UNIVERSITAT DE BARCELONA

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Comparativa del valor de Shapley amb altres solucions igualitàries en els jocs cooperatius. El paper dels jugadors "inútils"

Autor: GEMMA GIL SAURA

Director: PERE CALLEJA
Codirector: XAVIER JARQUE
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 13 de juny de 2023

Abstract

The main objective of this research is the study of cooperative games with transferable utility. Specifically, we will examine the three most common used solutions: the Shapley value, the egalitarian solution, and the egalitarian surplus solution. These solutions aim to determine how to reach an agreement in a cooperative situation among players. On one hand, we will present the common properties shared by these solutions, namely efficiency, symmetry, and additivity. On the other hand, we will examine the properties that differentiate them. Additionally, we will deepen into the detailed axiomatic characterizations that are crucial for their proper definition, providing several examples to illustrate the independence of these properties.

Resum

L'objectiu principal d'aquest treball és l'estudi dels joc cooperatius d'utilitat transferible. En concret, estudiarem les tres solucions més utilitzades en ells: el valor de Shapley, la solució igualitària i la solució igualitària del surplus. Aquestes solucions tracten de determinar com es pot arribar a un acord en una situació de cooperació entre jugadors. Per una banda, presentarem les propietats comuns entre elles, la eficiència, la simetria i l'additivitat, i d'altra banda, estudiarem les propietats que les diferencien. A més, estudiarem en detall les seves caracteritzacions axiomàtiques, molt necessàries per definir-les adequadament, aportant diversos exemples per veure la independència de les propietats d'aquestes.

2020 Mathematics Subject Classification. 91A06, 91A12, 91A30, 91B16

Agraïments

Abans d'entrar en matèria, m'agradaria dedicar un apartat d'aquest treball a donar agraïments a totes aquelles persones que directa o indirectament han estat al meu costat donant-me suport. No només durant la realització d'aquest treball, també a aquelles que ho han fet durant aquesta carrera, que per diferents motius acadèmics i personals, m'ha fet experimentar un gran creixement personal.

En primer lloc, donar les gràcies al Dr. Pere Calleja Cortés i al Dr. Xavier Jarque Ribera per haver-me donat l'oportunitat de treballar amb ells. Els vull agrair la seva predisposició a ajudar-me durant tot el procés. Ha sigut un plaer poder treballar al vostre costat.

M'agradaria fer especial menció a la meva família, que han estat sempre al meu costat i m'han donat el seu suport quan més ho he necessitat. En primer lloc als meus pares, que han fet lo impossible perquè pugui ser qui soc. A continuació als meus germans, Leo i Jaume, els meus pilars, els que m'acompanyen i em recolzen en cada aventura. També volia donar les gràcies a la meva família "adoptiva", persones molt especials que m'han ensenyat de veritat el significat del que és lluitar. A més, volia agrair al meu avi Leonardo, que sempre em mostra el seu orgull cap a mi i m'ajuda cada dia a créixer. I en especial a la meva brúixola, la meva força per seguir avant, perquè encara que fa poc que em va deixar físicament, segueix acompanyant-me en aquest camí, a la meva àvia Teresita, gràcies.

Per últim vull agrair als meus amics i amigues, per recolzar-me i animar-me en els moments més difícils, aquells que han viscut en mi aquests últims quatre anys. En primer lloc als que m'han acompanyat durant la carrera, Òscar, Elena, Ivan, Joan, Ignasi, Natàlia, Aina i tots els altres matemàtics de Principi de l'Entrepa, amb especial menció a Anita, que ha estat al meu costat en tot moment, sense vosaltres hauria sigut molt complicat continuar endavant. També als que ho han fet d'una forma diferent, Inefables, en especial a Laia i Arantxa, que m'han ajudat quan més ho he necessitat. I per acabar, al que camina al meu costat cada dia, al que m'agafa de la mà quan les coses no van tan bé, Martí.

A tots vosaltres, moltes gràcies.

Índex

1 Introducció

Per començar a introduir el tema que desenvoluparem, és important saber què és un joc. Un joc modelitza situacions de conflicte i cooperació. A través d'aquests jocs, es representen i simulen situacions en les quals els jugadors han d'interactuar entre ells per tal d'assolir objectius específics, és a dir, els jugadors han de col·laborar o competir entre ells. La col·laboració implica treballar conjuntament, compartir recursos i coneixements, i prendre decisions de manera col·lectiva per assolir els objectius establerts. En canvi, la competència involucra la rivalitat entre jugadors, on cada un busca superar als altres per aconseguir el seu propi èxit individual.

Per entendre millor la teoria de jocs, parlarem de la classificació clàssica del matemàtic John Von Neumann i l'economista Oskar Morgenstern, els quals en 1944 van publicar el llibre "Theory of games and economic behaviour", on van investigar dos tipus de problemes diferents de la teoria de jocs. El primer, són els jocs no cooperatius, on els agents competeixen entre ells per aconseguir una meta individual. En aquests jocs, la utilitat d'un jugador dependrà en gran mesura de les accions i decisions preses pels altres jugadors, és a dir, els jugadors se centren en desenvolupar una estratègia que li permeti superar als seus oponents i maximitzar els seus propis beneficis, tenint en compte les possibles respostes i accions dels altres jugadors. El segon són els jocs cooperatius, on els agents treballen conjuntament per assolir un objectiu comú. En aquests jocs, els jugadors col·laboren i prenen decisions de manera conjunta, tenint en compte els interessos i les necessitats de tots els membres de l'equip.

En aquest treball, ens centrarem en els jocs cooperatius, l'objectiu dels quals és donar una resposta a com distribuir els guanys obtinguts en l'acció conjunta entre els jugadors. Els possibles repartiments d'aquests guanys poden tenir un impacte directe en la utilitat o benefici que cada jugador obté, és a dir, pot causar increments i disminucions de la utilitat de cada jugador. Dins dels jocs cooperatius parlarem dels joc cooperatius d'utilitat transferible, que són aquells en què hi ha diverses maneres de distribuir els diners obtinguts de les diferents coalicions. Aquestos es poden transferir d'un agent a un altre i es poden dividir en tantes parts com vulguem, cada una d'elles és una possible solució o proposta per aquest repartiment.

La solució més utilitzada per abordar la qüestió de com repartir els guanys en els jocs cooperatius d'utilitat transferible és el valor de Shapley, basat en el concepte de marginalitat, desenvolupat pel matemàtic i economista Lloyd Shapley, qui més avant va ser premiat amb el Premi Nobel en 2012, una de les causes per les quals va rebre aquest premi va ser la seva contribució als jocs cooperatius. Aquesta solució determina la importància de cada jugador en un joc, calculant les seves contribucions marginals en totes les possibles ordenacions dels jugadors en el joc, és a dir, analitza com afecta la participació d'un jugador específic al valor que pot obtenir la societat en cas de cooperar. No obstant això, hi ha altres solucions que es basen en el concepte d'igualitarisme. Parlarem de la solució igualitària, que reparteix els guanys entre tots els jugadors a parts iguals i també de la solució igualitària del surplus, que en primer lloc garanteix a cada jugador el seu valor individual, és a dir, el valor que aporta en un joc aquest jugador si no coopera amb ningú més, és a dir, de manera individual. Un vegada fet això, reparteix la resta de beneficis entre tots els jugadors a parts iguals.

Aquestes tres solucions es diferencien en el que considerarem un jugador "inútil" a l'hora d'aportar beneficis en un joc cooperatiu. Ens referim com a "inútils" als següents tipus de jugadors. Un jugador nul, és un jugador que no aporta cap benefici quan coopera amb altres jugadors, la seva participació no té cap impacte en el resultat del joc. Un jugador és anul·lador, si les coalicions que el contenen no generen cap guany, és a dir, el guany de qualsevol coalició que el contingui és zero. Un jugador fals, és un jugador que no aporta cap benefici addicional quan coopera amb altres jugadors, només aporta el seu valor individual. Per últim, un jugador és falsificador si les coalicions que el contenen generen un guany igual a la suma dels valors individuals de tots els jugadors que formen la coalició, és a dir, només s'obtenen els beneficis individuals dels jugadors que participen, cap benefici addicional.

Tot i que hem vist que aquestes tres solucions mencionades varien en la manera del repartiment dels guanys obtinguts, totes elles compleixen algunes propietats en comú. Una d'aquestes propietats es l'eficiència, que implica que tots els beneficis obtinguts per la cooperació dels participants d'un joc són distribuïts, de manera que no es queda cap benefici sense repartir ni tampoc es reparteix més del que s'ha obtingut. És a dir, el sumatori de totes les parts en què s'ha dividit el benefici obtingut, és exactament igual al guany obtingut en la cooperació de tots els jugadors. A més, també compleixen la simetria, que vol dir que si dos jugadors són simètrics, és a dir, que aporten el mateix benefici quan cooperen amb la resta de jugadors, aleshores també rebran el mateix. Per últim l'additivitat, és a dir, la solució ha de ser invariant per a qualsevol descomposició additiva del joc.

A més a més, per estudiar i entendre millor les tres solucions mencionades: el valor de Shapley, la solució igualitària i la solució igualitària del surplus, mencionarem i demostrarem tres teoremes molt importants que són caracteritzacions axiomàtiques necessàries per definir adequadament aquestes tres solucions. Una caracterització axiomàtica és una estructura que tracta d'identificar propostes de repartiment o solucions mitjançant les propietats que verifiquen aquesta solució, on totes aquestes propietats són necessàries, és a dir, ni sobren ni falten axiomes. El primer teorema que veurem, és que el valor de Shapley és l'única solució que verifica les propietats d'eficiència, simetria, additivitat i la propietat del jugador nul, amb aquest teorema ens quedarà molt més clara aquesta solució i sabrem interpretar-la d'una manera molt més directa. El segon teorema important, i on també coneixerem molt més aquesta solució, és que la solució igualitària és l'única solució que satisfà les propietats d'eficiència, simetria, additivitat i la propietat del jugador anul·lador. L'últim teorema que veurem i demostrarem, és que la solució igualitària del surplus és l'única solució que compleix les propietats d'eficiència, simetria, additivitat i la propietat del jugador falsificador. Amb aquests tres teoremes i amb algun altre que utilitzarem de manera tècnica per fer aquestes demostracions, ens quedaran molt més clares totes les propietats utilitzades, que ja hem mencionat i definit anteriorment. Així mateix, com ja hem dit que totes les propietats són igual de necessàries en cada caracterització axiomàtica, dedicarem un capítol del treball a veure-ho mitjançant exemples, on en cada exemple es compliran tres de les quatre propietats, de manera que deixarem clara la independència d'aquestes.

D'entrada, en el Capítol 2 d'aquest treball, ens centrarem en els jocs cooperatius d'utilitat transferible i la seva estructura d'espai vectorial, definint els conceptes bàsics per tal d'entendre-ho de forma clara. També definirem conceptes més tècnics que necessitarem per fer algunes demostracions més avant. En el Capítol 3, definirem les tres solucions que hem mencionat i les interpretarem d'una manera més detallada, perquè ens quedi clara la diferència entre totes elles. A més, veurem un exemple d'un mateix joc però amb tres solucions diferents, de manera que podrem veure clarament que existeixen molts factors que ens impedeixen opinar objectivament sobre quina solució és millor. En el Capítol 4, definirem totes les propietats mencionades anteriorment, tant les que són comuns en totes les solucions, com les que s'encarreguen de diferenciar les solucions que hem definit. D'aquestes propietats diferenciadores, veurem totes les relacions que hi ha entre elles. També veurem algunes propietats que farem servir de forma tècnica en el Capítol 5, per estudiar i demostrar els teoremes mencionats. Així mateix, en el Capítol 5 entrarem en detall en les caracteritzacions axiomàtiques que hem nombrat anteriorment. Veurem la demostració de cada una d'elles de manera detallada i clara. A més, veurem altres teoremes que ens seran necessaris per fer aquestes demostracions. Per acabar, en el Capítol 6, veurem la independència de totes les propietats utilitzades en cada axiomàtica mitjançant exemples de solucions, de manera que en cada exemple es compleixen tres de les quatre propietats. D'aquesta manera, podrem concloure que les quatre propietats són necessàries per cada teorema, i que cap d'aquestes és implicació de les altres.

2 Jocs cooperatius d'utilitat transferible i la seva estructura d'espai vectorial

Els jocs cooperatius d'utilitat transferible són una branca de la teoria de jocs que s'ocupa d'estudiar situacions de cooperació entre agents racionals. Els agents treballen conjuntament per aconseguir un objectiu comú i busquen una combinació d'accions que maximitzi el benestar social, és a dir, allò que és òptim per a la societat. La principal característica dels jocs cooperatius d'utilitat transferible és la falta d'un comportament estratègic per part dels agents. Això vol dir, que els jugadors no prenen decisions amb l'objectiu de superar als altres o aconseguir un avantatge individual, sinó que col·laboren entre ells per maximitzar el benestar col·lectiu.

Un aspecte clau en els jocs cooperatius és la noció d'utilitat transferible, significa que els beneficis obtinguts per la cooperació dels jugadors en un joc, es consideren perfectament divisibles i transferibles entre els agents. Això permet que es pugui assignar una valoració numèrica, és a dir, una quantitat de diners a cada coalició de jugadors, i aquestes valoracions es poden utilitzar per determinar la distribució òptima dels beneficis entre els agents.

En tot aquest treball considerarem que hi ha un conjunt de jugadors arbitrari fix, $N = \{1, 2, ..., n\}$. A més, anomenarem coalició als subconjunts de jugadors i els representarem amb lletres majúscules $S, T, R....$

Definició 2.1. *Un joc cooperatiu en forma característica és un parell ordenat (N, v) on*

1. $N = \{1, 2, ..., n\}$ *és el conjunt finit de jugadors i*
2. v *és la funció característica* $v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$, *on* $2^N = \{S \mid S \subseteq N\}$, *que assigna a tota coalició* $S \subseteq N$ *el seu valor* $v(S) \in \mathbb{R}$. *Amb la condició que* $v(\emptyset) = 0$.

Denotarem per G^N el conjunt de tots els jocs cooperatius definits sobre el conjunt $N = \{1, 2, ..., n\}$ fix.

Definició 2.2. *Direm que un joc* $v \in G^N$ *és* ***0-normalitzat****, si per tot* $i \in N$, $v(i) = 0$.

A més a més, si v_1 i v_2 són jocs 0-normalitzats, aleshores $v_1 + v_2$ i $\lambda \cdot v_1$ també són jocs 0-normalitzats.

En els jocs cooperatius del conjunt G^N, poden definir les següents operacions. Donats dos jocs $v_1, v_2 \in G^N$, i un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$. Per a tot $S \subseteq N$, definirem:

- La **suma** $\quad (v_1 + v_2)(S) := v_1(S) + v_2(S)$
- El **producte per un escalar** $\quad (\lambda \cdot v_1)(S) := \lambda \cdot v_1(S)$.

És a dir, la suma de dos jocs en un conjunt S, és igual a la suma per separat dels jocs en el conjunt S. I el producte d'un escalar i un joc en un conjunt S, és igual al joc en el conjunt S multiplicat pel producte escalar.

Tenint en compte aquestes operacions de suma i producte escalar dels jocs cooperatius, deduïm que $(G^N, +, \cdot, \mathbb{R})$ és un **espai vectorial**.

Definirem ara el joc zero "**0**", és un joc $(N, 0) \in G^N$, que assigna el valor 0 a qualsevol coalició, és a dir, per a qualsevol $S \subseteq N$, $\mathbf{0}(S) = 0$. Més avant el veurem aplicat a la pràctica.

De tots els tipus de jocs cooperatius que hi ha, ens interessen especialment els jocs d'unanimitat, perquè a continuació demostrarem que formen una base de G^N.

Definició 2.3. *Donat $N = \{1, 2, ..., n\}$ i una coalició $T \subseteq N$, $T \neq \emptyset$, definim el* ***joc d'unanimitat*** *associat a T, que denotarem com u_T, de la següent manera:*

$$u_T(S) = \begin{cases} 1 & si\ T \subseteq S, \\ 0 & si\ T \nsubseteq S. \end{cases}$$

És a dir, amb els jocs d'unanimitat obtindrem $u_T(S) = 1$, en cas que la coalició $T \subseteq S$. Per contra, obtindrem $u_T(S) = 0$, en cas que la coalició $T \nsubseteq S$. A continuació, veurem que efectivament els jocs d'unanimitat formen una base de G^N.

Proposició 2.4. *El conjunt $\{u_T \mid \emptyset \neq T \subseteq N\}$ és una base de G^N.*

Demostració. Sabem que existeixen 2^n - 1 jocs d'unanimitat, un per a cada coalició no buida que es pot formar, i que la dimensió de G^N és 2^n - 1. Per demostrar que aquests jocs són una base, hem de mostrar que són linealment independents.

Volem veure que $\displaystyle\sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \lambda_T u_T = \mathbf{0} \longleftrightarrow \lambda_T = 0$ per tot T.

$\Leftarrow$ És evident que si per tot T és cert que $\lambda_T = 0$, aleshores $\displaystyle\sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \lambda_T u_T = \mathbf{0}$.

$\Rightarrow$ Demostrarem aquest fet per inducció.

Considerem el cas inicial, demostrarem que $\lambda_T = 0$ per tot T tal que $|T| = 1$.

