \langle \nabla u, \nabla v\rangle\, dV$$

és un espai de Hilbert i $\|u\|_{H^1(M)} = \langle u, u\rangle_{H^1(M)}^{1/2}$.

Quan M és una varietat compacte es pot veure que la teoria d'espais de Sobolev a $\mathbb{R}^n$ s'extén sense problemes a varietats riemannianes. Més concretament, els espais de Sobolev $W^{1,p}(M)$ no depenen de la mètrica g i la desigualtat de Sobolev i el teorema de Rellich-Kondrakov que hem vist en $\mathbb{R}^n$ segueix essent vàlid en varietats compactes. Es poden trobar demostrats aquests resultats a Aubin [2, pàg. 44 i 55].

Teorema 4.17. *Sigui (M,g) una varietat riemanniana compacte de dimensió n i $p \geq 1$. Aleshores*

$$W^{1,p}(M) \subset L^q(M)$$

per tot $q \in [1, p^*]$ on $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$. A més a més, l'embedding és compacte si $q < p^*$.

Acabem aquesta secció observant que podria semblar que la manera en què hem construït els espais de Sobolev a $\mathbb{R}^n$ i a M són totalment diferents. Aquesta diferència és només aparent ja que es poden construir els espais de Sobolev a $\mathbb{R}^n$ seguint el mateix procediment que hem usat per $W^{1,p}(M)$ i es pot comprovar que les dues construccions són equivalents.

Similarment, es pot donar una definició de "derivades febles" en varietats riemannianes en termes d'operadors diferencials. A partir d'aquesta, es pot construir $W^{1,p}(M)$ de manera semblant a com ho hem fet per $\mathbb{R}^n$ en aquest treball. Aquesta definició alternativa es la que es troba a Lee i Parker [7] per exemple, i quan la varietat és compacte les dues construccions són equivalents tal i com passava a $\mathbb{R}^n$. Tot i així, en el cas de varietats riemannianes és més habitual donar la definició que hem usat.

5 El problema de Yamabe

Finalment tenim totes les eines necessàries per estudiar el problema de Yamabe. Comencem definint un tipus de transformacions de la mètrica d'una varietat que jugaran un paper central en aquest problema.

Definició 5.1. *Donada una varietat riemanniana (M, g), anomenem transformació conforme en M a qualsevol funció $f \in C^\infty(M)$ tal que $f > 0$. Diem que dues mètriques g i $\tilde{g}$ de M són conformement equivalents si existeix una transformació conforme f tal que $\tilde{g} = fg$.*

Observació 5.2. Donada una varietat (M, g), $p \in M$ i una mètrica conforme $\tilde{g} = fg$, per tot $X \in T_pM$ tenim

$$|X|_{\tilde{g}} = \tilde{g}(X, X)^{\frac{1}{2}} = (fg(X, X))^{\frac{1}{2}} = f^{\frac{1}{2}}|X|_g.$$

Per tant,

$$\frac{\langle X, Y\rangle_{\tilde{g}}}{|X|_{\tilde{g}}|Y|_{\tilde{g}}} = \frac{f\langle X, Y\rangle_g}{f|X|_g|Y|_g} = \frac{\langle X, Y\rangle_g}{|X|_g|Y|_g}$$

per tot $X, Y \in T_pM$, és a dir, la transformació f preserva angles.

Problema de Yamabe:
Donada una varietat riemanniana (M, g) tancada (compacte i sense vora) de dimensió $n \geq 3$, existeix una transformació conforme f en M tal que la mètrica $\tilde{g} = fg$ té curvatura escalar constant?

Com que ens dedicarem a estudiar el problema de Yamabe durant la resta del treball, a partir d'ara (M, g) serà una varietat riemanniana compacte, sense vora i de dimensió $n \geq 3$. Per tractar aquest problema comencem calculant primer com s'expressa la curvatura escalar de la nova mètrica $\tilde{g}$ en funció de la curvatura de g. Observem que tota transformació conforme és una funció estrictament positiva i per tant es pot expressar com e^{2f} amb $f \in C^\infty(M)$. Donada una mètrica $\tilde{g} = e^{2f}g$ conformement equivalent a g, usant que

$$\partial_i(\tilde{g}_{jl}) = \partial_i(e^{2f}g_{jl}) = 2e^{2f}(\partial_i f)g_{jl} + e^{2f}\partial_i g_{jl}$$

i $\tilde{g}^{kl} = e^{-2f}g^{kl}$ obtenim la següent expressió per als símbols de Christoffel de $\tilde{g}$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma}_{ij}^k &= \frac{1}{2}e^{-2f}g^{kl}\Big(\partial_i(e^{2f}g_{jl}) + \partial_j(e^{2f}g_{il}) - \partial_l(e^{2f}g_{ij})\Big) \\
&= \Gamma_{ij}^k + g^{kl}g_{jl}\partial_i f + g^{kl}g_{il}\partial_j f - g^{kl}g_{ij}\partial_l f \\
&= \Gamma_{ij}^k + \delta_j^k\partial_i f + \delta_i^k\partial_j f - g_{ij}\nabla^k f.
\end{aligned}$$

A partir de les components del tensor de curvatura

$$R_{ijk}{}^l = \partial_i\Gamma_{jk}^l - \partial_j\Gamma_{ik}^l + \Gamma_{im}^l\Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l\Gamma_{ik}^m$$

i l'expressió local del laplacià $\Delta_g f = \partial_i(\nabla^i f) + \Gamma_{ij}^i\nabla^j f$, deduïm després d'un càlcul considerablement llarg l'equació

$$\tilde{R}_{ij} = R_{ij} - (n-2)(\partial_i\partial_j f - \Gamma_{ij}^m\partial_m f - \partial_i f\partial_j f) - g_{ij}(\Delta_g f + (n-2)|\nabla f|^2)$$

per la curvatura de Ricci en la mètrica $\tilde{g}$. Finalment, per trobar la curvatura escalar de $\tilde{g}$ necessitem contreure $\tilde{R}_{ij}$ amb $\tilde{g}^{ij}$. Observem que

$$|\nabla f|^2 = \langle \nabla f, \nabla f \rangle = g_{ij} \nabla^i f \nabla^j f = \partial_i f \nabla^i f \tag{5.1}$$

i

$$\Delta_g f = \partial_i \nabla^i f + \Gamma^i_{ij} \nabla^j f = g^{ij} \partial_i \partial_j f + \partial_i f \partial_j g^{ij} + g^{ij} \Gamma^k_{kj} \partial_i f.$$

