



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

GRUPS DE TRENES,
REPRESENTACIÓ DE BURAU I
CATEGORIFICACIÓ DE
KHOVANOV-SEIDEL

Autor: Àlex Garcia Herranz

Director: Dr. Ricardo García López

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 13 de juny de 2023

Abstract

The braid group, together with its representations, is a fascinating mathematical structure, studied from different fields, such as group theory, topology... Moreover, it is a theory that extends beyond itself, with relations that go from the theory of knots and their invariants to concepts of theoretical physics.

The main objective of the paper is the introduction of the notion of the braid group, the Burau representation and a categorification of it.

We will begin by presenting braids as a mathematical structure and the different ways of interpreting the group they form. Then, we introduce the non-reduced and reduced Burau representations. This family of representations is faithful for $n < 4$ and not faithful for $n > 4$, it is unknown if it is faithful for $n = 4$. In this work, the case $n = 5$ is not studied. Finally, the Seidel-Khovanov categorification of the Burau representation is presented, which, curiously, is faithful for all n .

Resum

El grup de trenes, juntament amb les seves representacions, és una estructura matemàtica fascinant, estudiada des de diferents camps, com la teoria de grups, topologia... A més a més, és una teoria que s'extèn més enllà de si mateixa, amb relacions que van des de la teoria de nusos i els seus invariants, fins a conceptes de física teòrica.

L'objectiu principal del treball és la introducció de la noció del grup de trenes, la representació de Burau i una categorificació d'aquesta.

Començarem presentant les trenes com a estructura matemàtica i les diferents maneres d'interpretar el grup que formen. Llavors, introduïm les representacions de Burau no reduïda i reduïda. Aquesta família de representacions és fidel per $n < 4$ i no ho és per $n > 4$, es desconeix si és fidel per $n = 4$. En aquest treball, el cas $n = 5$ no s'estudia. Finalment, s'exposa la categorificació de Seidel-Khovanov de la representació de Burau, que curiosament, és fidel per a tot n .

Agraïments

Estic molt agraït al Dr. Ricardo García per la seva ajuda i paciència durant aquest mesos com a tutor i durant aquests anys com a professor. Gràcies als seus consells i indicacions, aquest treball ha estat possible alhora que m'ha descobert el bonic món de les trenes.

També desitjo agrair al professorat que he tingut durant els anys de la meva formació acadèmica; sense els coneixements ni valors que m'han inculcat, aquest treball no existiria.

Vull donar les gràcies a la meva família per estar al meu costat, per escoltar-me, ajudar-me i estimar-me.

Finalment, vull expressar el meu agraïment a les meves amistats: heu fet d'aquesta etapa una experiència meravellosa.

Índex

1	Introducció	1
2	Grup de trenes	3
2.1	Grup de classes d'isotopia	9
2.2	Automorfismes de trenes de grups lliures	11
3	Representació de Burau	15
3.1	Representació de Burau reduïda	17
3.1.1	Fidelitat de ψ_3	18
3.2	Representacions homològiques	20
3.2.1	Representació homològica torçada	20
3.3	Representació homològica torçada de trenes	21
3.4	Demostració del Teorema 3.6	21
3.5	Equivalència de representacions	25
3.6	Representació de Burau a color	26
4	Categorificació de Khovanov-Seidel de la representació de Burau	29
4.1	Anells de camins	32
4.2	Àlgebra de Temperley-Lieb	33
4.3	L'anell A_n	35
4.4	Representació de Khovanov-Seidel del grup de trenes	37
4.4.1	Fidelitat de la representació de Khovanov-Seidel	42
4.4.2	K_0 d'anells	44
5	Conclusions	49
6	Referències	50

1 Introducció

La Humanitat, des de fa més de 30000 anys que usa trenes, aquelles estructures resultants d'entrellaçar tres o més tires d'algun material flexible com cabell, cuir o cordes, per fer pentinats, decorar peces de roba i armes, cordes... Tot i així, l'estudi de les trenes com a entitat matemàtica va haver d'esperar. Encara que el grup de trenes ja va aparèixer de manera implícita al 1891 en un article d'Adolf Hurwitz [17] com a grup fonamental d'un espai de configuració, no va ser fins els anys 20 del segle passat quan Emil Artin va donar la definició formal del grup B_n de trenes amb n fils [3]. Des d'aquell moment, la teoria de trenes ha anat creixent, diversificant-se i extenent-se a diferents àrees de les Matemàtiques i la Física.

La fascinació de molts per les trenes no neix només de la bellesa geomètrica dels patrons; sinó que les relacions amb altres objectes com els nusos, enllaços, homeomorfismes de superfícies i altres objectes físics com els *anyons* fan que siguin atractives més enllà del plaer estètic.

Un dels temes més desenvolupats de la teoria de trenes són les *representacions* del grup B_n . Una representació d'un grup G en un espai vectorial V es defineix com un morfisme de grups

$$\rho : G \rightarrow \text{GL}(V),$$

on $\text{GL}(V)$ és el grup d'automorfismes de V . Aquest morfisme ρ dona estructura de G -mòdul a l'espai vectorial V . Es diu que la representació és *fidel* si el morfisme ρ és injectiu. Una d'aquestes representacions de trenes és la que va permetre a Vaughan Jones definir el polinomi que porta el seu nom en teoria de nusos, fent ús del teorema d'Alexander que afirma que tot enllaç (i per tant, tot nus) es pot expressar com una trena tancada, és a dir, identificant els punts inicials d'una trena amb els seus punts finals.

Una altra representació del grup de trenes molt estudiada és la de Burau. Durant molt de temps es va desconèixer si aquesta representació, introduïda ja a l'any 1936, era fidel o no per a n prou gran. No va ser fins a finals del segle passat quan J. Moody i S. Bigelow van demostrar que, tot i ser fidel per $n = 2$ i 3 , no és fidel per $n \geq 5$; el cas $n = 4$ encara és obert.

Més tard, i després de la categorificació del polinomi de Jones per M. Khovanov, P. Seidel i el mateix Khovanov van categorificar la representació de Burau fent servir accions sobre complexos de mòduls projectius i, curiosament, aquesta acció sí que és fidel per a tota $n \geq 1$.

Estructura de la Memòria

Ara detallem els continguts de cada secció de la present memòria. A la secció 2 es defineix el grup de trenes B_n , subgrups importants i propietats. Es demostra l'equivalència entre les diferents encarnacions de B_n : com a diagrames, donant una presentació amb generadors i relacions, com a automorfismes d'un grup lliure i com a homeomorfismes d'un disc foradat. Cada forma d'entendre el grup de trenes és útil per certs càlculs, idees o demostracions i farem servir cada una quan més convingui.

La secció 3 està dedicada a la representació de Burau. A part de la definició, consisteix en una interpretació més física d'aquesta representació i la demostració de la no fidelitat per $n \geq 6$.

A la secció 4 es reproduïx amb tot detall el procés de categorificació de Seidel-Khovanov de la representació de Burau tal i com es va fer a [16] i [4].

Finalment, acabem amb una petita conclusió, on es comenten possibles continuacions del present treball.

S'ha optat per no separar de la resta del treball els conceptes d'àlgebra homològica i teoria K , sinó que estan just abans que apareguin aplicats a la teoria de trenes.

2 Grup de trenes

Durant tot el treball, anomenarem I l'interval $[0, 1]$.

Definició 2.1. Una trena (geomètrica) de $n \geq 3$ fils és un conjunt $b \subset \mathbb{R}^2 \times I$ format per n intervals tals que la projecció a I dona un homeomorfisme entre cada corda i l'interval $I = [0, 1]$ i, a més,

$$b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) = \{(1, 0, 0), (2, 0, 0), \dots, (n, 0, 0)\}$$

$$b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{1\}) = \{(1, 0, 1), (2, 0, 1), \dots, (n, 0, 1)\}$$

Fixem-nos que cada fil connecta el punt $(i, 0, 0)$ amb $(s(i), 0, 1)$, essent $s(i) \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Definim la *permutació subjacent* de la trena b com la seqüència donada per $i \mapsto s(i)$.

Definició 2.2. Diem que dues trenes de n fils b i b' són isotòpiques si existeix $F : b \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$ contínua tal que $F(\cdot, s)$ és una incrustació ("embedding") per tot $s \in I$, $F(\cdot, 0) = Id : b \rightarrow b$ i $F(\cdot, 1) = b'$.

És immediat veure que la relació d'isotopia és una relació d'equivalència. Volem donar estructura de grup a les trenes, o més aviat, a les classes d'isotopia de trenes; per tant, hem de definir una operació.

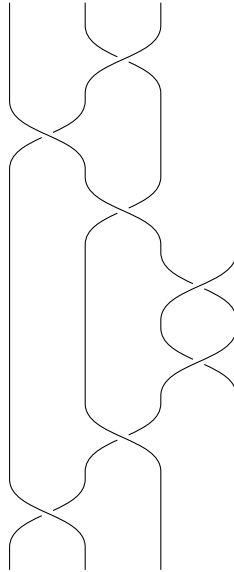


Figura 1 Trena geomètrica de 4 fils.

Definició 2.3. Donades dues trenes b_1, b_2 , es defineix el seu producte $b_1 b_2$ com $\{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times I \mid (x, y, 2t) \in b_1 \text{ si } 0 \leq t \leq 1/2 \text{ i } (x, y, 2t - 1) \in b_2 \text{ si } 1/2 \leq t \leq 1\}$.

Definició 2.4. Un diagrama de trenes de n fils és un conjunt $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times I$ format per la unió de n imatges d'homeomorfismes de I anomenats fils tal que es compleixen dues condicions:

- Tots els punts $\{1, 2, \dots, n\} \times \{0, 1\}$ són l'inici o el final d'un únic fil.
- Tot punt de $\mathbb{R} \times I$ pertany com a màxim a dos fils. A cada intersecció de dos fils, un d'ells es diu que passa per sobre de l'altre. Quan es mostren diagrames en figures, el fil que passa per sobre es representa amb un traç continu a la intersecció, mentre que l'inferior se'l representa tallat a la intersecció.

Normalment representem les trenes amb diagrames de trenes, és a dir, la projecció de b en $\mathbb{R} \times \{0\} \times I$ i identificant quin fil passa per darrere a cada encreuament. Es pot demostrar que cada diagrama de trenes representa una classe d'isotopia de trenes i que cada trena es pot presentar per un diagrama.

Definició 2.5. Dos diagrames de trenes \mathcal{D} i \mathcal{D}' son isotòpics si existeix una aplicació contínua $F : \mathcal{D} \times I \rightarrow \mathbb{R} \times I$ tal que per tota $s \in I$ el conjunt $F(\mathcal{D}, s)$ és un diagrama de trenes, $F(\mathcal{D}, 0) = \mathcal{D}$ i $F(\mathcal{D}, 1) = \mathcal{D}'$.

Uns conceptes molt relacionats amb la isotopia de trenes són els moviments de Reidemeister, provinents de la teoria de nusos.

Definició 2.6. Definim els moviments de Reidemeister Ω_2 i Ω_3 tal i com es veuen a la Figura 2. Dos diagrames de trenes són R-equivalents si es pot passar d'un a l'altre amb un nombre finit d'isotopies i moviments de Reidemeister.

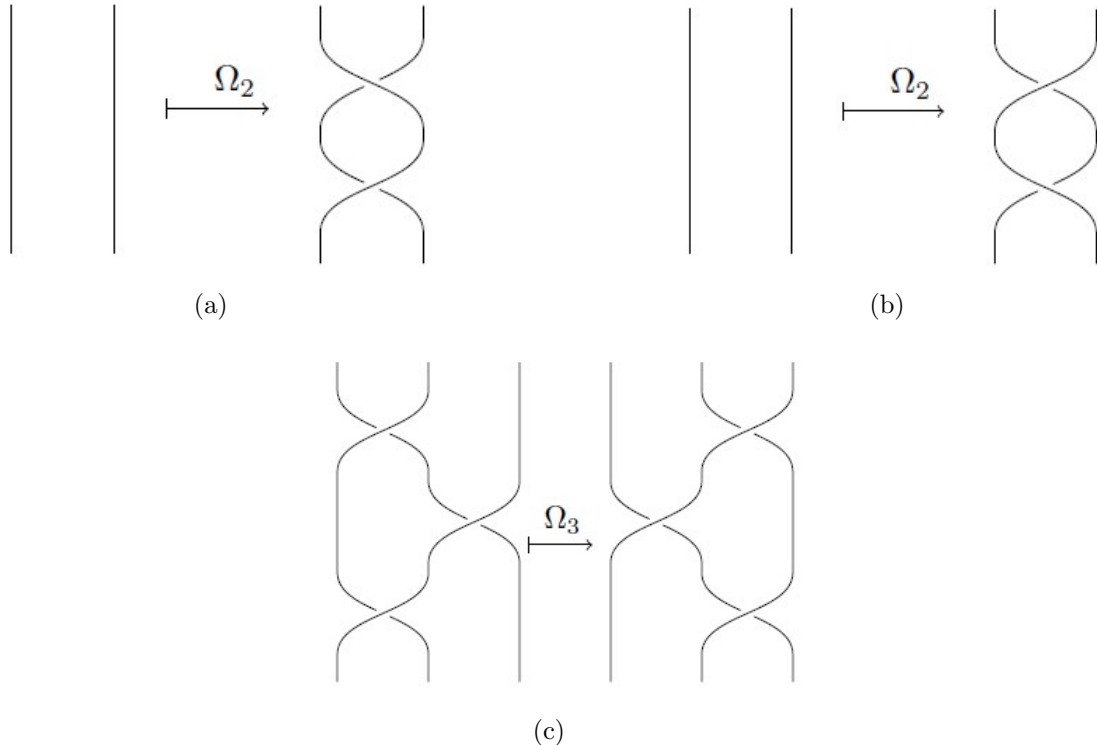
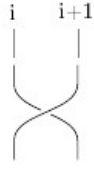
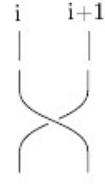


Figura 2 Moviments de Reidemeister per 2 i 3 fils.



(a) Diagrama del generador σ_i .



(b) Diagrama del generador σ_i^{-1} .

Figura 3 Generadors del grup de trenes.

Teorema 2.7. *Dues trenes són isotòpiques si i només si els seus diagrames són R-equivalents.*

Demostració. Es pot trobar a [14, Teorema 1.2.2]. □

Proposició 2.8. *El conjunt de classes d'isotopia de trenes de n fils amb la multiplicació definida anteriorment forma el grup de trenes geomètriques \mathcal{B}_n .*

Demostració. Donat que el producte definit anteriorment té neutre, el que s'anomena la trena trivial: $\{1, 2, \dots, n\} \times \{0\} \times I$ i l'associativitat ve donada per fet que estem considerant classes d'isotopia, l'única part que ens falta veure és que tota trena té inversa. Definim per tota $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ dos trenes elementals σ_i i σ_i^{-1} tal i com mostren els diagrames de la Figura 3. Considerem una trena $\beta \in \mathcal{B}_n$. Podem deformar el seu diagrama \mathcal{D} al voltant dels encreuaments de manera que els encreuament tinguin les segones coordenades diferents. Aleshores, existiran $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ tals que per tota $j \in \{1, \dots, n-1\}$ a $\mathbb{R} \times [t_j, t_{j+1}] \cap \mathcal{D}$ només hi ha un sol encreuament. Per tant, aquesta intersecció serà σ_i o σ_i^{-1} per a cert i . Llavors tindrem que

$$\beta = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \sigma_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k} \quad (2.1)$$

Amb ε_j essent $+1$ o -1 i $i_1, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Clarament, fent ús dels moviments de Reidemeister, $\sigma_i^1 \sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1} \sigma_i^1 = 1$ per tota i . Així, $\beta^{-1} = \sigma_{i_k}^{-\varepsilon_k} \dots \sigma_{i_2}^{-\varepsilon_2} \sigma_{i_1}^{-\varepsilon_1}$. □

Corol·lari 2.8.1. $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ generen \mathcal{B}_n .

Definició 2.9. *Una trena $\beta \in \mathcal{B}_n$ és positiva si es pot escriure com*

$$\beta = \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_k},$$

amb $i_1, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Definició 2.10. *El grup de trenes d'Artin B_n és el grup generat per $n-1$ generadors $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_{n-1}$ amb les relacions*

$$\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i$$

si $|i - j| \geq 2$, per tota $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$,

$$\tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1},$$

que anomenarem relacions de trenes.

Observació 2.10.1. Els generadors $\{\sigma_i\}_{i=1,2,\dots,n-1}$ de \mathcal{B}_n satisfan les relacions de trenes. En efecte, la primera relació es pot aconseguir per isotopies i la segona no és més que aplicar un moviment Ω_3 als diagrames dels generadors.

És clar que, donat un morfisme de grups, $f : B_n \rightarrow G$, els elements del grup G $\{s_i = f(\tau_i)\}_i$ satisfan les relacions de trenes. Es pot demostrar que el recíproc també és cert.

Proposició 2.11. *Si s_1, \dots, s_{n-1} són elements d'un grup G que satisfan les relacions de trenes, aleshores existeix un únic morfisme $f : B_n \rightarrow G$ tal que $s_i = f(\tau_i)$ per tot $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$.*

Demostració. Considerem el grup lliure F_n generat per $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$. Existeix un únic morfisme de grups $\tilde{f} : F_n \rightarrow G$ tal que $\tilde{f}(\tau_i) = s_i$ per tota $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$. Donades les relacions de trenes, $r = r'$, on r i r' són paraules de lletres $\sigma_1, \sigma_1^{-1}, \sigma_2, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma_{n-1}^{-1}$, s'obté $\tilde{f}(r) = \tilde{f}(r')$ que indueix un morfisme $f : B_n \rightarrow G$. La primera relació ens dona

$$\tilde{f}(\tau_i \tau_j) = \tilde{f}(\tau_i) \tilde{f}(\tau_j) = s_i s_j = s_j s_i = \tilde{f}(\tau_j) \tilde{f}(\tau_i) = \tilde{f}(\tau_j \tau_i),$$

per $|i - j| \geq 2$. I la segona

$$\tilde{f}(\tau_i \tau_{i+1} \tau_i) = s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} = \tilde{f}(\tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}).$$

□

Teorema 2.12. *Existeix un únic morfisme $\psi : B_n \rightarrow \mathcal{B}_n$ tal que $\psi(\tau_i) = \sigma_i$ per tot $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Aquest morfisme és un isomorfisme.*

Demostració. L'existència i la unicitat del morfisme ve donada per la Proposició 2.11 i pel fet que els generadors σ_i satisfan les relacions.