Sigui $S = \{i\}$, aleshores

$$\sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \lambda_T u_T(S) = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \lambda_T u_T(i) = \sum_{\substack{\emptyset \neq T \subseteq N \\ T \neq \{i\}}} \lambda_T u_T(i) + \sum_{\substack{\emptyset \neq T \subseteq N \\ T = \{i\}}} \lambda_T u_T(i)$$

$$= 0 + \lambda_i u_i(i) = \lambda_i \cdot 1 = 0.$$

La tercera igualtat és degut a que per tot $T \subseteq N$ tal que $\{i\} \neq T$, aleshores $T \nsubseteq \{i\}$. Per tant, d'aquí veiem que $\lambda_i = 0$ per tot $i \in N$.

A continuació, demostrem que $\lambda_T = 0$ per tot T tal que $|T| = 2$.

Sigui $S = \{ij\}$, tenim:

$$\sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \lambda_T u_T(ij) = \lambda_i u_i(ij) + \lambda_j u_j(ij) + \lambda_{ij} u_{ij}(ij) = \lambda_i \cdot 1 + \lambda_j \cdot 1 + \lambda_{ij} \cdot 1 = 0.$$

La primera igualtat és degut a que per tot $T \neq \{\{i\},\{j\},\{ij\}\}$ es compleix que $T \not\subseteq \{ij\}$ i per tant, $u_T(ij) = 0$. Considerant que $\lambda_i = \lambda_j = 0$ pel cas inicial, deduïm que $\lambda_{ij} = 0$ per a tota coalició $\{ij\} \subseteq N$.

Finalment, demostrarem que $\lambda_T = 0$ per tot T tal que $|T| > 2$. Sigui $R = \{i_1, ..., i_T\}$ una coalició arbitrària de $t > 2$ jugadors.

Suposem que $\lambda_S = 0$ per a tot S tal que $|S| < |R|$. Aleshores,

$$\sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \lambda_T u_T(R) = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq R} \lambda_T u_T(R) = \lambda_R u_R(R) + \sum_{\emptyset \neq T \subset R} \lambda_T u_T(R)$$
$$= \lambda_R \cdot 1 + \sum_{\emptyset \neq T \subset R} \lambda_T \cdot 1 = \lambda_R \cdot 1 + 0 = 0.$$

La primera igualtat es segueix de que per tot T tal que $T \not\subseteq R$, $u_T(R) = 0$. Mentre que la penúltima igualtat és degut a que per hipòtesi d'inducció $\lambda_T = 0$ per tot $T \subset R$, ja que $|T| < |R|$. D'aquí deduïm que $\lambda_R = 0$ per a un R arbitrari.

Amb això, queda demostrada la independència lineal dels jocs d'unanimitat. A més a més, com hi ha exactament $2^n - 1$ jocs d'unanimitat, podem concloure que formen una base de G^N. $\square$

Això implica que qualsevol joc cooperatiu es pot descompondre de forma única com a combinació lineal de jocs d'unanimitat. Per tot $v \in G^n$, existeixen uns coeficients λ_T per a $T \subseteq N$ tals que:

$$v = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \lambda_T \cdot u_T.$$

Exemple de tots els jocs d'unanimitat de 3 jugadors.

Considerem $N = \{1, 2, 3\}$. A continuació, veurem tots els possibles jocs d'unanimitat u_T. Examinem totes les coalicions possibles $T \subseteq N$ tal que T no sigui el buit. Sigui:

T={1}

$$u_1(1) = 1, u_1(2) = 0, u_1(3) = 0,$$
$$u_1(12) = 1, u_1(13) = 1, u_1(23) = 0,$$
$$u_1(123) = 1.$$

T={2}

$$u_2(1) = 0, u_2(2) = 1, u_2(3) = 0,$$
$$u_2(12) = 1, u_2(13) = 0, u_2(23) = 1,$$
$$u_2(123) = 1.$$

T={3}

$$u_3(1) = 0, u_3(2) = 0, u_3(3) = 1,$$
$$u_3(12) = 0, u_3(13) = 1, u_3(23) = 1,$$

$$u_3(123) = 1.$$

T={12}

$$u_{12}(1) = 0, u_{12}(2) = 0, u_{12}(3) = 0,$$

$$u_{12}(12) = 1, u_{12}(13) = 0, u_{12}(23) = 0,$$

$$u_{12}(123) = 1.$$

T={13}

$$u_{13}(1) = 0, u_{13}(2) = 0, u_{13}(3) = 0,$$

$$u_{13}(12) = 0, u_{13}(13) = 1, u_{13}(23) = 0,$$

$$u_{13}(123) = 1.$$

T={23}

$$u_{23}(1) = 0, u_{23}(2) = 0, u_{23}(3) = 0,$$

$$u_{23}(12) = 0, u_{23}(23) = 0, u_{23}(23) = 1,$$

$$u_{23}(123) = 1.$$

T={123}

$$u_{123}(1) = 0, u_{123}(2) = 0, u_{123}(3) = 0,$$

$$u_{123}(12) = 0, u_{123}(13) = 0, u_{123}(23) = 0,$$

$$u_{123}(123) = 1.$$

Acabem de veure tots els jocs d'unanimitat que hi ha si tenim tres jugadors. Com ja hem dit anteriorment, hi ha en total $2^n - 1$ jocs, en aquest cas, 7 jocs diferents.

A continuació, definirem els jocs canònics i també demostrarem que formen la base canònica dels jocs cooperatius.

Definició 2.5. *Donat $N = \{1, 2, ..., n\}$ i una coalició $T \subseteq N$, $T \neq \emptyset$, definim el* ***joc canònic*** *associat a T, que denotarem w_T, de la següent manera:*

$$w_T(S) = \begin{cases} 1 & si\ T = S, \\ 0 & si\ T \neq S. \end{cases}$$

És a dir, si analitzem el joc canònic, obtindrem que $w_T(S) = 1$, en cas que la coalició $T = S$. Per contra, obtindrem que $w_T(S) = 0$, en cas que la coalició $T \neq S$.

Proposició 2.6. *El conjunt $\{w_T \mid \emptyset \neq T \subseteq N\}$ és una base de G^N.*

Demostració. Sabem que existeixen 2^n - 1 jocs, un per a casa coalició no buida que es pot formar, i que la dimensió de G^N és 2^n - 1. Per demostrar que aquests jocs són una base, hem de mostrar que són linealment independents.

Volem veure que $\displaystyle\sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \lambda_T w_T = \mathbf{0} \longleftrightarrow \lambda_T = 0$ per tot T.

$\Leftarrow$ És evident que si per tot T, $\lambda_T = 0$, es compleix que $\sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \lambda_T u_T = \mathbf{0}$.

$\Rightarrow$ Agafem una $S \subseteq N$ arbitrària. Aleshores,

$$\sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \lambda_T w_T(S) = \sum_{\substack{\emptyset \neq T \subseteq N \\ T \neq S}} \lambda_T w_T(S) + \lambda_S w_S(S) = 0 + \lambda_S \cdot 1 = 0.$$

La segona igualtat és degut a que si $T \neq S$, $w_T(S) = 0$. Per tant, d'aquí veiem que $\lambda_S = 0$ per a qualsevol S arbitrària.

Aleshores, queda demostrada la independència lineal dels jocs canònics. A més, com hi ha exactament $2^n - 1$ jocs canònics, podem concloure que formen una base de G^N. $\square$

Això implica que qualsevol joc cooperatiu es por descompondre de forma única com a combinació lineal de jocs canònics. Per tot $v \in G^n$, existeixen uns coeficients λ_T per a $T \subseteq N$ tals que:

$$v = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \lambda_T \cdot w_T.$$

Exemple de tots els jocs canònics de 3 jugadors.

Considerem $N = \{1, 2, 3\}$. Veurem tots els possibles jocs canònics w_T. Examinem totes les coalicions possibles $T \subseteq N$ tal que T no sigui el buit. Sigui:

T={1}

$$w_1(1) = 1, w_1(2) = 0, w_1(3) = 0,$$
$$w_1(12) = 0, w_1(13) = 0, w_1(23) = 0,$$
$$w_1(123) = 0.$$

T={2}

$$w_2(1) = 0, w_2(2) = 1, w_2(3) = 0,$$
$$w_2(12) = 0, w_2(13) = 0, w_2(23) = 0,$$
$$w_2(123) = 0.$$

T={3}

$$w_3(1) = 0, w_3(2) = 0, w_3(3) = 1,$$
$$w_3(12) = 0, w_3(13) = 0, w_3(23) = 0,$$
$$w_3(123) = 0.$$

T={12}

$$w_{12}(1) = 0, w_{12}(2) = 0, w_{12}(3) = 0,$$
$$w_{12}(12) = 1, w_{12}(13) = 0, w_{12}(23) = 0,$$
$$w_{12}(123) = 0.$$

T={13}

$$w_{13}(1) = 0, w_{13}(2) = 0, w_{13}(3) = 0,$$

$$w_{13}(12) = 0, w_{13}(13) = 1, w_{13}(23) = 0,$$
$$w_{13}(123) = 0.$$

T={23}

$$w_{23}(1) = 0, w_{23}(2) = 0, w_{23}(3) = 0,$$
$$w_{23}(12) = 0, w_{23}(23) = 0, w_{23}(23) = 1,$$
$$w_{23}(123) = 0.$$

T={123}

$$w_{123}(1) = 0, w_{123}(2) = 0, w_{123}(3) = 0,$$
$$w_{123}(12) = 0, w_{123}(13) = 0, w_{123}(23) = 0,$$
$$w_{123}(123) = 1.$$

Aquests són tots els jocs canònics que tenim en tres jugadors. Tant els jocs d'unanimitat com els jocs canònics ens seran necessaris més avant quan vulguem expressar els jocs cooperatius com a combinació lineal d'aquests dos tipus de jocs.

3 Solucions

Una solució en els jocs cooperatius és un concepte fonamental per determinar com es pot arribar a un acord en una situació de cooperació entre jugadors. És a dir, és una proposta per al repartiment dels beneficis o dels guanys obtinguts per la participació conjunta de tota la societat, entre tots els jugadors participants. Com que assumim que es forma la coalició total N, la societat actua conjuntament.

És important tenir en compte que una solució és una recomanació, mai una imposició. Aquesta distinció és essencial, ja que una solució ha de ser presentada com una opció o una proposta, respectant que pugui ser acceptada o rebutjada. És important recordar que una solució pot ser efectiva per a un problema en particular, però no necessàriament per a un altre. Per tant, és imprescindible tenir sempre present el context i les característiques específiques del problema que ha donat lloc a la necessitat de buscar una solució.

Definició 3.1. *Una **solució** és una funció que assigna cada joc de G^N a un vector de $\mathbb{R}^n$:*

$$\begin{aligned} F: \quad G^N & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (N,v) & \longrightarrow F(N,v) \end{aligned}$$

Si no hi ha confusió i com que N és fix, denotarem $F(N,v) = F(v) = (F_1(v),...,F_n(v))$, on $F_i(v)$ s'interpreta com la quantitat que el jugador i ha de rebre en el joc (N,v) segons la solució F.

3.1 El valor de Shapley

La solució més utilitzada en la Teoria de jocs cooperatius és el **valor de Shapley**. Aquest concepte va ser introduït pel matemàtic i economista Lloyd Shapley en 1953, qui va ser considerat per molts experts com la personificació de la teoria de jocs, i va ser reconegut amb el Premi Nobel per aquest desenvolupament el 2012.

El valor de Shapley, es basa en el principi de contribució marginal de cada jugador. La idea principal d'aquesta solució és saber quant aporta cada jugador, tenint en compte totes les possibles ordenacions dels jugadors i calculant la mitjana de les contribucions marginals de cada jugador en cadascuna d'aquestes ordenacions. Aquesta solució tracta d'estudiar aquestes contribucions individuals de cada jugador en totes les coalicions en què hi participa. A més, té en compte l'ordre d'arribada de cada jugador, assumint que tots els ordres són igual de probables.

3.1.1 Definició

Per entendre millor el concepte el valor de Shapley, començarem definint què és un ordre. Un ordre o permutació dels jugadors es refereix a una seqüència específica en la que els jugadors s'uneixen a la coalició per cooperar i formar N. Representarem l'ordre dels jugadors com $\theta = (i_1, i_2, ..., i_n)$, on i_j indica el jugador en la posició j. En total, hi ha $n!$ maneres diferents d'ordenar als jugadors, on n recordem que és el nombre total de jugadors en el joc. A més, cal tenir en compte que la notació $\theta(i) = j$, indica que el jugador i ocupa la posició j en aquesta permutació específica.

Definim S_n com el conjunt de tots els ordres possibles, sigui $\theta = (i_1, i_2, ..., i_n)$ un ordre i (N, v) un joc qualsevol associat a θ, aleshores definim $m^\theta(v)$ com el vector de contribucions marginals associat a θ. Les contribucions marginals es calculen de la següent manera:

$m^\theta_{i_1}(v) = v(i_1)$ - $v(\emptyset)$ on v($\emptyset$) = 0,

$m^\theta_{i_2}(v) = v(i_1 i_2)$ - $v(i_1)$,

$\vdots$

$m^\theta_{i_j}(v) = v(i_1 ... i_j)$ - $v(i_1 ... i_{j-1})$,

$\vdots$

$m^\theta_{i_n}(v) = v(i_1 ... i_n)$ - $v(i_1 ... i_{n-1})$.

On $v(i_1 ... i_j)$ representa el valor obtingut per la coalició formada pels jugadors $i_1, ..., i_j$, i cada contribució marginal mesura el canvi del valor de la coalició quan s'uneix un nou jugador a ella en l'ordre establert, és a dir, mesura l'impacte individual de cada jugador en el valor de la coalició. Per exemple, la contribució marginal $m^\theta_{i_j}(v)$, representa la diferència del valor de la coalició $(i_1 ... i_j)$ quan s'uneix el jugador i_j, amb el valor de la coalició dels jugadors que hi havia abans $(i_1 ... i_{j-1})$ en l'ordre establert. En aquest cas seria, $v(i_1 ... i_j)$ - $v(i_1 ... i_{j-1})$.

Definició 3.2. *Definim el* ***valor de Shapley*** *com la solució ϕ tal que:*

$$\phi(v) := \frac{1}{n!} \sum_{\theta \in S_n} m^\theta(v), \tag{3.1}$$

on recordem que $n!$ són totes les ordenacions possibles dels jugadors. Aquesta fórmula, fa la suma de les contribucions marginals de tots els jugadors tenint en compte totes les possibles ordenacions dels jugadors. Després, fa la mitjana d'aquestes dividint-lo pel nombre total d'ordenacions.

Definició 3.3. *A més, $\phi(v) = (\phi_1(v), ..., \phi_n(v))$, per a tot $i \in N$, tenim:*

$$\phi_i(v) := \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \gamma(S) \cdot [v(S \cup \{i\}) - v(S)], \tag{3.2}$$

on $\gamma(S) = \frac{s!(n-s-1)!}{n!}$ i s és el nombre de jugadors que hi ha a la coalició S, és a dir, $|S| = s$.

Per entendre millor la **Definició 3.3**, considerem un jugador i i una coalició S tal que $i \notin S$. La diferència $v(S \cup \{i\})$ - $v(S)$ representa la contribució marginal del jugador i en la coalició S.

Ara bé, per interpretar el coeficient de ponderació $\gamma(S)$, hem de veure en quantes de les $n!$ ordenacions possibles dels jugadors, el jugador i entra després de la coalició S. Suposem que el jugador i s'incorpora després dels jugadors d'S, això pot haver succeït de $s!$ ordenacions possibles, ja que els jugadors d'S que ja estaven abans que el jugador i, es poden ordenar de $s!$ maneres possibles. Un cop i s'ha incorporat, els jugadors que s'han incorporat després d'S i d'i, els del conjunt $N \setminus (S \cup \{i\})$, on $|N \setminus (S \cup \{i\})| = n - (s+1)$, poden ordenar-se de $(n - s - 1)!$ maneres diferents. Per tant, el nombre de vegades en què $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ serà utilitzat per al càlcul del pagament associat a ϕ de i serà $s! \cdot (n - s - 1)!$. Finalment, dividirem aquest resultat per totes les ordenacions possibles en N, $n!$ per obtenir un coeficient de ponderació relatiu.

3.2 La solució igualitària

Definició 3.4. *Definim la* ***solució igualitària****, com la solució E tal que per qualsevol joc $v \in G^N$ i per a tot $i \in N$, tenim:*

$$E_i(v) = \frac{v(N)}{|N|}. \tag{3.3}$$

Observem que aquesta solució divideix el valor total $v(N)$ entre el número total de jugadors n d'igual manera, sense tenir en compte les seves contribucions marginals o l'ordre d'arribada, de manera que tots els jugadors rebran el mateix.

3.3 La solució igualitària del surplus

Definició 3.5. *Definim la* ***solució igualitària del surplus****, com la solució ES tal que per a qualsevol joc $v \in G^N$ i per a tot $i \in N$ tenim:*

$$ES_i(v) = v(i) + \frac{v(N) - \sum_{i \in N} v(i)}{|N|}. \tag{3.4}$$

Observem que aquesta solució distribueix a cada jugador el seu valor individual i tot el que sobra, és a dir, el valor total menys la suma de tots els valors individuals de tots els jugadors, ho divideix de manera igual entre el número total de jugadors n.

