Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

ELS MODELS DE MERTON I KOU

Autor: Pau Picas i Gil

Director: Dr. Josep Vives Santa-Eulàlia
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 13 de juny de 2023

Abstract

We will study some mathematical models which are useful to model financial markets. The most basic one, in the continuous case, is known as the Black-Scholes model. However, in order to model abrupt changes in the market, after introducing the Poisson process, we will study two models which include discontinuity, known as the Merton model and the Kou model. Finally, we will compare them.

Resum

Estudiarem alguns models matemàtics que serveixen per modelitzar mercats financers. El més bàsic, en el cas de continu, és el model de Black-Scholes. A partir d'aquest model, per modelitzar els canvis bruscos que es poden produïr, un cop introduït el procés de Poisson, estudiarem dos models que permeten la possibilitat de salts o discontinuïtats, que son els models de Merton i de Kou, i finalment els compararem.

2020 Mathematics Subject Classification. 60G51, 60G55, 60J76

Índex

1 Introducció

El 1973 es va publicar a la revista *Journal of Political Economy* un article a càrrec de Fisher Black i Myron Scholes (que seria ampliat per Robert Merton aquell mateix any), que va desenvolupar tècniques basades en el principi d'absència d'arbitratge per fixar els preus i la cobertura de les opcions, i es va presentar, també, la fórmula de Black-Scholes per a opcions europees de compra.

A finals de la dècada de 1970, la base d'aquests arguments, i en particular la seva relació amb la teoria de martingales, ja s'entenia prou be i això va permetre un ràpid progrés a nivell teòric que fins al dia d'avui manté ocupats tant economistes com matemàtics, especialment els que es dediquen a l'estudi de la teoria de probabilitats.

Encara que la teoria matemàtica es basa en models de mercat que no presenten oportunitats d'arbitratge, en la pràctica molta de la motivació per aquest estudi prové de la recerca de beneficis sense risc, o més ben dit, de l'explotació de les imperfeccions del mercat financer. Per tant, un coneixement més profund dels principis que gobernen la pràctica del mercat financer és essencial a l'hora de millorar la seva pràctica i també per regular-la.

Ja a principis de segle, es proposa el model de Kou com a model alternatiu al de Black-Scholes, que s'estava aplicant amb èxit, i al més avançat model de Merton, aprofitant els avantatges que resulten de les propietats úniques de la distribució exponencial.

1.1 El projecte

Aquest treball té dos objectius. El primer objectiu és mostrar les eines matemàtiques que son el fonament dels models de mercats financers. Veurem la importància de la teoria de processos estocàstics en tots aquests models.

El segon objectiu és comparar el model de Merton amb el model de Kou des d'un punt de vista purament matemàtic per entendre en quins casos és millor utilitzar un o l'altre.

1.2 Estructura de la Memòria

Començarem el treball amb la Secció 2 presentant un seguit de resultats i definicions que utiltzarem a la resta del treball. A continuació, a la Secció 3, estudiarem el model de Black-Scholes, que és el model sense discontinuïtats. Per poder passar a estudiar models amb discontinuïtats, a la Secció 4, dedicarem un temps a estudiar el procés de Poisson. Això ens servirà per veure, a la Secció 5, el model de Merton i, a la Secció 7, el model de Kou. Com a parèntesi, a la Secció 6, comentarem una teoria sobre l'equilibri en models generals de difusió amb salts. Finalment, a la Secció 8, acabarem fent una comparació dels models de Merton i Kou.

2 Preliminars

Per desenvolupar aquest treball necessitarem utilitzar alguns resultats per poder justificar els conceptes i teoremes més principals.

2.1 Conceptes bàsics de finances

Encara que l'objectiu d'aquest treball no és estudiar els mercats financers, sinó les estructures matemàtiques que hi ha al darrere, cal conèixer, encara que sigui una mica per sobre, algunes nocions elementals de finances.

Definició 2.1. *Una opció (financera) és el dret, però no l'obligació, de comprar o vendre accions en un cert temps i a un cert preu. L'opció de comprar generalment s'anomena call, mentre que l'opció de vendre s'anomena put, seguint la nomenclatura anglòfona. Si l'opció es pot comprar o vendre abans de la data d'expiració, estem parlant d'opcions americanes; si només es pot en el moment de la data de venciment, parlem d'opcions europees.*

Examinem el cas de l'opció europea de compra d'una opció. El preu de l'opció a temps t el denotarem per S_t. Sigui T la data de venciment i K el preu d'exercici. Evidentment, si $K > S_T$ no val la pena exercir el dret de compra perquè seria perdre diners. Si, en canvi, $K < S_T$ s'obté un benefici de $S_T - K$ al adquirir l'opció. Per tant, el valor del call a temps de venciment ve donat per

$$(S_T - K)_+ = max(S_T - K, 0).$$

Notem que a l'hora d'adquirir l'opció, S_T encara és desconegut. Per tant, ens hem de fer dues preguntes:

1. Quant ha de pagar el comprador per l'opció, és a dir, quin hauria de ser el preu a temps $t = 0$ el preu de l'opció amb benefici $(S_T - K)_+$ a temps T ? Aquest és el problema de fixar el preu de l'opció.

2. Com pot el venedor de l'opció generar una quantitat $(S_T - K)_+$ a temps T ? Aquest és el problema de la cobertura de l'opció.

Siguin ara C_t i P_t respectivament els preus del call i del put a temps t. A causa de l'absència d'oportunitat d'arbitratge, tenim l'equació següent sobre la paritat call/put: per a tot $t < T$,

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}.$$

2.2 Processos estocàstics a temps continu

Definició 2.2. *Un procés estocàstic és una familia $(X_t)_{t\in[0,T]}$ de variables aleatòries indexades pel temps.*

El paràmetre t, si és continu, dóna lloc a un procés estocàstic a temps continu. També, per a cada element ω, es defineix la trajectòria $X(\omega) : t \to X_t(\omega)$ com una funció en el temps.

Interpretant t com el temps, ens podem adonar que els esdeveniments resulten menys incerts a mesura que tenim més informació al llarg del temps. Per descriure de manera formal com la informació es dóna a conèixer al llarg del temps de manera progressiva, caldrà que introduïm el concepte de filtració.

Definició 2.3. *Sigui* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espai de probabilitat. Una filtració* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *és una família creixent de* σ*-àlgebres incloses en* $\mathcal{A}$.

Definició 2.4. *Sigui* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espai de probabilitat. Diem que un procés* $(X_t)_{t\geq 0}$ *està adaptat a una filtració* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *si per a qualsevol* t, X_t *és* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*

Definició 2.5. *Sigui* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espai de probabilitat i* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *una filtració en aquest espai. Una família adaptada* $(M_t)_{t\geq 0}$ *de variables aleatòries integrables (és a dir,* $E(|M_t|) < +\infty$*) per a tot* t *és una martingala si*

$$E(M_t|F_s) = M_s, \ \forall s \leq t.$$

2.3 Moviment brownià

Definició 2.6. *Un procés estocàstic a temps continu en un espai* E *sobre una* σ*-àlgebra* ϵ *és una família* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *de variables aleatòries definides en un espai de probabilitat* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *amb valors en un espai mesurable* $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

Definició 2.7. τ *és un temps d'aturada respecte la filtració* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *si* τ *és una variable aleatòria a* $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ *tal que per a tot* $t \geq 0$

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Definició 2.8. *Un procés estocàstic* $\{X_t, t \geq 0\}$ *es diu que té increments independents si per a tot* $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$ *les variables aleatòries* $X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_m} - X_{t_{m-1}}$ *son independents.*

Definició 2.9. *Un procés estocàstic* $\{X_t, t \geq 0\}$ *es diu que té increments estacionaris si per a tot* $t_1 < t_2$*, la llei de la variable aleatòria* $X_{t_2} - X_{t_1}$ *és la mateixa que la llei de la variable aleatòria* $X_{t_2 - t_1} - X_0$.

Definició 2.10. *Un moviment brownià és un procés estocàstic continu a valors reals* $(X_t)_{t\geq 0}$*, amb increments estacionaris i independents.*

També necessitem definir un moviment brownià respecte la filtració $(\mathcal{F}_t)$.

Definició 2.11. *Un procés estocàstic continu a valors reals és un* $(\mathcal{F}_t)$*-moviment brownià si satisfà:*

1. *Per a tot* $t \geq 0$, X_t *és* $(\mathcal{F}_t)$*-mesurable.*
2. *Si* $s \leq t$, $X_t - X_s$ *és independent de la* σ*-àlgebra* $\mathcal{F}_s$
3. *Si* $s \leq t$, $X_t - X_s$ *i* $X_{t-s} - X_0$ *tenen la mateixa llei.*

Teorema 2.12. *Si* $(X_t)_{t\geq 0}$ *és un moviment brownià, aleshores* $X_t - X_0$ *és una variable aleatòria normal amb esperança* rt *i variància* $\sigma^2 t$*, on* r *i* σ *son constants reals i* $\sigma > 0$.

La demostració d'aquest teorema es pot trobar a [1].

Definició 2.13. *Un moviment brownià és estàndard si* $X_0 = 0$ *q.s.,* $E(X_t) = 0$ *i* $E(X_t^2) = t$*. Generalment, si no s'especifica, estarem parlant d'un moviment brownià estàndard.*

Proposició 2.14. *Sigui* $(W_t)_{t\geq 0}$ *un moviment brownià (estàndard). Aleshores*

1. *Per a* $0 \leq s \leq t$ $Var(W_t - W_s) = t - s$.

2. *Per a tot* $0 \le s,t$ $E(W_s W_t) = \min(s,t)$.

3. *Sigui* f_t *la densitat de* W_t. *Tenim*

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right).$$

4. *Sigui* $f_{t_1,\dots,t_n}$ *la densitat conjunta del vector* $(W_{t_1},\dots,W_{t_n})$ *amb* $0 < t_1 < \cdots < t_n$. *Aleshores*

$$f_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n) = f_{t_1}(x_1) f_{t_2-t_1}(x_2-x_1)\cdot\cdots\cdot f_{t_n-t_{n-1}}(x_n-x_{n-1}).$$

La demostració d'aquest teorema es pot trobar a [1].

El teorema següent es coneix com a teorema de caracterització de Lévy:

Teorema 2.15. *Sigui* $(W_t)_{t\ge 0}$ *un procés estocàstic amb trajectòries contínues quasi segurament i amb* $W_0 = 0$ *quasi segurament. Sigui* $\mathcal{F}_t = \sigma\langle W_u, 0 \le u \le t\rangle$. *Aleshores, son equivalents:*

1. $(W_t)_{t\ge 0}$ *és un moviment brownià*

2. $\{W_t, \mathcal{F}_t, t \ge 0\}$ *i* $\{W_t^2 - t, \mathcal{F}_t, t \ge 0\}$ *son martingales.*

La demostració d'aquest teorema es pot trobar a [1].

Introduim ara les integrals estocàstiques:

Teorema 2.16. *Considerem un* $(\mathcal{F}_t)$*-moviment brownià* $(W_t)_{0\le t\le T}$ *i un* $(\mathcal{F}_t)$*-procés adaptat* $(H_t)_{0\le t\le T}$. *Podem definir una integral estocàstica*

$$\left(\int_0^t H_s dW_s\right)_{0\le t\le T}$$

sempre i quan

$$\int_0^T H_s^2 ds < +\infty \text{ q.s. en } P.$$

La demostració d'aquest teorema es pot trobar a [1].

Observació 2.17. *Per construcció, el procés* $(\int_0^t H_s dW_s)_{0\le t\le T}$ *és una martingala si*

$$E\left(\int_0^T H_s^2 ds\right) < +\infty.$$

De fet, $E(\int_0^T H_s^2 ds) < +\infty$ *se satisfà si i només si*

$$E(\sup_{0\le t\le T}(\int_0^t H_s dW_s)^2) < \infty.$$

2.4 Processos de Itô

S'anomena càlcul de Itô al càlcul diferencial basat en la integral estocàstica. El seu resultat més important es coneix com la fórmula de Itô. En particular, la fórmula de Itô ens permet derivar una funció $t \to f(W_t)$ si f és dues vegades derivable.

Definició 2.18. *Sigui $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espai de probabilitat filtrat i $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-moviment brownià. $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ és un procés de Itô a valors reals si es pot escriure com*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s \ \ q.s. \ en \ \mathbb{P} \ \ \forall t \leq T,$$

on:

1. X_0 *és* $\mathcal{F}_0$*-mesurable.*
2. $(K_t)_{0\leq t\leq T}$ *i* $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ *son* $\mathcal{F}_t$*-processos adaptats.*
3. $\int_0^T |K_s| ds < +\infty$ *q.s. en P.*
4. $\int_0^T |H_s|^2 ds < +\infty$ *q.s. en P.*

Proposició 2.19. *Si $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ és una martingala contínua tal que*

$$M_t = \int_0^t K_s ds, \ amb \ \int_0^T |K_s| ds < +\infty \ q.s. \ en \ P,$$

aleshores

$$\forall t \leq T, \ M_t = 0.$$

La demostració d'aquest teorema es pot trobar a [1].

Observació 2.20. *Això implica que és un procés de Itô té descomposició única; és a dir, si*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s = X_0' + \int_0^t K_s' ds + \int_0^t H_s' dW_s$$

aleshores

$$X_0 = X_0' \ dP \ q.s. H_s = H_s' \ ds \times dP \ q.s. \ K_s = K_s^{'} \ ds \times dP \ q.s.$$

A més, si $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ és una martingala de la forma $X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$, aleshores $K_t = 0 \ dt \times dP$ q.s.