Hem vist a la Proposició 2.8 que $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ generen \mathcal{B}_n com a grup; per tant, ψ és exhaustiva. Per veure que és injectiva, construirem un morfisme $\phi : \mathcal{B}_n \rightarrow B_n$ tal que $\phi \circ \psi = id$. Igual que a la demostració de la Proposició 2.8 es pot fer deformar el diagrama \mathcal{D} de $\beta \in \mathcal{B}_n$ de manera que els encreuaments tinguin diferent segona coordenada, és a dir, tindrem β com a l'equació (2.1). Per tant, obtenim,

$$\phi(\beta) = (\tau_{i_1})^{\varepsilon_1} (\tau_{i_2})^{\varepsilon_2} \dots (\tau_{i_k})^{\varepsilon_k} \in B_n$$

amb $\varepsilon_j = \pm 1$.

Per acabar la demostració, ens cal veure que ϕ està ben definida, és a dir, que $\phi(\beta)$ és invariant sota isotopies i moviments de Reidemeister del diagrama \mathcal{D} de β . Si la isotopia manté l'ordre dels encreuament de la trena, tindrem que l'expressió (2.1) de β no canvia i per tant tampoc ho fa $\phi(\beta)$. Si s'intercanvia l'ordre de dos encreuament, passem de tenir $\sigma_i^{\varepsilon_i} \sigma_j^{\varepsilon_j}$ a $\sigma_j^{\varepsilon_j} \sigma_i^{\varepsilon_i}$ per algunes $i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ amb $|i-j| \geq 2$. Per les relacions de trenes d'Artin, donen el mateix element de B_n aplicant ϕ . El moviment Ω_2 afegeix $\sigma_i \sigma_i^{-1}$ i per tant, aplicant ϕ dona la mateixa expressió. Per últim, el moviment Ω_3 intercanvia $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i$ per $\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$, que a B_n són el mateix element per les relacions de trenes. \square

Provat aquest teorema, a partir d'ara, farem servir la notació σ_i pels generadors del grup de trenes, tant si ens referim al d'Artin o bé al geomètric. A més a més, identificarem \mathcal{B}_n amb B_n .

Definició 2.13. Anomenem grup de trenes pures P_n al nucli de la projecció $\pi : B_n \rightarrow S_n$, on S_n és el grup simètric, que envia cada trena a la seva permutació subjacent.

Una trena pura important és $A_{i,j} = \sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \dots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{j-2}^{-1} \sigma_{j-1}^{-1}$, per $1 \leq i < j \leq n$.

Considerem $f_n : P_n \rightarrow P_{n-1}$ el morfisme que envia una trena pura amb n fils a la que s'obté d'extreure-li la n -éssima corda. Definim el grup $U_n = \ker(f_n)$, que és lliure generat pels $n-1$ elements $\{A_{i,n}\}_{i=1,2,\dots,n-1}$. Qualsevol trena pura $\beta \in P_n$, es pot escriure com

$$\beta = \iota(f_n(\beta))\beta_n,$$

amb $\beta_n \in U_n \subset P_n$ i $\iota : P_{n-1} \rightarrow P_n$ la inclusió natural. Repetint aquest procediment, s'obté

$$\beta = \beta_2 \beta_3 \dots \beta_n, \tag{2.2}$$

amb $\beta_i \in U_i \subset P_i$ per $i = 2, 3, \dots, n$.

Definició 2.14. L'expressió (2.2) d'una trena pura s'anomena forma normal.

A [11] es demostren els següents resultats:

Proposició 2.15. Tota trena β de B_n pot ser expressada com $\beta = \Delta_n^k \beta'$ amb $k \geq 0$, on

$$\Delta_n = (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-2}) \dots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1$$

és la trena obtinguda de la indentitat fent un gir d'angle π mantenint fixada la part superior i β' és una trena positiva que no conté la paraula que defineix Δ_n .

Proposició 2.16. Si β i γ són dues trenes tal que $\sigma_i \beta = \sigma_j \gamma$ amb $|i-j| = 1$, aleshores $\beta = \sigma_j \sigma_i \delta$ i $\gamma = \sigma_i \sigma_j \delta$ amb $\delta \in B_n$.

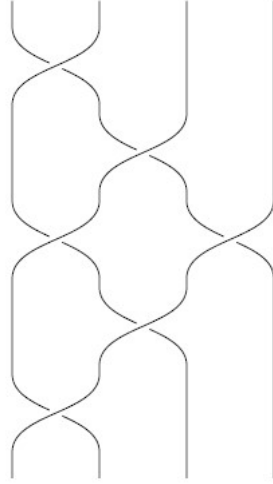


Figura 4 Trena Δ_4 .

Proposició 2.17. Si $\beta \in B_n$ tal que

$$\beta = \sigma_1 \tilde{\beta}_1 = \sigma_2 \tilde{\beta}_2 = \cdots = \sigma_{n-1} \tilde{\beta}_{n-1},$$

amb $\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_{n-1} \in B_n$, aleshores $\beta = \Delta_n \tilde{\beta}$, amb $\tilde{\beta} \in B_n$

Teorema 2.18. Per $n \geq 3$, el centre del grup de trenes $Z(B_n)$ un grup cíclic infinit generat per $\theta_n = \Delta_n^2$.

Demostració. És fàcil veure que $\sigma_i \Delta_n = \Delta_n \sigma_{n-i}$ per tota $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ i, conseqüentment, θ_n commuta amb tots els generadors del grup de trenes, i aleshores, $\theta_n \in Z(B_n)$. En efecte,

$$\sigma_i \theta_n = \sigma_i \Delta_n \Delta_n = \Delta_n \sigma_{n-1} \Delta_n = \Delta_n \Delta_n \sigma_i = \theta_n \sigma_i.$$

Per veure l'altra inclusió, considerem $\beta \in Z(B_n)$, és a dir,

$$\gamma \beta = \beta \gamma \tag{2.3}$$

per tota $\gamma \in B_n$. Per la Proposició 2.15, tenim que β pot tenir una de les formes següents:

1. $\beta = \Delta_n^k \beta'$, amb β' diferent de la trena trivial.
2. $\beta = \Delta_n^{2m+1}$.
3. $\beta = \Delta_n^{2m}$.

Vegem que la única possibilitat és la tercera. En el primer cas, podem escriure $\beta' = \sigma_i \tilde{\beta}'_i$, i agafar $\sigma_s \sigma_i$ com a γ amb $|s-i|=1$. En aquest cas, si suposem p parell, l'equació (2.3) ens dona

$$\Delta_n^k \sigma_i \tilde{\beta}'_i \sigma_s \sigma_i = \sigma_s \sigma_i \Delta_n^k \sigma_i \tilde{\beta}'_i = \Delta_n^k \sigma_s \sigma_i \tilde{\beta}'_i.$$

Per tant, $\sigma_i \tilde{\beta}'_i \sigma_s \sigma_i = \sigma_s \sigma_i \sigma_i \tilde{\beta}'_i$ i per la Proposició 2.16, $\sigma_i \sigma_i \tilde{\beta}'_i = \sigma_i \sigma_s \tilde{\beta}'_s$ per a certa $\gamma \in B_n$. Conseqüentment,

$$\tilde{\beta}'_i = \sigma_s \tilde{\beta}'_s. \quad (2.4)$$

Si p fos imparell, agafant $\gamma = \sigma_{n-s} \sigma_{n-i}$ obtenim el mateix. Tornant a aplicar de forma repetida la Proposició 2.16 a l'equació (2.4), s'aconsegueix

$$\sigma_1 \tilde{\beta}'_1 = \sigma_2 \tilde{\beta}'_2 = \cdots = \sigma_{n-1} \tilde{\beta}'_{n-1},$$

que fent ús de la Proposició 2.17 implica que β' contindria la paraula que determina Δ_n , és a dir, arribem a una contradicció.

En el segon cas, prenent $\gamma = \sigma_i$, per certa i , s'obté $\sigma_i \Delta_n^{2m+1} = \Delta_n^{2m+1} \sigma_i$, i per tant, $\Delta_n^{2m+1} \sigma_i = \Delta_n^{2m+1} \sigma_{n-i}$, cosa impossible per $n > 2$.

Així, hem vist que les trenes de la forma Δ_n^{2m} són del centre i que cap altra hi pertany; per tant, $Z(B_n) = \langle \theta_n \rangle$. \square

Observació 2.18.1. Fent ús de les definicions i de les relacions de trenes, obtenim una manera de calcular θ_n inductivament: $\theta_n = \iota(\theta_{n-1})\gamma$, amb $\iota : B_{n-1} \rightarrow B_n$ la inclusió i $\gamma = \gamma_n = A_{1,n} A_{2,n} \cdots A_{n-1,n}$.

2.1 Grup de classes d'isotopia

Una altra manera d'entendre les trenes i el grup que formen és a través de classes d'isotopia d'homeomorfismes en un disc. Aquesta encarnació la usarem més endavant per demostrar la no fidelitat de la representació de Burau a la Secció 3

Definició 2.19. *Sigui M una superfície orientable amb vora ∂M i Q un conjunt finit de l'interior M° . Un autohomeomorfisme de (M, Q) és un homeomorfisme $f : M \rightarrow M$ que preserva l'orientació de M , $f(Q) = Q$ i deixa fix tot element de la vora, és a dir $f(x) = x$ per qualsevol x de ∂M .*

Dos autohomeomorfismes f_a i f_b de (M, Q) són isotòpics si existeix una isotopia, és a dir, l'aplicació

$$\begin{aligned} M \times I &\rightarrow M \\ (x, t) &\mapsto f_t(x) \end{aligned}$$

és contínua, f_t és un autohomeomorfisme per tota $t \in I$, $f_0 = f_a$ i $f_1 = f_b$.

El grup de classes d'isotopia $\mathfrak{M}(M, Q)$ de (M, Q) és el conjunt de classes d'isotopia d'autohomeomorfismes de (M, Q) amb la composició com a operació de grup. Si $Q = \emptyset$, posem $\mathfrak{M}(M) = \mathfrak{M}(M, \emptyset)$.

Definició 2.20. Un arc α de (M, Q) és un subconjunt de M homeomorfe a l'interval $I = [0, 1]$ disjunt amb $\partial M \cup Q$ excepte el punt inicial $\alpha(0)$ i final $\alpha(1)$, que pertanyen a Q .

Donat un arc de (M, Q) α , definim el mig gir associat

$$\tau_\alpha : (M, Q) \rightarrow (M, Q)$$

identificant un entorn de l'arc α U amb el disc obert $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ de manera que $\alpha = [-1/2, 1/2]$, i l'orientació de M corresponent a la antihorària al disc. Aleshores, τ_α és la identitat fora de U , i

$$z \mapsto \begin{cases} -z & \text{si } |z| \leq 1/2 \\ \exp(-2\pi i|z|)z & \text{si } 1/2 \leq |z| \leq 1. \end{cases}$$

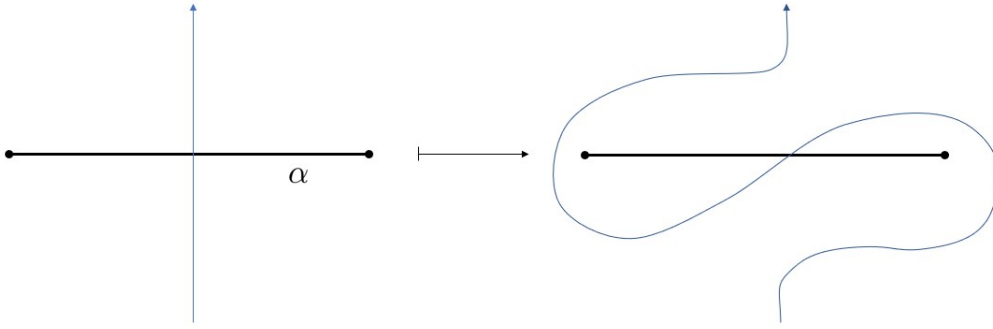


Figura 5 Efecte del mig gir τ_α a una corba transversal.

Proposició 2.21. Els migs girs tenen les següents propietats:

1. Si $f : (M, Q) \rightarrow (M', Q')$ és un homeomorfisme que preserva l'orientació i α és un arc de (M, Q) , aleshores $f(\alpha)$ ho és de (M', Q') i $\tau_{f(\alpha)} = f\tau_\alpha f^{-1}$.
2. Si α i α' són isotòpics, aleshores $\tau_\alpha = \tau_{\alpha'}$ en $\mathfrak{M}(M, Q)$.
3. Si α i β són disjunts a (M, Q) , llavors

$$\tau_\alpha \tau_\beta = \tau_\beta \tau_\alpha \in \mathfrak{M}(M, Q).$$

4. Si dos arcs α i β de (M, Q) són disjunts excepte en un dels punts extrems,

$$\tau_\alpha \tau_\beta \tau_\alpha = \tau_\beta \tau_\alpha \tau_\beta \in \mathfrak{M}(M, Q).$$

5. Un autohomeomorfisme de (M, Q) induïx un autohomeomorfisme a M ignorant Q . En aquest cas, $\mathfrak{M}(M, Q) \rightarrow \mathfrak{M}(M)$ envia $\tau_\alpha \mapsto 1$.

Demostració. La primera afirmació és evident.

Per demostrar el segon, suposem α i α' isotòpiques; per tant, existirà f de (M, Q) , essent la identitat a Q , isotòpica a la identitat tal que $f(\alpha) = \alpha'$. Fent servir el punt 1., $\tau_{\alpha'} = f\tau_{\alpha}f^{-1}$. Com f és isotòpica a la identitat, $f\tau_{\alpha}f^{-1} = \tau_{\alpha}$.

Com α i β són disjunts, per ser un espai normal podem agafar entorns oberts disjunts i llavors és obvi que els migs girs commuten, demostrant el punt 3.

Per últim, tenint en compte la isotopia $\tau_{\alpha}(\beta) = \tau_{\beta}^{-1}(\alpha)$ i fent servir el punt 2., s'obté

$$\tau_{\tau_{\alpha}(\beta)} = \tau_{\tau_{\beta}^{-1}(\alpha)},$$

que és equivalent a $\tau_{\alpha}\tau_{\beta}\tau_{\alpha}^{-1} = \tau_{\beta}^{-1}\tau_{\alpha}\tau_{\beta}$. \square

A continuació farem servir els mitjos girs per relacionar el grup de classes d'isotopia amb el grup de trenes. Per aquest objectiu, considerem, per $n \geq 1$, $Q = \{(1, 0), (2, 0), \dots, (n, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$ i D un disc tancat, orientat en sentit antihorari, que conté Q a l'interior.

Teorema 2.22. *El grup de classes d'isotopia $\mathfrak{M}(D, Q)$ és isomorf al grup de trenes B_n .*

Demostració. Només demostrarem l'existència d'un morfisme de grups; que aquest és un isomorfisme es pot trobar a [14, Secció 1.6]. Per cada $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, definim

$$c_i = [i, i+1] \times \{0\}.$$

Aquests arcs donen lloc a els migs girs $\tau_{c_i} \in \mathfrak{M}(D, Q)$ que per la Proposició 2.21, satisfan les relacions de trenes. Llavors, per la Proposició 2.11, existeix un morfisme

$$\begin{aligned} \eta : B_n &\rightarrow \mathfrak{M}(D, Q) \\ \sigma_i &\mapsto \tau_{c_i} \end{aligned}$$

\square

2.2 Automorfismes de trenes de grups lliures

Una altra manera que veurem de realitzar el grup de trenes B_n és a través del grup d'automorfismes del grup lliure F_n , generat per x_1, \dots, x_n .

Definició 2.23. *Un automorfisme φ de F_n és un automorfisme de trenes si:*

- $\varphi(x_i)$ és el conjugat a F_n d'algun $x_{\mu(i)}$, per tota $i \in \{1, \dots, n\}$, on μ és una permutació de $\{1, \dots, n\}$.
- $\varphi(x_1x_2 \dots x_n) = x_1x_2 \dots x_n$.

Per les propietats que defineixen els automorfismes de trenes, la inversa d'un automorfisme de trenes és un automorfisme de trenes i la composició d'automorfismes d'aquest tipus també ho és; per tant, formen un grup, que anomenarem \tilde{B}_n .

És fàcil veure que els morfismes $\tilde{\sigma}_i, \tilde{\sigma}_i^{-1} : F_n \rightarrow F_n$ donats per

$$\tilde{\sigma}_i(x_j) = \begin{cases} x_{j+1} & \text{si } i = j, \\ x_j^{-1} x_{j-1} x_j & \text{si } j = i + 1, \\ x_j & \text{en qualsevol altre cas,} \end{cases}$$

$$\tilde{\sigma}_i^{-1}(x_j) = \begin{cases} x_j x_{j+1} x_j^{-1} & \text{si } i = j, \\ x_{j-1} & \text{si } j = i + 1, \\ x_j & \text{en qualsevol altre cas} \end{cases}$$

són automorfismes de trenes.

Teorema 2.24. *El morfisme $\phi : B_n \rightarrow \tilde{B}_n$ donat per $\phi(\sigma_i) = \tilde{\sigma}_i$ per tota $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ és un isomorfisme.*

Demostració. El fet que, per definició, $\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_n$ satisfacin les relacions de trenes, fa que l'existència d'un morfisme $\phi : B_n \rightarrow \tilde{B}_n$ quedi provada per la Proposició 2.11.

