UNIVERSITAT DE BARCELONA

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball de final de Grau

Lleis infinitament divisibles i teoremes de pas al límit de probabilitat

Xavier Fonoll i Rubio

Director: Dr. David Márquez Carreras

Realitzat a: Facultat de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 13 de juny de 2023.

Abstract

In probability theory, a probability distribution is infinitely divisible if it can be expressed as the probability distribution of the sum of an arbitrary number of independent and identically distributed random variables. The objective of this work is to build a solid base of knowledge that allows us to define the infinitely divisible laws and study their properties, although we will also see other límit theorems of probability that are not strictly related to it. We will thus make a brief introduction to probability and characteristic functions, we will then study the asymptotic behavior of random series and, after that, in the third chapter, we will get into the study of probability measures. In this section we will define the weak convergence and the convolutions of probability measures. The propositions and theorems of this section will accompany us throughout the rest of this work, since they will be the basis for demonstrating numerous results in the fourth chapter. In addition, these results will allow us to define the infinitely divisible laws and sutdy their properties. Finally, we will introduce the concept of the $CPoiss$ law of parameter μ, to finish demonstrating the Levy-Khintchine theorem.

Resum

A la teoria de la probabilitat, una distribució de probabilitat és infinitament divisible si es pot expressar com la distribució de probabilitat de la suma d'un nombre arbitrari de variables aleatòries independents idènticament distribuïdes. L'objectiu d'aquest treball és construir una base sòlida de coneixements que ens permeti definir les lleis infinitament divisibles i estudiar les seves propietats, encara que també es veuran altres resultats de teoremes de pas al límit que no estan estrictament relacionats. Així doncs, veurem primer una breu introducció a la probabilitat i les funcions característiques, estudiarem després el comportament asimptòtic de les sèries aleatòries i, a continuació, al tercer capítol entrarem en l'estudi de les mesures de probabilitat. En aquesta secció definirem la convergència feble de mesures de probabilitat i introduirem les convolucions de mesures de probabilitat. Les proposicions i teoremes d'aquest apartat ens acompanyaran durant la resta del treball, ja que aquestes seran la base per demostrar nombrosos resultats de teoremes límit centrals, al quart capítol. Així mateix, aquests resultats ens permetran definir les lleis infinitament divisibles i estudiar les seves propietats. Finalment, introduirem el concepte de la llei $CPoiss$ de paràmetre μ i acabarem demostrant el teorema de Levy-Khintchine.

2020 Mathematics Subject Classification. 60B10, 60F05 , 60E07, 60E99

Agraïments

En primer lloc, vull mostrar la més honesta gratitud al meu tutor, en Dr. David Márquez Carreras, per la seva dedicació, atenció i assistència durant tot el treball. En ocasions amb molta paciència, m'ha acompanyat al llarg d'aquest camí d'aprenentatge. Les seves explicacions sovint han sigut determinants per entendre aquells continguts més enrevessats, o acabar aquelles proves que de vegades s'encallen. Tot això m'ha permès avançar i gaudir molt més d'aquest procès.

En segon lloc, també vull agrair als meus familiars més propers, i especialment al meu germà bessó, en Víctor, haver-me fet costat tots aquests anys al llarg de la meva vida acadèmica i personal.

No em vull oblidar dels amics i les amigues que he fet en aquesta universitat, tot i que la pandèmia i la docència no presencial no ho hagin posat gens fàcil. Saber que podria veure'ls quan arribés a la facultat ha sigut el combustible que necessitava per continuar endavant quan la vida universitària es complicava més.

Finalment, dedicar aquest treball al meu tiet Rafel, per inspirar-me a ser el segon matemàtic de la família.

Contents

1 Introducció a la probabilitat i les funcions característiques

Aquest primer capítol el dedicarem a recordar alguns dels resultats bàsics i fonamentals que es treballen a l'assignatura de Probabilitats, i a introduir les funcions característiques, les quals són noves per a mi i s'utilitzaran molt al llarg d'aquest treball. Les propietats que veurem a continuació que s'hagin treballat a cursos anteriors de Probabilitat no les demostrarem, ja que no és l'objectiu d'aquest treball ni disposem del temps ni les pàgines necessàries. Això no obstant, sí que demostrarem alguns resultats bàsics sobre funcions característiques que he considerat més importants i que han aparegut més recurrentment a les diferents proves d'aquest escrit, puix no podem perdre la rigorositat que ha de caracteritzar als matemàtics.

1.1 Introducció a la probabilitat

Al llarg de tot el treball estarem en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ on Ω és l'*espai mostral* i està format per totes les possibles realitzacions o resultats del fenomen aleatori que estudiem, $\mathcal{A}$ és una família de parts de Ω que té estructura de σ-àlgebra i P és una aplicació $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ que anomenem *probabilitat* i satisfà

1. $P(\Omega) = 1$,
2. Si $\{A_n, n \geq 1\}$ és una successió de conjunts de $\mathcal{A}$ disjunts dos a dos, aleshores $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$. ($\sigma-$*additivtat*)

Recordem que $\mathcal{A}$ té estructura de σ-àlgebra si compleix

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$.

(ii) Si $A \in \mathcal{A}$, aleshores $A^c \in \mathcal{A}$.

(iii) Si $\{A_n, n \geq 1\} \subset A$, es compleix $\cup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$.

Es defineix com a espai mesurable, o de Borel, al parell ordenat $(\Omega, \mathcal{B})$, on Ω és un conjunt i $\mathcal{B}$ és una $\sigma-$àlgebra sobre Ω. Per altra banda, anomenem espai de mesura a la terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ on $\mathcal{A}$ és una σ-àlgebra de parts d'Ω i $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ és σ-additiva (amb $\mu(\emptyset) = 0$). Un exemple important de mesura, que apareixerà sovint al llarg d'aquest treball, és la *delta de Dirac* en el punt x, definida com

$$\delta_x(A) = \mathbf{1}_A(x), \quad A \in \mathcal{A},$$

i representa una mesura de massa total igual a 1 concentrada en el punt x.
Ara, si considerem un espai de mesura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, un espai mesurable $(E, \mathcal{B})$ i una aplicació mesurable $X : \Omega \to E$. L'aplicació X indueix una mesura en l'espai $(E, \mathcal{B})$ donada per

$$(\mu \circ X^{-1})(B) = \mu(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Anomenem a $\mu \circ X^{-1}$ com la mesura imatge de μ per X. Aleshores es compleix:

Teorema 1.1. *(Teorema de la mesura imatge) Sigui $f : E \to R$ una funció mesurable. Llavors f és integrable en l'espai de mesura $(E, \mathcal{B}, \mu \circ X^{-1})$ si i només si $f \circ X$ és integrable en $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ i en aquest cas*

$$\int_{\Omega} (f \circ X) d\mu = \int_E f d(\mu \circ X^{-1}).$$

Podeu trobar la demostració d'aquest teorema a la Proposició 6.9 de la referència [1]. Definim ara una variable aleatòria com una aplicació $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A},$$

per tot $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ significa els Borelians de $\mathbb{R}$. Aquesta aplicació li fa correspondre un valor real a cada element de l'espai mostral Ω.
Aleshores la *llei d'una variable aleatòria* X, denotada per P_X, és la probabilitat sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ definida com

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)),$$

per tot $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Observem que la probabilitat P_X és en realitat la mesura imatge de P per X. També definim la seva *funció de distribució* associada com una funció $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ tal que

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Convé recordar que tota funció de distribució és creixent, contínua per la dreta i satisfà $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ i $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, on $x \in \mathbb{R}$. Si aquesta variable aleatòria X és integrable respecte P, definim *l'esperança matemàtica* d'X com

$$\mathbf{E}[X] = \int_\Omega X dP.$$

Aquesta és la integral d'X respecte la mesura P. Aleshores, pel teorema de la mesura imatge, tenim que

$$\mathbf{E}[X] = \int_\Omega X dP = \int_\mathbb{R} x(P \circ X^{-1})dx = \int_\mathbb{R} xP_X(dx).$$

Direm que una variable aleatòria és discreta si el conjunt $X(\Omega)$ és finit o numerable. En aquest cas tenim que $X : \Omega \to \{x_i, i \in I \subseteq \mathbb{N}\}$ i, si és integrable, es compleix

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i\in I} x_i P(X = x_i).$$

Per altra banda, direm que és absolutament contínua si existeix una funció de densitat f integrable tal que la seva funció de distribució F s'escriu

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

per tot $x \in \mathbb{R}$. Recordem que f és una funció de densitat si satisfà:

(i) $f \geq 0$,

(ii) f és integrable en el sentit de Riemann per $\mathbb{R}$,

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Una variable aleatòria absolutament contínua, integrable, amb densitat f té esperança

$$\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

1.2 Convergència de variables aleatòries

Resulta indispensable per seguir aquest treball recordar i entendre els diferents tipus de convergència de successions d'una variable aleatòria i les seves relacions. També convé mencionar alguns resultats de Probabilitats que són necessaris a moltes de les demostracions que veurem durant aquest text.
El primer de tot és la Desigualtat de Txebitxev. Aquesta ens diu que si tenim una variable aleatòria X, no negativa, i $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ és una funció creixent tal que $\mathbf{E}[f(X)] < \infty$. Si $a \in \mathbb{R}^+$ compleix $f(a) > 0$, aleshores

$$P(\{X \geq a\}) \leq \frac{1}{f(a)}\mathbf{E}[f(X)].$$

Suposem que tenim ara una successió de conjunts $\{A_n, n \geq 1\}$ d'un espai mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$. Es defineix

$$\limsup_n A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$
$$\liminf_n A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Notem que podem interpretar el límit superior de A_n com el conjunt $\{w \in \Omega : w \in A_n$ per infinits n$\}$, i el límit inferior de A_n com el conjunt $\{w \in \Omega : w \in A_n$ per per tots els n, excepte potser un nombre finit$\}$. Aleshores els Lemes de Borel Canteli ens diuen que:

(i) Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, on $\{A_n, n \geq 1\}$ és una successió de conjunts de $\mathcal{A}$, aleshores $P(\{\limsup_n A_n\}) = 0$.

(ii) Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, on $\{A_n, n \geq 1\}$ és una successió d'esdeveniments independents, aleshores $P(\{\limsup_n A_n\}) = 1$.

Sigui ara una successió de variables aleatòries, $\{X_n, n \geq 1\}$. Direm que la successió convergeix quasi segurament a una variable aleatòria X si existeix un conjunt $N \in \mathcal{A}$ de probabilitat zero tal que

$$\lim_{n\to\infty} X_n(w) = X(w)$$

per tot $w \notin N$.
Aleshores els lemes de Borel Canteli ens permeten demostrar que la successió $\{X_n, n \geq 1\}$ convergeix quasi segurament cap a X si i només si per tot $\varepsilon > 0$ es compleix

$$\lim_{m\to\infty} P(\{\sup_{n\geq m} |X_n - X| \leq \varepsilon\}) = 1.$$

Un altre tipus de convergència és la convegència en probabilitat. Si tenim una successió de variables aleatòries $\{X_n, n \geq 1\}$, direm que convergeix en probabilitat cap a una variable aleatòria X si

$$\lim_{n\to\infty} P(\{|X_n - X| > \varepsilon\}) = 0.$$

Finalment, si $\{X_n, n \geq 1\}$ és una successió de variables aleatòries de l'espai $L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ amb $1 \leq p < \infty$. Direm que aquesta successió convergeix en mitjana d'ordre p cap a una variable aleatòria X de $L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ si

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[|X_n - X|^p] = 0.$$

1.3 Funcions característiques

Estudiem ara les funcions característiques introduïdes per Paul Lévy. Aquestes ens permeten treballar amb una tècnica diferent la convergència feble de probabilitats. Les utilitzarem molt a la segona meitat d'aquest treball.
Si P és una probabilitat en $\mathbb{R}$, la funció característica de P és una aplicació $\varphi_P : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida com

$$\varphi_P(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} P(dx) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) P(dx) + i \int_{\mathbb{R}} \sin(tx) P(dx).$$

Notem que φ_P està ben definida ja que les funcions sinus i cosinus son contínues i fitades.
Ara, si X és una variable aleatòria, la funció característica de X és

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itX} P_X(dx) = \mathbf{E}[e^{itX}],$$

on P_X és la llei de X. D'aquesta definició veiem directament certes propietats de les funcions característiques.

1. $\varphi_X(0) = 1$ ja que $\int_{\mathbb{R}} e^0 P(dx) = P(\mathbb{R}) = 1$.
2. $|\varphi_X(t)| \leq 1$ per tot $t \in \mathbb{R}$, ja que $|e^{itx}| \leq 1$.
3. $\varphi_P(-t) = \overline{\varphi_P(t)}$.
   En efecte,
   $$\begin{aligned}\varphi_P(-t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} P(dx) = \int_{\mathbb{R}} \cos(-tx) P(dx) + i \int_{\mathbb{R}} \sin(-tx) P(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) P(dx) - i \int_{\mathbb{R}} \sin(tx) P(dx) = \int_{\mathbb{R}} \overline{e^{itx}} P(dx) = \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{itx} P(dx)} \\ &= \overline{\varphi_P(t)}.\end{aligned}$$
4. Si $X_1, ..., X_n$ són variables aleatòries independents, aleshores
   $$\varphi_{X_1+...+X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t) \times ... \times \varphi_{X_n}(t).$$
   Efectivament,
   $$\mathbf{E}[e^{it(X_1+...+X_n)}] = \mathbf{E}[e^{itX_1}] \times ... \times \mathbf{E}[e^{itX_n}] = \varphi_{x_1}(t) \times ... \times \varphi_{X_n}(t).$$
5. $\varphi_P(t)$ és uniformement contínua. En efecte, qualsevols que siguin $s, t \in \mathbb{R}$, tenim
   $$|\varphi_P(t) - \varphi_P(s)| = \left| \int_{\mathbb{R}} (e^{itx} - e^{isx}) P(dx) \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{i(t-s)x} - 1| P(dx).$$
   Com aquesta darrera integral està afitada per 2 i tendeix a zero quan $|t - s|$ tendeix a zero, només cal aplicar el Teorema de la Convergència dominada.

6. *Propietat fonamental d'injectivitat.* Aquesta ens diu que si $\varphi_{P_1}(t) = \varphi_{P_2}(t)$ on P_1 i P_2 son dues probabilitats en $\mathbb{R}$, necessàriament $P_1 \equiv P_2$. Observem que la implicació contrària és evident.

Es pot provar utilitzant el Teorema de Stone-Weirestrass. Aquest ens diu que si fixem un interval $[-T, T]$, les combinacions lineals finites a coeficients complexos de les funcions $e^{i\pi kx/T}$ on $k \in \mathbb{Z}$ son denses en el conjunt de les funcions complexes sobre $[-T, T]$ a valors complexos. Cal veure doncs que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dP_1(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dP_2(x),$$

per tota funció real contínua amb suport compacte. Fixem $\varepsilon > 0$ i prenem $T > 0$ tal que el suport de f estigui contingut en $[-T, T]$ i $P_1([-T, T]^c) \leq \varepsilon$, $P_2([-T, T]^c) \leq \varepsilon$. Pel que acabem de dir, existeix una funció

$$\tilde{f}(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \exp\{\frac{i\pi k_j x}{T}\}$$

amb $a_j \in \mathbb{C}$ tal que $\sup_{|x|\leq T}|\tilde{f}(x) - f(x)| < \varepsilon$. Per hipòtesi sabem que $\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x)dP_1(x) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x)dP_2(x)$. També, com que $\tilde{f}$ és $2T-$periòdica, tenim que

$$\|\tilde{f}\|_\infty = \sup_{x\in[-T,T]} |\tilde{f}(x)| \leq \varepsilon + \|f\|_\infty.$$

Per tant, si prenem $\theta = \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)dP_1(x) - \int_{\mathbb{R}} f(x)dP_2(x)\right|$,

$$\begin{aligned}\theta &\leq \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)dP_1(x) - \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x)dP_1(x)\right| + \left|\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x)dP_2(x) - \int_{\mathbb{R}} f(x)dP_2(x)\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}} (f(x) - \tilde{f}(x))dP_1(x)\right| + \left|\int_{\mathbb{R}} (\tilde{f}(x) - f(x))dP_2(x)\right|.\end{aligned} \tag{1.1}$$

Fixem-nos que

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}} (f(x) - \tilde{f}(x))dP_1(x)\right| &\leq \int_{\{|x|\leq T\}} \left|f(x) - \tilde{f}(x)\right| dP_1(x) \\ &\quad + \int_{\{|x|>T\}} \left|f(x) - \tilde{f}(x)\right| dP_1(x) \\ &\leq P_1([-T, T])\varepsilon + \varepsilon(\varepsilon + \|f\|_\infty).\end{aligned}$$

Aplicant aquest raonament també a l'altre sumand de (1.1), obtenim

$$\theta \leq \varepsilon(P_1([-T, T]) + P_2([-T, T])) + 2\varepsilon(\varepsilon + \|f\|_\infty) \leq 2\varepsilon(1 + \varepsilon + \|f\|_\infty).$$

Com $\varepsilon > 0$ és arbitrari ja hem acabat.

A continuació enunciarem i demostrarem la desigualtat de Paul Lévy. Aquesta és necessària per demostrar el teorema de Continuïtat de Paul Lévy i també per demostrar el Teorema de Levy-Khintchine. Els estudiarem més endavant, ja que per entendre'ls és necessari introduir alguns conceptes que encara no hem vist. El primer d'aquests teoremes s'utilitzarà de forma recurrent al darrer capítol d'aquest treball per provar diferents resultats. El teorema de Lévy-Khintchine serà l'últim teorema que veurem, quan parlem de lleis infinitament divisibles.

Teorema 1.2. *(Desigualtat de Paul Lévy) Sigui P una probabilitat sobre $\mathbb{R}$ amb funció característica φ. Aleshores, per tot $a > 0$,*

$$P\left(x : |x| > \frac{2}{u}\right) \leq \frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1-\varphi(t))dt.$$

<u>Prova</u>. Fent servir el Teorema de Fubini i el fet que la funció sinus és imparell, operant la integral de l'esquerra obtenim

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1-\varphi(t))dt &= \frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1-e^{itx})dt = \frac{1}{u}\int_{-u}^{u}\int_{\mathbb{R}}(1-e^{itx})dP(x)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left[\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1-cos(tx)dt\right]dP(x) = \int_{\mathbb{R}} 2\left(1-\frac{sin(ux)}{ux}\right)dP(x) \\
&\geq \int_{\{|ux|\geq 2\}} 2\left(1-\frac{sin(ux)}{ux}\right)dP(x) \\
&\geq 2\inf_{|t|\geq 2}\left(1-\frac{sin(t)}{t}\right)P\left(x : |x| > \frac{2}{u}\right) \\
&\geq P\left(x : |x| > \frac{2}{u}\right).
\end{aligned}$$

□

D'aquí se'n dedueix un corol·lari que utilitzarem també en el darrer apartat, per demostrar el Teorema de Levy-Khintchine.

Corol·lari 1.3. *Si X és una variable aleatòria amb llei P_X i φ és la seva funció característica, aleshores existeix $\alpha \in (0,\infty)$ tal que per $u > 0$ és compleix:*

$$P\left(|X| > \frac{1}{u}\right) \leq \frac{\alpha}{u}\int_{0}^{u}(1-Re(\varphi(t)))dt.$$

<u>Prova</u>. Tenim

$$Re(\varphi(t)) = Re\left(\int_{\mathbb{R}} e^{itx}dP_X(x)\right) = \int_{\mathbb{R}} cos(tx)dP_X(x)).$$

Aleshores,

$$\frac{1}{u}\int_{0}^{u}(1-Re(\varphi(t)))dt = \frac{1}{u}\int_{0}^{u}\int_{\mathbb{R}}(1-cos(tx)dP_X(x)dt.$$

A partir d'aquí, podem fer servir el mateix raonament del teorema anterior però integrant entre 0 i u en comptes de $-u$ i u, i arribem a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u}\int_{0}^{u}(1-Re(\varphi(t)))dt &\geq \int_{\{|xu|\geq 1\}}\left(1-\frac{sin(ux)}{ux}\right)dP_X(x) \\
&\geq \inf_{|t|\geq 1}\left(1-\frac{sin(t)}{t}\right)P\left(|X| > \frac{1}{u}\right)
\end{aligned}$$

Així doncs, si prenem $\frac{1}{\alpha} = \inf_{|t|\geq 1}(1-\frac{sin(t)}{t})$ ja hem acabat. □

2 Sèries aleatòries i criteris de convergència

En aquest apartat ens interessarà estudiar el comportament asimptòtic de la successió de sumes parcials

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n,$$

on $\{X_n, n \geq 1\}$ és una successió de variables aleatòries independents.
Sota certes condicions, veurem que la successió $\frac{S_n}{n}$ convergeix en probabilitat (i quasi segurament) cap a una constant. Si suposem que les variables X_n són indènticament distribuïdes, aquesta constant serà la seva esperança.