Teorema 2.21. *Sigui $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ un procés de Itô*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s,$$

i f una funció C^2. Aleshores

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s,$$

on, per definició,

$$\langle X, X \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds,$$

i

$$\int_0^t f'(X_s) dX_s = \int_0^t f'(X_s) K_s ds + \int_0^t f'(X_s) H_s dW_s.$$

D'aquesta manera, si $(t,x) \to f(t,x)$ és una funció dues vegades diferenciable respecte x i una vegada respecte t, i si les derivades parcials a més són contínues respecte (t,x), aleshores la fórmula de Itô esdevé

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_s'(s, X_s) ds + \int_0^t f_x'(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}''(s, X_s) d\langle X, X \rangle_s.$$

La demostració d'aquest teorema es pot trobar a [1].

3 El model de Black-Scholes

El model de Black-Scholes (1973) tracta el problema de fixar els preus i la cobertura d'una opció europea (call o put) sobre accions que no paguen dividends.

S'assumeix que la dinàmica dels preus de les accions segueix un procés de Itô amb característiques constants. Encara que el model fa algunes simplificacions importants respecte el funcionament real del mercat financer, és un bon punt de partida sobre el qual fer ampliacions, com veurem quan estudiem, més endavant, els models de Merton i de Kou.

En aquesta secció seguirem [1] i [2].

3.1 Descripció del model

El model de Black-Scholes, que serveix per a descriure el comportament dels preus, és un model a temps continu amb un actiu de risc (una acció amb preu S_t a temps t) i un actiu sense risc S_t^0 que satisfà l'equació diferencial ordinària següent:

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt,$$

on r és una constant no negativa. En aquest cas, observem que r és el tipus d'interès instantani. Imposem, a més, que $S_0^0 = 1$, de manera que $S_t^0 = e^{rt}$ per a tot $t \geq 0$.

Assumim, en aquest model, que el preu de les accions varia seguint l'equació diferencial estocàstica següent:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t), \tag{3.1}$$

on μ i σ representen dues constants i (B_t) és el moviment brownià estàndard.

El model funciona en un interval $[0, T]$ on T determina el temps de venciment de l'acció.

Teorema 3.1. *L'equació* (3.1) *té la solució següent:*

$$S_t = S_0 exp\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t,$$

on S_0 és el preu a temps 0.

Demostració. Volem trobar les solucions $(S_t)_{t\geq 0}$ de

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_s(\mu dt + \sigma dB_s). \tag{3.2}$$

Notem que això és el mateix que escriure:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t), \quad S_0 = x_0. \tag{3.3}$$

De fet, volem trobar un procés adaptat $(S_t)_{t\geq 0}$ tal que les integrals $\int_0^t S_s ds$ i $\int_0^t S_s dB_s$ existeixen i per a tot temps t

$$S_t = x_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dB_s \quad q.s.\ en\ P.$$

Per fer més simples els càlculs, posem $Y_t = log(S_t)$, on S_t és una solució de (3.1). S_t és un procés de Itô amb $K_s = \mu S_s$ i $H_s = \sigma S_s$. Apliquem la fórmula de Itô a $f(x) = log(x)$, obtenim

$$log(S_t) = log(S_0) + \int_0^t \frac{dS_s}{S_s} + \frac{1}{2}\int_0^t (\frac{-1}{S_s^2})\sigma^2 S_s^2 ds.$$

Fent servir (3.2), obtenim que

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t (\mu - \sigma^2/2)dt + \int_0^t \sigma B_t,$$

i finalment

$$Y_t = log(s_t) = log(S_0) + (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t.$$

Tenint això en consideració, tot indica que

$$S_t = x_0 exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t)$$

és una solució de l'equació (3.1). Naturalment, ho comprovarem:

Tenim $S_t = f(t, B_t)$ amb

$$f(t,x) = x_0 exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma x).$$

Podem aplicar la fórmula de Itô, obtenim com a resultat que

$$S_t = f(t, B_t) = f(0, B_0) + \int_0^t f_s^{'}(s, B_s)ds$$
$$+ \int_0^t f_x^{'}(s, B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}^{''}(s, W_s)\, d\langle W, W\rangle_s.$$

A més, com que $\langle W, W\rangle_t = t$, podem escriure

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s(\mu - \sigma^2/2)ds + \int_0^t S_s \sigma dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t S_s \sigma^2 ds.$$

I en conclusió,

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s \mu ds + \int_0^t S_s \sigma dW_s.$$

□

Més exactament, es té que el procés (S_t) és solució de l'equació (3.1) si i només si el procés $log(S_t)$ segueix un moviment brownià, no necessàriament estàndard. Per la definició de moviment brownià, el procés $log(S_t)$ té les propietats de continuïtat de trajectòries, increments independents i increments estacionàris. Aquestes tres propietats expressen en termes concrets les hipòtesis de Black-Scholes sobre el comportament del preu de les accions.

Definició 3.2. *Una estratègia d'inversió és un procés $\phi = (\phi_t)_{0\le t\le T} = ((H_t^0, H_t))$ amb valors a $\mathbb{R}^2$, adaptat a la filtració natural $\mathcal{F}_t$ del moviment brownià. Les components H_t^0 i H_t son les quantitats dels actius sense risc i amb risc respectivament a la cartera temps t. El valor de la cartera a temps t ve donat per:*

$$V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t.$$

L'equació que defineix la condició d'autofinançament en el cas continu és

$$dV_t(\phi) = H_t^0 dS_t^0 + H_t dS_t.$$

Observació 3.3. *Ens convindrà també establir com a condicions:*

$$\int_0^T |H_t^0| dt < +\infty \quad i \quad \int_0^T H_t^2 dt < +\infty \quad (q.s.)$$

Aleshores, la integral

$$\int_0^T H_t^0 dS_t^0 = \int_0^T H_t^0 r e^{rt} dt$$

està ben definida, així com també ho està

$$\int_0^T H_t dS_t = \int_0^T H_t S_t \mu dt + \int_0^T \sigma H_t S_t dB_t,$$

ja que l'aplicació $t \to S_t$ és contínua, i per tant acotada en $[0,T]$ quasi segurament.

Definició 3.4. *Una estratègia autofinançada és una parella de processos adaptats $(H_t^0)_{0\le t\le T}$ i $(H_t)_{0\le t\le T}$ que satisfan:*

1. $\int_0^T |H_t^0|\, dt + \int_0^T H_t^2 dt < \infty$,
2. $H_t^0 S_t^0 + H_t S_t = H_0^0 S_0^0 + H_0 S_0 + \int_0^t H_u^0 dS_u^0 + \int_0^t H_u dS_u$

   quasi segurament per a tot $t \in [0,T]$.

Proposició 3.5. *Sigui $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ el preu descomptat de l'actiu de risc. Sigui $\phi = ((H_t^0, H_t))_{0\le t\le T}$ un procés adaptat amb valors a $\mathbb{R}^2$ que satisfà (3.1) quasi segurament. Siguin $V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$ i $\tilde{V}_t(\phi) = e^{-rt} V_t(\phi)$.*
Aleshores, ϕ defineix una estratègia autofinançada si i només si:

$$\tilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_u d\tilde{S}_u$$

quasi segurament per a tot $t \in [0,T]$.

Demostració. Considerem una estratègia autofinançada ϕ. De la igualtat (que s'obté en derivar):

$$d\tilde{V}_t(\phi) = -r\tilde{V}_t(\phi)dt + e^{-rt} dV_t(\phi)$$

deduïm que:

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t(\phi) &= -re^{-rt}(H_t^0 e^{rt} + H_t S_t)dt + e^{-rt} H_t^0 d(e^{rt}) + e^{-rt} H_t dS_t \\ &= H_t(-re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t) \\ &= H_t d\tilde{S}_t. \end{aligned}$$

Integrant obtenim el resultat que volíem provar.

□

Enunciem ara el Teorema de Girsanov, que farem servir més endavant.

Teorema 3.6 (Teorema de Girsanov)**.** *Sigui* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}, \mathbb{P})$ *un espai de probabilitat amb una filtració natural d'un moviment brownià estàndard* $(B_t)_{0\le t\le T}$ *en un interval* $[0,T]$*. Sigui* $(M_t)_{0\le t\le T}$ *un procés adaptat que satisfà* $\int_0^T M_s^2 ds < +\infty$ *q.s. i tal que el procés* $(L_t)_{0\le t\le T}$ *definit per*

$$L_t = exp\left(-\int_0^t M_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t M_s^2 ds\right)$$

és una martingala. Aleshores, en la probabilitat $\mathbb{P}^{(L)}$ *amb densitat* L_T *relativa a* $\mathbb{P}$*, el procés* $(W_t)_{0\le t\le T}$ *definit per* $W_t = B_t + \int_0^t M_s ds$ *és a un moviment brownià estàndard.*

La prova d'aquest teorema es pot trobar a [3].

3.2 Preus i cobertura de les opcions

Considerem de nou el model que hem definit a l'inici. Ens proposem demostrar que existeix una probabilitat equivalent a $\mathbb{P}$ on el preu descomptat d'una acció, $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$ és una martingala. De l'equació diferencial estocàstica que satisfà (S_t), derivant, obtenim,

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t \\ &= \tilde{S}_t((\mu - r)dt + \sigma dB_t. \end{aligned}$$

Si escrivim $W_t = B_t + (\mu - r)t/\sigma$,

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma dW_t. \tag{3.4}$$

Pel Teorema de Girsanov, aplicat a $\Theta_t = (\mu - r)/\sigma$, existeix una probabilitat $\mathbb{P}^*$ equivalent a $\mathbb{P}$ on $(W_t)_{0\le t\le T}$ és un moviment brownià estàndard. Aleshores, en la probabilitat $\mathbb{P}^*$ deduim de la igualtat anterior que $\tilde{S}_t$ és una martingala i que

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 exp(\sigma W_t - \sigma^2 t/2).$$

Tractarem amb opcions europees. Definim una opció europea com una variable aleatòria no negativa i $\mathcal{F}_t$-mesurable, que representarem per h. Si convé, podem escriure h com $f(S_t)$, on $f(x) = (x-K)_+$ en el cas del call i $f(x) = (K-x)_+$ en el cas del put.

Definició 3.7. *Una estratègia d'inversió* $\phi = ((H_t^0, H_t))_{0\le t\le T}$ *és admisible si és una estratègia d'autofinançament i si el preu descomptat* $\tilde{V}_t(\phi) = H_t^0 + H_t S_t$ *de la corresponent cartera és, per a tot t, no negatiu i tal que* $sup_{t\in[0,T]}\tilde{V}_t$ *és quadrat integrable en* $\mathbb{P}^*$*.*

Definició 3.8. *Una opció és replicable si el saldo a data de venciment és igual al valor final d'una estratègia admisible.*

L'opció definida per h, per ser replicable, ha de ser de quadrat integrable en $\mathbb{P}^*$. En el cas del put, on $h = (S_T - K)_+$, se satisfà aquesta propietat, ja que $E^*(S_T^2) < \infty$, però en el cas del call, h ha d'estar acotada.

Enunciem el Teorema de representació de martingales brownianes:

Teorema 3.9 (Teorema de representació de martingales brownianes)**.** *Sigui* $(B_t)_{0\le t\le T}$ *un moviment brownià a* $\mathbb{R}$ *i* $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ *la seva filtració natural. Si Y és una variable aleatòria de quadrat integrable, aleshores existeix un procés* $\mathcal{F}_t$*-mesurable* H_s *únic tal que*

$$E(Y|\mathcal{F}_t) = E(Y) + \int_0^t H_s dB_s.$$

La prova d'aquest teorema es pot trobar a [9].

Una conseqüència d'aquest teorema és el corol·lari següent:

Corol·lari 3.10. *Si U és una variable aleatòria $\mathcal{F}_T$-mesurable i quadrat integrable, es pot escriure com*

$$U = E(U) + \int_0^T H_s dB_s \quad q.s.,$$

on (H_t) és un procés adaptat tal que $E(\int_0^T H_t^2) < +\infty$.

La prova d'aquest teorema es pot trobar a [9].

Teorema 3.11. *En el model Black-Scholes qualsevol opció definida per una variable aleatòria no negativa i $\mathcal{F}_t$-mesurable h, que sigui quadrat integrable en la probabiitat $\mathbb{P}^*$, és replicable, i el seu valor a temps t per a qualsevol cartera replicable ve donada per*

$$V_t = E^*(e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}_t).$$

Per tant, el valor de l'opció a temps t es pot definir per l'expressió $E^*(e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}_t)$.