Sigui $\tilde{\beta} = \phi(\beta)$ per tota $\beta \in B_n$. Si s'abelianitza l'acció de \tilde{B}_n sobre F_n , se n'obté una sobre $F_n/[F_n, F_n] = \mathbb{Z}^n$ amb base $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$ on \tilde{x}_i és la classe del generador x_i per $1 \leq i \leq n$. El generador $\tilde{\sigma}_i$ dona lloc a una permutació de $\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n\}$, en concret, la transposició $(i, i+1)$; per tant, l'acció de $\tilde{\beta}$ a \mathbb{Z}^n ve donada per la permutació $\pi(\beta)$, on, recordem, $\pi : B_n \rightarrow S_n$ envia cada trena a la seva permutació subjacent.

Per demostrar la injectivitat de ϕ , considerem ara β tal que $\tilde{\beta} = 1$, conseqüentment, abelianitzant, obtenim l'automorfisme identitat a $F_n/[F_n, F_n]$ i per tant, $\pi(\beta) = 1$. Això implica que β és una trena pura; aplicant la fórmula (2.2), tindrem que $\beta = \beta_2 \beta_3 \dots \beta_n$ amb $\beta_j \in U_j \subset P_j$ per tota $j = 2, 3, \dots, n$.

Sigui i el nombre màxim tal que $\beta_i \neq 1$, per tant, $\beta = \beta_2 \beta_3 \dots \beta_i$. Com $U_{n+1} \cong F_n$ i $\tilde{\beta} = 1$, tenim que $\iota(\beta) \in P_{n+1}$ commuta amb tots els elements de U_{n+1} , en particular amb $A_{i,n+1}$. Tenint en compte que les trenes $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{i-1}$ són trenes en les quals no apareix el fil i , també commutaran amb $A_{i,n+1}$. Per tant, β_i també commuta amb $A_{i,n+1}$. Tenim doncs que β_i commuta amb $A_{i,n+1}$ i és del grup generat per $A_{1,i}, \dots, A_{i-1,i}$, cosa que només és possible si $\beta_i = 1$. Per tant, $\beta = 1$.

Per demostrar l'exhaustivitat, considerem un automorfisme de trenes diferent de la identitat φ . Suposem que

$$\varphi(x_k) = A_k x_{\mu(k)} A_k^{-1},$$

on A_k és una paraula formada per $x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}$ de manera que $A_k x_{\mu(k)} A_k^{-1}$ no conté $x_r x_r^{-1}$ o $x_r^{-1} x_r$. Afirmem que per demostrar l'exhaustivitat només cal veure que existeixen $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ i una paraula A que satisfan una de les dues condicions següents:

- $A_j = A_{j+1} x_{\mu(j+1)} A$,
- $A_{j+1} = A_j x_{\mu(j)}^{-1} A$.

En efecte, si la primera condició es compleix, els automorfismes $\varphi \tilde{\sigma}_j$ prenen el mateix valor per x_k si $k \neq j, j+1$ i per x_j, x_{j+1} tenim:

$$\begin{aligned} \varphi \tilde{\sigma}_j(x_j) &= \varphi(x_{j+1}) = A_{j+1} x_{\mu(j+1)} A_{j+1}^{-1}, \\ \varphi \tilde{\sigma}_j(x_{j+1}) &= \varphi(x_{j+1}^{-1} x_j x_{j+1}) \\ &= A_{j+1} x_{\mu(j+1)}^{-1} A_{j+1}^{-1} A_j x_{\mu(j)} A_j^{-1} A_{j+1} x_{\mu(j+1)} A_{j+1}^{-1} \\ &= A_{j+1} x_{\mu(j+1)}^{-1} A_{j+1}^{-1} A_{j+1} x_{\mu(j+1)} A x_{\mu(j)} A^{-1} x_{\mu(j+1)}^{-1} A_{j+1}^{-1} A_{j+1} x_{\mu(j+1)} A_{j+1}^{-1} \\ &= A_{j+1} A x_{\mu(j)} A^{-1} A_{j+1}^{-1}. \end{aligned}$$

Hem obtingut que $A_{j+1} A$ és una paraula més curta que $A_j = A_{j+1} x_{\mu(j+1)} A$. De manera anàloga, si la segona condició se satisfà, obtenim que $\varphi \tilde{\sigma}_j^{-1}$ dona lloc a paraules més curtes que φ . Això implica que φ es pot reduir fins la identitat composant repetidament amb $\tilde{\sigma}_j$ o la seva inversa. Per tant $\varphi \in \text{Im} \phi$.

Només falta demostrar l'afirmació, ara. El fet que φ sigui un automorfisme de trenes implica que, necessàriament,

$$A_1 x_{\mu(1)} A_1^{-1} A_2 x_{\mu(2)} A_2^{-1} \dots A_n x_{\mu(n)} A_n^{-1} = x_1 x_2 \dots x_n.$$

Aquesta igualtat implica que $A_1 x_{\mu(1)} A_1^{-1} A_2 x_{\mu(2)} A_2^{-1} \dots A_n x_{\mu(n)} A_n^{-1}$ es redueix, és a dir, hi ha cancel·lacions del tipus $x_r x_r^{-1} = 1 = x_r^{-1} x_r$. Suposem que $x_{\mu(k)}$ de $A_k x_{\mu(k)} A_k^{-1}$ es cancel·la amb $x_{\mu(k)}^{-1}$. Per la irreductibilitat de $A_k x_{\mu(k)} A_k^{-1}$, el terme pot provenir de A_{k-1}^{-1} o de A_{k+1} . En el primer cas, tindrem que $A_{k-1}^{-1} = B x_{\mu(k)}^{-1} A_k^{-1}$, que és el primer cas de l'afirmació per $j = k-1$ i $A = B^{-1}$. El segon cas implica que $A_{k+1} = A_k x_{\mu(k)}^{-1} C$, és a dir, el segon cas de l'afirmació. Finalment, l'última situació possible és que $x_{\mu(k)}$ no es cancel·li; per tant, $\mu(k) = k$, per tota $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, cosa que implicaria que A_1 i A_2 fossin buides i que $A_k = A_{k+1}$ per $k \neq 1$. Això faria que l'automorfisme de trenes φ fos la identitat i arribem a contradicció amb la hipòtesi. \square

Aquest teorema ens permet identificar el grup de trenes de tres formes diferents: com a trenes geomètriques de n fils, automorfismes de trenes d'un grup lliure i com classes d'isotopia al disc. Aquestes tres maneres diferents formen el diagrama commutatiu següent

$$\begin{array}{ccc} B_n & \xrightarrow{\phi} & \tilde{B}_n \\ \downarrow \eta & \nearrow \rho & \\ \mathfrak{M}(D, Q) & & \end{array}$$

Anem a donar una mica d'informació sobre l'isomorfisme ρ . Sigui $d \in \partial D$, clarament, el grup fonamental $\pi_1(D-Q, d)$ és generat per n llaços X_1, \dots, X_n que passen per d i envolten un dels punts de Q , és a dir, és un grup lliure F_n . Doncs cada $f \in \mathfrak{M}(D, Q)$ indueix un automorfisme $\rho(f)$ de $\pi_1(D-Q, d) = F_n$. És evident que si $f \in \mathfrak{M}(D, Q)$, aleshores $f(X_k)$ és homotòpicament equivalent a $X_{\mu(k)}$ per a certa permutació μ ; conseqüentment, $X_{\mu(k)}$ i $\rho(f)(X_k)$ són conjugats, satisfent-se així la primera condició dels automorfismes de trenes. El fet que $X_1 X_2 \dots X_n$ sigui homotòpicament equivalent a ∂D i que f preservi la vora punt a punt, fa que sigui, en efecte, invariant per $\rho(f)$, satisfent-se la condició que mancava.

3 Representació de Burau

De les múltiples representacions que existeixen del grup de trenes, una de les més estudiades és la de Burau, que al 1999 [5] es va demostrar que no és fidel $n \geq 5$; el cas per $n = 4$ encara és obert.

Per $n \geq 2$, considerem les matrius $n \times n$ sobre $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$

$$U_i = \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{pmatrix}.$$

Fixem-nos que per tota $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, les matrius contenen la submatriu

$$U = \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aleshores, per un petit càlcul i pel teorema de Cayley-Hamilton tindrem que $U^2 - \text{tr}(U) - \det(U)I_2 = U^2 - (1-t)U - tI_2 = 0$. Com també es compleix per la identitat, obtenim finalment per tota $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$,

$$U_i^2 - (1-t)U_i - tI_n = 0$$

Rescrivint aquesta última expressió es pot obtenir la matriu inversa:

$$U_i^{-1} = \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t^{-1} & 1-t^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-1-i} \end{pmatrix}.$$

El fet que aquestes matrius estiguin formades per caixes implica que $U_i U_j = U_j U_i$ per totes i, j $|i-j| \geq 2$. Per veure que també es compleix l'altra relació de trenes ens fixem en les matrius 3×3 següents

$$\begin{pmatrix} 1-t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aquesta igualtat demostra que $U_i U_{i+1} U_i = U_{i+1} U_i U_{i+1}$.

Puix que es compleixen les dues relacions de trenes, per la Proposició 2.11 existeix un morfisme $\psi_n : B_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ amb $\psi_n(\sigma_i) = U_i$. Aquest morfisme s'anomena *representació de Burau* de B_n .

Una interpretació d'aquesta representació donada per [13] per a trenes positives, és la

següent: estenem la trena tal com si fossin n pistes de bitlles, entrecruant-se com mana la trena. Si en un encreuament σ_i una bola que anava per la pista i té probabilitat $1 - t$ de canviar de pista, les entrades (i, j) de la matriu de Burau són les probabilitats d'una bola llançada per la pista i acabi a la j .

En efecte, si la trena és un generador, σ_i , la probabilitat que la bola llançada a la i -èsima pista acabi a la pista i -èsima és $1 - t$, és a dir, que canviï de pista a l'encreuament. I la probabilitat que acabi a $i + 1$ és t , és a dir, que no canviï. Que comenci a $i + 1$ i acabi a i és 0, ja que amb l'encreuament donat no pot haver canvi de pista. La resta de possibilitats són 0. Doncs hem vist que per un generador σ_i l'afirmació és certa.

Farem inducció sobre el nombre de generadors que formen la trena, és a dir, suposem que per trenes $\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_k}$ es compleix, anem a veure-ho per $k + 1$ generadors. Sigui $\beta = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_k} \sigma_{i_{k+1}}$, aleshores tindrem

$$\psi(\beta) = \tilde{U}_k U_{i_{k+1}}$$

on $\tilde{U}_k = (a_{st}) = \psi(\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_k})$ i $U_{i_{k+1}} = (b_{st}) = \psi(\sigma_{i_{k+1}})$.

Fixem-nos que els únics casos que ens importen són els que involucren les cordes i_{k+1} i $i_{k+1} + 1$.

1. Si $\sigma_{i_{k+1}}$ no afecta les cordes i i j , tenim que la probabilitat no canvia. En aquest cas, $b_{sj} = 1$ si $s = j$ i 0 en cas contrari; per tant $\psi(\beta)_{i,j} = \sum_{s=1}^n a_{is} b_{sj} = a_{ij}$
2. Si $i_{k+1} + 1 = j$, tenim que la probabilitat que la bola llançada per i acabi en j és la que teníem que acabés a i_{k+1} abans d'afegir l'últim encreuament i que no canviï en aquest últim encreuament. En aquest cas, $b_{sj} = t$ si $s = i_{k+1}$ i 0 en cas contrari. I $\psi(\beta)_{i,j} = \sum_{s=1}^n a_{is} b_{sj} = t a_{i i_{k+1}}$, tal i com havíem predit.
3. Si $i_{k+1} = j$, la probabilitat que busquem serà la probabilitat que abans de l'encreuament anés per j i canviï més la probabilitat que la bola ja anés per la línia $i_{k+1} + 1$ abans de l'últim encreuament. En aquest cas,

$$b_{sj} = \begin{cases} 1 - t & \text{si } s = j \\ 1 & \text{si } s = i_{k+1} + 1 \end{cases}$$

i per tant, $\psi(\beta)_{i,j} = \sum_{s=1}^n a_{is} b_{sj} = (1 - t)a_{ij} + a_{i i_{k+1} + 1}$, tal i com havíem predit.

Proposició 3.1. ψ_2 és fidel.

Demostració. És immediat si ens adonem que

$$(1, -1)U_1 = (-t, t) = -t(1, -1)$$

I consegüentment, $(1, -1)U_1^k = (-t)^k(1, -1)$ per tot $k \in \mathbb{Z}$; és a dir, no existeix $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ tal que $U_1^k = id$. \square

3.1 Representació de Burau reduïda

Diem que dues representacions d'un grup G en dos espais vectorials V i W , $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ i $\eta : G \rightarrow \text{GL}(W)$ són equivalents si hi ha un isomorfisme entre $\text{GL}(V)$ i $\text{GL}(W)$ que fa el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \text{GL}(U) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \text{GL}(W) \end{array}$$

commutatiu. Ara veurem que existeix una representació equivalent a la de Burau reduïda, és a dir, que la representació de Burau té subespais invariants per l'acció del grup. La demostració de la irreductibilitat d'aquesta nova representació es pot trobar a [6] o [14, Secció 5.6]. En aquesta secció, utilitzarem les matrius $U_1, \dots, U_{n-1} \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.

Teorema 3.2. *Per $n \geq 3$, considerem les matrius $(n-1) \times (n-1)$ següents*

$$V_1 = \begin{pmatrix} -t & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-3} \end{pmatrix}, \quad V_{n-1} = \begin{pmatrix} I_{n-3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & -t \end{pmatrix}$$

i per a tot $i \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$V_i = \begin{pmatrix} I_{i-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-i-2} \end{pmatrix}.$$

Aleshores,

$$C^{-1}U_iC = V'_i = \begin{pmatrix} V_i & 0 \\ *_{i-1} & 1 \end{pmatrix}$$

per a tot $1 \leq i \leq n-1$, amb C la matriu $n \times n$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

*i on $*_{i-1}$ és una fila igual a 0 si $i \leq n-2$ i igual a $(0, \dots, 0, 1)$ si $i = n-1$.*

Demostració. Només ens cal veure que $U_iC = CV'_i$ per tota i . Calculant és fàcil veure que la matriu U_iC és igual a la matriu C posant $1-t$ a (i, i) i canviant l'entrada $(i+1, i)$ per 1. De manera anàloga, es pot veure que CV'_i té la mateixa forma. \square

Com les matrius $\{U_i\}$ satisfan les relacions de trenes, també ho fan les matrius

$$C^{-1}U_1C, \dots, C^{-1}U_{n-1}C,$$

i per conseqüència d'aquest últim teorema, també les matrius V_1, \dots, V_{n-1} satisfan les relacions de trenes. És fàcil veure que aquestes matrius són invertibles; i per tant, pertanyen a $\text{GL}_{n-1}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$. Aleshores, per la Proposició 2.11, $\psi_n^r(\sigma_i) = V_i$ dona lloc a un morfisme anomenat *representació de Burau reduïda* $\psi_n^r : B_n \rightarrow \text{GL}_{n-1}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ per $n \geq 3$. Per completió, es defineix $\psi_2^r = (-t)$ per $n = 2$.

Conseqüentment, per qualsevol $n \geq 2$ i per tota $\beta \in B_n$,

$$C^{-1}\psi_n(\beta)C = \begin{pmatrix} \psi_n^r(\beta) & 0 \\ *_\beta & 1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Amb $*_\beta$ una fila que depèn de β .

Lema 3.3. Per $i = 1, \dots, n-1$, sigui a_i la fila i -ésima de $\psi_n^r(\beta) - I_{n-1}$. Es té

$$-(1+t+\dots+t^{n-1}) \cdot (*_\beta) = \sum_{i=1}^{n-1} (1+t+\dots+t^i) \cdot a_i$$

Demostració. Considerem $E = (1, t, t^2, t^3, \dots, t^{n-1}) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]^n$. Un petit càlcul mostra que $EU_i = E$; conseqüentment, $E\psi_n(\beta) = E$. Si multipliquem per C per la dreta,

$$EC = (1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3, \dots, 1+t+\dots+t^{n-1})$$

que satisfà

$$EC \begin{pmatrix} \psi_n^r(\beta) & 0 \\ *_\beta & 1 \end{pmatrix} = ECC^{-1}\psi_n(\beta)C = EC$$

Restant EC a cada costat, obtenim el que buscàvem. \square

Si $\psi_n^r = I_{n-1}$, aleshores $*_\beta = 0$ i $\psi_n = I_n$; així doncs, $\ker \psi_n^r \subset \ker \psi_n$. I per l'equació (3.1) tenim l'altra inclusió. En conclusió, $\ker \psi_n^r = \ker \psi_n$, no perdem informació al passar de la representació de Burau a la representació de Burau reduïda.

3.1.1 Fidelitat de ψ_3

Com a aplicació de la representació de Burau reduïda, demostrarem que per $n = 3$ és fidel. Tanmateix, necessitem resultats previs sobre el grup

$$\text{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}.$$

Lema 3.4. *Les presentacions*

$$\langle a, b \mid aba = bab, (aba)^4 = 1 \rangle$$

$$\langle s, t \mid s^3 = t^2, t^4 = 1 \rangle$$

donen lloc al mateix grup G , isomorf a $B_3 / \langle (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1)^4 \rangle$.

Demostració. Per demostrar que les dues presentacions corresponen al mateix grup G , és suficient observar que les transformacions

$$s = ab, t = aba \quad \text{i}$$

$$a = s^{-1}t, b = t^{-1}s^2$$

són inverses una de l'altra. Hi ha un morfisme determinat per $a \mapsto \sigma_1$ i $b \mapsto \sigma_2$ que permet veure que G és isomorf al quocient entre B_3 i el subgrup generat per $(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1)^4$, aquest subgrup és central pel Teorema 2.18. \square

A [23] es demostra

Teorema 3.5. *El morfisme $f : G \rightarrow SL_2(\mathbb{Z})$ que envia*

$$a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

és un isomorfisme.