Veurem a continuació, un exemple d'un joc v i calcularem aquestes tres solucions.

Exemple 3.6. Considerem $N = \{1, 2, 3\}$ i sigui v un joc de G^N amb els següents valors: $v(1) = 1, v(2) = 0, v(3) = 2, v(12) = 3, v(13) = 3, v(23) = 2, v(123) = 10$. Aleshores:

Utilitzem el valor de Shapley: Per la fórmula (3.2),

$$\phi_1(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{1\}} \gamma(S) \cdot [v(S \cup \{1\}) - v(S)] = \frac{0!(3-0-1)!}{3!} \cdot [v(1) - v(\emptyset)]$$

$$+\frac{1!(3-1-1)!}{3!} \cdot [v(12) - v(2)] + \frac{1!(3-1-1)!}{3!} \cdot [v(13) - v(3)] + \frac{2!(3-2-1)!}{3!} \cdot [v(123) - v(23)]$$

$$= \frac{2!}{3!} \cdot [1-0] + \frac{1!}{3!} \cdot [3-0] + \frac{1!}{3!} \cdot [3-2] + \frac{2!}{3!} \cdot [10-2] = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{1}{6} + \frac{8}{3} = \frac{22}{6} = \frac{11}{3}.$$

$$\phi_2(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{2\}} \gamma(S) \cdot [v(S \cup \{2\}) - v(S)] = \frac{0!(3-0-1)!}{3!} \cdot [v(2) - v(\emptyset)]$$

$$+\frac{1!(3-1-1)!}{3!} \cdot [v(12) - v(1)] + \frac{1!(3-1-1)!}{3!} \cdot [v(23) - v(3)] + \frac{2!(3-2-1)!}{3!} \cdot [v(123) - v(13)]$$

$$= \frac{2!}{3!} \cdot [0-0] + \frac{1!}{3!} \cdot [3-1] + \frac{1!}{3!} \cdot [2-2] + \frac{2!}{3!} \cdot [10-3] = \frac{2}{6} + \frac{14}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}.$$

$$\phi_3(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{3\}} \gamma(S) \cdot [v(S \cup \{3\}) - v(S)] = \frac{0!(3-0-1)!}{3!} \cdot [v(3) - v(\emptyset)]$$

$$+\frac{1!(3-1-1)!}{3!} \cdot [v(13) - v(1)] + \frac{1!(3-1-1)!}{3!} \cdot [v(23) - v(2)] + \frac{2!(3-2-1)!}{3!} \cdot [v(123) - v(12)]$$

$$= \frac{2!}{3!} \cdot [2-0] + \frac{1!}{3!} \cdot [3-1] + \frac{1!}{3!} \cdot [2-0] + \frac{2!}{3!} \cdot [10-3] = \frac{4}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{14}{6} = \frac{22}{6} = \frac{11}{3}.$$

Per tant, $\phi(v) = (\frac{11}{3}, \frac{8}{3}, \frac{11}{3})$.

Utilitzem la solució igualitària: Per la fórmula (3.3),

$$E_1(v) = \frac{v(N)}{n} = \frac{10}{3}; E_2(v) = \frac{v(N)}{n} = \frac{10}{3}; E_3(v) = \frac{v(N)}{n} = \frac{10}{3}.$$

Per tant, $E(v) = (\frac{10}{3}, \frac{10}{3}, \frac{10}{3})$

Utilitzem la solució igualitària del surplus: Per la fórmula (3.4),

$$ES_1(v) = v(1) + \frac{v(N) - \sum_{i \in N} v(i)}{|N|} = 1 + \frac{10 - (1+0+2)}{3} = 1 + \frac{7}{3} = \frac{10}{3}.$$

$$ES_2(v) = v(2) + \frac{v(N) - \sum_{i \in N} v(i)}{|N|} = 0 + \frac{10 - (1+0+2)}{3} = \frac{7}{3} = \frac{7}{3}.$$

$$ES_3(v) = v(3) + \frac{v(N) - \sum_{i \in N} v(i)}{|N|} = 2 + \frac{10 - (1+0+2)}{3} = 2 + \frac{7}{3} = \frac{13}{3}.$$

Per tant, $ES(v) = (\frac{10}{3}, \frac{7}{3}, \frac{13}{3})$

En aquest exemple, podem observar clarament la diferència entre les tres solucions que hem definit. Observem que en cada solució utilitzem una distribució diferent, però no podem afirmar quina d'elles és la correcta o quina és millor que les altres, ja que per a cada agent serà una diferent. Depenent de si $v(i)$ és molt gran, de lo grans que siguin les contribucions marginals de i, o la quantitat de beneficis que tenim en la igualitària del surplus un cop hem repartit els valors individuals, alguns agents preferiran una d'elles i uns altres agents una altra. Per tot això, introduirem un punt de vista axiomàtic que intenta discutir sobre quina és la millor solució basant-se en quines són les seves propietats o els axiomes que les caracteritzen.

4 Propietats o axiomes

Nosaltres, en aquest treball prenem una perspectiva axiomàtica. És a dir, estudiem les solucions mitjançant les propietats que compleixen. No només això, sinó que plantejarem conjunts d'axiomes/propietats que caracteritzen les solucions que proposem, és a dir, per a avaluar i analitzar les solucions proposades.

4.1 Propietats comuns

Aquestes tres propietats són comuns a les tres solucions que hem definit, és a dir, totes elles les compleixen. Més avant, en el Capítol 5 ho veurem mitjançant les contribucions axiomàtiques que les defineixen. A continuació, les definirem i veurem un exemple d'alguna d'elles perquè ens quedi més clara la seva definició.

1. **Eficiència**: La solució F compleix el criteri d'eficiència, si per a qualsevol joc $v \in G^N$ es reparteix el total de guanys $v(N)$, entre tots els jugadors. En altres paraules, $\sum_{i=1}^{n} F_i(v) = v(N)$.

   La suma de totes les reparticions a tots els jugadors, serà igual al total dels guanys del joc. És a dir, no es reparteix més beneficis dels que generen ni tampoc es queden beneficis sense repartir.

2. **Simetria**: Dos jugadors i, j són simètrics en un joc v, si són intercanviables. Qualsevol coalició que no els conté, li és indiferent ajuntar-se a $\{i\}$ o a $\{j\}$. És a dir, $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$, per a tot $S \subseteq N$ tal que $i, j \notin S$.

   Una solució F satisfà la simetria si qualsevol joc $v \in G^N$, i per a qualsevol parell de jugadors $i, j \in N$ simètrics en v, es compleix que $F_i(v) = F_j(v)$.

   Si dos jugadors són simètrics, és a dir, generen els mateixos beneficis individualment i també amb la unió a qualsevol coalició, aleshores la seva repartició també serà igual.

   Exemple 4.1. Considerem $N = \{1, 2, 3\}$ i el joc v:

   $v(1) = 0, v(2) = 0, v(3) = 0, v(12) = 1, v(13) = 5, v(23) = 5, v(123) = 10.$

   Observem que $v(1) = v(2)$, $v(13) = v(23)$, és a dir, 1 i 2 són simètrics perquè tenen el mateix valor individual i el mateix valor si se junten en 3. Com F compleix la propietat de simetria, $F_1(v) = F_2(v)$.

3. **Additivitat**. Una solució F satisfà l'additivitat si donats dos jocs qualsevol (N, v_1) i (N, v_2), es compleix que F($v_1 + v_2$) = F(v_1) + F(v_2).

   La solució F ha de ser invariant per qualsevol descomposició additiva del joc, és a dir, si un joc es divideix en dos subgrups més petits, aleshores el valor total del joc és igual a la suma dels valors de cada subgrup per separat.

Exemple 4.2. Considerem $N = \{1, 2, 3\}$ i els jocs v_1, v_2 i $v = v_1 + v_2$, on v és el projecte cooperatiu resultant d'agregar-ne dos de diferents v_1 i v_2, amb els valors:

$$v_1(1) = 0, v_1(2) = 0, v_1(3) = 0, v_1(12) = 1, v_1(13) = 2, v_1(23) = 1, v_1(123) = 5.$$

$$v_2(1) = 1, v_2(2) = 0, v_2(3) = 1, v_2(12) = 2, v_2(13) = 1, v_2(23) = 2, v_2(123) = 3.$$

$$v(1) = 1, v(2) = 0, v(3) = 1, v(12) = 3, v(13) = 3, v(23) = 3, v(123) = 8.$$

Si una solució F és additiva, aleshores $F(v) = F(v_1) + F(v_2)$.

4.2 Propietats diferenciadores. El paper dels jugadors "inútils"

Fins ara, hem parlat de les tres propietats que són comuns a totes les solucions definides. No obstant això, existeixen altres propietats que són necessàries per diferenciar el valor de Shapley, de la solució igualitària i de la solució igualitària amb surplus. Ens centrarem en les propietats diferenciadores, les que ens permeten examinar el paper dels jugadors "inútils" als jocs cooperatius.

1. **Jugador nul**: Un jugador i és considerat un jugador nul en el joc $v \in G^N$, si per a tot $S \subseteq N$ tal que $i \notin S$, es compleix que $v(S \cup \{i\}) = v(S)$. Una solució F satisfà la propietat del jugador nul si per qualsevol joc v, i per a qualsevol jugador nul $i \in N$ en v, es compleix que $F_i(v)$=0.

   Un jugador és un jugador nul si no aporta cap benefici als altres jugadors, és a dir, el valor d'una coalició amb aquest jugador és igual al valor d'aquesta coalició sense el jugador. Aleshores, si una solució compleix la propietat del jugador nul, aquest jugador nul no rebrà cap pagament.

   Exemple 4.3. Considerem $N = \{1, 2, 3\}$ i els següents valors del joc v:

   $v(1) = 0, v(2) = 1, v(3) = 1, v(12) = 1, v(13) = 1, v(23) = 5, v(123) = 5.$

   Observem que $v(12) = v(2)$, $v(13) = v(3)$, $v(123) = v(23)$. En aquest cas 1 és un jugador nul ja que quan es junta amb les altres coalicions no aporta cap benefici. Si una solució F satisfà la propietat del jugador nul, $F_1(v) = 0$.

2. **Jugador anul·lador**: Direm que el jugador i és un jugador anul·lador en el joc $v \in G^N$ si per a tot $S \subseteq N$ amb $i \in S$, tenim $v(S) = 0$. Una solució F compleix la propietat del jugador anul·lador si per qualsevol joc v, i per qualsevol jugador anul·lador $i \in N$ en v, $F_i(v) = 0$.

   Un jugador és un jugador anul·lador si les coalicions que el contenen no generen cap guany. Per tant, si una solució compleix la propietat del jugador anul·lador, aquest jugador no rebrà cap pagament.

   Exemple 4.4. Considerem N=$\{1, 2, 3\}$, i els següents valors per al joc v:

   $v(1) = 0, v(2) = 1, v(3) = 1, v(12) = 0, v(13) = 0, v(23) = 5, v(123) = 0.$

   Observem que 1 és un jugador anul·lador ja que per a tot S amb $1 \in S$, tenim $v(S) = 0$, és a dir, $v(1) = v(12) = v(13) = v(123) = 0$. Aleshores, si la solució F satisfà la propietat del jugador anul·lador, $F_1(v) = 0$.

3. **Jugador fals:** Direm que un jugador i és considerat un jugador fals en un joc $v \in G^N$, si per tot $S \subseteq N$ tal que $i \notin S$, $v(S \cup \{i\})$ - $v(S) = v(i)$. Una solució F compleix la propietat del jugador fals si per qualsevol joc v, i per qualsevol jugador fals $i \in N$ en el joc v, es compleix que $F_i(v) = v(i)$.

   Un jugador és un jugador fals si no aporta cap benefici addicional als altres jugadors, és a dir, el valor d'una coalició amb aquest jugador menys el valor d'aquesta coalició sense el jugador, és el valor individual del jugador fals. Aleshores, si una solució compleix la propietat del jugador fals, aquest jugador no rebrà cap pagament addicional, només rebrà el seu valor individual.

   Exemple 4.5. Considerem $N = \{1, 2, 3\}$ i el següent joc v:

   $v(1) = 1, v(2) = 4, v(3) = 3, v(12) = 5, v(13) = 4, v(23) = 9, v(123) = 10.$

   Observem que $1 \in N$ és un jugador fals en el joc v, perquè per tot $S \subseteq N$ tal que $i \notin S$, es compleix que $v(12) - v(2) = v(1)$, $v(13) - v(3) = v(1)$, $v(123) - v(23) = v(1)$, és a dir, no aporta cap benefici addicional. Aleshores, com 1 és un jugador fals i F compleix la propietat del jugador fals, $F_1(v) = v(1) = 1$.

4. **Jugador falsificador** Direm que un jugador $i \in N$ és un jugador falsificador en un joc $v \in G^N$, si per tot $S \subseteq N$ tal que $i \in S$, es compleix que $v(S) = \sum_{j \in S} v(\{j\})$.
   Una solució F compleix la propietat del jugador falsificador, si per qualsevol joc v, i per qualsevol jugador falsificador $i \in N$ en el joc v, $F_i(v) = v(i)$.

   Un jugador és un jugador falsificador si les coalicions que el contenen generen un guany igual a la suma dels valors individuals dels jugadors d'eixa coalició. Per tant, si una solució compleix la propietat del jugador falsificador, aquest jugador només rebrà el seu valor individual.

   Exemple 4.6. Considerem $N = \{1, 2, 3\}$ i els valors del joc v:

   $v(1) = 2, v(2) = 8, v(3) = 15, v(12) = 10, v(13) = 17, v(23) = 20, v(123) = 25.$

   Observem que $1 \in N$ és un jugador falsificador en el joc v, ja que per qualsevol $S \subseteq N$ on $1 \in S$, es compleix $v(12) = v(1) + v(2)$, $v(13) = v(1) + v(3)$ i $v(123) = v(1) + v(2) + v(3)$. Per tant, si F compleix la propietat del jugador falsificador, $F_1(v) = v(1) = 2$.

A continuació, veurem totes les relacions que hi ha entre les propietats que hem definit. Mirarem si alguna d'aquestes propietats està implicada per alguna altra, és a dir, és una versió feble, o per contra, si alguna propietat implica una altra, és una versió forta. D'aquesta manera entendrem millor com s'interrelacionen entre elles, i veurem una visió més completa i clara dels axiomes que hem definit.

Proposició 4.7. *La propietat del* ***jugador nul*** *no implica la propietat del* ***jugador anul·lador****. El recíproc tampoc és cert.*

Demostració. $\Rightarrow$ Primer veiem que la propietat del **jugador nul** no implica la propietat del **jugador anul·lador**

En la demostració del **Teorema 5.1**, veurem que el valor de Shapley compleix la propietat del **jugador nul**.

Veiem ara, que aquesta solució **no** compleix la propietat del **jugador anul·lador**. Considerem $N = \{1, 2, 3\}$ i els valors de contribució:

$v(1) = 0, v(2) = 0, v(3) = 0, v(12) = 0, v(13) = 0, v(23) = 1, v(123) = 0.$

És cert que el jugador 1 és un jugador anul·lador, ja que per a tot $S \subseteq N$ tal que $1 \in S$, es compleix que $v(S) = 0$. Aleshores, calculem

$$\phi_1(v) = \frac{0!(3-0-1)!}{3!} \cdot [v(1) - v(\emptyset)] + \frac{1!(3-1-1)!}{3!} \cdot [v(12) - v(2)]$$
$$+\frac{1!(3-1-1)!}{3!} \cdot [v(13) - v(3)] + \frac{2!(3-2-1)!}{3!} \cdot [v(123) - v(23)]$$
$$= \frac{2!(3-2-1)!}{3!} \cdot [0 - 1] = \frac{2!}{3!} \cdot (-1) \neq 0.$$

És a dir, el valor de Shapley no compleix la propietat del jugador anul·lador.

$\Leftarrow$ Per acabar la demostració veiem que la propietat del **jugador anul·lador** no implica la propietat del **jugador nul**

En la demostració del **Teorema 5.3**, provarem que la solució igualitària E, compleix la propietat del **jugador anul·lador**.

Veiem que aquesta solució **no** compleix la propietat del **jugador nul**. Considerem N=$\{1, 2, 3\}$ i els següents valors del joc v:

$v(1) = 0, v(2) = 1, v(3) = 1, v(12) = 1, v(13) = 1, v(23) = 5, v(123) = 5.$

Observem que $v(12) = v(2)$, $v(13) = v(3)$, $v(123) = v(23)$. En aquest cas 1 és un jugador nul ja que quan es junta amb les altres coalicions no aporta cap benefici.

En canvi, $E_1(v) = \frac{v(N)}{|N|} = \frac{5}{3} \neq 0.$ □

Proposició 4.8. *La propietat del **jugador anul·lador** no implica la propietat del **jugador falsificador**. El recíproc tampoc és cert.*

Demostració. $\Rightarrow$ Primer veiem es compleix la propietat del **jugador anul·lador**, però **no** es compleix la propietat del **jugador falsificador**.

