Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

# Resultados sobre la axiomatización de las teorías de conjuntos ZF y NBG

Autor: Jose María Fernández Sánchez

Director: Dr. Enrique Casanovas Ruiz-Fornells
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 13 de junio de 2023

## Abstract

The goal of this project is to study the axiomatic systems typically used to present two versions of axiomatic set theory: ZF and NBG. Specifically, we will analyze whether some of their axioms are independent of the other ones or consistent with the remaining, being always assumed that the initial theory is consistent. Furthermore, we will also prove various theorems in order to answer the question about whether it is possible to axiomatize ZF or NBG with a finite amount of axioms, being the answer negative for the first and affirmative for the second. We will conclude with a result that asserts that NBG is a conservative extension of ZF, that is, both prove the same theorems regarding sets only.

To that end, we will have to first introduce some basic set theory preliminaries, study the Axiom of Foundation and the Cummulative Hierarchy and define the concepts of relativization and absoluteness for formulas.



## Resumen

Este proyecto tiene por objetivo estudiar los sistemas axiomáticos habitualmente utilizados para presentar dos versiones de la teoría axiomática de conjuntos: ZF y NBG. Concretamente, analizaremos si algunos de sus axiomas son independientes del resto o consistentes con los demás, asumiendo siempre que la teoría inicial es consistente. Además, también probaremos varios teoremas para responder a la pregunta de si es posible axiomatizar ZF o NBG con una cantidad finita de axiomas, siendo la respuesta negativa para la primera y afirmativa para la segunda. Finalizaremos con un resultado que afirma que NBG es una extensión conservativa de ZF, es decir, ambas demuestran los mismos teoremas acerca de conjuntos.

Para ello, deberemos previamente introducir algunos preliminares básicos de teoría de conjuntos, estudiar el Axioma de Regularidad y la Jerarquía Acumulativa y definir los conceptos de relativización y absolutez de fórmulas.



2020 Mathematics Subject Classification. 03-00, 03C55, 03C62, 03E30, 03E35, 03E45

## Agradecimientos

A mi tutor, Enrique, por enseñarme lo que sé de lógica y conjuntos y mostrarme cuánto me queda por saber.

A mis padres y toda mi familia, por creer siempre en mí y por patrocinarme.

A mi amigo David Arribas, por aguantarme durante los últimos años del grado. A él y a mi amigo Xavi, por hacerme reír y aconsejarme para que todo "se entienda". A David y Gerard, por aguantar mis frikadas que no comprenden. A Paula y Carla, por reírse de mis locuras.

A todos ellos y a otros tantos que me dejo por mencionar, por estar siempre ahí cuando los necesitaba: gracias.

# Índice

# Introducción

Todo matemático moderno posee conocimientos y habilidades elementales relativos a la Teoría de Conjuntos, pues ésta es el lenguaje en el que se desarrollan la práctica totalidad de las obras matemáticas contemporáneas. Sin embargo, no es tan ampliamente estudiada en los grados de matemáticas la teoría de conjuntos formal, axiomática.

Por ejemplo, a pesar de que los axiomas del cuerpo de los números reales han sido vistos por la mayoría de estudiantes de grado en la asignatura de análisis pertinente, se ignoran, no sólo el listado de axiomas habitual para el desarrollo de la teoría de conjuntos formal, sino también el hecho de que hay diversas axiomatizaciones de ésta y la mayoría dan lugar a teorías no equivalentes. También es usualmente desconocido que no toda colección definida a partir de una propiedad es un conjunto.

Durante inicios del siglo XX, cuando la teoría de conjuntos naíf empezó a tomar forma como aquella rama unificadora y fundacional de las matemáticas, ciertas lagunas lógicas de ésta fueron señaladas. Bien famosa es aquella carta en la que un joven Russell advierte a Frege de la inconsistencia de su sistema axiomático. Tras este episodio, la crisis de los fundamentos tuvo lugar y, con ella, quedó claro lo necesaria que es la búsqueda del rigor en los trabajos de los matemáticos. Ello, por un lado, tuvo como consecuencia la formación de una corriente formalista, comandada por David Hilbert, cuya pretensión era reducir toda la inmensidad de las matemáticas a un juego de deducción. Por otro, estableció también la diferenciación entre lo que es un conjunto, un objeto con todos los derechos, y lo que es una clase propia (una colección "demasiado grande como para ser tratada como elemento de otras colecciones").

Todas estas cuestiones sí son conocidas por cualquier alumno que haya tomado algún curso de los dedicados a la teoría de conjuntos, normalmente optativos en las facultades de matemáticas, en los que se estudian nociones como la construcción de los números naturales, la numerabilidad, el Axioma de Elección y algunos de sus equivalentes y consecuencias, la clase de los ordinales, la clase de los cardinales, la aritmética cardinal básica, etcétera.

Este trabajo, sin embargo, no es una extensión de un curso de grado de teoría de conjuntos, sino una breve indagación en la axiomatización de este campo dentro de los márgenes de tiempo y complejidad que un trabajo de fin de grado permite. En particular, tenemos dos objetivos principales.

- El primero, estudiar la axiomática de ZF (cuyas iniciales corresponden a Ernst Zermelo, quien primeramente brindó la lista original de axiomas, y Abraham Fraenkel, que añadió el Esquema de Reemplazo). Concretamente veremos: la consistencia del Axioma de Regularidad, la independencia del Esquema de Reemplazo, el Axioma de la Potencia, el Axioma del Infinito y la existencia de cardinales inaccesibles del resto de axiomas y la no axiomatizabilidad finita de ZF (asumiendo que ZF es consistente).

- El segundo, introducir NBG, una teoría de conjuntos alternativa a ZF, axiomatizada en primer lugar por John von Neumann y Paul Bernays y posteriormente pulida por Kurt Gödel (de ahí su nombre) y que surgió como solución a las paradojas previamente mencionadas, permitiendo utilizar las clases propias como objetos válidos de la teoría aunque con matices. Sobre NBG demostraremos dos hechos: que es una teoría conservatiza de ZF (no añade teoremas nuevos, sino que facilita la escritura y lectura de resultados de ZF que tratan con clases) y que, a diferencia de ZF, es finitamente axiomatizable

Mencionamos brevemente aquí la consistencia relativa del Axioma de Elección, que si bien habría sido interesante y posible tratar en un trabajo de fin de grado, habría hecho que nos excediéramos en número de páginas más de lo establecido.

## Estructura de la memoria

Este trabajo se dividirá en 5 partes, formando cada una de ellas un capítulo:

- En la primera, introduciremos varios conceptos y resultados previos necesarios para el desarrollo del cuerpo del proyecto propios de cursos elementales de teoría de conjuntos y lógica matemática. Tales son: la sintaxis de primer orden, algunas definiciones básicas de teoría de conjuntos, la axiomatización de ZF y nociones básicas sobre ordinales y cardinales. En el caso de la axiomatización de ZF, nos basamos en la presentación de los axiomas dada en [Kun80].

- En la segunda, ampliaremos nuestro repertorio de herramientas de teoría de conjuntos para proseguir hacia los resultados más interesantes del proyecto. Esto incluye el estudio de las relaciones bien fundadas, la definición de la jerarquía acumulativa, la obtención de algunas de sus propiedades más básicas y la relación de todos ellos con el Axioma de Regularidad. Todo ello vendrá de la mano de [Lev79, capítulo II, secciones 4-7], a cuyos teoremas, lemas, proposiciones y demostraciones hemos hecho ciertos retoques en contenido y orden de presentación para adaptarlos a nuestras necesidades.

- En la tercera, comenzaremos a definir conceptos como la relativización o absolutez de fórmulas y probaremos ciertos lemas referentes a ellos que nos servirán en el capítulo siguiente. Este fragmento del documento provendrá de [Kun80, capítulo IV, secciones 4-7] (excepto el Lema de Relativización, tomado de [Ebb84, página 124]).

- En la cuarta parte del proyecto será donde nos encontremos con los primeros resultados sustanciales, al probar la independencia y la consistencia relativas de algunos de los axiomas de ZF. La primera sección de este capítulo, que estudia la preservación o pérdida de la validez de los axiomas de ZFC en la jerarquía acumulativa, estará basada en un fragmento de [End77, capítulo 9, apartado "Natural Models"] en el que se trata el mismo tema (excepto el contraejemplo del fragmento del Esquema de Reemplazo, para el que hemos ideado uno más simple). El resto provendrá de [Kun80, capítulo IV, secciones 3-7].

- Por último, el quinto capítulo se centrará en definir la teoría de conjuntos NBG y demostrar de su axiomatizabilidad finita (extraído de [Göd40, capítulos I-II]), así como de estudiar su relación con ZF como extensión conservativa de la misma.
  La demostración de este último hecho será de cosecha propia, pues no hemos tomado ningún artículo o fragmento de libro como referencia más que una inspiración en [Sho54]. La idea me fue proporcionada por el tutor y yo la llevé a cabo con su ayuda en los puntos de mayor dificultad.
  El capítulo finaliza con una breve demostración de que el sistema dado para la axiomatización finita de NBG no es independiente, tomada de [Már48].

# 1. Preliminares

## 1.1. Lógica de primer orden

Un *vocabulario* o *lenguaje de primer orden* $L$ es un conjunto de símbolos dividido en tres partes disjuntas:

- Un conjunto de constantes, denotado $\mathcal{C}_L$.
- Un conjunto de símbolos de relación (*relatores/predicados*), denotado $\mathcal{R}_L$.
- Un conjunto de símbolos de función (*funtores*), denotado $\mathcal{F}_L$.

Cada funtor y cada predicado tienen asociado un número natural $n$, su *ariedad*. Se dice entonces que $F$ (o $R$) es *$n$-ario*. Si $n = 1$, $F$ (o $R$) es *monádico*.
Además del vocabulario $L$, en lógica de primer orden se utilizan como símbolos: los conectores proposicionales $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ y $\leftrightarrow$; los cuantificadores universal $\forall$ y existencial $\exists$; el conjunto de variables $\mathrm{VAR} = \{x_i\}_{i\in I}$; el símbolo de igualdad formal $\doteq$; y los paréntesis $(,)$.

El conjunto de *términos de $L$* se define por recursión de la siguiente forma

- $x$ es un término para cada $x \in \mathrm{VAR}$.
- $c$ es un término para cada $c \in \mathcal{C}_L$.
- $Ft_1 \ldots t_n$ es un término para cada funtor $n$-ario $F$ y términos $t_1, \ldots, t_n$.

El conjunto de *fórmulas de $L$* se define por recursión de la siguiente forma:

- $t_1 \doteq t_2$ es una fórmula para cualesquiera términos $t_1, t_2$.
- $Rt_1 \ldots t_n$ para cada predicado $n$-ario $R$ y términos $t_1, \ldots, t_n$.
- $\neg\varphi$ es una fórmula si $\varphi$ lo es
- $(\varphi \wedge \psi)$ es una fórmula si $\varphi, \psi$ lo son.
- $(\varphi \vee \psi)$ es una fórmula si $\varphi, \psi$ lo son.
- $(\varphi \rightarrow \psi)$ es una fórmula si $\varphi, \psi$ lo son.
- $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ es una fórmula si $\varphi, \psi$ lo son.
- $\exists x\varphi$ es una fórmula si $x \in \mathrm{VAR}$ y $\varphi$ lo es.
- $\forall x\varphi$ es una fórmula si $x \in \mathrm{VAR}$ y $\varphi$ lo es.

Además, por un resultado de **Lectura única**, cada fórmula es un único caso de entre todos estos, siendo también sus integrantes únicos. Decimos que $\phi$ es *atómica* cuando es de uno de los dos primeros tipos (una ecuación o un predicado aplicado a $n$ términos).

***Notación***. Cuando $R$ es un predicado binario, se puede escribir $t_1Rt_2$ en lugar de $Rt_1t_2$. Además, usaremos «$=$» en lugar de «$\doteq$» cuando no dé pie a confusión.

Si $\exists x\psi$ aparece como subfórmula de $\phi$, se dice que $\exists x\psi$ es el *alcance* de esa instancia de $\exists$ (ídem con $\forall$). Una aparición de $x$ es *ligada* si está dentro del alcance de alguna instancia de un cuantificador seguido de «$x$». Si una aparición de $x$ no está ligada, se dice que ésta es *libre*. Si $x$ tiene alguna aparición libre en $\phi$, se dice que $x$ es *variable libre de $\phi$*. Usamos

$\phi(x_1, \ldots, x_n)$ para referirnos a $\phi$ si sus variables libres están incluidas en la lista $x_1, \ldots, x_n$. Una fórmula sin variables libres es un *enunciado* o *sentencia*.

Una alternativa es definir los símbolos $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ y $\forall$ a partir del resto:

$$(\varphi \vee \psi) := \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \qquad (\varphi \rightarrow \psi) := (\neg\varphi \vee \psi)$$

$$(\varphi \leftrightarrow \psi) := ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg(\psi \rightarrow \varphi)) \qquad \forall x\phi := \neg\exists x\neg\varphi$$

manteniendo sus propiedades semánticas. En consecuencia, podemos despreocuparnos totalmente de ellos en las definiciones y demostraciones por inducción.

Utilizaremos las reglas de relajación de paréntesis, siempre que ello facilite la lectura.

**Teorema 1.1. (Inducción en la Lógica de Primer Orden)** *Supongamos una propiedad* P *para fórmulas tal que*

(1) *Toda fórmula atómica satisface* P.

(2) *Para cualesquiera fórmulas* $\psi, \chi$ *y variable* $x$*, si* $\psi, \chi$ *cumplen* P*, también* $(\psi \wedge \chi)$, $\neg\psi, \exists x\psi$ *verifican* P.

*Entonces toda fórmula satisface* P.

**Definición 1.2.** Dados un conjunto de enunciados $\Sigma$ y un enunciado $\varphi$, decimos que *de* $\Sigma$ *se deduce* $\varphi$ si existe una demostración de $\varphi$ a partir de los enunciados de $\Sigma$, a los que llamamos «premisas». Lo denotamos $\Sigma \vdash \varphi$. Si $\Gamma$ es también un conjunto de enunciados, decimos que *de* $\Sigma$ *se deduce* $\Gamma$ si $\Sigma \vdash \psi$ para todo $\psi \in \Gamma$. Lo denotamos $\Sigma \vdash \Gamma$.

**Lema 1.3.** *Si* $\Sigma \vdash \Gamma$ *y* $\Gamma \vdash \Lambda$ *entonces* $\Sigma \vdash \Lambda$.

**Definición 1.4.** Decimos que $\Sigma$ *y* $\Gamma$ *son equivalentes* si $\Sigma \vdash \Gamma$ y $\Gamma \vdash \Sigma$. Lo escribimos $\Sigma \equiv \Gamma$. Cuando $\Sigma$ o $\Gamma$ son un conjunto unitario $\{\varphi\}$, podemos escribir $\varphi$ en su lugar.

**Definición 1.5.** Dado un conjunto de enunciados $\Sigma$, decimos que $\Sigma$ *es consistente* si no existe enunciado $\psi$ tal que $\Sigma \vdash \psi$ y $\Sigma \vdash \neg\psi$. Lo abreviamos escribiendo $\mathrm{Con}(\Sigma)$.

**Lema 1.6.** $\Sigma$ *es inconsistente si y sólo si* $\Sigma \vdash \varphi$ *para todo enunciado* $\varphi$.

*Demostración.* La dirección de derecha a izquierda es trivial. En la otra dirección, suponemos que hay una sentencia $\psi$ tal que $\Sigma \vdash \psi$ y $\Sigma \vdash \neg\psi$. Sea $\varphi$ otra sentencia cualquiera. Como $\Sigma \vdash \psi$, se cumple que $\Sigma \vdash (\neg\varphi \rightarrow \psi)$, lo cual equivale a $\Sigma \vdash (\neg\psi \rightarrow \varphi)$ por la ley del contrarrecíproco. Como también $\Sigma \vdash \neg\psi$, Modus Ponens nos lleva a que $\Sigma \vdash \varphi$. $\square$

Este último lema justifica que queramos evitar las teorías inconsistentes.

**Definición 1.7.** Dados dos conjuntos de enunciados $\Sigma$ y $\Gamma$, decimos que $\Gamma$ *es independiente de* $\Sigma$ si hay algún $\psi \in \Gamma$ tal que $\Sigma \nvdash \psi$. Si $\Gamma = \{\varphi\}$, decimos que $\varphi$ *es independiente de* $\Sigma$. Si no hay $\phi \in \Sigma$ tal que $\Sigma \setminus \{\phi\} \vdash \phi$, se dice que $\Sigma$ *es independiente*.

**Lema 1.8.** $\Sigma \cup \{\varphi\}$ *es consistente si y sólo si* $\neg\varphi$ *es independiente de* $\Sigma$.

**Definición 1.9.** Dados dos conjuntos de enunciados $\Sigma, \Gamma$, decimos que $\Gamma$ *axiomatiza* $\Sigma$ si $\Gamma \vdash \Sigma$ y $\Sigma \vdash \Gamma$. Una *axiomatización finita de* $\Sigma$ es un conjunto $\Gamma$ finito que axiomatiza $\Sigma$.

**Definición 1.10.** Se define la *teoría de* $\Sigma$ como $\Sigma^{\models} := \{\psi \mid \Sigma \vdash \psi\}$.

***Nota.*** A menudo abusaremos del lenguaje, dando el mismo nombre a un conjunto de enunciados y la teoría que generan. El contexto revelará la verdadera intención de la expresión.

## 1.2. Conjuntos, clases, pares ordenados y relaciones binarias

Trabajaremos mayoritariamente en la teoría de conjuntos axiomática de Zermelo-Fraenkel, abreviada ZF, que tiene por objetos los conjuntos y cuyos axiomas damos más adelante. Un conjunto es un elemento del universo de ZF, y todos los elementos de un conjunto son conjuntos. El lenguaje de ZF consta solamente de un predicado binario, $\in$; o sea, $L_{\mathrm{ZF}} \coloneqq \{\in\}$. «$x \in y$» se interpreta como que $x$ e $y$ son conjuntos y $x$ pertenece a $y$. Definimos $x \subseteq y \coloneqq \forall t(t \in x \to t \in y)$, que se lee $x$ *es subconjunto de* $y$.
Una *clase* $A$ es una colección de conjuntos definida a partir de una cierta propiedad: $A = \{x \mid \phi(x)\}$. Cuando un conjunto $x$ verifica la propiedad de $A$ (o sea, cuando $\phi(x)$), decimos $x \in A$. Si $B = \{x \mid \psi(x)\}$, entonces $A \subseteq B$ significa $\forall x(\phi(x) \to \psi(x))$.

Todo conjunto $x$ es a su vez una clase (ya que $x = \{y \mid y \in x\}$), pero no toda clase es un conjunto. Por ejemplo, la clase de la paradoja de Russell, definida $\mathbf{R} \coloneqq \{x \mid x \notin x\}$, no puede ser conjunto, porque entonces entraríamos en contradicción al preguntarnos si $\mathbf{R} \in \mathbf{R}$ o no. No podemos cuantificar sobre clases en ZF. Aunque no toda clase sea un conjunto, abusaremos del lenguaje introduciendo clases en fórmulas (en ecuaciones o como segundo argumento del predicado $\in$, como hemos aclarado antes).

A una clase que no es un conjunto se le llama *clase propia*. Ejemplos importantes de estas son la clase universal $\mathbf{V} = \{x \,|\, x \doteq x\}$, la clase de todos los ordinales $\mathbf{On}$, la de todos los cardinales $\mathbf{Card}$ y la de los conjuntos bien fundados $\mathbf{Wf}$.

Se define el *par ordenado de* $x$ *e* $y$ como $\langle x, y\rangle \coloneqq \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Esta definición cumple la propiedad esperada de los pares ordenados:

$$\forall x \forall y \forall x' \forall y' \big(\langle x, y\rangle \doteq \langle x', y'\rangle \leftrightarrow x \doteq x' \wedge y \doteq y'\big)$$

Se llama *clase relacional* o *relación binaria* a toda clase $R$ de pares ordenados $R = \{\langle x, y\rangle | \phi(x, y)\}$. Escribimos $xRy$ en lugar de $\phi(x, y)$. Ponemos además $R^{-1} \coloneqq \{\langle y, x\rangle | xRy\}$ y $R[A] \coloneqq \{y \mid \exists x(x \in A \wedge xRy)\}$. Si una clase relacional $F$ definida por una propiedad $\phi$ es *funcional para* $x$ (o sea, cumple que $\forall x \forall y \forall y'(\phi(x, y) \wedge \phi(x, y') \to y \doteq y')$ ) entonces se le llama *clase funcional* y, dado un $x$, al único $y$ tal que $\phi(x, y)$ se le llama $F(x)$, siempre y cuando exista.

## 1.3. Axiomas de ZF y ZFC

***Notación.*** Definimos $(\forall x \in y)\phi \coloneqq \forall x(x \in y \to \phi)$ y $(\exists x \in y)\phi \coloneqq \exists x(x \in y \wedge \phi)$.

ZF es el conjunto de las siguientes fórmulas (axiomas):

**Ax 1.** ***Extensionalidad:*** $\forall x \forall y \big(\forall t(t \in x \leftrightarrow t \in y) \to x \doteq y\big)$

**Ax 2.** ***Esquema axiomático de Separación:*** Dada una fórmula $\phi$ con variables libres $t, w_1, \ldots, w_n$ donde $z$ no es ninguna de ellas:

$$\forall w_1, \ldots w_n \forall x \exists z \forall t\big(\, t \in z \leftrightarrow t \in x \wedge \phi(t, w_1, \ldots, w_n)\,\big)$$

**Ax 3.** ***Par:*** $\forall x \forall y \exists z \forall t\big(\, t \in z \leftrightarrow t \doteq x \vee t \doteq y\,\big)$
A tal $z$ lo llamamos $\{x, y\}$.

**Ax 4.** ***Unión:*** $\forall x \exists z \forall t\big(\, t \in z \leftrightarrow \exists y(t \in y \wedge y \in x)\,\big)$
A tal $z$ lo llamamos $\bigcup x$.

**Ax 5. (P)** ***Potencia:*** $\forall x\exists z\forall y\big(\, y \in z \leftrightarrow y \subseteq x \,\big)$
A tal $z$ lo llamamos $\mathcal{P}(x)$.

**Ax 6. (Inf)** ***Infinito:*** $\exists a\big(\, 0 \in a \wedge (\forall x \in a)(\mathcal{S}(x) \in a) \,\big)$, donde $\mathcal{S}(x) \coloneqq x \cup \{x\}$ y $0 \coloneqq \varnothing$.

**Ax 7. (AF)** ***Regularidad/Fundación:*** $\forall a\big(\, a \neq 0 \rightarrow (\exists x \in a)(x \cap a \doteq 0) \,\big)$

**Ax 8.** ***Esquema axiomático de Reemplazo:*** Dada una fórmula $\phi$ con variables libres $x, y, w_1, \ldots, w_n$:

$$\forall w_1, \ldots, w_n \Big[ \forall x \forall y \forall y' \big(\, \phi(x, y, w_1, \ldots, w_n) \wedge \phi(x, y', w_1, \ldots, w_n) \rightarrow y \doteq y' \,\big) \\ \rightarrow \forall a \exists b \forall y \big( y \in b \leftrightarrow (\exists x \in a)\phi(x, y, w_1, \ldots, w_n) \big) \Big]$$

Dicho de otro modo: si $F$ es una clase funcional y $a$ es un conjunto, entonces también $F[a]$ es un conjunto.

Eliminando Ax8 nos queda la teoría de conjuntos original de Zermelo, Z. Si no se especifica lo contrario, trabajaremos en ZF$^-$.
Añadiendo el siguiente axioma a ZF nos queda la teoría llamada ZFC:

**Ax 9. (AC)** ***Elección:*** $\forall A \big[\, 0 \notin A \rightarrow (\exists f : A \longrightarrow \bigcup A)(\forall a \in A)(f(a) \in a) \,\big]$

Nótese cómo hemos utilizado la expresión «esquema axiomático» en lugar de «axioma» en Ax2 y Ax8. Esto es debido a que, como dijimos en la sección 1.2, no podemos cuantificar sobre fórmulas ni clases (no son objetos de nuestra teoría). Ello nos obliga a considerar infinitas instancias de los pretendidos axiomas de separación y reemplazo, una por cada fórmula. Discutiremos esto con más profundidad en otros capítulos.

***Notación.*** «ZF$-$P$-$Inf$+\neg$Inf» significa «*los axiomas de* ZF *excepto* P *e* Inf *y añadiendo* $\neg$Inf». Abreviamos «ZF$-$AF» como ZF$^-$, ídem para ZFC$^-$.

## 1.4. Más notación

***Notación.*** Definimos las siguientes operaciones básicas entre conjuntos:

$$x \cup y \coloneqq \bigcup\{x, y\} \qquad x \times y \coloneqq \{\langle a, b\rangle \mid a \in x \wedge b \in y\}$$
$$\bigcap x \coloneqq \{t \mid (\forall y \in x)(t \in y)\} \text{ si } x \neq 0 \qquad x \sqcup y \coloneqq (x \times \{0\}) \cup (y \times \{1\})$$
$$x \cap y \coloneqq \bigcap\{x, y\} \qquad {}^{y}x \coloneqq \{f \mid f : x \longrightarrow y\}$$

La existencia del producto cartesiano y la del conjunto de funciones requieren del Axioma de la Potencia para ser demostradas. Esta información será eventualmente útil.

***Notación.*** Una *familia indexada por $I$* es una función $a$ de dominio $I$ expresada de la forma $\langle a_i \rangle_{i\in I} \coloneqq \{\langle i, a_i\rangle \mid i \in I\}$, donde $a_i \coloneqq a(i)$. Es una generalización del par ordenado: $\langle a_i\rangle_{i\in I} \doteq \langle b_j\rangle_{j\in J} \leftrightarrow I \doteq J \wedge (\forall i \in I)(a_i \doteq b_i)$.
Un *conjunto indexado por $I$* es un conjunto expresado de la forma $\{X_i\}_{i\in I} \coloneqq \operatorname{rec}\langle X_i\rangle_{i\in I}$.

**Definición 1.11.** Se definen la *gran unión*, el *producto cartesiano* y la *gran unión disjunta de un conjunto indexado* de la siguiente forma:

(i) $\bigcup_{i\in I} X_i \coloneqq \bigcup\big(\{X_i\}_{i\in I}\big)$

(ii) $\bigtimes_{i\in I} X_i \coloneqq \{a \mid (a \text{ es familia}) \wedge (\mathrm{dom}(a) \doteq I) \wedge (\forall i \in I)(a_i \in X_i)\}$

(iii) $\bigsqcup_{i\in I} X_i \coloneqq \bigcup_{i\in I}(X_i \times \{i\})$

La *gran intersección de un conjunto indexado* se define de manera similar a la gran unión.

**Definición 1.12.** Si $R, S$ son relaciones, la *composición de $S$ con $R$* se denota $R \circ S \coloneqq \{\langle x, z\rangle \mid \exists y(xSy \wedge yRz)\}$. Si $A$ es una clase y $R$ una clase funcional, la *restricción de $F$ a $A$* se define como $F\restriction_A \coloneqq F \cap (A \times \mathbf{V})$.

## 1.5. Buen orden, ordinales y cardinales

**Definición 1.13.** Para una relación binaria $R$, definimos los siguientes conceptos:

(i) $R$ es *irreflexiva* si verifica que $\forall x \neg xRx$.

(ii) $R$ es *asimétrica* si verifica que $\forall x\forall y(xRy \to \neg yRx)$.

(iii) $R$ es *transitiva* si verifica que $\forall x\forall y\forall z(xRy \wedge yRz \to xRz)$.

(iv) $R$ es *total* si verifica que $\forall x\forall y(xRy \vee yRx \vee x \doteq y)$.

(v) $R$ es un *orden parcial* si es irreflexiva, asimétrica y transitiva. Es un *orden total* si es un orden parcial y es total.

**Observación 1.14.** Si $R$ es irreflexiva y transitiva, automáticamente es asimétrica.

**Definición 1.15.** Dados una relación binaria $R$, una clase $A$ y un $x \in A$, se dice que *$x$ es $R$-minimal en $A$* si satisface $(\forall y \in A)\neg yRx$. Si $x$ cumple que $(\forall y \in A)(y \not\doteq x \to xRy)$, se dice que *$x$ es $R$-mínimo en $A$*.

**Observaciones 1.16.** En una clase $A$, todo elemento $R$-mínimo es $R$-minimal si $R$ es asimétrica. Además, si $R$ es un buen orden débil, como es total, se da el recíproco.

**Definición 1.17.** Sea $R$ una relación binaria. Se dice que es un *buen orden débil* (estricto) en $A$ si $R \cap (A \times A)$ es irreflexiva, asimétrica, transitiva, total y satisface el *principio del elemento minimal*:

$$\forall X\big(\, X \neq 0 \wedge X \subseteq A \to (\exists x \in X)(\forall y \in X)\neg yRx\,\big)$$

***Nota.*** Ni A ni R tienen por qué ser conjuntos. Además, en la práctica solemos usar relaciones binarias $R$ tales que $R = R \cap (A \times A)$.

**Definición 1.18.** Llamamos $\min_R X$ al elemento $R$-mínimo de $X$.

**Definición 1.19.** Se dice que una relación binaria $R$ en $A$ es *set-like* si cumple que, para todo $x \in A$, $A_{Rx} \coloneqq R^{-1}[\{x\}] = \{a \in A \mid aRx\}$ (el *segmento inicial determinado por $x$*) es un conjunto. Un buen orden débil set-like es un *buen orden*.