Substituint t per -1 , obtenim un morfisme $\varphi : GL_2(\mathbb{Z}[t, t^{-1}]) \rightarrow SL_2(\mathbb{Z})$, que verifica

$$\varphi(V_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(V_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al teorema anterior hem vist que el grup $SL_2(\mathbb{Z})$ és generat per $\varphi(V_1)^T$ i $\varphi(V_2)^T$ amb les relacions

$$\varphi(V_1)^T \varphi(V_2)^T \varphi(V_1)^T = \varphi(V_2)^T \varphi(V_1)^T \varphi(V_2)^T (\varphi(V_1)^T \varphi(V_2)^T \varphi(V_1)^T)^4 = 1.$$

També podem generar aquest grup mitjançant les matrius sense transposar. Aleshores, el morfisme $\varphi \circ \psi_3^r : B_3 \rightarrow SL_2(\mathbb{Z})$ envia els generadors a les matrius anteriors i $(\varphi(V_1)\varphi(V_2)\varphi(V_1))^4$ pertany al nucli. Per les relacions de trenes, aquesta última és central; per tant, pel Teorema 2.18, el nucli és el grup central cíclic $\langle (\varphi(V_1)\varphi(V_2)\varphi(V_1))^4 \rangle$. En conseqüència,

$$\ker \psi_3 \subset \ker \varphi \circ \psi_3^r = \langle (\varphi(V_1)\varphi(V_2)\varphi(V_1))^4 \rangle.$$

A més a més, com

$$V_1 V_2 V_1 = \begin{pmatrix} 0 & -t^2 \\ -t & 0 \end{pmatrix},$$

es té

$$(V_1 V_2 V_1)^2 = \begin{pmatrix} t^3 & 0 \\ 0 & t^3 \end{pmatrix}.$$

I per tant, per tot nombre $k \in \mathbb{Z}$ diferent de zero, la representació de Burau reduïda enviarà

$$(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1)^{4k} \mapsto (V_1 V_2 V_3)^{4k} = \begin{pmatrix} t^{6k} & 0 \\ 0 & t^{6k} \end{pmatrix}$$

que és diferent de la unitat. És a dir, $\ker \psi_3 = \ker \psi_3^r = \{1\}$.

3.2 Representacions homològiques

Sigui Σ una superfície connexa i orientada amb vora $\partial\Sigma$, anomenem $\mathfrak{M}(\Sigma)$ les classes d'isotopia dels homeomorfismes de Σ a Σ que preserven l'orientació i fixen punt a punt la vora. És fàcil veure que els elements de $\mathfrak{M}(\Sigma)$ indueixen un automorfisme al grup d'homologia $H = H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$, és a dir, tenim un morfisme $\mathfrak{M}(\Sigma) \rightarrow \text{Aut}(H)$, que anomenem la *representació homològica* de $\mathfrak{M}(\Sigma)$. Podem definir una aplicació bilineal antisimètrica anomenada *aplicació intersecció* $H \times H \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que donats dos llaços α, β a Σ , amb classes d'homologia $[\alpha], [\beta]$, suposant que no hi ha autointerseccions, $([\alpha], [\beta]) \mapsto [\alpha] \cdot [\beta] = \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \varepsilon_p$, on el signe de la intersecció ε_p és $\varepsilon_p = +1$ si els vectors tangents de α i β al punt p formen una base positiva i $\varepsilon_p = -1$ en cas contrari. De la definició es despréu que el valor de l'aplicació intersecció és un invariant topològic; per tant, de vegades s'escriurà $\alpha \cdot \beta$ en comptes de $[\alpha] \cdot [\beta]$. L'acció de $\mathfrak{M}(\Sigma)$ a H preserva aquesta aplicació bilineal.

3.2.1 Representació homològica torçada

Aquesta representació anterior té una versió interessant que serà la que usarem més endavant per al grup de trenes.

Sigui $d \in \partial\Sigma$, G un grup i $\varphi : \pi_1(\Sigma, d) \rightarrow G$ un morfisme exhaustiu. Per la teoria d'espais recobridors, tenim un recobriment tal que els seus automorfismes s'identifiquen al grup G , el denotem $\pi : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$. Sigui $\tilde{d} \in \tilde{\Sigma}$ tal que $\tilde{d} \in \pi^{-1}(d)$ i sigui $\tilde{H} = H_1(\tilde{\Sigma}, G\tilde{d}, \mathbb{Z})$, on $G\tilde{d}$ és l'òrbita de \tilde{d} . L'acció de G a $\tilde{\Sigma}$ indueix una acció a \tilde{H} que fa que el grup d'homologia \tilde{H} sigui un mòdul sobre $\mathbb{Z}[G]$. Donat que Σ es retracta a una unió de n llaços que contenen d , \tilde{H} com a $\mathbb{Z}[G]$ -mòdul és de rang n . És fàcil veure que $\text{Aut}(\tilde{H}) \cong \text{GL}_n(\mathbb{Z}[G])$.

Un morfisme f de Σ que fixa la vora punt a punt, i per tant, fixant d , indueix un isomorfisme $f_* : \pi_1(\Sigma, d) \rightarrow \pi_1(\Sigma, d)$. Anomenem $\mathfrak{M}_\varphi(\Sigma, d)$ el grup de classes d'isotopia

dels homeomorfismes f de Σ a Σ que conserven l'orientació i fixen la vora punt a punt tals que $\varphi \circ f_* = \varphi$. Cada $f \in \mathfrak{M}_\varphi(\Sigma, d)$ s'eleva de manera única a un automorfisme $\tilde{f} : \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{\Sigma}$ que fixa \tilde{d} . Per definició de $\mathfrak{M}_\varphi(\Sigma, d)$, \tilde{f} commuta amb l'acció de G a $\tilde{\Sigma}$, cosa que fa que \tilde{f} deixi fix el conjunt $G\tilde{d}$. Definim la *representació homològica torçada* de $\mathfrak{M}_\varphi(\Sigma, d)$ com

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_\varphi(\Sigma, d) &\rightarrow \text{Aut}(\tilde{H}) \\ f &\mapsto \tilde{f}_\# \end{aligned}$$

on $\tilde{f}_\#$ és l'automorfisme de \tilde{H} induït per \tilde{f} en homologia relativa.

3.3 Representació homològica torçada de trenes

Fixem $n \geq 1$ i sigui $Q = \{(1, 0), (2, 0), \dots, (n, 0)\}$ i D un disc tancat amb orientació antihorària que conté Q a l'interior. Definim $\Sigma = D - Q$ i escollim $d \in \partial\Sigma$. Sigui $\tilde{\Sigma}$ el recobriment determinat per φ com a 3.2.1,

$$\begin{aligned} \varphi : \pi_1(\Sigma, d) &\rightarrow \{t^k\}_{k \in \mathbb{Z}} \\ \gamma &\mapsto t^{-\mu(\gamma)} \end{aligned}$$

on $\mu(\gamma)$ és l'índex total de la corba γ , és a dir, la suma dels índexs de γ respecte dels punts de Q . Escollim un punt $\tilde{d} \in \partial\tilde{\Sigma}$ i anomenem \tilde{H} al grup $H_1(\tilde{\Sigma}, \cup_{k \in \mathbb{Z}} t^k \tilde{d}; \mathbb{Z})$.

Tot homeomorfisme $D \rightarrow D$ que permuti els punts de Q manté invariant l'índex total a Σ . Per tant, si restringim a Σ , obtenim el morfisme

$$\mathfrak{M}(D, Q) \rightarrow \mathfrak{M}_\varphi(\Sigma, d),$$

on, recordem, $\mathfrak{M}(D, Q)$ és el conjunt de classes d'isotopia d'homeomorfismes de D que preserven l'orientació, fixen puntualment ∂D i deixen invariant el conjunt Q . Compositant aquest morfisme amb la representació homològica torçada, s'obté una representació

$$\Psi_n : \mathfrak{M}(D, Q) \rightarrow \text{Aut}(\tilde{H})$$

Teorema 3.6. *La representació no és fidel per $n \geq 6$.*

Observació 3.6.1. Com s'ha exposat anteriorment, a [5] es demostra de manera semblant que la representació no és fidel per $n \geq 5$.

3.4 Demostració del Teorema 3.6

Per demostrar el teorema, comencem estudiant el nucli de la representació Ψ_n .

Definició 3.7. *Dos arcs de (D, Q) són transversals si tenen punts inicials i finals diferents i es troben un nombre finit de cops.*

Donats dos arcs transversals α i β , definim la seva intersecció algebraica a $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ com

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (t^k \tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}) t^k,$$

on $\tilde{\alpha}$ i $\tilde{\beta}$ són elevacions dels camins α i β respectivament i on $t^k \tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta} \in \mathbb{Z}$ és la intersecció de $t^k \tilde{\alpha}$, una altra elevació de α obtinguda a partir de $\tilde{\alpha}$ a través d'un automorfisme del recobriment, i $\tilde{\beta}$, definida igual que al primer paràgraf de la secció 3.2. Es pot veure que aquesta expressió és equivalent a

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \varepsilon_p t^{k_p},$$

on $\varepsilon_p = \pm 1$ es la signe de la intersecció p . Una propietat interessant és el fet que donats $p, q \in \alpha \cap \beta$, $k_p - k_q$ és igual a l'índex total del llaç que consisteix en recórrer α de p a q i seguidament recórrer β de q a p [14, Secció 3.2].

Com es va comentar en seccions anteriors, cada arc α de (D, Q) dona lloc a un mig gir $\tau_\alpha : (D, Q) \rightarrow (D, Q)$. Podem restringir aquest gir a Σ i llavors $\tau_\alpha \in \mathfrak{M}(D, Q)$.

Teorema 3.8. *Donats dos arcs α, β a (D, Q) , si $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$, aleshores $\Psi_n(\tau_\alpha \tau_\beta) = \Psi_n(\tau_\beta \tau_\alpha)$.*

Demostració. Considerem un camí orientat α de (D, Q) , i definim α' com a la figura 6, orientat de manera que $[\alpha] \cdot [\alpha'] = -2$, on $[\alpha]$, $[\alpha']$ són les classes d'homologia de α i α' .

Tenim que a \tilde{H} , $\Psi_n(\tau_\alpha) = (\tilde{\tau}_\alpha)_\#$, on $(\tilde{\tau}_\alpha)_\#$ és l'automorfisme de \tilde{H} induït en homologia relativa per $\tilde{\tau}_\alpha$, una elevació a $\tilde{\Sigma}$ de τ_α que deixa fix \tilde{d} . Fixem-nos que l'índex total de α' és zero, de manera que la seva elevació és un llaç $\tilde{\alpha}' \in \Sigma$. De manera semblant al que s'ha dit anteriorment, aquesta elevació del mig gir s'aplica sobre un camí orientat qualsevol $\gamma \in \tilde{\Sigma}$ amb extrems antiimatges a $\tilde{\Sigma}$ de d afegint $(\alpha')^{\pm 1}$ a cada intersecció de γ amb alguna elevació de α . Conseqüentment,

$$(\tilde{\tau}_\alpha)_\#([\gamma]) = [\gamma] + P_\gamma(t, t^{-1})[\tilde{\alpha}'],$$

on $P_\gamma(t, t^{-1})$ és un polinomi de Laurent donat per les interseccions algebraiques de γ amb les elevacions de α' .

Si calculem $(\tilde{\tau}_\alpha)_\#([\tilde{\beta}'])$, com $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$, també serà nul el producte de qualsevol elevació α amb les elevacions de β ; i per tant, també amb l'elevació $\tilde{\beta}'$ de β' . És a dir, $P_{\tilde{\beta}'} = 0$ i doncs, $(\tilde{\tau}_\alpha)_\#([\tilde{\beta}']) = [\tilde{\beta}']$. De manera anàloga, $(\tilde{\tau}_\beta)_\#([\tilde{\alpha}']) = [\tilde{\alpha}'] + R_{\tilde{\alpha}'}(t, t^{-1})[\tilde{\beta}']$ amb $R_{\tilde{\alpha}'}(t, t^{-1})$ un polinomi de Laurent donat per les interseccions geomètriques; ja que $\langle \beta, \alpha \rangle = 0$, $R_{\tilde{\alpha}'}(t, t^{-1}) = 0$ i $(\tilde{\tau}_\beta)_\#([\tilde{\alpha}']) = [\tilde{\alpha}']$. Podem doncs afirmar que

$$(\tilde{\alpha} \tilde{\beta})_\#([\gamma]) = [\gamma] + P_\gamma(t, t^{-1})[\tilde{\alpha}'] + R_\gamma(t, t^{-1})[\tilde{\beta}'] = (\tilde{\beta} \tilde{\alpha})_\#([\gamma]).$$

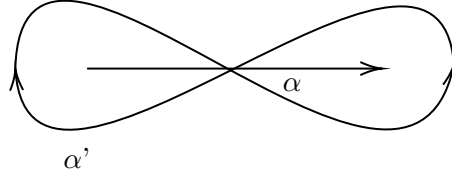


Figura 6 Llaç α' associat a τ_α .

□

Gràcies a aquest teorema, per demostrar 3.6, només cal trobar dos arcs tals que els seus mig girs no commutin i amb intersecció algebraica nul·la. Per veure-ho, farem servir certs resultats sobre girs de Dehn.

Definició 3.9. Una corba tancada simple a Σ és una incrustació ("embedding") $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \Sigma^\circ$ on Σ° denota l'interior de Σ . Donada una corba tancada simple c , definim el gir de Dehn t_c identificant un entorn A de la corba amb $\mathbb{S}^1 \times I$, amb $I = [0, 1]$, de manera de $c \cong \mathbb{S}^1 \times \{1/2\}$. Aleshores, $t_c : \Sigma \rightarrow \Sigma$ és la identitat fora de A i, per $(x, s) \in \mathbb{S}^1 \times I$, $t_c((x, s)) = (e^{2\pi i s} x, s)$. És clar que $t_c \in \mathfrak{M}(\Sigma)$ i que, donada $f \in \mathfrak{M}(\Sigma)$, $t_{f(c)} = f t_c f^{-1}$.

Dues corbes c, d són isotòpiques si existeix un homeomorfisme isotòpic a la identitat que envia c a d . Evidentment, si c i d són isotòpiques, $t_c = t_d$ a $\mathfrak{M}(\Sigma)$.

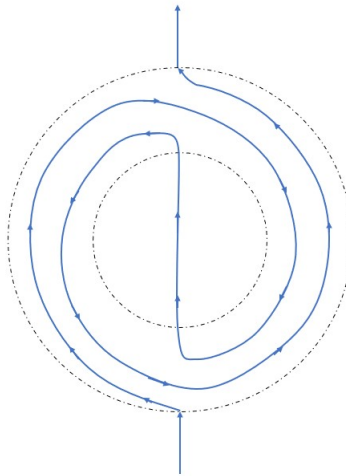


Figura 7 Gir de Dehn.

Els dos lemes següents de [20, Secció 3] ens ajudaran a demostrar la no fidelitat de la representació de Burau.

Lema 3.10. *Donades dues corbes simples tancades c, d sobre una superfície orientable Σ , t_c i t_d commuten si i només si c i d són isotòpiques a corbes simples tancades disjunes.*

Lema 3.11. *Si dues corbes simples tancades c, d sobre Σ són isotòpiques a dues corbes simples tancades c', d' tals que $\text{card}(c' \cap d') < \text{card}(c \cap d)$, aleshores c i d formen un diàgon, un disc "incrustat" a Σ amb la seva frontera subarcs de c i d i el seu interior disjunt amb c i d .*

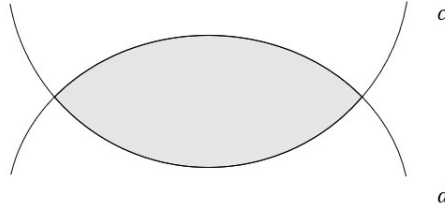


Figura 8 Diàgon

Per relacionar els girs de Dehn amb els mitjos girs, considerem un arc α a (D, Q) i un disc tancat al voltant de l'arc que només talli Q a $\partial\alpha$. Si $c(\alpha)$ és la vora d'aquest disc, tenim

$$t_{c(\alpha)} = \tau_\alpha^2.$$

Per veure que Ψ no és injectiva per $n \geq 6$, considerem α i β com a la Figura 9.

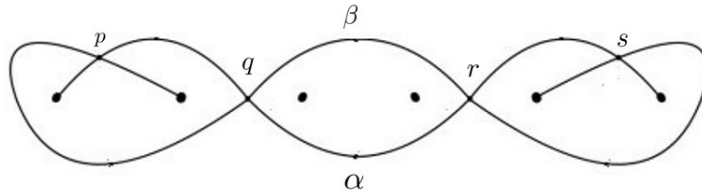


Figura 9 Camins α i β .

Per calcular $\langle \alpha, \beta \rangle$, fem servir la propietat esmentada a la Definició 3.7 i obtenim

$$\begin{aligned} k_p - k_q = 2 &\Rightarrow k_q = k_p - 2 \\ k_q - k_r = -2 &\Rightarrow k_r = k_q + 2 = k_p \\ k_r - k_s = 2 &\Rightarrow k_s = k_r - 2 = k_q. \end{aligned}$$

Per tant, $\langle \alpha, \beta \rangle = t^{k_p} + t^{k_q} - t^{k_r} - t^{k_s} = 0$ i aplicant el Teorema 3.8, obtenim que $\Psi_6(\tau_\alpha \tau_\beta) = \Psi_6(\tau_\beta \tau_\alpha)$. Ja només manca veure que α i β no commuten. Si ho fessin,

també ho farien el seus quadrats, és a dir, els girs de Dehn $t_{c(\alpha)}$ i $t_{c(\beta)}$ i pels Lemes 3.10 i 3.11, hauria d'haver un diàgon. Tanmateix, és fàcil veure que $c(\alpha)$ i $c(\beta)$ no en tenen cap. Conseqüentment, els mitjos girs no commuten, és a dir, $\tau_\alpha \tau_\beta \tau_\alpha^{-1} \tau_\beta^{-1} \in \ker \Psi_6$.

3.5 Equivalència de representacions

Abans de començar, recordem l'isomorfisme $\eta : B_n \rightarrow \mathfrak{M}(D, Q)$ que envia els generadors del grup de trenes a un mig gir, $\eta(\sigma_i) = \tau_{c_i}$, on $c_i = [i, i + 1] \times \{0\}$.