Proposició 2.1. *Sigui $\{X_n, n \geq 1\}$ una successió de variables aleatòries incorrelacionades que satisfà $\mathbf{E}({X_n}^2) < C$ per tot $n \geq 1$. Aleshores,*

$$\frac{S_n - \mathbf{E}(S_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{q.s,\, L^2} 0.$$

Prova. Primer demostrarem la convergència en L^2. Comencem estudiant la variància. Fent servir que les variables són incorrelacionades,

$$\begin{aligned} Var(S_n) &= \mathbf{E}\left[(S_n - \mathbf{E}(S_n))^2\right] = \mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n X_i - \mathbf{E}(X_i)\right)^2\right] \\ &= \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (X_i - \mathbf{E}(X_i))(X_j - \mathbf{E}(X_j))\right] = \sum_{i=1}^n Var(X_i). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Aleshores obtenim fàcilment la convergència en L^2,

$$\mathbf{E}\left[\left|\frac{S_n - \mathbf{E}(S_n)}{n}\right|^2\right] = \frac{1}{n^2}Var(S_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n Var(X_i) \leq \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i)^2 \leq \frac{1}{n^2}nC \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Estudiem ara la convergència q.s. Sense pèrdua de generalitat, podem suposar que les variables X_n son centrades. En primer lloc, volem veure que

$$\frac{S_{n^2}}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{q.s} 0.$$

Sigui $\varepsilon > 0$. Fent servir la desigualtat de Txebitxev i el mateix argument que a (2.1), obtenim

$$P\left(\frac{S_{n^2}}{n^2} > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{n^4\varepsilon^2}\mathbf{E}\left[S_{n^2}^2\right] = \frac{1}{n^4\varepsilon^2}Var\left(S_{n^2}\right) = \frac{1}{n^4\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n^2} Var(X_i) \leq \frac{1}{n^4\varepsilon^2}n^2C = \frac{C}{n^2\varepsilon}.$$

Per tant,

$$\sum_{n=1}^\infty P\left(\frac{S_{n^2}}{n^2} > \varepsilon\right) \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{C}{n^2\varepsilon} < \infty.$$

Per Borel Canteli tenim $|\frac{S_{n^2}}{n^2}| \xrightarrow[q.s]{} 0$ i, en conseqüència, $\frac{S_{n^2}}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{q.s} 0$.
Ara, definim

$$D_n := \max_{n^2 \leq k < (n+1)^2} |S_k - S_{n^2}|.$$

Volem veure que $\frac{D_n}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{q.s} 0$. Primer de tot, fixem-nos que la incorrelació ens dona

$$\mathbf{E}(D_n^2) \leq \mathbf{E}\left[\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} |S_k - S_n^2|^2\right] = \sum_{k=n^2}^{n^2+2n} \mathbf{E}\left[\sum_{l=n^2+1}^{k} X_l^2\right] =$$

$$= \sum_{k=n^2}^{n^2+2n} \sum_{l=n^2+1}^{k} \mathbf{E}[X_l^2] \leq \sum_{k=n^2}^{n^2+2n} \sum_{l=n^2+1}^{k} C < (2n)^2 C.$$

Fent servir això, obtenim

$$P\left(\frac{D_n}{n^2} > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{n^4\varepsilon^2}\mathbf{E}\left[|D_n|^2\right] \leq \frac{1}{n^4\varepsilon^2}(2n)^2 C = \frac{4C}{n^2\varepsilon^2}.$$

Aleshores, és clar que $\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{D_n}{n^2} > \varepsilon\right) < \infty$. Per Borel-Canteli es veu que $\frac{D_n}{n^2} \xrightarrow[q.s]{} 0$. Per acabar, fixem-nos que per $n^2 \leq k < (n+1)^2$,

$$\left|\frac{S_k}{k}\right| = \left|\frac{S_k - S_{n^2} + S_{n^2}}{k}\right| \leq \frac{|S_k - S_{n^2}|}{k} + \frac{|S_{n^2}|}{k} \leq \frac{|S_k - S_{n^2}|}{n^2} + \frac{|S_{n^2}|}{n^2} \leq \frac{D_n}{n^2} + \frac{|S_{n^2}|}{n^2}.$$

Ja hem vist que tant $\frac{D_n}{n^2}$ com $\frac{|S_{n^2}|}{n^2}$ convergeixen a zero quasi segurament. Prenent límits veiem doncs que $\frac{|S_k|}{k}$ convergeix a zero quasi segurament, tal i com volíem veure.

$\square$

Un exemple fonamental és el següent: Siguin X_n variables independents idènticament distribuïdes amb lleis de Bernoulli de paràmetre p. Això significa que X_n valdrà 1 o 0 en funció de si un esdeveniment Y ha passat o no a l'instant n, en una successió de realitzacions independents d'un experiment aleatori. Aleshores el qüocient $\frac{S_n}{n}$ representa la freqüència relativa d'aquest esdeveniment després de n realitzacions. Tenim doncs que la successió de freqüències relatives convergeix quasi segurament cap a la probabilitat de l'esdeveniment que estem considerant.

Estudiem ara el següent teorema:

Teorema 2.2. *Sigui $\{X_n, n \geq 1\}$ una successió de variables aleatòries independents tal que existeix una successió $\{b_n\} \to +\infty$ que satisfà:*

a) $\sum_{i=1}^{n} P(|X_i| > b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$

b) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_n^2}\mathbf{E}\left[|X_i|^2 \mathbf{1}_{\{|X_i| \leq b_n\}}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Aleshores, si $a_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}[X_i \mathbf{1}_{\{|X_i| \leq b_n\}}]$,

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0.$$

<u>Prova</u>. Definim $Y_{n_j} = X_j \mathbf{1}_{\{|X_j| \leq b_n\}}$, on $j = 1, ..., n$. Definim també $T_n = \sum_{j=1}^{n} Y_{n_j}$. Observem, en primer lloc, que

$$P(S_n \neq T_n) = P(Y_{n_j} \neq X_j, \text{ per algun } j = 1, .., n) \leq \sum_{j=1}^{n} P(Y_{n_j} \neq X_j).$$

Com $Y_{n_j} = X_j$ si $|X_j| \leq b_m$, tenim que $P(Y_{n_j} \neq X_j) = P(X_j > b_n)$. Aleshores, per la hipòtesi a), es veu

$$P(S_n \neq T_n) \leq \sum_{j=1}^{n} P(Y_{n_j} \neq X_j) = \sum_{j=1}^{n} P(X_j > b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Per altra banda, fent servir b) i la desigualtat de Txebitxev, veurem que $\frac{T_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{p} 0$. Per tot $\varepsilon > 0$, tenim

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{T_n - a_n}{b_n}\right| > \varepsilon\right) &\leq \frac{1}{\varepsilon^2 b_n^2}\mathbf{E}\left[|T_n - a_n|^2\right] = \frac{1}{\varepsilon^2 b_n^2}\mathbf{E}[|T_n - \mathbf{E}[T_n]|^2] = \frac{1}{\varepsilon^2 b_n^2}Var(T_n) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2 b_n^2}Var(\sum_{j=1}^{n} Y_{n_j}) = \frac{1}{\varepsilon^2 b_n^2}\sum_{j=1}^{n} Var(Y_{n_j}) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2 b_n^2}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}[Y_{n_j}^2] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Com que $P(S_n \neq T_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ i $\frac{T_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{p} 0$, és fàcil veure que $\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{p} 0$, doncs

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{S_n - a_n}{b_n}\right| > \varepsilon\right) &= P\left(\left|\frac{S_n - a_n}{b_n}\right| > \varepsilon, S_n = T_n\right) + P\left(\left|\frac{S_n - a_n}{b_n}\right| > \varepsilon, S_n \neq T_n\right) \\ &\leq P\left(\left|\frac{T_n - a_n}{b_n}\right| > \varepsilon\right) + P(S_n \neq T_n) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

□

A continuació, estudiarem la Primera i la Segona desigualtat de Kolmogórov. Aquestes ens serviran per demostrar el Teorema de les tres sèries de Kolmogórov.

Proposició 2.3. *(Primera desigualtat de Kolmogórov) Sigui $\{X_n, n \geq 1\}$ una successió de variables aleatòries independents, centrades tals que $\mathbf{E}(X_n^2) < \infty$ per tot $n \geq 1$, aleshores*

$$P(\max_{1\leq j\leq n} |S_j| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2(S_n)}{\varepsilon^2}.$$

on $Var(S_n) = \sigma^2(S_n)$.

Prova. Sigui $M_0 = \Omega$, $M_k = \{\max_{1\leq j\leq k}|S_j| \leq \varepsilon\}$ per tot $k \geq 1$. Observem que $M_n \subseteq M_{n-1} \subseteq ... \subseteq M_1 \subseteq M_0$. Considerem ara els conjunts $A_k = M_{k-1} - M_k = \{|S_j| \leq \varepsilon, j = 1, ..., k-1, |S_k| > \varepsilon\}$. Aleshores, si $A = \cup_{k=1}^{n} A_k = \{\max_{1\leq j\leq n}|S_j| > \varepsilon\}$, volem veure que $P(A) \leq \frac{\sigma^2(S_n)}{\varepsilon^2}$. Com que les variables són centrades,

$$\sigma^2(S_n) = \mathbf{E}(S_n^2) \geq \int_A (S_n)^2 dP = \sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}(S_n - S_k + S_k)^2 dP.$$

Fixem-nos que $(S_n - S_k + S_k)^2 = (S_n - S_k)^2 + 2(S_n - S_k)S_k + (S_k)^2$. El primer terme és positiu i $\int_{A_k}(S_n - S_k)S_k dP = \mathbf{E}[S_k(S_n - S_k)\mathbf{1}_{A_k}] = \mathbf{E}[S_k\mathbf{1}_{A_k}]\mathbf{E}[S_n - S_k] = 0$ ja que $\mathbf{E}[S_n - S_k] = 0$ per ser centrades i independents.
Amb això, si fem servir que en A_k tenim $|S_k| > \varepsilon$ i que $A = \cup_{k=1}^{n} A_k$, veiem

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}(S_n - S_k + S_k)^2 dP \geq \sum_{k=1}^{n}\int_{A_k} S_k^2 dP \geq \varepsilon^2 P(A).$$

És a dir, $\sigma^2(S_n) \geq \varepsilon^2 P(A)$ tal i com volíem veure. $\square$

Estudiem ara la segona desigualtat de Kolmogórov.

Proposició 2.4. *(Segona desigualtat de Kolmogórov) Sigui $\{X_n, n \geq 1\}$ una successió de variables aleatòries independents tals que $\mathbf{E}[|X_n|] < \infty$ i existeix algun $A > 0$ que satisfà $|X_n - \mathbf{E}[X_n]| \leq A$ q.s per tot $n \geq 1$, aleshores*

$$P(\max_{1\leq j\leq n} |S_j| \leq \varepsilon) \leq \frac{(4\varepsilon + 2A)^2}{\sigma^2(S_n)}.$$

<u>Prova</u>. Fent servir un raonament semblant a la demostració anterior, definim primer els conjunts $M_0 = \Omega$, $M_k = \{\max_{1\leq j\leq k}|S_j| \leq \varepsilon\}$ per tot $k \geq 1$. Observem que $M_n \subseteq M_{n-1} \subseteq ... \subseteq M_1 \subseteq M_0$. Considerem ara els conjunts $A_k = M_{k-1} - M_k = \{|S_j| \leq \varepsilon, j = 1, ..., k-1, |S_k| > \varepsilon\}$. Tenim $M_{k+1} = M_k - A_{k+1}$ i $A = \cup_1^n A_k = \Omega - M_n$.
Definim també les variables centrades $X_j^{'} = X_j - \mathbf{E}(X_j)$ per tot $j \geq 1$. Per hipòtesi, $|X_j^{'}| \leq A$. Sigui $S_j^{'} = \sum_{k=1}^{j} X_k^{'}$ amb $S_0^{'} = 0$. Ara definim $a_k = \frac{1}{P(M_k)} \int_{M_k} S_k^{'} dP$, $a_0 = 0$. Volem demostrar

$$P(M_n) \leq \frac{(4\varepsilon + 2A)^2}{\sigma^2(S_n)}.$$

Considerem en primer lloc

$$I := \int_{M_{k+1}} (S_{k+1}^{'} - a_{k+1})^2 dP = I_1 - I_2,$$

on

$$I_1 := \int_{M_k} (S_k^{'} - a_k + a_k - a_{k+1} + X_{k+1}^{'})^2 dP \quad \text{i} \quad I_2 = \int_{A_{k+1}} (S_k^{'} - a_k + a_k - a_{k+1} + X_{k+1}^{'})^2 dP,$$

ja que $S_{k+1}^{\prime} = S_k^{\prime} + X_{k+1}^{\prime}$ i $M_{k+1} = M_k - A_{k+1}$. Volem acotar la integral de l'esquerra de la igualtat. Per fer-ho, acotem primer I_2 fent servir les següents desigualtats:

$$\begin{aligned}
|S_k^{'} - a_k| &= \left| S_k - \mathbf{E}[S_k] - \frac{1}{P(M_k)} \int_{M_k} (S_k - \mathbf{E}[S_k]) dP \right| \\
&\leq \left| S_k - \mathbf{E}[S_k] - \frac{1}{P(M_k)} P(M_k)(\varepsilon - \mathbf{E}[S_k]) \right| \leq |S_k| + \varepsilon,
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
|a_k - a_{k+1}| = &\left| \frac{1}{P(M_k)} \int_{M_k} (S_k - \mathbf{E}[S_k])\, dP \right. \\
&\left. - \frac{1}{P(M_{k+1})} \int_{M_{k+1}} (S_k - \mathbf{E}[S_k] + X_{k+1} - \mathbf{E}[X_{k+1}])\, dP \right| \\
\leq &\left| \frac{1}{P(M_k)} \int_{M_k} (\varepsilon - \mathbf{E}[S_k])\, dP - \frac{1}{P(M_{k+1})} \int_{M_{k+1}} (\varepsilon - \mathbf{E}[S_k] + A)\, dP \right| \\
\leq &\ \varepsilon + \varepsilon + A = 2\varepsilon + A.
\end{aligned}$$

Així doncs,

$$I_2 \leq \int_{A_{k+1}} \left(|S_k| + \varepsilon + 2\varepsilon + A + |X_{k+1}^{'}| \right)^2 dP \leq (4\varepsilon + 2A)^2 P(A_{k+1}),$$

on hem fet servir que, en A_{k+1}, $|S_k| < \varepsilon$ i $|X'_{k+1}| \leq A$. En conseqüència, $-I_2 \geq -(4\varepsilon + 2A)^2 P(A_{k+1})$.
Ara, per acotar I_1, fixem-nos que

$$
\begin{aligned}
(S'_k - a_k + a_k - a_{k+1} + X'_{k+1})^2 = (S'_k - a_k)^2 + (a_k + a_{k+1})^2 + (X'_{k+1})^2 \\
+ 2(S'_k - a_k)(a_k + a_{k+1}) + 2(S'_k - a_k)(X'_{k+1}) \\
+ 2(a_k + a_{k+1})(X'_{k+1}).
\end{aligned}
$$

Observem que $\mathbf{E}[\mathbf{1}_{M_k}(S'_k - a_k)(X'_{k+1})] = 0$ i $\mathbf{E}[(a_k - a_{k+1})(X'_{k+1})] = 0$, per independència i ser centrades. També que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}[\mathbf{1}_{M_k}(S'_k - a_k)(a_k - a_{k+1})] &= (a_k - a_{k+1})\mathbf{E}[\mathbf{1}_{M_k}(S'_k - a_k)] \\
&= (a_k - a_{k+1}) \left(\int_{M_k} S'_k dP - P(M_k) \frac{1}{P(M_k)} \int_{M_k} S'_k dP \right) = 0,
\end{aligned}
$$

ja que $a_k = \frac{1}{P(M_k)} \int_{M_k} S'_k dP$. Aleshores, si suprimim el terme $(a_k - a_{k+1})^2 \geq 0$, podem acotar I_1 inferiorment per

$$
I_1 \geq \int_{M_k} (S'_k - a_k)^2 dP + \int_{M_k} (X'_{k+1})^2 dP = \int_{M_k} (S'_k - a_k)^2 dP + P(M_k)\sigma^2(X_{k+1}),
$$

on en la darrera igualtat hem utilitzat la independència de les variables. Per tant,

$$
I = \int_{M_{k+1}} (S'_{k+1} - a_{k+1})^2 dP \geq \int_{M_k} (S'_k - a_k)^2 dP + P(M_k)\sigma^2(X_{k+1}) - (4\varepsilon + 2A)^2 P(A_{k+1}). \tag{2.2}
$$

Si considerem ara $\Theta_n := \sum_{k=0}^{n-1} \int_{M_{k+1}} (S'_{k+1} - a_{k+1})^2 dP - \int_{M_k} (S'_k - a_k)^2 dP$, com que $P(M_n) \leq P(M_k)$ per tot $1 \leq k \leq n-1$, tenim

$$
\begin{aligned}
\Theta_n &\geq \sum_{k=0}^{n-1} P(M_k)\sigma^2(X_{k+1}) - (4\varepsilon + 2A)^2 P(A_{k+1}) \\
&\geq P(M_n)\sigma^2(S_n) - (4\varepsilon + 2A)^2 P(A),
\end{aligned}
$$

on hem aplicant la desigualtat (2.2). Per altra banda, la sèrie Θ_n és telescópica, per tant es cancelaran tots els termes excepte l'últim i el primer. Com que $a_0 = 0$, $S'_0 = 0$, tenim

$$
\begin{aligned}
\Theta_n &= \int_{M_n} (S'_n - a_n)^2 dP \\
&= \int_{M_n} \left(S_n - \mathbf{E}[S_n] - \frac{1}{P(M_n)} \int_{M_n} (S_n - \mathbf{E}[S_n] dP \right)^2 dP \\
&\leq \int_{M_n} (|S_n| + \varepsilon)^2 dP \leq 4\varepsilon^2 P(M_n).
\end{aligned}
$$

Aleshores, combinant les dos desigualtats, obtenim

$$
\begin{aligned}
P(M_n)\sigma^2(S_n) &\leq 4\varepsilon^2 P(M_n) + (4\varepsilon + 2A)^2 P(\Omega - M_n) \\
&\leq (4\varepsilon + 2A)^2 P(M_n) + (4\varepsilon + 2A)^2 P(\Omega - M_n) \\
&= (4\varepsilon + 2A)^2.
\end{aligned}
$$

□

Com a observació, donat que per hipòtesi $|X_n - \mathbf{E}[X_n]| \leq A$, tenim que $\mathbf{E}|X_n - \mathbf{E}[X_n]|^2 \leq A^2$ i per tant té moment de segon ordre acotat.

A partir de les dues desigualtats de Kolmogórov podem establir el següent criteri per estudiar la convergència quasi segura de sèries aleatòries:

Teorema 2.5. *(Les tres sèries de Kolmogórov) Sigui $\{X_n, n \geq 1\}$ una successió de variables aleatòries independents. Sigui $A > 0$. Definim $Y_n = X_n \mathbf{1}_{\{|X_n| \leq A\}}$.*
Aleshores $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ convergeix q.s si i només si convergeixen les tres sèries:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > A)$,

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}(Y_n)$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sigma^2(Y_n)$.

Prova. Suposem certes a), b) i c) i anem a veure que això implica la convergència q.s de $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$. Volem provar en primer lloc que $\sum_{n=1}^{\infty}(Y_n - \mathbf{E}(Y_n))$ convergeix quasi segurament. Considerem el següent conjunt

$$B = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \left\{ \left| \sum_{i=n_0}^{n} (Y_i - \mathbf{E}(Y_i)) \right| \leq \frac{1}{m} \right\},$$

és a dir que per tot $m \geq 1$ existeix un $n_0 \geq 1$ tal que per tot $n \geq n_0$ satisfà

$$\left| \sum_{i=n_0}^{n} (Y_i - \mathbf{E}(Y_i)) \right| \leq \frac{1}{m}.$$

Fixem-nos que

$$\bigcap_{n=n_0}^{\infty} \left\{ \max_{n_0 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=n_0}^{k} (Y_i - \mathbf{E}(Y_i)) \right| \leq \frac{1}{m} \right\} \subseteq \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \left\{ \left| \sum_{i=n_0}^{n} (Y_i - \mathbf{E}(Y_i)) \right| \leq \frac{1}{m} \right\}.$$

Aleshores, la probabilitat del conjunt de l'esquerra serà menor o igual que la probabilitat del conjunt de la dreta. A partir d'ara anomenem $M_n := \max_{n_0 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=n_0}^{k} (Y_i - \mathbf{E}(Y_i)) \right|$. Per la Primera desigualtat de Kolgómorov tenim

$$P\left(M_n > \frac{1}{m}\right) \leq \frac{\sigma^2 \left(\sum_{i=n_0}^{n} (Y_i - \mathbf{E}(Y_i)) \right)}{\frac{1}{m^2}}.$$

Per tant, la probabilitat del seu complementari és

$$P\left(M_n \leq \frac{1}{m}\right) \geq 1 - m^2 \sum_{i=n_0}^{n} \sigma^2(Y_i),$$

per tot $m \geq 1$. Aleshores, si fem servir aquesta desigualtat, tenim que

$$\begin{aligned} P(B) &= \lim_{m\to\infty} \lim_{n_0\to\infty} P\left(\bigcap_{n=n_0}^{\infty} \left\{ \left| \sum_{i=n_0}^{n} (Y_i - \mathbf{E}[Y_i]) \right| \leq \frac{1}{m} \right\} \right) \\ &\geq \lim_{m\to\infty} \lim_{n_0\to\infty} \left(1 - m^2 \sum_{i=n_0}^{\infty} \sigma^2(Y_i) \right). \end{aligned}$$

Per hipòtesi, la sèrie $\sum_{i=n_0}^{n} \sigma^2(Y_i)$ és convergent. Això implica que el límit en n_0 d'aquesta és zero i, aleshores,

$$P(B) \geq 1.$$

Això implica que $P(B) = 1$.
Així doncs, la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} (Y_n - \mathbf{E}(Y_n))$ convergeix quasi segurament. Per hipòtesi, la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}(Y_n)$ també és convergent. Per tant, $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ convergeix quasi segurament, tal i com volíem veure. Per a) tenim $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > A)$ convergeix. Això equival a dir que la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \neq Y_n)$ convergeix. Aleshores, per Borel Canteli tenim que $\{X_n\}$ i $\{Y_n\}$ difereixen en un nombre finit de punts i, com $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ convergeix, $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ és convergent quasi segurament.

Anem a demostrar l'altre implicació. Suposem que $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ convergeix q.s. Sigui $A > 0$. Suposem que $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > A) = \infty$. Per Borel Cantelli tenim $P(|X_n| > A$ infinites vegades$) = 1$. Però això implicaria que la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ no convergeix, cert per hipòtesi. Aleshores, $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > A)$ convergeix. Observem que pel mateix raonament d'abans, tenim que $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ és convergent.
Ara, per la segona desigualtat de Kolgómorov, tenim

$$P\left(\left\{ \max_{n_0 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=n_0}^{k} Y_i \right| \leq 1 \right\} \right) \leq \frac{(4A+4)^2}{\sum_{i=n_0}^{n} \sigma^2(Y_i)}.$$

Si la sèrie $\sum_{i=n_0}^{n} \sigma^2(Y_i)$ fos divergent, aquesta probabilitat tendiria a zero quan $n \to \infty$ per tot n_0. Això voldria dir que la resta de la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ no estaria mai acotada per 1 q.s, és a dir que no seria convergent i per tant trobem una contradicció.
Per acabar, observem que $\mathbf{E}(Y_i - \mathbf{E}(Y_i)) = 0$. Aleshores $\sum_i \sigma^2(Y_i - \mathbf{E}(Y_i)) = \sum_i \sigma^2(Y_i) < \infty$. Així doncs $\sum_i Y_i - \mathbf{E}(Y_i)$ convergeix q.s, i com $\sum_i Y_i$ és convergent, tenim que $\sum_i \mathbf{E}(Y_i)$ convergeix. $\square$

Per acabar aquest apartat, demostrarem un últim resultat respecte a sèries aleatòries i criteris de convergència.