La relació $g_{ik} g^{kj} = \delta^j_i$ implica que $g_{ik} \partial_m g^{kj} = -g^{kj} \partial_m g_{ik}$ per qualssevol índexs i, j, m, cosa que ens permet deduir la igualtat

$$\begin{aligned}
g^{jk} \Gamma^i_{jk} &= \frac{1}{2} g^{jk} g^{im} \left(\partial_i g_{mk} + \partial_k g_{mj} - \partial_m g_{jk} \right) \\
&= -\frac{1}{2} g^{jk} g_{mk} \partial_j g^{im} - \frac{1}{2} g^{jk} g_{mj} \partial_k g^{im} - g^{im} \Gamma^k_{km} \\
&= -\left(\partial_j g^{ij} + g^{ij} \Gamma^k_{kj} \right).
\end{aligned}$$

Substituint aquesta equació en l'expressió del laplacià ens queda

$$\Delta_g f = g^{ij} \partial_i \partial_j f - g^{jk} \Gamma^i_{jk} \partial_i f = g^{ij} \left(\partial_i \partial_j f - \Gamma^m_{ij} \partial_m f \right). \tag{5.2}$$

A partir de les equacions (5.1) i (5.2) ens queda la següent expressió per la curvatura escalar $\tilde{S} = \tilde{g}^{ij} \tilde{R}_{ij}$ de $\tilde{g}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{S} &= e^{-2f} \left(S - (n-2) g^{ij} (\partial_i \partial_j f - \Gamma^m_{ij} \partial_m f) + (n-2) g^{ij} \partial_i f \partial_j f - n(\Delta_g f + (n-2)|\nabla f|^2) \right) \\
&= e^{-2f} \left(S - (n-2) \Delta_g f + (n-2) \partial_i f \nabla^i f - n \Delta_g f - n(n-2) |\nabla f|^2 \right) \\
&= e^{-2f} \left(S - 2(n-1) \Delta_g f - (n-2)(n-1) |\nabla f|^2 \right).
\end{aligned}$$

Amb l'equació anterior no estar clar com ha de ser la funció f per tal que $\tilde{S}$ sigui constant. Per simplificar l'equació considerem la transformació conforme $\tilde{g} = u^{4/(n-2)} g$ amb $u > 0$. En aquest cas podem escriure $f = \frac{2}{n-2} \log u$ i un càlcul senzill dona les següents relacions entre u i f:

$$\begin{aligned}
\partial_i f &= \frac{2}{n-2} \frac{1}{u} \partial_i u & \nabla^i f &= \frac{2}{n-2} \frac{1}{u} \nabla^i u \\
|\nabla f|^2 &= \frac{4}{(n-2)^2} \frac{1}{u^2} |\nabla u|^2 & \Delta_g f &= \frac{2}{n-2} \frac{1}{u} \left(\Delta_g u - \frac{1}{u} |\nabla u|^2 \right).
\end{aligned}$$

Si definim $a := 4\frac{n-1}{n-2} > 0$ tenim

$$\begin{aligned}
\tilde{S} &= e^{-2f} \left(S - 2(n-1) \Delta_g f - (n-2)(n-1) |\nabla f|^2 \right) \\
&= u^{-\frac{4}{n-2}} \left(S - \frac{a}{u} \Delta_g u + \frac{a}{u^2} |\nabla u|^2 - 4 \frac{(n-2)(n-1)}{u^2 (n-2)^2} |\nabla u|^2 \right) \\
&= u^{-\frac{4}{n-2}} \left(S - \frac{a}{u} \Delta_g u \right)
\end{aligned}$$

o equivalentment,

$$-a \Delta_g u + S(x) u = \tilde{S}(x) u^{\frac{n+2}{n-2}}. \tag{5.3}$$

Així doncs, la mètrica $\tilde{g} = u^{4/(n-2)} g$ té curvatura escalar constant λ si i només si u satisfà l'equació de Yamabe (5.3) amb $\tilde{S} = \lambda \in \mathbb{R}$. Notem que si $2^* = \frac{2n}{n-2}$ és el conjugat de Sobolev de 2, aleshores podem reescriure l'equació anterior com

$$-a \Delta_g u + S(x) u = \lambda u^{p-1} \tag{$*$}$$

on $p = 2^*$. Durant la resta d'aquesta secció veurem com usar el càlcul de variacions per provar l'existència de solucions de l'equació de Yamabe. Veurem que l'exponent $2^* - 1$ dificulta l'ús directe de mètodes variacionals i per aquest motiu estudiarem primer l'equació $(*)$ amb exponent $p < 2^*$. Finalment, els resultats obtinguts amb $p < 2^*$ ens serviran per obtenir per aproximació una solució de l'equació de Yamabe quan $\lambda < 0$.

5.1 El funcional de Yamabe

El primer pas per poder aplicar mètodes variacionals és buscar el funcional associat a l'equació $(*)$. Seguint les idees de la secció 3.2 i, més concretament, l'exemple 3.9, donat $2 < p \leq 2^*$ definim en $H^1(M)$ el funcional

$$I_p(u) := \frac{\int_M a|\nabla u|^2 + S(x)u^2\, dV_g}{\left(\int_M |u|^p\, dV_g\right)^{2/p}} = \left(\int_M a|\nabla u|^2 + S(x)u^2\, dV_g\right) \|u\|_p^{-2}$$

on $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p(M)}$. Observem que I_p és invariant per reescalaments, és a dir, $I_p(\lambda u) = I_p(u)$ per qualsevol $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. A més a més, com que $|\nabla|u|| = |\nabla u|$ gairabé per tot, també tenim que $I_p(|u|) = I_p(u)$ per qualsevol $u \in H^1(M)$. Per últim, I_p és el funcional associat a $(*)$ per qualsevol p. En efecte, suposem que I_p assoleix un mínim en una funció $u \in H^1(M)$, $u \not\equiv 0$. Donat que $I_p(u) = I_p(|u|)$, podem suposar que $u \geq 0$. Aleshores per tota funció $v \in H^1(M)$ tenim $I_p(u) \leq I_p(u + \varepsilon v)$, és a dir,