Teorema 3.12. *L'isomorfisme $\mu : GL_n(\mathbb{Z}[t, t^{-1}]) \rightarrow \text{Aut}(\tilde{H})$ existeix i fa el següent diagrama commutatiu:*

$$\begin{array}{ccc} B_n & \xrightarrow{\eta} & \mathfrak{M}(D, Q) \\ \downarrow \psi_n & & \downarrow \Psi_n \\ GL_n(\mathbb{Z}[t, t^{-1}]) & \xrightarrow{\mu} & \text{Aut}(\tilde{H}) \end{array}$$

Demostració. La superfície Σ pot ser retractada a un graf format per un vèrtex d de la vora del disc i n llaços orientats horàriament X_1, \dots, X_n , de manera que el morfisme φ els envia a t .

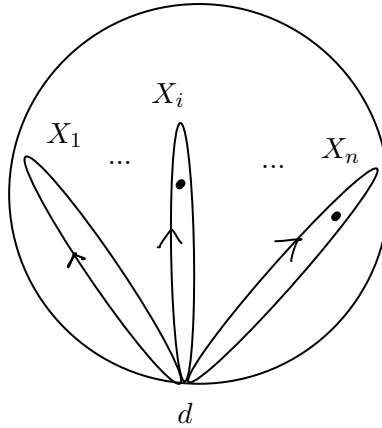


Figura 10 Retracte de Σ .

Siguin $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n$ elevacions de X_1, X_2, \dots, X_n a $\tilde{\Sigma}$. El recobriment $\tilde{\Sigma}$ pot retractar-se a un graf infinit de vèrtex $\{t^k \tilde{d}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ i arestes $\{t^k \tilde{X}_i\}_{k \in \mathbb{Z}}$, on $t^k \tilde{X}_i$ són elevacions de X_i obtingudes a partir de \tilde{X}_i a través d'automorfismes del recobriment per $k \in \mathbb{Z}$ i $i = 1, 2, \dots, n$, de manera que cada aresta connecta $t^k \tilde{d}$ amb $t^{k+1} \tilde{d}$. Conseqüentment, $\tilde{H} = H_1(\tilde{\Sigma}, \cup t^k \tilde{d}; \mathbb{Z})$ és un $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -mòdul lliure amb base $[\tilde{X}_i]$. Ara, amb aquesta base, podem identificar $\text{Aut}(\tilde{H})$ amb $GL_n(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ i doncs, l'isomorfisme

$$\mu : GL_n(\mathbb{Z}[t, t^{-1}]) \rightarrow GL_n(\mathbb{Z}[t, t^{-1}]) = \text{Aut}(\tilde{H})$$

ve donat per $\mu(U) = (U^T)^{-1}$, on $U \in GL_n(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$. Manca veure la commutativitat, és a dir, per tota trena β , se satisfà la igualtat $\Psi_n \eta(\beta) = \mu \psi_n(\beta)$. Realment, només cal

veure-ho pels generadors $\{\sigma_i\}_{i=1,\dots,n-1}$ de B_n ; mirarem l'efecte sobre X_j aplicant σ_i^{-1} . Començant pel costat esquerre, tenim que $\eta(\sigma_i^{-1})$ intercanvia els punts $(i, 0)$ i $(i + 1, 0)$ horàriament; per tant, X_i es transforma en $X_i X_{i+1} X_i^{-1}$, X_{i+1} a X_i i la resta dels X_j són invariants. Si elevem a $\tilde{\Sigma}$, obtenim que \tilde{X}_i es transforma en $\tilde{X}_i(t\tilde{X}_{i+1})(t\tilde{X}_i)^{-1}$, \tilde{X}_{i+1} en \tilde{X}_i i la resta es queden fixats. Doncs, $\Psi_n \eta(\sigma_i^{-1})$ actua enviant

$$[\tilde{X}_i] \mapsto (1-t)[\tilde{X}_i] + t[\tilde{X}_{i+1}], \quad [\tilde{X}_{i+1}] \mapsto [\tilde{X}_i], \quad [\tilde{X}_k] \rightarrow [\tilde{X}_k] \text{ per } k \neq i, i+1.$$

Fixem-nos que la matriu d'aquest morfisme en la base triada no és res més que $U_i^T = \mu\psi_n(\sigma_i^{-1})$. \square

Per tant, acabem de veure que

Teorema 3.13. *La representació de Burau ψ_n no és fidel per $n \geq 6$.*

Com s'ha dit abans, i com a resum, hem vist que la representació de Burau és fidel per $n \leq 3$, no és fidel per $n \geq 5$ i el cas de $n = 4$ encara resta obert.

Anem ara a calcular a quina trena correspon l'element trobat del nucli de Ψ_n . És un petit exercici veure que $\alpha = \eta(\gamma_1)(c_3)$ i $\beta = \eta(\gamma_2)(c_3)$ on

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_5^{-1} \sigma_4 \\ \gamma_2 &= \sigma_1^{-2} \sigma_2 \sigma_5^2 \sigma_4^{-1}. \end{aligned}$$

Conseqüentment, $\tau_\alpha = \eta(\gamma_1)\tau_{c_3}\eta^{-1}(\gamma_1)$, $\tau_\beta = \eta(\gamma_2)\tau_{c_3}\eta^{-1}(\gamma_2)$. Per tant, l'element no trivial corresponent a $\tau_\alpha\tau_\beta\tau_\alpha^{-1}\tau_\beta^{-1}$ al nucli de ψ_6 és $[\gamma_1\sigma_3\gamma_1^{-1}, \gamma_2\gamma_3\gamma_2^{-1}]$. Aquest element es pot escriure com el producte de 44 generadors; per aquest motiu, no l'expressem més explícitament.

3.6 Representació de Burau a color

Una generalització de la representació de Burau interessant és la *representació de Burau a color* [1]. Aquesta representació restringida al subgrup de trenes pures dona lloc a la *representació de Gassner*.

A dia d'avui, no se sap res sobre la fidelitat de la representació de Gassner per $n \geq 4$, només que depèn de la fidelitat en un subgrup lliure del subgrup de trenes.

Definició 3.14. *Donats dos grups A i B i un morfisme $\varphi : B \rightarrow \text{Aut}(A)$, es defineix el producte (extern) semi-directe $A \rtimes B$ com el grup que té per conjunt base $A \times B$ i l'operació \star és $(a_1, b_1) \star (a_2, b_2) = (a_1\varphi(b_1)(a_2), b_1b_2)$.*

Definició 3.15. *Donada $n \geq 2$, considerem l'anell de sèries de Laurent sobre els enters*

$\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$ i el morfisme $cb : B_n \rightarrow GL_n(\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}])$ que envia els generadors σ_i a

$$\sigma_i \mapsto \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & t_i & -t_i & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

En el cas $i = 1$, la matriu és

$$\sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} -t_1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Considerem el grup

$$G = GL_n(\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]) \rtimes S_n$$

amb el morfisme $\varphi : S_n \rightarrow \text{Aut}(GL_n(\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]))$ que intercanvia les variables t_i dels elements de $GL_n(\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}])$ segons l'element del grup simètric i els elements $(cb(\sigma_i), \pi(\sigma_i))$, per $i = 1, 2, \dots, n-1$, on $\pi : B_n \rightarrow S_n$ envia cada trena a la permutació subjacent. Veurem ara que aquests elements de G satisfan les relacions de trenes.

1. Si $|i-j| \geq 2$, és evident que $(cb(\sigma_i), \pi(\sigma_i))(cb(\sigma_j), \pi(\sigma_j)) = (cb(\sigma_j), \pi(\sigma_j))(cb(\sigma_i), \pi(\sigma_i))$.
2. Si $j = i+1$, considerant les submatrius diferents de la identitat, tenim

$$(cb(\sigma_i), \pi(\sigma_i)) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_i & -t_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (i, i+1) \right),$$

$$(cb(\sigma_{i+1}), \pi(\sigma_{i+1})) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t_{i+1} & -t_{i+1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (i+1, i+2) \right).$$

Aleshores,

$$\begin{aligned}
(cb(\sigma_i), \pi(\sigma_i)) \star (cb(\sigma_{i+1}), \pi(\sigma_{i+1})) &= \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_i & -t_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t_i & -t_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (i, i+1, i+2) \right) = \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_i & 0 & -t_i & 1 \\ 0 & t_i & -t_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (i, i+1, i+2) \right).
\end{aligned}$$

I finalment,

$$\begin{aligned}
&(cb(\sigma_i), \pi(\sigma_i)) \star (cb(\sigma_{i+1}), \pi(\sigma_{i+1})) \star (cb(\sigma_i), \pi(\sigma_i)) = \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_i & 0 & -t_i & 1 \\ t_i t_{i+1} & -t_i t_{i+1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (3, 2, 4) \right) = \\
&= (cb(\sigma_{i+1}), \pi(\sigma_{i+1})) \star (cb(\sigma_i), \pi(\sigma_i)) \star (cb(\sigma_{i+1}), \pi(\sigma_{i+1})).
\end{aligned}$$

Com se satisfan les relacions de trenes, per la Proposició 2.11, existeix un únic morfisme de grups

$$\begin{aligned}
CB : B_n &\rightarrow G \\
\sigma_1 &\mapsto (cb(\sigma_i), \pi(\sigma_i)),
\end{aligned}$$

que anomenem *representació de Burau a color*.

Observació 3.15.1. Fixem-nos que si identifiquem $t_i \mapsto t$, per tota $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, obtenim les matrius transposades a les de la representació de Burau reduïda, és a dir, $(\psi_n^r(\sigma_i))^t$.

4 Categorificació de Khovanov-Seidel de la representació de Burau

L'objectiu d'aquesta secció és definir una acció del grup de trenes sobre la categoria de complexos sobre un anell i relacionar-la amb la representació de Burau vista anteriorment, seguint [16] i [4]. Abans, recordem alguns resultats sobre mòduls, complexos i homotopia.

Definició 4.1. Donada una categoria abeliana \mathcal{A} , objectes M_0, M_1, \dots, M_n , i morfismes $f_1 : M_0 \rightarrow M_1, f_2 : M_1 \rightarrow M_2, \dots, f_n : M_{n-1} \rightarrow M_n$, es diu que la seqüència

$$M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} M_n$$

és exacta si $\text{im}(f_i) = \ker(f_{i+1})$ per tota $1 \leq i \leq n-1$.

Una successió exacta curta

$$0 \rightarrow M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} M_2 \rightarrow 0$$

és escindida si existeix $j : M_2 \rightarrow M_1$ tal que $f_2 j = \text{Id}_{M_1}$.

A [22, Secció 2.1] es demostra el següent lema:

Lema 4.2. Donada una categoria abeliana \mathcal{A} i una successió curta exacta en aquesta categoria $0 \rightarrow M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} M_2 \rightarrow 0$, els següents enunciats són equivalents:

- la successió és escindida.
- existeix $q : M_1 \rightarrow M_0$ tal que $q f_1 = \text{Id}_{M_0}$.
- $M_1 \cong M_0 \oplus M_2$.

Definició 4.3. Un mòdul projectiu sobre un anell R és un R -mòdul P tal que per qualsevol mòdul R -mòdul M i qualsevol morfisme exhaustiu $f : M \rightarrow P$, existeix $g : P \rightarrow M$ inversa per la dreta de f . Equivalentment, donats dos R -mòduls M, N amb $\psi : M \rightarrow N$ exhaustiva, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & & \downarrow \varphi \\ M & \xrightarrow{\psi} & N \end{array}$$

es pot completar fent-lo commutatiu

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & \nearrow \kappa & \downarrow \varphi \\ M & \xrightarrow{\psi} & N \end{array}$$

Teorema 4.4. Donat un anell R , un mòdul és projectiu sí i només sí és isomorf a un sumand directe d'un mòdul lliure. És finitament generat i projectiu si i només si és isomorf a un sumand directe de $R^n = R \oplus \overbrace{\dots}^n \oplus R$.

Demostració. Si P és projectiu, construïm un morfisme exhaustiu des d'un mòdul lliure F a P , $f : F \rightarrow P$ enviant el mòdul lliure a un conjunt de generadors de P . Doncs per construcció, tindrem la seqüència exacta escindida $0 \rightarrow \ker f \rightarrow F \rightarrow P \rightarrow 0$ i llavors pel Lema 4.2, $F = \ker f \oplus P$.

Sigui $F = P \oplus Q$ un R -mòdul lliure i $f : M \rightarrow P$ exhaustiu per un R -mòdul M . Doncs obtenim el morfisme exhaustiu $f \oplus id_Q : (M \oplus Q) \rightarrow F = (P \oplus Q)$. Per les propietats del mòdul lliure, podem construir una funció inversa per la dreta triant on van els generadors; restringint aquesta a P i projectant sobre M , obtenim una inversa per la dreta de f . \square

Definició 4.5. Donada una categoria abeliana \mathcal{A} , definim un complex com una seqüència

$$\mathbf{C} \Rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \rightarrow, \quad n \in \mathbb{Z},$$

tal que C_n són objectes de \mathcal{A} , d_n són morfismes de \mathcal{A} i $d_n d_{n+1} = 0$ per tot $n \in \mathbb{Z}$. Normalment, als morfismes d_n se'ls anomena diferencials.

Un morfisme de complexos f de \mathbf{C} a \mathbf{C}' és una col·lecció de morfismes $f_i : C_i \rightarrow C'_i$ que fa el següent diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ \dots & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{d'_n} & C'_{n-1} \xrightarrow{d'_{n-1}} \dots \end{array}$$

Definició 4.6. Definim la categoria de complexos $Kom(\mathcal{A})$ com la que té per objectes els complexos d'una categoria abeliana \mathcal{A} i morfismes els de complexos.

Definició 4.7. Donat un complex \mathbf{M} es defineix $\mathbf{M}[j]$ com el mateix complex desplaçat cap a l'esquerra j posicions, és a dir, $M[j]_i = M_{i+j}$.

Definició 4.8. Donats dos complexos \mathbf{M} i \mathbf{N} i un morfisme $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{N}$ es defineix el con del morfisme f com $C(f) := \mathbf{M}[1] \oplus \mathbf{N}$ amb diferencial $D = (-d_M + f, d_N)$

Definició 4.9. Un morfisme de complexos $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$ és d'homotopia nul·la, i ho escriurem $t \sim 0$ si existeixen morfismes $h_n : C_n \rightarrow C'_{n+1}$ tals que $f_n = d'_{n+1} h_n + h_{n-1} d_n$ per tota $n \in \mathbb{Z}$.

Definició 4.10. Dos morfismes de complexos $f, g : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$ són homòtops si $f - g$ és d'homotopia nul·la, $f - g \sim 0$.

Definició 4.11. Direm que dos complexos \mathbf{C} , \mathbf{C}' d'una categoria abeliana són homotòpicament equivalents si existeixen $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$ i $g : \mathbf{C}' \rightarrow \mathbf{C}$ tals que $f \circ g \sim id_{\mathbf{C}'}$ i $g \circ f \sim id_{\mathbf{C}}$.

Definició 4.12. Definim la categoria d'homotopia de complexos $Com(\mathcal{A})$ com la categoria que té per objectes els complexos d'una categoria abeliana \mathcal{A} i per morfismes els

morfismes els de complexos quocientats per l'ideal dels morfismes d'homotopia nul·la.

Fixem-nos que aquesta nova categoria té els mateixos objectes que $Kom(\mathcal{A})$, però diferents morfismes.

Exemple 4.13. Per tot K de \mathcal{A} , els complexos

$$\mathbf{K} = 0 \rightarrow K \xrightarrow{id} K \rightarrow 0 \quad \text{i} \quad \mathbf{0} = 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0$$

són isomorfs a $Com(\mathcal{A})$ però no a $Kom(\mathcal{A})$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{id} & K & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow t & & \downarrow t & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Que aquests dos complexos no són isomorfs a $Kom(\mathcal{A})$ és gairebé evident. Si ho fossin, implicaria que $t : K \rightarrow 0$ és bijectiva, però com $t(k) = 0$ per tota $k \in K$, no és injectiva. Considerem també

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow s & & \downarrow s & & \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Tenim doncs que $t \circ s = id_{\mathbf{0}}$; si veiem que $s \circ t$ és homòtopa a la identitat en \mathbf{K} els dos complexos seran homotòpicament equivalents i, consegüentment, isomorfs a $Com(\mathcal{A})$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 0 \\ & \swarrow 0 & \downarrow id & \swarrow id & \downarrow id & & \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Fixem-nos que $id = id \circ id + 0$; per tant, existeix $h : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$ tal que $id = hd + dh$ amb els diferencials $d = id$; és a dir, $id_{\mathbf{K}} \sim 0 = s \circ t$.

Donat un anell A , la categoria d'homotopia de complexos d' A -mòduls per l'esquerra l'escriurem com $\mathcal{C}(A)$. Escriurem A^e el producte tensorial d' A amb el seu anell oposat A^{op} , és a dir, $A^e = A \otimes A^{op}$. Podem entendre llavors els A -bimòduls com A^e -mòduls per la dreta o esquerra.

Ens falta un últim ingredient per poder continuar: el producte tensorial de complexos. Donats $\mathbf{C} \in Com(A - mod)$ i $\mathbf{C}' \in Com(mod - A)$, el producte tensorial s'obté representant en una graella $C_i \otimes_A C'_j$ al node (i, j) , traçant diagonals paral·leles a la principal i, després identificant cada terme del nou complex amb la suma directa de tots els nodes de cada diagonal, de manera que el terme k -éssim serà

$$\bigoplus_i C_i \otimes_A C'_{k-i}.$$

El diferencial ∂ d'aquest nou complex ve donat per

$$\partial_k(t_i \otimes s_j) = d_i(t_i) \otimes s_j + (-1)^i t_i \otimes d'_j(s_j), \text{ per } t_i \in C_i, s_j \in C'_j, i + j = k.$$

Exemple 4.14. Siguin $\mathbf{C} = C_3 \rightarrow C_2 \rightarrow C_1$ i $\mathbf{C}' = C'_3 \rightarrow C'_2 \rightarrow C'_1$, aleshores

$$\begin{array}{ccccc} C_3 \otimes C'_1 & \longleftarrow & C_3 \otimes C'_2 & \longleftarrow & C_3 \otimes C'_3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C_2 \otimes C'_1 & \longleftarrow & C_2 \otimes C'_2 & \longleftarrow & C_2 \otimes C'_3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C_1 \otimes C'_1 & \longleftarrow & C_1 \otimes C'_2 & \longleftarrow & C_1 \otimes C'_3 \end{array}$$

i seguint les instruccions anteriors, $\mathbf{C} \otimes_A \mathbf{C}'$ és un complex de la forma

$$C_3 \otimes C'_3 \rightarrow (C_3 \otimes C'_2) \oplus (C_2 \otimes C'_3) \rightarrow (C_3 \otimes C'_1) \oplus (C_2 \otimes C'_2) \oplus (C_1 \otimes C'_3) \rightarrow (C_2 \otimes C'_1) \oplus (C_1 \otimes C'_2) \rightarrow C_1 \otimes C'_1$$

4.1 Anells de camins

Definició 4.15. Un graf orientat Γ consisteix en un conjunt de vèrtexs i arestes orientades. Donada una arista ζ anomenem $s(\zeta)$ i $t(\zeta)$, al vèrtex origen i al vèrtex final de ζ respectivament. Un camí és una concatenació d'arestes tal que el final d'una d'elles és l'origen de la següent. Un camí es pot escriure com $(v_1|v_2|\dots|v_k)$, amb v_i vèrtexs del camí, sempre que només hi hagi un únic camí que passi per aquests vèrtexs en aquest ordre.