Teorema 2.6. *Sigui $\{X_n, n \geq 1\}$ una successió de variables aleatòries independents. Suposem que $S_n \underset{p}{\to} l$. ($|l| < \infty$ q.s), aleshores*

$$S_n \underset{q.s}{\longrightarrow} l.$$

Prova. Per tot $\varepsilon > 0$ existeix un n_0 tal que per qualsevol $n \geq n_0$ es satisfà: $P(|S_n - l| > \frac{\varepsilon}{2}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tenim doncs,

$$P(|S_n - S_m| > \varepsilon) \leq P(|S_m - l| > \frac{\varepsilon}{2}) + P(|S_n - l| > \frac{\varepsilon}{2}) < \varepsilon.$$

Ara, fent servir que $|x| - |y| \leq |x - y|$, veiem que

$$\begin{aligned}
\{|S_n - S_m| > \varepsilon\} &\supset \bigcup_{k=m}^{n} \{|S_n - S_k| < \varepsilon, |S_k - S_m| > 2\varepsilon\} \\
&\supset \bigcup_{k=m}^{n} \{\max_{m<l<k} |S_l - S_m| \leq 2\varepsilon, |S_n - S_k| < \varepsilon, |S_k - S_m| > 2\varepsilon\}.
\end{aligned}$$

Fixem-nos que aquesta unió és disjunta. En efecte, si suposem que $k = k_0$, tindrem que per tot l entre m i $k_0 - 1$ es satisfà $|S_l - S_m| \leq 2\varepsilon$ i $|S_{k_0} - S_m| > 2\varepsilon$. Si fem avançar la k, $k = k_0 + 1$, aleshores el conjunt satisfà per tot l entre m i k_0 que $|S_l - S_m| \leq 2\varepsilon$, en particular $|S_{k_0} - S_m| \leq 2\varepsilon$. Amb això i la independència de les variables aleatòries tenim

$$\begin{aligned}
\varepsilon > P(|S_n - S_m| > \varepsilon) &\geq \sum_{k=m}^{n} P(\max_{m<l<k} |S_l - S_m| \leq 2\varepsilon, |S_k - S_m| > 2\varepsilon) P(|S_n - S_k| < \varepsilon) \\
&\geq \min_{m \leq k \leq n} P(|S_n - S_k| < \varepsilon) \\
&\quad \times \sum_{k=m}^{n} P(\max_{m<l<k} |S_l - S_m| \leq 2\varepsilon, |S_k - S_m| > 2\varepsilon) \\
&> (1 - \varepsilon) P(\max_{m<l<n} |S_l - S_m| > \varepsilon).
\end{aligned}$$

Així doncs,

$$\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} > P(\max_{m<l<n} |S_l - S_m| > \varepsilon).$$

Si considerem ara el conjunt

$$B := \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \left\{ \max_{n_0 \leq l \leq n} |S_l - S_m| < \frac{1}{m} \right\},$$

anàlogament a la demostració del teorema anterior, tenim que

$$P(B) \geq \lim_{m \to \infty} \left(1 - \frac{\frac{1}{m}}{1 - \frac{1}{m}} \right) = 1,$$

i això implica que S_n convergeix q.s.

$\square$

3 Convergència feble de mesures de probabilitat

Fins ara hem estudiat diferents convergències d'una successió de variables aleatòries. No obstant, en aquest apartat estudiarem aquests mateixos comportaments, però referint-nos a una successió de mesures de probabilitats sobre $\mathbb{R}$. Considerem una successió $\{\mu_n, n \geq 1\}$ de mesures de probabilitat sobre $\mathbb{R}$. El primer dubte que ens sorgeix segurament serà quan direm que μ_n convergeix cap a una mesura de probabilitats μ. Podríem pensar que la definició més natural seria dir que $\lim_{n\to\infty} \mu_n(B) = \mu(B)$ per tot $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. No obstant això, en alguns casos ens interessarà poder dir que una successió de mesures de probabilitat discretes, $\{\mu_n, n \geq 1\}$, convergeix cap a una llei contínua μ. Amb aquesta definició això no és possible, doncs si S és el conjunt numerable igual a la unió dels suports de les μ_n, tindrem $\mu_n(S) = 1$ per a tot n però $\mu(S) = 0$. Així doncs, anem a donar la definició que farem servir a partir d'ara.

Definició 3.1. Sigui $\{\mu_n, n \geq 1\}$, una successió de mesures de probabilitat sobre $\mathbb{R}$ i μ una mesura de probabilitat sobre $\mathbb{R}$. Direm que aquesta successió convergeix feblement cap a μ i escriurem $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \mu$ si

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_n(dx) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx),$$

per tota funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua i afitada.

Observació. *Generalment, si tenim $\{X_n, n \geq 1\}$ una successió de variables aleatòries, escriurem $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} X$ per dir que les lleis de les variables aleatòries de la successió X_n convergeixen cap a la llei de X.*

Fixem-nos que si $f \equiv 1$, aleshores $\mu_n(\mathbb{R}) \to \mu(\mathbb{R})$.
En aquest apartat designem $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ com el conjunt de les funcions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínues i afitades.
El següent resultat caracteritza la convergència feble en termes de les funcions de distribució F_{μ_n} i F_μ de μ_n i μ, respectivament. Aquest resultat es demostra al curs de Probabilitats i si esteu interessats en una demostració podeu consultar Teorema 11.2 del llibre Curs de Probabilitats de D. Nualart i M.Sanz. [1]

Teorema 3.2. *Considerem $F_\mu(x) := \mu((-\infty, x])$. Aleshores*

$$\mu_n \xrightarrow{w} \mu \iff F_{\mu_n}(x) \to F_\mu(x)$$

per tot punt de continuïtat de F_μ.

Observació. *D'aquest teorema es dedueix que si existeix el límit feble d'una successió μ_n, aquest és únic. En efecte, si μ i μ' són dos límits, aleshores les seves funcions de distribució han de coincidir llevat de pot ser un conjunt numerable, i com són contínues per la dreta, són iguals. Aleshores $\mu = \mu'$.*
Fixem-nos que quan parlem de convergència de la llei d'una successió de variables aleatòries cap a la llei d'una variable aleatòria, el límit no té perquè ser únic.

Presentem ara un nou concepte relatiu a les mesures de probabilitat.

Definició 3.3. Sigui $\mathcal{M}$ una família de mesures de probabilitat sobre $\mathbb{R}$.
(i) Direm que $\mathcal{M}$ és relativament compacte si tota successió d'elements de $\mathcal{M}$ té una subsuccessió que convergeix feblement.
(ii) Direm que $\mathcal{M}$ és ajustada si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un $a > 0$ tal que $\mu([-a,a]^c) < \varepsilon$ per tota $\mu \in \mathcal{M}$.

A partir d'aquesta definició i el Teorema de Helly-Bray, que veurem a continuació, es pot demostrar el que es coneix com a Teorema de Prokhorov. Aquest ens permet estudiar la relació entre una família de mesures de probabilitat relativament compacte i una ajustada. Gràcies al Teorema de Prokhorov podrem establir un nou criteri de convergència.
Anem a demostrar cadascun d'aquests resultats.

Teorema 3.4. *(Teorema de Helly-Bray) Sigui $\{F_n, n \geq 1\}$ una successió de funcions de $\mathbb{R}$, a valors en $[0,M]$, creixents i contínues per la dreta. Aleshores existeix una funció $F : \mathbb{R} \to [0,M]$ creixent i contínua per la dreta, i existeix una subsuccessió F_{n_k} tal que*

$$\lim_{n\to\infty} F_{n_k}(x) = F(x).$$

per a tot punt de continuïtat de F.

Prova. Fixem $\mathcal{D} := \{x_n, n \geq 1\}$, un subconjunt dens i numerable en $\mathbb{R}$. L'objectiu és construir una subsuccessió F_{n_k} tal que $\{F_{n_k}(x_j), k \geq 1\}$ convergeix cap a un cert límit y_j, per a tot $j \geq 1$.
Com que $0 \leq F_n(x_1) \leq M$ per tot $n \geq 1$, per ser F_n una successió creixent i acotada, existeix una subsuccessió $\{F_{1,n}(x_1)\}$ convergent cap a un límit $y_1 \in [0,M]$. Si repetim aquest argument, com que $0 \leq F_{n,1}(x_2) \leq M$ per tot $n \geq 1$, existeix una subsuccessió $\{F_{2,n}(x_2)\}$ convergent cap a un límit $y_2 \in [0,M]$. En general, com que $0 \leq F_{m,n}(x_{m+1}) \leq M$ per tot $n \geq 1$, existeix una subsuccessió $\{F_{m+1,n}(x_{m+1})\}$ convergent cap a un límit $y_{m+1} \in [0,M]$. Considerem doncs la successió $F_{n_k}(x) = F_{k,k}(x)$. Per cada $x_j \in \mathcal{D}$, la successió $F_{n_k}(x_j) = F_{k,k}(x_j)$ és una parcial de $\{F_{j,k}(x_j), k \geq 1\}$ per $k \geq j$. Per tant,

$$\lim_{n\to\infty} F_{n_k}(x_j) = y_j.$$

Definim ara la funció $F_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \to [0,M]$ com $F_{\mathcal{D}}(x_j) = y_j$. Observem que $\lim_{k\to\infty} F_{n_k}(x) = F_{\mathcal{D}}(x)$ per tot $x \in \mathcal{D}$. La funció $F_{\mathcal{D}}$ és creixent, ja que si $x \leq y$, aleshores $F_{n_k}(x) \leq F_{n_k}(y)$ per tot $k \geq 1$. Per tant, $F_{\mathcal{D}}(x) \leq F_{\mathcal{D}}(y)$.
Sigui ara $F : \mathbb{R} \to [0,M]$ definida per $F(x) = \inf\{F_{\mathcal{D}}(y) : y \in \mathcal{D}, y > x\}$. Aleshores $F(x)$ satisfà les condicions de l'enunciat. En efecte,
(1) És creixent, ja que si $x_1 \leq x_2$, aleshores $\inf\{F_{\mathcal{D}}(y) : y \in D, y > x_1\} \leq \inf\{F_{\mathcal{D}}(y) : y \in \mathcal{D}, y > x_2\}$.
(2) És contínua per la dreta, ja que si prenem una successió $\{z_n, n \geq 1\}$ decreixent cap a x, aleshores $F(z_n)$ convergeix cap a $F(x)$. En efecte, suposem que $F(z_n)$ decreix i convergeix cap a un $b > F(x)$. Per la definició de $F(x)$ existeix un $y_0 \in \mathcal{D}$ tal que $y_0 > x$ i $F_{\mathcal{D}}(y_0) > b$. Aleshores, per n prou gran, $x \leq z_n < y_0$; i en conseqüència $F(z_n) \leq F_D(y_0) < b$, que és una contradicció.
(3) Finalment, veiem que en tot punt de continuïtat de F, $\lim_{n\to\infty} F_{n_k}(x) = F(x)$. En efecte, si prenem $y \in \mathcal{D}$, $y > x$, fent servir que les funcions són creixents tindrem

$$\limsup_k F_{n_k}(x) \leq \limsup_k F_{n_k}(y) = F_{\mathcal{D}}(y),$$

ja que $\lim_{k\to\infty} F_{n_k}(x) = F_{\mathcal{D}}(x)$. Pel mateix raonament, si $x' < y < x, y \in \mathcal{D}$, aleshores

$$\liminf_{k\to\infty} F_{n_k}(x) \geq \liminf_{k\to\infty} F_{n_k}(y) = F_{\mathcal{D}}(y) \geq F(x'),$$

per la definició de $F(x')$. Com això és cert per tot $x' < x$ i F és contínua en el punt x, obtenim $\liminf_{k\to\infty} F_{n_k}(x) \geq F(x)$ i en conseqüència $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$. □

Demostrem ara el Teorema de Prokhorov.

Teorema 3.5. *(Teorema de Prokhorov) Sigui $\mathcal{M}$ una família de mesures de probabilitat en $\mathbb{R}$. Aleshores $\mathcal{M}$ és ajustada si i només si $\mathcal{M}$ és relativament compacte.*

Prova. Estudiem primer la implicació cap a la dreta. Suposem que $\mathcal{M}$ és ajustada i considerem una successió de mesures de probabilitat $\{\mu_n, n \geq 1\} \subset \mathcal{M}$. Per tot $n \geq 1$ prenem F_n, la funció de distribució de μ_n. Aleshores, pel teorema de Helly-Bray, existeix una subsuccessió de F_n, $\{F_{n_k}, k \geq 1\}$, tal que $\lim_{k\to\infty} F_{n_k}(x) = F(x)$ en tot punt de continuïtat de F, on la funció $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ és creixent i contínua per la dreta. Llavors, és suficient provar que

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \quad i \quad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1. \tag{3.1}$$

Fixem $\varepsilon > 0$ i sigui $a > 0$ tal que $\mu_n([-a,a]^c) < \varepsilon$ per tot $n \geq 1$. Sigui $b \geq a$ i $c < -a$ punts de continuïtat de $F(x)$. Aleshores

$$F_n(b) \geq \mu_n([a,a]) > 1 - \varepsilon,$$

i

$$F_n(c) \leq \mu_n([a,a]^c) < \varepsilon.$$

Si prenem el límit quan $n \to \infty$ obtenim que $F(b) > 1 - \varepsilon$ i $F(c) < \varepsilon$. Com això és cert per qualsevol $\varepsilon > 0$, aleshores (3.1) és cert.
Demostrem ara la implicació contrària. Suposem que $\mathcal{M}$ és relativament compacte. Si no fos ajustada, existiria un $\varepsilon > 0$ tal que per tot $n \geq 1$ existeix $\mu_n \in \mathcal{M}$ amb $\mu_n([-n,n]^c) \geq \varepsilon$. Per hipòtesi existirà una subsuccessió $\{\mu_{n_k}, k \geq 1\}$ tal que $\mu_{n_k} \xrightarrow[n\to\infty]{w} \mu$. Aleshores, podem considerar la funció

$$f^m(x) = [|x| - (m-1)]^+ \wedge 1.$$

Per tota $n_k \geq m$ tindrem

$$\begin{aligned} 0 < \varepsilon \leq \limsup_{k\to\infty} \mu_{n_k}([-n_k, n_k]^c) &\leq \limsup_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f^m(x) d\mu_{n_k}(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f^m(x) d\mu(x) \leq \mu([-m+1, m-1]^c). \end{aligned}$$

Si fem tendir m a infinit obtenim una contradicció ja que tindríem $\mu(\emptyset) > 0$. □

Així doncs, podem establir el següent criteri de convergència.

Teorema 3.6. *Sigui $\{\mu_n, n \geq 1\}$ una successió ajustada de mesures de probabilitat en $\mathbb{R}$ tal que totes les seves subsuccessions tenen el mateix límit μ. Aleshores*

$$\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \mu.$$

Prova. Suposem que $\{\mu_n, n \geq 1\}$ no convergeix feblement cap a μ. Aleshores ha d'existir una funció $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ tal que $\{\int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu_n(x), n \geq 1\}$ no convergeix cap a $\int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu(x)$. Això implica que existeix algun $\varepsilon > 0$ i una subsuccessió $\{\mu_{n_k}, k \geq 1\}$ tal que $|\int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu_{n_k}(x) - \int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu_(x)| \geq \varepsilon$ per tot $k \geq 1$. Però això contradiu el Teorema de Prokhorov, ja que aquest ens diu que ha d'existir una subsuccessió de $\{\mu_{n_k}, k \geq 1\}$, $\{\mu_{n_{k_i}}, i \geq 1\}$, que convergeix cap a μ i per tant no pot complir la desigualtat. □

A continuació estudiarem el Teorema de Continuïtat de Paul Lévy. Aquest estableix una relació entre la convergència feble d'una successió de mesures de probabilitat i la successió de funcions característiques associades, a la vegada que demostra que el límit d'una successió de mesures de probabilitat també és una mesura de probabilitat.

Teorema 3.7. *(Teorema de continuïtat de Paul Lévy) Sigui $\{\mu_n, n \geq 1\}$ una successió de mesures de probabilitat i $\{\varphi_{\mu_n}, n \geq 1\}$ la successió de funcions característiques associades. Aleshores*

(i) Si $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \mu$, aleshores $\lim_{n\to\infty} \varphi_{\mu_n}(t) = \varphi_\mu(t)$ per tot $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Si $\lim_{n\to\infty} \varphi_{\mu_n}(t) = \varphi(t)$, on $\varphi(t)$ és una funció contínua en el zero, aleshores $\varphi(t)$ és la funció característica d'una mesura de probabilitat μ, i $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \mu$.

Prova. L'apartat (i) és una conseqüència immediata de la definició de convergència feble, ja que les funcions $\sin(tx)$ i $\cos(tx)$ són contínues i afitades, i per tant

$$\varphi_{\mu_n}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu(x) = \varphi_\mu(t).$$

Per demostrar (ii) farem servir la desigualtat de Paul Lévy, que vam veure al primer capítol d'aquest treball, i el Teorema de Convergència Dominada. Així doncs, tenim

$$\mu_n\left(\left\{x : |x| \geq \frac{2}{a}\right\}\right) \leq \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}(1 - \varphi_{\mu_n}(t))dt.$$

Per hipòtesi, aquesta última expressió convergeix a $\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}(1-\varphi(t))dt$ quan $n \to \infty$. Fixem-nos també que

$$\lim_{a\to 0} \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}(1 - \varphi(t))dt = 2(1 - \varphi(0)) = 0,$$

on hem fet servir que φ és contínua en el zero.
Fixem $\varepsilon > 0$ i sigui $a > 0$ tal que $0 \leq \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}(1 - \varphi(t))dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$. A partir d'un cert n_0, per tot $n \geq n_0$, tindrem

$$\mu_n\left(\left[-\frac{2}{a}, \frac{2}{a}\right]^c\right) \leq \mu_n\left(\left\{x : |x| \geq \frac{2}{a}\right\}\right) \leq \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}(1-\varphi_{\mu_n}(t))dt \leq \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}(1-\varphi(t))dt + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

A més, per $1 \leq n \leq n_0$, existirà $a_n > 0$ tal que $\mu([-a_n, a_n]) \leq \varepsilon$. Per tant, si $b = \max\{a_1, ..., a_{n_0}, \frac{2}{a}\}$, tenim que $\sup_n \mu_n([-b, b]^c) \leq \varepsilon$ i per tant $\{\mu_n, n \geq 1\}$ és ajustada. Pel lema anterior, si veiem que totes les subsuccessions convergents tenen el mateix límit, igual a μ, haurem provat que μ_n convergeix feblement cap a μ. Suposem doncs que $\{\mu_{n_i}, i \geq 1\}$ és una subsuccessió convergent cap a una probabilitat ν. Per la part (i) tindrem

$$\varphi_\nu(t) = \lim_{i\to\infty} \varphi_{\mu_{n_i}}(t) = \varphi(t).$$

Això ens diu que $\varphi(t)$ és la funció característica d'una probabilitat, ja que sempre podem trobar una subsuccessió convergent, que designem per $\mu = \nu$ i totes les parcials convergent tenen límit μ, així que ja hem acabat.

$\square$

3.1 Convolucions de mesures de probabilitat

Introduïm ara un nou concepte, el de convolucions de mesures de probabilitat. Aquest jugarà un paper important a l'hora de demostrar certs teoremes límits al següent capítol i a la vegada tindrà un paper central en la definició i l'estudi de les lleis infinitament divisibles.

Definició 3.8. Siguin μ_1 i μ_2 dos mesures de probabilitat sobre $\mathbb{R}$. Aleshores definim la convolució de μ_1 i μ_2 com

$$(\mu_1 * \mu_2)(B) = \int_{\mathbb{R}} \mu_2(B - x)\mu_1(dx),$$

on $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ i $B - x = \{y : y + x \in B\}$.

Considerem ara l'aplicació $T : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, que envia (x, y) a $x + y$. Com és contínua, T és $(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. Si considerem la mesura $(\mu_1 \times \mu_2) \circ T^{-1}(\cdot)$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ induïda per T i la mesura $\mu_1 \times \mu_2$ en $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, es compleix

$$\begin{aligned} \nu(B) := (\mu_1 \times \mu_2)(T^{-1}(B)) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{T^{-1}(B)\}} d\mu_2(x) d\mu_1(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\{x : x \in B - y\}} d\mu_2(x) \right] d\mu_1(y) = \int_{\mathbb{R}} \mu_2(B - y) d\mu_1(y) = (\mu_1 * \mu_2)(B). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Per tant, $(\mu_1 * \mu_2)$ és una mesura. Fixem-nos que podríem canviar els paper de μ_2 i μ_1 i fixar primer x i veuríem $\nu(B) = (\mu_2 * \mu_1)(B)$. Per tant $\mu_1 * \mu_2 = \mu_2 * \mu_1$. Anem a veure ara que la convolució de mesures és associativa i existeix un element neutre. Siguin $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \subset \mathcal{M}$, on $\mathcal{M}$ és el conjunt de mesures de probabilitat sobre $\mathbb{R}$, aleshores

$$((\mu_1 * \mu_2) * \mu_3)(B) = \int_{\mathbb{R}} \mu_3(B - x) d(\mu_1 * \mu_2)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \mu_3(B - (x + y)) d\mu_1(x) d\mu_2(y),$$

i

$$(\mu_1 * (\mu_2 * \mu_3))(B) = \int_{\mathbb{R}} (\mu_2 * \mu_3)(B - x) d\mu_1(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu_3(B - x - y) d\mu_2(y) d\mu_1(x).$$

Amb això tenim que $(\mu_1 * \mu_2) * \mu_3 = \mu_1 * (\mu_2 * \mu_3)$. Observem que si definim $\delta_{\{0\}}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$ aquest serà l'element neutre. En efecte,

$$\delta_{\{0\}} * \mu_1(B) = \int_{\mathbb{R}} \mu_1(B - x) d\delta_{\{0\}}(x) = \int_{\mathbb{R}} \mu_1(B) = \mu_1(B).$$

Fixem-nos que la convolució de mesures de probabilitat també és una probabilitat, doncs

$$(\mu_1 * \mu_2)(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} \mu_2(\mathbb{R} - x) d\mu_1(x) = \int_{\mathbb{R}} d\mu_1(x) \mu_2(\mathbb{R}) = 1.$$

Aleshores, podem calcular la seva funció de distribució. Sigui F la funció de distribució de $\mu_1 * \mu_2$, on F_1 i F_2 son les funcions de distribució de μ_1 i μ_2 respectivament, aleshores

$$F(x) = (\mu_1 * \mu_2)\left((-\infty, x]\right) = \int_{\mathbb{R}} \mu_2\left((-\infty, x-y]\right) d\mu_1(y) = \int_{\mathbb{R}} F_2(x-y) dF_1(y). \quad (3.3)$$

Així doncs, si F_1 i F_2 són dues funcions de distribució, definim la convolució de F_2 amb F_1 com

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} F_2(x-y) dF_1(y),$$

i escrivim $F = F_1 * F_2$. La definició es dedueix de (3.3). En el cas que F sigui absolutament contínua i tingui una densitat f associada, si f_1 és la densitat associada a μ_1 i f_2 és la densitat associada a μ_2, es compleix

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\mathbb{R}} F_2(x-y) dF_1(y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{x-y} f_2(z) dz \right) f_1(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{-\infty}^{x} f_2(t-y) dt \right] f_1(y) dy = \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{\mathbb{R}} f_2(t-y) f_1(y) dy \right] dt. \end{aligned}$$

És a dir, la convolució de $\mu_1 * \mu_2$ té com a funció de densitat

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} f_2(t-y) f_1(y) dy. \quad (3.4)$$

Definim la convolució de f_2 amb f_1 com (3.4) i escrivim $f = f_1 * f_2$. Pot ser interessant tenir en compte que si X i Y son dues variables aleatòries independents absolutament contínues, la funció de densitat de $Z = X + Y$ és la convolució de les densitats de X i de Y. És a dir,

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(t-y) f_X(y) dx. \quad (3.5)$$

Per provar-ho, trobarem primer la funció de distribució de Z i, com es tracta d'una variable aleatòria absolutament contínua, la derivarem per trobar la seva densitat. Fent servir que son independents, tenim que

$$\begin{aligned} F_Z(t) = P(X + Y \leq t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t-x} f(x,y) dy dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t-x} f_X(x) f_Y(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \int_{-\infty}^{t-x} f_Y(y) dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) F_Y(t-x) dx, \end{aligned}$$

on en la darrera igualtat hem aplicat la definició de funció de distribució de Y. Ara, fent servir la derivació sota signe integral (veure [8]), si derivem respecte de t obtenim

$$\frac{d}{dt} F_Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \frac{d}{dt} F_Y(t-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(t-x) dx,$$

tal i com volíem veure.