En la demostració del **Teorema 5.3**, veurem que la solució igualitària E, compleix la propietat del **jugador anul·lador**. Aleshores, ens falta veure que **no** compleix la propietat del **jugador falsificador**. Considerem $N = \{1, 2, 3\}$ i els valors de v:

$v(1) = 0, v(2) = 1, v(3) = 50, v(12) = 1, v(13) = 50, v(23) = 0, v(123) = 51.$

Observem que 1 és un jugador falsificador en el joc v, ja que per a qualsevol $S \subseteq N$ on $1 \in S$, es compleix $v(12) = v(1) + v(2)$, $v(13) = v(1) + v(3)$, $v(123) = v(1) + v(2) + v(3)$.

En canvi:
$$E_1(v) = \frac{v(N)}{|N|} = \frac{51}{3} \neq 0 = v(1).$$

$\Leftarrow$ Per acabar veiem que es compleix la propietat del **jugador falsificador**, però **no** es compleix la propietat del **jugador anul·lador.**

En la demostració del **Teorema 5.5**, provarem que la solució igualitària del surplus ES, compleix la propietat del **jugador falsificador**.

Aleshores, veiem ara que ES **no** compleix la propietat del **jugador anul·lador**. Considerem $N = \{1, 2, 3\}$ i els valors del joc v:
$v(1) = 0, v(2) = 1, v(3) = 1, v(12) = 0, v(13) = 0, v(23) = 5, v(123) = 0.$
Observem que 1 és un jugador anul·lador, ja que per tot S tal que $1 \in S$, es compleix que $v(S) = 0$. En canvi,

$$ES_1(v) = v(1) + \frac{v(N) - \sum_{j \in N} v(j)}{n} = 0 + \frac{0 - (0 + 1 + 1)}{3} = -\frac{2}{3} \neq 0.$$

Per tant, ES no compleix la propietat del jugador anul·lador. $\square$

Proposició 4.9. *La propietat del* ***jugador fals*** *no implica la propietat del* ***jugador falsificador****. El recíproc tampoc és cert.*

Demostració. $\Rightarrow$ Primer veiem que la propietat del **jugador fals** no implica la propietat del **jugador falsificador**

En la demostració del **Corol·lari 5.2**, veurem que el valor de Shapley ϕ compleix la propietat del **jugador fals**. Aleshores, ens falta veure que **no** compleix la propietat del **jugador falsificador**. Considerem $N = \{1, 2, 3\}$ i els valors del joc v:

$v(1) = 2, v(2) = 8, v(3) = 15, v(12) = 10, v(13) = 17, v(23) = 20, v(123) = 25.$

Observem que $1 \in N$ és un jugador falsificador en el joc v, ja que per qualsevol $S \subseteq N$ on $1 \in S$, es compleix $v(12) = v(1) + v(2)$, $v(13) = v(1) + v(3)$ i $v(123) = v(1) + v(2) + v(3)$. En canvi:

$$\phi_1(v) = \frac{0!(3-0-1)!}{3!} \cdot [v(1) - v(\emptyset)] + \frac{1!(3-1-1)!}{3!} \cdot [v(12) - v(2)]$$
$$+ \frac{1!(3-1-1)!}{3!} \cdot [v(13) - v(3)] + \frac{2!(3-2-1)!}{3!} \cdot [v(123) - v(23)] = \frac{2!}{3!} \cdot [2 - 0] + \frac{1!}{3!} \cdot [10 - 8]$$
$$+ \frac{1!}{3!} \cdot [17 - 15] + \frac{2!}{3!} \cdot [25 - 20] = \frac{4}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{10}{6} = \frac{18}{6} = 3 \neq v(1) = 2.$$

$\Leftarrow$ Ara veurem que la propietat del **jugador falsificador** no implica la propietat del **jugador fals**

En la demostració del **Teorema 5.5**, veurem que la solució igualitària del surplus ES compleix la propietat del **jugador falsificador**. Aleshores, ens falta veure que ES **no** compleix la propietat del **jugador fals**. Considerem $N = \{1, 2, 3\}$ i el següent joc v:

$v(1) = 1, v(2) = 4, v(3) = 3, v(12) = 5, v(13) = 4, v(23) = 9, v(123) = 10.$

Observem que $1 \in N$ és un jugador fals en el joc v, perquè per tot $S \subseteq N$ tal que $i \notin S$, es compleix que $v(12) - v(2) = v(1)$, $v(13) - v(3) = v(1)$, $v(123) - v(23) = v(1)$. En canvi,

$$ES_1(v) = v(1) + \frac{v(N) - \sum_{j \in N} v(j)}{n} = 1 + \frac{10 - (1+4+3)}{3} = 1 + \frac{2}{3} \neq v(1) = 1.$$

□

Proposició 4.10. *Sigui F una solució que compleix la propietat del* ***jugador fals****, aleshores F també complirà la propietat del* ***jugador nul****. El recíproc no és cert.*

Demostració. $\Rightarrow$ Primer demostrarem que una solució F que compleix la propietat del **jugador fals** també compleix la propietat del **jugador nul**.

Recordem que un jugador $i \in N$ és un jugador fals en un joc v, si per tot $S \subseteq N \setminus \{i\}$, $v(S \cup \{i\})$ - $v(S) = v(i)$ i un jugador $j \in N$ és un jugador nul, si per tot $S \subseteq N \setminus \{j\}$, $v(S \cup \{j\}) = v(S)$.

Suposem que existeix una solució F que compleix la propietat del jugador fals, és a dir, que si existeix un jugador $i \in N$ tal que i és un jugador fals, $F_i(v) = v(i)$.
Volem veure que aleshores també complirà la propietat del jugador nul.

Sigui $i \in N$ un jugador nul, és a dir, per tot $S \subseteq N \setminus \{i\}$, es compleix que $v(S \cup \{j\})$ $= v(S)$, que és equivalent a dir, $v(S \cup \{j\})$ - $v(S) = 0$. Com sabem que i és un jugador nul, $v(i) = 0$, per tant, i també és un jugador fals. Com que F compleix la propietat del jugador fals, $F_i(v) = v(i) = 0$. Hem arribat a que $F_i(v) = 0$, per tant, F compleix la propietat del jugador nul.

$\Leftarrow$ Per demostrar que el recíproc no és cert, veurem un contraexemple:

Definim la solució $F_i(v) = v(i) - \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} (v(S \cup \{i\}) - v(S))$, per a tot $i \in N$ compleix la propietat del jugador nul, ja que si $i \in N$ és un jugador nul, es compleix que $v(S \cup \{i\})$ - $v(S) = 0$, en particular, si $S = \{\emptyset\}$, $v(i) = v(\emptyset) = 0$. Per tant, $F_i(v) = 0 - \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} 0 = 0$.

Per tant, F compleix la propietat del jugador nul.

Considerem ara $N = \{1, 2, 3\}$ i el joc v amb els següents valors:

$v(1) = 1, v(2) = 4, v(3) = 3, v(12) = 5, v(13) = 4, v(23) = 9, v(123) = 10$

Observem que $1 \in N$ és un jugador fals en el joc v, perquè per tot $S \subseteq N$ tal que $i \notin S$, es compleix que $v(12) - v(2) = v(1), v(13) - v(3) = v(1), v(123) - v(23) = v(1)$. En canvi:

$$F_1(v) = v(1) - \sum_{S \subseteq N \setminus \{1\}} (v(S \cup \{1\}) - v(S)) = v(1) - [(v(1) - v(\emptyset)) + (v(12) - v(2))$$

$$+(v(13) - v(3)) + (v(123) - v(23))] = v(1) - [v(1) + v(1) + v(1) + v(1)] = 3 \cdot v(1) = 3 \neq v(1).$$

Per tant, veiem que F no compleix la propietat del jugador fals. □

Per tant, acabem de veure:

$$\begin{tikzcd}
NUL \arrow[r, shift left, "\times" marking] \arrow[d, shift left, "\times" marking] & ANUL.LADOR \arrow[l, shift left, "\times" marking] \arrow[d, shift left, "\times" marking] \\
FALS \arrow[u, shift left] \arrow[r, shift left, "\times" marking] & FALSIFICADOR \arrow[l, shift left, "\times" marking] \arrow[u, shift left, "\times" marking]
\end{tikzcd}$$

És a dir, només la propietat del jugador fals implica la propietat del jugador nul, totes les altres propietats no s'impliquen.

4.3 Propietats que farem servir de forma tècnica

Aquestes dues propietats ens seran útils per demostrar un teorema més tècnic, que serà necessari per una altra demostració.

1. **Jugador anul·lador per als jocs 0-normalitzats**: Una solució F compleix la propietat del jugador anul·lador per als jocs 0-normalitzats si per a qualsevol joc v 0-normalitzat, i qualsevol jugador i anul·lador en v, es compleix $F_i(v) = 0$.

   Un jugador és anul·lador si les coalicions que el contenen no generen cap guany, i un joc es 0-normalitzat si tots els valors individuals són 0. Per tant, si una solució compleix la propietat del jugador anul·lador per als jocs 0-normalitzats, aquest jugador no rebrà cap pagament.

2. **Invariància**: Una solució F satisfà la invariància, si per a tot $v \in G^N$, per tot $d \in \mathbb{R}$, i per tot $\vec{e} \in \mathbb{R}^n$ es compleix per tot $i \in N$, $F_i(d \cdot v + \vec{e}) = d \cdot F_i(v) + e_i$, on $(d \cdot v + \vec{e}) \in G^N$ ve donat per $(d \cdot v + \vec{e})(S) = d \cdot v(S) + \sum_{i \in S} e_i$, per tot $S \subseteq N$

   Una solució que satisfà la invariància, serà invariant, és a dir, no canvia davant de canvis d'escala i/o origen. D'una banda, un canvi d'escala pot ser per exemple un canvi en la moneda de mesura, com l'euro o el dolar. D'altra banda, un canvi d'origen es refereix a tenir o no en compte per exemple la riquesa inicial de cada un dels agents.

A continuació, com hem vist abans, mirarem les interrelacions que hi ha entre aquestes propietats, sense entrar tant en detall, ja que aquestes propietats les utilitzarem de forma més tècnica i molt excepcionalment.

Proposició 4.11. *Sigui F una solució que satisfà la propietat del* ***jugador anul·lador****, aleshores F també satisfà la propietat del* ***jugador anul·lador per als jocs 0-normalitzats****.*

Demostració. $\Rightarrow$ Aquesta demostració és trivial, sigui F una solució que satisfà la propietat del jugador anul·lador, sabem que aleshores sigui $i \in N$ un jugador anul·lador en un joc v, es compleix que $F_i(v) = 0$. Aleshores, directament veiem que F satisfà la propietat del jugador anul·lador per als jocs 0-normalitzats. $\square$

Proposició 4.12. *Sigui F una solució que satisfà la propietat del* ***jugador falsificador****, aleshores F també satisfà la propietat del* ***jugador anul·lador per als jocs 0-normalitzats****.*

Demostració. $\Rightarrow$ Suposem que la solució F satisfà la propietat del jugador falsificador i sigui $v \in G^N$ un joc 0-normalitzat i $i \in N$ un jugador anul·lador en v. Com que v és 0-normalitzat, per tot $j \in N$, $v(j) = 0$. A més a més, com que i és un jugador anul·lador, per tot $S \subseteq N$ tal que $i \in S$, $v(S) = 0 = \sum_{j \in S} v(j)$. Per tant, com que per tot $S \subseteq N$ tal que $i \in S$, $v(S) = \sum_{j \in S} v(j)$, i és un jugador falsificador. I per la hipòtesi, com F compleix la propietat del jugador falsificador, $F_i(v) = 0$. Per tant, F compliex la propietat del jugador anul·lador per als jocs 0-normalitzats. $\square$

5 Caracteritzacions axiomàtiques

En aquest apartat, veurem els resultats principals d'aquest treball. Per entendre-ho de manera clara, direm que una caracterització axiomàtica és una estructura que tracta d'identificar propostes de repartiment o solucions mitjançant les propietats o axiomes que verifiquen aquesta solució, on totes aquestes propietats són necessàries, és a dir, ni sobren ni falten axiomes. Aquesta caracterització axiomàtica ens permet conèixer a fons aquestes propietats i l'objectiu és prendre una decisió normativa de les diferents propostes de repartiment, és a dir, una decisió basada en uns criteris.

Parlarem de tres solucions, les tres que ja hem mencionat anteriorment: El valor de Shapley, la solució igualitària i la solució igualitària del surplus. Totes elles seran introduïdes per un teorema que les relaciona amb els seus respectius axiomes.

Teorema 5.1. ***El valor de Shapley*** *és l'única solució que verifica els axiomes d'****eficiència, simetria, jugador nul i additivitat****.*

Demostració. $\Rightarrow$ Primer de tot, verificarem que el valor de Shapley compleixi les quatre propietats esmentades.

1. Eficiència: Volem demostrar que $\sum_{i=1}^{n} \phi_i(v) = v(N)$.

   Donat $\theta = (i_1, ..., i_n)$, demostrarem primer que el vector $m^\theta(v)$ és eficient.

   De fet,
$$\sum_{i \in N} m_i^\theta(v) = m_{i_1}(v) + m_{i_2}(v) + ... + m_{i_n}(v)$$
$$= v(i_1) + v(i_1 i_2) - v(i_1) + v(i_1 i_2 i_3) - v(i_1 i_2) + ... + v(i_1 ... i_n) - v(i_1 ... i_{n-1})$$
$$= v(i_1 ... i_n) = v(N).$$

   Aleshores, com $\sum_{i \in N} m_i^\theta(v) = v(N)$, de (3.1) ens queda:
$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n!} \sum_{\theta \in S_n} m_i^\theta(v) = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\theta \in S_n} m_i^\theta(v)$$
$$= \frac{1}{n!} \sum_{\theta \in S_n} v(N) = \frac{1}{n!} \cdot n! \cdot v(N) = v(N).$$

   Per tant, queda demostrat que compleix la propietat d'eficiència.

2. Simetria: Ara veurem que si per un joc $v \in G^N$ es dona que, $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ per a tot $S \subseteq N$ tal que $i, j \notin S$, s'ha de complir que $\phi_i(v) = \phi_j(v)$, és a dir $\phi_i(v) - \phi_j(v) = 0$. Aleshores:

$$\phi_i(v) - \phi_j(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \gamma(S) \cdot [v(S \cup \{i\}) - v(S)] - \sum_{S \subseteq N \setminus \{j\}} \gamma(S) \cdot [v(S \cup \{j\}) - v(S)]$$

$$= \sum_{\substack{S\subseteq N\setminus\{i\}\\ j\notin S}} \gamma(S)\cdot[v(S\cup\{i\})-v(S)] + \sum_{\substack{S\subseteq N\setminus\{i\}\\ j\in S}} \gamma(S)\cdot[v(S\cup\{i\})-v(S)]$$

$$- \sum_{\substack{S\subseteq N\setminus\{j\}\\ i\notin S}} \gamma(S)\cdot[v(S\cup\{j\})-v(S)] - \sum_{\substack{S\subseteq N\setminus\{j\}\\ i\in S}} \gamma(S)\cdot[v(S\cup\{j\})-v(S)].$$

Ara, si $S\subseteq N\setminus\{i\}$ i $j\notin S$, i a més, $S\subseteq N\setminus\{j\}$ i $i\notin S$, aleshores $S\subseteq N\setminus\{i,j\}$.

Per tant,

$$\sum_{\substack{S\subseteq N\setminus\{i\}\\ j\notin S}} \gamma(S)\cdot[v(S\cup\{i\})-v(S)] - \sum_{\substack{S\subseteq N\setminus\{j\}\\ i\notin S}} \gamma(S)\cdot[v(S\cup\{j\})-v(S)]$$

$$= \sum_{S\subseteq N\setminus\{i,j\}} \gamma(S)\cdot[v(S\cup\{i\})-v(S)-v(S\cup\{j\})+v(S)] = \sum_{S\subseteq N\setminus\{i,j\}} \gamma(S)\cdot 0 = 0.$$

La penúltima igualtat es segueix de que com $i,j\notin S$ per hipòtesi sabem que $v(S\cup\{i\}) = v(S\cup\{j\})$, anul·lant-se així entre elles. Per acabar de veure que $\phi_i(v)-\phi_j(v)=0$, demostrarem que

$$\sum_{\substack{S\subseteq N\setminus\{i\}\\ j\in S}} \gamma(S)\cdot[v(S\cup\{i\})-v(S)] = \sum_{\substack{S\subseteq N\setminus\{j\}\\ i\in S}} \gamma(S)\cdot[v(S\cup\{j\})-v(S)]. \tag{5.1}$$

Considerem $S\subseteq N\setminus\{i\}$ tal que $j\in S$. Definim $T=(S\setminus\{j\}\cup\{i\})$ i observem que $T\subseteq N\setminus\{j\}$ i $i\in S$. A més a més, per construcció, T és únic i conté $s-1+1$ jugadors, de manera que $\mid S\mid = \mathrm{s} = \mathrm{t} = \mid T\mid$. Això implica que $\gamma(S)=\gamma(T)$.