Demostració. Assumim que hi ha una estratègia admisible (H^0, H), que replica l'opció. El valor a temps t de la cartera (H_t^0, H_t) ve donat per

$$V_t = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t,$$

i, per hipòtesi, tenim $V_t = h$. Sigui, a més, $\tilde{V}_t = V_t e^{-rt}$ el valor descomptat

$$\tilde{V}_t = H_t^0 + H_t \tilde{S}_t.$$

Com que l'estratègia és autofinançada, per la Prop. 3.5 i la igualtat (3.4), obtenim que

$$\begin{aligned}\tilde{V}_t &= V_0 + \int_0^t H_u d\tilde{S}_u \\ &= V_0 + \int_0^t H_u \sigma \tilde{S}_u dW_u.\end{aligned}$$

En la probabilitat $\mathbb{P}^*$, $sup_{t\in[0,T]}\tilde{V}_t$ és quadrat integrable (per definició d'estratègia admisible). A més, la igualtat anterior ens mostra que el procés $(\tilde{V}_t)$ és una integral estocàstica relativa a (W_t). Se segueix que $(\tilde{V}_t)$ és una martingala quadrat integrable en P^*. Aleshores

$$\tilde{V}_t = E^*(\tilde{V}_T|\mathcal{F}_t),$$

i per tant

$$V_t = E^*(e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}_t). \tag{3.5}$$

Acabem de provar que si una cartera (H^0, H) replica l'opció definida per h, el valor ve donat per la igualtat (3.5). Falta encara veure que l'opció és replicable, és a dir, cal trobar processos (H_t^0) i (H_t) que defineixin una estratègia admisible tal que

$$H_t^0 S_t^0 + H_t S_t = E^*(e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}_t).$$

En la probabilitat $\mathbb{P}^*$, el procés definit per $M_t = E^*(e^{-rT}h|\mathcal{F}_t)$ és una martingala quadrat integrable. La filtració $(\mathcal{F}_t)$, que és la filtració natural de (B_t), també és la filtració natural de (W_t) i, pel teorema de representació de martingales brownianes, existeix un procés adaptat $(K_t)_{0\leq t\leq T}$ tal que $E^*(\int_0^T K_s^2 ds) < +\infty$ i

$$M_t = M_0 + \int_0^t K_s dW_s \; q.s. \;\; \forall t \in [0,T]$$

L'estratègia $\phi = (H^0, H)$, amb $H_t = K_t/(\sigma \tilde{S}_t)$ i $H_t^0 = M_t - H_t\tilde{S}_t$, és aleshores, per la Prop. 3.5 i la igualtat (3.4) una estratègia d'autofinançament. El seu valor a temps t ve donat per

$$V_t(\phi) = e^{rt}M_t = E^*(e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}_t).$$

Notem que $V_t(\phi)$ és una variable aleatòria no negativa, amb $sup_{t\in[0,T]}\tilde{V}_t$ és quadrat integrable en P^* i que $V_T(\phi) = h$. Hem trobat, doncs, una estratègia admisible que replica h.

□

Quan una variable aleatòria h és acotada i es pot escriure com $h = f(S_T)$, podem expressar el valor d'una opció V_t a temps t com una funció que depèn de t i S_t. Tenim, en efecte,

$$V_t = E^*\left(e^{-r(T-t)}f(S_T)|\mathcal{F}_t\right)$$

$$= E^*\left(e^{-r(T-t)}f\left(S_t e^{r(T-t)}e^{\sigma(W_T-W_t)-(\sigma^2/2)(T-t)}\right)\Big|\,\mathcal{F}_t\right).$$

La variable aleatòria S_t és $\mathcal{F}_t$-mesurable i, en P^*, $W_T - W_t$ és independent de $\mathcal{F}_t$. Per tant, tenim

$$V_t = F(t, S_t),$$

on

$$F(t,x) = E*\left(e^{-r(T-t)}f\left(e^{r(T-t)}e^{\sigma(W_T-W_t)-(\sigma^2/2)(T-t)}\right)\right). \tag{3.6}$$

Com que, en P^*, $W_T - W_t$ és una normal amb esperança 0 i variància $T-t$,

$$F(t,x) = e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(xe^{(r-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}}\right)\frac{e^{-y^2/2}dy}{\sqrt{2\pi}}.$$

La funció F es pot calcular de manera explícita pels calls i els puts. En el cas del call, on $f(x) = (x-K)_+$, per la igualtat (3.6), tenim que

$$F(t,x) = E^*\left(e^{-r(T-t)}\left(xe^{(r-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)} - K\right)_+\right)$$

$$= E\left(xe^{\sigma\sqrt{\theta}g-\sigma^2\theta/2} - Ke^{-r\theta}\right)_+,$$

on g és una variable gaussiana estàndard i $\theta = T-t$.

Posem

$$d_1 = \frac{log(x/K) + (r + \sigma^2/2)\theta}{\sigma\sqrt{\theta}} \quad i \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\theta}.$$

Amb aquesta notació, tenim que

$$\begin{aligned} F(t,x) &= E\left[\left(xe^{\sigma\sqrt{\theta}g - \sigma^2\theta/2} - Ke^{-r\theta}\right)1_{\{g+d_2\geq 0\}}\right] \\ &= \int_{-d_2}^{+\infty}\left(xe^{\sigma\sqrt{\theta}g-\sigma^2\theta/2} - Ke^{-r\theta}\right)\frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dy \\ &= \int_{-\infty}^{d_2}\left(xe^{-\sigma\sqrt{\theta}g-\sigma^2\theta/2} - Ke^{-r\theta}\right)\frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dy. \end{aligned}$$

Escrivint aquesta expressió com la diferència de dues integrals i en la primera fent servir el canvi de variable $z = y + \sigma\sqrt{\theta}$, obtenim

$$F(t,x) = xN(d_1) - Ke^{-r\theta}N(d_2),$$

on

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{-x^2/2}dx.$$

Utilitzant la mateixa notació i amb càlculs similars, també es pot calcular el preu del put, que és igual a:

$$F(t,x) = Ke^{-r\theta}N(-d_2) - xN(-d_1).$$

Una de les principals característiques del model de Black-Scholes, i que és una de les raons que justifiquen el seu èxit, és el fet que la fórmula de fixar preus, així com la fórmula de cobertura que donarem després, depenen només d'un paràmetre "no observable", que és la volatilitat σ.

Abans, en la demostració del teorema, hem fet servir el teorema de representació de martingales brownianes per provar l'existència d'una cartera replicable. En la pràctica, però, aquest teorema d'existència no és suficient i cal construir realment una cartera replicable per donar cobertura a l'opció.

Quan una opció està definida per una variable aleatòria $h = f(S_t)$, veurem que és possible trobar de forma explícita una cartera de cobertura. Una cartera replicable ha de tenir, a qualsevol temps t, un valor descomptat igual a

$$\tilde{V}_t = e^{-rt}F(t, S_t),$$

on F és la funció definida per

$$F(t, S_t) = E^*(e^{-r(T-t)}f(xe^{r(T-t)}e^{\sigma(W_T - W_t) - (\sigma^2/2)(T-t)})).$$

Veiem que la funció F és de classe C^∞ a $[0,T]\times\mathbb{R}$. Si escrivim

$$\tilde{F}(t,x) = e^{-rt}F(t, xe^{rt}),$$

tenim que $\tilde{V}_t = \tilde{F}(t, \tilde{S}_t)$ i, per $t < T$, per la fórmula de Itô,

$$\tilde{F}(t,\tilde{S}_t) = \tilde{F}(0,\tilde{S}_0) + \int_0^t \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(u,\tilde{S}_u)d\tilde{S}_u$$

$$+\int_0^t \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}(u,\tilde{S}_u)du + \int_0^t \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2}(u,\tilde{S}_u)d\langle \tilde{S},\tilde{S}\rangle_u.$$

De la igualtat $d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t dW_t$, deduim que

$$d\langle \tilde{S},\tilde{S}\rangle_u = \sigma^2 \tilde{S}_u^2 du,$$

de manera que $\tilde{F}(t,\tilde{S}_t)$ es pot escriure com

$$\tilde{F}(t,\tilde{S}_t) = \tilde{F}(0,\tilde{S}_0) + \int_0^t \sigma \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(u,\tilde{S}_u)\tilde{S}_u dW_u + \int_0^t K_u du.$$

Com que $\tilde{F}(t,\tilde{S}_t)$ és una martigala a P^*, el procés K_u és forçosament nul. Per tant,

$$\begin{aligned}\tilde{F}(t,\tilde{S}_t) &= \tilde{F}(0,\tilde{S}_0) + \int_0^t \sigma \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(u,\tilde{S}_u)\tilde{S}_u dW_u \\ &= \tilde{F}(0,\tilde{S}_0) + \int_0^t \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(u,\tilde{S}_u)d\tilde{S}_u.\end{aligned}$$

El candidat natural pel procés de cobertura H_t és doncs

$$H_t = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(t,\tilde{S}_t) = \frac{\partial F}{\partial x}(t,S_t).$$

Si posem que $H_t^0 = \tilde{F}(t,\tilde{S}_t - H_t\tilde{S}_t)$, la cartera (H_t^0, H_t) és autofinançada i, a més, el seu valor descomptat és $\tilde{V}_t = \tilde{F}(t,\tilde{S}_t)$.

4 El procés de Poisson

Abans de passar directament a estudiar el model de Merton, és necessari introduïr alguns conceptes i propietats del procés de Poisson. El procés de Poisson és un exemple fonamental de procés estocàstic amb trajectòries discontínues.

4.1 Variables aleatòries exponencials

Definició 4.1. *Es diu que una variable aleatòria positiva Y segueix una distribució exponencial de paràmetre λ si té una funció de densitat de probabilitat de la forma*

$$\lambda e^{-\lambda y} 1_{y \geq 0}.$$

La seva funció de distribució ve donada per

$$\forall y \in [0, y[, \ F_Y(y) = P(Y \leq y) = 1 - exp(-\lambda y).$$

Observació 4.2. *A més, F_Y és invertible i la seva inversa és*

$$\forall y \in [0, 1], \ F_Y^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda} ln(1 - y).$$

En conseqüència, si U segueix una distribució uniforme en $[0, 1]$, aleshores $-\frac{1}{\lambda} lnU$ segueix una distribució exponencial de paràmetre λ.

Proposició 4.3. *Si T és una variable aleatòria exponencial,*

$$\forall t, s > 0, \ P(T > t + s | T > t) = \frac{\int_{t+s}^{\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy}{\int_{t}^{\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy} = P(T > s).$$

Això vol dir que donat un temps qualsevol T, la distribució de $T - t$, sabent que $T > t$, té la mateixa distribució que la pròpia T. Aquesta propietat es coneix com absència de memòria.

Proposició 4.4. *Sigui $T \geq 0$ una variable aleatòria tal que*

$$\forall t, s > 0, \ P(T > t + s | T > t) = P(T > s).$$

Aleshores T segueix una distribució exponencial.

Demostració. Sigui $g(t) = P(T > t)$. Fent servir la fórmula de Bayes, obtenim que g és una funció multiplicativa:

$$\forall t, s > 0, \ g(t + s) = P(T > t + s | T > t) = P(T > s) = g(s) g(t).$$

Com que $1 - g$ és una funció de distribució, aleshores g és decreixent i contínua per la dreta. Juntament amb la propietat de la multiplicativitat, això implica que $g(t) = exp(-\lambda t)$ per a algun $\lambda > 0$. □

4.2 Distribució de Poisson

Definició 4.5. *Es diu que una variable aleatòria a valors naturals N segueix una distribució de Poisson amb paràmetre λ si*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(N=n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}.$$

Es pot demostrar que la seva funció generatriu de moments és

$$M(u) = exp[\lambda(e^u - 1)].$$

Proposició 4.6. *Si $(\tau_i)_{i\geq 1}$ son variables aleatòries exponencials independents de paràmetre λ, aleshores per a cada $t>0$ la variable aleatòria*

$$N(t) = \inf\{n \geq 1, \sum_{i=1}^{n} \tau_i > t\}$$

segueix una distribució de Poisson de paràmtre λt:

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(N_t = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Demostració. Sigui $T_k = \sum_{i=1}^{k} \tau_i \quad \forall k$. La densitat de $(T_1, \ldots, T_k)$ ve donada per

$$f_{(T_1,T_2,\ldots,T_k)} = \lambda^k 1_{0<t_1<\cdots<t_k} e^{-\lambda t_k} dt_1 \ldots dt_k.$$

Com que $P(N_t = n) = P(T_n \leq t < T_{n+1})$, es pot calcular com:

$$\begin{aligned} P(N_t = n) &= \int_{0<t_1<\ldots t_n<t<t_{n+1}} \lambda^n e^{-\lambda t_{n+1}} dt_1 \ldots dt_n dt_{n+1} \\ &= \lambda^n e^{-\lambda t} \int_{0<t_1<\ldots t_n<t} dt_1 \ldots dt_n = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}. \end{aligned}$$

□

Proposició 4.7. *La distribució de Poisson és estable per convolucions: Si Y_1 i Y_2 son variables de Poisson independents de paràmetres λ_1 i λ_2, aleshores $Y_1 + Y_2$ també segueix una llei de Poisson de paràmetre $\lambda_1 + \lambda_2$.*

Demostració. És tan immediat com calcular les funcions generatrius de moments i notar que $M_{Y_1+Y_2} = M_{Y_1}M_{Y_2}$. En efecte,

$$M_{Y_1+Y_2} = exp[(\lambda_1+\lambda_2)(e^u-1)] = exp[\lambda_1(e^u-1)]exp[\lambda_2(e^u-1)] = M_{Y_1}M_{Y_2}.$$

□

En particular, per qualsevol enter n, una variable aleatòria de Poisson Y de paràmetre λ es pot expressar com una suma de n variables aleatòries de Poisson independents Y_i de paràmetre λ/n. Aquesta propietat es pot interpretar com que una variable aleatòria de Poisson es pot dividir en un nombre arbitrari de variables aleatòries i.i.d.

4.3 Processos puntuals i de comptatge

El procés de Poisson forma part de dues classes més grans de processos, que son els processos puntuals i els de comptatge.

Els processos puntuals serveixen per a modelitzar processos que depenen de punts en un subespai $E \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Assumim que hi ha una sèrie de punts distribuits a l'atzar a E i ens interessarà la funció que compti el nombre aleatori de punts que hi ha en cada subconjunt afitat $A \subset E$.

Definició 4.8. *Considerem $E \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Suposem que tenim una família $\{X_n, n \in T\}$, $X_n : \Omega \to E$ de punts aleatoris sobre l'espai E. Aleshores, fixat $A \subset E$, definim la mesura de comptatge*

$$N(\cdot) = \sum_n 1_{X_n}(\cdot)$$

amb

$$N(A) = \sum_n 1_{X_n}(A)$$

el nombre de punts aleatoris que estan al conjunt A.