Finalment, podem calcular la funció característica de $\mu_1 * \mu_2$.

$$\begin{aligned} \varphi_{\mu_1 * \mu_2}(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d(\mu_1 * \mu_2)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{it(x+y)} d\mu_1(x) d\mu_2(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu_1(x) \int_{\mathbb{R}} e^{ity} d\mu_2(y) = \varphi_{\mu_1}(t) \varphi_{\mu_2}(t), \end{aligned}$$

on hem fet servir a la segona igualtat el teorema de la mesura imatge.
Ara, per tot $k \geq 1$ definim el conjunt

$$\mathcal{C}_b^k = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ acotada, k-vegades derivable i amb derivades contínues i acotades}\}.$$

Per tota funció $f \in \mathcal{C}_b^k$, definim la distància entre dos mesures μ, ν com:

$$d_k(\mu;\nu) = \sup\left\{\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx) - \int_{\mathbb{R}} f(x)\nu(dx)\right|, f \in \mathcal{C}_b^k, \sum_{i=0}^{k} \|f^{(i)}\|_\infty \leq 1\right\}.$$

Aleshores podem establir els següents criteris de convergència:

Proposició 3.9. *Siguin μ_n i μ mesures de probabilitat. Aleshores*

$$\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \mu \iff \exists k \geq 1, d_k(\mu_n;\mu) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \iff \forall k \geq 1, d_k(\mu_n;\mu) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Prova. Suposem que existeix algun $k \geq 1$ tal que $d_k(\mu_n, \mu) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Anem a veure que això implica $\mu_n \longrightarrow \mu$. Sigui x un punt de continuïtat de F, on F és la funció de distribució de μ. Notem que podem trobar un conjunt de funcions $f_n(x) \in \mathcal{C}_b^\infty$ tals que

$$\mathbf{1}_{[-\infty,x]} \leq f_n(x) \leq \mathbf{1}_{[-\infty,x+\frac{1}{n}]},$$

i també funcions $g_n(x) \in \mathcal{C}_b^\infty$ tals que

$$\mathbf{1}_{[-\infty,x-\frac{1}{n}]} \leq g_n(x) \leq \mathbf{1}_{[-\infty,x]}.$$

Observem que si $d_k(\mu_n, \mu) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ tenim que $\int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu(x)$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
F\left(x - \frac{1}{n}\right) &= \mu\left(\left(-\infty, x - \frac{1}{n}\right]\right) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-\infty,x-\frac{1}{n}]} d\mu(x) \leq \int_{\mathbb{R}} g_n(x)d\mu(x) \\
&= \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x)d\mu_m(x) = \varliminf_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x)d\mu_m(x) \leq \varliminf_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-\infty,x]} d\mu_m(x) \\
&\leq \varlimsup_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-\infty,x]} d\mu_m(x) \leq \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)d\mu_m(x) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)d\mu(x) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-\infty,x+\frac{1}{n}]} d\mu(x) = F\left(x + \frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Per tant, si prenem límits en n als dos costats de la desigualtat obtenim

$$\liminf_{n\to\infty} F_{\mu_n}(x) = \limsup_{n\to\infty} F_{\mu_n}(x).$$

Així doncs $\lim_{n\to\infty} F_{\mu_n}(x) = F(x)$ per tot punt de continuïtat de $F(x)$, i pel Teorema 3.2 tenim que $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \mu$.

Suposem ara que $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \mu$. Volem demostrar la impicació contrària, és a dir veure que $\exists k \geq 1$ tal que $d_k(\mu_n, \mu) \longrightarrow 0$. Observem que com $d_1 \geq d_2 \geq ....$, si demostrem el resultat per d_1 ja haurem acabat la demostració. En efecte, provaríem la primera doble implicació i la segona surt directament, doncs d'esquerra a dreta es veuria immediatament per l'argument que acabem de dir, i de dreta a esquerra és trivial. Anem a veure-ho per d_1. Agafem un ε fix, $\varepsilon > 0$. Tenim que $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n]$ on a_n i b_n són punts de continuïtat de $F(x)$ per tot $n \geq 1$ que satisfan $b_n - a_n < \varepsilon$. Això és possible ja que els punts de discontinuïtat de $F(x)$ seran numerables, finits o no existiran. Ara, considerem una funció $f \in \mathcal{C}_b^1$ tal que $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq 1$. Aleshores, si prenem $I_k := (a_k, b_k]$ i $D_n := \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu_n(x) - \int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu(x)\right|$ tenim

$$\begin{aligned}
D_n &= \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu_n(x) + \sum_{k=1}^{\infty} f(a_k)\mu_n(I_k) - \sum_{k=1}^{\infty} f(a_k)\mu_n(I_k) - \int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu(x)\right| \\
&= \Bigg|\sum_{k=1}^{\infty}\int_{I_k}(f(x) - f(a_k)d\mu_n(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{I_k}(f(a_k) - f(x))d\mu(x) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} f(a_k)\left[\mu_n(I_k) - \mu(I_k)\right]\Bigg| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\int_{I_k}|f(x) - f(a_k)|\, d\mu_n(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{I_k}|f(x) - f(a_k)|\, d\mu(x) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty}|f(a_k)\left[\mu_n(I_k) - \mu(I_k)\right]|\,.
\end{aligned}$$

Si fem el desenvolupament de Taylor de $f(x)$ en a_k, obtenim $f(x) = f(a_k) + R_0(x)$ on $R_0(x) = f'(\alpha)(x - a_k)$ (la *resta* de Lagrange) per α entre a_k i x. Com que $\|f'\|_\infty < 1$, aleshores $|f(x) - f(a_k)| < |x - a_k| < \varepsilon$. Fent servir això, que $\mu(\mathbb{R}) < \varepsilon$ i que $\|f\|_\infty < 1$ podem seguir acotant D_n:

$$\begin{aligned}
D_n &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\int_{I_k}\varepsilon\; \mu_n(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{I_k}\varepsilon\; d\mu(x) + \sum_{k=1}^{\infty}|f(a_k)|[\mu_n(I_k) - \mu(I_k)] \\
&\leq 2\varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty}|\mu_n(I_k) - \mu(I_k)|.
\end{aligned}$$

Per tant,

$$\sup_{f\in\mathcal{C}_b^1}\left\{\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu_n(x) - \int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu(x)\right|\right\} \leq 2\varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty}|\mu_n(I_k) - \mu(I_k)|.$$

Ara, per tal d'acotar $\sum_{k=1}^{\infty}|\mu_n(I_k) - \mu(I_k)|$ notem que $|A| = 2A^+ - A$ per tot A. Així doncs

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\mu_n(I_k) - \mu(I_k)| = 2\sum_{k=1}^{\infty}[\mu_n(I_k) - \mu(I_k)]^+ - \sum_{k=1}^{\infty}[\mu_n(I_k) - \mu(I_k)].$$

El terme que s'està restant s'anularà, ja que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu_n(I_k) - \mu(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu_n(I_k) - \sum_{k=1}^{\infty}\mu(I_k) = 1 - 1 = 0.$$

Per altra banda, si considerem la funció $g_n(x) := \sum_{k=1}^{\infty} 2\left[\mu_n(I_k) - \mu(I_k)\right]^+ \mathbf{1}_{(k,k+1]}(x)$, tenim que

$$2\sum_{k=1}^{\infty}[\mu_n(I_k) - \mu(I_k)]^+ = \int_{\mathbb{R}} g_n(x)dx.$$

Per hipòtesi $g_n(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ per tot $x \in \mathbb{R}$, ja que $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \mu$. També

$$|g_n(x)| \leq \left| \sum_{k=1}^{\infty} 2\mu_n(I_k)\mathbf{1}_{(k,k+1]}(x) \right| = g(x).$$

Aleshores $\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} 2\mu_n(I_k) = 2 < \infty$; i pel Teorema de Convergència dominada,

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = 2\sum_{k=1}^{\infty}[\mu_n(I_k) - \mu(I_k)]^+ - \sum_{k=1}^{\infty}[\mu_n(I_k) - \mu(I_k)] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Així doncs,

$$\sup_{f\in\mathcal{C}_b^1} \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu_n(x) - \int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu(x) \right| \right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\varepsilon.$$

I, per tant, ja hem acabat. □

Abans de continuar, recuperem la igualtat vista a (3.2). Si utilitzem la mateixa notació que aleshores, tenim que $(\mu_1 \times \mu_2) \circ T^{-1} = \mu_1 * \mu_2$. Per tant, donada una funció $f \in \mathcal{C}_b^k$, per un $k \geq 1$ qualsevol, es satisfà

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)d(\mu_1 * \mu_2)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)d\left((\mu_1 \times \mu_2) \circ T^{-1}\right)(x).$$

Si apliquem el teorema de la mesura imatge a $(\mu_1 \times \mu_2) \circ T^{-1}$, tenim

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)d(\mu_1 * \mu_2)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)d\left((\mu_1 \times \mu_2) \circ T^{-1}\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} (f \circ T)d\mu_1(x)d\mu_2(y). \quad (3.6)$$

Així doncs, veiem una última proposició abans de passar als teoremes límit centrals.

Proposició 3.10. *Siguin $\mu_1, \mu_2, .., \mu_n$ i $\nu_1, \nu_2, .., \nu_n$ mesures de probabilitat. Aleshores*

$$d_k(\mu_1 * ... * \mu_n; \nu_1 * ... * \nu_n) \leq \sum_{i=1}^{n} d_k(\mu_i; \nu_i).$$

Prova. Demostrarem l'enunciat per inducció. Comencem estudiant el cas $n = 2$. Siguin μ_1, μ_2 i ν_1, ν_2 mesures de probabilitat. Aleshores, fent servir el que acabem de veure a (3.6), tenim

$$\begin{aligned} d_k(\mu_1 * \mu_2; \nu_1 * \nu_2) &= \sup_{f\in\mathcal{C}_b^k} \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)d(\mu_1 * \mu_2)(x) - \int_{\mathbb{R}} f(x)d(\nu_1 * \nu_2)(x) \right| \right\} \\ &\leq \sup_{f\in\mathcal{C}_b^k} \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}} f(x+y)d\mu_1(x)d\mu_2(y) - \int_{\mathbb{R}} f(x+y)d\mu_1(x)d\nu_2(y) \right| \right. \\ &+ \left. \left| \int_{\mathbb{R}} f(x+y)d\mu_1(x)d\nu_2(y) - \int_{\mathbb{R}} f(x+y)d\nu_1(x)d\nu_2(y) \right| \right\} \\ &= \sup_{f\in\mathcal{C}_b^k} \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x+y)(d\mu_2(y) - d\nu_2(y)) \right) d\mu_1(x) \right| \right. \\ &+ \left. \left| \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x+y)(d\mu_1(x) - d\nu_1(x)) \right) d\nu_2(y) \right| \right\}. \end{aligned}$$

Si apliquem la desigualtat traingular,

$$\begin{aligned} d_k(\mu_1 * \mu_2; \nu_1 * \nu_2) &\leq \int_{\mathbb{R}} \sup_{f \in \mathcal{C}_b^k} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x+y)(d\mu_2(y) - d\nu_2(y)) \right| d\mu_1(x) \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \sup_{f \in \mathcal{C}_b^k} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x+y)(d\mu_1(x) - d\nu_1(x)) \right| d\nu_2(y) \\ &= d_k(\mu_1; \nu_1) + d_k(\mu_2; \nu_2). \end{aligned}$$

Ara suposem que l'enunciat és cert per n. Estudiem el cas n+1. Siguin $\mu_1, ..., \mu_n, \mu_{n+1}$ i $\nu_1, ..., \nu_n, \nu_{n+1}$ mesures de probabilitat. Prenem $\mu = \mu_1 * ... * \mu_n$ i $\nu = \nu_1 * ... * \nu_n$. Aleshores, com ja hem demostrat el cas per n=2 i per la hipòtesi d'inducció tenim

$$\begin{aligned} d_k(\mu_1 * ... * \mu_{n+1}; \nu_1 * ... * \nu_{n+1} &= d_k(\mu * \mu_{n+1}; \nu * \nu_{n+1}) \leq d_k(\mu; \nu) + d_k(\mu_{n+1}; \nu_{n+1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} d_k(\mu_i; \nu_i) + d_k(\mu_{n+1}; \nu_{n+1}). \end{aligned}$$ □

4 Teoremes límit centrals

Sense parlar de moment de manera gaire rigorosa, podem dir que el teorema del límit central estableix la convergència en llei cap a una distribució normal de la successió de sumes de variables aleatòries independents (no necessàriament idènticament distribuïdes), amb moments de segon ordre finit. L'objectiu d'aquesta secció és estudiar diferents resultats de convergències cap a una normal. Tindrem que $X_1, ..., X_n$ seran variables aleatòries independents amb lleis associades $\mathscr{L}(X_1), ..., \mathscr{L}(X_n)$, respectivament. Observem que

$$\mathscr{L}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \mathscr{L}(X_1) * ... * \mathscr{L}(X_n), \tag{4.1}$$

on entenem que la llei de $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ és igual a la convolució de les lleis de $X_1, ..., X_n$. Per altra banda, recordem que donades dues variables aleatòries X i Y tals que $X \sim N(0, \sigma_X^2)$ i $Y \sim N(0, \sigma_Y^2)$, es satisfà que $X + Y \sim N(0, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$. Aleshores, si $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$, per tot $n \geq 1$ es compleix

$$N(0, \sigma^2) = N(0, \sigma_1^2) * ... * N(0, \sigma_n^2). \tag{4.2}$$

El següent resultat ens permetrà demostrar el primer teorema de la història sobre el Teorema Central del límit, d'Abraham de Moivre.

Proposició 4.1. *Siguin $X_1, ..., X_n$ variables aleatòries independents, centrades i acotades per C. ($|X_i| \leq C$ q.s per tot $i = 1, ..., n$). Definim $\sigma_i^2 = E[X_i^2]$ i $\sigma = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$. Aleshores*

$$d_3\left(\mathscr{L}(S_n); N\left(0, \sigma^2\right)\right) \leq \frac{C}{6}\left(1 + \sqrt{\frac{8}{\pi}}\right)\sigma^2.$$

<u>Prova</u>. Per començar, definim $Y_i \sim N(0, \sigma_i^2)$. Si $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$, tenim també $Y \sim N(0, \sigma^2)$. Aleshores, per la Proposició 3.10, utilitzant les igualtats (4.1) i (4.2), tenim

$$d_3(\mathscr{L}(S_n); N(0, \sigma^2) \leq \sum_{i=1}^{n} d_3(\mathscr{L}(X_i); N(0, \sigma_i^2)).$$

Sigui $f \in \mathcal{C}_b^3$ una funció tal que $\|f\|_\infty + \|f^{'}\|_\infty + \|f^{''}\|_\infty + \|f^{'''}\|_\infty < 1$. Si fem el desenvolupament de Taylor de $f(x)$ al voltant del zero, obtenim

$$f(x) = f(0) + f^{'}(0)x + \frac{f^{''}(0)}{2}x^2 + R_2(x),$$

on $R_2(x) = \frac{f^{'''}(\alpha)}{6}x^3$ per α entre 0 i x. Per tant, considerant variables X_i i Y_i, tindrem

$$\mathbf{E}\left[f(X_i)\right] = f(0) + \frac{\sigma_2}{2}f^{''}(0) + \mathbf{E}[R_2(X_i)],$$
$$\mathbf{E}\left[f(Y_i)\right] = f(0) + \frac{\sigma^2}{2}f^{''}(0) + \mathbf{E}[R_2(Y_i)].$$

Aleshores, per $w \in \Omega$, essent $Z(w)$ entre 0 i $X_i(w)$, i $\bar{Z}(w)$ entre 0 i $Y_i(w)$, tenim

$$\mathbf{E}\left[f(X_i) - f(Y_i)\right] = \frac{1}{6}\mathbf{E}\left[X_i^3 f^{'''}(Z) - Y_i^3 f^{'''}(\bar{Z})\right].$$

Fent servir que $\|f'''\| < 1$, tenim que

$$d_3(X_i;Y_i) \leq \frac{1}{6}\left(\mathbf{E}\left[|X_i|^3 f'''(Z)\right] + \mathbf{E}\left[|Y_i|^3 f'''(\bar{Z})\right]\right) \leq \frac{1}{6}\left(\mathbf{E}\left[|X_i|^3\right] + \mathbf{E}\left[|Y_i|^3\right]\right).$$

Per hipòtesi, $\mathbf{E}\left[|X_i|^3\right] \leq C\mathbf{E}\left[|X_i|^2\right] = C\sigma_i^2$. Per altra banda, si $Y_i \sim N(0,\sigma_i^2)$, aleshores

$$\mathbf{E}[|Y_i|] = \frac{2}{\sigma_i^2\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} y^3 e^{-\frac{y^2}{2\sigma_i^2}}\,dy = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\sigma_i^3 \leq \sqrt{\frac{8}{\pi}}C\sigma_i^2.$$

Per tant,

$$d_3(\mathscr{L}(X_i);Y_i) \leq \frac{1}{6}\left(C\sigma_i^2 + \sqrt{\frac{8}{\pi}}C\sigma_i^2\right) = \frac{C}{6}\left(1+\sqrt{\frac{8}{\pi}}\right)\sigma_i^2.$$

Finalment,

$$d_3(\mathscr{L}(S_n);N(0,\sigma^2)) \leq \frac{C}{6}\left(1+\sqrt{\frac{8}{\pi}}\right)\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = \frac{C}{6}\left(1+\sqrt{\frac{8}{\pi}}\right)\sigma^2.$$

□

Ara, enunciarem i demostrarem el primer teorema de la història sobre el teorema Central del límit. Va aparèixer per primer cop l'any 1738 a la segona edició de *The Doctrine of Chances* d'Abraham de Moivre. Aquest va descobrir que si realitzàvem n experiments de Bernoulli independents, cadascun amb probabilitat d'èxit p, la seva funció de massa de probabilitat convergia cap a una distribució normal amb esperança np i desviació típica $\sqrt{np(1-p)}$.

Teorema 4.2. *Siguin $\{X_n, n \geq 1\}$ un conjunt de variables aleatòries independents on $X_i \sim$ Bernoulli(p). Aleshores*

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n\to\infty]{w} X,$$

on $X \sim N(0,1)$.

Prova. Siguin $X_1, ..., X_n$ un conjunt de distribucions de Bernoulli independents. Aleshores podem definir

$$Y_i := \frac{X_i - p}{\sqrt{np(1-p)}},$$

per $i = 1, ..., n$, on les variables Y_i són independents, centrades i acotades, ja que

$$\left|\frac{X_i - p}{\sqrt{np(1-p)}}\right| \leq \frac{\max(p, 1-p)}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

També tenim que

$$\sigma_i^2 = \sigma^2\left(\frac{X_i - p}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \frac{1}{np(1-p)}\sigma^2(X_i) = \frac{1}{n}.$$

Per tant $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = 1$. Notem que $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i - p}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}}$. Aleshores, per la Proposició 4.1, tenim

$$d_3(\mathscr{L}(S_n), N(0,1)) \leq \frac{1}{6}\left(1+\sqrt{\frac{8}{n}}\right)\frac{\max(p,1-p)}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

□

4.1 Família triangular i sistemes infinitessimals de variables aleatòries

Considerem el següent conjunt: $\{X_{n_j}, 1 \leq j \leq k_n, k_n \to \infty\}$, on les files són variables aleatòries independents. Diem que aquest conjunt és una *família triangular* de variables aleatòries.
Estudiem ara el següent resultat.