**Axioma 1.20. (WOP)** ***Principio del Buen Orden:*** $\forall A \exists R(\, R \text{ bien-ordena } A\,)$

**Teorema 1.21.** AC $\leftrightarrow$ WOP

**Definición 1.22.** Una clase $A$ es *transitiva* si satisface $\forall x(x \in A \to x \subseteq A)$.

**Definición 1.23.** Un *ordinal* es un conjunto $\alpha$ transitivo y bien ordenado por la relación de pertenencia $\in_\alpha := \{(\gamma,\delta) \in \alpha \times \alpha \mid \gamma \in \delta\}$. Las letras griegas $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\zeta,\eta$ siempre denotarán ordinales, aunque no lo explicitemos. Ponemos $\mathbf{On} := \{\alpha \mid \alpha \text{ es ordinal}\}$.

**Proposición 1.24.** *Existe un conjunto, $\omega$, que es la intersección de todos los conjuntos que satisfacen la propiedad demandada por el Axioma del Infinito. Además, es transitivo, y a sus elementos los llamamos* números naturales.

**Definición 1.25.** Una familia $a = \langle a_i \rangle_{i\in I}$ es una *secuencia en $X$* si $I$ es un ordinal y $\operatorname{rec}(a) \subseteq X$. Una *$\alpha$-secuencia en $X$* es una secuencia en $X$ de dominio $\alpha$. Una *sucesión en $X$* es una $\omega$-secuencia en $X$. Una *$n$-tupla en $X$* es una $n$-secuencia en $X$ de longitud $n \in \omega$. La *longitud* de una secuencia es su dominio. $X = \mathbf{V}$ si no se especifica.

**Proposición 1.26.** *Toda clase $A$ de ordinales está bien ordenada por la relación de pertenencia $\in$. En particular, $\mathbf{On}$ lo está. Escribimos $\alpha < \beta$ como sinónimo de $\alpha \in \beta$. El orden reflexivo $\leqslant$ asociado es $\subseteq$.*

***Nota.*** No especificaremos quién es $R$ cuando hablemos de ordinales: siempre será $\in$.

**Definición 1.27.** Definimos $\sup A := \text{mín}\{\alpha \mid (\forall\beta \in A)(\beta \leqslant \alpha)\}$ para todo conjunto $A$.

**Proposición 1.28.** *Si $\alpha$ es un ordinal, $\alpha+1 := S(\alpha)$ también lo es, y es el menor ordinal $\beta$ tal que $\alpha < \beta$. Por tanto, todo $n \in \omega$ es ordinal.*

**Corolario 1.29.** *$\omega$ es un ordinal por las tres proposiciones anteriores.*

**Teorema 1.30. (Inducción ordinal)** *si $\phi$ es una fórmula con $\alpha$ como variable libre y se verifica*

$$(\forall\alpha \in \mathbf{On})(\forall\beta < \alpha)\big(\,\phi(\beta) \to \phi(\alpha)\,\big)$$

*entonces $(\forall\alpha \in \mathbf{On})\phi(\alpha)$.*

**Teorema 1.31. (Recursión ordinal)** *Sea $G : \mathbf{V} \mapsto \mathbf{V}$ una clase funcional. Existe entonces una única clase funcional $F : \mathbf{On} \longrightarrow \mathbf{V}$ tal que*

$$(\forall\alpha \in \mathbf{On})\big(\,F(\alpha) \doteq G(F\restriction_\alpha)\,\big)$$

**Proposición 1.32.** (i) *Para todo ordinal $\alpha$, $\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$*

(ii) *Para todo ordinal $\alpha$ se cumple una y sólo una de las siguientes condiciones:*

- $\alpha \doteq 0$
- *$\alpha$ es* sucesor*: $\exists\beta(\alpha \doteq \beta + 1)$*
- *$\alpha$ es* límite*: $(0 < \alpha \wedge \alpha \doteq \bigcup_{\beta<\alpha} \beta)$*

(iii) *Para todo conjunto $A$ ordinales,* $\sup A = \bigcup A$.

**Observación 1.33.** Se puede utilizar el resultado anterior para hacer más cómodas las demostraciones por inducción y las definiciones por recursión, distinguiendo entre los casos 0, sucesor y límite.

**Definición 1.34.** Decimos $x \preceq y$ (*$x$ es inyectable en $y$*) cuando existe una $f : x \longrightarrow y$ inyectiva. Decimos $x \sim y$ (*$x$ es biyectable con $y$*) cuando existe una $f : x \longrightarrow y$ biyectiva. Si $x \preceq y$ y $x \nsim y$ entonces abreviamos $x \prec y$.

**Teorema 1.35. (Schröder-Bernstein)** $\forall x \forall y\big(x \preceq y \wedge y \preceq x \to x \sim y\big)$

**Proposición 1.36.** *Para todo conjunto $A$ se tiene que* ${}^{A}2 \sim \mathcal{P}(A)$.

**Definición 1.37.** Se dice que $\kappa$ es un *cardinal* cuando es ordinal y no existe ordinal $\beta < \kappa$ tal que $\beta \sim \kappa$. Las letras griegas $\kappa, \lambda, \mu$ siempre denotarán cardinales, aunque no lo explicitemos. Ponemos $\mathbf{Card} \coloneqq \{\kappa \mid \kappa \text{ es cardinal}\} \subseteq \mathbf{On}$.

**Ejemplo.** $\omega$ es un cardinal, y $n$ es un cardinal para todo $n \in \omega$.

**Definición 1.38.** Un conjunto $x$ es *finito* cuando $x \sim n$ para algún $n \in \omega$ y es *infinito* si no es finito. Si $x \preceq \omega$, $x$ es *numerable*.

**Lema 1.39.** *Todo cardinal infinito es un ordinal límite.*

**Definición 1.40.** Dado un cardinal $\kappa$, se define el *cardinal sucesor de* $\kappa$ como $\kappa^+ \coloneqq \{\alpha \mid \alpha \preceq \kappa\}$, que es el menor cardinal $\lambda$ tal que $\kappa < \lambda$. Un cardinal $\kappa$ es *cardinal límite* cuando $\kappa = \bigcup_{\lambda<\kappa} \lambda > 0$. Todo cardinal es 0, sucesor o límite, y sólo una de estas tres.

**Definición 1.41.** Si $R$ es una relación binaria en una clase $A$, se abrevia diciendo que $\langle A, R\rangle$ es una *estructura*. Si $A$ es un conjunto, se dice que $\langle A, R\rangle$ es un *conjunto bien ordenado*.

**Definición 1.42.** Sean dos estructuras $\langle A, R\rangle, \langle B, S\rangle$. Decimos $\langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle$ si existe un *isomorfismo de órdenes* entre ellas, o sea, una función $f : A \longrightarrow B$ biyectiva tal que $\forall a \forall b \big(aRb \leftrightarrow f(a)Sf(b)\big)$.

**Proposición 1.43.** *Sea $\langle A, R\rangle$ un conjunto bien ordenado. Existe entonces un único ordinal $\alpha$ tal que $\langle A, R\rangle \cong \langle \alpha, \in_\alpha\rangle$, al cual llamamos* $\mathrm{OT}(A, R)$*, su* tipo de orden.

**Definición 1.44.** Si para un conjunto $A$ existe al menos un buen orden, definimos $|A|$, la *cardinalidad de* $A$, de la siguiente forma:

$$|A| \coloneqq \min\{\alpha \mid \exists R\big(\,\langle A, R\rangle \cong \langle \alpha, \in_\alpha\rangle\,\big)\}$$

Evidentemente, $|A|$ será un cardinal.

**Corolario 1.45.** (AC) *Para todo par de conjuntos $A, B$, o bien $A \preceq B$ o bien $B \preceq A$.*

**Definición 1.46.** Se define por recursión ordinal la clase funcional $\aleph$ así:

$$\aleph_\alpha \coloneqq \begin{cases} \omega & \text{si } \alpha = 0 \\ \aleph_\beta^+ & \text{si } \alpha = \beta + 1 \\ \bigcup_{\beta<\alpha} \aleph_\beta & \text{si } \alpha \text{ es límite} \end{cases}$$

$\aleph$ es un isomorfismo de buenos órdenes entre $\langle \mathbf{Card}_{\geqslant\omega}, \in\rangle$ y $\langle \mathbf{On}, \in\rangle$. Definimos $\omega_\alpha \coloneqq \aleph_\alpha$.

**Definición 1.47.** (AC) Para todo par de cardinales $\kappa, \lambda$ se definen:

(i) $\kappa + \lambda \coloneqq |\kappa \sqcup \lambda|$ (ii) $\kappa \cdot \lambda \coloneqq |\kappa \times \lambda|$ (iii) $\kappa^\lambda \coloneqq |{}^\lambda\kappa|$

**Lema 1.48.** (AC) *Sean $\kappa, \lambda \geqslant \omega$. Se tiene entonces $\kappa \cdot \lambda = \kappa + \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.*

**Definición 1.49.** (AC) Dado un conjunto indexado de cardinales $\{\kappa_i\}_{i\in I}$ se definen:

(i) $\sum_{i\in I}\kappa_i := |\bigsqcup_{i\in I}\kappa_i|$ (ii) $\prod_{i\in I}\kappa_i := |\bigtimes_{i\in I}\kappa_i|$

**Lema 1.50.** *Para cualquier conjunto indexado $\{X_i\}_{i\in I}$ se satisface la desigualdad*

$$|\bigcup_{i\in I} X_i| \leqslant \sum_{i\in I}|X_i|$$

**Teorema 1.51.** (AC) *Supongamos que $\{X_i\}_{i\in I}$ es un conjunto indexado tal que $|I|\geqslant\omega$ o hay al menos un $i\in I$ tal que $|X_i|\geqslant\omega$. Se da entonces que*

$$\sum_{i\in I}|X_i| = |I| + \sup\{|X_i| : i\in I\}$$

**Definición 1.52.** (i) Sea $\kappa$ un cardinal. Se dice que $\alpha$ es *cofinal en $\kappa$* si existe una función $f\in{}^{\alpha}\kappa$ tal que $\operatorname{rec}(f)$ no tiene cota superior dentro de $\kappa$. Equivalentemente, si existe una $f\in{}^{\alpha}\kappa$ tal que $\bigcup\operatorname{rec}(f)=\kappa$.

(ii) La *cofinalidad de $\kappa$* se define como $\operatorname{cf}(\kappa) := \text{mín}\{\alpha \mid \alpha \text{ es cofinal en } \kappa\}$.

(iii) Evidentemente, $\operatorname{cf}(\kappa)\leqslant\kappa$. Se dice que $\kappa$ es *regular* si $\operatorname{cf}(\kappa)=\kappa$.

(iv) Se dice que un cardinal $\kappa$ es *débilmente inaccesible* si es cardinal límite y regular.

(v) (AC) Se dice que un cardinal $\kappa>\omega$ es *fuertemente inaccesible* si $(\forall\lambda<\kappa)(2^{\lambda}<\kappa)$.

**Observación 1.53.** (AC) Todo cardinal fuertemente inaccesible es débilmente inaccesible.

Terminamos este capítulo con un resultado sencillo que nos será eventualmente útil:

**Lema 1.54.** *Todo axioma del Esquema de Separación es consecuencia de los axiomas de* Extensionalidad + Esquema de Reemplazo.

*Demostración.* Sean $\phi$ una fórmula con variables libres $t, w_1,\dots,w_n$ y $x, w_1,\dots,w_n$ conjuntos. Buscamos un $z$ tal que $\forall t\big(t\in z\leftrightarrow t\in x\wedge\phi(t,w_1,\dots,w_n)\big)$.
Abreviamos $\psi(t) := \phi(t,w_1,\dots,w_n)$. Si no hay $t\in x$ tal que $\psi(t)$, no hace falta demostrar nada, pues $z := 0 = \{t\mid t\in x\wedge\psi(t)\}$ y es un conjunto. Si no, tomamos un $a\in x$ tal que $\psi(a)$ y definimos la clase funcional $F:\mathbf{V}\longrightarrow x$ mediante la fórmula $tFy \Leftrightarrow (\psi(t)\wedge y\doteq t)\vee(\neg\psi(t)\wedge y\doteq a)$. Entonces, por Reemplazo, $z := F[x]$ es un conjunto, y sólo queda ver que cumple lo que se le pide:

Observamos que $y\in z=F[x]$ si y sólo si hay un $t\in x$ tal que $tFy$, o sea, que o bien $\psi(t)\wedge y\doteq t$ o bien $\neg\psi(t)\wedge y\doteq a$. En ambos casos se cumple que $y\in x\wedge\psi(y)$. Además, recíprocamente, si $y\in x\wedge\psi(y)$, entonces $yFy\wedge y\doteq y$ con $y\in x\Rightarrow y\in F[x]=z$.

En suma, $z=\{t\in x\mid\psi(t)\}$, cosa que acaba la demostración. $\square$

# 2. Buena fundación y jerarquía acumulativa

## 2.1. Clausura de una relación binaria

En este capítulo introduciremos los llamados conjuntos bien fundados, algunas de sus propiedades, su clasificación en la llamada jerarquía acumulativa según una función de rango que definiremos y la clase de todos los conjuntos bien fundados, **Wf**. Para ello nos valdremos de un par de secciones previas sobre relaciones binarias y relaciones bien fundadas, que nos permitirán obtener resultados acerca de los conjuntos bien fundados.

**Definición 2.1.** Sea $R \subseteq \mathbf{V} \times \mathbf{V}$ una relación binaria:

(i) Se llama *ancestral de* $R$ a $R^* := \bigcup_{0<n\in\omega} R^n$, donde $R^0 := \mathrm{id}$ y $R^{n+1} := R^n \circ R$.

(ii) Para $1 < n \in \omega$, se llama *$R$-cadena en $A$* (de longitud $n$) a una $n$-tupla $x$ en $A$ tal que $x_i R x_{i+1}$ para todo $i \in n-1$. Se dice entonces que $x$ va de $x_0$ a $x_{n-1}$.

(iii) Una $R$-cadena $x$ en $A$ tal que $x_n R x_0$ de llama *$R$-ciclo de $A$*.

(iv) Se dice que una sucesión $x$ en $A$ es una *$R$-sucesión en $A$* si $(\forall i \in \omega)(x_i R x_{i+1})$.

(v) Una clase $A$ es *$R$-cerrada* si $R[A] \subseteq A$.

(vi) Se define la *$R$-clausura* de una clase $A$ como $cl_R(A) := A \cup R^*[A] = \bigcup_{n\in\omega} R^n[A]$.

**Lema 2.2.** *Sea $R$ una relación binaria:*

(i) $\forall x \forall y \big[\langle x, y\rangle \in R^* \leftrightarrow \exists n \exists z (z \text{ es } R\text{-cadena de longitud } n \text{ de } x \text{ a } y)\big]$

(ii) $cl_R(A)$ *es la menor (por inclusión) clase $R$-cerrada que contiene a $A$.*

(iii) $R^*$ *es la menor relación binaria transitiva que contiene a $R$.*

(iv) *Si $R$ es set-like, $R^*$ también. Si $A$ una clase es $R$-cerrada, también es $R^*$-cerrada.*

(v) $(R^*)^{-1} = (R^{-1})^*$

<u>*Demostración.*</u> (i) Esto es evidente, pues $xR^*y \Leftrightarrow$ hay un $n \in \omega$ tal que $xR^n y$ (o sea, hay $x_1, \dots, x_{n-1}$ tales que $xRx_1R\dots x_{n-1}Ry$) $\Leftrightarrow$ hay una cadena de longitud $n+1$ de $x$ a $y$.

(ii)
- Primero vemos que $cl_R(A)$ es $R$-cerrada: Sean $x \in cl_R(A) = A \cup R^*[A]$ e $y$ tal que $xRy$. Entonces, o bien $x \in A$ o bien existe una $R$-cadena $\langle x_0, \dots, x_n\rangle$ de $x_0 \in A$ a $x_n = x$. En el primer caso, $xRy$ con $x \in A \Rightarrow y \in R[A] \Rightarrow y \in cl_R(A)$, como queríamos. En el segundo caso, $\langle x_0, \dots, x_n, y\rangle$ es una $R$-cadena desde $x_0$ hasta $y$ con $x_0 \in A$, por tanto $y \in R^n[A] \subseteq cl_R(A)$, como queríamos.
- Ahora, sea $B$ una clase $R$-cerrada con $A \subseteq B$. Queremos ver que $cl_R(A) \subseteq B$. Y es que, si $x \in cl_R(A)$, entonces existe $\langle x_0, \dots, x_n\rangle$ con $x_0 \in A \subseteq B$ y $x_n = x$. Al ser $B$ $R$-cerrada, por un argumento inductivo sencillo vemos que $x_1 \in B \Rightarrow x_2 \in B \Rightarrow \dots \Rightarrow x_n = x \in B$, así que $cl_R(A) \subseteq B$, que era lo que buscábamos.

(iii) $R^*$ es transitiva puesto que $xR^*yR^*z$ implica que hay $n, m, x_0, \ldots, x_{n-1}y_1, \ldots, y_{m-1}$ tales que $xRx_0R \ldots Rx_{n-1}RyRy_1R \ldots Ry_{m-1}z \Rightarrow xR^*z$, como queríamos.
Sean ahora una relación transitiva $S$ con $R \subseteq S$ y dos $x, y$ tales que $xR^*y$. Entonces hay $n \in \omega$ y $x_0, \ldots, x_{n-1}$ tales que $xRx_0R \ldots Rx_{n-1}Ry$. Como $R \subseteq S$, tenemos que $xSx_0S \ldots Sx_{n-1}Sy$ y, al ser $S$ transitiva, esto implica que vemos que $xSy$, como queríamos.

(iv) Sea $x$ un conjunto. Ponemos $S = R^{-1}$ y $S^*[x] = \bigcup_{n \in \omega} S^n[x]$. Sabemos que $S[x]$ es un conjunto por hipótesis y, si $S^n[x]$ es un conjunto, entonces por el Esquema de Reemplazo $S^{n+1}[x] = \bigcup_{y \in S^n[x]} \{z \mid ySz\}$ también es un conjunto. Por tanto, también por reemplazo, $S^*[x] = (R^{-1})^*[x]$ es un conjunto.
Para la segunda parte, $R^*[A] = \bigcup_{0<n \in \omega} R^n[A]$. Por hipótesis, $R[A] \subseteq A$. Además, si $R^n[A] \subseteq A$ entonces $R^{n+1}[A] = R[R^n[A]] \subseteq R[A] \subseteq A \Rightarrow R^*[A] \subseteq A$.

(v) El apartado (i) lo hace evidente. □

## 2.2. Relaciones bien fundadas

**Definición 2.3.** Una relación $R$ se dice *bien fundada* en una clase $A$ cuando es set-like y cumple el principio del elemento minimal en $A$. Si no se especifica la clase en la que es bien fundada, entonces lo es en $\mathbf{V}$.

**Observaciones 2.4.** Al no exigir que $R$ sea total ni transitiva, la $R$-minimalidad de un elemento $x$ en $X \subseteq A$ no implica que sea $R$-mínimo en $X$. Además, todo buen orden es también una relación bien fundada.

**Proposición 2.5.** (i) *Si una relación $R$ cumple el principio del elemento minimal en $A$, entonces no existe ninguna $R^{-1}$-sucesión en $A$.*

(ii) *Si para una relación $R$ no existe ninguna $R^{-1}$-sucesión en $A$, entonces todo conjunto $X \subseteq A$ no vacío bien-ordenable tiene un elemento $R$-minimal.*

*Demostración.* (i) Supongamos que existe tal sucesión $x$. En ese caso, $\mathrm{rec}(x) = \{x_i\}_{i \in \omega} \subseteq A$ es no vacío y, por ser $R$ bien fundada en $A$, tiene un elemento $R$-minimal $x_{i_0}$. Pero claro, $x_{i_0+1} \in \mathrm{rec}(x)$ y $x_{i_0+1}Rx_{i_0}$, contradiciendo la $R$-minimalidad de $x_{i_0}$.

(ii) Sea $X \subseteq A$ un conjunto no vacío con un buen orden $\lhd$. Supongamos que $X$ no tiene elemento $R$-minimal. Como $X \neq 0$, tomamos un $a \in X$. Definimos por recursión la sucesión $x$ de la siguiente forma: $x_0 \coloneqq a$ y $x_{i+1} \coloneqq \mathrm{mín}_{\lhd}\{y \in X \mid yRx_i\}$ para todo $i \in \omega$, que está bien definida puesto que, como no hay elemento $R$-minimal en $X$, $\{y \in X \mid yRx_i\}$ es conjunto no vacío para todo $i \in \omega$. Entonces, $x$ es una sucesión en $A$ tal que $x_{i+1}Rx_i$ para todo $i \in \omega$, contradiciendo la hipótesis. □

**Corolario 2.6.** *Si $R$ es una relación bien fundada en una clase $A$, entonces no existe ningún $R^{-1}$-ciclo en $A$. En particular, una relación bien fundada en $A$ es siempre irreflexiva y asimétrica en $A$.*

*Demostración.* Si existiese tal $R^{-1}$-ciclo $x$, con longitud $n$, la sucesión $\langle x_{[i]} \rangle_{i \in \omega}$ (donde $[i]$ indica el residuo de dividir $i$ entre $n$) contradiría la Proposición 2.5. □

**Proposición 2.7.** *Si $R$ está bien fundada en $A$, $B$ es subclase de $A$ y $S \subseteq R$, entonces $S$ está bien fundada en $B$.*

*Demostración.* Demostremos que (a) $S$ es set-like en $B$ y (b) $S$ satisface el principio del elemento minimal en $B$:

(a) Sea $x \in B$. Entonces $\{y \in B \mid ySx\} \subseteq \{y \in B \mid yRx\} \subseteq \{y \in A \mid yRx\}$. Como $R$ es set-like en $A$, el último es un conjunto, y por tanto el primero también, así que $S$ es set-like en $B$.

(b) Sea $C \neq 0$ un subconjunto de $B$. Como $C \subseteq A$, hay un $x$ $R$-minimal en $C$. Si hubiera un $y \in C$ tal que $ySx$, como $S \subseteq R$ tendríamos que $yRx$, contradiciendo la $R$-minimalidad de $x$ en $C$, ergo $x$ también es $S$-minimal en $C$. $\square$

**Teorema 2.8.** (i) *Si $R$ es una relación bien fundada en $A$, $\phi(x)$ es una fórmula y $(\exists x \in A)\phi(x)$, entonces existe un $x$ $R$-minimal en $A$ tal que $\phi(x)$.*

(ii) ***Inducción en la buena fundación:*** *Si $R$ es una relación bien fundada en $A$:*

$$(\forall x \in A)\big[\,(\forall y \in A)\big(\,yRx \rightarrow \phi(y)\,\big) \rightarrow \phi(x)\,\big] \rightarrow (\forall x \in A)\phi(x)$$

*Demostración.* (i) Ponemos $B \coloneqq \{x \in A \mid \phi(x)\} \neq 0$ y tomamos un $x \in B$. Si es $R$-minimal en $B$, ya hemos acabado. Si no, $\bar{x} \coloneqq \{y \in B \mid yR^*x\} \neq 0$ es un conjunto por ser $R$ set-like. Entonces, por ser $R$ bien fundada, hay un $y$ $R$-minimal en $\bar{x}$. Demostramos ahora que $y$ también es $R$-minimal en $B$:
Sea un $t \in B$; si $tRy$, entonces como $yR^*x$ también $tR^*x$, o sea que $t \in \bar{x}$ y $tRy$, contradiciendo la $R$-minimalidad de $y$ en $\bar{x}$.

(ii) Supongamos que $(\forall x \in A)\big[\,(\forall y \in A)\big(\,yRx \rightarrow \phi(y)\,\big) \rightarrow \phi(x)\,\big]$. Queremos probar que $B \coloneqq \{x \in A \mid \neg\phi(x)\}$ es vacío. Lo hacemos por reducción al absurdo:
Si no fuera vacío, por el apartado anterior habría un $x$ $R$-minimal en $B$. En tal caso, si $y \in A$ e $yRx$, también $\phi(y)$. O sea, $(\forall y \in A)\big(\,yRx \rightarrow \phi(y)\,\big)$. La hipótesis nos dice que esto implica $\phi(x)$, lo cual es una contradicción. $\square$

**Lema 2.9.** *Sea $R$ una relación binaria. Si $A$ es $R$-cerrada, también es $R^*$-cerrada. Si $R$ es bien fundada en $A$ y $A$ es $R$-cerrada, $R^*$ es bien fundada en $A$.*

*Demostración.* Para la primera parte, como $R[A] \subseteq A$ entonces, por inducción aplicando $R$ iteradas veces, tenemos $(\forall n \in \omega)(R^{n+1}[A] = R[R^n[A]] \subseteq R[A] \subseteq A) \Rightarrow R^*[A] \subseteq A$.
Para la segunda parte, $R^*$ es set-like por 2.2(iv). Supongamos ahora un conjunto $u \subseteq A$ no vacío. Buscamos un elemento $R^*$-minimal en $u$. Consideramos entonces la clase $u' \coloneqq cl_R(u) \cap A = (\bigcup_{n \geqslant 0} R^n[u]) \cap A \subseteq A$. Por 2.8(i) existe un $x \in u'$ $R$-minimal en $u'$. Probamos ahora que también es $R^*$-minimal en $u'$ y, luego, que $x \in u$:
Sea un $y \in u'$. Si tuviésemos que $yR^*x$, entonces habría una $R$-cadena tal que $y = y_0Ry_1R\ldots Ry_{n-1}Ry_n = x$. Por ser $u'$ $R$-cerrada, eso implica que $y_i \in u'$ para $i \in n$, y eso junto a que $y_{n-1}Rx$ contradicen la $R$-minimalidad de $x$ en $u'$. Queda probar que $x \in u$. Pero eso es claro ya que, si no fuese así, necesariamente $u$ habría $n \in \omega$ y $z \in u$ tales que $zR^nx$, de nuevo contradiciendo la $R$-minimalidad de $x$ en $u'$ por el mismo motivo. $\square$

**Teorema 2.10. (Recursión en la buena fundación)** *Sean $R$ una relación bien fundada en $\mathbf{V}$ y $G : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$. Entonces existe una única clase funcional $F : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ que para todo $x$ cumple:*

$$F(x) \doteq G(x, F\restriction_{\{y \mid yRx\}}) \tag{2.1}$$

*Demostración.* (a) Sean $F_1$ y $F_2$ dos clases funcionales con dominio $R^{-1}$-cerrado que satisfacen (2.1) para todo $x$ de sus respectivos dominios. Veamos por inducción que, entonces, $(\,\forall x \in \mathrm{dom}(F_1) \cap \mathrm{dom}(F_2)\,)\big(\,F_1(x) \doteq F_2(x)\,\big)$:

Sea un $x \in D := \mathrm{dom}(F_1) \cap \mathrm{dom}(F_2)$ y supongamos que $(\forall y \in D)\big(yRx \to F_1(y) \doteq F_2(x)\big)$. Entonces $F_1(x) = G(x, F_1 \restriction_{\{y \mid yRx\}}) = G(x, F_2 \restriction_{\{y \mid yRx\}}) = F_2(x)$, que es lo que deseábamos.

(b) Sea $T$ la clase de todas las funciones de dominio $R^{-1}$-cerrado que cumplen (2.1) para todo $x$ de su dominio. En ese caso, por el punto anterior tenemos que $F := \bigcup T$ es clase funcional:
Si $\langle x, y\rangle, \langle x, y'\rangle \in F$, entonces existen $f_1, f_2 \in T$ tales que $f_1(x) = y \wedge f_2(x) = y'$. Pero claro, por (a), eso implica que $y = y'$, de modo que $F$ es funcional.

Vemos ahora que $F$ satisface las condiciones que se le requieren.

(c) $F$ satisface (2.1) puesto que, si $x \in \mathrm{dom}(F)$, existe $f \in T$ tal que $x \in \mathrm{dom}(f)$. Como $f \in T$, el dominio de $f$ es $R^{-1}$-cerrado, así que $\{y \mid yRx\} \subseteq \mathrm{dom}(f)$ y $f \restriction_{\{y \mid yRx\}} = F \restriction_{\{y \mid yRx\}}$. Por tanto, $F(x) = f(x) = G(x, f \restriction_{\{y \mid yRx\}}) = G(x, F \restriction_{\{y \mid yRx\}})$, como queríamos.

(d) Sólo queda probar que $\mathrm{dom}(F) = \mathbf{V}$. Para ello, asumamos lo contrario, que $\mathbf{V} \setminus \mathrm{dom}(F) \neq 0$, y lleguemos a una contradicción:
De ser así, existe un $x$ $R$-minimal en $\mathbf{V} \setminus \mathrm{dom}(F) \neq 0$. Tomamos $f := F \restriction_{\{y \mid yR^*x\}} \cup \{\langle x, G(x, F \restriction_{\{y \mid yRx\}})\rangle\}$. Está bien definida, puesto que $R$ es set-like, así que $\{y | yR^*x\}$ es un conjunto y $\mathrm{dom}(F)$ es $R^{-1}$-cerrada por construcción ya que, si $t \in \mathrm{dom}(F)$ y $t'Rt$, entonces hay una $f' \in T$ tal que $t, t' \in \mathrm{dom}(f') \subseteq \mathrm{dom}(F)$. Además es función porque $x \notin \mathrm{dom}(F)$.
Necesitamos ver que $f \in T$ para terminar la demostración del teorema:

- $\mathrm{dom}(f) = \{x\} \cup \big(\mathrm{dom}(F) \cap \{y \mid yR^*x\}\big)$ es $R^{-1}$-cerrado:
Si $yRx$ entonces $y \in \mathrm{dom}(F)$ al ser $x$ el elemento $R$-minimal fuera de $\mathrm{dom}(F)$, y también $y \in \{y \mid yR^*x\}$ evidentemente $\Rightarrow y \in \mathrm{dom}(f)$. Si, en cambio, $yRz$ para un $z \in \mathrm{dom}(F) \cap \{y \mid yR^*x\}$, al ser ambos conjuntos de la intersección $R^{-1}$-cerrados, también $y \in \mathrm{dom}(F)$.
- Tomamos un $z \in \mathrm{dom}(f)$, queremos ver que $f(z) = G(z, f \restriction_{\{y \mid yRz\}})$. Pero esto es claro: Si $z = x$, lo que buscamos se cumple por la definición de $f$; si, por el contrario, $z \in \mathrm{dom}(F) \cap \{y | yR^*x\}$, entonces como $f \restriction_{\{y \mid yRx\}} = F \restriction_{\{y \mid yRx\}}$ por construcción, $f(z) = F(z) = G(z, F \restriction_{\{y \mid yRz\}}) = G(z, f \restriction_{\{y \mid yRz\}})$.