Un cas particular dels processos puntuals son els processos de comptatge:

Definició 4.9. *Un procés de comptatge és un procés aleatori $\{N_t, t \geq 0\}$ que satisfà:*

1. *$N_0 = 0$ i $N_t \geq 0$ per a tot t.*
2. *N_t és un enter.*
3. *Si $s < t$, aleshores $N_s \leq N_t$.*

Notem que si $s < t$, aleshores $N_t - N_s$ és el nombre d'esdeveniments que han succeït en l'interval $[s, t]$.

4.4 El procés de Poisson

Definició 4.10. *Sigui $(\tau_i)_{i \geq 1}$ una successió de variables aleatòries exponencials independents de paràemtre λ i $T_n = \sum_{i=1}^n \tau_i$. El procés $\{N_t, t \geq 0\}$ definit per*

$$N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{\{T_n \leq t\}}$$

es diu que és un procés de Poisson de paràmetre λ.

El procés de Poisson és un procés de comptatge: compta el nombre el temps aleatoris (T_n) que es produeixen entre 0 i t, on $(T_n - T_{n-1})_{n \geq 1}$ és una successió de variables exponencials.

A continuació presentem unes quantes propietats del procés de Poisson:

Proposició 4.11. *Sigui $(N_t)_{t \geq 0}$ un procés de Poisson.*

1. *Per a tot $t > 0$, N_t és finit quasi segurament.*
2. *Per a qualsevol ω, el camí $t \to N_t(\omega)$ està definit a trossos i incrementa per salts de mida 1.*
3. *Els camins $t \to N_t$ son continus per la dreta amb límit per l'esquerra.*

4. *Per a qualsevol $t > 0$, $N_{t-} = N_t$ amb probabilitat 1.*
5. *(N_t) és continu en probabilitat.*
6. *Per a qualsevol $t > 0$, N_t segueix una distribució de Poisson de paràmetre λt:*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(N_t = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

7. *La funció característica de N_t ve donada per*

$$E[e^{iuN_t}] = exp\{\lambda t(e^{iu} - 1)\},\ \forall u \in \mathbb{R}.$$

8. *(N_t) té increments independents: per a tot $t_1 < ... < t_n, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}, \ldots, N_{t_2} - N_{t_1}, N_{t_1}$ son variables aleatòries independents.*
9. *Els increments de N son homogenis: per a tot $t > s, N_t - N_s$ té la mateixa distribució que N_{t-s}.*
10. *(N_t) té la propietat de Markov:*

$$\forall t > s,\ E[f(N_t)|N_u, u \leq s] = E[f(N_t)|N_s].$$

Demostració. Faig les demostracions de 8), 9) i 10), que m'han semblat més interessants. Les altres es poden trobar a [4].

8) Sigui $0 < t_1 < ... < t_n$ i calculem

$$P(N_{t_1} = k_1, N_{t_2} - N_{t_1} = k_2, ..., N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = k_n). \tag{4.1}$$

Definim $j_n = \sum_{i \leq n} k_i$ per $i \geq 1$. Aleshores la probabilitat anterior es pot tornar a escriure com

$$P(T_{j_1} \leq t_1 < T_{j_1+1}, T_{j_2} \leq t_2 < T_{j_2+1}, ..., T_{j_n} \leq t_n < T_{j_n+1}).$$

Condicionant a $T_{j_n} < t_n < T_{j_n+1}$, $(T_1, T_2, ..., T_{j_n})$ estan distribuides com un ordre estadístic de j_n variables aleatòries uniformes a $[0, t_n]$. Aleshores, la probabilitat condicionada

$$P(T_{j_1} < t_1 < T_{j_1+1}, T_{j_2} < t_2 < T_{j_2+1}, ...|T_{j_n} < t_n < T_{j_n+1}) \tag{4.2}$$

és igual a la probabilitat que, donades j_n variables aleatòries independents $U_1, ..., U_{j_n}$ uniformement distribuides en $[0, t_n]$, k_1 d'elles estiguin a l'interval $[0, t_1]$, k_2 d'elles estiguin a l'interval $[t_1, t_2]$, etc. La probabilitat que U_k pertanyi a $[t_{i-1}, t_i]$ és $(t_i - t_{i-1})/t_n$, i per tant la probabilitat condicionada (4.2) ve doanda per:

$$\frac{j_n!}{t_n^{j_n}}\frac{t_1^{k_1}}{k_1!}\prod_{i=2}^{n}\frac{(t_i - t_{i-1})^{k_i}}{k_i!}.$$

Per obtenir (4.1) multipliquem aquesta expressió per la densitat de N_{t_n}, que és una distribució de Poisson de paràmetre λt_n. Després de simplicar, obtenim

$$\lambda^{j_n} e^{-\lambda t_n}\frac{t_1^{k_1}}{k_1!}\prod_{i=2}^{n}\frac{(t_i - t_{i-1})^{k_i}}{k_i!}.$$

Finalment, fent la substitució $j_n = k_1+k_2+...+k_n$ veiem que (4.1) factoritza en un producte de n termes:

$$(3.1) = \frac{(\lambda t_1)^{k_1} e^{-\lambda t_1}}{k_i!} \prod_{i=2}^{n} \frac{(\lambda(t_i - t_{i-1}))^{k_i} e^{-\lambda(t_i - t_{i-1})}}{k_i!}.$$

La llei conjunta dels increments té una forma de producte, i per tant tenim la independència.

9) A més, cada terme del producte és una densitat de la llei de Poisson de paràmetre $\lambda(t_i - t_{i-1})$, amb la qual cosa tenim la homogeneïtat dels increments.

10) La propietat de Markov se segueix de la independència dels increments:

$$E[f(N_t)|N_u, u \leq s] = E[f(N_t - N_s + N_s)|N_u, u \leq s] = E[f(N_t - N_s + N_s)|N_s],$$

ja que $N_t - N_s$ és independent de $N_u, u \leq s$.

□

Proposició 4.12. *Si $(N_t^1)_{t\geq 0}$ i $(N_t^2)_{t\geq 0}$ son processos de Poisson independents de paràmetres λ_1 i λ_2 respectivament, aleshores $(N_t^1 + N_t^2)_{t\geq 0}$ és un procés de Poisson de paràmetre $\lambda_1 + \lambda_2$.*

La demostració d'aquest teorema es pot trobar a [4].

Proposició 4.13. *Considerem la família de σ-àlgebres $\mathcal{F}_t = \sigma\langle N_u, u \leq t\rangle$. Aleshores*

$$\{N_t - \lambda t, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$$

és una martingala.

Demostració. Clarament $N_t - \lambda t$ és $\mathcal{F}_t$-mesurable i es comprova fàcilment que és integrable

$$E(|N_t - \lambda t|) \leq E(N_t) + \lambda t < +\infty.$$

Ens cal, per tant, calcular, per a $0 < s < t$

$$E(N_t - \lambda t|\mathcal{F}_s) = E(N_t|\mathcal{F}_s) - \lambda t = E(N_t - N_s|\mathcal{F}_s) + E(N_s|\mathcal{F}_s) - \lambda t$$

$$= E(N_t - N_s) + N_s - \lambda t = \lambda(t-s) + N_s - \lambda t = N_s - \lambda s,$$

on hem utilitzat que $N_t - N_s$ és independent de $\mathcal{F}_s$ i que N_s és $\mathcal{F}_s$-mesurable.

□

Definició 4.14. *Un procés de Poisson compost de paràmetre $\lambda > 0$ i distribució de mida dels salts f és un procés estocàstic X_t definit per*

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

on les mides dels salts Y_i son independents i idènticament distribuides amb distribució f i (N_t) és un procés de Poisson de paràmetre λ independent de $(Y_i)_{i\geq 1}$.

Algunes propietats del procés de Poisson compost, i que es poden deduïr ràpidament de la definició, son les següents:

1. Les trajectòries de X son funcions constants a trossos que amb continuïtat per la dreta i límit per l'esquerra.

2. Els temps de salt $(T_i)_{i\geq 1}$ tenen la mateixa llei que els temps de salt d'un procés de Poisson N_t: es poden expressar com a sumes parcials de variables aleatòries exponencials independents de paràmetre λ.

3. La mida dels salts $(Y_i)_{i\geq 1}$ son independents i idènticament distribuides amb llei f.

De fet, el propi procés de Poisson es pot veure com un procés de Poisson compost a $\mathbb{R}$ tal que $Y_i \equiv 1$.

5 El model de Merton

En el model de Black-Scholes, el preu de l'acció és una funció contínua. No obstant això, en la pràctica es poden produïr canvis bruscos en els preus. Per modelitzar aquest tipus de fenòmens cal introduïr els processos estocàstics discontinus.

Com que el model presenta discontinuïtats de salt, ja no és possible estimar el preu de les accions per mitjà d'una cartera replicable com en el cas continu. Una manera de tractar el problema de fixar els preus i la cobertura consisteix a definir la noció de risc i escollir un preu i una cobertura amb les quals es minimitzi aquest risc.

5.1 Dinàmica dels actius amb risc

L'objectiu és modelitzar un mercat financer en el qual hi ha un actiu sense risc amb preu $S_t^0 = e^{rt}$ a temps t i un actiu de risc el preu del qual salta segons les proporcions $U_1, ..., U_j, ...$ a temps $\tau_1, ..., \tau_j, ...$ i que segueix el model de Black-Scholes entre salts. A més, assumirem que els τ_j's corresponen als temps de salt d'un procés de Poisson.

Per ser del tot rigurosos, considerem un espai de probabilitats $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ i definir un moviment brownià (estàndard) $(W_t)_{t\geq 0}$, un procés de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ de paràmetre λ i una successió $(U_j)_{j\geq 1}$ de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes que prenen valors a $]-1, +\infty[$. Assumim tanmateix que $(W_t)_{t\geq 0}$, $(N_t)_{t\geq 0}$ i $(U_j)_{j\geq 1}$ son independents.

Per a tot $t \geq 0$ denotem per $\mathcal{F}_t$ la σ-àlgebra generada per les variables aleatòries W_s, N_s per a $s \leq t$ i $U_j 1_{\{j \leq N_t\}}$ per a $j \leq 1$. Es pot veure que $(W_t)_{t\leq 0}$ és un moviment brownià (estàndard) respecte la filtració $(\mathcal{F}_t)$, que (N_t) és un procés adaptat a aquesta filtració i que també, per a tot $t > s$, $N_t - N_s$ és independent de la σ-àlgebra $\mathcal{F}_s$. Com que les variables $U_j 1_{(j\leq N_t)}$ son independents i $\mathcal{F}_t$-mesurables, deduïm que, a temps t, l'amplitud relativa dels salts que tenen lloc abans de t és coneguda. Notem també que els τ_j's son temps d'aturada de $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, ja que $\{\tau_j \leq t\} = \{N_t \geq j\}$.

El preu de l'actiu de risc a temps t, X_t, es pot descriure de la manera següent: el procés $(X_t)_{t\geq 0}$ és un procés adaptat, continu per la dreta i satisfà que:

1. En els intervals $[\tau_j, \tau_{j+1}]$

$$dX_t = X_t(\mu dt + \sigma dW_t);$$

2. A temps τ_j, el salt de X_t ve donat per

$$\Delta X_{\tau_j} = X_{\tau_j} - X_{\tau_j^-} = X_{\tau_j^-} U_j,$$

i per tant, $X_{\tau_j} = X_{\tau_j^-}(1 + U_j)$.

Tenim, doncs, que per a $t \in [0, \tau_1]$

$$X_t = X_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t},$$

i el límit per l'esquerra a temps τ_1 ve donat per

$$X_{\tau_1^-} = X_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)\tau_1 + \sigma W_{\tau_1}}$$

i

$$X_{\tau_1} = X_0(1 + U_1)e^{(\mu-\sigma^2/2)\tau_1+\sigma W_{\tau_1}}.$$

Aleshores, per a $[\tau_1, \tau_2]$,

$$X_t = X_{\tau_1} e^{(\mu-\sigma^2/2)(t-\tau_1)+\sigma(W_t-W_{\tau_1})}$$

$$= X_{\tau_1^-}(1 + U_1)e^{(\mu-\sigma^2/2)(t-\tau_1)+\sigma(W_t-W_{\tau_1})}$$

$$= X_0(1 + U_1)e^{(\mu-\sigma^2/2)t+\sigma W_t}.$$

Repetint aquest esquema, obtenim:

$$X_t = X_0(\prod_{j=1}^{N_t}(1 + U_j))e^{(\mu-\sigma^2/2)t+\sigma W_t},$$

on admtenem que $\prod_{j=1}^{0} = 1$.

El procés $(X_t)_{t\geq 0}$ és continu per la dreta, adaptat i té un nombre finit de discontinuïtats a cada interval $[0, t]$. Es pot demostrar també que per a tot $t \geq 0$ satisfà

$$X_t = X_0 + \int_0^t X_s(\mu ds + \sigma dW_s) + \sum_{j=1}^{N_t} X_{\tau_j^-} U_j \quad q.s\ en\ \mathbb{P}. \tag{5.1}$$

Veurem que generalment és impossible donar una cobertura perfecta a les opcions. El problema és que per a $T < +\infty$ hi ha infinites probabilitats equivalents a P a $\mathcal{F}_t$ en les quals el preu $(e^{-rt}X_t)_{0\leq t\leq T}$ és una martingala.