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} I_p(u + \varepsilon v) = 0.$$

per cada $v \in H^1(M)$. Observant que

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} |u + \varepsilon v|^p = p|u|^{p-2}uv$$

s'obté

$$\begin{aligned}
0 &= \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \frac{\int_M (a|\nabla u|^2 + 2\varepsilon\langle \nabla u, \nabla v\rangle + \varepsilon^2|\nabla v|^2)\, dV_g + \int_M S(x)(u^2 + 2\varepsilon uv + \varepsilon^2 v^2)\, dV_g}{\left(\int_M |u + \varepsilon v|^p\, dV_g\right)^{2/p}} \\
&= \frac{\left(2\int_M a\langle \nabla u, \nabla v\rangle + S(x)uv\, dV_g\right)\left(\int_M |u|^p\, dV_g\right)^{2/p}}{\left(\int_M |u|^p\, dV_g\right)^{4/p}} \\
&\quad - \frac{\frac{2}{p}\left(\int_M a|\nabla u|^2 + S(x)u^2\, dV_g\right)\left(\int_M |u|^p\, dV_g\right)^{(2-p)/p}\left(\int_M p|u|^{p-2}uv\, dV_g\right)}{\left(\int_M |u|^p\, dV_g\right)^{4/p}} \\
&= 2\frac{\int_M a\langle \nabla u, \nabla v\rangle + S(x)uv\, dV_g}{\left(\int_M |u|^p\, dV_g\right)^{2/p}} - 2\frac{I_p(u)\int_M u^{p-1}v\, dV_g}{\int_M |u|^p\, dV_g} \\
&= \frac{2}{\|u\|_p^2}\left(\int_M a\langle \nabla u, \nabla v\rangle + S(x)uv\, dV_g - \frac{I_p(u)}{\|u\|_p^{p-2}}\int_M u^{p-1}v\, dV_g\right).
\end{aligned}$$

En conseqüència u satisfà l'equació

$$\int_M a\langle \nabla u, \nabla v\rangle + S(x)uv\, dV_g = \frac{I_p(u)}{\|u\|_p^{p-2}}\int_M u^{p-1}v\, dV_g \quad \text{per tot } v \in H^1(M). \tag{5.4}$$

Suposant que haguem provat la regularitat de u, integrant per parts s'obté

$$\int_M -a\Delta_g uv + S(x)uv\, dV_g = \frac{I_p(u)}{\|u\|_p^{p-2}} \int_M u^{p-1} v\, dV_g \quad \text{per tot } v \in H^1(M)$$

d'on es dedueix que u és solució de l'equació $(*)$ amb $\lambda = I_p(u)/\|u\|_p^{p-2}$. Així doncs, tal i com hem fet a la secció 3.2, diem que u és solució feble de l'equació de Yamabe amb exponent p si u satisfà (5.4). Tota funció $u \in H^1(M)\setminus\{0\}$ que minimitzi I_p és una solució feble i si a més u és diferenciable, aleshores u soluciona $(*)$.

En resum, el nostre objectiu per resoldre $(*)$ serà buscar alguna funció $u \in H^1(M)\setminus\{0\}$ que minimitzi I_{2^*} i després provar que aquesta és diferenciable i estrictament positiva. De cara a la resta del treball denotarem

$$\mu_p := \inf_{\substack{u\in H^1(M)\\ u\not\equiv 0}} I_p(u), \qquad \mu := \mu_{2^*}, \qquad I := I_{2^*}.$$

5.2 Cas subcrític $p < 2^*$

Com hem dit anteriorment, no és possible demostrar directament l'existència de mínims de I i provar així l'existència d'alguna solució al problema de Yamabe. Per aquest motiu comencem minimitzant primer I_p quan $p < 2^*$. La minimització de I_p en aquest cas es centrarà en l'embedding compacte $H^1(M) \subset\subset L^p(M)$ donat pel teorema de Rellich-Kondrakov quan $p < 2^*$.

Abans però de demostrar l'existència d'un mínim de I_p, necessitem veure un parell de resultats auxiliars. Comencem per un teorema de regularitat que ens permetrà deduir la regularitat de solucions febles tant en el cas $p < 2^*$ com en el cas $p = 2^*$. Com que en aquest treball ens centrem en la prova d'existència ens limitem a enunciar-lo sense demostració, la qual es pot trobar a Lee i Parker [7, pàg. 52].

Teorema 5.3 (Teorema de regularitat)**.** *Sigui $u \in H^1(M)$ una solució feble no negativa de $(*)$ per algún $\lambda \in \mathbb{R}$ i $2 < p \leq 2^*$. Suposem que es dona algún dels dos casos següents:*

(i) $p < 2^*$,

(ii) $p = 2^*$ *i* $u \in L^q(M)$ *amb* $q > 2^*$.

Aleshores u és idènticament zero o estrictament positiva, $u \in C^\infty(M)$ i $\|u\|_{C^3(M)} \leq C$ on C és una constant positiva que només depèn de M, g, λ i $\|u\|_p$ en el primer cas o $\|u\|_q$ en el segon cas.

El segon resultat és un lema que ens permetrà deduir certs tipus de convergència d'una successió acotada de $H^1(M)$. Aquest és el pas essencial que ens donarà un candidat a mínim de I_p.

Lema 5.4. *Sigui $2 < p < 2^*$ i $(u_m)_{m=1}^\infty$ una successió de funcions de $H^1(M)$ acotada, és a dir, tal que*

$$\sup_{m\geq 1} \|u_m\|_{H^1(M)} < \infty.$$

Aleshores existeix una parcial $(u_{m_k})_{k=1}^\infty$ de $(u_m)_{m=1}^\infty$ i $u \in H^1(M)$ tal que *(i)* $u_{m_k} \to u$ *en* $L^p(M)$.

(ii) $u_{m_k} \rightharpoonup u$ *en* $H^1(M)$.

Demostració. El lema és conseqüència de diversos resultats que hem vist durant el treball. Com que $H^1(M)$ és un espai de Hilbert i $(u_m)_{m=1}^{\infty}$ és uniformement acotada en $H^1(M)$, per la proposició 3.5 existeix una parcial $(u_{m_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(u_m)_{m=1}^{\infty}$ i $u \in H^1(M)$ tal que

$$u_{m_k} \xrightharpoonup[k\to\infty]{} u \quad \text{en } H^1(M).$$

Pel teorema de Rellich-Kondrakov 4.17, l'embedding $H^1(M) \subset\subset L^p(M)$ és compacte perquè $p < 2^*$. Per tant, passant a una altra parcial si és necessari tenim que existeix $v \in L^p(M)$ tal que $u_{m_k} \to v$ en $L^p(M)$. Com que M és una varietat compacte, $V = \int_M dV_g < \infty$ i per la desigualtat de Hölder

$$\|u_{m_k} - v\|_2 \le V^{\frac{p-2}{2p}} \|u_{m_k} - v\|_p.$$

En conseqüència, $u_{m_k} \to v$ en $L^2(M)$ i en particular $u_{m_k} \rightharpoonup v$ en $L^2(M)$ perquè $L^2(M)$ també és un espai de Hilbert. Però $u_{m_k} \rightharpoonup u$ en $H^1(M)$ implica que $u_{m_k} \rightharpoonup u$ en $L^2(M)$, d'on es dedueix que $v = u$ per la unicitat del límit feble (vegeu l'observació 3.2). $\square$

Teorema 5.5. *Per cada* $2 < p < 2^*$ *existeix una solució* $u_p \in C^\infty(M)$ *estrictament positiva de l'equació* $(*)$ *amb* $\lambda = \mu_p$ *i* $I_p(u_p) = \mu_p$.