Teorema 4.3. *(Teorema de Lindeberg). Suposem que $\{X_{n_j}, 1 \leq j \leq k_n, k_n \to \infty\}$ és una família triangular i que les variables aleatòries X_{n_j} són centrades. Si compleix:*
a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{k_n} \mathbf{E}[X_{n_j}^2] \longrightarrow \sigma^2$,
b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{k_n} \mathbf{E}[X_{n_j}^2 \mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|>\delta\}}] \longrightarrow 0$ *per tot $\delta > 0$. (Condició de Lindeberg)*
Aleshores:

$$S_n = \sum_{j=1}^{k_n} X_{n_j} \xrightarrow[n\to\infty]{w} N(0, \sigma^2).$$

<u>Prova</u>. Definim les variables aleatòries $X_{n_j\delta} = X_{n_j}\mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|\leq\delta\}}$. També definim $S_{n\delta} = \sum_{j=1}^{k_n} X_{n_j\delta}$ i $\sigma_{n\delta}^2 = \sum_{j=1}^{k_n} \sigma^2(X_{n_j\delta})$. Aleshores, si $d := d_3(\mathscr{L}(S_n); N(0,\sigma^2))$, tenim

$$\begin{aligned} d_3(\mathscr{L}(S_n); N(0,\sigma^2)) \leq{}& d_3(\mathscr{L}(S_n); \mathscr{L}(S_{n\delta} - \mathbf{E}[S_{n\delta}])) + d_3(\mathscr{L}(S_{n\delta} - \mathbf{E}[S_{n\delta}]); N(0, \sigma_{n\delta}^2)) \\ &+ d_3(N(0,\sigma_{n\delta}^2); N(0,\sigma^2)). \end{aligned}$$

Anem a veure que tots els termes d'aquesta suma tendeixen a zero. En primer lloc, fixem-nos que com $\mathbf{E}[X_{n_j}] = 0$ i $X_{n_j} = X_{n_j}\mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|\leq\delta\}} + X_{n_j}\mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|>\delta\}}$. Aleshores

$$\mathbf{E}[X_{n_j}\mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|\leq\delta\}}] + \mathbf{E}[X_{n_j}\mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|>\delta\}}] = 0. \tag{4.3}$$

Si movem un dels dos termes a l'altra banda de la igualtat, elevant tot al quadrat obtenim

$$\mathbf{E}[X_{n_j}\mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|\leq\delta\}}]^2 = \mathbf{E}[X_{n_j\delta}]^2 = \mathbf{E}[X_{n_j}\mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|>\delta\}}]^2.$$

Fent servir això, i que $X_{n_j}^2 - X_{n_j\delta}^2 = X_{n_j}^2\mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|>\delta\}}$, tenim que $\sigma^2(S_n) - \sigma^2(S_{n\delta})$ satisfà

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{j=1}^{k_n}\mathbf{E}[X_{n_j}^2] - \sum_{j=1}^{k_n}\mathbf{E}\left[X_{n_j\delta} - \mathbf{E}[X_{n_j\delta}]\right]^2 &= \sum_{j=1}^{k_n}\Big(\mathbf{E}[X_{n_j}^2] - \mathbf{E}[X_{n_j\delta}^2] + \mathbf{E}[X_{n_j\delta}]^2\Big) \\ = \sum_{j=1}^{k_n}\mathbf{E}\Big([X_{n_j}^2\mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|>\delta\}}] + \mathbf{E}[X_{n_j}\mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|>\delta\}}]^2\Big) &\leq 2\sum_{j=1}^{k_n}\mathbf{E}[X_{n_j}^2\mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|>\delta\}}] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \end{aligned}$$

per la hipòtesis b). Per tant, tenim que

$$d_3(N(0,\sigma_{n\delta}^2); N(0,\sigma^2)) \longrightarrow 0,$$

ja que $\lim_{n\to\infty}\sigma_{n\delta}^2 = \sigma^2$.
Anem a veure ara que $S_n - (S_n - \mathbf{E}[S_{n\delta}]) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} 0$. Fent servir en la primera igualtat que

$\mathbf{E}[S_n] = 0$, tenim

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[(S_n - (S_{n\delta} - \mathbf{E}[S_{n\delta}]))^2\right] &= \mathbf{E}[((S_n - S_{n\delta}) - \mathbf{E}[S_n - S_{n\delta}])^2] = \sigma^2(S_n - S_{n\delta}) \\ &= \sigma^2\left(\sum_{j=1}^{k_n}(X_{n_j} - X_{n_j\delta})\right) = \sum_{j=1}^{k_n}\sigma^2(X_{n_j} - X_{n_j\delta}) \\ &\leq \sum_{j=1}^{k_n}\mathbf{E}[(X_{n_j} - X_{n_j\delta})^2] = \sum_{j=1}^{k_n}\mathbf{E}[X_{n_j}^2\mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|>\delta\}}] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\end{aligned}$$

per la condició de Lindeberg. Finalment, com que

$$\left|X_{n_j\delta} - \mathbf{E}[X_{n_j\delta}]\right| \leq |X_{n_j\delta}| + |\mathbf{E}[X_{n_j\delta}]| < 2\delta,$$

per la Proposició 4.1, tenim

$$d_3(\mathscr{L}(S_{n\delta} - \mathbf{E}[S_{n\delta}]); N(0, \sigma_{n\delta}^2)) \leq \frac{1}{6}\left(1 + \sqrt{\frac{8}{\pi}}\right)\sigma_{n\delta}^2 2\delta.$$

Si prenem el límit superior veiem que

$$\limsup_{n\to\infty} d_3\left(\mathscr{L}(S_{n\delta} - \mathbf{E}[S_{n\delta}]); N(0, \sigma_{n\delta}^2)\right) \leq \frac{1}{6}\left(1 + \sqrt{\frac{8}{\pi}}\right)\sigma^2 2\delta$$

i per tant

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} d_3\left(\mathscr{L}(S_n); N(0, \sigma^2)\right) \leq \frac{1}{6}\left(1 + \sqrt{\frac{8}{\pi}}\right)\sigma^2 2\delta \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0.$$

□

Ara definirem un nou tipus de famílies triangulars.

Definició 4.4. Diem que una família triangular $\{X_{n_j}, 1 \leq j \leq k_n, k_n \to \infty\}$ és infinitessimal si

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leq j\leq k_n} P\left(|X_{n_j}| > \varepsilon\right) = 0, \text{ per tot } \varepsilon > 0.$$

Observem que la condició de Lindeberg implica que X_{n_j} és un sistema triangular infinitessimal. En efecte, si per tot $\varepsilon > 0$ tenim $\sum_{j=1}^{k_n}\mathbf{E}[X_{n_j}^2\mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|>\varepsilon\}}] \longrightarrow 0$, com que

$$\sum_{j=1}^{k_n}\mathbf{E}[X_{n_j}^2\mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|>\varepsilon\}}] \geq \varepsilon^2\sum_{j=1}^{k_n} P\left(|X_{n_j}| > \varepsilon\right) \geq \varepsilon^2\max_{1\leq j\leq k_n} P\left(|X_{n_j}| > \varepsilon\right) \geq 0,$$

aleshores

$$0 \leq \varepsilon^2\limsup_{n\to\infty}\max_{1\leq j\leq k_n} P\left(|X_{n_j}| > \varepsilon\right) \leq \limsup_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{k_n}\mathbf{E}[X_{n_j}^2\mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|>\varepsilon\}}] \longrightarrow 0.$$

Per tant $\max_{1\leq j\leq k_n} P\left(|X_{n_j}| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0$.

Anem a veure que, sotes certes condicions, una família triangular infinitessimal compleix també la condició de Lindeberg.

Teorema 4.5. *(Teorema de Feller). Sigui* $\{X_{n_j}, 1 \leq j \leq k_n, k_n \to \infty\}$ *una família triangular infinitessimal de variables aleatòries centrades que compleix:*

a) $\sigma^2(S_n) = \sum_{j=1}^{k_n} \mathbf{E}[X_{n_j}^2] \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma^2$,

b) $S_n = \sum_{j=1}^{k_n} X_{n_j} \xrightarrow[n\to\infty]{w} N(0, \sigma^2)$.

Aleshores, compleix la condició de Lindeberg.

Prova. Per demostrar el Teorema de Feller necessitem veure en primer lloc que

$$\sum_{j=1}^{k_n} \mathbf{E}\left[|X_{n_j}|\mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|>\varepsilon\}}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{4.4}$$

per tot $\varepsilon > 0$. Això ens permetrà veure que $\sum_{j=1}^{k_n} P(|X_{n_j}| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ per tot $\varepsilon > 0$. A la segona part de la prova demostrarem que es compleix la condició de Lienberg.
Comencem doncs demostrant (4.4). Per fer-ho, utilitzarem que si tinc una mesura sobre $\mathbb{R}$, μ, tal que $\frac{1}{|x|}$ és integrable, per la Desigualtat de Jensen es satisfà

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|} d\mu \geq \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} |x| d\mu}.$$

Aleshores, si ho apliquem a la llei de $|X_{n_j}|^2\mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|>\varepsilon\}}$, obtenim

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|} d\mathscr{L}\left(|X_{n_j}|^2\mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|>\varepsilon\}}\right) = \mathbf{E}\left[\frac{1}{|X_{n_j}|^2}\mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|>\varepsilon\}}\right] \geq \mathbf{E}\left[|X_{n_j}|^2\mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|>\varepsilon\}}\right]^{-1}.$$

Per tant,

$$\mathbf{E}\left[\frac{1}{|X_{n_j}|^2}\mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|>\varepsilon\}}\right]^{\frac{1}{2}} \mathbf{E}\left[|X_{n_j}|^2\mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|>\varepsilon\}}\right]^{\frac{1}{2}} \geq 1^{\frac{1}{2}}. \tag{4.5}$$

Amb això, anem a demostrar la primera part. Per la desigualtat de Schwarz,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[|X_{n_j}|\mathbf{1}^2_{\{|X_{n_j}|>\varepsilon\}}\right] &\leq \mathbf{E}\left[|X_{n_j}|^2\mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|>\varepsilon\}}\right]^{1/2} \mathbf{E}\left[\mathbf{1}^2_{\{|X_{n_j}|>\varepsilon\}}\right]^{1/2} \\ &\leq \mathbf{E}\left[|X_{n_j}|^2\mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|>\varepsilon\}}\right]^{1/2} P\left(|X_{n_j}| > \varepsilon\right)^{1/2} 1. \end{aligned}$$

Si fem servir que $\mathbf{E}\left[\frac{1}{|X_{n_j}|^2}\mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|>\varepsilon\}}\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{1}{\varepsilon^2}P(|X_{n_j}| > \varepsilon)\right)^{1/2}$, aplicant a 1 la desigualtat (4.5), obtenim

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[|X_{n_j}|\mathbf{1}^2_{\{|X_{n_j}|>\varepsilon\}}\right] &\leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{E}\left[|X_{n_j}|^2\mathbf{1}\{|X_{n_j}| > \varepsilon\}\right] P\left(|X_{n_j}| > \varepsilon\right) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{E}\left[|X_{n_j}|^2\right] \max_{1\leq j\leq k_n} P\left(|X_{n_j}| > \varepsilon\right). \end{aligned}$$

Ara, si ho sumem tot,

$$0 \leq \sum_{j=1}^{k_n} \mathbf{E}\left[|X_{n_j}\mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|>\varepsilon\}}\right] \leq \frac{1}{\varepsilon} \max_{1\leq j\leq k_n} P\left(|X_{n_j}| > \varepsilon\right) \sum_{j=1}^{k_n} \mathbf{E}\left[|X_{n_j}|^2\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

ja que $\max_{1\leq j\leq k_n} P(|X_{n_j}|>\varepsilon)$ tendeix a zero per ser un sistema triangular infinitessimal i $\sum_{j=1}^{k_n}\mathbf{E}[|X_{n_j}|^2]$ tendeix a $\sigma^2<\infty$.
Demostrem ara la segona part. Fixat $\delta>0$, podem definir $X_{n_j\delta}=X_{n_j}\mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|\leq\delta\}}$. Aleshores $S_{n\delta}=\sum_{j=1}^{k_n}X_{n_j\delta}$ i $\mathbf{E}[S_{n\delta}]=\sum_{j=1}^{k_n}\mathbf{E}[X_{n_j\delta}]$. Demostrarem per una banda

$$S_{n\delta}-\mathbf{E}[S_{n\delta}]\xrightarrow[n\to\infty]{w}N(0,\sigma^2), \tag{4.6}$$

i per altra banda, definint $\sigma_\delta^2:=\liminf_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{k_n}\mathbf{E}[X^2_{n_j\delta]}$, veurem que

$$S_{n\delta}-\mathbf{E}[S_{n\delta}]\xrightarrow[n\to\infty]{w}N(0,\sigma_\delta^2). \tag{4.7}$$

Aleshores per la unicitat del límit tindrem $\sigma^2=\sigma_\delta^2$ i això prova la condició de Lindeberg, doncs

$$\sum_{j=1}^{k_n}\mathbf{E}\left[|X_{n_j}|^2\mathbf{1}_{\{|X_{n_J}|>\delta\}}\right]=\sum_{j=1}^{k_n}\mathbf{E}\left[|X_{n_j}|^2\right]-\sum_{j=1}^{k_n}\mathbf{E}\left[|X_{n_j\delta}|^2\right],$$

i per tant

$$\begin{aligned}0&\leq\limsup_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{k_n}\mathbf{E}\left[|X_{n_j}|^2\mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|>\delta\}}\right]\leq\limsup_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{k_n}\mathbf{E}\left[|X_{n_j}|^2\right]-\limsup_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{k_n}\mathbf{E}\left[|X_{n_j\delta}|^2\right]\\&=\sigma^2-\sigma_\delta^2=0.\end{aligned}$$

Veiem ara (4.6). Observem que $S_{n\delta}-\mathbf{E}[S_{n\delta}]=S_{n\delta}-S_n+S_n-\mathbf{E}[S_{n\delta}]\xrightarrow[n\to\infty]{}0+X+0$, on $X\sim N(0,\sigma^2)$. En efecte, per la primera part tenim

$$\begin{aligned}P\left(|S_{n\delta}-S_n|>\varepsilon\right)&\leq P(S_{n\delta}\neq S_n)\leq P(|X_{n_J}|>\delta,\text{ per algun } j=1,...,k_n)\\&\leq\sum_{j=1}^{k_n}P(|X_{n_j}|>\delta)\xrightarrow[n\to\infty]{}0.\end{aligned}$$

Per altra banda, com que les variables X_{n_j} són centrades, es compleix novament la igualtat (4.3). Així doncs, podem veure que

$$\begin{aligned}|\mathbf{E}[S_{n\delta}]|&=\left|\sum_{j=1}^{k_n}\mathbf{E}[X_{n_j}\mathbf{1}_{\{|X_{n_J}|\leq\delta\}}]\right|=\left|\sum_{j=1}^{k_n}\mathbf{E}[X_{n_j}\mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|>\delta\}}]\right|\\&\leq\sum_{j=1}^{k_n}\mathbf{E}[|X_{n_j}|\mathbf{1}_{\{|X_{n_J}>\delta\}}]\xrightarrow[n\to\infty]{}0.\end{aligned}$$

Provem ara (4.7). Fixem-nos que l'existència de $\sigma_\delta^2=\liminf\sum_{j=1}^{k_n}\mathbf{E}[X^2_{n_j\delta}]$ implica que existeix una parcial convergent que satisfà $\sum_{j=1}^{k_{n_i}}\mathbf{E}[X^2_{n_j\delta}]\xrightarrow[n\to\infty]{}\sigma_\delta^2$. Per tant, ara podem contruir un sistema triangular $\{X_{n_j\delta}-\mathbf{E}[X_{n_j\delta}],\ j=1,..,k_{n_i},k_{n_i}\to\infty\}$. Si veiem que compleix les dos condicions del Teorema de Lindeberg:

a) $\sigma^2(S_{n\delta})=\sum_{j=1}^{k_{n_i}}\mathbf{E}[X^2_{n_j\delta}]-\mathbf{E}[X_{n_j\delta}]^2\longrightarrow\sigma_\delta^2,$

b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{k_{n_i}} \mathbf{E}\left[|X_{n_j\delta} - \mathbf{E}[X_{n_j\delta}]|^2 \mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|>\varepsilon\}}\right] \longrightarrow 0,$

tindrem $S_{n\delta} - \mathbf{E}[S_{n\delta}] \xrightarrow[n\to\infty]{w} N(0, \sigma_\delta^2)$ i ja haurem acabat. Demostrem a). De nou, si fem servir la igualtat (4.3), tenim

$$0 \leq \sum_{j=1}^{k_{n_i}} \mathbf{E}[X_{n_j\delta}]^2 = \sum_{j=1}^{k_{n_i}} \mathbf{E}[X_{n_j} \mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|>\delta\}}]^2 \leq \sum_{j=1}^{k_{n_i}} \mathbf{E}[|X_{n_j}| \mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|>\delta\}}]^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

per la primera part de la demostració. Per tant,

$$\sum_{j=1}^{k_{n_i}} (\mathbf{E}[X_{n_j\delta}^2] - \mathbf{E}[X_{n_j\delta}]^2) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma_\delta^2 + 0.$$

Ara veiem b). Per fer-ho, utilitzarem que $|X_{n_j\delta} - \mathbf{E}[X_{n_j\delta}]| < 2\delta$ i que

$$\left\{|X_{n_j\delta} - \mathbf{E}[X_{n_j\delta}]| > \varepsilon\right\} \subset \left\{|X_{n_j\delta}| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \subset \left\{|X_{n_j}| > \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

ja que $\sum_{j=1}^{k_{n_i}} |\mathbf{E}[X_{n_j\delta}]| \to 0$ quan $|\mathbf{E}[X_{n_j\delta}]| < \frac{\varepsilon}{2}$. Per tant,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{j=1}^{k_{n_i}} \mathbf{E}\left[|X_{n_j\delta} - \mathbf{E}[X_{n_j\delta}]|^2 \mathbf{1}_{\left\{\left|X_{n_j\delta} - \mathbf{E}[X_{n_j\delta}]\right| > \varepsilon\right\}}\right] \\ &\leq (2\delta)^2 \sum_{j=1}^{k_{n_i}} P\left(\left|X_{n_j\delta} - \mathbf{E}[X_{n_j\delta}]\right| > \varepsilon\right) \\ &\leq (2\delta)^2 \sum_{j=1}^{k_{n_i}} P\left(\left|X_{n_j}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \end{aligned}$$

novament per la primer part. Així doncs, $\{X_{n_j\delta} - \mathbf{E}[X_{n_j\delta}], j = 1, ..., k_{n_i}, k_{n_i} \to \infty\}$ satisfà la condició de Lindeberg i, per tant, $S_{n\delta} - \mathbf{E}[S_{n\delta}] \xrightarrow[n\to\infty]{\infty} N(0, \sigma_\delta^2)$, tal i com volíem veure. □

Per acabar aquesta secció, enunciarem i demostrarem el Teorema de Lyapunov.

Corol·lari 4.6. *(Teorema de Lyapunov). Sigui $\{X_{n_j}, j = 1, ..., k_n, k_n \to \infty\}$ un sistema triangular de variables aleatòries que satisfà:*

a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{k_n} \mathbf{E}[X_{n_j}^2] \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma^2,$

b) $\exists \delta > 0$ *tal que* $\displaystyle\sum_{j=1}^{k_n} \mathbf{E}[|X_{n_j}^{2+\delta}|] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$ *(Condició de Lyapunov)*

Aleshores

$$S_n = \sum_{j=1}^{k_n} X_{n_j} \xrightarrow[n\to\infty]{w} N(0, \sigma^2).$$

Prova: És fàcil veure que la condició de Lyapunov implica la condició de Lindeberg, doncs tenim que per tot $\varepsilon > 0$

$$\sum_{j=1}^{k_n} \mathbf{E}[|X_{n_j}|^{2+\delta}] \geq \sum_{j=1}^{k_n} \mathbf{E}[|X_{n_j}|^{2+\delta}\mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|>\varepsilon\}}] \geq \varepsilon^2 \sum_{j=1}^{k_n} \mathbf{E}[|X_{n_J}|^2 \mathbf{1}_{\{|X_{n_j}|>\varepsilon\}}] \geq 0.$$

Com el primer terme tendeix a zero per hipòtesi, ja hem acabat. □

4.2 Successions que no tendeixen cap a una normal: La Poisson composta

Sigui $\{X_n, n \geq 1\}$ una successió de variables aleatòries tals que $X_n \sim B(n, p_n)$, on $B(n, p_n)$ correspon a una Binomial de paràmetres n i p_n. Suposem que $\{p_n, n \geq 1\}$ és una successió en $[0, 1]$ tal que $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$ per algun $\lambda > 0$. Aleshores tenim que

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} Poiss(\lambda).$$

És a dir, la binomial convergeix cap a la llei de Poisson. No obstant, observem que la binomial també es pot construir com $B_n(n, p_n) = \sum_{j=1}^{n} X_{n_j}$ on $\{X_{n_j}, j = 1, ..., n; n \geq 1\}$ és un sistema triangular tal que $X_{n_j} \sim Bern(p_n)$. Aleshores, podríem fer-nos la pregunta de per què $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_{n_j}$ no convergeix cap a una distribució normal. La resposta és que no compleix la condició de Lindeberg.
L'objectiu d'ara serà estudiar la llei de Poisson composta i les seves característiques principals.

Definició 4.7. (LLei de Poisson composta). Sigui μ una mesura finita sobre $\mathbb{R}$. Per tot $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ definim

$$(Poiss(\mu))(B) = e^{-\mu(\mathbb{R})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu * ... * \mu(B)}{k!},$$

on el primer terme serà $\delta_{\{0\}}(B)$.

Observem que $e^{-\mu(\mathbb{R})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu*...*\mu(B)}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty}, \frac{\mu*...*\mu(\mathbb{R})}{k!} = 1$, en particular $Poiss(\mu)(\mathbb{R}) = 1$. També veiem que $Poiss(\mu)(B) \geq 0$ per tot $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ i $Poiss(\mu)(\emptyset) = 0$. Anem a veure que és $\sigma - additiva$. Es pot provar fàcilment degut a l'additivitat de les mesures: Suposem que tenim $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ i $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$, on $A_i \cap A_j = \emptyset$ per tot $i \neq j$. Aleshores

$$\begin{aligned} e^{-\mu(\mathbb{R})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu * ... * \mu(A)}{k!} &= e^{-\mu(\mathbb{R})} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu * ... * \mu(A_i)}{k!} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\mu(\mathbb{R})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu * ... * \mu(A_i)}{k!} = \sum_{i=1}^{\infty} Poiss(\mu)(A_i). \end{aligned}$$

Per tant, acabem de veure que és una probabilitat.
Considerem ara $\{X_n, n \geq 1\}$ una successió de variables aleatòries independents identicament distribuïdes tals que $X_n \sim \nu$. Sigui N una variable aleatòria independent de les X_n's tal que $N \sim Poiss(\lambda)$. Aleshores

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i \sim Poiss(\mu), \text{ amb } \mu = \lambda\nu.$$

En efecte, sigui $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, tenim

$$
\begin{aligned}
P(S \in B) &= P\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \in B\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \in B, N = k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \in B | N = k\right) P(N = k) = \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{k} X_i \in B\right) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu * ... * \nu(B)}{k!} \lambda^k = e^{-\mu(\mathbb{R})} \sum_{k=0}^{k} \frac{\mu * ... * \mu}{k!}(B),
\end{aligned}
$$

ja que $\mu(\mathbb{R}) = \lambda\nu(\mathbb{R}) = \lambda$ i $\lambda^k \nu * ..^{k)} .. * \nu = (\lambda\nu) * ..^{k)} .. * (\lambda\nu)$. Calculem ara la seva funció característica:

$$
\begin{aligned}
\varphi_S(t) &= \mathbf{E}[e^{itS}] = \mathbf{E}[\mathbf{E}\left[e^{itS}|N\right]] = \sum_{k=0}^{\infty} P(N = k) \mathbf{E}[e^{itS}|N = k] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \mathbf{E}\left[e^{it\sum_{i=1}^{k} X_i}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \varphi_X(t)^k = \exp\{-\lambda + \lambda\varphi_X(t)\} \\
&= \exp\left\{\int_{\mathbb{R}} (e^{itx} - 1) d\mu(x)\right\},
\end{aligned}
$$

on en la darrera igualtat hem utilitzat que $\mu(\mathbb{R}) = \lambda$ i $\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu(x)$.

Anem a estudiar algunes de les seves propietats.

Lema 4.8. *Sigui* $\{\mu_n, n \geq 1\}$ *una successió de mesures de probabilitat. Es compleix:*

1) *Si* $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \mu$, *aleshores* $Poiss(\mu_n) \xrightarrow[n\to\infty]{w} Poiss(\mu)$,

2) $Poiss(\sum_{i=1}^{n} \mu_i) = Poiss(\mu_1) * ... * Poiss(\mu_n)$,

3) $\sup_{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})} |(Poiss(\mu))(A) - \mu(A)| \leq \mu(\mathbb{R} - \{0\})^2$.