Ara, demostrarem que $[v(S\cup\{i\})-v(S)] = [v(T\cup\{j\})-v(T)]$. Observem que

$$(S\cup\{i\}) = (S\setminus\{j\}\cup\{j\}\cup\{i\}) = (S\setminus\{j\}\cup\{i\}\cup\{j\}) = (T\cup\{j\}).$$

L'última igualtat és per definició de T, per tant, $v(S\cup\{i\}) = v(T\cup\{j\})$. Cal demostrar també que $v(S)=v(T)$, per això, tenim:

$$v(S) = v(S\setminus\{j\}\cup\{j\}) = v(S\setminus\{j\}\cup\{i\}) = v(T).$$

La segona igualtat és segueix de la hipòtesi de simetria, ja que $S\setminus\{j\}$ no conté ni j ni i. L'última igualtat és per definició de T. Amb això, queda demostrat que:

$$\gamma(S)\cdot[v(S\cup\{i\})-v(S)] = \gamma(T)\cdot[v(T\cup\{j\})-v(T)] \tag{5.2}$$

Com que per a cada $S\subseteq N\setminus\{i\}$ tal que $j\in S$, li podem assignar una única $T\subseteq N\setminus\{j\}$ tal que $i\in T$ on (5.2) es compleix, podem concloure que (5.1) és cert.

Per tant, $\phi_i(v)-\phi_j(v)=0$ i es compleix la propietat de simetria.

3. Jugador nul: Per demostrar aquesta propietat, veurem que per un joc $v\in G^N$ on i és un jugador nul, és a dir, $v(S\cup\{i\})=v(S)$ per a tot $S\subseteq N\setminus\{i\}$, es compleix $\phi_i(v)=0$.

   Això es pot veure de forma directa, ja que si $v(S\cup\{i\})=v(S)$ llavors $v(S\cup\{i\})-v(S)=0$. Així, de (3.2) ens queda

$$\phi_i(v) := \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \gamma(S)\cdot(v(S\cup\{i\})-v(S)) = \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \gamma(S)\cdot 0 = 0.$$

4. Additivitat: Per acabar, demostrarem que donats dos jocs qualsevol (N, v_1) i (N, v_2), es compleix:

$$\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2).$$

Per (3.2), sigui $i \in N$: $\phi_i(v_1+v_2) := \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \gamma(S)\cdot[(v_1+v_2)(S\cup\{i\})-(v_1+v_2)(S)]$.

Com anteriorment ja hem vist que $(v_1 + v_2)(S) = v_1(S) + v_2(S)$,

$$\phi_i(v) := \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \gamma(S)\cdot[v_1(S\cup\{i\}) + v_2(S\cup\{i\}) - v_1(S) - v_2(S)]$$

$$= \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \gamma(S)\cdot[v_1(S\cup\{i\}) - v_1(S) + v_2(S\cup\{i\}) - v_2(S)]$$

$$= \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \gamma(S)\cdot[v_1(S\cup\{i\}) - v_1(S)] + \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \gamma(S)\cdot[v_2(S\cup\{i\}) - v_2(S)]$$

$$= \phi_i(v_1) + \phi_i(v_2).$$

En resum, hem demostrat que el valor de Shapley compleix les quatre propietats mencionades.

$\Leftarrow$ Demostrarem ara que si una solució compleix aquestes quatre propietats llavors és el valor de Shapley. Per fer-ho, utilitzarem la descomposició única de qualsevol joc cooperatiu en termes de jocs d'unanimitat. És a dir, per tot $v \in G^n$, podem escriure:

$$v = \sum_{\emptyset\neq T\subseteq N} \lambda_T \cdot u_T.$$

on recordem que per tot $T \subseteq N$,

$$u_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } T \subseteq S, \\ 0 & \text{si } T \nsubseteq S. \end{cases}$$

Suposem ara que existeix una solució F que compleix les quatre propietats. Sigui (N, v) un joc, aleshores

$$F(v) = F(\sum_{\emptyset\neq T\subseteq N} \lambda_T \cdot u_T) = \sum_{\emptyset\neq T\subseteq N} F(\lambda_T \cdot u_T).$$

L'última igualtat és per additivitat, de manera que per obtenir $F(v)$ només necessitem conèixer $F(\lambda_T \cdot u_T)$ per a cada T.

Sigui $T \subseteq N$, per tal d'aplicar la propietat del jugador nul en el joc u_T, agafem un jugador $i \notin T$. Volem demostrar que per a tot $S \subseteq N \setminus \{i\}$ es compleix $(\lambda_T \cdot u_T)(S) = (\lambda_T \cdot u_T)(S \cup \{i\})$. Això ho podem veure de la següent manera:

1. Si $T \subseteq S$, tenim:

$$(\lambda_T \cdot u_T)(S) = \lambda_T \cdot u_T(S) = \lambda_T \cdot 1,$$

$$(\lambda_T \cdot u_T)(S \cup \{i\}) = \lambda_T \cdot u_T(S \cup \{i\}) = \lambda_T \cdot 1,$$

   on l'última igualtat és degut a que com $T \subseteq S$, aleshores $T \subseteq (S \cup \{i\})$.

2. D'altra banda, si $T \nsubseteq S$, llavors:

$$(\lambda_T \cdot u_T)(S) = \lambda_T \cdot u_T(S) = \lambda_T \cdot 0 = 0,$$

$$(\lambda_T \cdot u_T)(S \cup \{i\}) = \lambda_T \cdot u_T(S \cup \{i\}) = \lambda_T \cdot 0 = 0,$$

   on l'ultima igualtat es segueix de que com $T \nsubseteq S$ i $i \notin T$, aleshores $T \nsubseteq (S \cup \{i\})$.

Aleshores, com hem demostrat que per a tot $i \notin T$, i és un jugador nul, per l'axioma del jugador nul, $F_i(\lambda_T \cdot u_T) = 0$.

Sigui $T \subseteq N$, per tal de poder aplicar l'axioma de la simetria en el joc u_T, volem verificar que qualsevol parell de jugadors $i, j \in T$ són simètrics.

1. Suposem que $T \nsubseteq S$, com que $j \in T$ i $j \notin (S \cup \{i\})$, aleshores $T \nsubseteq (S \cup \{i\})$ i,

$$\lambda_T \cdot u_T(S \cup \{i\}) = \lambda_T \cdot 0 = 0.$$

   D'altra banda, com que $i \in T$ i $i \notin (S \cup \{j\})$, aleshores $T \nsubseteq (S \cup \{i\})$ i,

$$\lambda_T \cdot u_T(S \cup \{j\}) = \lambda_T \cdot 0 = 0.$$

2. Suposem que $T \subseteq S$, aleshores $T \subseteq (S \cup \{i\})$ i $T \subseteq (S \cup \{j\})$. Per tant,

$$\lambda_T \cdot u_T(S \cup \{i\}) = \lambda \cdot 1 = \lambda_T \cdot u_T(S \cup \{j\}).$$

Aleshores, i, j són simètrics. Això implica que, com F compleix la propietat de la simetria, tots els jugadors de la coalició T rebran el mateix pagament. Per a tot $i, j \in T$, tenim

$$F_i(\lambda_T \cdot u_T) = F_j(\lambda_T \cdot u_T).$$

Ara, per tal de determinar $F(\lambda_T \cdot u_T)$ per a tot $T \subseteq N$, considerem el cas en què T conté únicament un jugador. Sigui $T = \{j\}$,

$$(\lambda_T \cdot u_T)(N) = \lambda_T \cdot u_T(N) = \lambda_T \cdot 1.$$

Com que per la propietat del jugador nul $F_i(\lambda_T \cdot u_T) = 0$ per tot $i \notin T$, per l'axioma de l'eficiència, $F_j(\lambda_T \cdot u_T) = \lambda_T$.

En el cas en què T conté més d'un jugador, sigui $|T| \geq 2$. Si $i \notin T$, $F_i(\lambda_T \cdot u_T) = 0$, per la proposició del jugador nul. Per contra, si $i, j \in T$, $F_i(\lambda_T \cdot u_T) = F_j(\lambda_T \cdot u_T)$ per simetria. A més a més, per eficiència, es verifica que $\sum_{i \in N} F_i(\lambda_T \cdot u_T) = \lambda_T$. Així doncs, tenim :

$$F_i(\lambda_T \cdot u_T) = \frac{\lambda_T}{\mid T \mid}$$

per a tot $i \in T$. Per tant, per a tota $T \subseteq N$, $F_i(\lambda_T \cdot u_T)$ és única. I per l'additivitat de F:

$$F(v) = F(\sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \lambda_T \cdot u_T) = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} F(\lambda_T \cdot u_T),$$

i per tant, $F(v)$ també és única.

Amb això, hem demostrat que existeix una única solució que compleix els quatre axiomes. A més, ja hem comprovat que el valor de Shapley compleix aquests axiomes,per tant, aquesta solució és **el valor de Shapley**. $\square$

Corol·lari 5.2. *El valor de Shapley es caracteritza per les propietats d'eficiència, simetria, additivitat i la propietat del jugador fals.*

Demostració. $\Rightarrow$ En la demostració prèvia del Teorema del valor de Shapley, hem comprovat que el valor de Shapley compleix les propietats d'eficiència, simetria i additivitat. Ara volem demostrar que també satisfà la propietat del jugador fals.

Volem demostrar que, per a un jugador fals $i \in N$ en un joc qualsevol $v \in G^N$, aleshores es compleix que $\phi_i(v) = v(i)$. Un jugador i és un jugador fals si per tot $S \subseteq N \setminus \{i\}$, es compleix $v(S \cup \{i\}) - v(S) = v(i)$. Aleshores,

$$\phi_i(v) := \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \gamma(S) \cdot [v(S \cup \{i\}) - v(S)] = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \gamma(S) \cdot v(i) = v(i) \cdot \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \gamma(S).$$

La segona igualtat es segueix de la hipòtesi de que i és un jugador fals. Aleshores, només ens queda calcular $\sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \gamma(S) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}$. Aplicant combinatòria i mirant totes les opcions possibles ens queda:

$$\begin{aligned}
\sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} &= \binom{n-1}{0} \frac{0!(n-0-1)!}{n!} + \binom{n-1}{1} \frac{1!(n-1-1)!}{n!} \\
&+ \binom{n-1}{2} \frac{2!(n-2-1)!}{n!} + ... + \binom{n-1}{n-2} \frac{(n-2)!(n-n+2-1)!}{n!} \\
&+ \binom{n-1}{n-1} \frac{(n-1)!(n-n+1-1)!}{n!} = \frac{(n-1)!}{(n-1)!0!} \cdot \frac{0!(n-1)!}{n!} + \frac{(n-1)!}{(n-2)!1!} \cdot \frac{1!(n-2)!}{n!} \\
&+ \frac{(n-1)!}{(n-3)!2!} \cdot \frac{2!(n-3)!}{n!} + ... + \frac{(n-1)!}{(n-2)!1!} \cdot \frac{1!(n-2)!}{n!} + \frac{(n-1)!}{(n-1)!0!} \cdot \frac{0!(n-1)!}{n!} \\
&= \frac{(n-1)!}{n!} + \frac{(n-1)!}{n!} + ... + \frac{(n-1)!}{n!} + \frac{(n-1)!}{n!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{n!} = n \cdot \frac{1}{n} = 1.
\end{aligned}$$

Per tant, $\phi_i(v) = v(i) \cdot (\sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \gamma(S)) = v(i) \cdot 1 = v(i)$. Amb això, queda demostrat que el valor de Shapley compleix les quatre propietats.

$\Leftarrow$ Per aquesta demostració, aplicarem la **Proposició 4.10**. Suposem que tenim una solució F que compleix les propietats d'eficiència, simetria, additivitat i la propietat del jugador fals. Segons la proposició esmentada, com F compleix la propietat del jugador fals, llavors F compleix també la propietat del jugador nul. Ara, pel **Teorema 5.1**, sabem que si una solució F satisfà les propietats d'eficiència, simetria, jugador nul i additivitat, aquesta solució és el valor de Shapley. $\square$

Acabem de caracteritzar el valor de Shapley. A continuació, caracteritzarem les solucions igualitàries. Primerament, ens centrarem amb la solució igualitària i després farem la solució igualitària del surplus. D'aquesta manera, podrem veure clarament que les propietats dels jugadors "inútils" són crucials.

Teorema 5.3. *La* ***solució igualitària*** *és l'única solució que satisfà les propietats d'* ***eficiència****,* ***simetria****,* ***additivitat*** *i la propietat del* ***jugador anul·lador****.*

Demostració. $\Rightarrow$ Primer de tot, verificarem que la solució igualitària compleixi les quatre propietats. Recordem que $E_i(v) = \frac{v(N)}{n}$ per a tot $i \in N$. Demostrarem cada una de les propietats:

1. Eficiència: Volem demostrar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i(v) = v(N)$.
$$\sum_{i=1}^{n} E_i(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{v(N)}{n} = n \cdot \frac{v(N)}{n} = v(N).$$

2. Simetria: Sigui $v \in G^N$ i $i, j \in N$, si es compleix que $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ per a tot $S \subseteq N$ tal que $i, j \notin S$, és evident que
$$E_i(v) = E_j(v) = \frac{v(N)}{n}$$

3. Additivitat: Donats dos jocs v_1 i v_2, hem de veure que $E_i(v_1+v_2) = E_i(v_1)+E_i(v_2)$, per a tot $i \in N$:
$$E_i(v_1 + v_2) = \frac{(v_1 + v_2)(N)}{n} = \frac{v_1(N) + v_2(N)}{n} = \frac{v_1(N)}{n} + \frac{v_2(N)}{n} = E_i(v_1) + E_i(v_2).$$

4. Jugador anul·lador: Per verificar si compleix la propietat del jugador anul·lador, suposem que el joc v conté un jugador i tal que i és un jugador anul·lador, és a dir, per qualsevol $S \subseteq N$ tal que $i \in S$, es compleix que $v(S) = 0$. En particular, $v(N) = 0$ ja que $i \in N$. Per tant, el valor del jugador anul·lador i en la solució igualitària és $E_i(v) = \frac{v(N)}{n} = \frac{0}{n} = 0$.

$\Leftarrow$ Demostrarem ara que si una solució compleix aquestes quatre propietats, és la solució igualitària. Per fer-ho, utilitzarem la descomposició única de qualsevol joc cooperatiu en termes dels jocs canònics. És a dir, per tot $v \in G^n$, podem escriure:
$$v = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \lambda_T \cdot w_T.$$

on recordem que per tot $T \subseteq N$,

$$w_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } T = S, \\ 0 & \text{si } T \neq S. \end{cases}$$

Suposem ara que existeix una solució F que compleix les quatre propietats. Sigui (N, v) un joc, aleshores

$$F(v) = F(\sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \lambda_T \cdot w_T) = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} F(\lambda_T \cdot w_T).$$

L'última igualtat és per additivitat, de manera que per obtenir $F(v)$ només necessitem conèixer $F(\lambda_T \cdot w_T)$ per a cada T.

Sigui $T \subseteq N$ però $T \neq N$, observem que si $i \notin T$, aleshores per a tot $S \subseteq N$ tal que $i \in S$

$$(\lambda_T \cdot w_T)(S) = \lambda_T \cdot w_T(S) = \lambda_T \cdot 0 = 0.$$

Per tant, el jugador i és un jugador anul·lador en el joc $(N, \lambda_T \cdot w_T)$. Per la propietat del jugador anul·lador, $F_i(\lambda_T \cdot w_T) = 0$ per a tot $i \in N \setminus T$.

Per tal d'aplicar la propietat de simetria en el joc w_T, volem verificar que qualsevol parell de jugadors $i, j \in T$ són simètrics en $\lambda_T \cdot w_T$. És a dir, volem veure que per a tot $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$ es compleix que $(\lambda_T \cdot w_T)(S \cup \{i\}) = (\lambda_T \cdot w_T)(S \cup \{j\})$.

Considerem el cas en què T conté únicament un jugador. Sigui $T = \{j\}$,

$$(\lambda_T \cdot w_T)(N) = \lambda_T \cdot w_T(N) = \lambda_T \cdot 0 = 0.$$

En el cas en que T conté més d'un jugador, sigui $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$, per una banda, com que $j \in T$ i $j \notin (S \cup \{i\})$, aleshores $T \neq (S \cup \{i\})$, per tant,

$$(\lambda_T \cdot w_T)(S \cup \{i\}) = \lambda_T \cdot w_T(S \cup \{i\}) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

D'altra banda, com que $i \in T$ i $i \notin (S \cup \{j\})$, aleshores $T \neq (S \cup \{j\})$, i

$$(\lambda_T \cdot w_T)(S \cup \{j\}) = \lambda_T \cdot w_T(S \cup \{j\}) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Aleshores, i, j són simètrics. Això implica que, com F compleix la propietat de la simetria, tots els jugadors de la coalició T rebran el mateix pagament. Per a tot $i, j \in T$, tenim

$$F_i(\lambda_T \cdot w_T) = F_j(\lambda_T \cdot w_T).$$

Com que per la propietat del jugador anul·lador $F_i(\lambda_T \cdot w_T) = 0$ per tot $i \notin T$, per l'axioma d'eficiència, $F_j(\lambda_T \cdot w_T) = 0$. Ja que per tot $T \neq N$,

$$\sum_{i \in N} F_i(\lambda_T \cdot w_T) = (\lambda_T \cdot w_T)(N) = \lambda_T \cdot w_T(N) = \lambda_T \cdot 0 = 0.$$

Aleshores, com $\sum_{i \in N} F_i(\lambda_T \cdot w_T) = \sum_{i \in T} F_i(\lambda_T \cdot w_T) + \sum_{i \in N \setminus T} F_i(\lambda_T \cdot w_T) = 0$, i com que per la propietat del jugador anul·lador, $\sum_{i \in N \setminus T} F_i(\lambda_T \cdot w_T) = 0$, aleshores $\sum_{i \in T} F_i(\lambda_T \cdot w_T) = 0$.