Demostració. Dividirem la demostració en diversos passos.

1. Comencem provant que μ_p és finit per qualsevol $2 < p < 2^*$. Per un costat,

$$I_p(u) \ge \left(\int_M S(x)u^2\, dV_g\right) \|u\|_p^{-2} \ge \inf_{x\in M}\{0, S(x)\}\|u\|_2^2\|u\|_p^{-2}. \tag{5.5}$$

   Notem que com M és compacte i $S \in C^\infty(M)$, l'ínfim de l'expressió anterior s'assoleix i per tant

$$-\infty < \inf_{x\in M}\{0, S(x)\} \le 0. \tag{5.6}$$

   Si escrivim $V = \int_M dV_g < \infty$, per la desigualtat de Hölder tenim

$$\|u\|_2 \le V^{\frac{p-2}{2p}} \|u\|_p$$

   i en conseqüència

$$0 \le \|u\|_2^2\|u\|_p^{-2} \le V^{1-\frac{2}{p}}.$$

   Aquesta acotació juntament amb (5.5) i (5.6) ens dona que $I_p(u)$ està acotat inferiorment i per tant μ_p també. Per altra banda,

$$\mu_p \le I_p(1) = \left(\int_M S(x)\, dV_g\right)\left(\int_M dV_g\right)^{-2/p} < \infty$$

   ja que M és compacte, $S \in C^\infty(M)$ i $\int_M dV_g < \infty$. En conclusió, μ_p és acotat inferiorment i superiorment d'on es dedueix que μ_p és finit.

2. Sigui $(u_m)_{m=1}^{\infty}$ una successió minimitzant de I_p. Com que I_p és invariant per reescalaments podem suposar sense perdre generalitat que $\|u_m\|_p = 1$ per tot m. Per tant tenim

   - $u_m \in H^1(M)$,
   - $\|u_m\|_p = 1$.
   - $I_p(u_m) \to \mu_p$ quan $m \to \infty$,

   Demostrem que $(u_m)_{m=1}^{\infty}$ és uniformement acotada en $H^1(M)$. Tenim que

$$\begin{aligned}
\|u_m\|_{H^1(M)}^2 &= \int_M |\nabla u_m|^2 \, dV_g + \int_M u_m^2 \, dV_g \\
&= \frac{1}{a}\left(a \int_M |\nabla u_m|^2 \, dV_g + \int_M S(x) u_m^2 \, dV_g\right) + \int_M \left(1 - \frac{S(x)}{a}\right) u_m^2 \, dV_g \\
&= \frac{1}{a} I_p(u_m) + \int_M \left(1 - \frac{S(x)}{a}\right) u_m^2 \, dV_g.
\end{aligned}$$

   Com que $I_p(u_m) \to \mu_p$, podem suposar eliminant un nombre finit de termes de la successió si és necessari que $I_p(u_m) < \mu_p + 1$. Per tant,

$$\begin{aligned}
\|u_m\|_{H^1(M)}^2 &\leq \frac{1}{a} I_p(u_m) + \int_M \left|1 - \frac{S(x)}{a}\right| u_m^2 \, dV_g \\
&\leq \frac{1}{a}(\mu_p + 1) + \left(1 + \frac{1}{a} \sup_{x \in M} |S(x)|\right) \|u_m\|_2^2
\end{aligned}$$

   i

$$\|u_m\|_2^2 \leq V^{1-\frac{2}{p}} \|u_m\|_p^2 = V^{1-\frac{2}{p}}.$$

   Ajuntant-ho tot ens queda

$$\|u_m\|_{H^1(M)}^2 \leq \frac{1}{a}(\mu_p + 1) + \left(1 + \frac{1}{a} \sup_{x \in M} |S(x)|\right) V^{1-\frac{2}{p}} < \infty$$

   i en conseqüència $(u_m)_{m=1}^{\infty}$ està acotada en $H^1(M)$.

3. L'ínfim μ_p s'assoleix en una funció $u_p \in H^1(M) \setminus \{0\}$ tal que $u_p \geq 0$ i $\|u_p\|_p = 1$. En efecte, com la successió $(u_m)_{m=1}^{\infty}$ és acotada en $H^1(M)$, pel lema 5.4 existeix una parcial $(u_{m_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(u_m)_{m=1}^{\infty}$ i $u_p \in H^1(M)$ tal que

   - $u_{m_k} \to u$ en $L^p(M)$
   - $u_{m_k} \rightharpoonup u$ en $H^1(M)$

   Com que $\|u_{m_k}\|_p = 1$ per tot $k \geq 1$, la convergència en $L^p(M)$ de $(u_{m_k})_{k=1}^{\infty}$ implica que

$$\|u_p\|_p = \lim_{k \to \infty} \|u_{m_k}\|_p = 1.$$

   Notem que això implica que $u \not\equiv 0$. Per altra banda, recordem que $H^1(M)$ és un espai de Hilbert i per l'observació 3.7 la norma $\|\cdot\|_{H^1(M)}$ és semicontínua inferiorment en sentit feble. Per tant, la convergència feble en $H^1(M)$ de les funcions u_{m_k} implica

$$\|u_p\|_{H^1(M)} \leq \liminf_{k \to \infty} \|u_{m_k}\|_{H^1(M)}.$$

Però $2 < p$ i per tant la desigualtat de Hölder ens dona que $u_{m_k} \to u$ en $L^2(M)$. En conseqüència,

$$\|u_{m_k}\|_2 \xrightarrow[k\to\infty]{} \|u_p\|_2,$$

cosa que implica juntament amb la semicontinuïtat de la norma $H^1(M)$ que

$$\|\nabla u_p\|_2 \leq \liminf_{k\to\infty} \|\nabla u_{m_k}\|_2 \tag{5.7}$$

A més a més, la convergència en $L^2(M)$ de $(u_{m_k})_{k=1}^{\infty}$ també ens dona

$$\begin{aligned} \left|\int_M S(x)u_{m_k}^2\,dV_g - \int_M S(x)u_p^2\,dV_g\right| &\leq \int_M |S(x)||u_{m_k} - u_p||u_{m_k} + u_p|\,dV_g \\ &\leq \left(\sup_{x\in M}|S(x)|\right)\|u_{m_k} - u_p\|_2(\|u_{m_k}\|_2 + \|u_p\|_2) \end{aligned}$$

i per tant

$$\int_M S(x)u_{m_k}^2\,dV_g \to \int_M S(x)u_p^2\,dV_g \quad \text{quan } k\to\infty. \tag{5.8}$$