Prova. Demostrem 1). Suposem que $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \mu$. Aleshores sabem que $\varphi_{\mu_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi_{\mu}(t)$ per tot $t \in \mathbb{R}$ i $\mu_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mu(\mathbb{R})$. Per tant

$$
\varphi_{Poiss(\mu_n)}(t) = \exp\{\varphi_{\mu_n}(t) - \mu_n(\mathbb{R})\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\{\varphi_{\mu}(t) - \mu(\mathbb{R})\} = \varphi_{Poiss(\mu)}(t).
$$

Veiem 2),

$$
\begin{aligned}
\varphi_{Poiss(\sum_{i=1}^{n} \mu_i)} &= \exp\left\{\int_{\mathbb{R}} (e^{itx} - 1) d\sum_{i=1}^{n} \mu_i(x)\right\} = \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} (e^{itx} - 1) d\mu_i(x)\right\} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \varphi_{Poiss(\mu_i)}(t).
\end{aligned}
$$

i per les propietats de les funcions característiques tenim que $Poiss(\sum_{i=1}^{n} \mu_i) = Poiss(\mu_1) * ... * Poiss(\mu_n)$.
Finalment, anem a provar 3). Cal tenir en compte alguns preliminars abans de demostrar la desigualtat. En primer lloc, per $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, considerem la mesura ν que satisfà

$\nu(A) = \mu(A) - \mu(\{0\})\delta_{\{0\}}(A)$. Observem que $\nu = \mu_{|\mathbb{R}-\{0\}}$. Aleshores si $\nu(\mathbb{R}) = \varepsilon \geq 0$, treiem que $\mu(\mathbb{R} - \{0\})^2 = \nu(\mathbb{R})^2 = \varepsilon^2$. Per altra banda, tenim que que

$$1 = \mu(\mathbb{R}) = \nu(\mathbb{R}) + \mu(\{0\})\delta_{\{0\}}(\mathbb{R}) = \varepsilon + \mu(\{0\}).$$

Per tant $\mu(\{0\}) = 1-\varepsilon$. Finalment, si considerem la funció $f(x) = e^{-x}-1+x$, es compleix que $f(0) = 0$ i $f'(x) = e^{-x}+x \geq 0$. Per tant, $f(x)$ és creixent i per $\varepsilon \geq 0$ tenim $\varepsilon \geq 1-e^{-\varepsilon}$. Demostrem ara la desigualtat. Suposem primer que $((Poiss(\mu))(A)-\mu(A)) \geq 0$. Aleshores

$$0 \leq (Poiss(\mu))(A) - \mu(A)) \leq (Poiss(\nu))(A) - \nu(A) - (1-\varepsilon)\delta_{\{0\}}(A).$$

Per comoditat definim $\theta(A) = (Poiss(\nu))(A) - \nu(A) - (1-\varepsilon)\delta_{\{0\}}(A)$. Fixem-nos que

$$(Poiss(\nu))(A) = e^{-\nu(\mathbb{R})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu * ... * \nu(A)}{k!} = e^{-\varepsilon} \left(\delta_{\{0\}}(A) + \nu(A) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\nu * ..^{k)} .. * \nu(A)}{k!} \right).$$

Aleshores

$$\begin{aligned}
\theta(A) &= e^{-\varepsilon} \left(\delta_{\{0\}}(A) + \nu(A) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\nu * ..^{k)} .. * \nu(A)}{k!} \right) - \nu(A) - (1-\varepsilon)\delta_{\{0\}}(A) \\
&\leq (e^{-\varepsilon} - 1 + \varepsilon)\delta_{\{0\}}(A) + (e^{-\varepsilon} - 1)\nu(A) + e^{-\varepsilon} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \\
&= (e^{-\varepsilon} - 1 + \varepsilon)\delta_{\{0\}}(A) + (e^{-\varepsilon} - 1)\nu(A) + e^{-\varepsilon} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} - \varepsilon \right).
\end{aligned}$$

Com $\varepsilon \geq 1 - e^{-\varepsilon}$, el primer terme que acompanya $\delta_{\{0\}}(x)$ és positiu. També tenim que $e^{-\varepsilon} - 1$ és negatiu i $\nu(A) \geq 0$. Per tant, si eliminem el segon terme i substituïm $\delta_{\{0\}}(x)$ per 1, obtenim

$$\theta(A) \leq e^{-\varepsilon} - 1 + \varepsilon + e^{-\varepsilon}(e^{\varepsilon} - \varepsilon) \leq e^{-\varepsilon} - 1 + \varepsilon + 1 - e^{-\varepsilon} - \varepsilon e^{-\varepsilon} = \varepsilon(1 - e^{-\varepsilon}) \leq \varepsilon^2.$$

Suposem ara que $(\mu(A) - Poiss(\mu)(A)) \geq 0$. Raonant de forma semblant a abans, tenim que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \nu(A) + (1-\varepsilon)\delta_{\{0\}}(A) - e^{-\varepsilon} \left(\delta_{\{0\}}(A) + \nu(A) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\nu * ..^{k)} .. * \nu(A)}{k!} \right) \\
&= (1 - e^{-\varepsilon})\nu(A) + (1 - \varepsilon - e^{-\varepsilon})\delta_{\{0\}}(A) - e^{-\varepsilon} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\nu * ..^{k)} .. * \nu(A)}{k!} \\
&\leq (1 - e^{-\varepsilon})\nu(A) \leq \varepsilon\nu(A) \leq \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

on de la segona igualtat a la tercera desigualtat hem eliminat el segon terme i el tercer terme, ja que $(1 - \varepsilon - e^{-\varepsilon}) \leq 0$ per tenir $1 - e^{-\varepsilon} \leq \varepsilon$, i el tercer terme és clarament negatiu.
Per tant, $\sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} |Poiss(\mu(A)) - \mu(A)| \leq \mu(\mathbb{R} - \{0\})^2$. $\square$

Amb aquestes propietats, podem relacionar una sèrie de Poisson composta amb la llei de la suma d'una successió de variables aleatòries independents.

Proposició 4.9. *Sigui $X_1, ..., X_n$ variables aleatòries independents. Definim $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ i $\varepsilon_i = P(X_i \neq 0)$. Aleshores*

$$\theta_n := \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \left| Poiss\left(\sum_{i=1}^{n} \mathscr{L}(X_i) \right)(A) - \mathscr{L}(S_n)(A) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2.$$

Prova. En primer lloc, per la propietat 2) de la proposició anterior i per la igualtat (4.1) de l'inici d'aquest capítol, tenim

$$\theta_n = \sup_{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})} |Poiss\,(\mathscr{L}(X_1)) * ... * Poiss(\mathscr{L}(X_n))(A) - \mathscr{L}(X_1) * ... * \mathscr{L}(X_n)(A)|$$

Aleshores volem demostrar la següent desigualtat,

$$\theta_n \leq \sum_{i=1}^{n} \sup_{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})} |Poiss(\mathscr{L}(X_i))(A) - \mathscr{L}(X_i)(A)|\,. \tag{4.8}$$

Per fer la prova raonarem per inducció, de la mateixa manera que a la Proposició 3.10. Aquest cop, però, ho veurem només pel cas $n = 2$, ja que la resta de la demostració és anàloga. Definim per comoditat $\vartheta_n := \sum_{i=1}^{n} |Poiss(\mathscr{L}(X_i))(A) - \mathscr{L}(X_i)(A)|$. Estudiem doncs $\vartheta_2 = |Poiss(\mathscr{L}(X_1) + \mathscr{L}(X_2))(A) - \mathscr{L}(X_1 + X_2)(A)|$. Tenim

$$\begin{aligned}
\vartheta_2 = \Bigg| &\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_A(x+y)dPoiss(\mathscr{L}(X_1))(x)dPoiss(\mathscr{L}(X_2))(y) \\
&- \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_A(x+y)d\mathscr{L}(X_1)(x)d\mathscr{L}(X_2)(y)\Bigg| \\
= \Bigg| &\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x+y)\,(dPoiss(\mathscr{L}(X_2)(y) - d\mathscr{L}(X_2)(y))\right] dPoiss(\mathscr{L}(X_1))(x) \\
&- \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x+y)\,(d\mathscr{L}(X_1)(x) - dPoiss(\mathscr{L}(X_1))(x))\right] d\mathscr{L}(X_2)(y)\Bigg| \\
\leq &\int_{\mathbb{R}} \sup_{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})} \left\{\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x+y)\,|dPoiss(\mathscr{L}(X_2)(y) - d\mathscr{L}(X_2)(y)|\right\} dPoiss(\mathscr{L}(X_1))(x) \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \sup_{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})} \left\{\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x+y)\,|d\mathscr{L}(X_1)(x) - dPoiss(\mathscr{L}(X_1))(x)|\right\} d\mathscr{L}(X_2)(y).
\end{aligned}$$

Fixem-nos que com estem prenent el suprem de tots els $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, és indiferent prendre com a indicador $\mathbf{1}_A(z + \bullet)$ o $\mathbf{1}_A(\bullet)$. Fent servir això en els dos indicadors, tenim que

$$\begin{aligned}
\vartheta_2 \leq &\int_{\mathbb{R}} \sup_{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})} \left\{\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(y)\,|dPoiss(\mathscr{L}(X_2)(y) - d\mathscr{L}(X_2)(y)|\right\} dPoiss(\mathscr{L}(X_1))(x) \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \sup_{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})} \left\{\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x)\,|d\mathscr{L}(X_1)(x) - dPoiss(\mathscr{L}(X_1))(x)|\right\} d\mathscr{L}(X_2)(y).
\end{aligned}$$

Ara, si integrem tot, obtenim

$$\vartheta_2 \leq \sup_{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})} |Poiss(\mathscr{L}(X_2))(A) - \mathscr{L}(X_2)(A)| + \sup_{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})} |\mathscr{L}(X_1)(A) - Poiss(\mathscr{L}(X_1))(A)|,$$

tal i com volíem veure. Aleshores, per la desigualtat (4.8), utilitzant la propietat 3) de la proposició anterior, obtenim

$$\begin{aligned}
\theta_n &\leq \sum_{i=1}^{n} \sup_{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})} |Poiss(\mathscr{L}(X_i))(A) - \mathscr{L}(X_i)(A)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\mathscr{L}(X_i)(\mathbb{R} - \{0\})|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(X_i \neq 0)^2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2.
\end{aligned}$$

□

5 Lleis infinitament divisibles

Comencem aquest apartat amb una definició.

Definició 5.1. Sigui μ una mesura de probabilitat. Direm que μ és infinitament divisible si per tot $n \geq 1$ existeix una mesura de probabilitat μ_n tal que $\mu = \mu_n * ..^{n)} .. * \mu_n$. Direm que μ_n és la arrel n-èssima de μ.

Un exemple de llei infinitament divisible pot ser clarament la llei Normal, doncs si tenim $N(m, \sigma^2)$, aleshores per tot $n \geq 1$ puc construir $N(\frac{m}{n}, \frac{\sigma^2}{n})$ tal que

$$N(m, \sigma^2) = N\left(\frac{m}{n}, \frac{\sigma^2}{n}\right) * ..^{n)} .. * N\left(\frac{m}{n}, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Un altre exemple seria la distribució de Poisson, ja que si tinc una distribució de Poisson de paràmetre μ, $Poiss(\mu)$, sempre podrem expressar μ com $\mu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu}{n}$ i, pel Lema 4.8,

$$Poiss(\mu) = Poiss\left(\frac{\mu}{n}\right) * ..^{n)} .. * \left(\frac{\mu}{n}\right).$$

No obstant això, aquesta tasca no sempre serà tan fàcil. El primer objectiu d'aquest apartat és caracteritzar les lleis infinitament divisibles a partir de les seves funcions característiques.
Anem a veure que podem definir les lleis infinitament divisibles a partir de la suma d'un nombre arbitrari de variables aleatòries.

Definició 5.2. Sigui X una variable aleatòria. Direm que X té llei infinitament divisibile si i només si per tot $n \geq 1$ existeixen variables aleatòries $Y_1, ..., Y_n$ independents identicament distribuïdes tals que la llei de X es correspon a la llei de la sèrie $\sum_{i=1}^{n} Y_i$, $\mathscr{L}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)$.

Per tant, podem caracteritzar les lleis infinitament divisibles a partir de les funcions característiques, però també com a límits de sumes parcials de sistemes infinitessimals. Anem a veure que la Definició 5.2 és equivalent a la primera.

Proposició 5.3. *Sigui μ una llei de probabilitat. Aleshores μ és infinitament divisible si i només si és el límit de les sumes parcials d'un sistema triangular $\{X_{n_j}, j = 1, ..., n; n \geq 1\}$ tal que $X_{n_1}, ..., X_{n_n}$ són independents idènticaments distribuïdes per tot $n \geq 1$.*

Prova. Suposem que μ és infinitament divisible. Volem demostrar que μ és el límit de les sumes parcials d'un sistema triangular. Per definició tenim que per tot $n \geq 1$ existeix una mesura de probabilitat μ_n tal que $\mu = \mu_n * ..^{n)} .. * \mu_n$. Aleshores, podem considerar $X_{n_1}, ..., X_{n_n}$ variables aleatòries independents indenticament distribuïdes tals que $X_{n_i} \sim \mu_n$ per $i = 1, .., n$. Per tant, si $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_{n_i}$, tenim

$$\mathscr{L}\left(\sum_{i=1}^{n} X_{n_i}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{w} \mu.$$

Anem a veure la implicació contrària. Suposem que μ és el límit de les sumes parcials d'un sistema triangular. Sigui doncs S_n que satisfà $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \mu$. Si S_n convergeix a μ, podem fixar $r \geq 1$ i considerar una parcial convergent, $\{S_{n_r}, n_r \geq 1\}$, que satisfà

$$S_{n_r} = \sum_{i=1}^{n_r} X_{n_r,i} \text{ i } \mathscr{L}(S_{n_r}) \xrightarrow[n_r\to\infty]{w} \mu.$$

Aleshores podem construir

$$\begin{aligned}
\mathscr{Z}_n^{(1)} &= X_{n_r,1} + ... + X_{n_r,n},\\
\mathscr{Z}_n^{(2)} &= X_{n_r,n+1} + ... + X_{n_r,2n}\\
&\cdots\\
\mathscr{Z}_n^{(r)} &= X_{n_r,(r-1)n+1} + ... + X_{n_r,rn},
\end{aligned}$$

que són independents i indenticament distribuïdes. Si demostrem que $\mathscr{L}(\mathscr{Z}_n^{(j)})$ és ajustada, pel Teorema 3.6 tindrem que existeix una subsuccessió de $\mathscr{Z}_n^{(j)}$, $\mathscr{Z}_{n_i}^{(j)}$, tal que $\mathscr{L}(\mathscr{Z}_{n_i}^{(j)}) \xrightarrow[n_i\to\infty]{w} \nu$. Per veure que és ajustada farem servir el teorema de Prokhorov (Teorema 3.5). Aquest ens diu que serà suficient veure que és relativament compacte. Per tant, volem demostrar que per tot $\delta > 0$ existeix un $\varepsilon > 0$ tal que $\sup_n P(|\mathscr{Z}_n^{(j)}| > \varepsilon) \leq \delta$. Sigui $\delta > 0$. Com són i.i.d és suficient veure-ho per $\mathscr{Z}_n^{(1)}$. Tenim

$$\begin{aligned}
P(\mathscr{Z}_n^{(1)} > \varepsilon) = \left[P(\mathscr{Z}_n^{(1)} > \varepsilon)^r\right]^{1/r} &= \left[\prod_{j=1}^{r} P(\mathscr{Z}_n^{(j)} > \varepsilon)\right]^{1/r}\\
&= P(\mathscr{Z}_n^{(1)} > \varepsilon, ..., \mathscr{Z}_n^{(r)} > \varepsilon)^{1/r} \leq P\left(\sum_{j=1}^{r} \mathscr{Z}_n^{(j)} > r\varepsilon\right)^{1/r}\\
&= P(S_{n_r} > r\varepsilon)^{1/r}.
\end{aligned}$$

Anàlogament obtenim $P(\mathscr{Z}_n^{(1)} < -\varepsilon) \leq P(S_{n_r} < -r\varepsilon)^{1/r}$. Per tant,

$$P\left(|\mathscr{Z}^{(1)}| > \varepsilon\right) \leq P(S_{n_r} > r\varepsilon)^{1/r} + P(S_{n_r} < -r\varepsilon)^{1/r}.$$

Com $\{S_{n_r}, n_r \geq 1\}$ és convergent, pel Teorema de Prokhorov tenim que és ajustada. Així doncs existeix un $\varepsilon' > 0$ tal que que

$$\sup_{n_r} P(|S_{n_r}| > \varepsilon') \leq \left(\frac{\delta}{2}\right)^r.$$

Aleshores, prenent $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{r}$ tenim que

$$\sup_n P(|\mathscr{Z}_n^{(1)}| > \varepsilon) \leq 2\left(\frac{\delta}{2}\right)^{r\frac{1}{r}} = \delta.$$

En conseqüència, existeix una subsuccessió, $\mathscr{Z}_{n_i}^{(j)}$, de $\mathscr{Z}_n^{(j)}$ tal que $\mathscr{L}(\mathscr{Z}_{n_i}^{(j)}) \xrightarrow[n_i\to\infty]{w} \nu$ per tot j=1,...,r. Amb això veiem que ja hem acabat, doncs

$$\mathscr{L}(\mathscr{Z}_{n_i}^{(1)}) * ... * \mathscr{L}(\mathscr{Z}_{n_i}^{(r)}) = \mathscr{L}(S_{n_i,r}) \xrightarrow[n_i\to\infty]{w} \mu = \nu * ..^{k)} .. * \nu.$$

□

Abans de continuar recordem un lema tècnic d'anàlisi, que ens serà útil per demostrar algunes propietats de les lleis infinitament divisibles.

Lema 5.4. *Sigui $f : [-T, T] \longrightarrow \mathbb{C}$, per $0 \leq T \leq \infty$, una funció contínua tal que $f(0) = 1$ i $f(t) \neq 0$ per tot t, aleshores existeix una única funció $\lambda : [-T, T] \longrightarrow \mathbb{C}$ contínua que satisfà $\lambda(0) = 0$ i $e^{\lambda(t)} = f(t)$.*

La demostració d'aquest lema podeu trobar-la al capítol 17 de la referència [3].
També ens interessarà desenvolupar algunes propietats de les funcions característiques d'una llei infinitament divisible.
Observem que si $\varphi_\mu(t)$ i $\varphi_\nu(t)$ són les funcions característiques de dues lleis infinitament divisibles, μ i ν respectivament, aleshores $\varphi_\mu(t)\varphi_\nu(t)$ serà la funció característica de $\mu * \nu$, que també és infinitament divisible. Si μ i ν son infinitament divisibles, per definició tenim que per tot $n \geq 1$ existexen mesures de probabilitat μ_n i ν_n tals que $\mu = \mu_n * ..^{n)} .. * \mu_n$ i $\nu = \nu_n * ..^{n)} .. * \nu_n$. Per tant,

$$\varphi_\mu = \varphi_{\mu_n}^n \quad i \quad \varphi_\nu = \varphi_{\nu_n}^n.$$

També veiem que

$$\varphi_\mu(t)\varphi_\nu(t) = \varphi_{\mu_n}^n(t)\varphi_{\nu_n}^n(t) = \varphi_{\mu_n * \nu_n}^n(t) = \varphi_{\mu * \nu}(t).$$

Per altra banda, observem que $\overline{\varphi_\mu}(t) = \varphi_\mu(-t)$ també serà la funció característica d'una llei infinitament divisible. Així doncs, es complirà

$$\overline{\varphi_\mu}(t) = \overline{\varphi_{\mu_n}}(t)^n.$$

Finalment, notem que $|\varphi_\mu(t)|^2$ serà la funció característica d'una llei infinitament divisible, ja que $|\varphi_\mu(t)|^2 = \varphi_\mu(t)\overline{\varphi_\mu(t)}$.
Ara estudiem les següents propietats de les lleis infinitament divisibles.

Proposició 5.5. *Sigui μ una llei infinitament divisible i φ_μ la seva funció característica, aleshores es verifica*
1) $\varphi_\mu(t) \neq 0$ per tot $t \in \mathbb{R}$,
2) Si μ_n és la seva arrel n-èssima, aleshores μ_n és única,
3) Si μ_n és la seva arrel n-èssima, aleshores $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \delta_{\{0\}}$,
4) Si $\{\nu_n, n \geq 1\}$ és una successió de mesures de probabilitat infinitament divisibles i $\nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \nu$, aleshores ν és infinitament divisible.

<u>Prova</u>. Demostrem 1). Acabem de veure $|\varphi_\mu(t)|^2$ és la funció característica d'una llei infinitament divisible, ja que $|\varphi_\mu(t)|^2 = \varphi_\mu(t)\overline{\varphi_\mu(t)}$. Si veiem que $|\varphi_\mu(t)|^2 \neq 0$, aleshores tindrem que $\varphi_\mu(t) \neq 0$. Per facilitar la notació, definim $\psi(t) := |\varphi_\mu(t)|^2$. Com que $\psi(t)$ és infinitament divisible, aleshores $\psi(t)^{1/n}$ també ho és. A més, tenim que

$$\psi(t)^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{1}_{\{|\psi(t)|>0\}},$$

ja que les funcions característiques estan acotades per 1 i

$$\lim_{n\to\infty} \log(\psi(t)^{1/n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(\psi(t)) = 0.$$

Fixem-nos que per ser una funció característica, $\psi(0) = 1 > 0$ i per tant $\mathbf{1}_{\{\psi(t)>0\}}(0) = 1$. Això també significa que existex un entorn $\mathcal{U}$ de 0 on $\psi(t) > 0$. Aleshores per tot $t' \in \mathcal{U}$ $\mathbf{1}_{\{\psi(t)>0\}}(t') = 1$, i per tant $\mathbf{1}_{\{\psi(t)>0\}}(t)$ és contínua en un entorn del zero. Pel teorema de Paul-Lèvy tenim que $\mathbf{1}_{\{\psi(t)>0\}}$ és una funció característica. Les funcions característiques són uniformement contínues i, com en zero tenim $\mathbf{1}_{\{\psi(t)>0\}}(0) = 1$, això implica que $\mathbf{1}_{\{\psi(t)>0\}}(t) \equiv 1$ per tot t. Així doncs, $\psi(t) > 0$ per tot t i, en conseqüència, $\varphi_\mu(t) \neq 0$ per tot t.

Demostrem 2). Suposem que μ_n és una arrel n-èssima de μ. Per la propietat 1) tenim que $\varphi_\mu(t) \neq 0$ per tot t. Aleshores, pel Lema 5.4, existeix una única funció $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ contínua, tal que $\lambda(0) = 0$ i $\varphi_\mu(t) = e^{\lambda(t)}$. Fixem-nos que $\varphi_{\mu_n}(t) \neq 0$ per tot $t \in \mathbb{R}$, ja que $\varphi_\mu(t) = \varphi_{\mu_n}(t)^n$ i $\varphi_\mu(t) \neq 0$ per tot t. Això implica que existeix una única aplicació $\lambda_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ contínua, tal que $\lambda_n(0) = 0$ i $\varphi_{\mu_n}(t) = e^{\lambda_n(t)}$. Per tant $e^{\lambda(t)} = e^{n\lambda_n(t)}$. Tenim de fet que $\lambda_n(t) = \frac{\lambda(t)}{n}$ i aquesta és única, i amb això ja tenim determinada de manera única l'arrel n-èssima de μ.