Suposem ara que $T = N$, sabem per definició de joc canònic que

$$(\lambda_N \cdot w_N)(N) = \lambda_N \cdot w_N(N) = \lambda_N \cdot 1 = \lambda_N.$$

Per eficiència, obtenim que $\sum_{i \in N} F_i(\lambda_N \cdot w_N) = v(N) = \lambda_N$ i a més a més, si apliquem la simetria tenim

$$F_i(\lambda_N \cdot w_N) = \frac{\lambda_N}{|N|},$$

per a tot $i \in N$, $F_i(\lambda_N \cdot w_N)$ és única. I per additivitat de F:

$$F(v) = F(\sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \lambda_T \cdot w_T) = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} F(\lambda_T \cdot w_T),$$

i per tant, $F(v)$ també és única.

Amb això, hem demostrat que existeix una única solució que compleixi les quatre propietats. Com ja hem demostrat que la solució igualitària E ho compleix, aleshores, aquesta solució és **la solució igualitària**. □

Abans d'anar directe a la caracterització axiomàtica de la solució igualitària del surplus, demostrarem aquest teorema, que ens introdueix dos propietats noves que hem vist definides anteriorment; la propietat del jugador anul·lador per a jocs 0-normalitzats, i la propietat de la invariància. No hem entrar en molt de detall, ja que només ens seran necessàries aquí per tal de després poder demostrar de manera directa el **Teorema 5.5** que és el que ens interessa.

Teorema 5.4. *La* ***solució igualitària del surplus*** *és l'única solució que compleix les propietats d'****eficiència****,* ***simetria****,* ***additivitat****, la propietat del* ***jugador anul·lador en els jocs 0-normalitzats*** *i la* ***invariància****.*

Demostració. ⇒ Primer de tot, demostrarem que la solució igualitària del surplus verifica les cinc propietats. Per fer-ho, utilitzarem la fórmula (3.4).

1. Eficiència: Volem demostrar que $\sum_{i=1}^{n} ES_i(v) = v(N)$.

$$\sum_{i=1}^{n} ES_i(v) = \sum_{i=1}^{n} \left(v(i) + \frac{v(N) - \sum_{i \in N} v(i)}{n} \right) = \sum_{i=1}^{n} v(i) + \sum_{i=1}^{n} \frac{v(N)}{n} - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i \in N} \frac{v(i)}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v(i) + n \cdot \frac{v(N)}{n} - n \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{v(i)}{n} = \sum_{i=1}^{n} v(i) + v(N) - \sum_{i=1}^{n} v(i) = v(N).$$

Amb això, veiem que compleix la propietat d'eficiència.

2. Simetria: Ara veurem que si $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$, per a tot $S \subseteq N$ tal que $i, j \notin S$, s'ha de complir que $ES_i(v) = ES_j(v)$, és a dir, $ES_i(v)$ - $ES_j(v) = 0$.

$$ES_i(v) - ES_j(v) = v(i) + \frac{v(N) - \sum_{i \in N} v(i)}{n} - v(j) - \frac{v(N) - \sum_{j \in N} v(j)}{n} = 0.$$

L'última igualtat es segueix de que sigui $S = \{\emptyset\}$, per hipòtesi sabem que $v(i) = v(j)$. Per tant, hem vist que es compleix la simetria

$$ES_i(v) - ES_j(v) = 0.$$

3. Additivitat: Donats dos jocs qualsevol (N, v_1) i (N, v_2), es compleix:

$$ES(v_1 + v_2) = ES(v_1) + ES(v_2).$$

$$\begin{aligned} ES(v_1 + v_2) &= (v_1 + v_2)(i) + \frac{(v_1 + v_2)(N) - \sum_{i \in N}(v_1 + v_2)(i)}{n} \\ &= v_1(i) + v_2(i) + \frac{v_1(N) + v_2(N) - \sum_{i \in N} v_1(i) - \sum_{i \in N} v_2(i)}{n} \\ &= v_1(i) + \frac{v_1(N) - \sum_{i \in N} v_1(i)}{n} + v_2(i) + \frac{v_2(N) - \sum_{i \in N} v_2(i)}{n} = ES(v_1) + ES(v_2). \end{aligned}$$

4. Jugador anul·lador en els jocs 0-normalitzats: Suposem que ES té jugador anul·lador en els jocs 0-normalitzats, aleshores sigui $v \in G^N$ un joc 0-normalitzat i $i \in N$ un jugador anul·lador en v. Tenim:

$$ES_i(v) = v(i) + \frac{v(N) - \sum_{i \in N} v(i)}{n} = 0 + \frac{0 - 0}{3} = 0.$$

La segona igualtat es segueix de la hipòtesi, com que v és 0-normalitzat, per tot $i \in N$, $v(i) = 0$ i com que i és un jugador anul·lador, $v(N) = 0$. Per tant, $ES_i(v) = 0$.

5. Invariància: Volem veure que donat un joc $(d \cdot v + \vec{e}) \in G^N$ on $d \in \mathbb{R}$ i $\vec{e} \in \mathbb{R}^n$ tal que $(d \cdot v + \vec{e})(S) = d \cdot v(S) + \sum_{i \in S} e_i$, per tot $S \subseteq N$, es compleix que per tot $i \in N$,

$$ES_i(d \cdot v + \vec{e}) = d \cdot ES_i(v) + e_i.$$

$$\begin{aligned} ES_i(d \cdot v + \vec{e}) &= (d \cdot v + \vec{e})(i) + \frac{(d \cdot v + \vec{e})(N) - \sum_{i \in N}(d \cdot v + \vec{e})(i)}{n} \\ &= d \cdot v(i) + e_i + \frac{d \cdot v(N) + \sum_{i \in N} e_i - \sum_{i \in N}(d \cdot v(i) + e_i)}{n} \end{aligned}$$

$$= d \cdot v(i) + e_i + \frac{d \cdot v(N) - d \cdot \sum_{i \in N} v(i)}{n}$$

$$= d \cdot \left(v(i) + \frac{v(N) - \sum_{i \in N} v(i)}{n} \right) + e_i = d \cdot ES_i(v) + e_i.$$

Per tant, hem vist que la solució igualitària del surplus compleix les cinc propietats mencionades.

$\Leftarrow$ Demostrarem ara que si una solució compleix aquestes propietats, aleshores és la solució igualitària del surplus. Per això, primer demostrarem que $F(v)$ és única per a un joc qualsevol v 0-normalitzat, després veurem que si v no és 0-normalitzat, $F(v)$ també és única.

1. Suposem que v és un joc 0-normalitzat i volem veure que $F(v)$ és única. En aquest cas, per veure-ho utilitzarem la descomposició única en termes dels jocs canònics. És a dir, per tot $v \in G^n$, podem escriure:

   $$v = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \lambda_T \cdot w_T.$$

   Aleshores, per additivitat tenim:

   $$F(v) = F(\sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \lambda_T \cdot w_T) = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} F(\lambda_T \cdot w_T).$$

   De manera que per veure si $F(v)$ és única, només necessitem conèixer $F(\lambda_T \cdot w_T)$ per a cada T.

   Si $|T| = 1$, és a dir, per a tot $T = \{i\}$, com que v és 0-normalitzat, $\lambda_T = 0$, i per tant, $\lambda_T \cdot w_T = \mathbf{0}$, i com en el joc zero $\mathbf{0}$, tots els jugadors són anul·ladors, $F(\mathbf{0}) = \vec{0}$, aleshores $F(\mathbf{0})$ és única.

   Si $|T| \geq 2$, aleshores w_T és 0-normalitzat, ja que per tot $i \in T$, $w_T(i) = 0$, per definició, ja que $T \neq \{i\}$, aleshores $F_i(\lambda_T \cdot w_T) = 0$. I per tot $i \in N \setminus T$, el jugador i és anul·lador, per tant $F_i(\lambda_T \cdot w_T) = 0$. A més a més, si i, j són simètrics, com F compleix la propietat de la simetria, per a tot $i, j \in T$,

   $$F_i(\lambda_T \cdot w_T) = F_j(\lambda_T \cdot w_T).$$

   En la demostració del **Teorema 5.3** ja hem vist que qualsevol parell de jugadors $i, j \in T$ en el joc $\lambda_T \cdot w_T$ són simètrics. Aleshores, podem concloure que per tot $i \in N$, $F_i(\lambda_T \cdot w_T)$ és únic, i per additivitat de F, com que:

   $$F(v) = F(\sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \lambda_T \cdot w_T) = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} F(\lambda_T \cdot w_T),$$

   $F(v)$ també és única.

2. Suposem que v **no** és 0-normalitzat. Aleshores, definim el joc $g \in G^N$ com $g = 1 \cdot v - \vec{e}$, on $\vec{e} = (v(1), v(2), ..., v(n))$, i g és 0-normalitzat ja que per tot $i \in N$, tenim:
$$g(i) = 1 \cdot v(i) - v(i) = 0.$$
També ho podem escriure com $v = 1 \cdot g + \vec{e} = 1 \cdot g + (v(1), v(2), ..., v(n))$, i aplicant invariància, per tot $i \in N$ ens queda:
$$F_i(v) = F_i(1 \cdot g + (v(1), v(2), ..., v(n))) = 1 \cdot F_i(g) + v(i).$$
Com que en el cas 1 hem vist que $F(g)$ és única perquè g és un joc 0-normalitzat, aleshores $F(v)$ també és única.

Acabem de veure que per a qualsevol joc $v \in G^N$, ja sigui 0-normalitzat o no, $F(v)$ és única, aleshores com abans hem vist que la solució ES compleix aquestes propietats, concloem que l'única solució que les satisfà és la solució igualitària del surplus. $\square$

Per acabar, ens falta caracteritzar la solució igualitària del surplus, per tal que l'axiomàtica sigui comparable a les que ja hem fet del valor de Shapley i de la solució igualitària. L'única diferència d'aquesta amb les altres, serà l'axioma del jugador "inútil", igual que ja hem vist en cada una de les anteriors hem parlat d'un d'aquestos axiomes. En aquest cas, parlarem de la propietat del jugador falsificador.

Teorema 5.5. *La* ***solució igualitària del surplus*** *és l'única solució que compleix les propietats d'****eficiència, simetria, additivitat*** *i la propietat del* ***jugador falsificador****.*

Demostració. $\Rightarrow$ Primer de tot veurem que la solució igualitària del surplus verifica les propietats mencionades. En la demostració del **Teorema 5.4** hem vist que aquesta solució compleix les propietats d'eficiència, simetria i additivitat. Només ens falta veure que també compleix la propietat del jugador falsificador.

1. Jugador falsificador: Per demostrar que compleix la propietat del jugador falsificador, veurem que si en un joc $v \in G^N$ existeix un jugador falsificador i, es compleix que $F_i(v) = v(i)$. És a dir, suposem que per tot $S \subseteq N$ tal que $i \in S$, es compleix que $v(S) = \sum_{j \in S} v(j)$. En particular, sabem que $i \in N$, per tant es compleix que $v(N) = \sum_{j \in N} v(j)$. Aleshores:
$$ES_i(v) = v(i) + \frac{v(N) - \sum_{j \in N} v(j)}{n} = v(i) + \frac{0}{n} = v(i).$$
És a dir, sigui i un jugador falsificador, $ES_i(v) = v(i)$.

$\Leftarrow$ Demostrem ara que si una solució compleix aquestes quatre propietats, aleshores és la solució igualitària del surplus.

Per la **Proposició 4.12**, sabem que si una solució F compleix la propietat del jugador falsificador, aleshores F també compleix la propietat del jugador anul·lador en els jocs 0-normalitzats.

1. Suposem que v és un joc 0-normalitzat i sabem que F satisfà la propietat d'eficiència, l'additivitat, la simetria i la propietat del jugador anul·lador en els jocs 0-normalitzats. Com ja hem vist en el **cas 1** de la demostració del **Teorema 5.4**, $F(v)$ és única.

2. Suposem que v **no** és 0-normalitzat. Definim el joc $m_b \in G^N$ com $m_b(S) = \sum_{i \in S} v(i)$, és a dir, en el joc m_b tots els jugadors són falsificadors. ja que per tot $i \in N$ i per tot $S \subseteq N$ tal que $i \in S$, $m_b(S) = \sum_{i \in S} v(i)$. Aleshores, com F compleix la propietat del jugador falsificador $F_i(m_b) = v(i)$ per tot $i \in N$, per tant, $F(m_b) = (v(1), v(2), ..., v(n))$ és única.

   Definim ara el joc $g \in G^N$ com $g = v - m_b$. Observem que g és 0-normalitzat perquè per tot $i \in N$,tenim:

   $$g(i) = v(i) - m_b(i) = v(i) - v(i) = 0.$$

   També ho podem escriure com $v = g + m_b$, i per additivitat sabem que:

   $$F(v) = F(g + m_b) = F(g) + F(m_b).$$

   Com que acabem de veure que $F(m_b)$ és única i pel **cas 1** sabem que $F(g)$ és única, aleshores, $F(v)$ també és única.

□

6 Independència lògica dels axiomes

En aquest apartat, demostrarem la independència dels axiomes que hem utilitzat en el **Teorema 5.1**, **Teorema 5.3** i en el **Teorema 5.5**. Com ja hem dit, una caracterització axiomàtica tracta d'identificar solucions mitjançant una serie de propietats o axiomes, on totes aquestes propietat són igual de necessàries. Fins ara, hem vist les diferents caracteritzacions axiomàtiques i les hem demostrat, però ens falta veure que tots els axiomes són igual de necessaris. És a dir, que cap propietat s'implica o es pot deduir de les anteriors. Per demostrar-ho, presentarem quatre exemples de solucions diferents per a cada Teorema, de manera que en cada un, la solució compleix tres de les quatre propietats utilitzades en el Teorema, però no complirà la quarta solució que fem servir.

Pel **Teorema 5.1**, demostrarem la independència de les propietats d'eficiència, simetria, additivitat i jugador nul.

Exemple 1. Considerem la solució $F^1(v) = \mathbf{0} = (0, ..., 0)$ per tot $v \in G^N$.

<u>F^1 compleix simetria</u>: Com que $F_i^1(v)= 0$ per qualsevol $i \in N$, és evident que per a qualsevol $v \in G^N$, i $i, j \in N$ simètrics en v, llavors $F_i^1(v) = F_j^1(v) = 0$.

<u>F^1 compleix la propietat del jugador nul</u>: En aquest cas, sigui un joc $v \in G^N$ i un jugador i tal que és un jugador nul, es compleix per definició que $F_i^1(v) = 0$.

<u>F^1 compleix additivitat</u>: Considerem dos jocs v_1 i v_2 aleshores $F^1(v_1) = \mathbf{0}$ i $F^1(v_2) = \mathbf{0}$. Si definim $v = v_1+v_2$, llavors es té que $F^1(v) = \mathbf{0}$, i per tant, $F^1(v) = F^1(v_1)+F^1(v_2) = \mathbf{0}$.

<u>F^1 **no** compleix eficiència</u>: Agafem el joc

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } S = N, \\ 0 & \text{si } S \neq N. \end{cases}$$

En aquest cas, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i(v) = 0 \neq 1 = v(N)$, per tant, no es compleix la eficiència.

Exemple 2. Sigui la solució $E(v) = \frac{v(N)}{n}$, per un joc qualsevol $v \in G^N$.

En la demostració del **Teorema 5.3** hem vist que la solució igualitària E, compleix les propietats d'<u>eficiència</u>, <u>simetria</u> i <u>additivitat</u>. Ara ens falta veure que no compleix la propietat del jugador nul.

<u>E **no** compleix la propietat del jugador nul</u>: Agafem el joc d'unanimitat u_{12} tal que:

$u_{12}(1) = 0, u_{12}(2) = 0, u_{12}(3) = 0, u_{12}(12) = 1, u_{12}(13) = 0, u_{12}(23) = 0, u_{12}(123) = 1.$

Veiem que 3 és un jugador nul, ja que $u_{12}(3) = 0$, $u_{12}(13) = u_{12}(1)$, $u_{12}(123) = u_{12}(12)$.

En canvi, $E_3(u_{12}) = \frac{v(N)}{n} = \frac{1}{3}$.

Exemple 3. Sigui θ = (1, 2, ..., n) definim $F^2(v) = m^\theta(v)$, per qualsevol $v \in G^N$. És a dir, el vector de contribucions marginals associat a l'ordre θ = (1, 2, ..., n).

F^2 compleix eficiència: En la demostració del **Teorema 5.1**, s'ha establert que els vectors de les contribucions marginals són eficients.