El fet que $\|u_{m_k}\|_p = \|u_p\|_p = 1$ juntament amb (5.7) i (5.8) implica

$$I_p(u_p) \leq \liminf_{k\to\infty} I_p(u_{m_k}) = \mu_p.$$

Com per definició $\mu_p \leq I_p(u_p)$, deduïm que $I_p(u_p) = \mu_p$ i u_p és un mínim de I_p. Finalment, com que $I_p(|u_p|) = I_p(u_p)$, podem substituir u_p per $|u_p|$ per obtenir que $u_p \geq 0$.

4. Donat que la funció $u_p \in H^1(M)\setminus\{0\}$ minimitza I_p i $u_p \geq 0$, tenim que u_p és una solució feble de l'equació de Yamabe amb exponent p i $\lambda = I_p(u_p)/\|u\|_p^{p-2} = I_p(u_p) = \mu_p$.

   Per últim, ens queda provar que $u_p \in C^\infty(M)$ i $u_p > 0$, cosa que es dedueix immediatament del teorema de regularitat 5.3. En efecte, acabem de comprovar que u_p és solució feble de $(*)$ amb $\lambda = \mu_p$. A més a més $u_p \in L^p(M)$ perquè $\|u_p\|_p = 1$. Com que $p < 2^*$, el teorema de regularitat ens dona que $u_p \in C^\infty(M)$ i u_p és idènticament zero o estrictament positiva. Però $u_p \not\equiv 0$ d'on deduïm que $u_p > 0$.

□

Observació 5.6. Les acotacions del primer pas de la demostració anterior també són vàlides en el cas $p = 2^*$. En altres paraules, l'ínfim μ_p és finit per qualsevol $p \in (2, 2^*]$.

Observació 5.7. Notem que en la demostració anterior la convergència en $L^p(M)$ de la parcial $(u_{m_k})_{k=1}^{\infty}$ ha estat clau per comprovar que u_p satisfés totes les propietats que necessitàvem. Repassant la demostració del lema 5.4 queda clar que aquesta convergència s'obté gràcies a l'embedding compacte $H^1(M) \subset\subset L^p(M)$ del teorema de Rellich-Kondrakov. Aquest és el principal motiu pel qual la demostració anterior falla en el cas $p = 2^*$ on l'embedding $H^1(M) \subset L^p(M)$ deixa de ser compacte.

5.3 Cas crític $p = 2^*$

Amb el cas subcrític $p < 2^*$ resolt, passem a enfrontar-nos al cas crític $p = 2^*$. Ja hem vist que l'argument que hem seguit per $p < 2^*$ no ens serveix perquè no tenim la compacitat de l'embedding $H^1(M) \subset L^{2^*}(M)$. Per aquest motiu buscarem obtenir una solució de $(*)$ a partir de la família de solucions $\{u_p\}_{p\in(2,2^*)}$ passant al límit $p \to 2^*$. Com veurem, aquesta idea només funcionarà quan $\mu < 0$ i per tant només ens permet resoldre parcialment el problema de Yamabe. Comencem amb un primer resultat que mostra que μ és un invariant conforme de (M, g).

Proposició 5.8. *L'ínfim μ del funcional $I = I_{2^*}$ és un invariant conforme. En altres paraules, si $\tilde{g} = u^{4/(n-2)}g$ és una mètrica conformement equivalent a g, $\tilde{I}$ és el funcional I però definit amb la mètrica $\tilde{g}$, i $\tilde{\mu}$ és l'ínfim de $\tilde{I}$, aleshores $\mu = \tilde{\mu}$.*

Demostració. Notem que

$$dV_{\tilde{g}} = \sqrt{|\tilde{g}|}dx^1 \cdots dx^n = \sqrt{u^{\frac{4n}{n-2}}|g|}dx^1 \cdots dx^n = u^{2n/(n-2)}dV_g$$

i per tant $dV_{\tilde{g}} = u^{2^*}dV_g$. Sigui $v \in H^1(M)$. Recordant que

$$\operatorname{div}(f\nabla h) = f\Delta_g h + \langle \nabla f, \nabla h\rangle$$

s'obté que

$$\Delta_g(u^2) = \operatorname{div}(\nabla(u^2)) = 2\operatorname{div}(u\nabla u) = 2u\Delta_g u + 2|\nabla u|^2.$$

Per tant,

$$\begin{aligned}
\int_M |\nabla(uv)|^2\, dV_g &= \int_M |\nabla u|^2 v^2 + |\nabla v|^2 u^2 + 2uv\langle \nabla u, \nabla v\rangle\, dV_g \\
&= \int_M u^2|\nabla v|^2\, dV_g + \int_M v^2|\nabla u|^2\, dV_g + \int_M \frac{1}{2}\langle \nabla(u^2), \nabla(v^2)\rangle\, dV_g \\
&= \int_M u^2|\nabla v|^2\, dV_g - \int_M uv^2\Delta_g u\, dV_g,
\end{aligned}$$

i en conseqüència

$$I(uv) = \frac{a\left(\int_M u^2|\nabla v|^2\, dV_g - \int_M uv^2\Delta_g u\, dV_g\right) + \int_M S(x)u^2v^2\, dV_g}{\left(\int_M u^{2^*}v^{2^*}\, dV_g\right)^{2/2^*}}$$