Pel que ve a partir d'ara suposarem que, en $\mathbb{P}$, el procés $(e^{-rt}X_t)_{0\leq t\leq T}$ és una martingala. Ens permetrà determinar algunes estratègies de cobertura amb risc minimal.

Per deduir $E(X_t|\mathcal{F}_s)$ necessitarem el lema següent:

Lema 5.1. *Per a tot $s \geq 0$, les σ-àlgebres*

$$\sigma\left(U_{N_s+1}, U_{N_s+2}, ..., U_{N_s+k}, ...\right)$$

i $\mathcal{F}_s$ son independents.

La demostració es pot trobar a [1].

Això el que vol dir és que les amplituds relatives dels salts que tenen lloc després de l'instant de temps s son independents de la σ-àlgebra $\mathcal{F}_s$.

Suposem ara que $E(|U_1|) < +\infty$ i posem $\tilde{X}_t = e^{-rt}X_t$. Aleshores

$$E(\tilde{X}_t|\mathcal{F}_s) = \tilde{X}_s E\left(e^{(\mu-r-\sigma^2/2)(t-s)+\sigma(W_t-W_s)} \prod_{j=N_s+1}^{N_t} (1 + U_j) \middle| \mathcal{F}_s \right)$$

$$= \tilde{X}_s E\left(e^{(\mu-r-\sigma^2/2)(t-s)+\sigma(W_t-W_s)} \prod_{j=1}^{N_t-N_s} (1 + U_{N_s+j}) \middle| \mathcal{F}_s \right)$$

$$= \tilde{X}_s E\left(e^{(\mu-r-\sigma^2/2)(t-s)+\sigma(W_t-W_s)} \prod_{j=1}^{N_t-N_s} (1 + U_{N_s+j}) \right),$$

fent servir el Lema 5.1 i que $W_t - W_s$ i $N_t - N_s$ son independents de la σ-àlgebra $\mathcal{F}_s$. Per tant,

$$\begin{aligned} E(\tilde{X}_t|\mathcal{F}_s) &= \tilde{X}_s e^{(\mu-r)(t-s)} E\left(\prod_{j=1}^{N_t-N_s}(1+U_j)\right) \\ &= \tilde{X}_s e^{(\mu-r)(t-s)} e^{\lambda(t-s)E(U_1)}. \end{aligned}$$

Ara està clar que $(\tilde{X}_t)$ és una martingala si i només si

$$\mu = r - \lambda E(U_1).$$

Per poder tractar amb els termes que apareixen com a resultat dels salts en les estratègies de cobertura, necessitem dos lemes més. Denotem per ν la llei de les variables aleatòries U_j's, definida a $\mathbb{R}$.

Lema 5.2. *Sigui $\phi(y,z)$ una funció mesurable de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ tal que per a cada nombre real z la funció $y \to \phi(y,z)$ és contínua a $\mathbb{R}^d$, i sigui $(Y_t)_{t\geq 0}$ un procés continu per l'esquerra, que pren valors a $\mathbb{R}^d$, adaptat a la filtració $(\mathcal{F}_t)_{t\leq 0}$. Assumim que per a tot $t > 0$*

$$E\left(\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} \nu(dz)\phi^2(Y_s,z)\right) < +\infty.$$

Aleshores el procés M_t definit per

$$M_t = \sum_{j=1}^{N_t} \phi(Y_{\tau_j}, U_j) - \lambda \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} \nu(dz)\phi(Y_s,z)$$

és una martingala de quadrat integrable i

$$M_t^2 - \lambda \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} \nu(dz)\phi^2(Y_s,z)$$

és una martingala.

(Per convenció, $\sum_{j=1}^{0} = 1$.)

Demostració. Assumim primer que ϕ és acotada i posem

$$C = \sup_{(y,z)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}} |\phi(y,z)|.$$

Aleshores tenim que

$$\left|\sum_{j=1}^{N_t} \phi(Y_{\tau_j}, U_j)\right| \leq CN_t \quad i \quad \left|\int_0^t \int \nu(dz)\phi(Y_s,z)\right| \leq Ct.$$

Per tant, M_t és de quadrat integrable. Fixem s i t, amb $s < t$, i posem

$$Z = \sum_{j=N_s+1}^{N_t} \phi(Y_{\tau_j}, U_j).$$

Donada una partició $\rho = (s_0 = s < s_1 < ... < s_m = t)$ sobre l'interval $[s,t]$, associem

$$Z^\rho = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=N_{s_i}+1}^{N_{s_i+1}} \phi(Y_{s_i}, U_j).$$

La continuïtat per l'esquerra de $(Y_t)_{t\geq 0}$ i la continuïtat de ϕ respecte y impliquen que Z^ρ convergeix quasi segurament a Z quan la malla de la partició ρ tendeix a 0. A més, $|Z^\rho| \leq C(N_t - N - s)$; se segueix que hi ha convergència en L^1 i inclús en L^2. Tenim

$$E(Z^\rho|\mathcal{F}_s) = E\left(\sum_{i=0}^{m-1} E(Z_{i+1}|\mathcal{F}_{s_i}) \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right) \tag{5.2}$$

establint

$$Z_{i+1} = \sum_{j=N_{s_i}+1}^{N_{s_{i+1}}} \phi(Y_{s_i}, U_j) = \sum_{j=1}^{N_{s_{i+1}}-N_{s_i}} \phi(Y_{s_i}, U_{N_{s_i}+j}).$$

Fent servir el Lema 5.1 i que Y_{s_i} és $\mathcal{F}_{s_i}$-mesurable, tenim que $E(Z_{i+1}|\mathcal{F}_{s_i}) = \bar{\phi}_i(Y_{s_i})$, on $\bar{\phi}_i(y)$ està definida per

$$\bar{\phi}_i(y) = E\left(\sum_{j=1}^{N_{s_{i+1}}-N_{s_i}} \phi(y, U_{N_{s_i}+j}) \right).$$

Per tant, $\bar{\phi}_i(y)$ és l'esperança d'una suma aleatòria i tenim que

$$\bar{\phi}_i(y) = \lambda(s_{i+1} - s_i) \int_{\mathbb{R}} \phi(y,z) d\nu(z).$$

De (5.2) deduïm que

$$E(Z^\rho|\mathcal{F}_s) = E\left(\sum_{i=0}^{m-1} \bar{\phi}_i(Y_{s_i}) \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right) = E\left(\sum_{i=0}^{m-1} \lambda(s_{i+1} - s_i) \int_{\mathbb{R}} \phi(Y_{s_i}, z) d\nu(z) | \mathcal{F}_s \right).$$

Quan la malla de ρ tendeix a 0, obtenim

$$E\left(\sum_{j=N_s+1}^{N_t} \phi(Y_{\tau_j}, U_j) \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right) = E\left(\lambda \int_s^t du \int_{\mathbb{R}} \phi(Y_u, z) d\nu(z) \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right),$$

que prova que M_t és una martingala. Ara posem

$$\bar{Z}^\rho = \sum_{i=0}^{m-1} E(Z_{i+1}|\mathcal{F}_{s_i}).$$

Podem escriure

$$\bar{Z}^\rho = \sum_{i=0}^{m-1} \bar{\phi}_i(Y_{s_i}) = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda(s_{i+1} - s_i) \int_{\mathbb{R}} \phi(Y_{s_i}, z) d\nu(z).$$

A més,

$$E\left((z^\rho - \bar{Z}^\rho)^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right) = E\left[\left(\sum_{i=0}^{m-1} [Z_{i+1} - E(Z_{i+1}|\mathcal{F}_{s_i})] \right)^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right]$$

$$= E\left(\sum_{i=0}^{m-1} [Z_{i+1} - E(Z_{i+1}|\mathcal{F}_{s_i})]^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right) + 2\sum_{i<j} E\left((Z_{i+1} - E(Z_{i+1}|\mathcal{F}_{s_i}))(Z_{j+1} - E(Z_{j+1}|\mathcal{F}_{s_j})) \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right).$$

Prenent l'esperança condicionada respecte $\mathcal{F}_{s_j}$ i fent servir que, per a $i < j$, Z_{i+1} és $\mathcal{F}_{s_{i+1}}$-mesurable i per tant també $\mathcal{F}_{s_j}$-mesurable, veiem que la segona suma és 2, amb la qual cosa tenim

$$E\left((Z^\rho - \bar{Z}^\rho)^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right) = E\left(\sum_{i=0}^{m-1} [Z_{i+1} - E(Z_{i+1}|\mathcal{F}_{s_i})]^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right)$$
$$= E\left(\sum_{i=0}^{m-1} E\left([Z_{i+1} - E(Z_{i+1}|\mathcal{F}_{s_i})]^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_{s_i} \right) \middle|\, \mathcal{F}_s \right).$$

Fent servir una altra vegada el Lema 1, tenim

$$E\left[(Z_{i+1} - E(Z_{i+1}|\mathcal{F}_{s_i}))^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_{s_i} \right] = V(Y_{s_i}),$$

on V és la funció definida per

$$V(y) = Var\left(\sum_{j=1}^{N_{s_{i+1}} - N_{s_i}} \phi(y, U_{N_{s_i}+j}) \right),$$

i també

$$V(y) = \lambda(s_{i+1} - s_i) \int_{\mathbb{R}} \phi^2(y, z) d\nu(z).$$

Per tant,

$$E\left((Z^\rho - \bar{Z}^\rho)^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right) = E\left(\sum_{i=0}^{m-1} \lambda(s_{i+1} - s_i) \int_{\mathbb{R}} \phi^2(Y_{s_i}, z) d\nu(z) \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right),$$

i per tant, quan la malla de la partició ρ tendeix a 0,

$$E\left[(M_t - M_s)^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right] = E\left[\lambda \int_s^t du \int_{\mathbb{R}} \phi^2(Y_u, z) d\nu(z) \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right]. \tag{5.3}$$

Com que $(M_t)_{t\geq 0}$ és una martingala quadrat integrable, obtenim

$$E\left[(M_t - M_s)^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right] = E(M_t^2 + M_s^2 - 2M_t M_s|\mathcal{F}_s) = E(M_t^2 - M_s^2|\mathcal{F}_s)$$

i la igualtat (5.3) implica que $M_t^2 - \lambda \int_0^t du \int_{\mathbb{R}} \phi^2(Y_u, z) d\nu(z)$ és una martingala.

Si no assumim que ϕ sigui acotada, sinó que

$$E\left(\int_0^t ds \int z\phi^2(Y_s, z) d\nu \right) < +\infty,$$

per qualsevol t, podem introduïr les funcions acotades ϕ^n's definides per

$$\phi^n(y,z) = \inf(n, \sup(-n, \phi(y,z))),$$

i les martingales definides per

$$M_t^n = \sum_{j=1}^{N_t} \phi^n(Y_{\tau_j}, U_j) - \lambda \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} \nu(dz)\phi^n(Y_s, z).$$

Com que $E(\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} \nu(dz)(\phi^n(Y_s,z) - \phi(Y_s,z))^2)$ tendeix a 0 quan $n \to \infty$, la successió $(M_t^n)_{n\geq 1}$ és de Cauchy a L^2 i com que M_t^n tendeix a M_t quasi segurament, M_t és quadrat integrable i, prenent límits, el lema se satisfà per ϕ.

□

Lema 5.3. *Amb les mateixes hipòtesis incials i notació que al Lema 5.2, sigui* $(A_t)_{t\geq 0}$ *un procés adaptat tal que* $E\left(\int_0^t A_s^2 ds\right) < +\infty$ *per a qualsevol* t*. Establim que* $L_t = \int_0^t A_s dW_s$ *i, com en el Lema 5.2,*

$$M_t = \sum_{j=1}^{N_t} \phi(Y_{\tau_j}, U_j) - \lambda \int_0^t ds \int \nu(dz)\phi(Y_s, z).$$

Aleshores el producte $L_t M_t$ *és una martingala.*

Demostració. Al Lema 5.2 hem vist que n'hi ha prou amb provar el lema per una ϕ acotada. Fixem $s < t$ i denotem per $\rho = (s_0 = s < s_1 < \ldots < s_m = t)$ una partició en l'interval $[s,t]$. Tenim que

$$E[(L_t M_t - L_s M_s)|\mathcal{F}_s] = E\left[\sum_{i=0}^{m-1} E((L_{s_{i+1}} M_{s_{i+1}} - L_{s_i} M_{s_i})|\mathcal{F}_{s_i}) \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right].$$

D'altra banda, com que $(L_t)_{t\geq 0}$ i $(M_t)_{t\geq 0}$ son martingales,

$$E((L_{s_{i+1}} M_{s_{i+1}} - L_{s_i} M_{s_i})|\mathcal{F}_{s_i}) = E((L_{s_{i+1}} - L_{s_i})(M_{s_{i+1}} - M_{s_i})|\mathcal{F}_{s_i}),$$

d'on

$$E((L_t M_t - L_s M_s)|\mathcal{F}_s) = E(\Lambda^\rho|\mathcal{F}_s)$$

amb

$$\Lambda^\rho = \sum_{i=0}^{m-1} (L_{s_{i+1}} - L_{s_i})(M_{s_{i+1}} - M_{s_i}).$$

Deduïm que

$$|\Lambda^\rho| \leq \left(\sup_{0\leq i\leq m-1} |L_{s_{i+1}} - L_{s_i}|\right) \sum_{i=0}^{m-1} |M_{s_{i+1}} - M_{s_i}|$$

$$\leq \sup_{0\leq i\leq m-1} |L_{s_{i+1}} - L_{s_i}| \left(\sum_{j=N_s+1}^{N_t} |\phi(Y_{\tau_j}, U_j)| \; \lambda \int_s^t du \int_{\mathbb{R}} |\phi(Y_s, z)| d\nu(z)\right)$$

$$\leq \sup_{0\leq i\leq m-1} |L_{s_{i+1}} - L_{s_i}| (C(N_t - N_s) + \lambda C(t-s)),$$

amb $C = \sup_{y,z} |\phi(y,z)|$. Per la continuïtat de $t \to L_t$, veiem que Λ^ρ tendeix quasi segurament a 0, ja que la malla de la partició ρ tendeix a 0. A més,

$$|\Lambda^\rho| \leq 2 \sup_{s\leq u\leq t} |L_u|(C(N_t - N_s) + \lambda C(t-s)).$$

La variable aleatòria $\sup_{s\leq u\leq t} |L_u|$ pertany a L^2, per la desigualtat de Doob, així com $N_t - N_s$ també hi pertany. Deduïm, doncs, que Λ^ρ tendeix a 0 en L^1, i en conseqüència,

$$E[(L_t M_t - L_s M_s)|\mathcal{F}_s] = 0$$

□

5.2 Preus i cobertura de les opcions

Tornem al model que hem introduit al començament. Assumim que els U_i's son quadrat integrables i que

$$\mu = r - \lambda E(U_1) = r - \lambda \int z\nu(dz), \tag{5.4}$$

cosa que implica que el procés $(\tilde{X}_t)_{t\geq 0} = (e^{-rt}X_t)_{t\geq 0}$ és una martingala.