Como $f \in T$ y $x \in \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathrm{dom}(F)$, hemos llegado a una contradicción, derivada de suponer que $\mathrm{dom}(F) \neq \mathbf{V}$. $\square$

Estos resultados generalizan a relaciones bien fundadas el teorema que nos permitía determinar una función por recursión en un conjunto bien ordenado. Con ellos podremos definir ahora un tipo de función denominada «función de rango» para una relación bien fundada.

**Observación 2.11.** Hemos pedido que el dominio de $F$ sea $\mathbf{V}$ para hacer más sencilla la lectura de la demostración. Sin embargo, este puede adaptarse fácilmente a cualquier clase $A$ tomando $G'(x, r) := G(x, r)$ para $x \in A$ y $G'(x, r) := \xi$ para $x \notin A$, donde $\xi$ es cualquier conjunto que no nos interesa y que usamos para que $G'$ esté bien definida en $\mathbf{V}$.

**Definición 2.12. (Rango respecto a una relación bien fundada)** Sea $R$ una relación bien fundada. Se define entonces $\rho_R(x)$, el *$R$-rango* de $x$, por recursión de esta forma:

$$\rho_R(x) := \sup{}^+\{\rho_R(y) \mid yRx\}$$

Donde $\sup^+ A := \min\{\alpha \mid (\forall \delta \in A)\delta < \alpha\}$.

**Proposición 2.13.** *Sea $R$ una relación bien fundada. Entonces se cumple:*

$$\forall x \forall y \big( yRx \to \rho_R(y) < \rho_R(x) \big) \tag{2.2}$$

*Demostración.* Dado un $x$, por la definición de $\rho_R$ tenemos que $\rho_R(x)$ pertenece a la clase $\{\alpha \mid \forall y(yRx \to \rho_R(y) < \alpha)\}$, cosa que garantiza la propiedad buscada. ☐

**Proposición 2.14.** (i) *Si $R$ es bien fundada y se tiene $yR^*x$, entonces $\rho_R(y) < \rho_R(x)$.*

(ii) *Si $R$ y $S$ son relaciones bien fundadas y $S \subseteq R$, entonces $\forall x(\rho_S(x) \leqslant \rho_R(x))$.*

(iii) *Si $R$ es set-like y $H : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{On}$ satisface* (2.2) *sustituyendo «$\rho_R$» por «$H$», entonces $R$ es bien fundada.*

(iv) *Si $A$ es una clase $R^{-1}$-cerrada, entonces o bien $\rho_R[A] \in \mathbf{On}$ o bien $\rho_R[A] = \mathbf{On}$.*

*Demostración.* (i) Como $yR^*x$, hay un $0 < n \in \omega$ y unos $y_0, \ldots, y_n$ tales que $y = y_0Ry_1R \ldots Ry_n = x$ y, por la Proposición 2.13, eso implica que $\rho_R(y) = \rho_R(y_0) < \ldots < \rho_R(y_n) = \rho_R(x)$.

(ii) Por inducción: Si $x$ es tal que $\forall y(yRx \to \rho_S(y) \leqslant \rho_R(y))$, como $\{y \mid ySx\} \subseteq \{y \mid yRx\}$ queda $\rho_S(x) = \sup^+\{\rho_S(y) \mid ySx\} \leqslant \sup^+\{\rho_S(y) \mid yRx\}$, y por hipótesis de inducción ello es menor o igual a $\sup^+\{\rho_R(y) \mid yRx\} = \rho_R(x) \Rightarrow \rho_S(x) \leqslant \rho_R(x)$.

(iii) Sea $u$ un conjunto no vacío. Ponemos $B := H[u]$, que cumple $0 \neq B \subseteq \mathbf{On}$, y por tanto tiene un ordinal mínimo $\alpha$. Entonces, sea $x \in H^{-1}[\{\alpha\}]$. Si hubiese un $y \in B$ tal que $yRx$, entonces sería $B \ni H(y) < H(x) = \alpha$ por cumplir $H$ la condición (2.2), contradiciendo la $R$-minimalidad de $\alpha$ en $B$. Por tanto, $x$ es $R$-minimal en $u$, y $R$ es bien fundada.

(iv) Supongamos que $\rho_R[A] \neq \mathbf{On}$. Entonces $\mathbf{On} \setminus \rho_R[A] \neq 0$, así que tiene un ordinal $\alpha$ mínimo. Por tanto, $\alpha = \{\gamma \mid \gamma < \alpha\} \subseteq \rho_R[A]$. Si no existe ningún $\gamma > \alpha$ en $\rho_R[A]$, la inclusión de antes es una igualdad y por tanto $\rho_R[A] \in \mathbf{On}$. Si hay alguno, llegaremos a una contradicción: ponemos $\beta$ el mínimo ordinal en $\rho_R[A] \setminus \alpha$, imagen de un cierto $x \in A$ y que cumple por tanto que $\alpha < \beta$. Por definición, $\beta = \sup^+\{\rho_R(y) \mid yRx\}$.
Observamos que también $\alpha > \rho_R(y)$ para todo $y$ tal que $yRx$, porque si ocurriera que $\alpha \leqslant \rho_R(y)$ con $yRx$ entonces, como $x \in A$ y $A$ es $R^{-1}$-cerrada, $y \in A$ y, por la Proposición 2.13, $\alpha \leqslant \rho_R(y) < \rho_R(x) = \beta$, cosa que contradiría la $R$-minimalidad de $\beta$ en $\rho_R[A] \setminus \alpha$.
Pero claro, si fuese $\alpha > \rho_R(y)$ para todo $y$ tal que $yRx$, esto, junto con que $\beta > \alpha$, contradiría el hecho de que de $\beta = \sup^+\{\rho_R(y) \mid yRx\}$, o sea, el elemento mínimo en el conjunto $\{\gamma \mid \forall y(yRx \to \rho_R(y) < \gamma)\}$. ☐

## 2.3. Conjuntos bien fundados y jerarquía acumulativa

**Definición 2.15.** Para $A \subseteq \mathbf{V}$, definimos la *clausura transitiva de $A$* como $\mathrm{tc}(A) := cl_{\in^{-1}}(A)$, la menor clase transitiva que contiene a $A$.

**Proposición 2.16.** (i) *Para todo conjunto $x$, $\mathrm{tc}(x)$ es un conjunto.*

(ii) *Para toda clase $A$, $\mathrm{tc}(A)$ es la menor clase transitiva que contiene a $A$.*

(iii) *Si $A$ y $B$ son clases tales que $B \subseteq \mathrm{tc}(A) \Rightarrow \mathrm{tc}(B) \subseteq \mathrm{tc}(A)$.*

(iv) *Para una clase* $A$, $\text{tc}(A) = A \cup \bigcup_{a \in A} \text{tc}(a)$.

*Demostración.* (i) La relación $\in$ es set-like $\Rightarrow$ $\text{tc}(x) = cl_{\in^{-1}}[x]$ es un conjunto por la Proposición 2.2(iv).

(ii) Una clase $A$ es transitiva cuando $\forall y \forall x (y \in x \wedge x \in A \to y \in A)$, lo cual es equivalente a decir que $A$ es $\in^{-1}$-cerrada. Por ende $\text{tc}(A)$ es, por definición y por 2.2(ii), la menor clase transitiva que contiene a $A$.

(iii) Supongamos $B \subseteq \text{tc}(A)$. $\text{tc}(B)$ es transitiva y es la menor de las que contienen a $B$. Como $\text{tc}(A)$ es también transitiva y $B \subseteq \text{tc}(A)$, queda que $\text{tc}(B) \subseteq \text{tc}(A)$.

(iv) $x \in \text{tc}(A) \Leftrightarrow$ existe una $\in$-cadena $x = x_0 \in x_1 \in \cdots \in x_n = b \in A \Leftrightarrow x = b$ o $x \in \text{tc}(b)$ con $b \in A \Leftrightarrow x \in A \cup \bigcup_{a \in A} \text{tc}(a)$. □

**Definición 2.17.** $\mathbf{Wf} \coloneqq \{x \mid \in \text{ es bien fundada en } \text{tc}(x)\}$. Sus miembros se llaman *conjuntos bien fundados*.

**Teorema 2.18.** $\mathbf{Wf}$ *es una clase transitiva donde* $\in$ *está bien fundada, y es la mayor (por inclusión) con esas propiedades.*

*Demostración.* (a) Veamos primero que es transitiva: Sea $x \in \mathbf{Wf}$ e $y \in x$. Entonces, por 2.16(iv) tenemos que $\text{tc}(y) \subseteq \text{tc}(x)$, y esto junto con la Proposición 2.7 implica que $\in$ está bien fundada en $y \Rightarrow y \in \mathbf{Wf}$.

(b) Comprobemos que $\in$ es bien fundada en $\mathbf{Wf}$:
Evidentemente, para todo $x \in \mathbf{Wf}$, $\{y \in \mathbf{Wf} \mid y \in x\} = \{y \mid y \in x\} = x$ es un conjunto (la última igualdad viene dada por el apartado (a)).
Dado un conjunto $u \subseteq \mathbf{Wf}$ no vacío, tomamos $x \in u$. Si $x$ ya es $\in$-minimal en $u$, hemos acabado. Si no, hay un $y \in u$ tal que $y \in x$, o sea, $x \cap u \neq 0$. Por tanto, como $x \cap u \subseteq \text{tc}(x)$ y $\in$ está bien fundada en $\text{tc}(x)$, hay un elemento $\in$-minimal $z$ en $x \cap u$. Queda ver que $z$ es también $\in$-minimal en $u$.

(c) Sea ahora $A$ una clase transitiva donde $\in$ es bien fundada y sea $x \in A$. Queremos ver que $x \in \mathbf{Wf}$. Observamos que $x \subseteq A$ por ser $A$ transitiva, así que $\text{tc}(x) \subseteq \text{tc}(A) = A$. Por la Proposición 2.7, esto hace que $\in$ sea bien fundada en $\text{tc}(x) \Rightarrow x \in \mathbf{Wf}$. □

$\mathbf{Wf}$ es el universo de todos los conjuntos que verifican el Axioma de Regularidad. Tal axioma afirma que todo conjunto en realidad pertenece a $\mathbf{Wf}$. Veremos esta equivalencia a continuación.

**Proposición 2.19.** (i) $\forall x (x \subseteq \mathbf{Wf} \to x \in \mathbf{Wf})$

(ii) $\forall x \forall y (x \in \mathbf{Wf} \wedge y \subseteq x \to y \in \mathbf{Wf})$

(iii) $\forall x (x \in \mathbf{Wf} \to \bigcup x \in \mathbf{Wf} \wedge \mathcal{P}(x) \in \mathbf{Wf})$

(iv) $\mathbf{On} \subseteq \mathbf{Wf}$

*Demostración.* (i) Si $x \subseteq \mathbf{Wf}$, $\text{tc}(x) \subseteq \text{tc}(\mathbf{Wf}) = \mathbf{Wf} \Rightarrow \in$ está bien fundada en $\text{tc}(x)$.

(ii) Si $y \subseteq x \in \mathbf{Wf}$, entonces $\text{tc}(y) \subseteq \text{tc}(x) \Rightarrow \in$ es bien fundada en $\text{tc}(y) \Rightarrow y \in \mathbf{Wf}$.

(iii) Si $x \in \mathbf{Wf}$ entonces $\bigcup x = \in^{-1} [x] \subseteq \text{tc}(x) \subseteq \mathbf{Wf} \Rightarrow \bigcup x \in \mathbf{Wf}$ por (i).
Además, por (ii) tenemos que, si $x \in \mathbf{Wf}$, entonces todo $y \subseteq x$ verifica que $y \in \mathbf{Wf} \Rightarrow \mathcal{P}(x) \subseteq \mathbf{Wf} \Rightarrow$ por (i) queda que $\mathcal{P}(x) \in \mathbf{Wf}$.

(iv) Un ordinal es transitivo ( $\alpha = \mathrm{tc}(\alpha)$ ) y bien ordenado (y por tanto bien fundado) por $\in$, de modo que todo ordinal está en $\mathbf{Wf}$. $\square$

**Definición 2.20.** Para todo $x \in \mathbf{Wf}$ se define $\rho(x) \coloneqq \rho_{\in}(x)$, el *rango* de $x$.

**Proposición 2.21.** *Para todo $\alpha \in \mathbf{On}$, $\rho(\alpha) = \alpha$.*

Demostración. Por inducción: $\rho(\alpha) = \sup^{+}\{\rho(\beta) \mid \beta \in \alpha\} = \sup^{+}\{\beta \mid \beta \in \alpha\} = \alpha$. $\square$

**Proposición 2.22.** (i) *Para todo $x \in \mathbf{Wf}$ transitivo, $\rho(x) = \rho[x] = \{\rho(y) \mid y \in x\}$.*

(ii) $\forall x\big[x \in \mathbf{Wf} \leftrightarrow \forall z(\, x \in z \to (\exists y \in z)(y \cap z = 0)\,)\big]$

Demostración. (i) Evidentemente $\rho(x) \supset \{\rho(y) \mid y \in x\}$, por la definición de $\rho(x)$. Para la otra inclusión observamos que, por ser $x$ transitivo, 2.14(iv) nos asegura que $\rho[x]$ es un ordinal. Si suponemos que hay un $\beta < \alpha \coloneqq \rho(x)$ tal que no hay $y \in x$ con $\rho(y) = \beta$, llegaremos a una contradicción:

- Caso $\rho[x] \setminus \beta = 0$: Entonces $\beta > \rho(y)$ para todo $y \in x$ y, como $\rho(x) = \alpha > \beta$, se contradice la definición de $\rho(x)$ como supremo estricto de $\rho[x]$.
- Caso $\rho[x] \setminus \beta \neq 0$: Entonces hay un $y \in x$ con $\rho(y) = \gamma \geqslant \beta$. Si es exactamente $\beta$, se contradice la elección de $\beta$. Si $\beta < \gamma$, como $\gamma < \rho[x]$ y $\rho[x]$ es ordinal tenemos que $\beta < \rho[x] \Rightarrow \beta \in \rho[x]$, de nuevo contradiciendo la elección de $\beta$. $\square$

(ii) $\Rightarrow$ Si $x \in \mathbf{Wf}$ y $x \in z$, entonces hay un elemento $y$ $\in$-minimal en $z \cap \mathbf{Wf}$. Nótese que $y \in \mathbf{Wf} \to y \subseteq \mathbf{Wf}$. Si hubiese, por tanto, un $t \in y \cap z$, tendríamos que también $t \in \mathbf{Wf}$ por la oración anterior, o sea, que $t \in z \cap \mathbf{Wf}$ con $t \in y$. Esto contradice la $\in$-minimalidad de $y$ en $z \cap \mathbf{Wf}$.

$\Leftarrow$ Supongamos que $x \neq 0$ satisface la parte derecha del bicondicional pero no es bien fundado. Tomemos $z \coloneqq \mathrm{tc}(x) \setminus \mathbf{Wf}$. Entonces se verifica que $x \in z$, por tanto hay un $y \in z$ tal que $y \cap z = 0$. Como $y \in z = \mathrm{tc}(x) \setminus \mathbf{Wf}$, entonces debe haber un $t \in y \setminus \mathbf{Wf}$ (de otra forma, $y$ sí estaría en $\mathbf{Wf}$ por 2.19(i)). Pero claro, eso implica que $t \in \mathrm{tc}(x) \setminus \mathbf{Wf}$ también. Todo junto queda que $t \in y \cap z$, contradiciendo que $y \cap z = 0$. $\square$

**Definición 2.23.** Para todo $\alpha$ se define $V_\alpha \coloneqq \{x \in \mathbf{Wf} \mid \rho(x) < \alpha\}$.

**Proposición 2.24.** *$V_\alpha$ es un conjunto para todo $\alpha$.*

Demostración. Lo demostramos por inducción en $\alpha$:

- Caso $\alpha = 0$: Evidentemente $V_0 = 0$ es un conjunto.
- Caso $\alpha = \beta + 1$: $V_\alpha = \{x \in \mathbf{Wf} \mid \rho(x) < \beta + 1\} = \{x \in \mathbf{Wf} \mid \rho(x) \leqslant \beta\}$. Sea, pues, un $x \in V_\alpha$. Buscamos ver que $x \in \mathcal{P}(V_\beta)$ (o sea, que $x \subseteq V_\beta$). Supongamos que $y \in x$. Entonces $y \in \mathbf{Wf}$ y $\rho(y) < \rho(x) \leqslant \beta$, de manera que $y \in V_\beta$. En consecuencia $x \subseteq V_\beta \Rightarrow x \in \mathcal{P}(V_\beta) \Rightarrow V_\alpha \subseteq \mathcal{P}(V_\beta)$, lo cual implica que $V_\beta$ es un conjunto por hipótesis de inducción y por los axiomas de Potencia y Separación.
- Caso $0 < \alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \beta$: $V_\alpha = \{x \in \mathbf{Wf} | \rho(x) < \alpha\} = \{x \in \mathbf{Wf} | \exists\beta(\rho(x) < \beta \wedge \beta < \alpha)\}$ $= \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$, que es un conjunto por hipótesis de inducción y Reemplazo. $\square$

**Proposición 2.25.** (i) $\forall\alpha(V_\alpha$ es transitivo)

(ii) $\mathbf{Wf} = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{On}} V_\alpha$

(iii) $\forall x\forall\alpha(x \subseteq V_\alpha \leftrightarrow x \in \mathbf{Wf} \wedge \rho(x) \leqslant \alpha)$

(iv) $\forall x(x \in \mathbf{Wf} \to \rho(x) = \text{mín}\{\beta \mid x \subseteq V_\beta\})$

(v) $\forall\alpha(\, V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{P}(V_\beta)\,)$

(vi) $\forall\alpha(\forall\beta < \alpha)V_\beta \subseteq V_\alpha$

<u>*Demostración.*</u> (i) Si $x \in V_\alpha$ e $y \in x$ entonces $\rho(y) < \rho(x) < \alpha \Rightarrow y \in V_\alpha$.

(ii) Si $x \in \mathbf{Wf}$ entonces $x \in V_{\rho(x)+1}$. La inclusión contraria es evidentemente cierta.

(iii) De izquierda a derecha, si $x \subseteq V_\alpha$ entonces todo elemento $y \in x$ cumple que $\rho(y) < \alpha$, por tanto $\alpha \in \{\beta \mid (\forall y \in x)\rho(y) < \beta\}$. Como $\rho(x)$ es el mínimo de ese conjunto, $\rho(x) \leqslant \alpha$. De derecha a izquierda, es evidente que si $y \in x$ entonces $\rho(y) < \rho(x) \leqslant \alpha \Rightarrow y \in V_\alpha$, así que $x \subseteq V_\alpha$.

(iv) Por el apartado anterior, con $\alpha = \rho(x)$ es claro que $\rho(x) \in \{\beta \,|\, x \subseteq V_\beta\}$, y queda ver que es el mínimo. Pero claro, si hay un $\beta < \rho(x)$ que cumple eso, entonces tenemos que $(\forall y \in x)\rho(y) < \beta$, contradiciendo la definición de $\rho(x) = \sup^+\{\rho(y) \mid y \in x\}$.

(v) $\subseteqq$ Sea $x \in V_\alpha$. Por el apartado (iii), $x \subseteq V_{\rho(x)}$ con $\rho(x) < \alpha$.

$\supseteq$ Sea $x \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{P}(V_\beta)$. Entonces hay un $\beta < \alpha$ tal que $x \subseteq V_\beta$. Por ende, por el apartado (iii), $\rho(x) \leqslant \beta < \alpha \Rightarrow x \in V_\alpha$.

(vi) El apartado (v) lo hace obvio, ya que $V_\alpha$ es $V_\beta$ unido a más conjuntos. □

**Teorema 2.26. (Jerarquía acumulativa)** *Se dan las siguientes cuatro afirmaciones:*

(i) $V_0 = 0$

(ii) $\forall\alpha\big(V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)\big)$

(iii) $(\forall\alpha \text{ límite})\big(V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta\big)$

(iv) $\mathbf{Wf} = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{On}} V_\alpha$

<u>*Demostración.*</u> (i) Evidentemente, por 2.25(v) queda que $V_0 = \bigcup 0 = 0$.

(ii) La inclusión de izquierda a derecha la hemos hecho en la demostración de la Proposición 2.24. Queda la otra:
Si $x \subseteq V_\alpha$ entonces, por 2.25(iii), $\rho(x) \leqslant \alpha < \alpha + 1 \Rightarrow x \in V_{\alpha+1}$.

(iii) Por 2.25(v), $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{P}(V_\beta)$, que por (ii) es igual a $\bigcup_{\beta<\alpha} V_{\beta+1} = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$. La última igualdad es debida a que $\alpha$ es límite y $V_\beta \subseteq V_{\beta+1}$ para todo $\beta$.

(iv) Es el apartado (ii) de la proposición anterior. □

Esta estratificación de $\mathbf{Wf}$, llamada *jerarquía acumulativa*, da estructura al universo de los conjuntos bien fundados (o a todo el universo si asumimos el Axioma de Regularidad, como veremos en la siguiente sección), y además brinda una manera muy natural de buscar modelos para algunos de los axiomas de ZFC, como veremos en 4.
Puesto que los rangos de los conjuntos bien fundados son ordinales, es sencillo verificar por qué no existen $\in^{-1}$-ciclos de conjuntos en $\mathbf{Wf}$, ni $\in^{-1}$-sucesiones.

El lema que viene a continuación nos ayudará en posteriores capítulos a determinar qué axiomas relativizados de ZFC se verifican en cada caso dependiendo del $V_\alpha$ seleccionado:

**Lema 2.27.** (i) *Si $x \in V_\alpha$, entonces:*

(a) $\bigcup x \in V_\alpha$ (b) $\{x\} \in V_{\alpha+1}$ (c) $\mathcal{P}(x) \in V_{\alpha+1}$

(ii) *Si* $x \in V_\alpha, y \in V_\beta$ *y* $\gamma = max\,\{\alpha, \beta\}$, $\delta = \text{mín}\{\alpha, \beta\}$, *entonces:*

(a) $x \cup y \in V_\gamma$ (c) $\{x, y\} \in V_{\gamma+1}$ (e) $x \times y \in V_{\gamma+3}$

(b) $x \cap y \in V_\delta$ (d) $\langle x, y\rangle \in V_{\gamma+2}$ (f) ${}^y x \in V_{\gamma+4}$

Demostración. (i) Sea $x \in V_\alpha$. Entonces:

(a) Si $y \in \bigcup x$, hay un $t \in x$ tal que $y \in t$, ergo $\rho(y) < \rho(x) < \alpha \Rightarrow \bigcup x \subseteq V_{\rho(x)} \Rightarrow \bigcup x \in V_\alpha$ por 2.25(v).

(b) $\{x\} \subseteq V_\alpha \Rightarrow \{x\} \in V_{\alpha+1}$ por 2.26(ii).

(c) Si tenemos un $y \in \mathcal{P}(x)$, entonces $y \subseteq x$, por tanto $\rho(y) \leqslant \rho(x)$ (directamente de la definición de $\rho$), de modo que $\mathcal{P}(x) \subseteq V_\alpha \Rightarrow \mathcal{P}(x) \in V_{\alpha+1}$.

(ii) (a) Si $t \in x \cup y$ entonces o bien $\rho(t) < \alpha$ o bien $\rho(t) < \beta \Rightarrow \rho(t) < \gamma$.

(b) Si $t \in x \cup y$ entonces $\rho(t) < \alpha$ y $\rho(t) < \beta \Rightarrow \rho(t) < \delta$.

(c) $\{x, y\} \subseteq V_\gamma \Rightarrow \{x, y\} \in V_{\gamma+1}$.

(d) Recordamos que $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq V_{\gamma+1} \Rightarrow \langle x, y\rangle \in V_{\gamma+2}$.

(e) Por el apartado anterior, $x \times y \subseteq V_{\gamma+2} \Rightarrow x \times y \in V_{\gamma+3}$.

(f) Tenemos que si $f \in {}^y x$ entonces $f \subseteq x \times y$, por tanto $f \in V_{\gamma+3}$, de modo que ${}^y x \subseteq V_{\gamma+3} \Rightarrow {}^y x \in V_{\gamma+4}$. □

## 2.4. El Axioma de Regularidad

Para terminar el capítulo, vemos en esta sección algunas de las más importantes consecuencias del Axioma de Regularidad (AF), además de un par de equivalencias.

**Axioma 2.28.** ***Esquema axiomático de Regularidad:*** Para toda fórmula $\phi$ con variables libres $x, w_1, \ldots, w_n$, donde $y$ no es ninguna de ellas, se verifica:

$$\forall w_1, \ldots, w_n \big[\, \exists x \phi(x, w_1, \ldots, w_n) \to \exists x \big(\phi(x, w_1, \ldots, w_n) \wedge (\forall y \in x) \neg\phi(y, w_1, \ldots, w_n)\big)\,\big]$$

**Axioma 2.29.** ***Axioma de Regularidad para clases:*** $A \neq 0 \to (\exists x \in A)(x \cap A = 0)$ para cualquier clase $A$.

**Teorema 2.30.** 2.28 *y* 2.29 *son equivalentes al Axioma de Regularidad* (AF)*:*

$$\forall a \big(\, a \neq 0 \to (\exists x \in a)(x \cap a = 0)\,\big)$$

Demostración. Claramente 2.29→AF. Luego, AF nos dice que todo conjunto no vacío tiene un elemento $\in$-minimal y, como vimos en 2.8(i), con $R =\in$ eso significa que AF→2.28. Además, con $\phi(x) :\!= x \in A$ se ve que 2.28→2.29. Por tanto, son todos equivalentes. □

El teorema enunciado inmediatamente sobre este párrafo es harto interesante pues nos afirma que, al contrario de lo que ocurre con el Esquema de Separación o el de Reemplazo (que recordamos que son infinitos axiomas, uno por cada $\phi$ con las propiedades que requieren), AF es equivalente a una sola instancia de sí mismo, una única fórmula. Más detalles sobre esto se verán en el capítulo 4.

**Proposición 2.31.** AF *es equivalente a cada una de las siguientes afirmaciones:*

(1) $\mathbf{V} = \mathbf{Wf}$ (2) $\forall x \exists \alpha (x \in V_\alpha)$ (3) $\forall x \exists \alpha (x \subseteq V_\alpha)$

*Demostración.* AF es equivalente a decir que $\in$ está bien fundada en $\mathbf{V}$, lo cual implica por el Teorema 2.18 que $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{Wf}$ (y el recíproco es evidentemente cierto así que la inclusión es de hecho una igualdad). Por tanto, AF$\leftrightarrow$(1).
Por otro lado, es evidente que (1)$\leftrightarrow$(2)$\leftrightarrow$(3), gracias a los apartados (ii) y (iv) de la Proposición 2.25. $\square$

**Proposición 2.32.** (AC) *Si no existe ninguna* $\in^{-1}$*-sucesión, entonces se satisface* AF.

*Demostración.* Como con AC todo conjunto es bien-ordenable, el apartado (ii) de la Proposición 2.5 implica AF. $\square$

# 3. Relativización y absolutez

## 3.1. Relativización

**Definición 3.1.** Sea $\mathbf{M}$ una clase. Para cualquier fórmula $\phi$, definimos por recursión $\phi^{\mathbf{M}}$ (la *relativización de $\phi$ a $\mathbf{M}$*) de la siguiente manera:

(a) $(x \doteq y)^{\mathbf{M}} := x \doteq y$

(b) $(x \in y)^{\mathbf{M}} := x \in y$

(c) $(\phi \wedge \psi)^{\mathbf{M}} := (\phi^{\mathbf{M}} \wedge \psi^{\mathbf{M}})$

(d) $(\neg\phi)^{\mathbf{M}} := \neg\phi^{\mathbf{M}}$

(e) $(\exists x\phi)^{\mathbf{M}} := \exists x(x \in \mathbf{M} \wedge \phi^{\mathbf{M}})$

**Definición 3.2.** (i) Para una clase $\mathbf{M}$ y una fórmula $\phi$, decimos que $\phi$ *es cierta en* $\mathbf{M}$ (o $\phi$ *se cumple en* $\mathbf{M}$) cuando $\phi^{\mathbf{M}}$.

(ii) Para una clase $\mathbf{M}$ y un conjunto de fórmulas $\Sigma$, decimos que $\mathbf{M}$ *es modelo de* $\Sigma$ (o que $\Sigma$ *se satisface en* $\mathbf{M}$) cuando $\phi^{\mathbf{M}}$ para todo $\phi \in \Sigma$.