Si $\widetilde{\nabla}$ denota el gradient en la mètrica $\tilde{g}$, aleshores $|\widetilde{\nabla} v|^2 = \tilde{g}^{ij}\partial_i v\partial_j v = u^{4/(n-2)}|\nabla v|^2 = u^{2^*-2}|\nabla v|^2$ cosa que implica que

$$\int_M u^2|\nabla v|^2\, dV_g = \int_M u^{2-2^*}|\nabla v|^2 u^{2^*}\, dV_g = \int_M |\widetilde{\nabla} v|^2\, dV_{\tilde{g}}.$$

A més a més, u satisfà l'equació (5.3) perquè és una transformació conforme. Per tant,

$$\begin{aligned}
-a\int_M uv^2\Delta_g u\, dV_g + \int_M S(x)u^2v^2\, dV_g &= \int_M uv^2(-a\Delta_g u + S(x)u)\, dV_g \\
&= \int_M uv^2\tilde{S}(x)u^{2^*-1}\, dV_g \\
&= \int_M \tilde{S}(x)v^2\, dV_{\tilde{g}}.
\end{aligned}$$

Substituint a l'expressió de $I(uv)$ ens queda

$$I(uv) = \frac{\int_M a|\widetilde{\nabla} v|^2 + \tilde{S} v^2 \, dV_{\tilde{g}}}{\left(\int_M v^{2^*} \, dV_{\tilde{g}}\right)^{2/2^*}} = \tilde{I}(v)$$

i com que $u > 0$ deduïm

$$\tilde{\mu} = \inf_{\substack{v \in H^1(M) \\ v \not\equiv 0}} \tilde{I}(v) = \inf_{\substack{v \in H^1(M) \\ v \not\equiv 0}} I(uv) = \inf_{\substack{w \in H^1(M) \\ w \not\equiv 0}} I(w) = \mu.$$

□

Com que μ és invariant per transformacions conformes, a partir d'ara podem suposar sense perdre generalitat que $V = \int_M dV_g = 1$. En efecte, si considerem la transformació (conforme) $\tilde{g} = kg$ amb $k \in (0, \infty)$, aleshores

$$\int_M dV_{\tilde{g}} = k^{n/2} \int_M dV_g = k^{n/2} V.$$

Prenent $k = V^{-2/n}$ obtenim que el volum de M en la mètrica $\tilde{g}$ és 1. Com que μ és invariant per transformacions conformes, aquest reescalament no altera el valor de μ. Notem que amb aquesta normalització del volum de M la desigualtat de Hölder esdevé

$$\|u\|_p \leq \|u\|_q, \qquad 1 \leq p < q \leq \infty.$$

Tot i que la normalització $\int_M dV_g = 1$ pot semblar de poca importància, resultarà ser de gran utilitat a l'hora de resoldre el problema de Yamabe. Aquesta utilitat ve donada principalment pel següent lema que usarem més d'un cop en la resta de resultats que veurem:

Lema 5.9. *Si $\int_M dV_g = 1$, aleshores $|\mu_p|$ és decreixent com a funció de $p \in (2, 2^*]$. A més a més, si $\mu_p < 0$ (resp. $\mu_p \geq 0$) per algún valor de p, aleshores $\mu_q < 0$ (resp. $\mu_q \geq 0$) per tot $q \in (2, 2^*]$.*

Demostració. Observem que per qualssevol p, q i qualsevol funció $u \in H^1(M)$,

$$I_q(u) = \frac{\|u\|_p^2}{\|u\|_q^2} I_p(u). \tag{5.9}$$

Si $p \leq q$, aleshores per la desigualtat de Hölder $\|u\|_p \leq \|u\|_q$ i per tant $|\mu_q| \leq |\mu_p|$. Per altra banda, si $\mu_p < 0$ per algún valor $2 < p \leq 2^*$, aleshores existeix una funció $u \in H^1(M)$ tal que $I_p(u) < 0$. En conseqüència, (5.9) mostra que $I_q(u) < 0$ per qualsevol $q \in (2, 2^*]$ d'on es dedueix que $\mu_q < 0$ per tot q. Finalment, si $\mu_p \geq 0$ per algún valor de p, aleshores forçosament $\mu_q \geq 0$ per tot $q \in (2, 2^*]$, ja que en cas contrari tindriem $\mu_q < 0$ per algún valor q i això implicaria que $\mu_p < 0$. □

L'últim recurs necessari per resoldre el cas $\mu < 0$ és l'acotació uniforme de la família $\{u_p\}$ donada pel següent resultat:

Lema 5.10. *Suposem que $\mu < 0$ i sigui $\{u_p\}_{2<p<2^*}$ la família de solucions de l'equació $(*)$ donada pel teorema 5.5. Existeix una constant $C > 0$ i $q > 2^*$ tal que $\|u_p\|_q \leq C$ per tot $p \in (2, 2^*)$.*

Demostració. Sigui $\delta > 0$. Multiplicant l'equació $(*)$ per $u_p^{1+2\delta}$ i integrant en M s'obté

$$\int_M -a u_p^{1+2\delta}\Delta_g u_p + S(x)u_p^{2+2\delta}\,dV_g = \int_M \mu_p u_p^{p+2\delta}\,dV_g.$$

Integrant per parts ens queda

$$\int_M a\langle \nabla u_p, (1+2\delta)u_p^{2\delta}\nabla u_p\rangle + S(x)u_p^{2+2\delta}\,dV_g = \int_M \mu_p u_p^{p+2\delta}\,dV_g.$$

Posant $v = u_p^{1+\delta}$ tenim que $\nabla v = (1+\delta)u_p^{\delta}\nabla u_p$ i per tant podem reescriure l'equació anterior de la següent manera:

$$\frac{1+2\delta}{(1+\delta)^2}\int_M a|\nabla v|^2\,dV_g = \int_M \mu_p v^2 u_p^{p-2} - S(x)v^2\,dV_g.$$

Però pel lema 5.9, $\mu < 0$ implica $\mu_p < 0$ per tot $p \in (2, 2^*]$, cosa que juntament amb el fet que $S \in C^\infty(M)$ ens dona

$$\frac{1+2\delta}{(1+\delta)^2}\int_M a|\nabla v|^2\,dV_g \leq \int_M |S(x)|v^2\,dV_g \leq \|S\|_\infty \int_M v^2\,dV_g.$$

Equivalentment, $\|\nabla v\|_2^2 \leq K\|v\|_2^2$ on K és una constant que només depèn de n, S i δ. Per la desigualtat de Sobolev

$$\|v\|_{2^*}^2 \leq C\|v\|_{H^1(M)}^2 = C(\|v\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2) \leq C(1+K)\|v\|_2^2,$$