Definició 4.16. Donat un graf Γ , es defineix l'anell $\mathbb{Z}\Gamma$ com un grup abelià lliure amb base els camins del graf i amb el producte donat per la concatenació de camins.

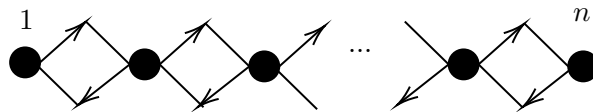
Cada $\mathbb{Z}\Gamma$ -mòdul per la dreta M es pot descomposar com

$$M = \bigoplus_v M(v),$$

on $M(\cdot)$ són grups abelians que consisteixen en tots els camins que tenen vèrtex final v . En aquest cas, multiplicar per una arista d'inici a i final b és un morfisme de grups $M(a) \rightarrow M(b)$.

Exemple 4.17. Si considerem la categoria dels $\mathbb{Z}\Gamma$ -mòduls per l'esquerra, $M = \bigoplus_v (v)M$ i la multiplicació per una arista de a a b és un morfisme $(b)M \rightarrow (a)M$.

Considerem ara, per $n > 2$, el graf Γ de la figura, amb vèrtexs numerats del 1 a n .

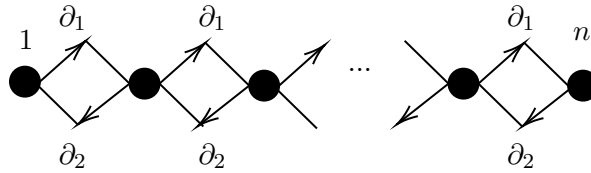


Definim l'anell A_n com $\mathbb{Z}\Gamma$ quocientat amb les relacions

1. $(i|i + 1|i + 2) = 0$
2. $(i|i - 1|i - 2) = 0$
3. $(i|i - 1|i) = (i|i + 1|i)$

Si anomenem les arestes que van cap a la dreta ∂_1 i les que van ca a l'esquerra ∂_2 , obtenim les relacions

$$\partial_1^2 = 0, \partial_2^2 = 0, \partial_1\partial_2 = \partial_1\partial_2.$$



Podem definir un grau en A_n segons la llargada dels camins, tenint en compte que els de llargada major que dos són zero. Efectivament, per les dues primeres relacions, els camins amb grau no nul estaran entre $[i, i + 1]$ i si la seva llargada és superior a dos, per la tercera relació, es pot fer que el camí contingui $(i|i + 1|i + 2)$ i per tant sigui zero, com es pot veure a la Figura 11.

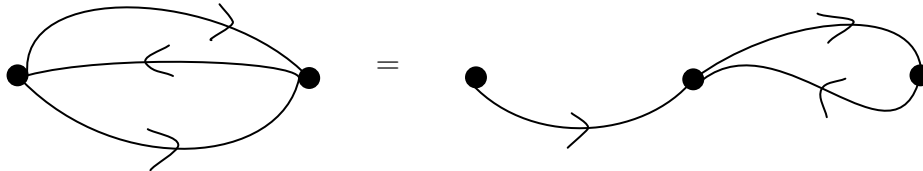


Figura 11 Els camins de llargada tres o més són nul·ls.

És a dir, tenim que A_n és un grup abelià lliure amb base $\{(i|i = 1, \dots, n) \cup \{(i|i + 1)|i = 1, \dots, n - 1\} \cup \{(i - 1|i)|i = 2, \dots, n\} \cup \{(i|i - 1|i) = (i|i + 1|i)|i = 1, \dots, n\}$.

4.2 Àlgebra de Temperley-Lieb

Per definir l'àlgebra de Temperley-Lieb geomètricament, considerem n fils verticals que connecten n punts d'origen amb n punts de destí i u_1, \dots, u_{n-1} , on u_i representa els n fils, tals que l' i -èssim fil connecta els punts d'origen i i $i + 1$, i l' i -èssim punt de sortida amb l' $i + 1$ -èssim.

Definició 4.18. *L'àlgebra de Temperley-Lieb T_n sobre l'anell $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ és l'àlgebra lliure additiva generada per $1_n, u_1, \dots, u_{n-1}$ i les relacions*

$$\begin{array}{c}
 | \quad | \quad | \quad | \quad | \\
 1 \quad 2 \quad 3 \dots n-1 \quad n
 \end{array}
 = 1_n
 = \begin{array}{c}
 | \quad | \quad \text{---} \quad | \quad | \\
 | \quad | \quad \text{---} \quad | \quad | \\
 1 \quad 2 \dots i \quad \quad \quad i+1 \dots n-1 \quad n
 \end{array}
 = u_i$$

1. $u_i u_j = u_j u_i$, per $|i - j| > 1$

2. $u_i u_{i\pm 1} u_i = u_i$

3. $u_i^2 = du_i$, per una d representant el cercle; considerarem $d = q + q^{-1}$,

per $1 \leq i, j \leq n - 1$. El producte de generadors correspon a la concatenació.

$$\begin{array}{c}
 \text{---} \quad \text{---} \\
 \text{---} \quad \text{---} \\
 \text{---} \quad \text{---} \\
 \text{---} \quad \text{---}
 \end{array}
 = \begin{array}{c}
 \text{---} \quad \text{---} \\
 \text{---} \quad \text{---} \\
 \text{---} \quad \text{---} \\
 \text{---} \quad \text{---}
 \end{array}
 \quad u_i u_j = u_j u_i \text{ si } |i - j| > 1$$

$$\begin{array}{c}
 \text{---} \quad | \\
 \text{---} \quad | \\
 \text{---} \quad | \\
 \text{---} \quad |
 \end{array}
 = \begin{array}{c}
 \text{---} \quad | \\
 \text{---} \quad | \\
 \text{---} \quad | \\
 \text{---} \quad |
 \end{array}
 \quad u_i u_{i\pm 1} u_i = u_i$$

$$\begin{array}{c}
 \text{---} \quad | \\
 \text{---} \quad | \\
 \text{---} \quad |
 \end{array}
 = \begin{array}{c}
 \text{---} \quad | \\
 \text{---} \quad | \\
 \text{---} \quad |
 \end{array}
 \quad u_i^2 = du_i$$

Observació 4.18.1. Les relacions que hem descrit no són res més que isotopies mantenint fixada la frontera, és a dir, els punts inicials i finals.

4.3 L'anell A_n

L'anell A_n , considerat com a A_n -mòdul per l'esquerra és projectiu per ser lliure; consegüentment, si descomposem $A_n = \bigoplus_{i=1}^n P_i$, obtenim que cada P_i és un A_n -mòdul projectiu per l'esquerra, amb

$$P_i = A_n(i) = \text{span}_{\mathbb{Z}}\left\{ \overset{\curvearrowright}{\bullet} \underset{i}{} \right\},$$

és a dir, el generat pels camins que acaben a i . És immediat veure que, si $i \neq 1, n$, aleshore P_i és un grup abelià lliure de rang 4 amb base

$$\{(i), (i-1|i), (i+1|i), (i|i+1|i)\}$$

si $i = 1, n$, és de rang 3. De manera anàloga podem definir l' A_n -mòdul per la dreta ${}_iP$, generat pels camins que comencen a i ,

$${}_iP = (i)A_n = \text{span}_{\mathbb{Z}}\left\{ \overset{\bullet}{i} \overset{\curvearrowright}{} \right\}.$$

Proposició 4.19. Per $1 \leq i, j \leq n$,

$${}_iP \otimes_{A_n} P_j = \begin{cases} 0 & \text{si } |i-j| > 1 \\ \mathbb{Z}(i|j) & \text{si } j = i \pm 1 \\ \mathbb{Z}(i) \oplus \mathbb{Z}(i|i+1|i) & \text{si } i = j \end{cases}$$

Demostració. Considererem el costat esquerre de la igualtat com el \mathbb{Z} -mòdul generat pels camins que comencen al vèrtex i i acaben al vèrtex j . En efecte, un element de ${}_iP \otimes_{A_n} P_j$ serà de la forma $m \otimes_{A_n} n$ per $m \in {}_iP$ i $n \in P_j$. Com $m \in A_n$, per definició del producte tensorial, tindrem que $m \otimes n = (1 \cdot m) \otimes n = 1 \otimes m \cdot n$, i ja tenim un camí que comença a i i acaba a j .

Aleshores, si $|i-j| > 1$, no hi ha manera que un camí comenci a i i acabi a j ; doncs el producte tensorial és 0, tal i com volíem veure. Si $i = j$, els camins que generen el costat esquerre poden ser cicles que comencin i acabin al vèrtex i , és a dir, elements del grup $\mathbb{Z}(i|i+1|i)$, o bé camins de llargada 0 iguals al vèrtex, $\mathbb{Z}(i)$. Per últim, si $i = j \pm 1$, tenim que el grup serà generat per camins que tenen per vèrtex inicial i i per final $i+1$ o $i-1$, depenent de j ; per tant, serà $\mathbb{Z}(i|j)$. \square

Introduïm uns A_n -bimòduls que usarem per relacionar l'àlgebra de camins amb la de Temperley-Lieb:

$$U_i := P_i \otimes_{\mathbb{Z}} {}_iP.$$

Proposició 4.20. *Existeixen els següents isomorfismes de A_n -bimòduls.*

$$\begin{aligned} U_i \otimes_{A_n} U_i &\cong U_i \oplus U_i \\ U_i \otimes_{A_n} U_{i\pm 1} \otimes_{A_n} U_i &\cong U_i \\ U_i \otimes_{A_n} U_j &\cong 0 \text{ si } |i - j| > 1. \end{aligned}$$

Demostració. Fent servir la Proposició 4.19 és fàcil veure que

$$\begin{aligned} U_i \otimes_{A_n} U_i &\cong P_i \otimes_{\mathbb{Z}} ({}_i P \otimes_{A_n} P_i) \otimes_{\mathbb{Z}} {}_i P \\ &\cong P_i \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}(i) \oplus \mathbb{Z}(i|i + 1|i)) \otimes_{\mathbb{Z}} {}_i P \\ &\cong (P_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}(i) \otimes_{\mathbb{Z}} {}_i P) \oplus (P_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}(i|i + 1|i) \otimes_{\mathbb{Z}} {}_i P) \\ &\cong (P_i \otimes_{\mathbb{Z}} {}_i P) \oplus (P_i \otimes_{\mathbb{Z}} {}_i P) \cong U_i \oplus U_i. \end{aligned}$$

La segona igualtat, anàlogament

$$\begin{aligned} U_i \otimes_{A_n} U_{i\pm 1} \otimes_{A_n} U_i &\cong (P_i \otimes_{\mathbb{Z}} {}_i P) \otimes_{A_n} (P_{i\pm 1} \otimes_{\mathbb{Z}} {}_{i\pm 1} P) \otimes_{A_n} (P_i \otimes_{\mathbb{Z}} {}_i P) \\ &\cong P_i \otimes_{\mathbb{Z}} ({}_i P \otimes_{A_n} P_{i\pm 1}) \otimes_{\mathbb{Z}} ({}_{i\pm 1} P \otimes_{A_n} P_i) \otimes_{\mathbb{Z}} {}_i P \\ &\cong P_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}(i|i \pm 1) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}(i \pm 1|i) \otimes_{\mathbb{Z}} {}_i P \cong P_i \otimes_{\mathbb{Z}} {}_i P \cong U_i. \end{aligned}$$

I la tercera

$$U_i \otimes_{A_n} U_j \cong P_i \otimes_{\mathbb{Z}} ({}_i P \otimes_{A_n} P_j) \otimes_{\mathbb{Z}} {}_j P \cong P_i \otimes_{\mathbb{Z}} (0) \otimes_{\mathbb{Z}} {}_j P \cong 0.$$

□

Les dues primeres relacions són les de l'àlgebra de Temperley-Lieb per $q = 1$, amb U_i com a u_i , i el producte tensorial com la concatenació; i per tant, A_n com la unitat. La tercera relació indica que estem obtenint T_n quocientat per $u_i u_j = 0$ si $|i - j| > 1$. Fins ara, el grau dels mòduls era donat per la llargada dels camins; donat $g \in \mathbb{Z}$, podem modificar-lo sumant g al grau, i ho denotarem amb $\{g\}$. És a dir, es pot entendre multiplicar per q com apujar el grau en una unitat, $\{1\}$.

Redefinim els mòduls U_i baixant-los un grau, és a dir,

$$U_i = P_i \otimes_{\mathbb{Z}} {}_i P\{-1\}.$$

Aquesta serà la definició de U_i que farem servir d'ara en endavant.

És gairebé evident que les relacions queden:

$$\begin{aligned} U_i \otimes_{A_n} U_i &\cong U_i\{1\} \oplus U_i\{-1\} \\ U_i \otimes_{A_n} U_{i\pm 1} \otimes_{A_n} U_i &\cong U_i \\ U_i \otimes_{A_n} U_j &\cong 0 \text{ si } |i - j| > 1 \end{aligned}$$

4.4 Representació de Khovanov-Seidel del grup de trenes

Podem definir una representació del grup de trenes en l'àlgebra de Temperley-Lieb $\pi : B_n \rightarrow T_n$ donada per $\pi(\sigma_i) = 1 - qu_i$, on σ_i el generador del grup de trenes tal i com s'ha definit a la secció 2. En la interpretació que estem fent amb mòduls, és la diferència entre A_n (la unitat) i $U_i\{1\}$ (per tenir q multiplicat i per tant amb un grau elevat), és a dir, el complex

$$R_i = 0 \rightarrow P_i \otimes_{\mathbb{Z}} iP \rightarrow A_n \rightarrow 0,$$

amb A_n en grau homològic zero. De manera anàloga, $\pi(\sigma_i^{-1}) = 1 - q^{-1}u_i$, entès també com el complex

$$R'_i = 0 \rightarrow A_n \rightarrow U_i\{-1\} \rightarrow 0,$$

amb A_n altra volta en grau homològic zero .

Teorema 4.21. *A $\mathcal{C}(A_n)$ hi ha els següents isomorfismes:*

1. $R_i \otimes R_j \cong R_j \otimes R_i$ si $|i - j| > 1$
2. $R_i \otimes R'_i \cong R'_i \otimes R_i \cong A_n$
3. $R_i \otimes R_{i\pm 1} \otimes R_i \cong R_{i\pm 1} \otimes R_i \otimes R_{i\pm 1}$

Per la demostració, necessitarem el següent lema:

Lema 4.22 (Eliminació de Gauss [7]). *Donada una categoria additiva \mathcal{A} amb U, V, X, Y, X' i Y' objectes, sigui*

$$\rightarrow U \xrightarrow{d} X \oplus Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}} X' \oplus Y' \xrightarrow{d'} V \rightarrow$$

amb $d = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix}$ i $d' = \begin{pmatrix} d'_x & d'_y \end{pmatrix}$. *Si sigui $\delta : Y \rightarrow Y'$ un isomorfisme, aleshores, a $\text{Com}(\mathcal{A})$, aquest complex és isomorf a*

$$\mathbf{K}: \rightarrow U \xrightarrow{p_X \circ d} X \xrightarrow{\varphi} X' \xrightarrow{d'_{|X'}} V \rightarrow \quad (4.1)$$

amb $\varphi = \alpha - \beta\delta^{-1}\gamma$ i $p_X : X \oplus Y \rightarrow X$ la projecció.

Demostració. Siguin

$$t_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta^{-1}\gamma & 1 \end{pmatrix} \quad t_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\beta\delta^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aquestes aplicacions defineixen un isomorfisme en el diagrama següent:

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow & U & \xrightarrow{d} & X \oplus Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}} & X' \oplus Y' & \xrightarrow{d'} & V & \longrightarrow \\
& \downarrow id & & \downarrow t_1 & \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} & \downarrow t_2 & & \downarrow id & \\
\longrightarrow & U & \xrightarrow{t_1 d} & X \oplus Y & \longrightarrow & X' \oplus Y' & \xrightarrow{d' t_2^{-1}} & V & \longrightarrow
\end{array}$$

És fàcil comprovar que el complex inferior \mathbf{P} és homotòpicament equivalent a l'equació (4.1), és a dir, hem de veure que $p \circ \iota \sim id_{\mathbf{K}}$ i $\iota \circ p \sim id_{\mathbf{P}}$ on $\iota : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{P}$ és la inclusió i $p : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{K}$. la projecció. En efecte, $p \circ \iota = id$ i

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow & U & \xrightarrow{t_1 d} & X \oplus Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}} & X' \oplus Y' & \xrightarrow{d' t_2^{-1}} & V & \longrightarrow \\
& \downarrow & \swarrow h_1 & \downarrow id - \iota \circ p_X & \swarrow h_2 & \downarrow id - \iota \circ p_{X'} & \swarrow h_3 & \downarrow & \\
\longrightarrow & U & \longrightarrow & X \oplus Y & \longrightarrow & X' \oplus Y' & \longrightarrow & V & \longrightarrow
\end{array}$$

$$t_1 d h_1 + h_2 \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = id - \iota \circ p_X$$

$$\begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} h_2 + h_3 d' t_2^{-1} = id - \iota \circ p_{X'}$$

on

$$h_1 = 0$$

$$h_2 = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix}$$

i

$$h_3 = 0$$

□

Demostració Teorema 4.21. 1) El costat esquerre del primer isomorfisme, $R_i \otimes R_j$ és el complex total del diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc}
U_i\{1\} \otimes A_n & \longleftarrow & U_i\{1\} \otimes U_j\{1\} \\
\downarrow & & \downarrow \\
A_n \otimes A_n & \longleftarrow & A_n \otimes U_j\{1\}
\end{array}$$

I per tant, si $|i - j| > 1$, $R_i \otimes R_j$ és el complex $0 \rightarrow U_i\{1\} \otimes U_j\{1\} \rightarrow U_j\{1\} \oplus U_i\{1\} \rightarrow A_n \rightarrow 0$ que és isomorf a $0 \rightarrow U_j\{1\} \oplus U_i\{1\} \rightarrow A_n \rightarrow 0$ fent servir la Proposició 4.20. Òbviament, aquesta expressió és equivalent a $R_j \otimes R_i$ si $|i - j| > 1$.