El significado de $\phi^{\mathbf{M}}$ pretende ser «$\phi$ si tomamos $\mathbf{M}$ como nuestro universo», o «la interpretación de $\phi$ en $\mathbf{M}$», ya que los cuantificadores ahora corren sobre los elementos de $\mathbf{M}$ exclusivamente.

***Notación***. Si $\Sigma$ es un conjunto de fórmulas, abreviamos $\Sigma^{\mathbf{M}} := \{\phi^{\mathbf{M}} \mid \phi \in \Sigma\}$.

El siguiente lema es un resultado de lógica de primer orden, así que no lo demostramos. Para una prueba detallada, visitar la referencia [Ebb84, página 124].

**Lema 3.3. (de Relativización)** *Si $\Sigma \vdash \psi$, entonces $\Sigma^{\mathbf{M}} \vdash \psi^{\mathbf{M}}$.*

**Lema 3.4. (de Consistencia Relativa)** *Sean $\Sigma$ y $\Gamma$ dos conjuntos de fórmulas tales que existe una clase $\mathbf{M} \neq 0$ tal que $\Gamma \vdash \Sigma^{\mathbf{M}}$(o sea, $\Gamma$ demuestra que $\mathbf{M}$ es modelo de $\Sigma$). Entonces* $\mathrm{Con}(\Gamma) \to \mathrm{Con}(\Sigma)$.

*Demostración*. Supongamos que $\Sigma$ es inconsistente; hay entonces una fórmula $\chi$ tal que $\Sigma \vdash (\chi \wedge \neg\chi)$, de modo que $\Sigma^{\mathbf{M}} \vdash (\chi^{\mathbf{M}} \wedge \neg\chi^{\mathbf{M}})$ por el Lema 3.3. Puesto que $\Gamma \vdash \Sigma^{\mathbf{M}}$, tenemos que $\Gamma \vdash (\chi^{\mathbf{M}} \wedge \neg\chi^{\mathbf{M}})$, y por tanto $\Gamma$ tampoco es consistente. $\square$

Esta proposición será útil a la hora de probar la consistencia relativa de teorías distintas a ZF. Es decir, asumiendo que nuestra teoría inicial generada por $\Gamma$ es consistente, buscaremos un modelo $\mathbf{M}$ de $\Sigma$ dentro del universo de la teoría generada por $\Gamma$ para concluir que también la teoría generada por $\Sigma$ es consistente.
Durante el resto este capítulo y el posterior se sobreentenderá que $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$ denotan clases cuyo propósito es el de servir de modelo para cierto conjunto de fórmulas.

Veamos ahora qué condiciones son necesarias o suficientes para que se preserven tales o cuales axiomas de ZF en el modelo en cuestión.

### Relativización de axiomas de ZFC

**Lema 3.5.** *Si $\mathbf{M}$ es transitivo, entonces* $(\text{Extensionalidad})^{\mathbf{M}}$*, es decir, se cumple el Axioma de Extensionalidad en $\mathbf{M}$.*

*Demostración.* Queremos demostrar la relativización de Extensionalidad a $\mathbf{M}$, o sea,

$$(\forall x \in \mathbf{M})(\forall y \in \mathbf{M})\big[(\forall t \in \mathbf{M})(t \in x \leftrightarrow t \in y) \to x \doteq y\big]$$

Tomemos $x, y \in \mathbf{M}$ y supongamos que $(\forall t \in \mathbf{M})(t \in x \leftrightarrow t \in y)$. Sea ahora un $w \in \mathbf{V}$. Si $w \in x$, como $\mathbf{M}$ es transitivo, $w \in \mathbf{M}$ de modo que, por hipótesis, $w \in y$. El recíproco procede de forma análoga, de manera que $x = y$, como buscábamos. □

**Lema 3.6.** *Si para toda fórmula $\phi$ con no más variables libres que $t, w_1, \ldots, w_n$ (donde $x$ no es ninguna de ellas) se tiene que*

$$(\forall w_1, \ldots, w_n, x \in \mathbf{M})\big(\{t \in x \mid \phi(t, w_1, \ldots, w_n)\} \in \mathbf{M}\big)$$

*entonces el Esquema de Separación se satisface en $\mathbf{M}$.*

*Demostración.* La relativización de Separación a $\mathbf{M}$ es que, para una $\phi$ como en el enunciado, se verifica

$$(\forall w_1, \ldots, w_n, x \in \mathbf{M})(\exists z \in \mathbf{M})(\forall t \in \mathbf{M})\big(t \in z \leftrightarrow t \in x \wedge \phi(t, w_1, \ldots, w_n)\big)$$

Sean $\forall w_1, \ldots, w_n, x \in \mathbf{M}$, ponemos $z \coloneqq \{t \in x \mid \phi(x, t, w_1, \ldots, w_n)\}$. Entonces $z \in \mathbf{M}$ y, dado un $t \in \mathbf{V}$, se tiene $t \in x \wedge \phi(x, t, w_1, \ldots, w_n)$ si y sólo si $t \in z$. Como $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{V}$, ello también ocurre con los $t \in \mathbf{M}$, que es lo que deseábamos. □

**Corolario 3.7.** *Si $(\forall x \in \mathbf{M})(\mathcal{P}(x) \subseteq \mathbf{M})$ entonces Separación se satisface en $\mathbf{M}$.*

**Observación 3.8.** Si $\mathbf{M}$ es transitivo, $(y \subseteq x)^{\mathbf{M}} \leftrightarrow y \subseteq x$..

*Demostración.* $(y \subseteq x)^{\mathbf{M}} = (\forall t \in \mathbf{M})(t \in y \to t \in x)$. Si $y \subseteq x$, esto se cumple, evidentemente. En la otra dirección, si se verifica $(y \subseteq x)^{\mathbf{M}}$ y tenemos un $t \in \mathbf{V}$ tal que $t \in y$, al ser $\mathbf{M}$ transitivo, también $t \in \mathbf{M}$ y, por hipótesis, esto lleva a $t \in x$. □

**Lema 3.9.** *Sea $\mathbf{M}$ una clase transitiva. Supongamos que*

$$(\forall x \in \mathbf{M})(\mathcal{P}(x) \cap \mathbf{M} \in \mathbf{M})$$

*Entonces el Axioma de la Potencia es cierto en $\mathbf{M}$.*

*Demostración.* El Axioma de la Potencia relativizado a $\mathbf{M}$ queda $(\forall x \in \mathbf{M})(\exists z \in \mathbf{M})$ $(\forall y \in \mathbf{M})\big(y \in z \leftrightarrow y \subseteq x\big)$, gracias a la absolutez de $y \subseteq x$ dada por la observación anterior. Por tanto, basta ver que $z \coloneqq \mathcal{P}(x) \cap \mathbf{M}$ cumple lo que se le pide. □

**Lema 3.10.** *El Axioma de Regularidad es cierto en $\mathbf{M}$ si $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{Wf}$. Si, además, $\mathbf{M}$ es transitiva, el recíproco es también cierto.*

*Demostración.* El Axioma de Regularidad relativizado a $\mathbf{M}$ queda como
$(\forall a \in \mathbf{M})\big[\,(\exists x \in \mathbf{M})(x \in a) \to (\exists x \in \mathbf{M})\big(\,x \in a \wedge \neg(\exists y \in \mathbf{M})(y \in a \wedge y \in x)\,\big)\,\big]$.

- $\underline{\Rightarrow}$ Sea $a \in \mathbf{M}$ tal que hay un $x \in \mathbf{M}$ con $x \in a$. Entonces, como $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{Wf}$, también $\mathbf{M} \cap a \subseteq \mathbf{Wf}$. Por tanto, hay un $x \in \mathbf{M} \cap a$ de manera que no existe $y \in \mathbf{M} \cap a$ con $y \in x$. Esto no es más que otra forma de decir que $\neg(\exists y \in \mathbf{M})(y \in a \wedge y \in x)$, como queríamos. (Nótese que no hemos utilizado la transitividad de $\mathbf{M}$.)

- $\underline{\Leftarrow}$ Supongamos que se cumple la relativización a $\mathbf{M}$ de AF pero $\mathbf{M} \nsubseteq \mathbf{Wf}$. Entonces hay un $a \in \mathbf{M}$ tal que $a \notin \mathbf{Wf}$; o sea, tal que $a \neq 0$ y no tiene elementos $\in$-minimales. Esto quiere decir que para todo $x \in a$ hay un $y \in x \cap a$. Por $(\mathrm{AF})^{\mathbf{M}}$, sabemos que hay un $x \in \mathbf{M}$ tal que $x \in a$ y no hay un $y \in \mathbf{M}$ con $y \in a \cap x$. Observamos que tampoco hay un $y \in a \cap x$ porque, de ser así, por ser $\mathbf{M}$ transitiva tendríamos que $y \in \mathbf{M}$ e $y \in a \cap x$. De este modo, $x$ es un elemento $\in$-minimal de $a$, entrando en contradicción con el hecho de que $a \notin \mathbf{Wf}$. □

## 3.2. Absolutez

A la hora de trabajar en un modelo $\mathbf{M}$ de un conjunto de fórmulas $\Sigma$ nos topamos con la pregunta de si $\phi^{\mathbf{M}}$ «significa lo mismo que $\phi$ adaptada al universo $\mathbf{M}$» (o lo mismo para una función $F$). Esta sección del capítulo formalizará esta idea, además de investigar qué funciones y relaciones la mantienen según cuál sea $\mathbf{M}$.

**Definición 3.11.** Dada una fórmula $\phi$ con no más variables libres que $x_1, \ldots, x_n$:

(i) Dadas dos clases $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$, se dice que $\phi$ es *absoluta para* $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ cuando

$$(\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{M})\big(\phi^{\mathbf{M}}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \phi^{\mathbf{N}}(x_1, \ldots, x_n)\big)$$

(ii) Dada una clase $\mathbf{M}$ dice que $\phi$ es *absoluta para* $\mathbf{M}$ cuando es absoluta para $\mathbf{M}, \mathbf{V}$, es decir, cuando

$$(\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{M})\big(\phi^{\mathbf{M}}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \phi(x_1, \ldots, x_n)\big)$$

**Observaciones 3.12.** Si $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$ y tanto $\phi$ como $\psi$ son fórmulas absolutas para $\mathbf{M}, \mathbf{N}$, entonces también $\neg\phi$ y $\phi \wedge \psi$ lo son. Por tanto, si una fórmula $\phi$ está libre de cuantificadores, es absoluta para cualesquiera $\mathbf{M}, \mathbf{N}$.
Además, si $\phi$ es una fórmula absoluta para $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ donde $y$ es libre y $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$, entonces por un lado $(\exists y \phi)^{\mathbf{M}} \to (\exists y \phi)^{\mathbf{N}}$ y por otro $(\forall y \phi)^{\mathbf{N}} \to (\forall y \phi)^{\mathbf{M}}$.

**Definición 3.13.** Se define el conjunto de fórmulas $\Delta_0$ por recursión de la siguiente manera:

1) $x \in y$ y $x \doteq y$ son $\Delta_0$.

2) Si $\phi, \psi$ son $\Delta_0$, entonces $\neg\phi$ y $(\phi \wedge \psi)$ son $\Delta_0$.

3) Si $\phi$ es $\Delta_0$, entonces $\exists y(y \in x \wedge \psi)$ es $\Delta_0$.

**Lema 3.14.** *Si* $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ *son transitivos,* $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$ *y* $\phi$ *es absoluta para* $\mathbf{M}, \mathbf{N}$*, entonces* $\exists y(y \in x \wedge \phi)$ *(que es lo mismo que* $(\exists y \in x)\phi$ *) también lo es.*

Demostración. Queremos ver que $(\forall x, z_1, \ldots, z_n \in \mathbf{M})\big((\exists y \in x)\phi^{\mathbf{M}}(x, y, z_1, \ldots, z_n) \leftrightarrow (\exists y \in x)\phi^{\mathbf{N}}(x, y, z_1, \ldots, z_n)\big)$, donde la lista $x, y, z_1, \ldots, z_n$ contiene toda variable libre de $\phi$. Sean $x, z_1, \ldots, z_n \in \mathbf{M}$. Entonces $((\exists y \in x)\phi)^{\mathbf{M}} = (\exists y \in \mathbf{M})(y \in x \wedge \phi^{\mathbf{M}}) \Leftrightarrow$
$\exists y(y \in x \wedge \phi^{\mathbf{M}}) \Leftrightarrow \exists y(y \in x \wedge \phi^{\mathbf{N}}) \Leftrightarrow (\exists y \in \mathbf{N})(y \in x \wedge \phi^{\mathbf{N}}) = ((\exists y \in x)\phi)^{\mathbf{N}}$.
La primera equivalencia y la tercera utilizan el hecho de que $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$ son transitivos y la segunda es debida a la absolutez de $\phi$ para $\mathbf{M}, \mathbf{N}$. $\square$

***Notación.*** Si $Q = \exists, \forall$ y «$(Qy \in x)$» aparece en una fórmula, se dice que esa aparición del cuantificador $Q$ es *acotada*.

Como$\forall x\phi = \neg\exists x \neg\phi$, el lema anterior aplica a las fórmulas con cuantificadores universales acotados.

**Corolario 3.15.** *Si* $\mathbf{M}$ *es transitivo, toda fórmula* $\Delta_0$ *es absoluta para* $\mathbf{M}$.

**Lema 3.16.** *Sean* $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$ *modelos para un conjunto de enunciados* $\Sigma$ *y* $\phi, \psi$ *fórmulas tales que*

$$\Sigma \vdash \forall x_1, \ldots, x_n(\phi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n)) \tag{3.1}$$

*Entonces* $\phi$ *es absoluta para* $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ *si y sólo si* $\psi$ *lo es.*

*Demostración*. Sean $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{M}$. Entonces $\phi^{\mathbf{M}}(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \psi^{\mathbf{M}}(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \psi^{\mathbf{N}}(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \phi^{\mathbf{N}}(x_1, \dots, x_n)$. La primera y la tercera de las equivalencias vienen dadas por (3.1), y la segunda por ser $\phi$ absoluta para $\mathbf{M}, \mathbf{N}$. □

**Observación 3.17.** Aunque una fórmula no sea $\Delta_0$, si es equivalente a otra que sí es $\Delta_0$, será absoluta para un modelo transitivo.

**Definición 3.18.** Sean $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$ clases y $F(x_1, \dots, x_n)$ una clase funcional definida en $\mathbf{N}$. Decimos que $F$ *es absoluta para* $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ si la fórmula $F(x_1, \dots, x_n) \doteq y$ lo es.
En otras palabras, si $\forall x_1, \dots, x_n \big(F^{\mathbf{M}}(x_1, \dots, x_n) \doteq F^{\mathbf{N}}(x_1, \dots, x_n)\big)$.

**Lema 3.19.** *La composición de nociones absolutas es absoluta. Es decir, si* $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$ *y* $\phi(x_1, \dots, x_n), F(x_1, \dots, x_n)$ *y* $G_i(y_1, \dots, y_m)$ *para* $i = 1, \dots, n$ *son absolutas para* $\mathbf{M}, \mathbf{N}$*, entonces también lo son la fórmula*

$$\phi\big(G_1((y_1, \dots, y_m), \dots, G_n(y_1, \dots, y_m))\big)$$

*y la función*

$$F\big(G_1((y_1, \dots, y_m), \dots, G_n(y_1, \dots, y_m))\big)$$

*Demostración*. Sean $y_1, \dots, y_m \in \mathbf{M}$. Entonces $\big(\phi(G_1((y_1, \dots, y_m), \dots, G_n(y_1, \dots, y_m)))\big)^{\mathbf{M}}$
$\Leftrightarrow \phi^{\mathbf{M}}\big(G_1((y_1, \dots, y_m), \dots, G_n(y_1, \dots, y_m))\big) \Leftrightarrow \phi\big(G_1^{\mathbf{M}}((y_1, \dots, y_m), \dots, G_n^{\mathbf{M}}(y_1, \dots, y_m))\big)$
$\Leftrightarrow \phi\big(G_1^{\mathbf{N}}((y_1, \dots, y_m), \dots, G_n^{\mathbf{N}}(y_1, \dots, y_m))\big) \Leftrightarrow \big(\phi(G_1((y_1, \dots, y_m), \dots, G_n(y_1, \dots, y_m)))\big)^{\mathbf{N}}$,
donde la primera equivalencia y la cuarta vienen dadas por la definición de la relativización y la segunda y la tercera por ser $\phi$ y $G_i$ absolutas para $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ con $i = 1, \dots, n$.
El proceso es totalmente análogo para $F(G_1((y_1, \dots, y_m), \dots, G_n(y_1, \dots, y_m))$. □

Este lema nos será harto útil cuando hayamos de determinar la absolutez o no absolutez de fórmulas o funciones compuestas por otras más sencillas. Por ejemplo, en el siguiente teorema:

**Teorema 3.20.** *Las siguientes propiedades (fórmulas) y funciones son absolutas para cualquier modelo transitivo de* ZF$^-$$-$P$-$Inf.

(a) $x \in y$

(b) $x \doteq y$

(c) $x \subseteq y$

(d) $\{x, y\}$

(e) $\{x\}$

(f) $\langle x, y\rangle$

(g) $0$

(h) $\bigcup x$

(i) $\bigcap x$ (con $\bigcap 0 \coloneqq 0$)

(j) $x \cup y$

(k) $x \cap y$

(l) $x \setminus y$

(m) $\mathcal{S}(x)$

(n) $x$ *es transitivo*

(ñ) $x$ *es inductivo*

(o) $z$ *es un par ordenado*

(p) $A \times B$

(q) $R$ *es relación binaria*

(r) $\mathrm{dom}(R)$

(s) $\mathrm{rec}(R)$

(t) $f$ *es función*

(u) $f(x)$

(v) $f$ *es inyectiva*

*Demostración*. Obviamente $(a)$ y $(b)$ son absolutas, y $(c)$ lo es por la Observación 3.8. Para el resto, combinaremos los resultados de los Lemas 3.16 y 3.19 y el Corolario 3.15.

(d) $z \doteq \{x, y\} \Leftrightarrow (\forall t \in z)(t \doteq x \vee t \doteq y) \wedge (x \in z) \wedge (y \in z)$, que es una fórmula $\Delta_0$ y, por tanto, absoluta para $\mathbf{M}$.

(e) $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ (f) $\{x\} = \{x, x\}$ (g) $z \doteq 0 \Leftrightarrow (\forall t \in z)(t \not\doteq t)$

(h) $z \doteq \bigcup x \Leftrightarrow (\forall t \in z)(\exists y \in x) t \in y \wedge (\forall y \in x)(y \subseteq z)$

(i) $z \doteq \bigcap x \Leftrightarrow (\forall y \in x)(\forall t \in z)\big((\forall w \in x) t \in w \to t \in z\big) \wedge (\forall y \in x)(z \subseteq y) \wedge$
$(x \doteq 0 \to z \doteq 0)$

(j) $x \cup y = \bigcup\{x, y\}$ (k) $x \cap y = \bigcap\{x, y\}$

(l) $z \doteq x \setminus y \Leftrightarrow z \subseteq x \wedge (\forall t \in x)(t \in z \leftrightarrow t \notin y)$

(m) $\mathcal{S}(x) = x \cup \{x\}$ (n) $x$ es transitivo $\Leftrightarrow \bigcup x \subseteq x$

(ñ) $x$ es inductivo $\Leftrightarrow 0 \in x \wedge (\forall y \in x)(S(y) \in x)$

(o) $z$ es par ordenado $\Leftrightarrow (\exists x \in \bigcap z)(\exists y \in \bigcup z)(z \doteq \langle x, y\rangle)$

(p) $C \doteq A \times B \Leftrightarrow (\forall x \in A)(\forall y \in B)(\langle x, y\rangle \in C) \wedge (\forall z \in C)(\exists x \in A)(\exists y \in B)(z \doteq \langle x, y\rangle)$

(q) $R$ es relación binaria $\Leftrightarrow (\forall z \in R)(\exists x \in \bigcup\bigcup R)(\exists y \in \bigcup\bigcup R)(z \doteq \langle x, y\rangle)$

(r) $A \doteq \mathrm{dom}(R) \Leftrightarrow (\forall x \in A)(\exists y \in \bigcup\bigcup R)(\langle x, y\rangle \in R) \wedge$
$(\forall y \in \bigcup\bigcup R)(\forall x \in \bigcup\bigcup R)(\langle x, y\rangle \in R \to x \in A)$

(s) $B \doteq \mathrm{rec}(R) \Leftrightarrow (\forall y \in B)(\exists x \in \bigcup\bigcup R)(\langle x, y\rangle \in R) \wedge$
$(\forall x \in \bigcup\bigcup R)(\forall y \in \bigcup\bigcup R)(\langle x, y\rangle \in R \to y \in A)$

(t) $f$ es función $\Leftrightarrow$ ($f$ es relación)$\wedge$
$(\forall x \in \mathrm{dom}(R))(\forall y \in \mathrm{rec}(R))(\forall y' \in \mathrm{rec}(R))(\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle x, y'\rangle \in R \to y \doteq y')$

(u) $y \doteq f(x) \Leftrightarrow$ ($f$ es función) $\wedge$ $(\langle x, y\rangle \in R)$

(v) $f$ es inyectiva $\Leftrightarrow$ ($f$ es función)$\wedge$
$(\forall x \in \mathrm{dom}(R))(\forall x' \in \mathrm{dom}(R))(\forall y \in \mathrm{rec}(R))(\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle x', y\rangle \in R \to x \doteq x')$

□

**Lema 3.21.** *Sea* $\mathbf{M}$ *un modelo transitivo de* $\mathrm{ZF}^{-}-\mathrm{P}-\mathrm{Inf}$. *Entonces el Axioma del Infinito es cierto en* $\mathbf{M}$ *si y sólo si* $\omega \in \mathbf{M}$.

Demostración. $\Leftarrow$ Supongamos que $\omega \in \mathbf{M}$. Por la absolutez de las nociones 0 y $\mathcal{S}(x)$, ser un conjunto inductivo es absoluto para $\mathbf{M}$, y el Axioma del Infinito relativizado a $\mathbf{M}$ queda:

$$(\exists x \in \mathbf{M})\big(0 \in x \wedge (\forall y \in x)(\mathcal{S}(x) \in x)\big)$$

O sea, que existe un $x \in \mathbf{M}$ inductivo, lo cual es cierto si colocamos $x = \omega$.

$\Rightarrow$ Sea $I \coloneqq \{y \in \mathbf{M} \mid y \text{ es inductivo}\} \neq 0$, y pongamos $x \coloneqq \bigcap I \in \mathbf{M}$. Es sencillo comprobar que $x = \omega$, como se haría en la Proposición 1.24. □

**Lema 3.22.** ($\mathrm{ZF}^{-}$) *Sea* $\mathbf{M}$ *un modelo transitivo de* $\mathrm{ZF}^{-}-\mathrm{P}-\mathrm{Inf}$. *Sean* $A, R \in \mathbf{M}$ *tales que* $R$ *bien-ordena* $A$. *Entonces* ($R$ bien-ordena $A$)$^{\mathbf{M}}$.

*Demostración.* Hay que ver que ($R$ cumple el principio del elemento minimal en $A)^{\mathbf{M}}$ y que ($R$ ordena totalmente $A)^{\mathbf{M}}$. Lo segundo es evidente, porque es la conjunción de ($R$ es relación); $R \subseteq A \times A$; ($R$ es irreflexiva); ($R$ es asimétrica); ($R$ es transitiva) y ($R$ es total) relativizadas a $\mathbf{M}$, y todas ellas son absolutas en virtud del Lema 3.19, ya que están formadas por las nociones absolutas del Teorema 3.20 y cuantificadores acotados. Queda entonces ver que el principio del elemento minimal relativizado a $\mathbf{M}$ se cumple en $A$. Para ello, pongamos:

$$\phi(X, A, R) \coloneqq \big(X \subseteq A \wedge X \neq 0 \rightarrow (\exists x \in X)(\forall y \in X)\neg yRx\big)$$

que es una fórmula absoluta para $\mathbf{M}$ por ser $\Delta_0$. Queremos entonces ver que $(\forall X \in \mathbf{M})\phi(X, A, R)$. Pero esto es obvio por las Observaciones 3.12. □

Si añadimos AF a nuestra lista de axiomas básicos, podemos obtener nuevos resultados de absolutez bastante interesantes:

**Teorema 3.23.** (ZF) *De las siguientes propiedades y funciones,* (f) *es absoluta para cualquier modelo de* ZF−P, (d) *lo es para modelos de* ZF, (g) *lo es para modelos de* ZF$^-$−P−Inf *y el resto para modelos de* ZF−P−Inf.

(a) $\alpha$ *es ordinal*

(b) $\alpha$ *es ordinal límite*

(c) $\alpha$ *es ordinal sucesor*

(d) $\kappa$ *es cardinal*

(e) $n$ *es un natural*

(f) $\omega$

(g) $x \doteq n$ (donde $n$ es un natural cualquiera)

*Demostración.* (a) Por estar en un modelo en el que es cierto AF, obtenemos la irreflexividad, la asimetría y el principio del elemento minimal para $\in$ por defecto en $\alpha$. Por tanto, queda que $\alpha$ es ordinal $\Leftrightarrow$ ($\alpha$ es transitivo) $\wedge$ ($\in$ es total en $\alpha$) $\wedge$ ($\in$ es transitiva en $\alpha$), que es absoluta por el apartado (n) del Teorema 3.20 y porque la totalidad y la transitividad de $\in$ se definen con fórmulas $\Delta_0$.

(b) $\alpha$ es ordinal límite $\Leftrightarrow$ ($\alpha$ es ordinal) $\wedge$ $(\alpha \doteq \bigcup \alpha) \wedge (\alpha \not\doteq 0)$

(c) $\alpha$ es ordinal sucesor $\Leftrightarrow$ ($\alpha$ es ordinal) $\wedge$ $(\alpha \not\doteq \bigcup \alpha)$

(d) $\kappa$ es cardinal $\Leftrightarrow$ ($\kappa$ es ordinal) $\wedge$ $(\forall \alpha \in \kappa)(\forall f \in \kappa \times \alpha)$($f$ no es inyectiva)

(e) $n$ es un natural $\Leftrightarrow$ ($n$ es ordinal sucesor) $\wedge$ $(\forall i \in n)\big(i \doteq 0 \vee (i$ es ordinal sucesor$)\big)$

(f) $x \doteq \omega \Leftrightarrow (\forall n \in \omega)$($n$ es natural) $\wedge$ ($x$ es inductivo)

(g) Lo vemos por inducción: Para $n = 0$ ya lo vimos en el Teorema 3.20. Si es cierto para $n$, con $n+1$ queda que $x = n + 1 \Leftrightarrow (\exists i \in x)(i \doteq n \wedge x \doteq S(i))$. □

**Lema 3.24.** *Si* $\mathbf{M}$ *es un modelo transitivo de* ZF−P*, entonces todo subconjunto transitivo de* $\mathbf{M}$ *está en* $\mathbf{M}$.

*Demostración.* Lo haremos por inducción en el cardinal de $x \subseteq \mathbf{M}$:

$$(\forall x \subseteq \mathbf{M})(|x| \doteq n \rightarrow x \in \mathbf{M})$$

Para $|x| = 0$, es evidente, porque $\mathbf{M}$ verifica el Esquema de Separación. Para $|x| = n+1$, $x \neq 0$, así que tomamos un $y \in x$ arbitrario. Entonces, si $z \coloneqq |x \setminus \{y\}|$, tenemos $|z| = n$, así que $z \in \mathbf{M}$. Pero claro, $x = z \cup \{y\} \in \mathbf{M}$, como deseábamos. □

**Teorema 3.25.** (ZF) *Las siguientes propiedades y funciones son absolutas para cualquier modelo transitivo de* ZF−P.

(a) *$x$ es finito* (c) $A^{<\omega}$ $\big(:= \bigcup_{n\in\omega} A^n\big)$ (e) $\mathrm{OT}(A,R)$

(b) $A^n$ (con $n \in \omega$) (d) *$R$ bien-ordena $A$*

<u>*Demostración*</u>. (a) $x$ es finito si y solamente si $\exists f\phi(x,f)$, donde $\phi(x,f)$ significa ($f$ es función inyectiva)$\wedge$($\mathrm{dom}(f) \in \omega$)$\wedge$($\mathrm{rec}(f) \doteq x$), que es evidentemente absoluta por lo visto en los teoremas anteriores.
Por tanto, hay que ver que $\exists f\phi(x,f) \leftrightarrow (\exists f \in \mathbf{M})\phi(x,f)$. La dirección de derecha a izquierda es obvia, y de izquierda a derecha se tiene que, si $\phi(x,f)$, entonces $f$ es función de un $n \in \omega$ en $x$, o sea, $f \subseteq n \times x$, que es un conjunto finito de elementos de $\mathbf{M}$. Por el lema anterior, esto implica que $f \in \mathbf{M}$, como buscábamos.

(b) $x \doteq A^n \Leftrightarrow \forall f\big(f \in x \leftrightarrow (f \text{ es función inyectiva}) \wedge (\mathrm{dom}(f) \doteq n) \wedge (\mathrm{rec}(f) \subseteq A)\big)$. La fórmula detrás de «$\forall f$», a la que llamamos $\phi$, es absoluta. Sólo tenemos que ver que $(\forall f \in \mathbf{M})\phi(x,f,n,A) \to \forall f\phi(x,f,n,A)$, ya que la otra dirección nos la garantizan las Observaciones 3.12. Pero esto es obvio porque, por un lado, si $f \in x$ entonces $f \in \mathbf{M}$, y hacia el otro lado queda que si $f$ es biyección entre $n$ y $\mathrm{rec}(x) \subseteq A$, pues $f \subseteq n \times A$ de modo que $f \in \mathbf{M}$ y por tanto, por hipótesis, $f \in x$.