Reanomenant C a la constant $(C(1+K))^{1/2}$ (que no depèn ni de p ni de v) ens queda $\|v\|_{2^*} \leq C\|v\|_2$. Com que $p > 2$, podem escollir δ de manera que $2(1+\delta) \leq p$. Aplicant la desigualtat de Hölder obtenim

$$\|v\|_2 = \|u_p\|_{2(1+\delta)}^{1+\delta} \leq \|u_p\|_p^{1+\delta} = 1$$

i per tant $\|v\|_{2^*} = \|u_p\|_{2^*(1+\delta)}^{1+\delta}$ està acotada per una constant que no depèn ni de u_p ni de p. Prenent $q = 2^*(1+\delta) > 2^*$ s'obté l'acotació que buscàvem. $\square$

Teorema 5.11. *Sigui (M, g) una varietat riemanniana compacte de dimensió $n \geq 3$ i suposem que $\mu < 0$. Aleshores existeix una funció estrictament positiva $u \in C^\infty(M)$ que soluciona l'equació de Yamabe $(*)$ amb $p = 2^*$, és a dir,*

$$-a\Delta_g u + S(x)u = \mu u^{2^*-1}, \qquad I(u) = \mu.$$

Per tant, la mètrica $\tilde{g} = u^{2^*-2}g$ té curvatura escalar constant μ.

Demostració. Sigui $\{u_p\}_{p\in(2,2^*)}$ la família de solucions donada pel teorema 5.5. El nostre objectiu és provar que quan $p \to 2^*$, les funcions u_p convergeixen a una funció u que soluciona $(*)$ amb $\lambda = \mu$.

Pel lema 5.10 existeix $q > 2^*$ tal que la norma $\|u_p\|_q$ està acotada uniformement per tot $p \in (2, 2^*)$. Aplicant el teorema de regularitat 5.3 ($u_p \in L^q(M)$ per tot p i $q > 2^*$) obtenim que la família $\{u_p\}$ està acotada uniformement en $C^3(M)$. Pel teorema d'Arzela-Ascoli, existeix una successió $(u_{p_m})_{m=1}^\infty$ amb $p_m \to 2^*$ quan $m \to \infty$ tal que u_{p_m} convergeix en $C^2(M)$ a una funció $u \in C^2(M)$.

Com $\mu < 0$, el lema 5.9 ens dona que $\mu_p < 0$ per tot p i $|\mu_p|$ és decreixent en p. En conseqüència μ_p és creixent com a funció de p, d'on es dedueix que $\mu_p \leq \mu < 0$ per tot p. En particular, la successió creixent $(\mu_{p_m})_{m=1}^{\infty}$ està acotada superiorment i per tant existeix $\nu \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nu = \lim_{p_m \to 2^*} \mu_{p_m} = \lim_{m \to \infty} \mu_{p_m}.$$

A més a més, la convergència en $C^2(M)$ de u_{p_m} ens dona que u satisfà

$$-a\Delta_g u + S(x)u = \nu u^{2^*-1}, \qquad I(u) = \nu.$$

Com μ_p és creixent en p, deduïm que $\nu = \lim_m \mu_{p_m} \leq \mu$. Per altra banda, per definició μ és l'ínfim de I i per tant $\mu \leq I(u) = \nu$. Així doncs, $\nu = \mu$.

Finalment, u està acotada ja que M és compacte i $u \in C^2(M)$. En altres paraules, $\|u\|_\infty < \infty$ i per tant $u \in L^q(M)$ per qualsevol $1 \leq q \leq \infty$. Aplicant el teorema de regularitat un últim cop obtenim que $u \in C^\infty(M)$ i u és, o bé estrictament positiva, o bé idènticament 0. Però $u_{p_m} \to u$ en $C^2(M)$ i en particular u_{p_m} convergeix uniformement a u. Per tant

$$\|u\|_{2^*} = \lim_{p_m \to 2^*} \|u_{p_m}\|_{p_m} = 1,$$

cosa que implica que $u \not\equiv 0$. En conseqüència, $u > 0$. □

El teorema anterior resol el problema de Yamabe en el cas $\mu < 0$. Acabem aquesta secció amb un teorema que soluciona també el cas $\mu = 0$ i recull tot el que podem demostrar sobre el problema de Yamabe amb el que s'ha explicat en aquest treball.

Teorema 5.12. *Sigui (M, g) una varietat riemanniana compacte de dimensió $n \geq 3$. Existeix una mètrica $\tilde{g}$ conformement equivalent a g tal que la curvatura escalar de $\tilde{g}$ és, o bé estrictament positiva, o bé constantment igual a $\lambda \leq 0$.*

Demostració. Distingim tres casos segons el valor de μ:

- *Cas positiu* ($\mu > 0$). Si $\mu > 0$, pel lema 5.9 tenim que $\mu_p \geq 0$ per tot $p \in (2, 2^*]$. Sigui $p \in (2, 2^*)$ i u_p la solució donada pel teorema 5.5. Com que $u_p > 0$, tenim que

  $$\mu_p = I_p(u_p) = \frac{\|u_p\|_{2^*}^2}{\|u_p\|_p^2} I(u_p) \geq \|u_p\|_{2^*}^2 \mu > 0.$$

  Considerem la mètrica $\tilde{g} = u_p^{2^*-2} g$ conformement equivalent a g. Per un costat u_p satisfà $(*)$ amb $\lambda = \mu_p$ i per l'altre la curvatura $\tilde{S}$ de $\tilde{g}$ satisfà l'equació (5.3). En conseqüència, per tot $x \in M$

  $$\tilde{S}(x) = \mu_p u_p^{p-2^*}(x) > 0$$

  ja que $\mu_p > 0$ i $u_p > 0$. Per tant $\tilde{S}$ és estrictament positiva.

- *Cas zero* ($\mu = 0$). Pel lema 5.9, $\mu = 0$ implica que $\mu_p \geq 0$ per tot $p \in (2, 2^*]$.