Demostrem 3). Acabem de veure que si μ_n és una arrel n-èssima de μ, aleshores tenim que $\varphi_\mu(t) = e^{\lambda(t)}$ i que $\varphi_{\mu_n}(t) = e^{\frac{\lambda(t)}{n}}$. Així doncs $\varphi_{\mu_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^0 = 1 = \varphi_{\delta_{\{0\}}}(t)$.

Finalment, demostrem 4). Suposem que $\nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \nu$ on ν_n són lleis infinitament divisibles. Aleshores, per la Proposició 5.3, existeix un sistema triangular $\{X_{n_j}, j = 1, ..., n, n \geq 1\}$ tal que $S_n = \sum_{j=1}^n X_{n_j} \sim \nu_n$. Per tant, $\nu_n \sim \sum_{j=1}^n X_{n_j} \xrightarrow[n\to\infty]{w} \nu$. Aleshores, novament per la Proposició 5.3, tenim que ν és infinitament divisible.

□

El següent resultat estableix una relació entre les lleis infinitament divisibles i la llei de Poisson composta.

Proposició 5.6. *μ és una llei infinitament divisible si i només si és el límit feble d'una llei de Poisson composta.*

Prova. La implicació de dreta a esquerra és trivial, doncs a l'inici d'aquesta secció ja hem vist que la Poisson composta és una llei infinitament divisible.
Anem a veure la implicació contrària. Si μ és infinitament divisible, aleshores per tot $n \geq 1$ existeix una mesura de probabilitat μ_n tal que $\mu = \mu_n * ..^{n)}.. * \mu_n$. Acabem de veure que si μ_n és una arrel n-èssima de μ, tenim que existeix una aplicació $\lambda(t)$ tal que $\varphi_\mu(t) = e^{\lambda(t)}$ i $\varphi_{\mu_n}(t) = e^{\frac{\lambda(t)}{n}}$. Considerem la llei de Poisson Composta $Poiss(n\mu_n)$. Volem veure que $\varphi_{Poiss(n\mu_n)}(t) = \varphi_\mu(t)$. En efecte,

$$\begin{aligned}
\varphi_{Poiss(n\mu_n)}(t) &= \exp\left\{\int_{\mathbb{R}} (e^{itx} - 1) n d\mu_n(x)\right\} = \exp\left\{n\left(\varphi_{\mu_n}(t) - 1\right)\right\} \\
&= \exp\left\{n\left(e^{\frac{\lambda(t)}{n}} - 1\right)\right\} = \exp\left\{n\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(t)^k}{n^k k!} + 1 - 1\right)\right\} \\
&= \exp\left\{\left(\lambda(t) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda(t)^k}{k! n^{k-1}}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Observem que $\sum_{k=2}^\infty \frac{\lambda(t)^k}{k!n^{k-1}} = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^\infty \frac{\lambda(t)^k}{k!n^{k-2}}$ tendeix a zero quan n tendeix a infinit, ja que la suma és finita. Per tant

$$\varphi_{Poiss(n\mu_n)}(t) = \exp\left\{\left(\lambda(t) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda(t)^k}{k! n^{k-1}}\right)\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\lambda(t)} = \varphi_\mu(t).$$

□

5.1 Teorema de Lévy-Khintchine

La resta d'aquest apartat el dedicarem a demostrar el teorema de Lévy-Khintchine. Per fer-ho, necessitem donar algunes definicions noves i posteriorment demostrar dos lemes que ens permetran provar el teorema.

Definició 5.7. Sigui μ una mesura sobre $\mathbb{R}$ no necessàriament finita. Diem que μ és una mesura de Lévy si:
a) $\mu(\{0\}) = 0$,
b) $\int_{\mathbb{R}}(x^2 \wedge 1)d\mu < \infty$.

Hi ha algunes definicions equivalents que poden ser interessants tenir en compte.

Proposició 5.8. *b) és equivalent a:*

i) Existeix un $\varepsilon > 0$ *tal que* $\mu(\{|x| > \varepsilon\}) < \infty$ *i* $\int_{|x|\leq\varepsilon} x^2 d\mu < \infty$.
ii) Per tot $\varepsilon > 0$, $\mu(\{|x| > \varepsilon\}) < \infty$ *i* $\int_{|x|\leq\varepsilon} x^2 d\mu < \infty$.
iii) $\int_{\mathbb{R}} \frac{x2}{1+x^2} d\mu < \infty$.

<u>Prova</u>. Veiem en primer lloc que $b)$ implica $i)$. Prenent $\varepsilon = 1$ tenim que $(x^2 \wedge 1) = x^2$ si $|x| \leq 1$ i $(x^2 \wedge 1) = 1$ si $|x| > 1$. Aleshores,

$$\mu(\{|x| > 1\}) = \int_{\{|x|>1\}} d\mu \leq \int_{\mathbb{R}} (x^2 \wedge 1)d\mu < \infty.$$

Per altra banda,

$$\int_{\{|x|\leq 1\}} x^2 d\mu = \int_{\{|x|\leq 1\}} (x^2 \wedge 1)d\mu \leq \int_{\mathbb{R}} (x^2 \wedge 1)d\mu < \infty.$$

Mirem ara que $i)$ implica $ii)$. Suposem que existeix un $\varepsilon > 0$ que satisfà $i)$. Sigui ara $\varepsilon_1 > 0$. Si $\varepsilon_1 > \varepsilon$, aleshores $\{|x| > \varepsilon_1\} \subset \{|x| > \varepsilon\}$. Per tant,

$$\mu(\{|x| > \varepsilon_1\}) \leq \mu(\{|x| > \varepsilon\}) < \infty.$$

Per altra banda, tindrem

$$\begin{aligned}\int_{\{|x|\leq\varepsilon_1\}} x^2 d\mu &= \int_{\{|x|\leq\varepsilon\}} x^2 d\mu + \varepsilon_1^2 \int_{\{\varepsilon<|x|\leq\varepsilon_1\}} \frac{x^2}{\varepsilon_1^2} d\mu \\ &\leq \int_{\{|x|\leq\varepsilon\}} x^2 d\mu + \varepsilon_1^2 \mu(\{\varepsilon < |x| \leq \varepsilon_1\}) < \infty.\end{aligned}$$

Suposem ara que $\varepsilon > \varepsilon_1$. Aleshores $\{|x| < \varepsilon_1\} \subset \{|x| < \varepsilon\}$ i, per tant,

$$\int_{\{|x|<\varepsilon_1\}} x^2 d\mu \leq \int_{\{|x|<\varepsilon\}} x^2 d\mu < \infty.$$

A més,

$$\begin{aligned}\mu(\{|x| > \varepsilon_1\}) = \mu(\{|x| > \varepsilon\}) + \mu(\{\varepsilon_1 < |x| \leq \varepsilon\}) &\leq \mu(\{|x| > \varepsilon\}) + \int_{\{\varepsilon_1<|x|\leq\varepsilon\}} \frac{x^2}{\varepsilon_1^2} d\mu \\ &< \mu(\{|x| > \varepsilon\}) + \frac{1}{\varepsilon_1^2} \int_{\{|x|\leq\varepsilon\}} x^2 d\mu < \infty.\end{aligned}$$

Si $\varepsilon_1 = \varepsilon$ és clar que ε_1 satisfà l'enunciat ja que ε ho fa per hipòtesi.
Anem a provar que $ii)$ implica $b)$. Ho podem veure directament, doncs prenent $\varepsilon = 1$ tenim

$$\int_{\mathbb{R}} (x^2 \wedge 1)d\mu(x) = \int_{[-1,1]^c} 1 d\mu(x) + \int_{[-1,1]} x^2 d\mu(x) = \mu(\{|x| > 1\}) + \int_{\{|x|\leq 1\}} x^2 d\mu(x) < \infty.$$

També és clar que $b)$ implica $iii)$. Fixem-nos que $\frac{x^2}{1+x^2} < 1$ i $\frac{x^2}{1+x^2} \leq x^2$, per tant $\frac{x^2}{1+x^2} \leq (1 \wedge x^2)$. Tenim doncs

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+x^2} d\mu(x) \leq \int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2) d\mu(x) < \infty.$$

Finalment, suposem que $\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+x^2} d\mu(x) < \infty$. Si $|x| > 1$, aleshores

$$\frac{x^2}{1+x^2} \geq \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Si $|x| \leq 1$, aleshores

$$\frac{x^2}{1+x^2} \geq \frac{x^2}{2}.$$

Amb això tenim que $\frac{1}{2}(1 \wedge x^2) \leq \frac{x^2}{1+x^2}$ i, en conseqüència,

$$\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2) d\mu(x) \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+x^2} < \infty.$$

Acabem de veure que $iii)$ implica $b)$, i ja hem acabat. $\square$

Definim un segon concepte.

Definició 5.9. Direm que $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és un centrament si α és contínua i existeix un entorn $\mathcal{U}$ al voltant del zero i una constant C tal que

$$|\alpha(x) - x| \leq Cx^2 \tag{5.1}$$

per tot $x \in \mathcal{U}$.

Un exemple de centrament és la funció $\alpha(x) = \frac{x}{1+x^2}$, doncs

$$|\alpha(x) - x| = \left| \frac{x}{1+x^2} - x \right| = \left| \frac{x^2}{1+x^2} \right| \leq x^2.$$

Un altre cas seria $\alpha(x) = x\mathbf{1}_{[-1,1]}(x) + \mathbf{1}_{(-\infty,-1)}(x) + \mathbf{1}_{(1,\infty)}(x)$, ja que $|\alpha(x) - x| \leq 0$ per tot $x \in [-1, 1]$.

Introduïm ara les $CPoiss(\mu)$.

Definició 5.10. Sigui μ una mesura de Lèvy. Per tot $\varepsilon > 0$ considerem $\mu_\varepsilon(x) = \mu(\{|x| > \varepsilon\})$ i $C_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} \alpha(x) d\mu_\varepsilon(x) = \int_{\{|x|>\varepsilon\}} \alpha(x) d\mu(x)$, on $\alpha(x)$ és un centrament. Aleshores el límit feble de $\delta_{C_\varepsilon} * Poiss(\mu_\varepsilon)$ que satisfà

$$\delta_{C_\varepsilon} * Poiss(\mu_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{w} CPoiss(\mu).$$

convergeix a una probabilitat que definim com $CPoiss(\mu)$.

Anem a veure que, en efecte, la $CPoiss(\mu)$ està ben definida.

Proposició 5.11. *$\delta_{C_\epsilon} * Poiss(\mu)$ convergeix feblement cap a una probabilitat.*

Prova. Per demostrar la proposició utilitzarem el Teorema de continuïtat de Paul Lévy. Així doncs, estudiarem primer el límit de la funció característica de $\delta_{C_\varepsilon} * Poiss(\mu_\varepsilon)$ i després caldrà veure que el límit és continu en el 0.
Estudiem la convergència de la funció característica.

$$\begin{aligned}
\varphi_{\delta_{C_\varepsilon} * Poiss(\mu_\varepsilon)(x)}(t) &= e^{-itC_\varepsilon} \exp\left\{\int_{\mathbb{R}} (e^{itx} - 1) d\mu_\varepsilon(x)\right\} \\
&= \exp\left\{-it\int_{\mathbb{R}} \alpha(x) d\mu_\varepsilon(x) + \int_{\mathbb{R}} (e^{itx} - 1) d\mu_\varepsilon(x)\right\} \\
&= exp\left\{\int_{\{|x|>\varepsilon\}} (e^{itx} - 1 - it\alpha(x) d\mu(x)\right\}.
\end{aligned}$$

Notem que $g_\varepsilon(x) = \mathbf{1}_{\{|x|>\varepsilon\}}(e^{itx} - 1 - it\alpha(x))$ convergeix puntualment cap a $g(x) = (e^{itx} - 1 - it\alpha(x))\mathbf{1}_{\{|x|>0\}}$ si $\varepsilon \to 0$. Per demostrar la convergència uniforme necessitem aplicar el Teorema de Convergència Dominada. Per tant, cal veure que $g(x)$ és mesurable i acotar $g_\varepsilon(x)$ per una funció integrable. Clarament $g_\varepsilon(x) \leq g(x)$, per tant és suficient veure que $g(x)$ és integrable. Recordem que μ és una mesura de Lévy, i per definició satisfà que $\mu(\{0\}) = 0$ i que $\int_{\mathbb{R}}(x^2 \wedge 1) d\mu < \infty$. Hem de veure que $(e^{itx} - 1 - it\alpha(x))$ és integrable respecte aquesta mesura. Necessitem distingir dos casos: Quan $|x| < 1$ i quan $|x| \geq 1$. Fixem t.
Si $|x| \geq 1$, tenim que

$$|e^{itx} - 1 - it\alpha(x)| \leq |e^{itx}| + |1| + |it\alpha(x)| \leq 1 + 1 + |t||\alpha(x)|. \tag{5.2}$$

Fixem-nos que per $|x| \geq 1$, tenim $|\alpha(x)| \leq |\alpha(x) - x| + |x| \leq Cx^2 + x^2 = Kx^2$, per ser un centrament. Així doncs $|e^{it_n x} - 1 - it\alpha(x)| \leq 2 + |t|Kx^2$, que és integrable respecte de μ.
Si $|x| < 1$,

$$|e^{itx} - 1 - it\alpha(x)| = |e^{itx} - 1 - itx + itx - it\alpha(x)| \leq |e^{itx} - 1 + itx| + |it(x - \alpha(x))|.$$

Respecte el primer terme,

$$|e^{itx} - 1 - itx| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(itx)^k}{k!} - 1 - itx\right| = \left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(itx)^k}{k!}\right| = x^2 \left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(it)^k x^{k-2}}{k!}\right| \leq x^2 K_1.$$

Respecte el segon,

$$|it(x - \alpha(x)| \leq |t|Cx^2,$$

ja que $\alpha(x)$ és un centrament. Per tant,

$$|e^{itx} - 1 - it\alpha(x)| \leq K_1 x^2 + |t|Cx^2 \leq Kx^2.$$

És a dir, quan $|x| < 1$ tenim que $(e^{itx} - 1 - it\alpha(x))$ també està acotada per una funció mesurable respecte la mesura de Lévy. Així doncs, $g(x)$ està acotada per una funció integrable respecte la mesura de Lévy per tot $x \in \mathbb{R}$. Per tant, pel Teorema de Convergència Dominada, tenim que

$$\int_{\{|x|>\varepsilon\}} (e^{itx} - 1 - it\alpha(x) d\mu(x) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_{\mathbb{R} - \{0\}} (e^{itx} - 1 - it\alpha(x) d\mu(x),$$

però $\mu(\{0\}) = 0$. És a dir, la funció característica de $\delta_{C_\varepsilon} * Poiss(\mu_\varepsilon)$ convergeix cap a $\phi(t) = \exp\{\int_{\mathbb{R}}(e^{itx} - 1 - it\alpha(x)) d\mu(x)\}$. Per acabar, necessitem veure que $\phi(t)$ és contínua en el zero. Considerem doncs una successió $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$ i $T = \sup_n |t_n| < \infty$. Tenim que $\phi(t_n) \longrightarrow \phi(0)$ si i només si

$$\int_{\mathbb{R}} (e^{itx} - 1 - it\alpha(x))d\mu(x) \longrightarrow 0 = \int_{\mathbb{R}} (e^0 - 1 - 0)d\mu(x). \tag{5.3}$$

Per veure que es satisfà (5.3), agafem les funcions $f_n(x) = e^{it_n x} - 1 - it_n\alpha(x)$. Clarament $f_n(x) \to f(x) = 0$ si $n \to \infty$ per tot x. Si apliquem el Teorema de Convergència Dominada veurem que $\phi(t)$ és contínua en el zero. És evident que $f(x) \equiv 0$ és mesurable respecte μ, ja que una mesura de Lévy satisfà $\mu(\{0\}) = 0$. Només falta acotar $f_n(x)$ per una funció integrable respecte μ. Novament necessitem distingir els casos on $|x| \geq 1$ i $|x| < 1$.
Si $|x| \geq 1$, tenim que

$$|e^{it_n x} - 1 - it_n\alpha(x)| \leq |e^{it_n x}| + |1| + |it_n\alpha(x)| \leq 1 + 1 + T|\alpha(x)|,$$

i pel mateix raonament que a (5.2) es veu que $2 + T|\alpha(x)|$ és integrable respecte μ.
Si $|x| < 1$, aleshores

$$\begin{aligned}|e^{it_n x} - 1 - it_n\alpha(x)| \leq |e^{it_n x} - 1 - it_n x| + |it_n(\alpha(x) - x)| &\leq \left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(it_n x)^k}{k!}\right| + |TCx^2| \\ &\leq x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^{k+2}|x|^k}{(k+2)!} + TCx^2 \leq x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^{k+2}|\delta|^k}{(k+2)!} + TCx^2 \\ &\leq x^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^{k+2}|\delta|^k}{(k+2)!} + TC \right) \leq Kx^2;\end{aligned}$$

que també és integrable. Així doncs, per tot n podem acotar $|f_n(x)|$ per una funció integrable respecte de μ, i pel Teorema de la Convergència Dominada tenim que

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)d\mu(x) \longrightarrow 0,$$

i en conseqüència $\phi(t)$ és contínua en el zero. Pel Teorema de continuïtat de Paul Lévy podem concloure que $\phi(t)$ és la funció característica d'una probabilitat, la $CPoiss(\mu)$, i que

$$\delta_{C_\varepsilon} * Poiss(\mu_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{w} CPoiss(\mu).$$

□

Ara només ens queda demostrar dos lemes tècnics per poder enunciar i demostrar el Teorema de Lévy-Khintchine.

Lema 5.12. *Sigui ν una llei infinitament divisible i ν_n la seva arrel n-èssima. Aleshores*

$$\limsup_{n\to\infty} n\nu_n([-a, a]^c) \leq \alpha a \int_0^{1/a} |Re(log(\varphi(u)))|du$$

per tot $a > 0$, on α és una constant universal.

<u>Prova</u>. Abans de començar, considerem la funció $\lambda(t)$ que satisfà $\varphi_\nu(t) = e^{\lambda(t)}$. Observem que $\log(\varphi_\nu(t)) = \lambda(t)$. Recordem que si $z = a + ib \in \mathbb{C}$, es compleix $e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a(\cos(b) + i\sin(b))$. Així doncs $|e^z| = e^a$ i per tant tenim que

$$1 \geq |\varphi_\nu(t)| = |e^{\lambda(t)}| = e^{Re(\lambda(t))}.$$

D'aquí deduïm que $Re(\lambda(t)) \leq 0$, és a dir, $|Re(\lambda(t)| = -Re(\lambda(t))$.
Provem ara que

$$\lim_{n\to\infty} n[\varphi_{\nu_n}(t) - 1] = \lambda(t)$$

uniformement en tot interval tancat I. En efecte, tenim que

$$n(\varphi_{\nu_n}(t) - 1) = n(e^{\frac{1}{n}\lambda(t)} - 1) = \lambda(t) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda(t)^k}{k!n^{k-1}}.$$

Aleshores, si prenem I un interval tancat,

$$\begin{aligned}\sup_{t\in I} \left|n(\varphi_{\nu_n}(t) - 1) - \lambda(t)\right| &\leq \sup_{t\in I} \left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda(t)^k}{n^{k-1}} \frac{1}{k!}\right| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{M^k}{n^{k-1}(k)!} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k M^2}{n^k (k+2)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

on $M = \sup_{t\in I}|\lambda(t)|$. Per tant, acabem de veure que convergeix uniformement. D'aquí es pot veure que

$$n(Re(\varphi_{\nu_n})(t) - 1) \xrightarrow[n\to\infty]{} Re(\lambda(t)). \tag{5.4}$$

Ara, pel Corol·lari 1.3, existeix un $\alpha \in (0, \infty)$ tal que

$$n\nu_n([-a, a]^c) \leq n\alpha a \int_0^{1/a} (1 - Re(\varphi_{\nu_n}(t))dt.$$

Combinant aquesta desigualtat amb el límit (5.4), obtenim

$$n\nu_n([-a, a]^c) \leq n\alpha a \int_0^{1/a} (1 - Re(\varphi_{\nu_n}(t))dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha a \int_0^{1/a} |Re(\lambda(t))|dt.$$

□

Estudiem el següent lema.

Lema 5.13. *Sigui ν una llei infinitament divisible i ν_n la seva arrel n-èssima. Aleshores*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{[-1,1]} x^2 n\nu_n(dx) < \infty.$$

<u>Prova</u>. Per començar, fem el desenvolupament de Taylor de $1 - \cos(x)$ al voltant del zero. Tenim

$$1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + R_4(x). \quad \text{on} \quad R_4(x) = \frac{sin(c)}{5!}(x)^5$$

i c és un punt entre 0 i x. Aleshores $\sin(c)$ té el mateix signe que $\sin(x)$, que és el mateix que el de x^5. Per tant $R_4(x) \geq 0$ i d'aquí treiem que

$$1 - \cos(x) \geq \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} = x^2(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4!}) \geq x^2(\frac{1}{2} - \frac{1}{4!}) = \beta x^2$$

ja que si $x \in [-1, 1]$ aleshores $x^2 \leq 1$. Així doncs,

$$(1-Re(\varphi_{\nu_n}(1))) = \int_{\mathbb{R}} (1-\cos(x))n\nu_n(dx) \geq \int_{[-1,1]} (1-\cos(x))n\nu_n(dx) \geq \beta \int_{-1,1]} x^2 n\nu_n(dx).$$

Pel lema anterior tenim que $\limsup_{n\to\infty} n(1 - Re(\varphi_{\nu_n}(t))) = |Re(\lambda(t))| < \infty$ i obtenim doncs el resultat que volíem. □

Finalment, ja podem enunciar i demostrar el teorema de Lévy-Khintchine.

Teorema 5.14. *Sigui ν una mesura de probabilitat infinitament divisible sobre $\mathbb{R}$. Aleshores existeix $\beta \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geq 0$ i μ mesura de Lévy tals que*

$$\nu = N(\beta, \sigma^2) * CPoiss(\mu).$$

Fixat el centrament de la $CPoiss(\mu)$, la terna (β, σ^2, μ) està unívocament determinada per ν.

Prova. Per començar, fixem-nos que si ν_n és una arrel n-èssima de ν, aleshores

$$\log(\varphi_\nu) = n \log(\varphi_{\nu_n}).$$

Al llarg de la demostració modificarem el terme esquerra de la igualtat per després passar al límit. Com aquesta serà lleugerament llarga, l'anirem demostrant per parts.