(c) $x \doteq A^{<\omega} \Leftrightarrow \forall y\big(y \in x \leftrightarrow (\exists n \in \omega)(y \in A^n)\big)$. El proceso es similar al de (a).

(d) Ya vimos en el Lema 3.22 que ($R$ bien-ordena $A$) $\to$ ($R$ bien-ordena $A$)$^{\mathbf{M}}$. La otra dirección se debe a que, como $R$ bien-ordena $A$, existen un $\alpha \in \mathbf{M}$ y una función $f \in \mathbf{M}$ tales que $\big((\alpha \text{ es ordinal}) \wedge (\langle\alpha, \in_\alpha\rangle \cong \langle A,R\rangle \text{ mediante } f)\big)^{\mathbf{M}}$, que es una fórmula absoluta. Por tanto, $R$ bien-ordena $A$ con tipo de orden $\alpha$.

(e) La demostración del apartado anterior implica también la absolutez de OT. $\square$

### 3.2.1. Relativización y absolutez de clases

Durante este apartado usaremos el mismo símbolo para una clase que para la fórmula que determina sus elementos con el objetivo de facilitar la lectura.

**Definición 3.26.** Sea $\mathbf{M}$ una clase y $A = \{x \mid A(x)\}$ otra. Definimos la *relativización de $A$ a $\mathbf{M}$* como la clase $A^{\mathbf{M}} := \{x \mid A(x)^{\mathbf{M}}\}$ y decimos que *$A$ es absoluta para $\mathbf{M}$* si $A^{\mathbf{M}} = A \cap \mathbf{M}$.

**Definición 3.27.** Sea $\mathbf{M}$ una clase y $R = \{\langle x,y\rangle \mid R(x,y)\}$ una clase relacional. Definimos la *relativización de $R$ a $\mathbf{M}$ como relator* como la clase $R^{\mathbf{M}} := \{\langle x,y\rangle \mid R(x,y)^{\mathbf{M}}\}$ y decimos que *$R$ es absoluta para $\mathbf{M}$ como relator* si $R^{\mathbf{M}} = R \cap (\mathbf{M} \times \mathbf{M})$.

**Definición 3.28.** Sea $\mathbf{M}$ una clase y $F = \{\langle x,y\rangle \mid F(x,y)\}$ una clase funcional con dominio $\mathbf{V}$. Si se cumple que $(\forall x \exists! y F(x,y))^{\mathbf{M}}$ (intuitivamente, que $F$ interpretada en $\mathbf{M}$ no envía elementos hacia fuera de $\mathbf{M}$ y que sigue siendo funcional), definimos la *relativización de $F$ a $\mathbf{M}$ como funtor* como la clase $F^{\mathbf{M}} := \{\langle x,y\rangle \mid F(x,y)^{\mathbf{M}}\}$ y decimos que *$F$ es absoluta para $\mathbf{M}$ como funtor* si $F^{\mathbf{M}} = F\restriction_{\mathbf{M}}$.

**Observación 3.29.** Notamos que no es lo mismo que una clase funcional sea absoluta como funtor que como relator. Por ejemplo, si $\mathbf{M} = V_\omega$ y $F = \{\langle x,y\rangle \mid (x \doteq y \wedge x \not\doteq 0) \vee (x \doteq 0 \wedge y \doteq \omega)\}$, queda que $F$ es absoluta para $\mathbf{M}$ como relator, ya que $F^{\mathbf{M}} = \{\langle x,y\rangle \in \mathbf{M}\times\mathbf{M} \mid (x \doteq y \wedge x \not\doteq 0) \vee (x \doteq 0 \wedge y \doteq \omega)\} = \{\langle x,x\rangle \in \mathbf{M}\times\mathbf{M} \mid x \not\doteq 0\} = F \cap (\mathbf{M}\times\mathbf{M})$. Sin embargo, no se cumple que $(\forall x \in \mathbf{M})(\exists! y \in \mathbf{M})F^{\mathbf{M}}(x,y)$, porque $F^{\mathbf{M}}(0)$

no está definido al darse $\omega \notin V_\omega$. Por ello, técnicamente habría que especificar a qué tipo de absolutez queremos apelar en cada momento. No obstante, en la práctica el contexto hará evidente a cuál de ambas acepciones nos referimos, y nos ahorraremos concretar.

### 3.2.2. Últimos resultados de absolutez

**Teorema 3.30.** *Sean $R$ una relación bien fundada en una clase $A$, $G : A \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ una clase funcional y $F : A \longrightarrow \mathbf{V}$ la única función tal que*

$$(\forall x \in A)\big(F(x) \doteq G(x, F\restriction_{\{y \in A \mid yRx\}}\,)\big)$$

*dada por el Teorema* 2.10 *de Recursión en la buena fundación. Supongamos además que, para cierto* $\mathbf{M}$ *modelo de* ZF$-$P*, se tiene que*

1) *$G$ es absoluta para $\mathbf{M}$.*
2) *$R$ y $A$ son absolutas para $\mathbf{M}$,* ($R$ es set-like en $A$)$^{\mathbf{M}}$ *y*

$$(\forall x \in \mathbf{M})\big(\{y \in A \mid yRx\} \subseteq \mathbf{M}\big) \tag{3.2}$$

*Entonces $F$ es absoluta para $\mathbf{M}$.*

Demostración. Como $R$ y $A$ son absolutas, $A^{\mathbf{M}} = A \cap \mathbf{M}$ y $R^{\mathbf{M}} = R \cap (\mathbf{M} \times \mathbf{M})$, de modo que $R^{\mathbf{M}}$ también está bien fundada en $A^{\mathbf{M}}$ por la Proposición 2.7, cosa que equivale a decir ($R$ está bien fundada en $A$)$^{\mathbf{M}}$. Usamos ahora el Teorema de Recursión en la buena fundación para definir una $\tilde{F} : A^{\mathbf{M}} \longrightarrow \mathbf{M}$ que cumpla

$$(\forall x \in A^{\mathbf{M}})\big(\tilde{F}(x) \doteq G^{\mathbf{M}}(x, \tilde{F}\restriction_{\{y \in A^{\mathbf{M}} \mid yR^{\mathbf{M}}x\}}\,)\big)$$

Comprobamos ahora que $\tilde{F} = F\restriction_{A^{\mathbf{M}}}$. Para ello, supongamos que no es así y tomemos un $x$ $R^{\mathbf{M}}$-minimal en $B := \{y \in A^{\mathbf{M}} \mid \tilde{F}(y) \not\doteq F(y)\}$. Por construcción, $\tilde{F}(x) = G^{\mathbf{M}}(x, \tilde{F}\restriction_{\{y \in A^{\mathbf{M}} \mid yR^{\mathbf{M}}x\}})$. Como $x$ es $R^{\mathbf{M}}$-minimal en $B$, tenemos que $\tilde{F}(y) = F(y)$ para todo $y$ tal que $yR^{\mathbf{M}}x$, ergo $\tilde{F}\restriction_{\{y \in A^{\mathbf{M}} \mid yR^{\mathbf{M}}x\}} = F\restriction_{\{y \in A^{\mathbf{M}} \mid yR^{\mathbf{M}}x\}}$, así que $\tilde{F}(x) = G^{\mathbf{M}}(x, F\restriction_{\{y \in A^{\mathbf{M}} \mid yR^{\mathbf{M}}x\}})$. Ahora, puesto que $x \in A^{\mathbf{M}}$, usando la absolutez de $A, G$ y $R$ y la fórmula (3.2) tenemos que ello es igual a $G(x, F\restriction_{\{y \in A \mid yRx\}})$, que es exactamente $F(x)$, de modo que $\tilde{F}(x) = F\restriction_{A^{\mathbf{M}}}(x)$, contradiciendo la hipótesis.
Evidentemente, $F^{\mathbf{M}} = \tilde{F}$. Sumado a $\tilde{F} = F\restriction_{A^{\mathbf{M}}}$, queda que $F$ es absoluta para $\mathbf{M}$. □

**Teorema 3.31.** *Las siguientes propiedades y funciones son absolutas para cualquier modelo transitivo de* ZF$-$P*.*

(a) $\rho(x)$

(b) $\mathrm{tc}(x)$

Demostración. (a) Aplicamos el teorema anterior a $A = \mathbf{Wf}$, $R = \in$, $G = sup^+$ y $F = \rho$.

(b) Definimos $\bigcup^n$ para $n \in \omega$ por recursión poniendo que, para todo $x$, $\bigcup^0(x) := x$ y $\bigcup^{n+1}(x) := \bigcup(\bigcup^n(x))$ si $n > 0$. Entonces queda que $\mathrm{tc}(x) = \bigcup\{\bigcup^n(x) \mid n \in \omega\}$, que es absoluta para cualquier modelo de ZF$-$P. □

**Lema 3.32.** *Sea* $\mathbf{M}$ *un modelo transitivo de* ZF*. Entonces:*

(i) $\mathcal{P}(x)^{\mathbf{M}} = \mathcal{P}(x) \cap \mathbf{M}$ *para* $x \in \mathbf{M}$

(ii) $V_\alpha^{\mathbf{M}} = V_\alpha \cap \mathbf{M}$ *para* $\alpha \in \mathbf{M}$

<u>*Demostración*</u>. (i) $z \doteq \mathcal{P}(x) \Leftrightarrow \forall y(y \subseteq x \leftrightarrow y \in z)$, que relativizada queda $z \doteq \mathcal{P}(x)^{\mathbf{M}} \Leftrightarrow (\forall y \in \mathbf{M})(y \subseteq x \leftrightarrow y \in z)$, que es equivalente a $z \doteq \mathcal{P}(x) \cap \mathbf{M}$ y, por extensionalidad, queda $\mathcal{P}(x)^{\mathbf{M}} = \mathcal{P}(x) \cap \mathbf{M}$.

(ii) $V_\alpha = \{x \in \mathbf{Wf} \mid \rho(x) < \alpha\}$, que relativizada queda $V_\alpha = \{x \in \mathbf{Wf} \cap \mathbf{M} \mid \rho(x) < \alpha\}$ por ser $\rho$ absoluta, ergo se cumple el enunciado. $\square$

Con todo esto ya estamos listos para comenzar a experimentar con algunas subclases de $\mathbf{V}$, comprobar qué axiomas de ZFC cumplen y, con ello, obtener resultados de consistencia relativa e independencia.

# 4. Resultados de consistencia relativa e independencia

A lo largo de este capítulo buscaremos subclases del universo que nos sirvan de modelos para tales o cuales axiomas de ZFC. Primero lo haremos con los $V_\alpha$ y, luego, con los llamados $H(\kappa)$. Con ello lograremos algunos de los resultados de independencia y consistencia relativa que buscamos.

## 4.1. Los axiomas de ZFC en la jerarquía acumulativa

Una forma natural de buscar modelos de un subconjunto de axiomas de ZFC es utilizar los $V_\alpha$ de la jerarquía acumulativa. Recorreremos en esta sección tales axiomas uno a uno para determinar qué $\alpha$'s son los adecuados para que estos sean satisfechos.

Evidentemente, para que nuestro modelo sea no vacío necesitamos $\alpha > 0$, así que nos abstendremos de recalcar tal requisito repetidamente.

### Extensionalidad

Puesto que $V_\alpha$ es transitivo para todo $\alpha$, el Lema 3.5 nos asegura que este axioma siempre se mantendrá en todo $V_\alpha$.

### Separación

Dados un $\alpha > 0$, un $x \in V_\alpha$ y un $y \subseteq x$, tenemos que $\rho(y) \leqslant \rho(x) < \alpha$, de modo que $y \in V_\alpha$. Por tanto, por el Corolario 3.7 queda que el Esquema de Separación es cierto en $V_\alpha$ para todo $\alpha$.

### Par

Como vimos en el Lema 2.27, si $x, y \in V_\gamma$, entonces $\{x, y\} \in V_{\gamma+1}$. Esto implica que, si $\alpha$ es un ordinal límite, para cualquier par de conjuntos $x, y$ con $\rho(x), \rho(y) < \alpha$ tenemos $\rho(x)+1, \rho(y)+1 < \alpha$ y, por tanto, $\rho(\{x, y\}) = \text{máx}\{\rho(x), \rho(y)\} + 1 < V_\alpha$.
Además, el recíproco es cierto: salvando el caso 0, si $\alpha$ no es límite entonces es sucesor. Con $\alpha = \beta + 1$, si tomamos $x, y$ de rangos $\beta$ queda que $\rho(\{x, y\}) = \beta + 1 \not< \alpha$ y, por ende, $\{x, y\} \notin V_\alpha$. En resumen: $V_\alpha$ satisface el Axioma del Par si y sólo si $\alpha$ es límite.

### Unión

El Axioma de la Unión se cumple en $V_\alpha$ para todo $\alpha$: si $x \in V_\alpha$ entonces tenemos que $\bigcup x = \in^{-1}[x] \in V_\alpha$ por el Lema 2.27 apartado (i)(a).

### Potencia

El Lema 2.27, junto con la Observación 3.8, nos asegura que $V_\alpha$ satisface el Axioma de la Potencia siempre que $\alpha$ sea límite.
Argumentos similares a los del apartado del Axioma del Par nos aseguran que el recíproco es también cierto.

### Infinito

Evidentemente el Axioma del Infinito se cumple en $V_\alpha$ si y sólo si $\alpha > \omega$, ya que $\rho(\omega) = \omega$. Más detalladamente: no podemos utilizar la condición que el Lema 3.21 nos decía que era suficiente para que un modelo cumpliese el Axioma del Infinito; es decir, no podemos usar la absolutez de la función sucesor $\mathcal{S}$ al no tener garantizado el Axioma del Par y por tanto no estar $\mathcal{S}^{V_\alpha}$ definida en todo $V_\alpha$. Pero sí que sabemos que esta está definida para, al menos, los $x \in V_\omega$, puesto que, entonces, $\rho(\mathcal{S}(x)) < \omega < \alpha$, así que $\mathcal{S}(x) \in V_\alpha$, lo cual es ya suficiente para que se cumpla Inf en $V_\alpha$.

### Regularidad

Sobra decir que el Axioma de Regularidad se verifica en todo $V_\alpha$ debido al hecho de que $V_\alpha \subseteq \mathbf{Wf}$ y al argumento visto en 3.10.

### Elección

Trabajando con AC, el Lema 3.22 implica que tener un $\alpha$ límite es condición suficiente para que el Axioma de Elección se cumpla también en $V_\alpha$. Esto es debido a que, a pesar de que el enunciado de tal lema pide que nuestro modelo cumpla todo ZF$^-$−P−Inf, no se utiliza en ningún momento el Esquema de Reemplazo, y la condición de que $\alpha$ sea límite ya garantiza la validez del resto de los axiomas requeridos. Ésto lo demostraremos más detalladamente en el Lema 4.5.
No nos entretendremos en indagar sobre las condiciones necesarias. Sólo comentaremos que, usando versiones de AC que son equivalentes a este, se puede ver que en realidad $(\mathrm{AC})^{V_\alpha}$ se satisface para todo $\alpha$ (referencia: [End77, página 252]).

### Esquema de Reemplazo

Al contrario que con los anteriores axiomas, el Esquema de Reemplazo no se cumple en $V_\alpha$ para todo $\alpha$ límite. Por ejemplo: tomamos $\omega \cdot 2 = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\}$, informalmente. La clase funcional $F : \mathbf{On} \longrightarrow \mathbf{On}$ determinada por $F(\gamma) = \omega + \gamma$ es absoluta para $V_{\omega\cdot 2}$ pero, a pesar de que $\omega \in V_{\omega\cdot 2}$, $F[\omega] = \omega \cdot 2 \setminus \omega \notin V_{\omega\cdot 2}$, ya que $\rho(F[\omega]) = \omega \cdot 2 \not< \omega \cdot 2$. Hace falta una hipótesis más fuerte.
Nos centramos más en profundidad en el Esquema de Reemplazo en la sección 4.3.

## 4.2. Primeros resultados de consistencia relativa e independencia

**Lema 4.1.** (ZFC) *Si $\alpha$ es un ordinal límite estrictamente mayor que $\omega$, entonces $V_\alpha$ es modelo de todo* ZFC *excepto quizá el Esquema de Reemplazo.*

*Demostración.* La sección 4.1 es la prueba. □

Con esto y el Lema 3.4 obtenemos nuestro primer resultado importante:

**Resultado 1.** Asumiendo que Z+AC es consistente, no todo axioma del Esquema de Reemplazo es un teorema de Z+AC.

*Demostración.* Tomando $\alpha := \omega \cdot 2$ se da $(\mathrm{Z} + \mathrm{AC} + \neg\phi)^{V_\alpha}$, siendo $\phi$ un enunciado del Esquema de Reemplazo tal que $\neg\phi^{V_\alpha}$ (como el que dimos antes, por ejemplo). Por 3.4, esto significa que $\mathrm{Con}(\mathrm{Z} + \mathrm{AC}) \to \mathrm{Con}(\mathrm{Z} + \mathrm{AC} + \neg\phi)$, estableciendo la afirmación del enunciado. □

***Nota.*** Nótese que decimos «no todo axioma del Esquema[...]», puesto que algunos sí lo son. Por ejemplo, si $F$ es una clase funcional tal que $F[\mathbf{V}] \subseteq B$ para algún $B$, no requerimos del Esquema de Reemplazo para demostrar que $F[A] \subseteq B$ es un conjunto si $A$ también lo es: nos basta con el Esquema de Separación.

**Lema 4.2.** *$V_n$ es finito para todo $n$. Por tanto, si $x \in V_\omega$, entonces $x$ es finito.*

*Demostración.* Por inducción en $n$: evidentemente el caso 0 es cierto. Ahora, si $V_n$ es finito, usando la Proposición 1.36 vemos que $V_{n+1} = \mathcal{P}(V_n) \sim 2^n < \omega$, así que también es finito. Por otro lado, si $x \in V_\omega$ con $\rho(x) = n$, tenemos que $x \subseteq V_n \Rightarrow |x| \leqslant |V_n| < \omega$. □

**Lema 4.3.** *El Esquema de Reemplazo es cierto en* $\mathbf{Wf}$ *y en* $V_\omega$.

*Demostración.* Supongamos que $\mathbf{M} = V_\omega$ o $\mathbf{M} = \mathbf{Wf}$ y que $\phi$ es una fórmula con $x, y$ como variables libres tal que para todo $x \in \mathbf{M}$ hay a lo sumo un $y \in \mathbf{M}$ tal que $\phi(x, y)$. Entonces, dado un $A \in \mathbf{M}$, llamamos $B$ al conjunto $\{y \in \mathbf{M} \mid (\exists x \in A)\phi^{\mathbf{M}}(x, y)\}$ dado por el Esquema de Reemplazo. En el caso $\mathbf{M} = \mathbf{Wf}$ tenemos que $B \subseteq \mathbf{Wf}$ y, por tanto, $B \in \mathbf{Wf}$. En el caso $\mathbf{M} = V_\omega$ tenemos que $|B| \leqslant |A| < \omega$, así que $B$ es finito y los elementos de $B$ tienen rango finito. Por ende, $\rho(B) = (\max \rho[B]) + 1 < \omega$, así que $B \in V_\omega = \mathbf{M}$. En cualquier caso, el Esquema de Reemplazo es cierto en $\mathbf{M}$. □

**Lema 4.4.** *Todo conjunto finito tiene un buen orden.*

*Demostración.* Por inducción en la cardinalidad de $A$: para $|A| = 0$ es obvio y, si $|A| = n+1$, tomamos un $a \in A$ arbitrario y, como $|A \setminus \{a\}| = n$, usamos la hipótesis de inducción para invocar un buen orden $R$ de $A \setminus \{a\}$. Entonces $R' := R \cup \{\langle x, a\rangle \mid x \in A \setminus \{a\}\}$ es buen orden de $A$. □

**Lema 4.5.** $(\mathrm{ZF}^-)$ $(\mathrm{AC}) \to (\mathrm{AC})^{\mathbf{Wf}}$ *y, para todo $\alpha$ límite,* $(\mathrm{AC}) \to (\mathrm{AC})^{V_\alpha}$.

*Demostración.* Supongamos que se verifica AC y tomemos un $A \in \mathbf{Wf}$ con rango $\beta$. Por AC (que equivale a WOP), hay un $R \subseteq A \times A$ buen orden de $A$. Ahora, como $A \in V_{\beta+1}$, queda que $A \times A \in V_{\beta+3}$ y $R \subseteq A \times A \Rightarrow R \in V_{\beta+3} \subseteq V_\alpha$. El resto utiliza el Lema 3.25 apartado (d). Esto ya demuestra ambas afirmaciones del enunciado. □

**Teorema 4.6.** (i) $(\mathrm{ZF}^-)$ $\mathbf{Wf}$ *es modelo de* ZF.

(ii) $(\mathrm{ZFC}^-)$ $\mathbf{Wf}$ *es modelo de* ZFC.

(iii) $(\mathrm{ZF}^-)$ $V_\alpha$ *es modelo de* Z *para todo $\alpha$ límite.*

(iv) $(\mathrm{ZFC}^-)$ $V_\alpha$ *es modelo de* Z+AC *para todo $\alpha$ límite.*

(v) $(\mathrm{ZF}^-)$ $V_\omega$ *es modelo de* ZFC$-$Inf+$\neg$Inf.

*Demostración.* (i) La sección 4.1 y el Lema 4.3 demuestran que todos los axiomas de ZF se cumplen en $\mathbf{Wf}$.

(ii) El apartado (i) junto a los lemas 4.5 y 4.3 nos lo garantizan.

(iii) La sección 4.1 es la prueba.

(iv) El apartado (iii) junto al Lema 4.5 lo confirman.

(v) Gracias a la sección 4.1, sólo hace falta que comprobemos que $(\mathrm{AC})^{V_\omega}$ y que $\omega \notin V_\omega$. Pero ello también está garantizado por los lemas 4.2 y 4.4. □

**Resultado 2.** (i) $\mathrm{Con}(\mathrm{ZF}^-) \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZF})$

(ii) $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}^-) \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$

(iii) Si ZFC es consistente, el Axioma del Infinito es independiente de ZFC−Inf.

Demostración. El teorema anterior junto con el Lema de Consistencia Relativa. □

Debido al apartado (i) es frecuente tomar AF como un axioma básico de la teoría de conjuntos: prácticamente la totalidad las matemáticas se desarrollan en **Wf**.

## 4.3. Los $H(\kappa)$ y más resultados de consistencia relativa e independencia

Presentamos ahora una nueva colección de conjuntos candidatos a ser modelos de versiones más débiles de ZF: los $H(\kappa)$. Comenzamos con su definición:

***Notación.*** Usaremos durante esta sección la función $|\cdot|$ regularmente. Cuando lo hagamos, para abreviar, a $|x| = \kappa$ se le asignará un doble significado: que $x$ es bien-ordenable **y** que su cardinalidad es $\kappa$.

**Definición 4.7.** Para todo $\kappa \in \mathbf{Card}_{\geqslant\omega}$, se define $H(\kappa) := \{x \in \mathbf{Wf} : |\operatorname{tc}(x)| < \kappa\}$.
Si $x \in H(\kappa)$, decimos que $x$ es *hereditariamente de cardinal menor que* $\kappa$.

**Proposición 4.8.** *Para todo $\kappa \in \mathbf{Card}_{\geqslant\omega}$ se tiene que $H(\kappa) \subseteq V_\kappa$.*

Demostración. Sea $x \in H(\kappa)$. Buscamos ver que $\rho(x) < \kappa$. Para ello, consideramos $t := \operatorname{tc}(x)$ y $\eta := \rho[t]$. Por la Proposición 2.22 apartado (i) tenemos que $\rho(t) = \eta$. Además, como $t$ es bien-ordenable, tomando un buen orden $\lhd$ de $t$ tenemos que $\eta \preceq t$ mediante la función inyectiva $f : \beta \mapsto \min_\lhd \rho^{-1}[\{\beta\}]$ para $\beta \in \eta$, así que $\eta < \kappa$ (de otro modo, $\kappa \leqslant \eta \preceq t \prec \kappa$, lo cual sería una contradicción). Por ende, $\rho(x) \leqslant \rho(t) = \eta < \kappa$, como queríamos. □

**Corolario 4.9.** *$H(\kappa)$ es un conjunto para todo $\kappa \in \mathbf{Card}_{\geqslant\omega}$.*

***Notación.*** Escribiremos $\mathrm{FI}(\kappa)$ para abreviar «$\kappa$ es fuertemente inaccesible».

**Lema 4.10.** (AC) *Sea $\kappa$ un cardinal regular. Entonces $H(\kappa) = V_\kappa$ si y sólo si $\kappa = \omega$ o $\kappa$ es fuertemente inaccesible.*

Demostración. $\underline{\Leftarrow}$ Supongamos un $\kappa$ fuertemente inaccesible y un $x \in V_\kappa$. Entonces, como todo cardinal infinito es ordinal límite, existe algún $\alpha < \kappa$ tal que $x \subseteq V_\alpha$. Demostramos ahora que $|V_\alpha| < \kappa$:
Para $\kappa = \omega$ es claro, pues $V_\alpha$ es finito. Para $\kappa > \omega$, procedemos por inducción: Si $\alpha = 0$, es evidente. Si $\alpha = \beta + 1$ y $|V_\beta| = \lambda < \kappa$, entonces $|V_\alpha| = |\mathcal{P}(V_\beta)| = 2^{|V_\beta|} = 2^\lambda < \kappa$. Si $\alpha$ es límite, entonces $|V_\alpha| \leqslant \sum_{\beta<\alpha} |V_\beta| = |\alpha| + sup\{|V_\beta| : \beta < \alpha\} < \kappa$, donde la igualdad se debe al Teorema 1.51 y las desigualdades vienen dadas por el Lema 1.50 y por el hecho de que $\kappa$ es regular, respectivamente.
Ahora, y puesto que $\operatorname{tc}(x) \subseteq V_\alpha$, tenemos que $|\operatorname{tc}(x)| \leqslant |V_\alpha| < \kappa$, ergo $x \in H(\kappa)$.

$\underline{\Rightarrow}$ Supongamos que $\kappa$ es regular, $\kappa$ no es fuertemente inaccesible y $\kappa > \omega$. Entonces hay un $\lambda < \kappa$ tal que $2^\lambda \geqslant \kappa$. De modo que $\lambda \in H(\kappa)$ pero $\mathcal{P}(\lambda) \in V_\kappa \setminus H(\kappa)$. □

**Proposición 4.11.** *Sea $\kappa \in \mathbf{Card}_{\geqslant\omega}$ un cardinal infinito:*

(i) $H(\kappa)$ *es transitivo*

(ii) $H(\kappa) \cap \mathbf{On} = \kappa$

(iii) $(\forall x \in H(\kappa))(\bigcup x \in H(\kappa))$

(iv) $(\forall x, y \in H(\kappa))(\{x, y\} \in H(\kappa))$

(v) $(\forall x \in H(\kappa))(\forall y \subseteq x)(y \in H(\kappa))$

(vi) (AC) *Si* $\kappa$ *es regular, entonces* $\forall x(x \in H(\kappa) \leftrightarrow x \subseteq H(\kappa) \wedge |x| < \kappa)$.

*Demostración.* (i) Si $y \in x \in H(\kappa)$ entonces $\mathrm{tc}(y) \subseteq \mathrm{tc}(x) \Rightarrow |\mathrm{tc}(y)| \leqslant |\mathrm{tc}(x)| < \kappa$.

(ii) Si $\alpha \in H(\kappa) \cap \mathbf{On}$ entonces $\alpha = \mathrm{tc}(\alpha) \Rightarrow |\alpha| = |\mathrm{tc}(\alpha)| < \kappa \Rightarrow \alpha < \kappa$.

(iii) Si $x \in H(\kappa)$ entonces $\bigcup x \subseteq \mathrm{tc}(x) \Rightarrow |\mathrm{tc}(\bigcup x)| \leqslant |\mathrm{tc}(x)| < \kappa$.

(iv) Si $x, y \in H(\kappa)$, entonces $|\mathrm{tc}(\{x, y\})| = |\{x\} \cup \{y\} \cup \mathrm{tc}(x) \cup \mathrm{tc}(y)|$. Como $\kappa$ es infinito, queda que $|\mathrm{tc}(\{x, y\})| \leqslant 2 + |\mathrm{tc}(x)| + |\mathrm{tc}(y)| < \kappa$.

(v) Si $y \subseteq x \in H(\kappa)$, entonces $\mathrm{tc}(y) \subseteq \mathrm{tc}(x) \Rightarrow |\mathrm{tc}(y)| \leqslant |\mathrm{tc}(x)| < \kappa$.

(vi) Supongamos que $\kappa$ es regular. En una dirección: si $x \in H(\kappa)$, el apartado (i) asegura que $x \subseteq H(\kappa)$. Además, $x \subseteq \mathrm{tc}(x) \Rightarrow |x| \leqslant |\mathrm{tc}(x)| < H(\kappa)$.
Para el recíproco, como $\mathrm{tc}(x) = x \cup \bigcup_{y \in x} \mathrm{tc}(y)$, suponiendo que $x \subseteq H(\kappa)$ y que $|x| < \kappa$ tenemos que $|\mathrm{tc}(x)| \leqslant |x| + \sum_{y \in x} |\mathrm{tc}(y)| < \kappa$, por ser $\kappa$ regular. □

**Teorema 4.12.** (AC) *Si* $\kappa \in \mathbf{Card}_{>\omega}$ *es regular, entonces* $H(\kappa)$ *es modelo de* ZFC−P.