  Vegem que $\mu_p = 0$ per qualsevol $p \in (2, 2^*]$. Suposem que $\mu_p > 0$ per algún valor $p \in (2, 2^*)$ i sigui u_p la solució del teorema 5.5. Repetint el raonament del cas positiu obtenim que la curvatura escalar $\tilde{S}$ de la mètrica $\tilde{g} = u_p^{2^*-2} g$ satisfà

  $$\tilde{S}(x) = \mu_p u_p^{p-2^*}(x) > 0 \qquad \forall x \in M.$$

Sigui $\tilde{I}$ el funcional de Yamabe en la mètrica $\tilde{g}$. Aleshores

$$\tilde{I}(v) \geq \inf_{x\in M}\{a, \tilde{S}(x)\} \left(\int_M |\widetilde{\nabla} v|^2 + v^2\, dV_{\tilde{g}}\right) \left(\int_M v^{2^*}\, dV_{\tilde{g}}\right)^{-2/2^*}.$$

Per la desigualtat de Sobolev $\|v\|_{2^*}^2 \leq C\|v\|_{H^1(M)}^2$ i per tant

$$\tilde{I}(v) \geq \inf_{x\in M}\{a, \tilde{S}(x)\} \frac{\|v\|_{H^1(M)}^2}{\|v\|_{2^*}^2} \geq \inf_{x\in M}\{a, \tilde{S}(x)\}\, C^{-1} > 0$$

per tot $v \in H^1(M)$ d'on deduïm que $\tilde{\mu} = \inf_{v\in H^1(M)} \tilde{I}(v) > 0$. La proposició 5.8 implica que $\mu = \tilde{\mu} > 0$, cosa que contradiu el fet que $\mu = 0$. En conclusió, $\mu_p = 0$ per qualsevol $p \in (2, 2^*]$.

Finalment, escollint un valor de $p \in (2, 2^*)$ qualsevol tenim que la mètrica $\tilde{g} = u_p^{2^*-2} g$ té curvatura escalar $\tilde{S} = \mu_p u_p^{p-2^*} = 0$ perquè $\mu_p = 0$. En altres paraules, $\tilde{S}$ és constantment igual a 0.

- *Cas negatiu* ($\mu < 0$). En aquest cas el teorema anterior ens garanteix l'existència d'una funció $u \in C^\infty(M)$ estrictament positiva que soluciona l'equació de Yamabe $(*)$ i amb la qual la mètrica $\tilde{g} = u^{2^*-2} g$ té curvatura escalar constant igual a $\mu < 0$.

$\square$

6 Conclusions

En aquest treball hem estudiat el problema de Yamabe i n'hem vist una resolució parcial. Hem partit d'un problema inicialment geomètric i n'hem deduït una reformulació en termes d'una equació en derivades parcials. Això ens ha permès fer ús d'eines i tècniques analítiques com el càlcul variacional i els espais de Sobolev per estudiar un problema geomètric. Per aquest motiu, una gran part del treball ha estat dedicada a la introducció i estudi d'aquests conceptes.

Començant per la secció 2, hem definit els espais de Sobolev i demostrar dos resultats de gran importància en la resolució d'EDPs: les desigualtats de Sobolev i el teorema de Rellich-Kondrakov. En la secció 3 hem fet una introducció bàsica a la convergència feble en espais de Hilbert i s'han donat les idees principals de l'aplicació del càlcul de variacions a l'estudi d'EDPs. Amb totes les eines analítiques definides, hem dedicat la secció 4 a la part més geomètrica del problema de Yamabe. En aquesta, hem donat tots els conceptes necessaris per entendre el context del problema i poder estudiar-lo.

Pel que fa a la resolució del problema de Yamabe, en la secció 5 hem començat presentant el problema i buscant una expressió per a la curvatura escalar $\tilde{S}$ de la nova mètrica conforme $\tilde{g}$ en termes de la curvatura inicial S. Això ens ha portat a una EDP el·líptica no lineal on apareix l'exponent crític $2^* = \frac{2n}{n-2}$ pel qual l'embedding de Sobolev $H^1 \subset L^{2^*}$ no és compacte. Hem vist com això complica la resolució d'aquesta equació i per aquest motiu, hem buscat resoldre primer la mateixa equació amb un exponent subcrític $p < 2^*$ usant les eines analítiques presentades en les seccions 2 i 3. Finalment, mitjançant les solucions del cas subcrític, hem pogut obtenir per aproximació una solució al problema de Yamabe ($p = 2^*$) quan $\tilde{S} \leq 0$.

Pel que fa al cas $\tilde{S} > 0$, la dificultat d'aquest és considerablement més alta i és el cas que històricament va trigar més a ser resolt. Els mètodes analítics presentats en aquest treball no són suficient per solucionar el cas positiu, el qual requereix la introducció de noves tècniques com per exemple les coordenades normals conformes, el teorema de massa positiva i el flux de Yamabe (vegeu Struwe [8] i Lee i Parker [7]). Malauradament, la complexitat d'aquests conceptes juntament amb l'extensió d'aquest treball no ens ha permès estudiar el cas $\tilde{S} > 0$ i només hem pogut veure una solució parcial del problema de Yamabe. Tot i així, el cas positiu queda disponible com a possible línia d'estudi i aprenentatge en el futur.

Per acabar, volem fer notar que tot i que el problema de Yamabe està completament resolt en varietats riemannianes compactes, encara hi ha investigació activa relacionada amb aquest tema. Per exemple, un pot plantejar-se si el mateix problema té solució quan la varietat no és compacte. Es poden trobar contraexemples com els que dona Zhiren Jin a Zhiren [10] que mostren que la resposta en general és negativa. Per altra banda també s'han trobat algunes condicions suficients per tenir solució en el cas no compacte, però encara no s'ha arribat a una comprensió total del problema en aquest cas.

Referències

[1] Herbert Amann i Joachim Escher. *Analysis III.* Brikhäuser Basel, 2009.

[2] Thierry Aubin. *Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry.* Springer Berlin, Heidelberg, 1998.

[3] Manfredo P. do Carmo. *Riemannian geometry.* Brikhäuser Boston, MA, 1992.

[4] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations.* Vol. 19. American Mathematical Society, 2010.

[5] John M. Lee. *Riemannian Manifolds. An Introduction to Curvature.* Springer New York, NY, 1997.

[6] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds.* Springer New York, NY, 2012.

[7] John M. Lee i Thomas H. Parker. "The Yamabe Problem". A: *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society* 17.1 (1987), pàg. 37 - 91.

[8] Michael Struwe. *Variational Methods. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems.* Springer Berlin, Heidelberg, 2008.

[9] Hidehiko Yamabe. "On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds". A: *Osaka Mathematical Journal* 12.1 (1960), pàg. 21 - 37.

[10] Jin Zhiren. "A counterexample to the Yamabe problem for complete noncompact manifolds". A: *Partial Differential Equations.* Springer Berlin, Heidelberg, 1988, pàg. 93 - 101.