F^2 compleix la propietat del jugador nul: Sigui v un joc i $i \in N$ un jugador nul en v. Definim P_i^θ com el conjunts de jugadors $j \in N$ tals que $\theta(j) < \theta(i)$, és a dir, els predecessors de i d'acord a l'ordre θ. Llavors, tenim:

$$F_i^2(v) = m_i^\theta(v) = v(P_i^\theta \cup \{i\}) - v(P_i^\theta).$$

Com que i és un jugador nul, sabem que $v(P_i^\theta \cup \{i\})$ - $v(P_i^\theta) = 0$. Per tant, es compleix la propietat de jugador nul:

$$F_i^2(v) = v(P_i^\theta \cup \{i\}) - v(P_i^\theta) = 0.$$

F^2 compleix additivitat: Considerem dos jocs v_1 i v_2. Per a cada jugador i, tenim:

$$F_i^2(v_1 + v_2) = m_i^\theta(v_1 + v_2) = (v_1 + v_2)(P_i^\theta \cup \{i\}) - (v_1 + v_2)(P_i^\theta)$$

$$= v_1(P_i^\theta \cup \{i\}) + v_2(P_i^\theta \cup \{i\}) - v_1(P_i^\theta) - v_2(P_i^\theta) = m_i^\theta(v_1) + m_i^\theta(v_2) = F_i^2(v_1) + F_i^2(v_2).$$

F^2 **no** compleix la simetria: Veiem que aquesta funció no compleix la propietat de simetria amb un contraexemple. Considerem $N = \{1, 2, 3\}$ i els valors del joc v:

v(1) = 0, v(2) = 0, v(3) = 0, v(12) = 5, v(13) = 0, v(23) = 0, v(123) = 0.

Observem que si v(1) = 0 = v(2), v(13) = 0 = v(23). Això implica que els jugadors 1 i 2 són simètrics.

No obstant això, $F^2(v) = m^\theta(v) =$ (0, 5, 0), veiem que $F_1^2(v) = 0 \neq 5 = F_2^2(v)$.

Exemple 4. Considerem la solució $F^3(v)$ per a qualsevol joc $v \in G^N$

$$F^3(v) = \begin{cases} \phi(v) & \text{si existeix algun jugador } i \in N \text{ tal que } v(N) = v(N \setminus \{i\}), \\ E(v) & \text{si no existeix cap jugador } i \in N \text{ tal que } v(N) = v(N \setminus \{i\}). \end{cases}$$

Hem vist en la demostració del **Teorema 5.1** i en la demostració del **Teorema 5.3**, que el valor de Shapley $\phi(v)$ i la solució igualitària $E(v)$, compleixen la eficiència i la simetria. Per tant, $F^3(v)$ també les complirà. Ens queda veure que compleix la propietat del jugador nul i que no compleix l'additivitat.

F^3 compleix la propietat del jugador nul: Sigui $i \in N$ un jugador nul en un joc $v \in G^N$, sabem que per tot $S \subseteq N$ tal que $i \notin S$, es compleix $v(S \cup \{i\}) = v(S)$. Per tant, en aquest cas, sabem que existeix un $i \in N$ tal que $v(N) = v(N \setminus \{i\})$, ja que si definim $S = N \setminus \{i\}$, és clar que $i \notin S$, aleshores $v(S) = v(N \setminus \{i\}) = v(S \cup \{i\}) = v(N)$. Aleshores,

$$F_i^3(v) = \phi_i(v) = 0.$$

L'última igualtat és degut a que en la demostració del **Teorema 5.1** hem vist que el valor de Shapley compleix la propietat del jugador nul. Per tant, concloem que F^3 també la compleix.

F^3 **no** compleix additivitat: Considerem $N = \{1,2,3\}$ i tres jocs: v_1, v_2 i $v = v_1 + v_2$. Amb els següents valors:

$$v_1(1) = 0, v_1(2) = 0, v_1(3) = 0, v_1(12) = 0, v_1(13) = 0, v_1(23) = 2, v_1(123) = 2$$

$$v_2(1) = 0, v_2(2) = 0, v_2(3) = 0, v_2(12) = -1, v_2(13) = 0, v_2(23) = 0, v_2(123) = 3$$

$$v(1) = 0, v(2) = 0, v(3) = 0, v(12) = -1, v(13) = 0, v(23) = 2, v(123) = 5$$

En el joc v_1 existeix un jugador $i \in N$ tal que $v(N) = v(N \setminus \{i\})$, en particular veiem que $v(N) = v(N \setminus \{1\}) = v(23) = 2$, aleshores:

$$F_1^3(v_1) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{1\}} \gamma(S) \cdot [v_1(S \cup \{1\}) - v_1(S)] = \frac{0!(3-0-1)!}{3!} \cdot [v_1(1) - v_1(\emptyset)]$$

$$+\frac{1!(3-1-1)!}{3!} \cdot [v_1(12) - v_1(2)] + \frac{1!(3-1-1)!}{3!} \cdot [v_1(13) - v_1(3)]$$

$$+\frac{2!(3-2-1)!}{3!} \cdot [v_1(123) - v_1(23)] = \frac{2!}{3!} \cdot [0-0] + \frac{1!}{3!} \cdot [0-0] + \frac{1!}{3!} \cdot [0-0] + \frac{2!}{3!} \cdot [2-2] = 0.$$

$$F_2^3(v_1) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{2\}} \gamma(S) \cdot [v_1(S \cup \{2\}) - v_1(S)] = \frac{0!(3-0-1)!}{3!} \cdot [v_1(2) - v_1(\emptyset)]$$

$$+\frac{1!(3-1-1)!}{3!} \cdot [v_1(12) - v_1(1)] + \frac{1!(3-1-1)!}{3!} \cdot [v_1(23) - v_1(3)]$$

$$+\frac{2!(3-2-1)!}{3!} \cdot [v_1(123) - v_1(13)] = \frac{2!}{3!} \cdot [0-0] + \frac{1!}{3!} \cdot [0-0] + \frac{1!}{3!} \cdot [2-0] + \frac{2!}{3!} \cdot [2-0] = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} = 1.$$

$$F_3^3(v_1) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{3\}} \gamma(S) \cdot [v_1(S \cup \{3\}) - v_1(S)] = \frac{0!(3-0-1)!}{3!} \cdot [v_1(3) - v_1(\emptyset)]$$

$$+\frac{1!(3-1-1)!}{3!} \cdot [v_1(13) - v_1(1)] + \frac{1!(3-1-1)!}{3!} \cdot [v_1(23) - v_1(2)]$$

$$+\frac{2!(3-2-1)!}{3!} \cdot [v_1(123) - v_1(12)] = \frac{2!}{3!} \cdot [0-0] + \frac{1!}{3!} \cdot [0-0] + \frac{1!}{3!} \cdot [2-0] + \frac{2!}{3!} \cdot [2-0] = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} = 1.$$

Per tant, $F^3(v_1) = (0,1,1)$.

Ara, en el joc v_2 no existeix cap jugador $i \in N$ tal que $v(N) = v(N \setminus \{i\})$, aleshores, per tot $i \in N$:

$$F_i^3(v_2) = \frac{v_2(N)}{n} = \frac{3}{3} = 1,$$

$F^3(v_2) = (1,1,1)$.

Per acabar, en el joc v tampoc existeix cap jugador $i \in N$ tal que $v(N) = v(N \setminus \{i\})$, per tant, per tot $i \in N$:

$$F_i^3(v) = \frac{v(N)}{n} = \frac{5}{3},$$

$F^3(v) = (\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3})$.

Calculem

$$F^3(v_1) + F^3(v_2) = (0, 1, 1) + (1, 1, 1) = (1, 2, 2) \neq (\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}) = F^3(v).$$

Pel **Teorema 5.3**, veurem la independència de les propietats d'eficiència, simetria, additivitat i jugador anul·lador.

Exemple 1. Considerem la solució $F^1(v) = \mathbf{0} = (0, ..., 0)$ per tot $v \in G^N$.

Aquesta solució ja l'hem utilitzada en l'**Exemple 1** de la demostració de la independència de les propietats del **Teorema 5.1**. Per tant, a l'exemple hem demostrat que $F^1(v)$ compleix les propietats de simetria, additivitat i també hem vist que **no** compleix la propietat d'eficiència. Aleshores, només ens queda veure que $F^1(v)$ compleix la propietat del jugador anul·lador.

$F^1(v)$ compleix la propietat del jugador anul·lador: Sigui un joc $v \in G^N$ i un jugador $i \in N$ tal que i és un jugador anul·lador en v, es compleix per definició, que $F_i(v) = 0$.

Exemple 2. Considerem el valor de Shapley $\phi(v)$, per a qualsevol joc $v \in G^N$.

En la demostració del **Teorema 5.1** hem vist que compleix les propietats d'eficiència, simetria i additivitat. Ens falta veure que no compleix la propietat del jugador anul·lador.

Shapley **no** compleix la propietat del jugador anul·lador: Considerem $N = \{1, 2, 3\}$ i els valors del joc v:

$v(1) = 0, v(2) = 0, v(3) = 0, v(12) = 0, v(13) = 0, v(23) = 1, v(123) = 0.$

És cert que el jugador 1 és un jugador anul·lador, ja que per a tot $S \subseteq N$ tal que $1 \in S$, es compleix que $v(S) = 0$. En canvi,

$$\phi_1(v) = \frac{0!(3-0-1)!}{3!} \cdot [v(1) - v(\emptyset)] + \frac{1!(3-1-1)!}{3!} \cdot [v(12) - v(2)]$$
$$+\frac{1!(3-1-1)!}{3!} \cdot [v(13) - v(3)] + \frac{2!(3-2-1)!}{3!} \cdot [v(123) - v(23)]$$
$$= \frac{2!(3-2-1)!}{3!} \cdot [0-1] = \frac{2!}{3!} \cdot (-1) \neq 0.$$

És a dir, Shapley no compleix la propietat del jugador anul·lador.

Exemple 3. Fixem una funció $w : N \longrightarrow \mathbb{R}^N_+$ no constant, és a dir, hi ha com a mínim dos agents amb diferent imatge, tal que $\sum_{i \in N} w_i = 1$, on $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$.

Sigui $v \in G^N$ un joc qualsevol, per tot $i \in N$, definim la solució $F_i^4(v) = w(i) \cdot v(N)$.

F^4 compleix eficiència: Per tot $i \in N$ tenim:

$$\sum_{i \in N} F_i^4(v) = \sum_{i \in N} w(i) \cdot v(N) = v(N) \cdot \sum_{i \in N} w(i) = v(N).$$

L'última igualtat es segueix de la definició de w, ja que $\sum_{i \in N} w(i) = 1$.

F^4 compleix la propietat del jugador anul·lador: Sigui $i \in N$ un jugador anul·lador en un joc $v \in G^N$, sabem que per tot $S \subseteq N$ tal que $i \in S$, $v(S) = 0$. En particular, com $i \in N$, $v(N) = 0$. Per tant, $F_i^4(v) = w(i) \cdot v(N) = w(i) \cdot 0 = 0$.

$\underline{F^4 \text{ compleix additivitat}}$: Considerem dos jocs qualsevol v_1, v_2. Aleshores, per tot $i \in N$, tenim:

$$F_i^4(v_1+v_2) = w(i)\cdot(v_1+v_2)(N) = w(i)\cdot(v_1(N)+v_2(N)) = w(i)\cdot v_1(N) + w(i)\cdot v_2(N)$$
$$= F_i^4(v_1) + F_i^4(v_2).$$

$\underline{F^4}$ **no** compleix simetria: Considerem $N = \{1,2,3\}$ i definim w com, $w = (0.2, 0.1, 0.7)$. Siguin els valors del joc v:

$v(1) = 0, v(2) = 0, v(3) = 0, v(12) = 0, v(13) = 0, v(23) = 0, v(123) = 1.$

Observem que $v(1) = v(2)$, $v(13) = v(23)$, és a dir, els jugadors 1, 2 són jugadors simètrics. No obstant això, si calculem

$$F_1^4(v) = w(1)\cdot v(N) = 0.2 \cdot 1 = 0.2.$$
$$F_2^4(v) = w(2)\cdot v(N) = 0.1 \cdot 1 = 0.1.$$

Veiem que $F_1^4(v) \neq F_2^4(v)$, per tant, no compleix la propietat de simetria.

Exemple 4. Considerem la solució $F^5(v)$ per a qualsevol joc $v \in G^N$

$$F^5(v) = \begin{cases} \phi(v) & \text{si } v(N) < 0, \\ E(v) & \text{si } v(N) \geq 0. \end{cases}$$

$\underline{F^5 \text{ compleix eficiència}}$: Si $v(N) < 0$, sabem que el valor de Shapley $\phi(v)$, compleix la propietat d'eficiència per la demostració del **Teorema 5.1**. En cas que $v(N) \geq 0$, hem vist en la demostració del **Teorema 5.3** que la solució igualitària $E(v)$, també compleix la propietat d'eficiència.

$\underline{F^5 \text{ compleix simetria}}$: De la mateixa manera que en la eficiència, sabem que el valor de Shapley $\phi(v)$ i la solució igualitària $E(v)$, compleixen la propietat de simetria.

$\underline{F^5 \text{ compleix la propietat del jugador anul·lador}}$: Sigui $i \in N$ un jugador anul·lador en el joc v, és a dir, per a tot $S \subseteq N$ amb $i \in S$, $v(S) = 0$. En particular, com $i \in N$, $v(N) = 0$. Per tant, $F_i^5(v) = \frac{v(N)}{n} = \frac{0}{n} = 0$. Compleix la propietat del jugador anul·lador.

$\underline{F^5}$ **no** compleix additivitat: Considerem $N = \{1,2,3\}$ i tres jocs: v_1, v_2 i $v = v_1 + v_2$. Amb els següents valors:

$$v_1(1) = 0, v_1(2) = 0, v_1(3) = 0, v_1(12) = 1, v_1(13) = 0, v_1(23) = 0, v_1(123) = -1$$
$$v_2(1) = 0, v_2(2) = 0, v_2(3) = 0, v_2(12) = -1, v_2(13) = 0, v_2(23) = 0, v_2(123) = 3$$
$$v(1) = 0, v(2) = 0, v(3) = 0, v(12) = 0, v(13) = 0, v(23) = 0, v(123) = 2$$

Com que $v_1(N) =$ -1 < 0, aleshores:

$$F_1^5(v_1) = \sum_{S\subseteq N\setminus\{1\}} \gamma(S)\cdot[v_1(S\cup\{1\}) - v_1(S)] = \frac{0!(3-0-1)!}{3!}\cdot[v_1(1) - v_1(\emptyset)]$$
$$+\frac{1!(3-1-1)!}{3!}\cdot[v_1(12) - v_1(2)] + \frac{1!(3-1-1)!}{3!}\cdot[v_1(13) - v_1(3)]$$

$$+\frac{2!(3-2-1)!}{3!}\cdot[v_1(123)-v_1(23)]=\frac{2!}{3!}\cdot[0-0]+\frac{1!}{3!}\cdot[1-0]+\frac{1!}{3!}\cdot[0-0]+\frac{2!}{3!}\cdot[-1-0]=-\frac{1}{6}.$$

$$F_2^5(v_1)=\sum_{S\subseteq N\backslash\{2\}}\gamma(S)\cdot[v_1(S\cup\{2\})-v_1(S)]=\frac{0!(3-0-1)!}{3!}\cdot[v_1(2)-v_1(\emptyset)]$$

$$+\frac{1!(3-1-1)!}{3!}\cdot[v_1(12)-v_1(1)]+\frac{1!(3-1-1)!}{3!}\cdot[v_1(23)-v_1(3)]$$

$$+\frac{2!(3-2-1)!}{3!}\cdot[v_1(123)-v_1(13)]=\frac{2!}{3!}\cdot[0-0]+\frac{1!}{3!}\cdot[1-0]+\frac{1!}{3!}\cdot[0-0]+\frac{2!}{3!}\cdot[-1-0]=-\frac{1}{6}.$$

$$F_3^5(v_1)=\sum_{S\subseteq N\backslash\{3\}}\gamma(S)\cdot[v_1(S\cup\{3\})-v_1(S)]=\frac{0!(3-0-1)!}{3!}\cdot[v_1(3)-v_1(\emptyset)]$$

$$+\frac{1!(3-1-1)!}{3!}\cdot[v_1(13)-v_1(1)]+\frac{1!(3-1-1)!}{3!}\cdot[v_1(23)-v_1(2)]$$

$$+\frac{2!(3-2-1)!}{3!}\cdot[v_1(123)-v_1(12)]=\frac{2!}{3!}\cdot[0-0]+\frac{1!}{3!}\cdot[0-0]+\frac{1!}{3!}\cdot[0-0]+\frac{2!}{3!}\cdot[-1-1]=-\frac{2}{3}.$$

Per tant $F^5(v_1)=(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},-\frac{2}{3})$.

Ara, $v_2(N)=3\geq 0$, aleshores, per tot $i\in N$:

$$F_i^5(v_2)=\frac{v_2(N)}{n}=\frac{3}{3}=1,$$

$F^5(v_2)=(1,1,1)$.

Per acabar, $v(N)=2\geq 0$, aleshores, per tot $i\in N$:

$$F_i^5(v)=\frac{v(N)}{n}=\frac{2}{3},$$

$F^5(v)=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$.

Calculem

$$F^5(v_1)+F^5(v_2)=(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},-\frac{2}{3})+(1,1,1)=(\frac{5}{6},\frac{5}{6},\frac{2}{6})\neq(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})=F^5(v).$$

Pel **Teorema 5.5**, demostrarem la independència de les propietats d'eficiència, simetria, additivitat i la propietat del jugador falsificador.