Farem servir un teorema sobre processos de Poisson, que és el següent:

Teorema 5.4. *Sigui $(V_n)_{n\geq 1}$ una successió de variables aleatòries no negatives, independents i idènticament distribuides i N una variable aleatòria amb valors a $\mathbb{N}$, seguint una llei de Poisson amb paràmetre λ, independent de la successió $(V_n)_{n\geq 1}$. Aleshores*

$$E\left(\prod_{n=1}^{N} V_n\right) = e^{\lambda(E(V_1)-1)}.$$

Observació 5.5. *Notem que*

$$E(X_t^2) = X_0^2 E\left(exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t)\prod_{j=1}^{N_t}(1+U_j)\right)^2$$

i, en conseqüencia, fent servir el Teorema 5.4, tenim que

$$E(X_t^2) = X_0^2 exp((\sigma^2 + 2r)t) exp(\lambda t E(U_1^2)).$$

Per tant, el procés $(\tilde{X})_{t\geq 0}$ és una martingala de quadrat integrable.

A partir d'ara fixarem un horitzó finit T. Definim una estratègia, igual que al model Black-Scholes, com un procés adaptat $((H_t^0, H_t))_{0\leq t\leq T}$ que pren valors a $\mathbb{R}^2$ i que representa la quantitat d'actius que es tenen al llarg del temps.

No obstant això, per tenir en compte els salts, necessitarem que els processos (H_t^0) i (H_t) siguin continus per l'esquerre. Com que el procés $(X_t)_{t\geq 0}$ ja és de per si continu per la dreta això voldrà dir que només podrem reaccionar davant de l'esdeveniment dels salts després que s'hagiin produït.

El valor a temps t de l'estratègia ϕ ve donat per $H_t^0 e^{rt} + H_t X_t$ i l'estratègia es diu que és d'autofinançament si

$$dV_t = H_t^0 re^{rt}dt + H_t dX_t,$$

és a dir, si recordem l'equació (5.1),

$$dV_t = H_t^0 re^{rt}dt + H_t X_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$

entre els temps dels salts i el temps de salt τ_j, V_t salta la quantitat $\Delta V_{\tau_j} = H_{\tau_j}\Delta X_{\tau_j} = H_{\tau_j}U_j X_{\tau_j^-}$. Precisament, la condició d'autofinançament es pot escriure com:

$$V_t = H_t^0 e^{rt} + H_t X_t = V_0 + \int_0^t H_s^0 re^{rs}ds + \int_0^t H_s X_s(\mu ds + \sigma dW_s) + \sum_{j=1}^{N_t} H_{\tau_j}U_j X_{\tau_j^-}. \tag{5.5}$$

Serà necessari, per això, imposar que $\int_0^T |H_s^0|ds + \int_0^T H_s^2 ds < +\infty$ q.s.

De fet, ens retringirem al cas de les estratègies admisibles:

Definició 5.6. *Una estratègia admisible és un procés*

$$\phi = ((H_t^0, H_t))_{0\le t\le T}$$

adaptat, continu per l'esquerra, amb valors reals a $\mathbb{R}^2$ que satisfà la igualtat (5.5) q.s. per a tot $t \in [0,T]$ i tal que

$$\int_0^T |H_s^0|ds < +\infty \text{ q.s. en } P \text{ i } E\left(\int_0^T H_s^2 X_s^2 ds\right) < +\infty.$$

Proposició 5.7. *Sigui $(H_t)_{0\le t\le T}$ un procés adaptat continu per l'esquerre tal que*

$$E\left(\int_0^T H_s^2 X_s^2 ds\right) < +\infty,$$

i sigui $V_0 \in \mathbb{R}$. Existeix un únic procés $(H_t)_{0\le t\le T}$ tal que la parella $((H_t^0, H_t))_{0\le t\le T}$ és una estratègia admisible amb valor inicial V_0. El valor descomptat a temps t d'aquesta estratègia ve donat per

$$\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t H_s \tilde{X}_s \sigma dW_s + \sum_{j=1}^{N_t} H_{\tau_j}U_j \tilde{X}_{\tau_j^-} - \lambda \int_0^t ds H_s \tilde{X}_s \int z\nu(dz).$$

Demostració. Si la parella $((H_t^0, H_t))_{0\le t\le T}$ defineix una estratègia admisible el seu valor a temps t ve donat per $V_t = Y_t + Z_t$, amb $Y_t = V_0 + \int_0^t H_s^0 re^{rs}ds + \int_0^t H_s X_s(\mu ds + \sigma dW_s)$ i $Z_t = \sum_{j=1}^{N_t} H_{\tau_j}U_j X_{\tau_j^-}$. Derivant el terme $e^{-rt}Y_t$,

$$e^{-rt}V_t = V_0 + \int_0^t (-re^{-rs})Y_s ds + \int_0^t e^{-rs}dY_s + e^{-rt}Z_t. \tag{5.6}$$

A més, el terme $e^{-rt}Z_t$ es pot escriure com:

$$
\begin{aligned}
e^{-rt}Z_t &= \sum_{j=1}^{N_t} e^{-rt} H_{\tau_j} U_j X_{\tau_j^-} \\
&= \sum_{j=1}^{N_t} (e^{-r\tau_j} + \int_{\tau_j}^{t} (-re^{-rs}) ds) H_{\tau_j} U_j X_{\tau_j^-} \\
&= \sum_{j=1}^{N_t} e^{-r\tau_j} H_{\tau_j} U_j X_{\tau_j^-} + \sum_{j=1}^{N_t} \int_0^t ds 1_{\{\tau_j \le s\}} (-re^{-rs}) H_{\tau_j} U_j X_{\tau_j^-} \\
&= \sum_{j=1}^{N_t} e^{-r\tau_j} H_{\tau_j} U_j X_{\tau_j^-} + \int_0^t ds (-re^{-rs}) \sum_{j=1}^{N_t} H_{\tau_j} U_j X_{\tau_j^-} \\
&= \sum_{j=1}^{N_t} e^{-r\tau_j} H_{\tau_j} U_j X_{\tau_j^-} + \int_0^t (-re^{-rs}) Z_s ds.
\end{aligned}
$$

Posant això a l'equació (5.6) i expressant dY_s obtenim:

$$
\begin{aligned}
\tilde{V}_t &= V_0 + \int_0^t (-re^{-rs}) V_s ds + \int_0^t H_s^0 r ds + \int_0^t \int_0^t H_s \tilde{X}_s (\mu ds + \sigma dW_s) + \sum_{j=1}^{N_t} H_{\tau_j} U_j \tilde{X}_{\tau_j^-} \\
&= V_0 - \int_0^t r(H_s^0 + H_s \tilde{X}_s) ds + \int_0^t H_s^0 r ds + \int_0^t H_s \tilde{X}_s (\mu ds + \sigma dW_s) + \sum_{j=1}^{N_t} H_{\tau_j} U_j \tilde{X}_{\tau_j^-} \\
&= V_0 + \int_0^t H_s \tilde{X}_s ((\mu - r) ds + \sigma dW_s) + \sum_{j=1}^{N_t} H_{\tau_j} U_j \tilde{X}_{\tau_j^-},
\end{aligned}
$$

que, recordant l'expressió (5.4), condueix a

$$
\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t H_s \tilde{X}_s \sigma dW_s + \sum_{j=1}^{N_t} H_{\tau_j} U_j \tilde{X}_{\tau_j^-} - \lambda \int_0^t H_s \tilde{X}_s \, ds \int_{\mathbb{R}} z\nu(dz).
$$

Aleshores, donats V_0 i (H_t), l'únic procés (H_t^0) tal que $((H_t^0, H_t))_{0 \le t \le T}$ és una estratègia admisible amb valor inicial V_0 ve donat per

$$
H_t^0 = \tilde{V}_t - H_t \tilde{X}_t = -H_t \tilde{X}_t + V_0 + \int_0^t H_s \tilde{X}_s \sigma dW_s + \sum_{j=1}^{N_t} H_{\tau_j} U_j \tilde{X}_{\tau_j^-} - \lambda \int_0^t ds H_s \tilde{X}_s \int_{\mathbb{R}} z\nu(dz).
$$

D'aquesta fórmula veiem que el procés (H_t^0) és adaptat, que té límit per l'esquerra a qualsevol punt i que $H_t^0 = H_{t^-}^0$. Aquesta última propietat és clara si t no és un temps de salt τ_j i si t coincideix amb algun τ_j, aleshores tenim que

$$
H_{\tau_j}^0 - H_{\tau_j^-}^0 = -H_{\tau_j} \Delta \tilde{X}_{\tau_j} + H_{\tau_j} U_j \tilde{X}_{\tau_j^-} = 0.
$$

També, és evident que $\int_0^T |H_t^0| dt < \infty$ $q.s.$ A més, escrivint $H_t^0 e^{rt} + H_t X_t = e^{rt}(H_t^0 + H_t \tilde{X}_t)$ i integrant per parts, com hem fet més amunt, veiem que

$$((H_t^0, H_t))_{0\le t\le T}$$

defineix una estratègia admisible amb valor inicial V_0.

□

5.3 Preu dels calls i els puts

Considerem una opció europea amb data de venciment T definida per una variable aleatòria h que sigui $\mathcal{F}_T$-mesurable i quadrat integrable. Veient-ho des del punt de vista del venedor de la opció, aquest venedor ven el seu actiu a preu V_0 a temps 0 i aleshores segueix una estratègia admisible entre els temps 0 i T. Per la proposició anterior, aquesta estratègia queda determinada pel procés $(H_t)_{0\le t\le T}$ que representa la quantitat d'actiu amb risc. Si V_t representa el valor de l'estratègia a temps t, el desajust de la cobertura a temps de venciment T ve donat per $h - V_T$. Si aquesta quantitat és no negativa, el venedor de l'opció perd diners; si és negativa, aleshores els guanya.

Una manera de mesurar el risc és introduir la quantitat

$$R_0^T = E((e^{-rT}(h - V_T))^2).$$

Com que $(\tilde{V}_t)$ és una martingala, tenim que $E(e^{-rT}V_T) = V_0$. Aplicant la identitat $E(Z^2) = (E(Z))^2 + E((Z - E(Z))^2)$ a la variable aleatòria $Z = e^{-rT}(h - V_T)$, obtenim que

$$R_0^T = (E(e^{-rT}h) - V_0)^2 + E(e^{-rT}h - E(e^{-rT}h) - (\tilde{V}_T - V_0))^2. \tag{5.7}$$

Per la Proposició 5.7, la quantitat $\tilde{V}_T - V_0$ depèn només de (H_t) (i no de V_0). Si el venedor de l'opció intenta minimitzar el risc R_0^T, demanarà una prima de $V_0 = E(e^{-rT}h)$. Per tant, el terme $E(e^{-rT}h)$ és el valor inicial de qualsevol estratègia dissenyada per minimitzar el risc a data de venciment. Utilitzarem aquesta quantitat per definir el preu de l'opció associat a h. De manera similar, algú que vengui l'opció a temps $t > 0$ que vulgui minimitzar la quantitat $R_t^T = E((e^{-r(T-t)}(h - V_T))^2|\mathcal{F}_t)$ demanarà una prima de $V_t = E(e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}_t)$. Prendrem aquesta quantitat per a definir el preu de l'opció a temps t.