2) Per la segona equació, considerem el diagrama

$$\begin{array}{ccc} P_i \otimes {}_iP & \xrightarrow{\beta_i} & A_n \\ \downarrow \tau & & \downarrow \gamma_i \\ P_i \otimes Q \otimes {}_iP\{-2\} & \xrightarrow{\delta} & P_i \otimes {}_iP\{-2\} \end{array}$$

amb $Q = {}_iP \otimes_{A_n} P_i$, que és un grup abelià lliure generat per $u_1 = (i) \otimes (i)$ i $u_2 = (i|i-1|i) \otimes (i)$ i

$$\delta(x \otimes u_1 \otimes y) = x \otimes y$$

$$\delta(x \otimes u_2 \otimes y) = x(i|i-1|i) \otimes y.$$

Tenim que $R_i \otimes R'_i$ és el complex $P_i \otimes {}_iP \rightarrow A_n \oplus (P_i \otimes Q \otimes {}_iP\{-2\}) \rightarrow P_i \otimes {}_iP\{-2\}$. Apliquem el Lema 4.22 amb

$$\begin{aligned} U &= P_i \otimes {}_iP \\ X &= P_i \otimes u_1 \otimes {}_iP\{-2\} \\ Y &= A_n \oplus (P_i \otimes u_2 \otimes {}_iP\{-2\}) \\ X' &= P_i \otimes {}_iP\{-2\} \\ Y' &= 0 \\ V' &= 0. \end{aligned}$$

És obvi que $\delta_{|P_i \otimes u_1 \otimes {}_iP\{-2\}} : P_i \otimes u_1 \otimes {}_iP\{-2\} \rightarrow P_i \otimes {}_iP\{-2\}$ és una funció injectiva, exhaustiva i amb inversa $x \otimes y \mapsto x \otimes u_1 \otimes y$. Doncs, el complex és isomorf en la categoria d'homotopia a

$$P_i \otimes {}_iP \rightarrow A_n \oplus (P_i \otimes u_2 \otimes {}_iP\{-2\}).$$

Per tornar a aplicar el lema cal comprovar que $x \otimes y \mapsto x \otimes u_2 \otimes y : P_i \otimes {}_iP \rightarrow P_i \otimes u_2 \otimes {}_iP\{-2\}$ és un isomorfisme. En efecte, és una funció injectiva, exhaustiva i amb inversa $x \otimes u_2 \otimes y \mapsto x \otimes y$. De manera anàloga, obtenim $R'_i \otimes R_i \cong A_n$.

3) Per a l'última equació, mostrarem dues maneres diferents de demostrar-la. Si es procedeix anàlogament que als apartats anteriors fent tots els productes tensorials i aplicant el Lema 4.22, s'obté que $R_i \otimes R_{i\pm 1} \otimes R_i$ i $R_{i\pm 1} \otimes R_i \otimes R_{i\pm 1}$ són isomorfs al complex

$$0 \rightarrow (P_i \otimes {}_{i\pm 1}P\{1\}) \oplus (P_{i\pm 1} \otimes {}_iP\{1\}) \rightarrow (P_i \otimes {}_iP) \oplus (P_{i\pm 1} \otimes {}_iP) \rightarrow A_n \rightarrow 0,$$

demostrant així la tercera equació.

Equivalentment, és fàcil veure que demostrar l'última equació correspon a provar que

$$R_{i\pm 1}^{-1} \otimes R_i \otimes R_{i\pm 1} \cong R_i \otimes R_{i\pm 1} \otimes R_i^{-1}.$$

Fixem-nos que el costat esquerre de l'expressió és equivalent al con del morfisme

$$R'_{i\pm 1} \otimes U_i\{1\} \otimes R_{i\pm 1} \rightarrow R'_{i\pm 1} \otimes R_{i\pm 1}.$$

Fent ús de la Proposició 4.19 i del primer isomorfisme d'aquest Teorema 4.21, el morfisme té la forma següent:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & (P_i \otimes iP) & & & \\
 & & & \oplus & & & \\
 0 & \longrightarrow & P_i \otimes i_{\pm 1}P\{1\} & \xrightarrow{\partial^{-1}} & P_{i\pm 1} \otimes iP\{-1\} & \xrightarrow{\partial^1} & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & (P_{i\pm 1} \otimes i_{\pm 1}P) & & & \\
 & & & \downarrow e & & & \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A_n & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Amb e determinat per dos valors, $e((i) \otimes (i)) = a_1$ i $e((i \pm 1) \otimes (i \pm 1)) = a_2$. Com $e\partial^{-1} = 0$, tenim que $a_1 + a_2 = 0$. Si $a_1 \neq \pm 1$, podem reduir tots tots els mòduls i functors mòdul p , amb p un divisor primer de a_1 . Per exemple, en comptes de treballar en $A_n = \mathbb{Z}\Gamma$, ho fem en $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}\Gamma$. Tindrem que l'expressió buscada serà isomorfa al con de

$$R'_{i\pm 1} \otimes U_i\{1\} \otimes R_{i\pm 1} \xrightarrow{0} A_n$$

Si entenem aquests complexos com a functors, és a dir, que actuen sobre complexos tensorialitzant, veiem que $R'_{i\pm 1} \otimes R_i \otimes R_{i\pm 1}$ és invertible amb invers $R'_{i\pm 1} \otimes R'_i \otimes R_{i\pm 1}$. Sigui M un mòdul no descomposable, si tensoritzem amb el functor $R'_{i\pm 1} \otimes R_i \otimes R_{i\pm 1}$, veiem que és isomorf a una suma directa no trivial, finalment, fent la inversa, obtenim una contradicció en el fet de ser no descomposable. Per tant, podem suposar que, multiplicant per -1 si fa falta, $a_1 = 1$ i $a_2 = -1$.

De manera anàloga, el costat dret de l'equivalència és isomorf al con del morfisme

$$R_i \otimes U_{i\pm 1}\{1\} \otimes R'_i \rightarrow A_n,$$

i procedint com en el cas anterior,

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & (P_i \otimes iP) & & & \\
 & & & \oplus & & & \\
 0 & \longrightarrow & P_i \otimes i_{\pm 1}P\{1\} & \xrightarrow{\partial^{-1}} & P_{i\pm 1} \otimes iP\{-1\} & \xrightarrow{\partial^1} & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & (P_{i\pm 1} \otimes i_{\pm 1}P) & & & \\
 & & & \downarrow f & & & \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A_n & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

El morfisme f queda determinat per $f((i) \otimes (i)) = b_1$ i $f((i \pm 1) \otimes (i \pm 1)) = b_2$. Igual que abans, si cal multiplicant per -1 , tindrem que $b_1 = 1$ i $b_2 = -1$. Per tant, $f = e$ i obtenim l'isomorfisme desitjat. \square

Les dues primeres relacions són les de trenes; per tant, per la Proposició 2.11 existeix un acció del grup de trenes a $\mathcal{C}(A_n)$ de manera que

$$\begin{aligned}\sigma_i(\mathbf{C}) &= R_i \otimes_{A_n} \mathbf{C} \\ \sigma_i^{-1}(\mathbf{C}) &= R'_i \otimes_{A_n} \mathbf{C},\end{aligned}$$

per tot $\mathbf{C} \in \mathcal{C}(A_n)$.

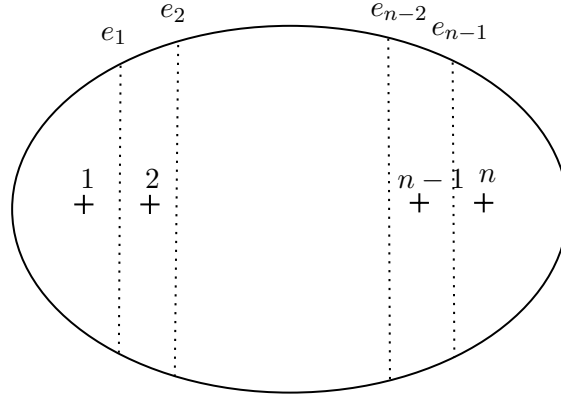
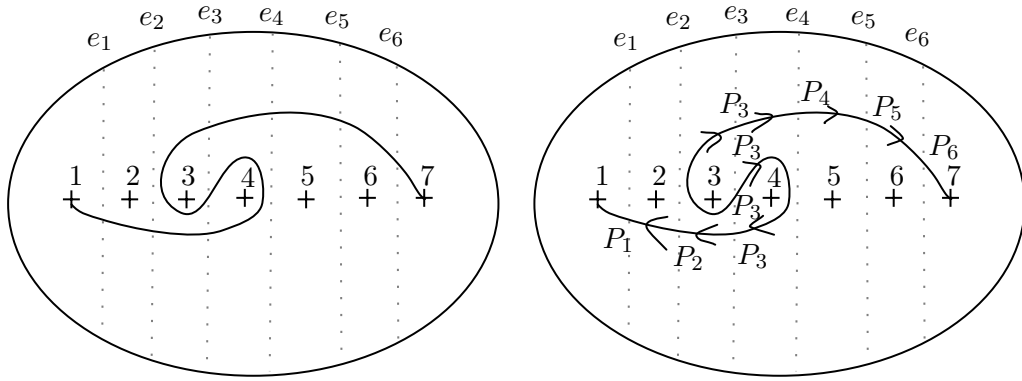


Figura 12 Disc \mathbf{D} amb les rectes e_i .

Aquesta acció la podem representar gràficament de la manera següent [4]: considerem un disc \mathbf{D} amb n punts, i com hem vist abans, el grup de trenes B_n és isomorf al grup d'automorfismes del disc que deixen fixada la frontera i permuten els punts. En concret, cada generador σ_i està associat a un mig gir entre els punts i i $i + 1$; a grans trets, es pot considerar que el generador σ_i intercanvia els punts i i $i + 1$ de manera antihorària. A cada classe d'isotopia d'una corba c amb extrems certs punts del disc, li assignem una corba isotòpica c' tal que tingui el mínim nombre d'interseccions amb les rectes e_i de la Figura 12, que divideixen c' en segments. Orientem cada segment delimitat per e_i i e_{i+1} de manera horària al voltant del punt $i + 1$ i a cada intersecció amb un e_i hi assignem el mòdul projectiu P_i . Finalment, extraient la corba del disc de manera que totes les orientacions vagin cap al mateix costat i prenent la suma directa verticalment, obtenim el complex associat a la corba c .

Exemple 4.23. Considerem $n = 7$ i la corba c de la Figura 13. Fixem-nos que en aquest cas, c ja és la corba que té el mínim nombre d'interseccions amb les rectes verticals e_i .

A la Figura 13b hem orientat cada segment la corba c entre e_i i e_{i+1} , $1 \leq i \leq 5$ horàriament i escrit el mòdul que correspon a cada intersecció de la corba amb les rectes e_i , $1 \leq i \leq 6$.

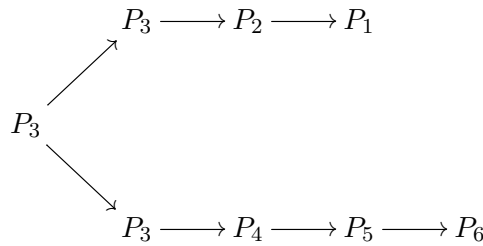


(a) Corba c .

(b) Corba c indicant l'orientació i el mòdul corresponent a cada intersecció.

Figura 13

Extraiem aquesta corba del disc tal que les orientacions apuntin cap a la dreta i s'obté el diagrama següent:



Finalment, prenem la suma directa verticalment, obtenint el complex $P(c)$ associat a c

$$0 \rightarrow P_3 \rightarrow P_3 \oplus P_3 \rightarrow P_2 \oplus P_4 \rightarrow P_1 \oplus P_5 \rightarrow P_6 \rightarrow 0.$$

Hem decidit obviar els graus dels mòduls, però es pot fer un raonament semblant considerant-los [16, Secció 4].

Teorema 4.24. *L'acció del grup de trenes B_n a $\mathcal{C}(A_n)$ és fidel.*

4.4.1 Fidelitat de la representació de Khovanov-Seidel

Sigui $\sigma \in B_n$ una trena del nucli de la representació de Khovanov-Seidel ρ_{ks} , és a dir, $\rho_{ks}(\sigma)P_i \sim P_i$. Associem a cada arc c un complex $P(c)$. Per corbes elementals, els $c_i = [i, i + 1] \times \{0\}$ introduïts a la subsecció 2.1, arcs que van del punt i al $i + 1$, $P(c_i)$ és el complex $\dots \rightarrow 0 \rightarrow P_i \rightarrow 0 \dots$

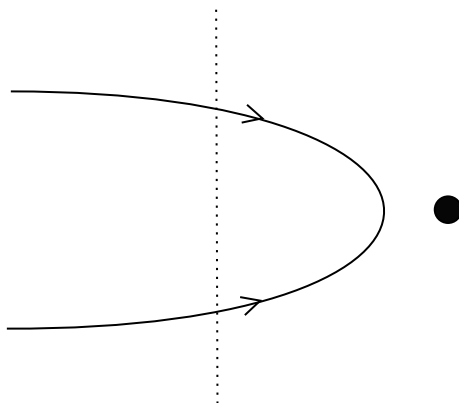
El següent teorema, que no demostrarem degut a la seva dificultat, ens permetrà demostrar que l'acció del grup de trenes a $\mathcal{C}(A_n)$ és fidel. El lector interessat pot trobar la demostració a [16, Subsecció 4b].

Teorema 4.25. *Donada una trena $\tau \in B_n$ i un arc elemental, $P(\tau c_i) \sim \rho_{ks}(\tau)P_i$ per tot $i = 1, 2, \dots, n - 1$.*

Per tant, segons el teorema, $P_i \sim P(\sigma c_i)$ per $1 \leq i \leq n-1$.

Proposició 4.26. *En aquesta situació, $c_i \sim \sigma c_i$ per $1 \leq i \leq n-1$.*

Demostració. L'isomorfisme entre complexos implica que $P(\sigma c_i)$ només té homologia en un sol grau. Suposem que σc_i interseca més d'un cop alguna línia vertical e_k , $k \in \{1, \dots, n\}$. Suposem que dues d'aquestes interseccions són per dos valors k_1, k_2 diferents, és a dir, dues línies verticals diferents que necessàriament seran contigües, és a dir, $k_2 = k_1 + 1$, e_{k_1}, e_{k_1+1} ; això implicaria que el complex fos $P_{k_1} \rightarrow P_{k_1+1}$. Doncs σc_i no pot interseca més d'una e_k diferent, és a dir, si té més d'una intersecció, serà amb la mateixa e_k . Suposem doncs que σc_i talla la mateixa e_k dos cops. Si σc_i no envolta el punt $k+1$ ni $k-1$, com a la imatge, podem obtenir una corba isotòpicament equivalent que no talli e_k i, evidentment, tindrà un nombre menor d'interseccions amb les rectes $\{e_i\}_{i=1,2,\dots,n-1}$. Només ens queda el cas en què obtenim $\dots \rightarrow P_k \rightarrow P_k \rightarrow \dots$, és a dir, la corba σc_i envolta el punt $k+1$ o $k-1$; aquest complex vam veure que era homotòpicament equivalent al complex $\mathbf{0}$ a l'Exemple 4.13, però P_i no ho és. Per tant, σc_i només pot intersecar un sol cop amb alguna línia vertical e_k .



Si talla només e_j amb $j \neq i$, es té $P(\sigma c_i) = P_j$, que no és isomorf a P_i . Per tant,

$$\begin{cases} \sigma c_i \cap e_j = \emptyset \\ \sigma c_i \cap e_i \text{ és un sol punt} \end{cases}$$

□

Això implica que el mig gir associat a σc_i és igual al de c_i , és a dir, $\tau_{\sigma c_i} = \tau_{c_i}$ per tota $i \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$. És a dir, obtenim $\sigma \tau_{c_i} \sigma^{-1} = \tau_{c_i}$; consegüentment, $\sigma \tau_\beta \sigma^{-1} = \tau_\beta$ per tota $\beta \in B_n$ i per tant, per l'isomorfisme $\eta : B_n \rightarrow \mathfrak{M}(D, Q)$ introduït anteriorment, la trena σ és del centre del grup, $\sigma \in Z(B_n)$. Pel Teorema 2.18, $\sigma = \theta_n^k$ amb $k \in \mathbb{Z}$, essent $\theta_n = ((\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1})((\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-2}) \dots \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1))^2$.

Tanmateix, l'efecte dels elements del centre θ_n a P_i és un desplaçament cap a l'esquerra.