Primera part

Considerem $f(z) = \frac{log(z+1)}{z} - 1$, per tot $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq 1$, $z \neq 0$. Fixem-nos que fent el desenvolupament de Taylor de $f(z)$ es pot veure fàcilment que $\lim_{z \to 0} f(z) = 0$, doncs

$$|f(z)| = |-\frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + ...| \leq \frac{|z|}{2}(1 + |z| + |z^2| + ...) \leq \frac{|z|}{2}\frac{1}{1-|z|} \xrightarrow[z \to 0]{} 0.$$

Observem també que $\log(z) = (f(z-1)+1)(z-1)$, ja que

$$(f(z-1)+1)(z-1) = \frac{\log(z)}{z-1}(z-1) = log(z).$$

Aleshores

$$\begin{aligned} \log(\varphi_\nu(t)) &= n \log(\varphi_{\nu_n}(t)) = n(f(\varphi_{\nu_n}(t) - 1) + 1)(\varphi_{\nu_n}(t) - 1) \\ &= n(h_n(t) + 1) \int_{\mathbb{R}} (e^{itx} - 1)\nu_n(dx), \end{aligned}$$

on hem pres $h_n(t) = f(\varphi_{\nu_n}(t) - 1)$. Agafem ara el centrament $\alpha(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Aleshores,

$$log(\varphi_\nu(t)) = (h_n(t)+1)\int_{\mathbb{R}}(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2})n\nu_n(dx) + (h_n(t)+1)\int_{\mathbb{R}}\frac{itx}{1+x^2}n\nu_n(dx). \quad (5.5)$$

Segona part

Sigui $\beta_n := \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{1+x^2} n\nu_n(dx)$. Aquesta integral existeix sempre, ja que $|\frac{x}{1+x^2}| \leq 1$ i ν_n és una probabilitat. Definim $\gamma_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+x^2} n\nu_n(dx)$. Pel mateix raonament, tenim que $\gamma_n < \infty$ per tot n. Anem a veure que $\limsup_{n \to \infty} \gamma_n < \infty$. Ho demostrem per casos.

Si $x \in [-1,1]^c$,

$$\int_{[-1,1]^c} \frac{x^2}{1+x^2} n\nu_n(dx) \leq n\nu_n([-1,1]^c),$$

i pel Lema 5.12. sabem que $\limsup_{n\to\infty} n\nu_n([-1,1]^c) < \infty$.

Si $x \in [-1,1]$,

$$\int_{[-1,1]} \frac{x^2}{1+x^2} n\nu_n(dx) \leq \int_{[-1,1]} x^2 n\nu_n(dx),$$

i pel Lema 5.13 sabem que $\limsup_{n\to\infty} \int_{[-1,1]} x^2 n\nu_n(dx) < \infty$.

Ara, per cada n, definim la mesura

$$\tau_n(dx) = \frac{1}{\gamma_n}\frac{x^2}{1+x^2} n\nu_n(dx).$$

Notem que, per definició, τ_n és una mesura de probabilitat. Si recuperem l'equació (5.5) i la modifiquem obtenim

$$\log(\varphi_\nu(t) = (h_n(t)+1)\int_{\mathbb{R}-\{0\}} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\gamma_n \frac{1+x^2}{x^2}\tau_n(dx) + it(h_n(t)+1)\beta_n. \tag{5.6}$$

Per comoditat definim $g(x,t) = (e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2})\frac{1+x^2}{x^2}$ per tot $x \neq 0$.

Tercera part

Si suposem que $\gamma_n(h_n(t)+1)\int_{\mathbb{R}} g(x,t)\tau_n(dx)$ convergeix uniformement quan $n \to \infty$ en $t \in [-a,a]$ per $0 < a < \infty$ (ho veurem i farem servir a la cinquena part d'aquesta demostració), aleshores β_n convergeix a un límit finit. Efectivament:
Si tenim en compte que el primer sumand de la banda dreta de la igualtat (5.6) convergeix uniformement en t i la part esquerra de la igualtat no depèn de n, aleshores existeix el límit $\lim_{n\to\infty}(h_n(t)+1)\beta_n$. A més, com $\varphi_{\nu_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ uniformement en t, ja que $\nu_n \xrightarrow{w} \delta_{\{0\}}$ quan $n \to \infty$, tenim que

$$\lim_{n\to\infty}(h_n(t)+1) = \lim_{n\to\infty}(f(\varphi_{\nu_n}(t)-1)+1) = f(0)+1 = 1.$$

Tenim doncs que existeix el límit de β_n quan n tendeix a infinit. Anem a veure que és finit. Per fer-ho, considerem la funció

$$H(t) := \lim_{n\to\infty} \exp\{it\beta_n(h_n(t)+1)\}.$$

Per la igualtat (5.6), sabem

$$\varphi_\nu(t) = \exp\left\{\left(\gamma_n(h_n(t)+1)\int_{\mathbb{R}} g(x,t)\tau_n(dx)\right) + it(h_n(t)+1)\beta_n\right\}.$$

Aleshores

$$H(t) = \varphi_\nu(t)\lim_{n\to\infty}\exp\left\{-\gamma_n(h_n(t)+1)\int_{\mathbb{R}} g(x,t)\tau_n(dx)\right\},$$

que convergeix uniformement en $t \in [-a,a]$ per hipòtesi. Això implica que $H(t)$ és contínua en t per $t \in [-a,a]$, la qual cosa ens permet agafar una successió de $t_n \to 0$ i passar al límit simultàniament. Considerem ara $\{t_n := t/\beta_n, n \geq 1\}$ i suposem que $\lim_{n\to\infty}\beta_n = \pm\infty$. Aleshores $t_n \to 0$ i, per continuïtat, tenim

$$H(0) = \lim_{n\to\infty} H(t_n) = \lim_{n\to\infty}\exp\{it_n\beta_n(h_n(t_n)+1)\}.$$

Fixem-nos que $t_n\beta_n \to t$ i que $h_n(t_n)+1 = f(\varphi_{\nu_n}(t/\beta_n - 1)+1 \to f(0)+1 = 1$. Per tant

$$H(0) = \lim_{n\to\infty}\exp\{it_n\beta_n(h_n(t)+1)\} = e^{it},$$

però t és arbitrari i per tant tenim una contradicció. Així doncs, $-\infty < \lim_{n\to\infty}\beta_n < \infty$.

Quarta part

Ara fixem-nos que $g(x,t)$ està definida per tot $t \in \mathbb{R}$ i per tot $x \in \mathbb{R}-\{0\}$ i és contínua. Ens interessa poder definir $g(x,t)$ de manera que aquesta sigui contínua també en $x = 0$. Observem que

$$\begin{aligned} g(x,t) &= \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2} = \frac{e^{itx}-1}{x^2} + \frac{(e^{itx}-1)x^2}{x^2} - \frac{itx}{x^2} \\ &= (e^{itx}-1) + \left(\frac{e^{itx}}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{itx}{x^2}\right) = (e^{itx}-1) + \frac{1}{x^2}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(itx)^k}{k!}\right). \end{aligned}$$

Aleshores, si estudiem el límit de $g(x,t)$ quan $x \to 0$, tenim

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} g(x,t) &= \lim_{x\to 0}\left((e^{itx}-1)+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(itx)^k}{x^2k!}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left((e^{itx}-1)-\frac{t^2}{2}+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(it)^k x^{k-2}}{k!}\right)\\ &= -\frac{t^2}{2}.\end{aligned}$$

Per tant, podem definir $g(0,t) = \lim_{x\to 0} g(x,t) = -t^2/2$, i obtenim una funció $g(x,t)$ contínua per tot t i per tot x.
Ara veiem que si $t \in [-a,a]$, $g(x,t)$ està uniformement acotada. Si $|xt| \leq 1$,

$$\begin{aligned}|g(x,t)| &= \left|(e^{itx}-1)+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(itx)^k}{x^2k!}\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(itx)^k}{k!}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(it)^k x^{k-2}}{k!}\right|\\ &= \left|itx+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(itx)^k}{k!}+t^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{i^k(tx)^{k-2}}{k!}\right| \leq 1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}+t^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\\ &\leq 1+(1+a^2)C = k_1.\end{aligned}$$

Si $|xt| > 1$, fixem-nos que $|t| > \frac{1}{|x|}$. Per tant,

$$\begin{aligned}|g(x,t)| &= \left|(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2})\frac{1+x^2}{x^2}\right| \leq \left|e^{itx}-1\right|\left|\frac{1+x^2}{x^2}\right|+\left|\frac{it}{x}\right|\\ &\leq 2\left(\left|\frac{1}{x^2}\right|+1\right)+|t|\left|\frac{1}{x}\right| < 2(|t^2|+1)+|t^2| \leq 2(1+a^2)+a^2 = k_2.\end{aligned}$$

Així doncs, $g(x,t)$ és contínua per tot $x \in \mathbb{R}$ i per tot $t \in \mathbb{R}$, i està uniformement acotada, tal i com volíem veure.
Cinquena part
A la segona part hem vist que $\limsup_{n\to\infty}\gamma_n < \infty$. Aleshores $\liminf_{n\to\infty}\gamma_n = 0$ o $\liminf_{n\to\infty}\gamma_n = \eta \neq 0$.
Suposem que $\liminf_{n\to\infty}\gamma_n = 0$. Aleshores existeix una subsuccessió tal que $\lim_{n'\to\infty}\gamma_{n'} = 0$. Com que $g(x,t)$ està uniformement acotada quan $t \in [-a,a]$ i τ_n és una probabilitat, la integral $\int_{\mathbb{R}} g(x,t)\tau_n(dx)$ també està acotada uniformement en n i $t \in [-a,a]$. Per tant,

$$\lim_{n'\to\infty}(1+k_{n'}(t))\gamma_{n'}\int_{\mathbb{R}} g(x,t)\tau_{n'}(dx) = 0$$

uniformement en $t \in [-a,a]$, ja que $\lim_{n'\to\infty}\gamma_{n'} = 0$. Pel que hem vist a la tercera part de la demostració, com que $\gamma_n(h_{n'}(t)+1)\int_{\mathbb{R}} g(x,t)\tau_{n'}(dx)$ convergeix uniformement en $t \in [-a,a]$ quan $n‘ \to \infty$, el límit $\lim_{n'\to\infty}\beta_{n'} = \beta$ existeix i és finit. D'aquí veiem que

$$\varphi_\nu(t) = \lim_{n'\to\infty}\exp\left\{(h_{n'}(t)+1)\gamma_{n'}\int_{\mathbb{R}} g(x,t)\tau_{n'}(dx)+it\beta_{n'}\right\} = e^{it\beta}.$$

Per tant $\varphi_\nu(t) = e^{it\beta}$, que és la funció característica d'una constant corresponent a la $N(\beta,0)$.
Suposem ara que $\liminf_{n\to\infty}\gamma_n = \eta \neq 0$. Aleshores existeix una subsuccessió de γ_n tal

que $\lim_{n'\to\infty}\gamma_{n'}=\eta$. Es pot veure doncs que la successió $\{\tau_n\}$ és ajustada i aplicar el Teorema de Prokohorov. Per comprovar-ho, fixem-nos primer que

$$\begin{aligned}\tau_n([-a,a]^c) &= \int_{[-a,a]^c}\tau_n(dx)=\frac{1}{\gamma_n}\int_{[-a,a]^c}\frac{y^2}{1+y^2}n\nu_n(dy)\\ &\leq \frac{1}{\gamma_n}\int_{[-a,a]^c}n\nu_n(dy)=\frac{1}{\gamma_n}n\nu_n([-a,a])^c.\end{aligned}$$

Pel Lema 5.12, sabem que per tot $a>0$ es compleix

$$\limsup_{n\to\infty} n\nu_n([-a,a]^c)\leq \alpha a\int_0^{1/a}|Re(\log(\varphi_\nu(t)))|dt.$$

Aleshores, per una n prou gran es satisfà

$$\int_{[-a,a]^c}\tau_n(dx)\leq\frac{\alpha a}{\gamma_n}\int_0^{1/a}|Re(\log(\varphi_\nu(t)))|\leq\frac{\alpha a}{\eta/2}\int_0^{1/a}|Re(\log(\varphi_\nu(t)))|,$$

i com que el $\log(\varphi_\nu(t))$ és contínu en l'origen,

$$\lim_{a\to\infty} a\int_0^{1/a}|Re(\log(\varphi_\nu(t)))|dt=0.$$

Així doncs, per tot $\varepsilon>0$ existeix un a tal que $\sup\tau_n([-a,a]^c)<\varepsilon$ i pel Teorema de Prokhorov existeix una subsuccessió convergent $\{\tau_{n_k}\}$ tal que $\tau_{n_k}\xrightarrow[n_k\to\infty]{w}\tau$. Aleshores, tenim que

$$\lim_{n_k\to\infty}\int_{\mathbb{R}}g(x,t)\tau_{n_k}(dx)=\int_{\mathbb{R}}g(x,t)\tau(dx)$$

per ser $g(x,t)$ acotada i τ una probabilitat, i a més com que $g(x,t)$ és uniformement acotada tenim que la convergència és uniforme en $t\in[-a,a]$. Per tant $\gamma_{n_k}(h_{n_k}(t)+1)\int_{\mathbb{R}}g(x,t)\tau_{n_k}(dx)$ convergeix uniformement en $t\in[-a,a]$ quan n_k tendeix a infinit i, per la tercera part, això implica que el límit $\lim_{n_k\to\infty}\beta_{n_k}=\beta$ existeix i és finit. D'aquí veiem

$$\begin{aligned}\varphi_\nu(t)&=\lim_{n_k\to\infty}\exp\left\{(h_{n_k}(t)-1)\gamma_{n_k}\int_{\mathbb{R}}g(x,t)d\tau_{n_k}(x)+it\beta_{n_k}\right\}\\ &=\exp\left\{\eta\int_{\mathbb{R}}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}d\tau(x)+it\beta\right\}.\end{aligned}$$

Si prenem $\eta\tau(0)=\sigma^2$ i recordem que $g(0,t)=\frac{-t^2}{2}$, obtenim

$$\varphi_\nu(t)=\exp\left\{it\beta-\sigma^2\frac{t^2}{2}+\eta\int_{\mathbb{R}-\{0\}}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}d\tau(x)\right\}.$$

Definim com a μ la mesura sobre $\mathbb{R}$ que satisfà

$$\mu(\{0\})=0\quad\text{i}\quad\mu(B)=\eta\int_{B-\{0\}}\frac{1+x^2}{x^2}\tau(dx).$$

Per la Proposició 5.8 veiem que μ és una mesura de Lévy, ja que

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{x^2}{1+x^2}d\mu(x)=\int_{\mathbb{R}-\{0\}}\frac{x^2}{1+x^2}\frac{1+x^2}{x^2}\eta\tau(dx)=\eta\tau(\mathbb{R}-\{0\})<\infty.$$

Així doncs,

$$\varphi_\nu(t) = \exp\left\{ it\beta - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \mu(dx) \right\}. \tag{5.7}$$

Amb això provem que, efectivament, existeixen β, σ^2 i μ tals que $\nu = N(\beta,\sigma^2) * CPoiss(\mu)$.

<u>Unicitat</u>
Suposem que existeixen $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1^2, \sigma_2^2 \geq 0$ i μ_1, μ_2 mesures de Lèvy (utilitzant el centrament $\alpha(x) = \frac{x}{1+x^2}$) tals que

$$N(\beta_1, \sigma_1^2) * CPoiss(\mu_1) = N(\beta_2, \sigma_2^2) * CPoiss(\mu_2).$$

Això implica que les seves funcions característiques, definides com (5.7), han de ser iguals. En particular, les seves parts reals han de coincidir. Per tant,

$$-\frac{\sigma_1^2 t^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} (\cos(x) - 1)\mu_1(dx) = -\frac{\sigma_2^2 t^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} (\cos(x) - 1)\mu_2(dx).$$

Agrupant termes,

$$\frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{2} t^2 = \int_{\mathbb{R}} (\cos(tx) - 1)(\mu_1 - \mu_2)(dx).$$

Sigui $\varepsilon > 0$. Si aïllem $\sigma_2^2 - \sigma_1^2$ i escrivim $(\cos(tx) - 1)(\mu_1 - \mu_2)$ com $(1 - \cos(tx))(\mu_2 - \mu_1)$, obtenim

$$\sigma_2^2 - \sigma_1^2 = \int_{\{|x| \leq \varepsilon\}} 2\frac{1 - \cos(tx)}{t^2}(\mu_2 - \mu_1)(dx) + \int_{\{|x| > \varepsilon\}} 2\frac{1 - \cos(tx)}{t^2}(\mu_2 - \mu_1)(dx).$$

Desenvolupant el polinomi de Taylor de $1 - \cos(u)$ al voltant del zero, tenim

$$1 - \cos(u) = \frac{u^2}{2} + R_2(u), \text{ on } R_2(u) = -\frac{\sin(c)}{3!}u^3 \leq 0,$$

per alguna c entre 0 i u. Es satisfà doncs la desigualtat $|1 - \cos(tx)| \leq \frac{t^2 x^2}{2}$. Per tant

$$\left| \int_{\{|x| \leq \varepsilon\}} 2\frac{1 - \cos(tx)}{t^2}(\mu_2 - \mu_1)(dx) \right| \leq \int_{\{|x| \leq \varepsilon\}} x^2 (\mu_1 + \mu_2)(dx).$$

Per altra banda és clar que $|1 - \cos(tx)| \leq 2$. Tenim doncs

$$\left| \int_{\{|x| > \varepsilon\}} 2\frac{1 - \cos(tx)}{t^2}(\mu_2 - \mu_1)(dx) \right| \leq \frac{4}{t^2}(\mu_1(\{|x| > \varepsilon\}) + \mu_2(\{|x| > \varepsilon\})).$$

Aleshores,

$$\begin{aligned} |\sigma_2^2 - \sigma_1^2| &\leq \int_{\{|x| \leq \varepsilon\}} x^2(\mu_1 + \mu_2)(dx) + \frac{4}{t^2}(\mu_1(\{|x| > \varepsilon\}) + \mu_2(\{|x| > \varepsilon\})) \\ &\xrightarrow[t \to \infty]{} \int_{\{|x| \leq \varepsilon\}} x^2(\mu_1 + \mu_2)(dx) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0. \end{aligned}$$

Per tant, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Seguint amb l'argument que les seves funcions característiques han de ser iguals, si mirem (5.7) i tenim en compte que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, obtenim la igualtat

$$it\beta_1 + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \mu_1(dx) = it\beta_1 + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \mu_2(dx) + 2k(t)\pi i, \tag{5.8}$$

on $k(t) \in \mathbb{N}$. Per la continuïtat dels altres termes tenim que $k(t)$ és contínua a valors en $\mathbb{N}$ i per tant és constant. En $t = 0$, la igualtat (5.8) queda com

$$0 + \int_{\mathbb{R}} (e^0 - 1 - 0)\mu_1(dx) = 0 + \int_{\mathbb{R}} (e^0 - 1 - 0)\mu_2(dx) + 2k(t)\pi i.$$

Així doncs $k(0) = 0$ i, per continuïtat, $k(t) = 0$ per tot t.
Siguin t_1 i $t_2 \in \mathbb{R}$. Escrivim ara la igualtat (5.8) amb $t = t_1 + t_2$ i $k(t) \equiv 0$. Si agrupem els termes, obtenim

$$i(t_1 + t_2)(\beta_1 - \beta_2) = \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i(t_1+t_2)x} - \frac{i(t_1 + t_2)x}{1 + x^2} \right) (\mu_2 - \mu_1)(dx).$$

Procedim de la mateixa manera per $t_1 - t_2$,

$$i(t_1 - t_2)(\beta_1 - \beta_2) = \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i(t_1-t_2)x} - \frac{i(t_1 - t_2)x}{1 + x^2} \right) (\mu_2 - \mu_1)(dx).$$

Finalment, repetim per t_1

$$i(t_1)(\beta_1 - \beta_2) = \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i(t_1)x} - \frac{i(t_1)x}{1 + x^2} \right) (\mu_2 - \mu_1)(dx).$$

Si sumem les dues primeres igualtats i restem la tercera dues vegades, obtenim

$$\begin{aligned} i[(t_1 + t_2) + (t_1 - t_2) - 2t_1](\beta_1 - \beta_2) = \int_{\mathbb{R}} \Bigg(& e^{i(t_1+t_2)x} + e^{i(t_1-t_2)x} - 2e^{it_1x} \\ & - \frac{i[(t_1 + t_2) + (t_1 - t_2) - 2t_1]x}{1 + x^2} \Bigg) (\mu_2 - \mu_1)(dx). \end{aligned}$$

Com que $(t_1 + t_2) + (t_1 - t_2) - 2t_1 = 0$, tenim que

$$0 = \int_{\mathbb{R}} e^{it_1x}[e^{it_2x} + e^{-it_2x} - 2](\mu_2 - \mu_1)(dx)$$

Fixem-nos que $e^{it_2x} + e^{-it_2x} = \cos(t_2x) + i\sin(t_2x) + \cos(-t_2x) + i\sin(-t_2x) = 2\cos(t_2x)$, ja que la funció cosinus és parell i la funció sinus és imparell. Així doncs,

$$0 = \int_{\mathbb{R}} e^{it_1x}[e^{it_2x} + e^{-it_2x} - 2](\mu_2 - \mu_1)(dx) = \int_{\mathbb{R}} e^{it_1x}2[\cos(t_2x) - 1](\mu_1 - \mu_2)(dx).$$

Això vol dir que les mesures de densitat $(1 - \cos(t_2x))\mu_2(dx)$ i $(1 - cos(t_2x))\mu_1(dx)$ tenen la mateixa transformada de Fourier, per tant són la mateixa mesura. És a dir, $\mu_1 = \mu_2$ en el conjunt de x on $\cos(t_2x) - 1 \neq 0$. No obstant, per tot $x \neq 0$ existeix un t_2 tal que $cos(t_2x) \neq 1$ i per tant $\mu_1 = \mu_2$. D'aquí treiem que $\beta_1 = \beta_2$.

$\square$

Referències

[1] Nualart, D; Sanz-Solé, M.: *Curs de probabilitats*, Barcelona, 1990.

[2] Sanz-Solé, M.: *Probabilitats*, Edicions Universitat de Barcelona, Barcelona, 1999.

[3] Feller, W; Fernández Everest, S.: *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones*, México, 1973.

[4] Julià de Ferran, O; Márquez, D.: *Un Primer curs d'estadística*, Publicacions i Edicions Universitat de Barcelona, Barcelona, 2010.

[5] Casella, G;, Fienberg, S; Olkin, I.: *Measure Theory and Probability Theory*, New York: Springer, New York. 2006.

[6] Bogachev, V.I.: *Measure Theory*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, 2007.

[7] Rudin, W.: *Fourier analysis on groups*, New York: Interscience, New York, 1962.

[8] Protter, M.H; Morrey, C.B.: 1985. *Intermediate calculus*, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, New York, 1985. pp. 421-426.