*Demostración.* (a) Extensionalidad y Regularidad se verifican por 4.11(i) y por 4.8.

(b) Por 4.11(iii), 4.11(iv) y 4.11(iii) se mantienen también los axiomas de Unión, Separación y Par.

(c) Reemplazo está garantizado por 4.11(vi):
Si $x \in H(\kappa)$ y $F : H(\kappa) \longrightarrow H(\kappa)$, entonces $F[x] \preceq x$, cosa que podemos ver con la función $g : y \mapsto \text{mín}_{\lhd} F^{-1}[\{y\}]$, donde $\lhd$ es cualquier buen orden de $x$. De modo que $|F[x]| \leqslant |x| < \kappa$ y $F[x] \subseteq H(\kappa) \Rightarrow F[x] \in H(\kappa)$.

(d) 3.23(f) y 4.11(ii) aseguran el Axioma del Infinito en $H(\kappa)$.

(e) Dado un $A \in H(\kappa)$, invocamos un buen orden $\lhd$ de $A$ usando AC. Por 4.11(i) y 4.11(iv), queda que $\lhd \subseteq H(\kappa)$. Además, $|\lhd| \leqslant |A \times A| = |A| < \kappa$ así que, por 4.11(vi) tenemos que $\lhd \in H(\kappa)$. El resto utiliza el Teorema 3.25 apartado (d). □

**Teorema 4.13.** (AC) *Si* $\kappa \in \mathbf{Card}_{>\omega}$ *es un cardinal regular, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) $H(\kappa)$ *satisface* ZFC (2) $H(\kappa) = V_\kappa$ (3) $\mathrm{FI}(\kappa)$

*Demostración.* Dado un $\kappa > \omega$ regular, hemos visto (2)↔(3) en el Lema 4.10.
Luego, si $\kappa$ es fuertemente inaccesible y $x \in H(\kappa)$, entonces $\mathcal{P}(x) \cap H(\kappa) = \mathcal{P}(x) \in V_\kappa$ $= H(\kappa)$, y ya sabemos por el Teorema 4.12 que se cumplen los demás axiomas de ZFC ⇒ $H(\kappa)$ es modelo de ZFC y tenemos (3)→(1).
Para el recíproco, si hay $\lambda < \kappa$ con $2^\lambda \geqslant \kappa$ entonces $\lambda \in H(\kappa)$ pero $\mathcal{P}(\lambda) \notin H(\kappa)$, como la segunda dirección del Lema 4.10. □

**Resultado 3.** (i) Con(ZFC) → Con(ZFC−P + ¬P). Por tanto, el Axioma de la Potencia es independiente del resto de ZFC.

(ii) $\mathrm{Con(ZFC)} \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC{-}P} + \forall x(x \text{ es numerable}))$

*Demostración.* (i) Se aplica a $\mathbf{M} = H(\kappa)$ el Lema de Consistencia Relativa junto con el teorema anterior para algún $\kappa$ no-fuertemente inaccesible ($\omega_1$, por ejemplo).

(ii) Tomamos $\mathbf{M} = H(\omega_1)$. Entonces, si $x \in H(\omega_1)$, se tiene que $|\,\mathrm{tc}(x)| < \omega_1$, ergo $x \subseteq \mathrm{tc}(x) \preceq \omega$. Por tanto, hay una $f \in {}^x\omega$ inyectiva. Ahora, $f \subseteq x \times \omega$, de modo que $|\,\mathrm{tc}(f)| \leqslant |\,\mathrm{tc}(x \times \omega)| \leqslant |\,\mathrm{tc}(x)| \cdot \omega < \omega_1$. Por tanto, $f \in H(\omega_1)$ y nos queda que $(f \text{ es inyección de x en } \omega)^{H(\omega_1)}$. □

**Lema 4.14.** (i) (AC) *Si $\kappa$ es fuertemente inaccesible, entonces las operaciones de la aritmética cardinal básica (capítulo 1, sección 1.5) son absolutas para $H(\kappa)$.*

(ii) (AC) *Si $\kappa$ es fuertemente inaccesible, entonces* $\mathrm{FI}(\lambda)$ *es absoluta para $H(\kappa)$.*

*Demostración.* (i) El Lema 4.11 nos garantiza la absolutez de generar pares, uniones y conjuntos potencia. Además, el Teorema 3.30 nos asegura que tomar el cardinal de un conjunto es una función absoluta. Ello y el hecho de que $\kappa$ sea fuertemente inaccesible nos garantizan que las operaciones de la aritmética cardinal básica están bien definidas en $H(\kappa)$ y son absolutas, por ser composiciones de estas nociones.

(ii) Por un lado, $(\lambda \text{ es regular}) \Leftrightarrow (\lambda \text{ es cardinal}) \wedge (\forall \alpha < \lambda)(\forall f \in {}^\alpha\lambda)(\bigcup \mathrm{rec}(f) < \lambda)$. Por otro lado, $\mathrm{FI}(\lambda) \Leftrightarrow (\lambda \text{ es regular}) \wedge (\forall \mu < \lambda)(\mu \text{ es cardinal} \to 2^\mu < \lambda)$, que es $\Delta_0$ y por tanto absoluta para $H(\kappa)$. □

***Notación.*** Escribimos $\mathrm{I} := \exists \lambda(\mathrm{FI}(\lambda))$.

**Resultado 4.** $\mathrm{Con(ZFC)} \to \mathrm{Con(ZFC{+}\neg I)}$. Por tanto, si ZFC es consistente, la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles no se puede deducir desde ZFC.

*Demostración.* Ante esta situación uno intentaría tomar como $\kappa$ al primer cardinal fuertemente inaccesible para usar $H(\kappa)$ como modelo de ZFC+¬I. Sin embargo, si ZFC es consistente, no podemos demostrar la existencia de tales cardinales (como consecuencia de este resultado). Por ello, debemos hacer uso del siguiente truco:

$$\mathbf{M} := \{x \mid \forall \lambda\big(\,\mathrm{FI}(\lambda) \to x \in H(\lambda)\,\big)\}$$

De existir un $\lambda$ fuertemente inaccesible, escogiendo $\kappa$ como el mínimo de ellos tendríamos $\mathbf{M} = H(\kappa)$ (por ser $H(\mu) \subseteq H(\lambda)$ para $\mu \leqslant \lambda$), y $\mathbf{M}$ sería modelo de ZFC+¬I, al no haber $\lambda < \kappa$ tal que $\mathrm{FI}(\lambda)$. En caso contrario, tendríamos que $\mathbf{M} = \mathbf{V}$ es modelo de ZFC+¬I, por no existir ningún $\lambda$ fuertemente inaccesible.
La aplicación del Lema de Consistencia Relativa termina la prueba. □

Tras este resultado, una pregunta natural que surge es si podemos encontrar un modelo de ZFC+I desde ZFC para demostrar la consistencia relativa de ZFC + I. La respuesta es negativa: no podemos hallar tal modelo (lo cual no significa necesariamente que ZFC + I no sea consistente; sólo que nuestros métodos son insuficientes para probar su consistencia relativa). Sin embargo, tal afirmación requiere del uso de los Teoremas de Incompletitud de Gödel, para cuya enunciación exxcederíamos el límite de páginas de este proyecto.

## 4.4. Teorema de Reflexión

Finalizamos el capítulo con el Teorema de Reflexión, que nos permitirá concluir la sección con un resultado importante sobre ZF. Para demostrarlo necesitaremos valernos de varias definiciones y lemas previos.

***Notación***. Se escribe $\bigwedge_{i=1}^n \phi_i \coloneqq \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n$.

**Lema 4.15.** *Para toda fórmula $\chi$ de los teoremas* 3.20*,* 3.23*,* 3.25 *y* 3.31 *(excepto el apartado* (d) *de* 3.23*) se puede tomar una lista finita $\phi_1, \dots, \phi_n$ de axiomas de* ZF−P *tales que*

$$\mathrm{ZF{-}P} \vdash \forall M(M \text{ transitivo } \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i^M \to \chi \text{ es absoluta para } M)$$

*Ídem para las funciones definidas en esos teoremas.*

Demostración. En todos los casos, los argumentos de absolutez utilizados hacían uso del Lema 3.19 y de una cantidad finita de axiomas de ZF−P , incluidos los argumentos usados para el criterio de existencia y unicidad de $y$ en las fórmulas $F(x_1, \dots, x_n) \doteq y$ (donde $F$ es una de las funciones listadas) y las instancias del Teorema de Recursión. □

**Definición 4.16.** Sea $\Sigma = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ un conjunto de fórmulas. Se dice que $\Sigma$ es *cerrado por subfórmulas* si toda subfórmula de $\phi_i$ está en $\Sigma$ para todo $i \leqslant n$.

**Lema 4.17.** *Sean $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$ clases y $\Sigma = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ un conjunto cerrado por subfórmulas. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *Las fórmulas $\phi_1, \dots, \phi_n$ son absolutas para $\mathbf{M}, \mathbf{N}$.*

(2) *Para toda $\phi_i = \exists x \phi_j$, donde $x, y_1, \dots, y_l$ son las variables libres de $\phi_j$, se satisface*

$$(\forall y_1, \dots, y_l \in \mathbf{M})\big[(\exists x \in \mathbf{N})\phi_j^{\mathbf{N}}(x, y_1, \dots, y_l) \to (\exists x \in \mathbf{M})\phi_j^{\mathbf{N}}(x, y_1, \dots, y_l)\big]$$

Demostración. $\Rightarrow$ Supongamos que todas las fórmulas de $\Sigma$ son absolutas para $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ y que $\phi_i = \exists x \phi_j$ en $\Sigma$. Dados $y_1, \dots, y_l$, observamos que $(\exists x \in \mathbf{N})\phi_j^{\mathbf{N}}(x, y_1, \dots, y_l) = \phi_i^{\mathbf{N}} \Leftrightarrow \phi_i^{\mathbf{M}} = (\exists x \in \mathbf{M})\phi_j^{\mathbf{M}}(x, y_1, \dots, y_l) \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbf{M})\phi_j^{\mathbf{N}}(x, y_1, \dots, y_l)$, donde las equivalencias son debidas a la hipótesis de que las $\phi_k$ son absolutas para $\mathbf{M}, \mathbf{N}$.

$\Leftarrow$ Supongamos (2) y tomemos una fórmula $\phi$ de $\Sigma$. Procedemos por inducción:

- Caso $\phi$ atómica: Entonces evidentemente es absoluta para $\mathbf{M}, \mathbf{N}$.
- Caso $\phi = \psi_1 \wedge \psi_2$: Entonces $\phi^{\mathbf{M}} = \psi_1^{\mathbf{M}} \wedge \psi_2^{\mathbf{M}} \Leftrightarrow \psi_1^{\mathbf{N}} \wedge \psi_2^{\mathbf{N}} = \phi^{\mathbf{N}}$. La equivalencia es debida a la hipótesis de inducción junto al hecho de que $\Sigma$ es cerrado por subfórmulas.
- Caso $\phi = \neg\psi$: Similar al anterior.
- Caso $\phi = \exists x \psi$: Por la misma razón que en los apartados anteriores, queda que $\chi \coloneqq (\exists x \in \mathbf{M})\psi^{\mathbf{N}}(x, y_1, \dots, y_l) \Leftrightarrow \phi^{\mathbf{M}} = (\exists x \in \mathbf{M})\psi^{\mathbf{M}}(x, y_1, \dots, y_l)$. Como $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$, tenemos que $\chi$ implica $(\exists x \in \mathbf{N})\psi^{\mathbf{N}}(x, y_1, \dots, y_l) = \phi^{\mathbf{N}}$. Además, la hipótesis (2) nos da el recíproco, de modo que $\phi^{\mathbf{N}} \Leftrightarrow \phi^{\mathbf{M}}$. □

Presentamos ahora una versión generalizada del Teorema de Reflexión que tendrá a éste como corolario. La utilidad de tal teorema reside en que nos afirma la existencia de conjuntos que son modelos de una porción finita de los axiomas de ZF, sea cual sea esta porción, cosa que lleva a resultados de interés para este proyecto.

**Teorema 4.18.** *Sean $\mathbf{Z}, Z$ clases. Definimos las propiedades* (1), (2), (3), (4) *como sigue:*

(1) $Z : \mathbf{On} \longrightarrow \mathbf{V}$

(2) $\beta < \alpha \to Z(\beta) \subseteq Z(\alpha)$

(3) $\alpha$ es límite $\to Z(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} Z(\beta)$

(4) $\mathbf{Z} = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{On}} Z(\alpha)$

*Se tiene entonces que, para $\phi_1, \ldots, \phi_n$ fórmulas cualesquiera,*

$$\mathrm{ZF} \vdash (1) \wedge \cdots \wedge (4) \to \forall\alpha(\exists\beta > \alpha)\big(\phi_1, \ldots, \phi_n \text{ son absolutas para } Z(\beta), \mathbf{Z}\big)$$

*Demostración.* Supongamos $\mathbf{Z}, Z$ con las propiedades listadas y un cierto $\alpha \in \mathbf{On}$. Debemos buscar un $\beta > \alpha$ para el que $\phi_1, \ldots, \phi_n$ sean absolutas para $Z(\beta), \mathbf{Z}$. Dividimos la demostración en varios pasos:

(a) Asumimos que $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ es cerrado por subfórmulas. De no serlo, lo convertimos en uno añadiéndole las subfórmulas de sus fórmulas y sigue siendo finito.

(b) Para $\phi_i = \exists x\phi_j$ e $y_1, \ldots, y_l \in \mathbf{Z}$, si existe $x \in \mathbf{Z}$ tal que $\phi_j^{\mathbf{Z}}(x, y_1, \ldots, y_l)$, definimos $G_i(y_1, \ldots, y_l) \coloneqq \text{mín}\{\eta \mid (\exists x \in Z(\eta))\phi_j^{\mathbf{Z}}(x, y_1, \ldots, y_l)\}$. De no existir tal $x$, ponemos simplemente $G_i(y_1, \ldots, y_l) \coloneqq 0$.

(c) Para $0 < i \leqslant n$, definimos $F_i(\zeta) \coloneqq \sup\{G_i(y_1, \ldots, y_l) \mid y_1, \ldots, y_l \in Z(\zeta)\}$ si $\phi_i = \exists x\phi_j$. Si $\phi_i$ no es una cuantificación existencial, ponemos $F_i(\zeta) \coloneqq 0$.
Observamos que $F_i$ está bien definida, ya que trabajamos en ZF y, por tanto, tenemos el Esquema de Reemplazo. Además, por construcción, $F_i$ es creciente.

(d) Observamos que, si $\beta$ es un ordinal límite que cumple $(\forall\zeta < \beta)(F_i(\zeta) < \beta)$ para $0 < i \leqslant n$, entonces $\phi_1, \ldots, \phi_n$ serán absolutas para $Z(\beta), \mathbf{Z}$. La demostración se vale del Lema 4.17: si $\phi_i = \exists x\phi_j(x, y_1, \ldots, y_l)$ e $y_1, \ldots, y_l \in Z(\beta)$, hay $\zeta < \beta$ tal que $y_1, \ldots, y_l \in Z(\zeta)$. Suponiendo que $\exists x \in \mathbf{Z}$ tal que $\phi_j^{\mathbf{Z}}(x, y_1, \ldots, y_l)$, por la definición de $F_i$ tenemos que $x \in Z(F_i(\zeta))$ y, como $F_i(\zeta) < \beta$, queda $x \in Z(\beta)$. Por el Lema 4.17, $\phi_1, \ldots, \phi_n$ son absolutas para $Z(\beta), \mathbf{Z}$.

(e) Definimos ahora la sucesión $\beta_0 \coloneqq \alpha$, $\beta_{p+1} \coloneqq \text{máx}\{\beta_p + 1, F_1(\beta_p), \ldots, F_n(\beta_p)\}$ y tomamos $\beta \coloneqq \sup\{\beta_p\}_{p\in\omega}$, que sabemos es un ordinal por el Esquema de Reemplazo. De hecho, $\beta$ es límite, por ser el supremo de una sucesión estrictamente creciente de ordinales. Además, si $\zeta < \beta$, entonces hay $\beta_p > \zeta$. Por tanto, $F_i(\zeta) \leqslant F_i(\beta_p) \leqslant \beta_{p+1} < \beta$ para $0 < i \leqslant n$. Por el apartado (d), esto termina la demostración. □

El teorema anterior es una versión generalizada del Teorema de Reflexión, que enunciamos a continuación como su corolario:

**Corolario 4.19. (Teorema de Reflexión)** *Para cualesquiera fórmulas $\phi_1, \ldots, \phi_n$*

$$\mathrm{ZF} \vdash \forall\alpha(\exists\beta > \alpha)\big(\phi_1, \ldots, \phi_n \text{ son absolutas para } V_\beta\big)$$

*Demostración.* Es una aplicación directa del teorema anterior con $Z = V$ y $\mathbf{Z} = \mathbf{V}$. □

**Observaciones 4.20.** Si $\phi_1, \ldots, \phi_n$ son sentencias, el resultado del teorema anterior queda

$$\mathrm{ZF} \vdash \forall\alpha(\exists\beta > \alpha)\big(\bigwedge_{i=1}^{n}(\phi_i^{V_\beta} \leftrightarrow \phi_i)\big)$$

Por otro lado, si $\Sigma \vdash \mathrm{ZF}$ y $\phi_1, \ldots, \phi_n \in \Sigma$, puesto que $\Sigma \vdash \phi_i$ para $0 < i \leqslant n$, queda que

$$\Sigma \vdash \forall\alpha(\exists\beta > \alpha)\big(\bigwedge_{i=1}^{n}\phi_i^{V_\beta}\big)$$

**Teorema 4.21.** *Sea* $\Sigma$ *un conjunto de sentencias tales que* $\Sigma \vdash \mathrm{ZF}$. *Entonces, si* $\Sigma$ *es consistente, no existe* $\Lambda = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \subseteq \Sigma$ *tal que* $\Lambda \vdash \Sigma$.

*Demostración*. Supongamos que sí hay tal $\Lambda$. Entonces, por la observación anterior y el hecho de que $\Sigma \vdash \mathrm{ZF}$ tenemos que, con $\alpha = 0$, podemos escoger el mínimo ordinal $\beta$ tal que $\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i^{V_\beta}$. Como $\Lambda \vdash \Sigma$ y $\Sigma$ es consistente, $V_\beta$ es modelo de $\Sigma$. Por el Lema 3.32, si $\gamma \in V_\beta$ queda que $V_\gamma^{V_\beta} = V_\gamma$, de modo que $V$ es una función absoluta para $V_\beta$. Como $V_\beta$ es modelo de $\Sigma$ y $\Sigma \vdash \forall\gamma(\exists\delta > \gamma) \bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i^{V_\delta}$, esto es cierto también en $V_\beta$, ergo hay $0 < \delta < \beta$ tal que $\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i^{V_\delta}$, contradiciendo la elección de $\beta$ como el mínimo ordinal que lo cumplía. □

**Resultado 5.** Si ZF es consistente, no es finitamente axiomatizable.

*Demostración*. Si $\Sigma$ es finito y $\Sigma \equiv \mathrm{ZF}$, en particular $\Sigma \subseteq \Sigma$ (siendo éste finito), $\Sigma$ es consistente y $\Sigma \vdash \mathrm{ZF}$, contradiciendo el teorema anterior. □

# 5. La teoría de conjuntos NBG

En el capítulo anterior comprobamos que ZF no es finitamente axiomatizable. Sin embargo, uno se podría preguntar si esto debe ser así con cualquier versión axiomática de la teoría de conjuntos.

En éste, para responder a esa pregunta, trabajaremos con una teoría de conjuntos alternativa llamada NBG, cuyas principales diferencias con ZF son que (1) NBG trata las clases propias como objetos y (2) es finitamente axiomatizable.

***Notación.*** Usaremos durante este capítulo «$\dot\in$» en fórmulas para distinguir entre la pertenencia en la metareoría (entre fórmulas y conjuntos de fórmulas, entre objetos de una estructura y su correspondiente universo, etcétera) y el símbolo de pertenencia formal dentro de la teoría (sea ZF o NBG), tal y como hacemos con «$\doteq$» y «$=$».

## 5.1. Axiomas de NBG

En ZF utilizábamos el vocabulario $L_{\mathrm{ZF}} = \{\,\dot\in\,\}$. Para NBG tomamos el mismo lenguaje añadiendo un predicado monádico $\mathfrak{C}$, cuyo significado en $\mathfrak{C}\,X$ pretende ser «$X$ es un conjunto». Tomamos entonces $L_{\mathrm{NBG}} \coloneqq \{\mathfrak{C},\ \dot\in\,\}$. En NBG los objetos del universo se llaman «clases» y los conjuntos son, por ende, un tipo particular de clase. Las clases que no son conjuntos son llamadas «clases propias».

***Notación.*** Toda letra latina minúscula denotará conjuntos y todo cuantificador que actúe sobre una variable en minúscula cuantificará exclusivamente sobre conjuntos. Es decir:

$$\forall x\phi(x) \text{ significa } \forall X(\mathfrak{C}\,X \to \phi(X)) \qquad \text{y} \qquad \exists x\phi(x) \text{ significa } \exists X(\mathfrak{C}\,X \land \phi(X))$$

Por el contrario, las variables mayúsculas denotan clases cualesquiera, sean propias o no.

Presentamos ahora el conjunto de axiomas de NBG, que dividiremos en cuatro bloques.

- Bloque A:
  1. $\forall X\big[\ \mathfrak{C}\,X \leftrightarrow \exists Y(X \mathrel{\dot\in} Y)\,\big]$
  2. $\forall X\forall Y\big[\forall t(t \mathrel{\dot\in} X \leftrightarrow t \mathrel{\dot\in} Y) \to X \doteq Y\,\big]$
  3. $\forall x\forall y\exists z\forall t\big[\,t \mathrel{\dot\in} z \leftrightarrow (t \doteq x \lor t \doteq y)\,\big]$

A1 es la definición interna del predicado $\mathfrak{C}$, A2 es el Axioma de Extensionalidad y A3 el Axioma del Par. Al $z$ cuya existencia asegura A3 lo llamamos $\{x, y\}$, que es único por Extensionalidad (A2). Usando A3, definimos el par ordenado $\langle x, y\rangle \coloneqq \{\{x\}, \{x, y\}\}$ y, con ello, las $n$-tuplas para $n \in \omega$: $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \coloneqq \langle\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle, x_n\rangle$. Por convención, $\langle x\rangle \coloneqq x$.

**Observación 5.1.** $\langle x_1, \ldots, x_{n+p}\rangle = \langle\langle x_1, \ldots, x_n\rangle, x_{n+1}, \ldots, x_{n+p}\rangle$

Para introducir el siguiente bloque debemos primero definir lo que es una fórmula primitiva.

**Definición 5.2.** El conjunto de *fórmulas primitivas* (abreviadas «**fp**») se define recursivamente mediante las siguientes cláusulas:

1) $A \mathrel{\dot\in} B$ es **fp** para cualesquiera variables $A, B$.

2) Si $\phi, \psi$ son **fp**, entonces $\neg\phi$ y $(\phi \wedge \psi)$ son **fp**.

3) Si $\phi$ es **fp**, entonces $\exists x\phi$ es **fp**.

***Nota.*** Es importante notar que $\exists x\phi$ refiere a una cuantificación exclusivamente sobre conjuntos. Si no, toda fórmula sería primitiva, trivializando la definición.

- Esquema Axiomático FC: Para toda fórmula primitiva $\phi$ con no más variables libres que $x_1, \dots, x_n, Y_1, \dots, Y_m$ se cumple

$$\forall Y_1, \dots, Y_m \exists A \forall x_1, \dots, x_n \big[ \langle x_1, \dots, x_n \rangle \dot{\in} A \leftrightarrow \phi(x_1, \dots, x_n, Y_1, \dots, Y_m) \big]$$

  A tal $A$ la denotamos $\{\langle x_1, \dots, x_n \rangle | \phi(x_1, \dots, x_n, Y_1, \dots, Y_m)\}$ y es, para sus $n$-tuplas, única por extensionalidad.

A este esquema axiomático lo bautizamos como «Esquema de Formación de Clases» (FC para abreviar). Es el que nos permite invocar clases como colecciones de conjuntos que cumplen tal o cual propiedad igual que hacíamos en ZF, pero esta vez siendo objetos legales y no meros abusos de lenguaje. Más tarde veremos que puede ser sustituido por un bloque más pequeño de axiomas.

Definimos la fórmula $\mathfrak{Un}\, F := \forall x \forall y \forall y' \big[ \langle x, y \rangle \dot{\in} F \wedge \langle x, y' \rangle \dot{\in} F \to y = y' \big]$, que nos dice que $F$ es funcional para la primera variable de sus pares ordenados. FC permite definir la clase vacía, 0, que es única por extensionalidad.

Se define $A \subseteq B := \forall t(t \dot{\in} A \leftrightarrow t \dot{\in} B)$ y $\mathfrak{Vac}\, X := \forall t(t \dot{\notin} X)$.

- Bloque C:

  1. $\exists a \exists b \big[ b \dot{\in} a \wedge \mathfrak{Vac}(b) \wedge \forall x \big(x \dot{\in} a \to (\exists z \dot{\in} a) \forall t (t \dot{\in} z \leftrightarrow t \dot{\in} x \vee t = x)\big) \big]$
  2. $\forall x \exists z \forall t \big[ t \dot{\in} z \leftrightarrow \exists y (t \dot{\in} y \wedge y \dot{\in} x) \big]$
  3. $\forall x \exists z \forall y \big[ y \dot{\in} z \leftrightarrow y \subseteq x \big]$
  4. $\forall a \forall F \big[ \mathfrak{Un}\, F \to \exists b \forall y \big(y \dot{\in} b \leftrightarrow (\exists x \dot{\in} a)(\langle x, y \rangle \dot{\in} F)\big) \big]$

El Bloque C de axiomas trata de la existencia de conjuntos. C1 es el Axioma del Infinito, C2 el de la Unión, C3 el de la Potencia y C4 el Axioma de Reemplazo. Los $z$ de cuya existencia hablan C2 y C3 se llaman $\bigcup x$ y $\mathcal{P}(x)$, respectivamente. Al contrario que en ZF con el Esquema de Reemplazo, aquí se necesita una sola fórmula para el mismo objetivo, puesto que FC puede invocar una clase funcional $F$ que cumpla el propósito requerido.

C2 y A3 nos brindan rápidamente $x \cup y$ como en el capítulo 1. Además, similar a como vimos en el Lema 1.54, C4 junto con los demás axiomas implica el Esquema de Separación, el cual puede usarse para demostrar que 0 es un conjunto. Por tanto, ello junto a la definición $\mathcal{S}(x) := x \cup \{x\}$ nos permite reescribir C1 como

$$\exists a \big[ 0 \dot{\in} a \wedge (\forall x \dot{\in} A)(\mathcal{S}(x) \dot{\in} a) \big] \tag{5.1}$$

como en ZF..

- Axioma D: $\forall A \big[ A \neq 0 \to \exists x (x \dot{\in} A \wedge x \cap A \doteq 0) \big]$

Este axioma es simplemente la versión de NBG del Axioma de Regularidad.

## 5.2. Conceptos necesarios de semántica de primer orden

Para demostrar el resultado que da nombre a la próxima sección necesitamos introducir algunos conceptos básicos de lógica de primer orden que obviamos en el capítulo de preliminares.

Dado un vocabulario $L$, una *$L$-estructura* es una tupla $\mathcal{M} = (\mathbb{M}, I_{\mathcal{M}})$ donde $\mathbb{M} \neq \varnothing$, $I_{\mathcal{M}}$ es una función de dominio $L$ y recorrido contenido en $\mathbb{M}$ tal que:

- $I_{\mathcal{M}}(c) \in \mathbb{M}$ para todo $c \in \mathcal{C}_L$
- $I_{\mathcal{M}}(R) \subseteq \mathbb{M}^n$ para todo $R \in \mathcal{R}_L$ $n$-ario
- $I_{\mathcal{M}}(F) : \mathbb{M}^n \longrightarrow \mathbb{M}$ para todo $F \in \mathcal{F}_L$ $n$-ario

Se abrevia $\mathcal{M} = (\mathbb{M}, c_1^{\mathcal{M}}, \ldots, c_k^{\mathcal{M}}, R_1^{\mathcal{M}}, \ldots, R_l^{\mathcal{M}}, F_1^{\mathcal{M}}, \ldots, F_m^{\mathcal{M}})$ si $L$ es finito, siendo $\xi^{\mathcal{M}} := I_{\mathcal{M}}(\xi)$ para cada $\xi \in L$.

Una *asignación en* $\mathcal{M}$ es una función $s : X \longrightarrow \mathbb{M}$ tal que $X \subseteq \mathrm{VAR}$.