Proposició 4.27. *El generador del centre $Z(B_n)$, sense tenir en compte el grau del mòdul, actua sobre P_1 com un desplaçament cap a l'esquerra, $\theta_n(P_1) = P_1[2n - 2]$.*

Demostració. És útil recordar que $\theta_n = \iota(\theta_{n-1})\gamma_n$, on $\gamma_n = \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\dots\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-2}\sigma_{n-1}$. Ho demostrarem per inducció sobre n . Comencem pel cas $n = 3$; així doncs, $\theta_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_1$. Apliquem a P_1 i obtenim, fent ús del Lema 4.22 i la Proposició 4.19:

$$\begin{aligned} \sigma_1 P_1 = 0 &\rightarrow P_1 \otimes {}_1 P \otimes P_1 \xrightarrow{-1} P_1 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{4.19} 0 \rightarrow P_1 \oplus P_1\{2\} \xrightarrow{-1} P_1 \xrightarrow{4.22} P_1\{2\} \\ \sigma_2 \sigma_1 P_1 = 0 &\rightarrow P_2 \otimes {}_2 P \otimes P_1\{2\} \xrightarrow{-1} P_1\{2\} \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{4.19} 0 \rightarrow P_2\{3\} \xrightarrow{-1} P_1\{2\} \rightarrow 0 \\ \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 P_1 = 0 &\rightarrow P_1 \otimes {}_1 P \otimes P_2\{3\} \rightarrow P_2\{3\} \oplus (P_1 \otimes {}_1 P \otimes P_1\{2\}) \xrightarrow{-1} P_1\{2\} \rightarrow 0 \\ &\xrightarrow{4.19} 0 \rightarrow P_1\{4\} \rightarrow P_2\{3\} \oplus P_1\{2\} \oplus P_1\{4\} \xrightarrow{-1} P_1\{2\} \rightarrow 0 \xrightarrow{4.22} 0 \rightarrow P_2\{3\} \xrightarrow{-2} 0 \\ \sigma_1 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 P_1 = 0 &\rightarrow P_1 \otimes {}_1 P \otimes P_2\{3\} \rightarrow P_2\{3\} \rightarrow 0 \xrightarrow{4.19} 0 \rightarrow P_1\{4\} \xrightarrow{-3} P_2\{3\} \rightarrow 0 \\ \sigma_2 \sigma_1 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 P_1 = 0 &\rightarrow P_2 \otimes {}_2 P \otimes P_1\{4\} \rightarrow P_1\{4\} \oplus (P_2 \otimes {}_2 P \otimes P_2\{3\}) \xrightarrow{-2} P_2\{3\} \rightarrow 0 \\ &\xrightarrow{4.19} 0 \rightarrow P_2\{5\} \rightarrow P_1\{4\} \oplus P_2\{3\} \oplus P_2\{5\} \xrightarrow{-2} P_2\{3\} \rightarrow 0 \xrightarrow{4.22} 0 \rightarrow P_1\{4\} \xrightarrow{-3} 0 \\ \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 P_1 = 0 &\rightarrow P_1 \otimes {}_1 P \otimes P_1\{4\} \xrightarrow{-4} P_1\{4\} \rightarrow 0 \\ &\xrightarrow{4.19} 0 \rightarrow P_1\{4\} \oplus P_1\{6\} \xrightarrow{-4} P_1\{4\} \rightarrow 0 \xrightarrow{4.22} 0 \rightarrow P_1\{6\} \rightarrow 0 \cong P_1\{6\}[4], \end{aligned}$$

on el superíndex en els termes dels complexos indiquen el grau homològic. Veiem que, ignorant el grau del mòdul, es compleix la hipòtesi d'inducció per $n = 3$. Suposem que la hipòtesi d'inducció és certa fins a k , anem a tractar $k + 1$; $\theta_{k+1}P_1 = \iota(\theta_k)\gamma_{k+1}P_1$. Tenim que $\gamma_{k+1}P_1 = \sigma_n\sigma_{n-1}\dots\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-1}\sigma_n P_1 \cong \sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2 P_1 \cong P_1[-2]$. Ara podem aplicar la hipòtesi d'inducció, $\theta_{k+1}P_1 = \iota(\theta_k)\gamma_{k+1}P_1 = \iota(\theta_k)P_1[2] = P_1[2k - 2 + 2] = P_1[2k] = P_1[2(k + 1) - 2]$. \square

En conclusió, arribem a una contradicció ja que hem obtingut que $P(c_i) \simeq P(\sigma c_i)$. Conseqüentment, σ ha de ser la unitat i la representació de Khovanov-Seidel és fidel.

4.4.2 K_0 d'anells

Ara es veurà com aquesta acció de Khovanov-Seidel està estretament relacionada amb la representació reduïda de Burau. Abans serà necessari introduir alguns conceptes.

Notació 4.28. *Donat un anell R , el semigrup abelià format per totes les classes d'isomorfisme de R -mòduls projectius finitament generats l'anomenem $\text{Proj } R$.*

Teorema 4.29. *Donat un semigrup abelià S , existeix un únic grup commutatiu G (llevat d'isomorfisme), anomenat grup de Grothendieck i un morfisme $f : S \rightarrow G$ tal que, per*

qualsevol grup H i morfisme de semigrups $g : S \rightarrow H$, existeix un únic morfisme de grups $h : G \rightarrow H$ amb $g = h \circ f$.

Demostració. Definim G com el conjunt de classes d'equivalència de (x, y) amb $x, y \in S$, on $(x, y) \sim (u, v)$ si i només si existeix $t \in S$ tal que

$$x + v + t = u + y + t.$$

Sigui $[(x, y)]$ la classe d'equivalència de (x, y) , la suma de classes ve donada per $[(x, y)] + [(x', y')] = [(x + x', y + y')]$. Com per totes $x, y \in S$ es té que

$$[(x, x)] = [(y, y)];$$

aquest element és l'element neutre de G . G és un grup, ja que els seus elements tenen oposat: $[(x, y)] + [(y, x)] = [(x + y, x + y)] = 0$.

Definim el morfisme f com

$$\begin{aligned} f : S &\rightarrow G \\ x &\mapsto [(x + x, x)]. \end{aligned}$$

És evident, donat que $[(x, y)] = f(x) - f(y)$, que la imatge de f és G . Donat un grup H i un morfisme $g : S \rightarrow H$, definim $h : G \rightarrow H$ com $h([(x, y)]) = g(x) - g(y)$ per $x, y \in S$.

Una altra construcció del grup G equivalent i la que usarem a partir d'ara és com el grup abelià lliure generat per $[x]$ amb $x \in S$ tal que si $x + y = z$ a S , aleshores $[x] + [y] = [z]$ a G . En aquest cas, el morfisme $f : S \rightarrow G$ ve donat per $x \mapsto [x]$ per tota $x \in S$. Els elements de la forma $[(x, y)]$ de la construcció anterior corresponen a $[x] - [y]$ d'aquesta.

Vegem la unicitat del grup G . Suposem que existeix un grup G' i un morfisme $f' : S \rightarrow G'$ amb la mateixa propietat universal. En primer lloc, cal que $f'(S) = G'$. En efecte, suposem que no és així, és a dir, $f'(S) = G'' \subsetneq G'$ i considerem com a grup $H = G' \oplus G'/G''$ amb morfisme $g = (f', 0)$; aleshores, tenim que existeixen dos morfismes

$$\begin{aligned} h_1 &= (id, 0) : G' \rightarrow G' \oplus G'/G'' \quad \text{i} \\ h_2 &= (id, q) : G' \rightarrow G' \oplus G'/G'', \end{aligned}$$

on q és el pas al quocient, tal que

$$\begin{aligned} (f', 0) &= h_1 \circ f' \quad \text{i} \\ (f', 0) &= h_2 \circ f', \end{aligned}$$

fet contradictori amb la propietat universal. Per aquesta mateixa propietat, existeix un morfisme $\alpha : G \rightarrow G'$ tal que $f' = \alpha \circ f$. Analogament, existeix $\beta : G' \rightarrow G$ tal que

$f = \beta \circ f'$. Per tant, obtenim que $\alpha \circ \beta$ és la identitat en tota la imatge de f' , és a dir, tot G' , d'igual manera, $\beta \circ \alpha$ és la identitat en la imatge de f , és a dir, G . En definitiva, tenim que $G \cong G'$. \square

Definició 4.30. Definim $K_0(R)$, on R és un anell amb unitat, com el grup de Grothendieck de $\text{Proj } R$.

Una propietat que usarem molt, conseqüència de la propietat universal del grup de Grothendieck és que donats dos mòduls projectius P i Q , es té $[P \oplus Q] = [P] + [Q]$.

Definició 4.31. Donat un complex finit de R -mòduls finitament generats i projectius \mathbf{C} , definim la seva característica d'Euler a $K_0(R)$ com

$$\chi(\mathbf{C}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j [C_j]$$

Observació 4.31.1. El sumatori només té un conjunt finit de termes no nuls al ser un complex finit.

A [21, Secció 1.7] es demostra el següent lema

Lema 4.32. Un morfisme entre complexos és una equivalència homotòpica si i només si el seu con es contràctil, és a dir, d'homotopia nul·la.

Proposició 4.33. Donada una successió de complexos finits

$$0 \rightarrow \mathbf{C}' \xrightarrow{d_2} \mathbf{C}'' \xrightarrow{d_1} \mathbf{C} \rightarrow 0$$

de mòduls projectius finitament generats tal que $\text{Im}(d_2) = \ker(d_1)$ (el que es coneix com a successió exacta curta)

1. $\chi(\mathbf{C}'') = \chi(\mathbf{C}) + \chi(\mathbf{C}')$.
2. Si, a més a més, els mòduls d'homologia $H_j(\mathbf{C})$ també són projectius,

$$\chi(\mathbf{C}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j [H_j(\mathbf{C})].$$

Demostració. 1) És fàcil veure que $C_j'' = C_j' \oplus C_j$ i per tant, $[C_j''] = [C_j'] + [C_j]$ per tota j ; i doncs, es compleix la igualtat de característiques.

2) Anomenant $Z_j = \ker(d_j : C_j \rightarrow C_{j-1})$ i $B_j = \text{im}(d_{j+1} : C_{j+1} \rightarrow C_j)$, obtenim les successions exactes curtes

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow Z_{j+1} \rightarrow C_{j+1} \xrightarrow{d_{j+1}} B_j \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow B_j \rightarrow Z_j \rightarrow H_j \rightarrow 0. \end{aligned}$$

De la segona successió, fent un raonament semblant al que s'ha fet al principi de la demostració, $Z_j = B_j \oplus H_j$. Com \mathbf{C} té un nombre finit de termes no nuls, si cal reindexant,

obtenim $C_0 = Z_0$ que serà projectiu, i com $Z_0 \cong B_0 \oplus H_0$, B_0 serà també projectiu. Això farà, inductivament, que tots els B_j i Z_j siguin projectius i, de les seqüències anteriors,

$$\begin{aligned} [Z_{j+1}] + [B_j] &= [C_{j+1}] \\ [B_j] + [H_j] &= [Z_j]. \end{aligned}$$

Substituint aquestes expressions a la definició de la característica d'Euler, s'obté el resultat desitjat. \square

Corol·lari 4.33.1. *La característica d'Euler de complexos de mòduls projectius és invariant sota equivalències homotòpiques.*

Demostració. Siguin \mathbf{C} i \mathbf{C}' dos complexos de mòduls projectius homotòpicament equivalents, és a dir, existeix una homotopia $\varphi : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$. Anomenant \mathbf{C}'' el con de l'homotopia, és fàcil veure que s'obté la successió exacta curta

$$0 \rightarrow \mathbf{C}'_{\bullet} \rightarrow \mathbf{C}''_{\bullet} \rightarrow \mathbf{C}_{\bullet-1} \rightarrow 0.$$

Conseqüentment, $\chi(\mathbf{C}'') = \chi(\mathbf{C}') - \chi(\mathbf{C})$. Finalment, com \mathbf{C}'' és el con d'una isotopia, $\chi(\mathbf{C}'') = 0$ i per tant $\chi(\mathbf{C}) = \chi(\mathbf{C}')$. \square

Amb aquests ingredients podem veure la relació entre la representació de Khovanov-Seidel i la representació de Burau. Considerem $K_0(A_n)$, que serà un $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -mòdul generat per $[P_1], \dots, [P_n]$ subjecte a les relacions $[P \oplus Q] = [P] + [Q]$ i $[P\{j\}] = q^j[P]$. És evident que canviar el grau d'un complex només afecta al signe de la característica d'Euler, $\chi(P\{j\}) = (-1)^j \chi(P)$.

Proposició 4.34. *Els generadors σ_i actuen sobre els mòduls P_j transformant-los de la manera següent*

$$\begin{aligned} \sigma_i(P_i) &\cong P_i[1]\{2\} \\ \sigma_i(P_{i\pm 1}) &\cong 0 \rightarrow P_i \rightarrow P_{i\pm 1} \rightarrow 0 \\ \sigma_i(P_j) &\cong P_j \text{ si } |i - j| > 1. \end{aligned}$$

Demostració. Tenim, fent ús del lema de Gauss 4.22 i de la Proposició 4.19 que,

$$\begin{aligned} \sigma_i(P_i) = R_i \otimes P_i &\cong 0 \rightarrow P_i \otimes (\overset{-1}{P_i} \otimes P_i) \rightarrow \overset{0}{P_i} \rightarrow 0 \cong \\ &\cong 0 \rightarrow P_i \otimes (\mathbb{Z}X_i \oplus \mathbb{Z}(i)) \rightarrow \overset{0}{P_i} \rightarrow 0 \cong \\ &\cong 0 \rightarrow P_i \otimes P_i\{2\} \rightarrow \overset{0}{P_i} \rightarrow 0 \cong \\ &\cong 0 \rightarrow P_i \overset{-1}{\{2\}} \rightarrow 0 \cong P_i[1]\{2\} \end{aligned}$$

5 Conclusions

En aquest treball hem estudiat el grup de trenes i les seves diferents encarnacions, la representació de Burau i la seva fidelitat i, finalment, una categorificació d'aquesta. Tot això ha servit per copsar i intentar entendre la bellesa i l'atracció que les trenes, amb els seus patrons repetitius, desperten en tots nosaltres.

Aquest treball s'ha d'entendre com un procés d'aprenentatge, no només sobre grups de trenes i les seves representacions, sinó també de la teoria que hi ha darrere: teoria de representacions, homologia, àlgebra homològica, teoria de categories, el grup K_0 ... Certament, les trenes, tot i l'interès intrínsec que ja desperten, han estat la causa que ha fet que aprenguéssim i entenguéssim aquests temes millor.

Aquest estudi es podria estendre de diverses maneres, expressades a continuació en forma de pregunta:

- Com és la relació entre la teoria de trenes i la de nusos, en especial, l'obtenció del polinomi de Jones a partir de les trenes?
- Els elements del nucli de la representació de Burau són diferents a la resta a la representació categòrica de Khovanov-Seidel?
- Hi ha alguna manera de categorificar, de manera semblant a la de Khovanov-Seidel, la representació de Burau a color?

6 Referències

- [1] ANSHEL, I., ANSHEL, M., AND GOLDFELD, D. A linear time matrix key agreement protocol over small finite fields. *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.* 17, 3-4 (2006), 195–203.
- [2] ARIAS ABAD, C. Introduction to representations of braid groups. *Rev. Colombiana Mat.* 49, 1 (2015), 1–38.
- [3] ARTIN, E. Theory of braids. *Ann. of Math. (2)* 48 (1947), 101–126.
- [4] ASAEDA, M., AND KHOVANOV, M. Notes on link homology. In *Low dimensional topology*, vol. 15 of *IAS/Park City Math. Ser.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, pp. 139–195.
- [5] BIGELOW, S. The Burau representation is not faithful for $n = 5$. *Geom. Topol.* 3 (1999), 397–404.
- [6] BIRMAN, J. S. *Braids, links, and mapping class groups*. Annals of Mathematics Studies, No. 82. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1974.
- [7] CAUTIS, S., AND LICATA, A. Vertex operators and 2-representations of quantum affine algebras. *arXiv e-prints* (Dec. 2011), arXiv:1112.6189.
- [8] COSGROVE, G. M. The image of the gassner representation of the pure braid subgroup has pairwise free generators. *arXiv e-prints* (2022), arXiv:2204.12469.
- [9] DELIGNE, P. Action du groupe des tresses sur une catégorie. *Invent. Math.* 128, 1 (1997), 159–175.
- [10] FULTON, W., AND HARRIS, J. *Representation theory*, vol. 129 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1991. A first course, Readings in Mathematics.
- [11] GARSIDE, F. A. The braid group and other groups. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* 20 (1969), 235–254.
- [12] GREENBERG, M. J., AND HARPER, J. R. *Algebraic topology*, vol. 58 of *Mathematics Lecture Note Series*. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Advanced Book Program, Reading, Mass., 1981. A first course.
- [13] JONES, V. F. R. Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials. *Ann. of Math. (2)* 126, 2 (1987), 335–388.
- [14] KASSEL, C., AND TURAEV, V. *Braid groups*, vol. 247 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2008.
- [15] KAUFFMAN, L. H., AND LINS, S. L. *Temperley-Lieb recoupling theory and invariants*

of 3-manifolds, vol. 134 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994.

- [16] KHOVANOV, M., AND SEIDEL, P. Quivers, Floer cohomology, and braid group actions. *J. Amer. Math. Soc.* 15, 1 (2002), 203–271.
- [17] MAGNUS, W. Braid groups: a survey. In *Proceedings of the Second International Conference on the Theory of Groups (Australian Nat. Univ., Canberra, 1973)* (1974), Lecture Notes in Math., Vol. 372, Springer, pp. 463–487.
- [18] MASSEY, W. S. *Algebraic topology: an introduction*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 56. Springer, 1977. Reprint of the 1967 edition.
- [19] MURASUGI, K., AND KURPITA, B. I. *A study of braids*, vol. 484 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.
- [20] PARIS, L., AND ROLFSEN, D. Geometric subgroups of mapping class groups. *J. Reine Angew. Math.* 521 (2000), 47–83.
- [21] ROSENBERG, J. *Algebraic K-theory and its applications*, vol. 147 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1994.
- [22] ROTMAN, J. J. *An introduction to homological algebra*, second ed. Universitext. Springer, 2009.
- [23] STILWELL, J., AND SERRE, J. *Trees*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2012.
- [24] TURAEV, V. Faithful linear representations of the braid groups. No. 276. Société Mathématique de France, 2002, pp. 389–409. Séminaire Bourbaki, Vol. 1999/2000.