Intentarem donar una expressió explícita pel preu del call i del put amb preu d'exercici K. Assumirem, per tant, que podem escriure $h = f(X_T)$, amb $f(x) = (x-K)_+$ o $f(x) = (K-x)_+$. Com hem vist anteriorment, el preu de l'opció a temps t ve donat per

$$\begin{aligned} E(e^{r(T-t)}f(X_T)|\mathcal{F}_t) &= E\left(e^{r(T-t)}f\left(X_t e^{(\mu-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}\prod_{j=N_t+1}^{N_T}(1+U_j)\right)|\mathcal{F}_t\right) \\ &= E\left(e^{r(T-t)}f\left(X_t e^{(\mu-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}\prod_{j=1}^{N_T-N_t}(1+U_{N_t+j})\right)|\mathcal{F}_t\right). \end{aligned}$$

Pel Lema 5.1, juntament amb aquesta igualtat, es dedueix que

$$E(e^{-r(T-t)}f(X_T)|\mathcal{F}_t) = F(t, X_t),$$

on

$$F(t,x) = E\left(e^{r(T-t)}f\left(xe^{(\mu-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma W_{T-t}}\prod_{j=1}^{N_{T-t}}(1+U_j)\right)\right)$$
$$= E\left(e^{r(T-t)}f\left(xe^{(r-\lambda E(U_1)-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma W_{T-t}}\prod_{j=1}^{N_{T-t}}(1+U_j)\right)\right).$$

Si introduïm la funció

$$F_0(t,x) = E(e^{r(T-t)}f(xe^{(r-\sigma^2/2)(T_t)+\sigma W_{T-t}})),$$

que dóna el preu de l'opció per al model de Black-Scholes, tenim que

$$F(t,x) = E\left(F_0\left(t, xe^{-\lambda(T-t)E(U_1)}\prod_{j=1}^{N_{T-t}}(1+U_j)\right)\right). \tag{5.8}$$

Com que N_{T-t} és una variable independent de les U_j's, les quals segueixen una distribució de Poisson de paràmetre $\lambda(T-t)$, també podem escriure

$$F(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} E\left(F_0\left(t, xe^{-\lambda(T-t)E(U_1)}\prod_{j=1}^{n}(1+U_j)\right)\right)\frac{e^{\lambda(T-t)\lambda^n(T-t)^n}}{n!}.$$

5.4 Cobertura dels calls i els puts

Examinem ara el problema de la cobertura d'una opció $h = f(X_T)$, amb $f(x) = (x-K)_+$ o $f(x) = (K-x)_+$. Hem vist que el valor inicial de qualsevol estratègia admisible que es proposi minimitzar el risc R_0^T a temps de venciment T ve donat per l'expressió $V_0 = E(e^{-rT}h) = F(0, X_0)$. En aquest cas, per (5.7), obtenim que

$$R_0^T = E(e^{-rT}h - \tilde{V}_T)^2.$$

Volem determinar un procés $(H_t)_{0\le t\le T}$ tal que les quantitats de l'actiu de risc d'una cartera minimitzin R_0^T. Necessitem enunciar la proposició següent:

Proposició 5.8. *Sigui V_t el valor a temps t d'una estratègia admisible amb valor inicial $V_0 = E(e^{-rT}f(X_T)) = F(0,X_0)$, determinada per un procés $(H_t)_{0\le t\le T}$ pel que fa a les quantitats de l'actiu de risc. Aleshores el risc quadràtic a temps de venciment T, $R_0^T = E(e^{-rT}(f(X_T) - V_T)^2)$, ve donat per*

$$R_0^T = E\left(\int_0^T\left(\frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s) - H_s\right)^2\tilde{X}_s^2\sigma^2 ds\right)$$
$$= \int_0^T \lambda\int \nu(dz)e^{-2rs}(F(s,X_s(1+z)) - F(s,X_s) - H_s z X_s)^2).$$

Demostració. Per la Prop. 5.7, per a tot $t \le T$, tenim que

$$\tilde{V}_t = F(0,X_0) + \int_0^t \sigma H_s\tilde{X}_t dW_s + \sum_{j=1}^{N_t} H_{\tau_j}U_j\tilde{X}_{\tau_j^-} - \lambda\int_0^t \tilde{X}_s H_s E(U_1)ds. \tag{5.9}$$

D'altra banda, tenim que $\tilde{h} = e^{-rT} f(X_T) = e^{-rT} F(T, X_T)$. Introduim la funció $\tilde{F}$ definida per

$$\tilde{F}(t,x) = e^{-rt} F(t, xe^{rt}),$$

tal que $\tilde{F}(t, \tilde{X}_t) = E(\tilde{h}|\mathcal{F}_t)$. De fet, resulta que $F(t, \tilde{X}_t)$ és el preu descomptat de l'opció a temps t. De l'expressió (5.8) deduim que $\mathcal{F}(t,x)$ és C^2 a $[0,T[\times\mathbb{R}^+$ i, per la fórmula de Itô entre els temps dels salts, obtenim

$$\begin{aligned}\tilde{F}(t,\tilde{X}_t) &= F(0,X_0) + \int_0^t \frac{\partial \tilde{F}}{\partial s}(s,\tilde{X}_s)(ds) + \int_0^t \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(s,\tilde{X}_s)\tilde{X}_s(-\lambda E(U_1)ds + \sigma dW_s) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2}(s,\tilde{X}_s)\sigma^2 \tilde{X}_s^2 ds + \sum_{j=1}^{N_t} \tilde{F}(\tau_j, \tilde{X}_{\tau_j}) - \tilde{F}(\tau_j, \tilde{X}_{\tau_j^-}).\end{aligned} \tag{5.10}$$

De fet, la funció $\tilde{F}(t,x)$ és Lipschitz d'ordre 1 respecte x, ja que

$$\begin{aligned}|F(t,x) - F(t,y)| =&\leq E\left(e^{-r(T-t)} \left| f\left(xe^{(r-\lambda E(U_1)-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma W_{T-t}} \prod_{j=1}^{N_{T-t}} (1+U_j)\right)\right.\right. \\ &\left.\left. - f\left(ye^{(r-\lambda E(U_1)-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma W_{T-t}} \prod_{j=1}^{N_{T-t}} (1+U_j)\right)\right|\right) \\ &\leq |x-y| E\left(e^{\lambda E(U_1)(T-t)} e^{\sigma W_{T-t}-(\sigma^2/2)(T-t)} \prod_{j=1}^{N_{T-t}} (1+U_j)\right) \\ &= |x-y|.\end{aligned}$$

Se segueix que

$$\begin{aligned}E&\left(\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} \nu(dz)(\tilde{F}(s,\tilde{X}_s(1+z)) - \tilde{F}(s,\tilde{X}_s))^2\right) \\ &\leq E\left(\int_0^t ds \tilde{X}_s^2 \int_{\mathbb{R}} \nu(dz) z^2\right) < +\infty,\end{aligned}$$

i pel Lema 5.2, el procés

$$M_t = \sum_{j=1}^{N_t} \tilde{F}(\tau_j, \tilde{X}_{\tau_j}) - \tilde{F}(\tau_j, \tilde{X}_{\tau_j^-}) - \lambda \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} \Big(\tilde{F}(s,\tilde{X}_s(1+z)) - \tilde{F}(s,\tilde{X}_s)\Big) d\nu(z)$$

és una martingala quadrat integrable. També sabem que $\tilde{F}(s,\tilde{X}_s)$ és una martingala. Per tant, el procés $\tilde{F}(s,\tilde{X}_s) - M_t$ és una martingala i, de la igualtat (5.10), sabem que és un procés de Itô. Podem escriure-ho com una integral estocàstica:

$$\tilde{F}(s,\tilde{X}_s) - M_t = F(0,X_0) + \int_0^t \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(s,\tilde{X}_s)\tilde{X}_s \sigma dW_s. \tag{5.11}$$

Per les igualtats (5.9) i (5.11), obtenim que

$$\tilde{h} - \tilde{V}_T = M_T^{(1)} + M_T^{(2)},$$

amb

$$M_t^{(1)} = \int_0^t \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(s, \tilde{X}_s) - H_s \right) \sigma \tilde{X}_s dW_s$$

i

$$M_t^{(2)} = \sum_{j=1}^{N_t} \left(\tilde{F}(\tau_j, \tilde{X}_{\tau_j}) - \tilde{F}(\tau_j, \tilde{X}_{\tau_j^-}) - H_{\tau_j} U_j \tilde{X}_{\tau_j^-} \right)$$

$$-\lambda \int_0^t ds \int z \left(\tilde{F}(s, \tilde{X}_s(1+z)) - \tilde{F}(s, \tilde{X}_s) - H_s z \tilde{X}_s \right) d\nu.$$

Pel Lema 5.3, $M_t^{(1)} M_t^{(2)}$ és una martingala i, per tant,

$$E\left(M_t^{(1)} M_t^{(2)} \right) = M_0^{(1)} M_0^{(2)} = 0.$$

Per tant,

$$E(\tilde{h} - \tilde{V}_T) = E((M_T^{(1)})^2) + E((M_T^{(2)})^2)$$

$$= E\left(\int_0^T \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(s, \tilde{X}_s) H_s \right)^2 \tilde{X}_s^2 \sigma^2 ds \right)^2 + E((M_T^{(2)})^2),$$

i aplicant el Lema 5.2 una altra vegada

$$E((M_T^{(2)})^2) = E\left(\lambda \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} \nu(dz) \left(\tilde{F}(s, \tilde{X}_s(1+z)) - \tilde{F}(s, \tilde{X}_s) - H_s z \tilde{X}_s \right)^2 \right).$$

El risc a temps de venciment T ve donat per:

$$R_0^T = E\left(\int_0^T \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(s, \tilde{X}_s) - H_s \right)^2 \tilde{X}_s^2 \sigma^2 ds + \int_0^T \lambda \int_{\mathbb{R}} \nu(dz) \left(\tilde{F}(s, \tilde{X}_s(1+z)) - \tilde{F}(s, \tilde{X}_s) - H_s z \tilde{X}_s \right)^2 \, ds \right).$$

□

D'aquest resultat se segueix que el risc minimal s'obté quan H_s satisfà (quasi segurament en $\mathbb{P}$)

$$\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(s, \tilde{X}_s) - H_s \right) \tilde{X}_s^2 \sigma^2$$

$$+\lambda \int_{\mathbb{R}} \nu(dz) \left(\tilde{F}(s, \tilde{X}_s(1+z)) - \tilde{F}(s, \tilde{X}_s) - H_s z \tilde{X}_s \right) z \tilde{X}_s = 0.$$

N'hi ha prou amb minimitzar l'integrant respecte ds. Com que $(H_t)_{t \geq 0}$ ha de ser continu per l'esquerre, això ens condueix a

$$H_s = \Delta(s, X_{s^-})$$

amb

$$\Delta(s,x) = \frac{1}{\sigma^2 + \lambda \int \nu(dz) z^2} \left(\sigma^2 \frac{\partial F}{\partial x}(s,x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} \nu(dz) z \frac{(F(s, x(1+z)) - F(s,x))}{x} \right).$$

D'aquesta manera, obtenim un procés que satisfà $E(\int_0^T H_s^2 \tilde{X}_s^2 ds) < +\infty$ i que determina una estratègia admisible que minimitza el risc a temps de venciment. Recordem que en cas de no produir-se cap salt ($\lambda = 0$), aleshores recuperem la fórmula de cobertura del model de Black-Scholes i que, en aquest cas, la cobertura és perfecta, és a dir, $R_0^T = 0$.

6 Equilibri en models generals de difusió amb salts

Abans d'estudiar el model de Kou, és interessant comentar alguns aspectes generals sobre els models de difusió amb salts, entre els quals s'inclou també el model de Merton. En aquesta secció seguirem l'apartat 4 de l'article [5].

Ràpidament, fem algunes consideracions prèvies:

Considerem una economia típica amb expectatives racionals en la qual l'inversor intenta buscar una solució al problema de maximitzar

$$\max_c E\left(\int_0^\infty \mathcal{U}(c(t),t)dt\right),$$

on $\mathcal{U}(c(t),t)$ és la funció d'utilitat del procés de consum $c(t)$. Hi ha un procés de dotació extern que denotarem per $\delta(t)$, disponible per l'inversor. L'inversor també disposa d'una oportunitat d'invertir en una fiança (amb data de liquidació T_0, que ha de ser finita) sense pagar dividends. Si $\delta(t)$ és de Màrkov, es pot veure que, sota condicions suaus, el preu d'equilibri sobre les expectatives racionals (preu "shadow") d'aquesta fiança, que denotem per $p(t)$, ha de satisfer l'equació d'Euler

$$p(t) = \frac{E(\mathcal{U}_c(\delta(T),T)p(T)|\mathcal{F}_t)}{\mathcal{U}_c(\delta(t),t)}, \quad \forall T \in [t,T_0], \tag{6.1}$$

on $\mathcal{U}_c$ és la derivada parcial de $\mathcal{U}$ respecte c. A preu $p(t)$, l'inversor no canviarà mai les seves propietats actuals per invertir en una fiança, inclús tenint la oportunitat de fer-ho. Enlloc d'això, en l'equilibri l'inversor troba que és òptim el procés de dotació extern, és a dir, $c(t) = \delta(t)$ per a tot $t \geq 0$.

Deduirem de manera explícita les implicacions de l'equació d'Euler (6.1) quan $\delta(t)$ segueix un procés general de difusió amb salts sota una mesura $\mathbb{P}$:

$$\frac{d\delta(t)}{\delta(t-)} = \mu_1 dt + \sigma_1 dW_1(t) + d\left(\sum_{i=1}^{N(t)}(\tilde{V}_i - 1)\right), \tag{6.2}$$

on els $\tilde{V}_i \geq 0$ son variables no negatives independents i idènticament distribuïdes. A més, el procés de Poisson $N(t)$, el moviment brownià estàndard $W_1(t)$ i la mida dels salts $\tilde{V}$ son independents.

Per una qüestió de simplicitat, considerem la funció d'utilitat de la forma:

$$\mathcal{U}(c,t) = \begin{cases} e^{-\theta t}\frac{c^\alpha}{\alpha},\ si\ 0 < \alpha < 1, \\ -e^{-\theta t}log(c),\ si\ \alpha = 0, \end{cases}$$

on $\theta > 0$.

Sota aquestes condicions,

$$p(t) = \frac{E(e^{-\theta T}(\delta(T))^{\alpha-1}p(T)|\mathcal{F}_t)}{e^{-\theta t}(\delta(t))^{\alpha-1}}. \tag{6.3}$$

Assumirem que el preu descomptat θ hauria de ser prou gran per a satisfer

$$\theta > -(1-\alpha)\mu_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2(1-\alpha)(2-\alpha) + \lambda\zeta_1^{(\alpha-1)},$$

on $\zeta_1^\alpha = E((\tilde{V})^\alpha - 1)$.