Si toda variable del término $t$ está en el dominio de la asignación $s$ en $\mathcal{M}$, se define la *denotación de $t$ en $\mathcal{M}$ por $s$*, denotada $t^{\mathcal{M}}[\![s]\!]$, por recursión de la siguiente forma:

- $x^{\mathcal{M}}[\![s]\!] := s(x)$
- $c^{\mathcal{M}}[\![s]\!] := c^{\mathcal{M}}$
- $(Ft_1 \ldots t_n)^{\mathcal{M}}[\![s]\!] := F^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}[\![s]\!], \ldots, t_n^{\mathcal{M}}[\![s]\!])$

Se define la noción $\mathcal{M} \models \varphi[\![s]\!]$ ($\mathcal{M}$ *satisface $\varphi$ con la asignación $s$*) por recursión en $\varphi$:

- $\mathcal{M} \models t_1 \doteq t_2[\![s]\!]$ si $t_1^{\mathcal{M}}[\![s]\!] = t_2^{\mathcal{M}}[\![s]\!]$.
- $\mathcal{M} \models Rt_1 \ldots Rt_n[\![s]\!]$ si $(t_1^{\mathcal{M}}[\![s]\!], \ldots, t_n^{\mathcal{M}}[\![s]\!]) \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M} \models \neg\phi[\![s]\!]$ si $\mathcal{M} \not\models \phi[\![s]\!]$ .
- $\mathcal{M} \models (\phi \wedge \psi)[\![s]\!]$ si $\mathcal{M} \models \phi[\![s]\!]$ y $\mathcal{M} \models \psi[\![s]\!]$.
- $\mathcal{M} \models \exists x\phi[\![s]\!]$ si existe un $a \in \mathbb{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \phi[\![s_a^x]\!]$, donde $s_a^x := s \setminus \{(x, s(x))\} \cup \{(x, a)\}$.

Cuando $\phi$ es un enunciado, se abrevia $\mathcal{M} \models \phi$. Ponemos $\mathcal{M} \models \Sigma[\![s]\!]$ si $\mathcal{M} \models \psi$ para todo $\psi \in \Sigma$. Se dice entonces que $\mathcal{M}$ *es un modelo de* $\Sigma$.

**Definición 5.3.** $\Sigma \vdash \varphi$ si, para cualquier $L$-estructura $\mathcal{M}$, si $\mathcal{M} \models \Sigma$ entonces también $\mathcal{M} \models \varphi$. Esta definición formaliza la que dimos en el capítulo 1.

## 5.3. NBG es extensión conservativa de ZF

Buscamos probar que de NBG no se deducen nuevos teoremas sobre conjuntos respecto de los que ya obteníamos en ZF. En otra palabra: NBG sólo vendría a facilitar el estudio práctico de la teoría de conjuntos, permitiendo tratar las clases propias como objetos en sí mismos, sin pervertir los resultados obtenidos.

Para formalizar esta idea necesitamos una definición previa:

**Definición 5.4.** Para cualquier $\varphi$ de $L_{\mathrm{NBG}}$ o $L_{\mathrm{ZF}}$ se define la *relativización de $\varphi$ a $\mathfrak{C}$*, denotada $\varphi^{\mathfrak{C}}$, por recursión de la siguiente manera:

(a) $(x \doteq y)^{\mathfrak{C}} := x \doteq y$

(b) $(x \mathrel{\dot\in} y)^{\mathfrak{C}} := \mathfrak{C}\, y \wedge x \mathrel{\dot\in} y$

(c) $(\mathfrak{C}\, x)^{\mathfrak{C}} := \mathfrak{C}\, x$

(d) $(\phi \wedge \psi)^{\mathfrak{C}} := (\phi^{\mathfrak{C}} \wedge \psi^{\mathfrak{C}})$

(e) $(\neg\phi)^{\mathfrak{C}} := \neg\phi^{\mathfrak{C}}$

(f) $(\exists x\phi)^{\mathfrak{C}} := \exists x(\mathfrak{C}\, x \wedge \phi^{\mathfrak{C}})$

Ponemos también $\Sigma^{\mathfrak{C}} := \{\phi^{\mathfrak{C}} \mid \phi \in \Sigma\}$.

**Observación 5.5.** $(\forall x\phi)^{\mathfrak{C}} = (\neg\exists x\neg\phi)^{\mathfrak{C}} = \neg\exists x(\mathfrak{C}\, x \wedge \neg\phi^{\mathfrak{C}}) \equiv \forall x(\mathfrak{C}\, x \to \phi^{\mathfrak{C}})$, como cabría esperar. La definición también se comporta bien con los conectores lógicos $\vee, \to$ y $\leftrightarrow$. Además, si $\mathcal{N}$ es un modelo de NBG, $\varphi^{\mathfrak{C}} \equiv \varphi^{\mathfrak{C}^{\mathcal{N}}}$ con la definición de relativización a clases que dimos en el capítulo 3.

Temporalmente y sólo para esta sección diferenciaremos entre las últimas letras del alfabeto $(x, y, z, w, \dots)$, que usaremos para variables, y las primeras, que usaremos para fijar objetos de un universo determinado $(a, b, c, d, f, \dots)$, tanto para mayúsculas como para minúsculas. De esta forma no será necesario utilizar la notación de asignaciones «$[\![s]\!]$» y podremos, por ejemplo, escribir «$\mathcal{M} \models \phi(a)$» para abreviar $\mathcal{M} \models \phi(x)[\![\{(x, a)\}]\!]$ sin que haya confusión sobre si una letra denota objetos de $\mathbb{M}$ o variables.

**Teorema 5.6.** *Sea $\varphi$ un enunciado de $L$. Entonces* NBG $\vdash \varphi^{\mathfrak{C}}$ *implica que* ZF $\vdash \varphi$.

***Nota.*** Exclusivamente para esta demostración nos vemos obligados a escribir los axiomas de NBG en su forma completa sin distinguir entre variables mayúsculas o minúsculas, de manera que la lista de variables utilizadas sea uniforme entre NBG y ZF y no haya ambigüedad en la lectura. Por ejemplo, A3 quedaría

$$\forall x\forall y\big[\, \mathfrak{C}\, x \wedge \mathfrak{C}\, y \to \exists z\big(\, \mathfrak{C}\, z \wedge \forall t[\, t \mathrel{\dot\in} z \leftrightarrow (t \doteq x \vee t \doteq y)\,]\,\big)\,\big]$$

donde sólo hemos omitido $\mathfrak{C}\, t$, ya que A1 nos garantizaría su cumplimiento.

*Demostración.* Sea $\varphi$ una sentencia en $L_{\mathrm{ZF}}$ tal que NBG $\vdash \varphi^{\mathfrak{C}}$; queremos ver que ZF $\vdash \varphi$. Para ello, supongamos que tenemos una $L_{\mathrm{ZF}}$-estructura que satisface ZF, es decir, una $\mathcal{M} = (\mathbb{M}, \mathrel{\dot\in}^{\mathcal{M}})$ tal que $\mathcal{M} \models$ ZF. Construimos la siguiente extensión de $\mathcal{M}$:

Para cada $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{M}$ definible con parámetros mediante una $\phi_{\mathbf{X}}(x, w_1, \dots, w_k)$ y unos $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{M}$, hay dos posibilidades:

(1) $\mathcal{M} \models \exists z\forall x\big(x \mathrel{\dot\in} z \leftrightarrow \phi_{\mathbf{X}}(x, c_1, \dots, c_k)\big)$

(2) La negación del caso (1).

El primer caso viene a significar que $\mathbf{X}$, como colección de elementos de $\mathbb{M}$, está representada por un elemento de $\mathbb{M}$ (un conjunto). El caso (2) representa las clases propias definibles con parámetros. Decimos entonces que $\mathbf{X}$ es del tipo (1) o del tipo (2).

Para todos los $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{M}$ del tipo (2) introducimos un nuevo elemento $\Phi_{\mathbf{X}}$ fuera de $\mathbb{M}$ de forma inyectiva

$$\Phi : \mathbf{X} \overset{\preceq}{\longmapsto} \Phi_{\mathbf{X}}$$

de manera que $\Phi_{\mathbf{X}} = \Phi_{\mathbf{Y}}$ si y sólo si $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$. Ponemos entonces $\mathbb{P} := \mathrm{rec}(\Phi)$ $= \{\Phi_{\mathbf{X}} \mid \mathbf{X} \subseteq \mathbb{M}$ es el tipo $(2)\}$ y $\mathbb{N} := \mathbb{M} \cup \mathbb{P}$. Definimos ahora la relación $\mathrel{\dot\in}^{\mathcal{N}} \subseteq \mathbb{N}^2$ así:

$$\begin{aligned} \in' :=& \{(a, \Phi_{\mathbf{X}}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{P} \mid \mathbf{X} \subseteq \mathbb{M} \text{ es definible con parámetros por ciertos} \\ & \quad \phi_{\mathbf{X}}(x, w_1, \dots, w_k) \text{ y } c_1, \dots, c_k \in \mathbb{M} \text{ y } \mathcal{M} \models \phi_{\mathbf{X}}(a, c_1, \dots, c_k)\} \\ \mathrel{\dot\in}^{\mathcal{N}} :=& \mathrel{\dot\in}^{\mathcal{M}} \cup \in' \end{aligned}$$

En resumen: $b \dot{\in}^{\mathcal{N}} A$ significa que, o bien $b$ y $A$ son conjuntos (o sea, están en $\mathbb{M}$) y $b \dot{\in}^{\mathcal{M}} A$, o bien $A \in \mathbb{P}$ es clase propia definible y $b \in \mathbb{M}$ cumple la definición de $A$. Observamos que, de hecho, $\dot{\in}^{\mathcal{N}} \subseteq \mathbb{M} \times \mathbb{N}$ por construcción.

Por último, tomamos $\mathfrak{C}^{\mathcal{N}} := \mathbb{M} \subseteq \mathbb{N}$. De esta manera, $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, \dot{\in}^{\mathcal{N}}, \mathfrak{C}^{\mathcal{N}})$ es una $L_{\text{NBG}}$-estructura y, como veremos ahora, $\mathcal{N} \models \text{NBG}$.

<u>A1:</u> $\mathcal{N} \models \forall X \big[\, \mathfrak{C}\, X \leftrightarrow \exists Y (X \mathrel{\dot{\in}} Y) \,\big]$

- $\underline{\Leftarrow}$ Dado un $a \in \mathbb{M}$, supongamos que $\mathcal{N} \models \exists Y (a \mathrel{\dot{\in}} Y)$. Entonces hay un $b \in \mathbb{N}$ tal que $(a, b) \in\ \dot{\in}^{\mathcal{N}}$. Como $\dot{\in}^{\mathcal{M}} \subseteq \mathbb{M} \times \mathbb{N}$, esto significa que $a \in \mathbb{M}$, de modo que $\mathcal{N} \models \mathfrak{C}\, a$, como buscábamos.
- $\underline{\Rightarrow}$ Esta dirección es consecuencia directa de A3, de modo que no la demostramos.

<u>A2:</u> $\mathcal{N} \models \forall X \forall Y \big[ \forall t (t \mathrel{\dot{\in}} X \leftrightarrow t \mathrel{\dot{\in}} Y) \to X \doteq Y \,\big]$
Supongamos $A, B \in \mathbb{N}$ tales que $\mathcal{N} \models \forall t (t \dot{\in} A \leftrightarrow t \dot{\in} B)$. Hay cuatro casos (reducidos a tres por simetría):

- <u>Caso $A, B \in \mathbb{M}$:</u> Entonces, como $\dot{\in}^{\mathcal{M}} \subseteq \dot{\in}^{\mathcal{N}}$, se cumple que para todo $c \in \mathbb{M}$ se tiene $c \mathrel{\dot{\in}^{\mathcal{M}}} A$ si y sólo si $c \mathrel{\dot{\in}^{\mathcal{M}}} B$. Como $\mathcal{M} \models \text{Ax1}$, se concluye que $A = B$, como queríamos.
- <u>Caso $A, B \in \mathbb{P}$:</u> Sean, pues, $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \subseteq \mathbb{M}$ tales que $A = \Phi_{\mathbf{X}}, B = \Phi_{\mathbf{Y}}$. Tomamos también los $\phi_{\mathbf{X}}(x, v_1, \ldots, v_k)$ y $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{M}$ que definen a $\mathbf{X}$ y los $\phi_{\mathbf{Y}}(y, w_1, \ldots, w_l)$ y $d_1, \ldots, d_l \in \mathbb{M}$ que definen a $\mathbf{Y}$. Por hipótesis, y el hecho de que $A, B \in \mathbb{P}$, cualquier $e \in \mathbb{M}$ cumple que $e \in' A \Leftrightarrow e \dot{\in}^{\mathcal{N}} A \Leftrightarrow e \dot{\in}^{\mathcal{N}} B \Leftrightarrow e \in' B$. Por tanto, por construcción de $\in'$, queda que
$\mathcal{M} \models \big(\phi_{\mathbf{X}}(e, c_1, \ldots, c_k) \leftrightarrow \phi_{\mathbf{Y}}(e, d_1, \ldots, d_l)\big)$. Ello nos asegura que $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ y, por tanto, $A = \Phi_{\mathbf{X}} = \Phi_{\mathbf{Y}} = B$, como queríamos.
- <u>Caso $A \in \mathbb{M}$ y $B \in \mathbb{P}$:</u> Ello implica que para todo $e \in \mathbb{M}$ se cumple $e \mathrel{\dot{\in}^{\mathcal{N}}} B$ si y sólo si $e \mathrel{\dot{\in}^{\mathcal{M}}} A$, además de que $B = \Phi_{\mathbf{X}}$ para algún $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{M}$. Si tomamos los $\phi_{\mathbf{X}}(v_1, \ldots, v_k)$ y $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{M}$ que definen a $\mathbf{X}$, se tiene que $\mathcal{M} \models \forall x \big(x \dot{\in} A \leftrightarrow \phi_{\mathbf{X}}(x, c_1, \ldots, c_k)\big)$, contradiciendo que $\mathbf{X}$ sea del tipo (2).

<u>A3:</u> $\mathcal{N} \models \forall x \forall y \big[\, \mathfrak{C}\, x \wedge \mathfrak{C}\, y \to \exists z \big(\, \mathfrak{C}\, z \wedge \forall t [\, t \mathrel{\dot{\in}} z \leftrightarrow (t \doteq x \vee t \doteq y) \,] \,\big) \,\big]$
Sean $a, b \in \mathbb{M}$. Buscamos un $c \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{N} \models \mathfrak{C}\, c \wedge \forall t [\, t \mathrel{\dot{\in}} c \leftrightarrow (t \doteq a \vee t \doteq b) \,]$.
Como $\mathcal{M} \models \text{Ax3}$, también $c := \{a, b\} \in \mathbb{M} \subseteq \mathbb{N}$. Falta la otra parte de la conjunción. Tomamos un $d \in \mathbb{N}$.

- $\underline{\Rightarrow}$ Si $d \mathrel{\dot{\in}^{\mathcal{M}}} c$, por A1 se tiene que $d \in \mathbb{M}$ y, como $\mathcal{M} \models \text{Ax3}$, ello implica que $c = a$ o $c = b$, como buscábamos.
- $\underline{\Leftarrow}$ El razonamiento es similar al de la otra dirección.

<u>FC:</u> Sea $\phi$ de $L_{\text{NBG}}$ una **fp** con no más variables libres que $x_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_m$. Buscamos probar que
$\mathcal{N} \models \forall Y_1, \ldots, Y_m \exists Z \forall x_1, \ldots, x_n \big[\, \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mathrel{\dot{\in}} Z \leftrightarrow \phi(x_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_m) \,\big]$
Sean $B_1, \ldots, B_m \in \mathbb{N}$. Algunas de ellas serán clases propias y, otras, conjuntos. Reordenando, podemos suponer que sólo las $k$ primeras son conjuntos y que el resto son clases propias. Usemos, en consecuencia, minúsculas para las $k$ primeras y mayúsculas para el resto.
La dificultad que presenta esta prueba es traducir $\phi$ a $L_{\text{ZF}}$. Para hacerlo, primero sustituimos las instancias de $(x \doteq Y_q)$, $(Y_p \doteq Y_q)$ y $(Y_q \doteq Y_p)$ en $\phi$ (con $q > k$ e $Y_p, Y_q$

libres, sea quien sea la variable $x$) por otras equivalentes, a saber: $\forall t(t \mathrel{\dot\in} x \leftrightarrow t \mathrel{\dot\in} Y_q)$, $\forall t(t \mathrel{\dot\in} Y_p \leftrightarrow t \mathrel{\dot\in} Y_q)$ y $\forall t(t \mathrel{\dot\in} Y_q \leftrightarrow t \mathrel{\dot\in} Y_p)$, respectivamente.

Luego, tomamos aquellos $\psi_i(x_1, \dots, x_n, w_1, \dots, w_{k_i})$ (en lenguaje $L_{\mathrm{ZF}}$) y $c_1, \dots, c_{k_i} \in \mathbb{M}$ que definen a $B_i$, con $i > k$, como subcolección de $\mathbb{M}$. Reemplazamos entonces $(x_p \mathrel{\dot\in} Y_q)$ en la fórmula $\phi$ por $\psi_i(x_p)$. De esta forma, $\mathcal{M} \models \psi_i(a)$ si y sólo si $\mathcal{N} \models (a \mathrel{\dot\in} C_i)$ para $i > k$. Por ejemplo, si $B_1$ es la clase de todos los conjuntos transitivos en ZF y $B_2$ la de todos los conjuntos inductivos, tendríamos que $\exists x\big[\,(x \mathrel{\dot\in} Y_1) \wedge (x \mathrel{\dot\in} Y_2)\,\big]$ pasa a ser

$$\exists x\big[\,\forall y\big(\,y \mathrel{\dot\in} x \to \forall t(t \mathrel{\dot\in} y \to t \mathrel{\dot\in} x)\,\big) \to (0 \mathrel{\dot\in} x \wedge \forall y(y \mathrel{\dot\in} x \to \mathcal{S}(y) \mathrel{\dot\in} x))\,\big]$$

Los casos en los que $Y_p$, con $p > k$, aparezca a la izquierda de «$\dot\in$» pueden ser sustituidos por cualquier contradicción, como $(x_1 \neq x_1)$. Esto elimina $Y_{k+1}, \dots, Y_m$ de la lista de variables libres.

Por último, como $\phi$ es **fp**, todas sus cuantificaciones son sobre conjuntos. Eliminamos, pues, para cada una de ellas, la especificación «$\mathfrak{C}\,x$» que la sucede. Por ejemplo:

$$\forall x\big[\,\mathfrak{C}\,x \to \exists y(\mathfrak{C}\,y \wedge \langle x, y\rangle \mathrel{\dot\in} Y_3)\,\big] \qquad \text{pasa a ser} \qquad \forall x \exists y(\langle x, y\rangle \mathrel{\dot\in} Y_3)$$

Denotamos $\phi'(x_1, \dots, x_n, Y_1, \dots, Y_k)$, que está en lenguaje $L_{\mathrm{ZF}}$, al resultado del proceso de hacer todos esos cambios. Para acabar, definimos la fórmula $\phi_{(n)}(x) \coloneqq \exists x_1, \dots, x_n\big[x \doteq \langle x_1, \dots, x_n\rangle \wedge \phi'(x_1, \dots, x_n, Y_1, \dots, Y_k)\big]$, cuyas variables libres son $x, Y_1, \dots, Y_k$.

Entonces, para nuestros $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{M}$ queda que, por la construcción de $\phi_{(n)}$, para cualesquiera $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{M}$

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \models{}& \phi(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k, B_{k+1}, \dots, B_m) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \phi'(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \phi_{(n)}(\langle a_1, \dots, a_n\rangle, b_1, \dots, b_k) \end{aligned} \tag{5.2}$$

- Caso $\phi_{(n)}$ es del tipo (1): En tal caso se tiene que se tiene que

$$\mathcal{M} \models \exists Z \forall x\big(x \mathrel{\dot\in} Z \leftrightarrow \phi_{(n)}(x, b_1, \dots, b_k)\big) \tag{5.3}$$

  Llamemos $A$ a ese $Z$. Queremos demostrar, para terminar, que

$$\mathcal{N} \models \exists Z \forall x_1, \dots, x_n\Big[\bigwedge_{i \leqslant n} \mathfrak{C}\,x_i \to \big(\langle x_1, \dots, x_n\rangle \mathrel{\dot\in} Z \\ \leftrightarrow \phi(x_1, \dots, x_n, b_1, \dots, b_k)\big)\Big]$$

  Tomamos el mismo $A$. Sean ahora $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{M}$ y $a \coloneqq \langle a_1, \dots, a_n\rangle$. Si $a \mathrel{\dot\in}^{\mathcal{N}} A$, $a \mathrel{\dot\in}^{\mathcal{M}} A$, ya que $A \in \mathbb{M}$. Entonces, $\mathcal{M} \models \phi_{(n)}(a, b_1, \dots, b_k)$, por (5.3). Por (5.2), esto implica que $\mathcal{N} \models \phi(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$, terminando esta dirección del bicondicional.
  Como el recíproco funciona igual, ya hemos acabado.

- Caso $\phi_{(n)}$ es del tipo (2): Definiendo $\mathbf{X} = \{a \in \mathbb{M} : \mathcal{M} \models \phi(a, b_1, \dots, b_k)\} \subseteq \mathbb{M}$ tenemos que, por construcción, $A \coloneqq \Phi_{\mathbf{X}}$ cumple lo esperado, siguiendo los pasos el caso anterior. En esta ocasión, $A \in \mathbb{P}$.

C1: $\mathcal{N} \models \exists z[\ \mathfrak{C}\, z \wedge 0 \mathrel{\dot\in} z \wedge (\forall x \mathrel{\dot\in} z)(\mathcal{S}(x) \mathrel{\dot\in} z)\ ]$
Como $\mathcal{M} \models$ Ax6, invocamos un $c \in \mathbb{M}$ tal que $\mathcal{M} \models 0 \mathrel{\dot\in} c \wedge (\forall x \mathrel{\dot\in} c)(\mathcal{S}(x) \mathrel{\dot\in} c)$. En tal caso, como $\dot\in^{\mathcal{M}} \subseteq \dot\in^{\mathcal{N}}$, se cumple que $\mathcal{N} \models 0 \mathrel{\dot\in} c$. Puesto que, además, $\mathcal{N} \models$ A1, todo $a$ tal que $a \mathrel{\dot\in^{\mathcal{N}}} c$ verifica también que $a \in \mathbb{M}$, de modo que, por hipótesis, $\mathcal{S}(a) \mathrel{\dot\in^{\mathcal{M}}} c$. Ello implica que $\mathcal{S}(a) \mathrel{\dot\in^{\mathcal{N}}} c$, terminando la prueba de C1.

C2 y C3 siguen el mismo proceso que C1: utilizar el mismo $c$ asignado a $z$ por $\mathcal{M}$ en Ax4 y Ax5 y probar, usando las propiedades de $\dot\in^{\mathcal{N}}$, que sigue cumpliendo su misma función en $\mathcal{N}$.

C4: $\mathcal{N} \models \forall u \forall W[\ \mathfrak{C}\, u \wedge \mathfrak{Un}\, W \to \exists v(\ \mathfrak{C}\, v \wedge \forall y[y \mathrel{\dot\in} v \leftrightarrow (\exists x \mathrel{\dot\in} u)(\langle x, y\rangle \mathrel{\dot\in} W)]\ )\ ]$
Supongamos una $F \in \mathbb{N}$ funcional y un $c \in \mathbb{M}$.
Buscamos ver que $\mathcal{N} \models \exists v(\ \mathfrak{C}\, v \wedge \forall y[y \mathrel{\dot\in} v \leftrightarrow (\exists x \mathrel{\dot\in} c)(\langle x, y\rangle \mathrel{\dot\in} F)]\ )$.

- Caso $F \in \mathbb{M}$: Entonces existe $e \in \mathbb{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \forall y[y \mathrel{\dot\in} e \leftrightarrow \exists x(\langle x, y\rangle \mathrel{\dot\in} F)]$, usando los axiomas de ZF igual que hicimos en el Lema 3.20, apartado (s) (este $e$ sería $\mathrm{rec}(F)$). Por tanto, por Ax2 (el Esquema de Separación), también hay un $d \in \mathbb{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \forall y[y \mathrel{\dot\in} d \leftrightarrow (\exists x \mathrel{\dot\in} c)(\langle x, y\rangle \in F)]$, que sería $F[c]$.
Queda ver que también $\mathcal{N} \models \forall y[y \mathrel{\dot\in} d \leftrightarrow (\exists x \mathrel{\dot\in} c)(\langle x, y\rangle \mathrel{\dot\in} F)]$. Pero esto es evidente, ya que ambos lados del bicondicional implican que los tales $x, y$ solamente pueden ser conjuntos, y $\dot\in^{\mathcal{M}} \subseteq \dot\in^{\mathcal{N}}$.
- Caso $F \in \mathbb{P}$: En ese caso hay un $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{M}$ tal que $F = \Phi_{\mathbf{X}}$. Sean $\phi_{\mathbf{X}}(x, w_1, \dots, w_k)$ y $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{M}$ aquellos que definen a $\mathbf{X}$ en $\mathcal{M}$. Como $\mathcal{M} \models$ Ax8, usando $\psi(x, y) \coloneqq \phi_{\mathbf{X}}(\langle x, y\rangle)$ (que tiene unicidad en $y$ por ser $F$ funcional) tenemos asegurada la existencia de $d \coloneqq F[c]$. Con un proceso similar al del caso anterior, se tiene que $\mathcal{N} \models \forall y[y \mathrel{\dot\in} d \leftrightarrow (\exists x \mathrel{\dot\in} c)(\langle x, y\rangle \mathrel{\dot\in} F)]$.

D: $\mathcal{N} \models \forall X[\, X \neq 0 \to \exists y(y \mathrel{\dot\in} X \wedge y \cap X \doteq 0)\,]$
Observamos que este axioma no es exactamente la relativización de Ax7 a $\mathfrak{C}$, sino la clausura universal de la versión para clases que dimos al final del capítulo 2, en 2.29. Sin embargo, sabemos que ésta es un teorema de ZF por el Teorema 2.30. De este modo, tomando $A \in \mathbb{N}$ con $A \neq 0$, por Ax7 tenemos que existe un $b \in \mathbb{M}$ tal que $\mathcal{M} \models (b \mathrel{\dot\in} A \wedge b \cap A \doteq 0)$. Esto implica que $b \mathrel{\dot\in^{\mathcal{M}}} A$. Además, como $b \cap A \in \mathbb{M}$ (por Ax2, al ser $b$ un conjunto) y no hay $c \in$ tal que $c \mathrel{\dot\in^{\mathcal{M}}} b \cap A$, tampoco hay un $c$ tal que $c \mathrel{\dot\in^{\mathcal{N}}} b \cap A$, terminando este apartado.

Volvemos al inicio: teníamos una sentencia $\varphi$ tal que NBG $\vdash \varphi^{\mathfrak{C}}$ y queríamos ver que ZF $\vdash \varphi$. Hemos demostrado que nuestra $L_{\mathrm{NBG}}$-estructura satisface NBG y, por tanto, también $\mathcal{N} \models \varphi^{\mathfrak{C}}$. En virtud Lema de Relativización, puesto que $\mathfrak{C}^{\mathcal{N}} = \mathbb{M}$, también $\mathcal{M} = (\mathbb{M}, \dot\in^{\mathcal{M}}) \models \varphi$ en consecuencia.

En suma, hemos visto que, si NBG $\vdash \varphi^{\mathfrak{C}}$, también $\mathcal{M} \models \varphi$ para cualquier modelo $\mathcal{M}$ de ZF. Esto significa que ZF $\vdash \varphi$, como deseábamos. □

Recuperamos la distinción entre variables minúsculas y mayúsculas.

**Teorema 5.7.** *Si $\varphi$ es un enunciado en $L_{\mathrm{ZF}}$, entonces* NBG $\vdash \varphi^{\mathfrak{C}}$ *si y sólo si* ZF $\vdash \varphi$.

*Demostración.* La dirección de izquierda a derecha ha sido probada en el teorema anterior. Queda el recíproco.

Para ello, sólo hace falta comprobar que NBG $\vdash \phi^{\mathfrak{C}}$ para todo $\phi \in$ ZF. Esto no es necesario para Ax1, Ax2, Ax4, Ax5, Ax6 y Ax7, ya que sus relativizaciones son directamente axiomas de NBG (A2, A3, C2, C3, C1 y D, respectivamente). Ax3, por su parte, es consecuencia de Ax8 junto con el resto, como vimos en el Lema 1.54. Respecto a Ax8, el Esquema de Reemplazo, supongamos una fórmula arbitraria $\phi(x, y, w_1, \dots, w_n)$. Fijados $b_1, \dots, b_n$, supongamos que

$$\forall x \forall y \forall y' \big( \phi(x, y, b_1, \dots, b_n) \wedge \phi(x, y', b_1, \dots, b_n) \rightarrow y \doteq y' \big)$$

Usamos FC para definir la clase $F \coloneqq \{\langle x, y \rangle \mid \phi(x, y, b_1, \dots, b_n)\}$ que, por hipótesis, es funcional. Sea ahora un $a$ tal que $\mathfrak{C}\, a$. Entonces, por C4, hay un $b$ tal que $\mathfrak{C}\, b$ y $\forall y \big(y \mathrel{\dot\in} b \leftrightarrow (\exists x \mathrel{\dot\in} a)(\langle x, y \rangle \mathrel{\dot\in} F)\big)$, o sea, $\forall y \big(y \mathrel{\dot\in} b \leftrightarrow (\exists x \mathrel{\dot\in} a)\phi(x, y, b_1, \dots, b_n)\big)$, como queríamos.

Sea entonces $\varphi$ un enunciado en $L_{\mathrm{ZF}}$ tal que $\mathrm{ZF} \vdash \varphi$. Como hemos visto que $\mathrm{NBG} \vdash \mathrm{ZF}^{\mathfrak{C}}$ y $\mathrm{ZF} \vdash \varphi$, el Lema de Relativización nos garantiza que $\mathrm{NBG} \vdash \varphi^{\mathfrak{C}}$. □

**Resultado 6.** (i) NBG es extensión conservativa de ZF. Todo teorema de NBG sobre conjuntos es también teorema de ZF, y viceversa.