Exemple 1. Considerem la solució $F_i^6(v) = v(i)$ per a qualsevol joc $v \in G^N$.

F^6 compleix simetria: Per hipòtesi sabem que si dos jugadors són simètrics es compleix que $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ per tot $S \subseteq N$ tal que $i, j \notin S$. En particular quan $S = \{\emptyset\}$, $v(i) = v(j)$. Per tant, $F_i^6(v) = v(i) = v(j) = F_j^6(v)$.

F^6 compleix la propietat del jugador falsificador: Sigui $i \in N$ un jugador falsificador en un joc v, per definició, $F_i^6(v) = v(i)$.

F^6 compleix additivitat: Considerem dos jocs qualsevol v_1 i v_2. Aleshores, per tot $i \in N$ $F_i^6(v_1 + v_2) = (v_1 + v_2)(i) = v_1(i) + v_2(i) = F_i^6(v_1) + F_i^6(v_2)$.

F^6 **no** compleix eficiència: Considerem $N = \{1, 2, 3\}$. Definim el joc v amb els següents valors:

$v(1) = 1, v(2) = 1, v(3) = 0, v(12) = 0, v(13) = 0, v(23) = 0, v(123) = 3.$

Calculem $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} F_i^6(v) = \sum_{i=1}^{3} v(i) = v(1) + v(2) + v(3) = 2 \neq v(N) = 3.$

Exemple 2. Considerem el valor de Shapley $\phi(v)$.

En la demostració del **Teorema 5.1**, hem vist que compleix les propietats d'eficiència, simetria i additivitat. Ens falta provar que no compleix la propietat del jugador falsificador.

Shapley **no** compleix la propietat del jugador falsificador: Considerem $N = \{1, 2, 3\}$ i els valors de contribució:

$v(1) = 2, v(2) = 8, v(3) = 15, v(12) = 10, v(13) = 17, v(23) = 20, v(123) = 25.$

Veiem que el jugador 1 és un jugador falsificador, ja que per a tot $S \subseteq N$ tal que $1 \in S$, es compleix que $v(S) = \displaystyle\sum_{j \in S} v(j)$, és a dir, $v(12) = v(1) + v(2)$, $v(13) = v(1) + v(3)$ i $v(123) = v(1) + v(2) + v(3)$. En canvi,

$$\phi_1(v) = \frac{0!(3-0-1)!}{3!} \cdot [v(1) - v(\emptyset)] + \frac{1!(3-1-1)!}{3!} \cdot [v(12) - v(2)]$$

$$+ \frac{1!(3-1-1)!}{3!} \cdot [v(13) - v(3)] + \frac{2!(3-2-1)!}{3!} \cdot [v(123) - v(23)]$$

$$= \frac{2!}{3!} \cdot [2 - 0] + \frac{1!}{3!} \cdot [10 - 8] + \frac{1!}{3!} \cdot [17 - 15] + \frac{2!}{3!} \cdot [25 - 20] = \frac{4 + 2 + 2 + 10}{6} = 3.$$

Com que $\phi_1(v) = 3 \neq 1 = v(1)$, no compleix la propietat del jugador falsificador.

Exemple 3. Fixem una funció $w : N \longrightarrow \mathbb{R}_+^N$ no constant, és a dir, hi ha com a mínim dos agents amb diferent imatge, tal que $\displaystyle\sum_{i \in N} w_i = 1$, on $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$.

Sigui $v \in G^N$ un joc qualsevol, per tot $i \in N$, definim la solució

$$ES_i^w(v) = v(i) + w_i \cdot (v(N) - \sum_{i \in N} v(i)).$$

ES^w compleix eficiència:

$$\sum_{i\in N} ES_i^w(v) = \sum_{i\in N}(v(i) + w_i \cdot (v(N) - \sum_{i\in N} v(i))) = \sum_{i\in N} v(i) + \sum_{i\in N}(w_i \cdot (v(N) - \sum_{i\in N} v(i)))$$

$$= \sum_{i\in N} v(i) + \sum_{i\in N} w_i \cdot \left(v(N) - \sum_{i\in N} v(i)\right) = \sum_{i\in N} v(i) + v(N) - \sum_{i\in N} v(i) = v(N).$$

La tercera igualtat és per definició $\sum_{i\in N} w_i = 1$.

ES^w compleix la propietat del jugador falsificador: Sigui $i \in N$ un jugador falsificador en un joc $v \in G^N$, sabem que per a tot $S \subseteq N$ tal que $i \in S$, es compleix que $v(S) = \sum_{j\in S} v(j)$, en particular $i \in N$, per tant $v(N) = \sum_{i\in N} v(i)$, aleshores ens queda que $ES_i^w(v) = v(i) + w_i \cdot 0 = v(i)$.

ES^w compleix additivitat: Considerem dos jocs qualsevol v_1 i v_2. Aleshores, per tot $i \in N$, tenim:

$$ES_i^w(v_1 + v_2) = (v_1 + v_2)(i) + w_i \cdot ((v_1 + v_2)(N) - \sum_{i\in N}(v_1 + v_2)(i))$$

$$= v_1(i) + v_2(i) + w_i \cdot (v_1(N) + v_2(N) - \sum_{i\in N} v_1(i) - \sum_{i\in N} v_2(i))$$

$$= v_1(i) + w_i \cdot (v_1(N) - \sum_{i\in N} v_1(i)) + v_2(i) + w_i \cdot (v_2(N) - \sum_{i\in N} v_2(i))$$

$$= ES_i^w(v_1) + ES_i^w(v_2).$$

ES^w **no** compleix simetria: Considerem $N = \{1, 2, 3\}$ i definim w com, $w = (0.2, 0.1, 0.7)$. Siguin els valors del joc v:

$v(1) = 0, v(2) = 0, v(3) = 0, v(12) = 0, v(13) = 0, v(23) = 0, v(123) = 1.$

Observem que $v(1) = v(2)$, $v(13) = v(23)$, és a dir, els jugadors 1, 2 són jugadors simètrics. No obstant això, si calculem

$$ES_1^w(v) = v(1) + w_1 \cdot (v(N) - \sum_{i\in N} v(i)) = 0 + 0.2 \cdot (1 - 0) = 0.2.$$

$$ES_2^w(v) = v(2) + w_2 \cdot (v(N) - \sum_{i\in N} v(i)) = 0 + 0.1 \cdot (1 - 0) = 0.1.$$

Veiem que $ES_1^w(v) \neq ES_2^w(v)$, per tant, no compleix la propietat de simetria.

Exemple 4. Considerem la solució $F^7(v)$ per a qualsevol joc $v \in G^N$

$$F^7(v) = \begin{cases} \phi(v) & \text{si } v(N) - \sum_{i \in N} v(i) < 0, \\ ES(v) & \text{si } v(N) - \sum_{i \in N} v(i) \geq 0. \end{cases}$$

Hem vist en la demostració del **Teorema 5.1** i en la demostració del **Teorema 5.4**, que el valor de Shapley $\phi(v)$ i la solució igualitària del surplus $ES(v)$, compleixen la eficiència i la simetria. Per tant, $F^7(v)$ també les complirà. Ens queda veure que compleix la propietat del jugador falsificador i que no compleix l'additivitat.

F^7 compleix la propietat del jugador falsificador: Sigui $i \in N$ un jugador falsificador en un joc $v \in G^N$, com que $i \in N$, sabem que $v(N) = \sum_{j \in N} v(j)$, és a dir, $v(N) - \sum_{j \in N} v(j) = 0$, aleshores:

$$F_i^7(v) = ES_i(v) = v(i) + \frac{v(N) - \sum_{i \in N} v(i)}{|N|} = v(i) + \frac{0}{n}.$$

Per tant, $F^7(v) = v(i)$, és a dir, compleix la propietat del jugador falsificador.

F^7 **no** compleix additivitat: Considerem $N = \{1, 2, 3\}$ i tres jocs qualsevol v_1, v_2 i $v = v_1 + v_2$. Amb els següents valors:

$$v_1(1) = 0, v_1(2) = 0, v_1(3) = 0, v_1(12) = 1, v_1(13) = 0, v_1(23) = 0, v_1(123) = -1$$

$$v_2(1) = 0, v_2(2) = 0, v_2(3) = 0, v_2(12) = -1, v_2(13) = 0, v_2(23) = 0, v_2(123) = 3$$

$$v(1) = 0, v(2) = 0, v(3) = 0, v(12) = 0, v(13) = 0, v(23) = 0, v(123) = 2$$

Com que $v_1(N) - \sum_{i \in N} v_1(i) =$ -1 < 0, aleshores:

$$F_1^7(v_1) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{1\}} \gamma(S) \cdot [v_1(S \cup \{1\}) - v_1(S)] = \frac{0!(3-0-1)!}{3!} \cdot [v(1) - v(\emptyset)]$$

$$+ \frac{1!(3-1-1)!}{3!} \cdot [v(12) - v(2)] + \frac{1!(3-1-1)!}{3!} \cdot [v(13) - v(3)]$$

$$+ \frac{2!(3-2-1)!}{3!} \cdot [v(123) - v(23)] = \frac{2!}{3!} \cdot [0-0] + \frac{1!}{3!} \cdot [1-0] + \frac{1!}{3!} \cdot [0-0] + \frac{2!}{3!} \cdot [-1-0] = -\frac{1}{6}.$$

$$F_2^7(v_1) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{2\}} \gamma(S) \cdot [v_1(S \cup \{2\}) - v_1(S)] = \frac{0!(3-0-1)!}{3!} \cdot [v(2) - v(\emptyset)]$$

$$+ \frac{1!(3-1-1)!}{3!} \cdot [v(12) - v(1)] + \frac{1!(3-1-1)!}{3!} \cdot [v(23) - v(3)]$$

$$+ \frac{2!(3-2-1)!}{3!} \cdot [v(123) - v(13)] = \frac{2!}{3!} \cdot [0-0] + \frac{1!}{3!} \cdot [1-0] + \frac{1!}{3!} \cdot [0-0] + \frac{2!}{3!} \cdot [-1-0] = -\frac{1}{6}.$$

$$F_3^7(v_1) = \sum_{S\subseteq N\setminus\{3\}} \gamma(S)\cdot[v_1(S\cup\{3\}) - v_1(S)] = \frac{0!(3-0-1)!}{3!}\cdot[v(3)-v(\emptyset)]$$

$$+\frac{1!(3-1-1)!}{3!}\cdot[v(13)-v(1)] + \frac{1!(3-1-1)!}{3!}\cdot[v(23)-v(2)]$$

$$+\frac{2!(3-2-1)!}{3!}\cdot[v(123)-v(12)] = \frac{2!}{3!}\cdot[0-0] + \frac{1!}{3!}\cdot[0-0] + \frac{1!}{3!}\cdot[0-0] + \frac{2!}{3!}\cdot[-1-1] = -\frac{2}{3}.$$

Per tant $F^7(v_1) = (-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{2}{3})$.

Ara, $v_2(N) - \sum_{i\in N} v_2(i) = 3 \geq 0$, aleshores, per tot $i \in N$:

$$F_i^7(v_2) = v_2(i) + \frac{v_2(N) - \sum_{i\in N} v_2(i)}{3} = 0 + \frac{3-0}{3} = 1,$$

$F^7(v_2) = (1,1,1)$.

Per acabar, $v(N) - \sum_{i\in N} v(i) = 2 \geq 0$, aleshores, per tot $i \in N$:

$$F_i^7(v) = v(i) + \frac{v(N) - \sum_{i\in N} v(i)}{3} = 0 + \frac{2-0}{3} = \frac{2}{3},$$

$F^7(v) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

Calculem

$$F^7(v_1) + F^7(v_2) = (-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{2}{3}) + (1,1,1) = (\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{2}{6}) \neq (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = F^7(v).$$

7 Conclusions

La teoria de jocs és una àrea de la matemàtica aplicada que utilitza models per analitzar les decisions estratègiques i les interaccions en els jocs. Una branca molt important de la teoria de jocs, són els jocs cooperatius i els jocs no cooperatius. Durant aquest treball, ens hem centrat en els jocs cooperatius, on els jugadors han de col·laborar per aconseguir un objectiu comú. Dins d'aquesta branca, hem aprofundit en els jocs cooperatius d'utilitat transferible, que són aquells que busquen la manera de repartir els beneficis obtinguts mitjançant la cooperació dels jugadors.

L'objectiu principal d'aquest treball ha sigut l'estudi detallat de les solucions més utilitzades en els jocs cooperatius d'utilitat transferible. Aquestes solucions en les que ens hem centrat són: el valor de Shapley, la solució igualitària i la solució igualitària del surplus. Cadascuna d'elles pretén distribuir els guanys d'una manera diferent, però no podem dir quina d'elles és la millor, perquè depenent de diversos factors, per un agent serà una i per a un altre pot ser una diferent.

Durant l'anàlisi de les solucions mencionades, hem examinat les propietats comuns que comparteixen totes elles; la eficiència, la simetria i l'additivitat. També hem aprofundit en aquelles que les diferencien; la propietat del jugador nul, la propietat del jugador anul·lador, la propietat del jugador fals i la propietat del jugador falsificador. Aquests quatre jugadors mencionats, són els que hem considerat jugadors "inútils" a l'hora d'aportar beneficis en un joc cooperatiu.

Ara bé, tot el que hem comentat fins ara, ens ha sigut clau per poder estudiar amb detall les seves caracteritzacions axiomàtiques, que han sigut necessàries per entendre i definir adequadament aquestes tres solucions, ja que tracten d'identificar solucions mitjançant les propietats que verifiquen aquesta solució. Per tant, veiem que totes aquestes propietats que formen la caracterització axiomàtica són igual de necessàries, de manera que hem dedicat un apartat d'aquest treball a veure la independència d'aquestes. És a dir, hem vist mitjançant exemples que cap propietat s'implica de les altres.

En conclusió, en aquest treball hem pogut aconseguir els objectius proposats. Hem ampliat el coneixement en el camp de la teoria de jocs, aportant una comprensió més profunda dels jocs cooperatius d'utilitat transferible. Mitjançant l'estudi de les solucions més utilitzades, hem pogut comprendre com arribar a acords per repartir els beneficis obtinguts mitjançant la cooperació dels jugadors. Per fer-ho, hem analitzat les propietats comuns i diferenciadores d'aquestes solucions i hem examinat les seves caracteritzacions axiomàtiques.

Referències

[1] CASAJUS, André; HUETTNER, Frank. *Null, nullifying, or dummifying players: The difference between the Shapley value, the equal division value, and the equal surplus division value. Economics Letters*, 2014, vol. 122, no 2, p. 167-169.

[2] CERDÁ, Emilio; JIMENO, José Luis; PÉREZ, Joaquín. *Teoría de juegos.* Madrid, Spain: Pearson Educación, 2004.

[3] CIRICI, Joana. Àlgebra Lineal. Apunts de l'assignatura d'Àlgebra Lineal. Universitat de Barcelona, 2020.

[4] CSÓKA, Péter; HERINGS, P. Jean-Jacques. Liability games. *Games and Economic Behavior*, 2019, vol. 116, p. 260-268.

[5] CSÓKA, Péter; ILLÉS, Ferenc; SOLYMOSI, Tamás. *On the Shapley value of liability games. European Journal of Operational Research*, 2022, vol. 300, no 1, p. 378-386.

[6] FORTIANA, Josep. Probabilitats. Apunts de l'assignatura de Probabilitats. Universitat de Barcelona, 2020.

[7] GONZÁLEZ-DÍAZ, Julio; SÁNCHEZ-RODRÍGUEZ, Estela. Understanding the coincidence of allocation rules: symmetry and orthogonality in TU-games. *International Journal of Game Theory*, 2014, vol. 43, p. 821-843.

[8] I PALLAROLA, Carles Rafels. *Jocs cooperatius i aplicacions econòmiques.* Edicions Universitat Barcelona, 1999.

[9] IZQUIERDO AZNAR, Josep Maria. *Análisis de soluciones para juegos cooperativos de valores medios crecientes respecto a un vector: juegos financieros.* Universitat de Barcelona, 1996.

[10] LI, Whenzong; XU, Genjiu; VAN DEN BRINK, René. *Sign properties and axiomatizations of the weighted division value.* Tinbergen Institute Discussion Paper, 2021.

[11] MAGAÑA, Antonio. Els jocs cooperatius amb utilitat transferible. *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 1998, vol. 13, no 2, p. 21-33.

[12] RODRÍGUEZ, Elena Martínez. Concepto de solución para los juegos cooperativos. *Anuario jurídico y económico escurialense*, 2004, no 37, p. 409-425.

[13] SOTO, Antonio; VALENTE, María Rosa. Teoría de los juegos: Vigencia y limitaciones. *Revista de Ciencias Sociales*, 2005, vol. 11, no 3, p. 497-506.

[14] VAN DEN BRINK, René. *Null or nullifying players: the difference between the Shapley value and equal division solutions. Journal of Economic Theory*, 2007, vol. 136, no 1, p. 767-775.

[15] Varios autores. Teoría de juegos.
`https://es.wikipedia.org/wiki/Teoría_de_juegos`.

[16] Varios autores. Valor de Shapley.
`https://es.wikipedia.org/wiki/Valor_de_Shapley`.