(ii) $\mathrm{Con}(\mathrm{NBG}) \leftrightarrow \mathrm{Con}(\mathrm{ZF})$

*Demostración.* (i) El teorema anterior es la prueba.

(ii) $\underline{\Leftarrow}$ Por contrarrecíproco: supongamos que NBG es inconsistente. Hay, pues, una sentencia $\varphi$ tal que $\mathrm{NBG} \vdash \varphi$ y $\mathrm{NBG} \vdash \neg\varphi$. Entonces, por el Lema 1.6 tenemos que $\mathrm{NBG} \vdash \psi^{\mathfrak{C}}$ para cualquier $\psi$ en $L_{\mathrm{NBG}}$. En particular, fijando $\psi$ queda que $\mathrm{NBG} \vdash \psi^{\mathfrak{C}}$ y $\mathrm{NBG} \vdash \neg\psi^{\mathfrak{C}}$. Por el Teorema 5.7, esto implica que $\mathrm{ZF} \vdash \psi$ y $\mathrm{ZF} \vdash \neg\psi$, ergo ZF es inconsistente también.

$\underline{\Rightarrow}$ Por contrarrecíproco, el Lema de Relativización junto con el hecho de que $\mathrm{NBG} \vdash \mathrm{ZF}^{\mathfrak{C}}$ trivializan esta dirección de la prueba. □

Abandonamos la distinción entre letras usadas para constantes y para variables.

## 5.4. Axiomatizabilidad finita de NBG

El objetivo de esta sección es demostrar que NBG es finitamente axiomatizable: definimos primero un sistema axiomático alternativo (y finito) para la teoría de NBG, al que llamaremos $\mathrm{NBG}_{\mathrm{fin}}$, y luego demostramos que es equivalente al original.

**Definición 5.8.** Definimos $\mathrm{NBG}_{\mathrm{fin}}$:=NBG−FC+(Bloque B), siendo el Bloque B de axiomas el siguiente:

- <u>Bloque B:</u>

  1. $\exists A \forall x \forall y \big[\, \langle x, y \rangle \mathrel{\dot\in} A \leftrightarrow x \mathrel{\dot\in} y \,\big]$
  2. $\forall A \forall B \exists C \forall x \big[\, x \mathrel{\dot\in} C \leftrightarrow x \mathrel{\dot\in} A \wedge x \mathrel{\dot\in} B \,\big]$
  3. $\forall A \exists B \forall x \big[\, x \mathrel{\dot\in} B \leftrightarrow x \mathrel{\dot\notin} A \,\big]$
  4. $\forall A \exists B \forall x \big[\, x \mathrel{\dot\in} B \leftrightarrow \exists y (\langle x, y \rangle \mathrel{\dot\in} A) \,\big]$
  5. $\forall A \exists B \forall x \forall y \big[\, \langle x, y \rangle \mathrel{\dot\in} B \leftrightarrow x \mathrel{\dot\in} A \,\big]$
  6. $\forall A \exists B \forall x \forall y \big[\, \langle y, x \rangle \mathrel{\dot\in} B \leftrightarrow \langle x, y \rangle \mathrel{\dot\in} A \,\big]$
  7. $\forall A \exists B \forall x \forall y \forall z \big[\, \langle z, x, y \rangle \mathrel{\dot\in} B \leftrightarrow \langle x, y, z \rangle \mathrel{\dot\in} A \,\big]$
  8. $\forall A \exists B \forall x \forall y \forall z \big[\, \langle y, x, z \rangle \mathrel{\dot\in} B \leftrightarrow \langle x, y, z \rangle \mathrel{\dot\in} A \,\big]$

Este bloque trata de la existencia de clases. A la clase $C$ cuya existencia se asegura en B2 la denotamos $A \cap B$, y es única por Extensionalidad. A la clase $A$ cuya existencia brinda B1 la denotamos $\mathcal{E}$. Las clases $B$ cuya existencia se garantiza en B3,...,B8 se denotan $A^{\mathfrak{c}}$, $\mathfrak{Dom}(A)$, $A \times \mathbf{V}$, $A^{-1}$, $\sigma(A)$ y $\tau(A)$, respectivamente. B1 junto con B3 aseguran la existencia de $0 = \mathcal{E} \cap \mathcal{E}^{\mathfrak{c}}$ y $\mathbf{V} = 0^{\mathfrak{c}}$, únicos por extensionalidad, además de $A \cup B \coloneqq (A^{\mathfrak{c}} \cap B^{\mathfrak{c}})^{\mathfrak{c}}$ y $A \setminus B \coloneqq A \cap B^{\mathfrak{c}}$.

***Nota.*** Observamos que no de todos los axiomas del bloque anterior se puede deducir la unicidad de la clase cuya existencia garantizan. Por ejemplo, si $A$ cumple lo que se le pide en B1, $A \cup \{0\}$ y $A \setminus \{0\}$ también (debido a que 0 no es un par ordenado) y son distintas. En consecuencia, hemos cometido una pequeña imprecisión al hablar de «**la** clase [...]» en el párrafo anterior. Sin embargo, muchas veces bastará con tomar cualquiera de ellas. Por tanto, para agilizar la escritura, al hablar de $\mathcal{E}$, $\sigma(A)$, etcétera, nos referiremos a cualquiera de todas las clases que satisfacen el cometido que se les demanda, sin particularizar.

**Teorema 5.9.** *Todo axioma del* Bloque B *de* $\mathrm{NBG_{fin}}$ *es consecuencia de* NBG *y, por ende,* $\mathrm{NBG} \vdash \mathrm{NBG_{fin}}$.

<u>*Demostración*</u>. Definimos $\psi_1, \ldots, \psi_8$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\psi_1(x,y) &\coloneqq (x \,\dot{\in}\, y) \\
\psi_2(x,A,B) &\coloneqq (x \,\dot{\in}\, A \wedge x \,\dot{\in}\, B) \\
\psi_3(x,A) &\coloneqq \neg(x \,\dot{\in}\, A) \\
\psi_4(x,A) &\coloneqq \exists y(\langle x,y\rangle \,\dot{\in}\, A) \\
\psi_5(x,y,A) &\coloneqq (x \,\dot{\in}\, A) \\
\psi_6(y,x,A) &\coloneqq (\langle x,y\rangle \,\dot{\in}\, A) \\
\psi_7(z,x,y,A) &\coloneqq (\langle x,y,z\rangle \,\dot{\in}\, A) \\
\psi_8(y,x,z,A) &\coloneqq (\langle x,y,z\rangle \,\dot{\in}\, A)
\end{aligned}$$

Aplicando FC debidamente con cada $\psi_i$ conseguimos clases $D_i$ que demuestran cada axioma respectivo B$i$ del Bloque B. $\square$

Trabajaremos ahora con $\mathrm{NBG_{fin}}$ hasta demostrar el Teorema 5.13.

**Lema 5.10.** *Dadas dos clases $A, B$ existe alguna clase $C$ tal que para cualesquiera $x, y$ se tiene que $\langle x,y\rangle \,\dot{\in}\, C$ si y sólo si $x \,\dot{\in}\, A$ e $y \,\dot{\in}\, B$. Escribimos $A \times B$ para referirnos a alguna de ellas.*

<u>*Demostración*</u>. Tomamos $C_1 \coloneqq A \times \mathbf{V}$ y $C_2 \coloneqq (B \times \mathbf{V})^{-1}$. Entonces $C \coloneqq C_1 \cap C_2$ cumple el enunciado. $\square$

**Lema 5.11. (de Permutación)** *Se cumplen los siguientes enunciados en* $\mathrm{NBG_{fin}}$*:*

(i) $\forall A \exists B \forall x,y,z \big[ \langle x,z,y\rangle \,\dot{\in}\, B \leftrightarrow \langle x,y,z\rangle \,\dot{\in}\, A \big]$

(ii) $\forall A \exists B \forall x,y,z \big[ \langle y,z,x\rangle \,\dot{\in}\, B \leftrightarrow \langle x,y,z\rangle \,\dot{\in}\, A \big]$

(iii) $\forall A \exists B \forall x,y,z \big[ \langle z,y,x\rangle \,\dot{\in}\, B \leftrightarrow \langle x,y,z\rangle \,\dot{\in}\, A \big]$

<u>*Demostración*</u>. (i) Ponemos $B \coloneqq \tau(\sigma(A))$. Entonces para cualesquiera $x, y, z$ se tiene que $\langle x,y,z\rangle \,\dot{\in}\, A \Leftrightarrow \langle z,x,y\rangle \,\dot{\in}\, \sigma(A) \Leftrightarrow \langle x,z,y\rangle \,\dot{\in}\, \tau(\sigma(A))$.

(ii) Ponemos $B \coloneqq \sigma(\sigma(A))$. Entonces para cualesquiera $x, y, z$ se tiene que $\langle x,y,z\rangle \,\dot{\in}\, A \Leftrightarrow \langle z,x,y\rangle \,\dot{\in}\, \sigma(A) \Leftrightarrow \langle y,z,x\rangle \,\dot{\in}\, \sigma(\sigma(A))$.

(iii) Ponemos $B \coloneqq \sigma(\tau(A))$. Entonces para cualesquiera $x, y, z$ se tiene que $\langle x, y, z\rangle \dot\in A \Leftrightarrow \langle y, x, z\rangle \dot\in \tau(A) \Leftrightarrow \langle z, y, x\rangle \dot\in \sigma(\tau(A))$. □

**Lema 5.12. (de Selección)** *Se cumplen los siguientes enunciados en* $\mathrm{NBG}_{\mathrm{fin}}$*:*

(i) $\forall A \exists B \forall x, y, z\big[\,\langle x, y, z\rangle \dot\in B \leftrightarrow \langle x, y\rangle \dot\in A\,\big]$

(ii) $\forall A \exists B \forall x, y, z\big[\,\langle x, y, z\rangle \dot\in B \leftrightarrow \langle x, z\rangle \dot\in A\,\big]$

(iii) $\forall A \exists B \forall x, y, z\big[\,\langle x, y, z\rangle \dot\in B \leftrightarrow \langle y, z\rangle \dot\in A\,\big]$

(iv) $\forall A \exists B \forall x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\big[\,\langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\rangle \dot\in B \leftrightarrow \langle x_1, \ldots, x_n\rangle \dot\in A\,\big]$

(v) $\forall A \exists B \forall x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\big[\,\langle x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_m, x_n\rangle \dot\in B \leftrightarrow \langle x_1, \ldots, x_n\rangle \dot\in A\,\big]$

(vi) $\forall A \exists B \forall y_1, \ldots, y_m, x_1, x_2\big[\,\langle y_1, \ldots, y_m, x_1, x_2\rangle \dot\in B \leftrightarrow \langle x_1, x_2\rangle \dot\in A\,\big]$

(vii) $\forall A \exists B \forall y_1, \ldots, y_m, x\big[\,\langle y_1, \ldots, y_m, x\rangle \dot\in B \leftrightarrow x \dot\in A\,\big]$

(viii) $\forall A \exists B \forall x_1, \ldots, x_n\big[\,\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \dot\in B \leftrightarrow \exists y\big(\langle x_1, \ldots, x_n, y\rangle \dot\in A\big)\,\big]$

*Demostración.* (i) Ponemos $B \coloneqq A \times \mathbf{V}$. Entonces para cualesquiera $x, y, z$ se tiene que $\langle x, y\rangle \dot\in A \Leftrightarrow \langle x, y, z\rangle \dot\in A \times \mathbf{V}$.

(ii) Ponemos $B \coloneqq \tau(\sigma(A \times \mathbf{V}))$. Entonces para cualesquiera $x, y, z$ se tiene que $\langle x, z\rangle \dot\in A \Leftrightarrow \langle x, z, y\rangle \dot\in A \times \mathbf{V} \Leftrightarrow \langle y, x, z\rangle \dot\in \sigma(A \times \mathbf{V}) \Leftrightarrow \langle x, y, z\rangle \dot\in \tau(\sigma(A \times \mathbf{V}))$.

(iii) Ponemos $B \coloneqq \sigma(A \times \mathbf{V})$. Entonces para cualesquiera $x, y, z$ se tiene que $\langle y, z\rangle \dot\in A \Leftrightarrow \langle y, z, x\rangle \dot\in A \times \mathbf{V} \Leftrightarrow \langle y, x, z\rangle \dot\in \sigma(A \times \mathbf{V})$.

(iv) Definimos $B_0 \coloneqq A$, $B_{i+1} \coloneqq B_i \times \mathbf{V}$ y $B \coloneqq B_m$. Entonces, para $m = 0$, $B$ cumple el enunciado trivialmente. Si es cierto hasta $m$, para $m+1$ queda que para cualesquiera $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m+1}$ se tiene que $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \dot\in A \Leftrightarrow \langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\rangle \dot\in B_m \Leftrightarrow \langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m+1}\rangle \dot\in B_{m+1} = B$, donde la primera equivalencia se debe a la hipótesis de inducción y la segunda a la definición de $B_{m+1}$.

(v) Definimos $B_0 \coloneqq A$, $B_{i+1} \coloneqq \tau(\sigma(B_i \times \mathbf{V}))$ y $B \coloneqq B_m$. Entonces, para $m = 0$, $B$ cumple el enunciado trivialmente. Si es cierto hasta $m$, para $m+1$ queda que para cualesquiera $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m+1}$ se tiene que $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \dot\in A \Leftrightarrow \langle x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_m, x_n\rangle \dot\in B_m \Leftrightarrow \langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, x_n, y_{m+1}\rangle = \langle\langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\rangle, x_n, y_{m+1}\rangle \dot\in B_m \times \mathbf{V} \Leftrightarrow \langle\langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\rangle, y_{m+1}, x_n\rangle = \langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m+1}, x_n\rangle \dot\in B_{m+1} = B$, donde la primera equivalencia se debe a la hipótesis de inducción y la tercera a la definición de $B_{m+1}$ y el apartado (ii).

(vi) Ponemos $B \coloneqq \sigma(A \times \mathbf{V})$ y, como en el apartado (iii), tenemos que $\langle y_1, \ldots, y_m, x_1, x_2\rangle = \langle\langle y_1, \ldots, y_m\rangle, x_1, x_2\rangle \dot\in B \Leftrightarrow \langle x_1, x_2\rangle \dot\in A$.

(vii) $B \coloneqq \mathbf{V} \times A$ cumple el enunciado.

(viii) $B \coloneqq \mathfrak{Dom}(A)$ satisface la condición demandada. □

**Teorema 5.13. (Teorema General de Existencia)** $\mathrm{NBG}_{\mathrm{fin}} \vdash \mathrm{NBG}$.

*Demostración.* Lo único que tenemos que comprobar en realidad es que $\mathrm{NBG}_{\mathrm{fin}} \vdash \mathrm{FC}$, puesto que el resto de axiomas de NBG ya están en $\mathrm{NBG}_{\mathrm{fin}}$.
Sea entonces $\phi$ una **fp** sin más variables libres que $x_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_m$.

Primero de todo, observamos que podemos asumir que todas las fórmulas atómicas que aparecen en $\phi$ son de la forma $(x_i \,\dot{\in}\, Y_j)$ con $x_i$ conjunto, ya que $(Y_i \,\dot{\in}\, Y_j)$ puede ser reemplazada por $\exists y(y \doteq Y_i \wedge y \,\dot{\in}\, Y_j)$ y $(x_i \doteq x_j)$ por $\forall u(u \,\dot{\in}\, x_i \leftrightarrow u \,\dot{\in}\, x_j)$ (y similarmente para $(x_i \,\dot{\in}\, Y_j)$, $(Y_i \,\dot{\in}\, x_j)$ e $(Y_i \,\dot{\in}\, Y_j)$ ). Por tanto, podemos reducir la cantidad de subcasos del caso atómico de la inducción a sólo dos.

- Caso $\phi$ atómica: Hay dos posibilidades: $\phi = (x_r \,\dot{\in}\, x_s)$ o $\phi = (x_r \,\dot{\in}\, Y_s)$, con $1 \leqslant r \leqslant n$ y $1 \leqslant s \leqslant n$. Buscamos, dadas clases $Y_1, \ldots, Y_m$, otra clase $A$ tal que $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \,\dot{\in}\, A \leftrightarrow \phi(x_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_m)$ para cualesquiera $x_1, \ldots, x_n$.

  (a) Si $\phi = (x_r \,\dot{\in}\, x_s)$, podemos tener o bien $r = s$ o $r \neq s$. Si $r = s$, tomamos simplemente $A \coloneqq 0$, ya que el Axioma C (Regularidad) implica que no hay $a$ tal que $a \in a$, como vimos en capítulos anteriores.
  En el caso $r \neq s$, definimos $p \coloneqq \min\{r, s\}$ y $q \coloneqq \max\{r, s\}$. Si $r < s$, entonces $(x_r \,\dot{\in}\, x_s) = (x_p \,\dot{\in}\, x_q)$, ponemos $A_1 \coloneqq \mathcal{E}$, y entonces

  $$\phi(x_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_m) = (x_p \,\dot{\in}\, x_q) \Leftrightarrow \langle x_p, x_q \rangle \,\dot{\in}\, \mathcal{E} = A_1$$

  Si, por el contrario, $s < r$, entonces $(x_r \,\dot{\in}\, x_s) = (x_q \,\dot{\in}\, x_p)$, y definimos $A_1 \coloneqq \mathcal{E}^{-1}$. De ese modo,

  $$\phi(x_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_m) = (x_q \,\dot{\in}\, x_p) \Leftrightarrow \langle x_q, x_p \rangle \,\dot{\in}\, \mathcal{E} \Leftrightarrow \langle x_p, x_q \rangle \,\dot{\in}\, \mathcal{E}^{-1} = A_1$$

  En resumen, $\phi(x_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_m) \Leftrightarrow \langle x_p, x_q \rangle \,\dot{\in}\, A_1$. Ahora usamos el Lema 5.12(vi) para definir $A_2$ de manera que se satisfaga

  $$\forall x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p, x_q \big[ \langle x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p, x_q \rangle \,\dot{\in}\, A_2 \leftrightarrow \langle x_p, x_q \rangle \,\dot{\in}\, A_1 \big]$$

  Después, con el Lema 5.12(v) invocamos un $A_3$ tal que

  $$\forall x_1, \ldots, x_q \big[ \langle x_1, \ldots, x_q \rangle \,\dot{\in}\, A_3 \leftrightarrow \langle x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p, x_q \rangle \,\dot{\in}\, A_2 \big]$$

  Finalmente, en virtud del Lema 5.12(iv) hay un $A_4$ que verifica

  $$\forall x_1, \ldots, x_n \big[ \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \,\dot{\in}\, A_4 \leftrightarrow \langle x_1, \ldots, x_q \rangle \,\dot{\in}\, A_3 \big]$$

  Concatenando las equivalencias y tomando $A \coloneqq A_4$ se tiene que, para $x_1, \ldots, x_n$ cualesquiera,

  $$\phi(x_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_m) \Leftrightarrow \langle x_p, x_q \rangle \,\dot{\in}\, A_1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \,\dot{\in}\, A_4$$

  (b) Si $\phi = (x_r \,\dot{\in}\, Y_s)$, distinguimos entre los casos $r < n$ y $r = n$.
  Si $r < n$, $A_1 \coloneqq Y_s \times \mathbf{V}$ es tal que

  $$\forall x_r, x_{r+1} \big[ \langle x_r, x_{r+1} \rangle \,\dot{\in}\, A_1 \leftrightarrow x_r \,\dot{\in}\, Y_s \big]$$

  Ahora sólo queda continuar como en el caso (a) para contruir $A_2$, $A_3$ y $A = A_4$.
  Para $r = n$, hacemos lo mismo pero con $A_1 \coloneqq (A \times \mathbf{V})^{-1}$ para obtener $\langle x_{r-1}, x_r \rangle \Leftrightarrow A_1 \leftrightarrow x_r \,\dot{\in}\, Y_s$. El resto sigue igual.

- Caso $\phi$ conjunción: Si $\phi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$ para ciertas fórmulas $\psi_1, \psi_2$, las variables libres de $\psi_1$ y de $\psi_2$ están incluidas en la lista $x_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_m$. Por tanto, dadas ciertas clases $Y_1, \ldots, Y_m$, por hipótesis de inducción hay dos clases $A_1, A_2$ tales que

$$\forall x_1, \ldots, x_n \big[ \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mathrel{\dot\in} A_1 \leftrightarrow \psi_1(x_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_m) \big]$$

$$\forall x_1, \ldots, x_n \big[ \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mathrel{\dot\in} A_2 \leftrightarrow \psi_2(x_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_m) \big]$$

  Por tanto, $A \coloneqq A_1 \cap A_2$ cumple lo que se pedía: dados $x_1, \ldots, x_n$

$$\begin{aligned} \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mathrel{\dot\in} A &\Leftrightarrow \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mathrel{\dot\in} A_1 \wedge \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mathrel{\dot\in} A_2 \\ &\Leftrightarrow \psi_1(x_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_m) \wedge \psi_2(x_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_m) \\ &\Leftrightarrow \phi(x_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_m) \end{aligned}$$

- Caso $\phi$ negación: Similar al anterior pero tomando $A \coloneqq A_1^\complement$, donde $A_1$ era la clase asociada a $Y_1, \ldots, Y_m$ y $\phi(x_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_m)$ dada por la hipótesis de inducción.

- Caso $\phi$ cuantificación existencial: Tenemos entonces que hay una fórmula $\chi$ tal que $\phi = \exists x \chi(x_1, \ldots, x_n, x, Y_1, \ldots, Y_m)$, estando todas las variables libres de $\chi$ en la lista $x_1, \ldots, x_n, x, Y_1, \ldots, Y_m$.
  Sean $Y_1, \ldots, Y_m$ clases. Por hipótesis de inducción, hay una clase $A_1$ tal que

$$\forall x_1, \ldots, x_n, x \big[ \langle x_1, \ldots, x_n, x \rangle \mathrel{\dot\in} A_1 \leftrightarrow \chi(x_1, \ldots, x_n, x, Y_1, \ldots, Y_m) \big]$$

  Poniendo $A \coloneqq \mathfrak{Dom}(A_1)$ tenemos que, para cualesquiera $x_1, \ldots, x_n$,

$$\begin{aligned} \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mathrel{\dot\in} A &\Leftrightarrow \exists x \big( \langle x_1, \ldots, x_n, x \rangle \mathrel{\dot\in} A_1 \big) \Leftrightarrow \exists x \chi(x_1, \ldots, x_n, x, Y_1, \ldots, Y_m) \\ &\Leftrightarrow \phi(x_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_m) \end{aligned}$$

  No es necesario comprobar los casos en los que $\phi$ es disyunción/implicación/bicondicional/cuantificación universal ya que, bajo equivalencia, estas pueden ser generadas a partir de $\wedge, \neg, \exists$.

Esto termina la inducción y, con ello, la demostración del teorema. □

**Resultado 7.** $\mathrm{NBG_{fin}} \equiv \mathrm{NBG}$ y, por ende, NBG es finitamente axiomatizable.

### 5.4.1. Dependencia de B6 del resto de axiomas de NBG

Para acabar, mostramos que el axioma B6 de $\mathrm{NBG_{fin}}$ es en realidad consecuencia del resto, haciendo que este pueda ser eliminado de la lista sin alterar la teoría de NBG.

**Proposición 5.14.** $\mathrm{NBG_{fin}} - \mathrm{B6} \vdash \mathrm{B6}$.

*Demostración.* Sea $A$ una clase arbitraria. Buscamos demostrar la existencia de una clase $B$ tal que $\forall x \forall y \big[ \langle y, x \rangle \mathrel{\dot\in} B \leftrightarrow \langle x, y \rangle \mathrel{\dot\in} A \big]$.

Usando B5, B8 y B4, tomamos unas clases $B_1 \coloneqq A \times \mathbf{V}$, $B_2 \coloneqq \tau(B_1)$ y $B_3 \coloneqq \mathfrak{Dom}(B_2)$.

Por lógica de primer orden, sabemos que $\forall x \phi \vdash \phi \vdash \exists x \phi$. Por tanto,

$$\forall y(\langle y, x \rangle \mathrel{\dot\in} B_1) \to \exists y(\langle y, x \rangle \mathrel{\dot\in} B_1) \tag{5.4}$$

Por ello, junto con la definición de $B_1$, tenemos las siguientes implicaciones:

$$\begin{aligned}
&\forall x \big[\, x \mathrel{\dot\in} A \to \forall y(\langle y, x\rangle \mathrel{\dot\in} B_1)\,\big] \\
&\forall x \big[\, x \mathrel{\dot\in} A \to \exists y(\langle y, x\rangle \mathrel{\dot\in} B_1)\,\big] \qquad (5.5)\\
&\forall x \forall y \big[\, \langle y, x\rangle \mathrel{\dot\in} B_1 \to x \mathrel{\dot\in} A\,\big] \\
&\forall x \big[\, \exists y(\langle y, x\rangle \mathrel{\dot\in} B_1) \to x \mathrel{\dot\in} A\,\big] \qquad (5.6)
\end{aligned}$$

Combinando (5.5) y (5.6) tenemos que

$$\forall x \big[\, \exists y(\langle y, x\rangle \mathrel{\dot\in} B_2) \leftrightarrow x \mathrel{\dot\in} A\,\big] \tag{5.7}$$

Sean entonces $x, y, z$ arbitrarios. Tenemos que $\langle x, y\rangle \mathrel{\dot\in} B_3 \Leftrightarrow \exists z\big(\, \langle\langle x, y\rangle, z\rangle \mathrel{\dot\in} B_2\,\big) \Leftrightarrow \exists z\big(\, \langle\langle y, x\rangle, z\rangle \mathrel{\dot\in} B_1\,\big) \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \mathrel{\dot\in} A$, donde hemos usado la definición de $B_3$ en la primera equivalencia, la definición de $B_2$ en la segunda y . Por tanto, si $B \coloneqq B_3$, se cumple que

$$\forall x \forall y \big[\, \langle y, x\rangle \mathrel{\dot\in} B \leftrightarrow \langle x, y\rangle \mathrel{\dot\in} A\,\big]$$

Como queríamos. $\square$

**Resultado 8.** $\mathrm{NBG}_{\mathrm{fin}}$ no es independiente.

# 6. Conclusiones

En a penas 50 páginas hemos conseguido demostrar (respecto de ZF y asumiendo que es consistente):

- Que el Axioma de Regularidad es consistente y que el Axioma de la Potencia, el Axioma del Infinito, el Esquema de Reemplazo y la existencia de cardinales inaccesibles son independientes de ZF (ZFC para el último), todo con las técnicas introducidas en los capítulos 3 y 4.

- Que NBG es una extensión conservativa finitamente axiomatizable de ZF que admite la existencia de clases propias, proveyendo para cada modelo de ZF un modelo de NBG que lo extiende.

Redactar este documento me ha aportado mucho crecimiento personal y académico. He aprendido a ser más autónomo en mi aprendizaje matemático, a recopilar información de diversas fuentes, a seleccionar aquella que me era útil y a unificar los contenidos de diversas obras con notaciones y detalles formales distintos, además de organizar yo mismo mis horas de trabajo en el calendario (que no han sido pocas precisamente).

Con este proyecto he tenido mi primera toma de contacto con la lógica matemática y la teoría de modelos (dos ramas en las que, muy probablemente, me siga formando en el futuro), y he podido aprender cómo éstas le son útiles a la teoría de conjuntos.

El teorema de reflexión me dio dificultades al principio, creí que no iba a poder con él. Irónicamente, un reto más rompecabezas que ese fue el de compatibilizar las convenciones de notación propias de todos estos campos de estudio, a veces superpuestas, para que no hubiese duplicaciones de símbolos y el significado de cada símbolo fuese consistente durante todo el texto. Pero, sin duda alguna, de lo que más orgulloso estoy es de la demostración del carácter conservativo de NBG como extensión de ZF, por ser la más larga y compleja del documento y por la aventura que supuso ser yo mismo quien se guiase a sí mismo a través de ella (a partir de la construcción inicial de $\mathcal{N}$ dada por mi tutor, Enrique) y diese cuenta de todos los detalles formales que debían ser considerados. Durante el último mes estuvimos buscando fuentes que me sirviesen de guía y no pudimos hallar ninguna. Me ilusiona saber que ésta será una buena referencia en español para dar a quien esté interesado en una prueba rigurosa de tal teorema.

Sin duda una experiencia que me encantará repetir en el futuro con la tesis de fin de maestría.

## Referencias

[Göd40] Kurt Gödel. *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*. Annals of Mathematicsl Studies. Princeton University Press, 1940. ISBN: 0691079277.

[Már48] Andréi A. Márkov. «On the dependence of axiom B6 on the other axioms of the Bernays–Gödel system». En: *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 12.6 (1948), págs. 569-570. DOI: `https://www.mathnet.ru/im3096`.

[Sho54] Joseph R. Shoenfield. «A Relative Consistency Proof». En: *The Journal of Symbolic Logic* 19.1 (1954). DOI: `https://doi.org/10.2307/2267646`.

[End77] Herbert B. Enderton. *Elements of Set Theory*. Academic Press Inc., 1977. ISBN: 0122384407.

[Lev79] Azriel Levy. *Basic Set Theory*. Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, 1979. ISBN: 3540084177.

[Kun80] Kenneth Kunen. *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland, 1980. ISBN: 0444854010.

[Ebb84] J. Flum; W. Thomas; Heinz-Dieter Ebbinghaus. *Mathematical Logic*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1984. ISBN: 0387942580.

# Índice de notación

# Índice de notación

# Índice de conceptos