Proposició 6.1. *Suposem que* $\zeta_1^{(\alpha-1)} < \infty$.

1. *Sigui* $B(t,T)$ *el preu d'un bo de cupó zero amb temps de venciment* T*, la producció* $r := -(1/(T-t))log(B(t,T))$ *és una constant independent de* T*,*

$$r = \theta + (1-\alpha)\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2(1-\alpha)(2-\alpha) - \lambda\zeta_1^{(\alpha-1)} > 0. \tag{6.4}$$

2. *Sigui* $Z(t) := e^{rt}\mathcal{U}_c(\delta(t),t) = e^{(r-\theta)t}(\delta(t))^{\alpha-1}$*. Aleshores* $Z(t)$ *és una martingala en* $\mathbb{P}$*,*

$$\frac{dZ(t)}{Z(t-)} = -\lambda\zeta_1^{(\alpha-1)}dt + \sigma_1(\alpha-1)dW_1(t) + d\left(\sum_{i=1}^{N(t)}(\tilde{V}_i^{\alpha-1}-1)\right). \tag{6.5}$$

Fent servir $Z(t)$ *podem definir una nova mesura de probabilitat* P^**:* $dP^*/dP := Z(t)/Z(0)$*. En* P^**, l'equació d'Euler se satisfà si i només si el preu de l'actiu satisfà*

$$S(t) = e^{-r(T-t)}E^*(S(T)|\mathcal{F}_t),\ \forall T \in [t,T_0]. \tag{6.6}$$

A més, el preu d'equilibri de les expectatives racionals d'una opció europea, amb pagament $\psi_s(T)$ *a temps de venciment* T *ve donat per*

$$\psi_s(t) = e^{r(T-t)}E^*(\psi_s(T)|\mathcal{F}_t),\ \forall T \in [t,T_0]. \tag{6.7}$$

Demostració. Com que $B(T,T)=1$, l'equació (6.3) condueix a

$$B(t,T) = e^{-\theta(T-t)}\frac{E((\delta(t))^{\alpha-1}|\mathcal{F}_t)}{(\delta(t))^{\alpha-1}}. \tag{6.8}$$

Fent servir que

$$\left(\frac{\delta(T)}{\delta(t)}\right)^{\alpha-1} = exp\left\{(\alpha-1)\left(\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)(T-t) + \sigma_1(\alpha-1)(W_1(T)-W_1(t))\right\}\prod_{i=N(t)+1}^{N(t)}\tilde{V}_i^{\alpha-1},$$

i que

$$E\left(\prod_{i=N(t)+1}^{N(t)}\tilde{V}_i^{\alpha-1}\right) = \sum_{j=0}^{\infty}e^{-\lambda(T-t)}\frac{(\lambda(T-t))^j}{j!}(\zeta_1^{(\alpha-1)}+1)^j = exp(\lambda\zeta_1^{(\alpha-1)}(T-t)),$$

obtenim que

$$B(t,T) = exp\left[-(T-t)\left\{\theta - (\alpha-1)\left(\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right) - \frac{1}{2}\sigma_1^2(\alpha-1)^2 - \lambda\zeta_1^{(\alpha-1)}\right\}\right],$$

de la qual se segueix l'equació (6.4).

Per l'apartat 2), notem que (6.8) implica que:

$$e^{-r(T-t)} = E(U_c(\delta(T),T)/U_c(\delta(t),t)|\mathcal{F}_t), \tag{6.9}$$

que mostra que $Z(t)$ és una martingala en $\mathbb{P}$. A més, (6.2) i (6.4) condueixen a

$$Z(t) = (\delta(0))^{\alpha-1} e^{(r-\theta)t} exp\left\{ (\alpha-1)\left(\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2 \right) t + \sigma_1(\alpha-1)W_1(t) \right\} \prod_{i=1}^{N(t)} \tilde{V}_i^{\alpha-1}$$

$$= (\delta(0))^{\alpha-1} exp\left\{ \left\{ -\frac{1}{2}\sigma_1^2(\alpha-1)^2 - \lambda\zeta_1^{(\alpha-1)} \right\} t + +\sigma_1(\alpha-1)W_1(t) \right\} \prod_{i=1}^{N(t)} \tilde{V}_i^{\alpha-1},$$

d'on se segueix (6.5). Ara, de (6.3) i (6.9), tenim que

$$\psi_S(t) = \frac{E(U_c(\delta(T),T)\psi_S(T)|\mathcal{F}_t)}{U_c(\delta(t),t)} = e^{-rT} E\left\{ \frac{Z(T)}{Z(t)}\psi_S(T)|\mathcal{F}_t \right\} = e^{-rT} E^*(\psi_S(T)|\mathcal{F}_t).$$

□

Donat un procés de dotació $\delta(t)$, cal veure quins procesos estocàstics valen perquè el preu de l'actiu $S(t)$ satisfaci els requisits d'equilibri (6.3) i (6.6). Donem una altra forma d'expressar $S(t)$:

$$\frac{dS(t)}{S(t-)} = \mu dt + \sigma\{\rho dW_1(t) + \sqrt{1-\rho^2}dW_2(t)\} + d\left(\sum_{i=1}^{N(t)} (V_i - 1) \right), \; V_i = \tilde{V}_1^{\beta}, \tag{6.10}$$

on $W_2(t)$ és un moviment brownià independent de $W_1(t)$. En altres paraules el mateix procés de Poisson afecta tant a la dotació $\delta(t)$ com al preu dels actius $S(t)$.

La mida dels salts està relacionada amb una funció de potència, on la potència $\beta \in (-\infty, \infty)$ és una constant arbitrària. Els coeficients de difusió i la part de moviment brownià de $\delta(t)$ i $S(t)$ son totalment diferents. Falta determinar quines restriccions s'haurien d'imposar en aquest model de manera que el model de difusió de salts es pugui enclavar dins dels requisits d'equilibri d'expectatives racionals (6.3) i (6.6).

Teorema 6.2. *Suposem que $\zeta_1^{(\alpha+\beta-1)} < \infty$ i $\zeta_1^{(\alpha-1)} < \infty$. El model (6.10) satisfà el requisit d'equilibri (6.6) si i només si*

$$\begin{aligned} \mu &= r + \sigma_1\sigma\rho(1-\alpha) - \lambda\left(\zeta_1^{(\alpha+\beta-1)} - \zeta_1^{(\alpha-1)} \right) \\ &= \theta + (1-\alpha)\left(\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2(2-\alpha) + \sigma_1\sigma\rho \right) - \lambda\zeta_1^{(\alpha+\beta-1)}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Si (6.11) se satisfà, aleshores en $\mathbb{P}^*$,

$$\frac{dS(t)}{S(t-)} = rdt - \lambda^* E^*(\tilde{V}_i^{\beta} - 1)dt + \sigma dW^*(t) + d\left(\sum_{i=1}^{N(t)} (\tilde{V}_i^{\beta} - 1) \right). \tag{6.12}$$

Aquí, en $\mathbb{P}^*$, $W^*(t)$ és un nou moviment brownià, $N(t)$ un nou procés de Poisson amb ritme de salt $\lambda^* = \lambda E(\tilde{V}_i^{\alpha-1}) = \lambda(\zeta_1^{(\alpha-1)} + 1)$, i $\{\tilde{V}_i\}$ son variables aleatòries independents i idènticament distribuides amb una nova densitat en $\mathbb{P}^*$:

$$f_{\tilde{V}}^*(x) = \frac{1}{\zeta_1^{(\alpha-1)} + 1} x^{\alpha-1} f_{\tilde{V}}(x). \tag{6.13}$$

Demostració. El Teorema de Girsanov sobre processos de difusió amb alts ens diu que en $\mathbb{P}^*$, $W_1'(t) := W_1(t) - \sigma_1(\alpha-1)t$ és un nou moviment brownià, i en $\mathbb{P}^*$ el ritme dels salts de $N(t)$ és $\lambda^* = \lambda E(\tilde{V}_i^{\alpha-1}) = \lambda(\zeta_1^{(\alpha-1)})$, i $\tilde{V}_i$ té una nova densitat $f_{\tilde{V}}^*(x) = (1/(\zeta_1^{(\alpha-1)}+1))x^{\alpha-1}f_{\tilde{V}}(x)$. Per tant, $S(t)$ ve donada per

$$\frac{dS(t)}{S(t-)} = \mu dt + \sigma\{\rho dW_1(t) + \sqrt{1-\rho^2}dW_2(t)\} + d\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(\tilde{V}_i^\beta - 1)\right]$$

$$= \{\mu + \sigma_1\sigma\rho(\alpha-1)\}dt + \sigma\{\rho dW_1'(t) + \sqrt{1-\rho^2}dW_2(t)\} + d\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(\tilde{V}_i^\beta - 1)\right].$$

Com que

$$E^*(\tilde{V}_i^\beta) = \int_0^\infty x^\beta \frac{1}{\zeta_1^{(\alpha-1)}+1}x^{\alpha-1}f_{\tilde{V}}(x)dx$$

$$= \frac{1}{\zeta_1^{(\alpha-1)}+1}E(\tilde{V}^{\alpha+\beta-1}) = \frac{\zeta_1^{(\alpha+\beta-1)}+1}{\zeta_1^{(\alpha-1)}+1},$$

tenim que $\lambda^*\{E^*(\tilde{V}_i^\beta)-1\}$. Per tant,

$$\frac{dS(t)}{S(t-)} = \{\mu + \sigma_1\sigma\rho(\alpha-1) + \lambda(\zeta_{\alpha+\beta-1} - \zeta_{\alpha-1})\}dt$$

$$-\lambda^*\{E^*(\tilde{V}_i^\beta)-1\}dt + \sigma\{\rho dW_1'(t) + \sqrt{1-\rho^2}dW_2(t)\} + d\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(\tilde{V}_i^\beta - 1)\right].$$

Per tant, per complir la condició d'equilibri racional $S(t) = e^{-r(T-t)}E^*(S(T)|\mathcal{F}_t)$, necessitem que

$$\mu + \sigma_1\sigma\rho(\alpha-1) + \lambda(\zeta_{\alpha+\beta-1} - \zeta_{\alpha-1}) = r,$$

d'on se segueix (6.11). Si (6.11) se satisfà, en $\mathbb{P}$, $S(t)$ ve donat per

$$\frac{dS(t)}{S(t-)} = rdt - \lambda^*\{E^*(\tilde{V}_i^\beta)-1\}dt + \sigma\{\rho dW_1'(t) + \sqrt{1-\rho^2}dW_2(t)\} + d\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(\tilde{V}_i^\beta - 1)\right],$$

d'on se segueix (6.12).

□

El corol·lari següent dóna una condició amb la qual tant $\delta(t)$ com $S(t)$ en $\mathbb{P}$ com $S(t)$ en $\mathbb{P}^*$ tenen la mateixa forma de difusió de salts.

Corol·lari 6.3. *Suposem que la família $\mathcal{V}$ de distribucions de mida de salt $\tilde{V}$ en el procés de dotació $\delta(t)$ satisfà que, per a qualsevol nombres reals $a \in [0,1)$ i $b \in (-\infty,\infty)$,*

$$\tilde{V}^b \in \mathcal{V} \text{ } i \text{ } const \cdot x^{a-1}f_{\tilde{V}}(x) \in \mathcal{V}, \tag{6.14}$$

on la constant és $const = \{\zeta_1^{(\alpha-1)}+1\}^{-1}$, cosa que és possible definir perquè $\zeta_1^{(\alpha-1)} < \infty$. Aleshores la mida dels salts per $S(t)$ en una mesura de risc neutral i expectatives racionals P^* totes pertanyen a la mateixa família $\mathcal{V}$.

La demostració se segueix de manera inmediata de (6.2), (6.10) i (6.13).

La condició (6.14) essencialment demana que la distribució de la mida dels salts pertany a la família exponencial. Se satisfà si $log(V)$ té una distribució normal o una distribució doble exponencial.

7 El model de Kou

Tot i l'èxit relatiu del model de Black-Scholes, fruit d'investigacions empíriques, se sap que la distribució de retorn dels actius presenta el fenomen de la leptocurtosi (això vol dir un excés positiu de curtosi o que la distribució té unes cues més pesades que en el cas de la distribució normal). Per incorporar aquest fenomen, juntament amb el conegut com a "somriure de volatilitat", i aconseguir que hi hagi un equilibri entre la realitat i les possibilitats de càlcul matemàtic, el model de Kou proposa, en relació a fixar els preus de les opcions, un model de difusió de salt doble exponencial.

7.1 Descripció del model

El model, resumidament, consisteix en què el logaritme del preu de l'actiu segueix un moviment brownià més un procés de Poisson compost amb salts que segueixen una distribució doble exponencial.

La dinàmica del model de Kou per al preu de l'actiu satisfà, sota una probabilitat $\mathbb{P}$, l'equació diferencial següent:

$$\frac{dS(t)}{S(t-)} = \mu dt + \sigma dW(t) + d(\sum_{i=1}^{N(t)}(V_i - 1)),$$

on $W(t)$ és el moviment brownià estàndard, $N(t)$ és el procés de Poisson de paràmetre λ, i $\{V_i\}$ és una successió de variables aleatòries no negatives independents i idèticament distribuïdes tal que $Y = log(V)$ segueix una distribució doble exponencial asimètrica amb densitat

$$f_Y(y) = \eta_1 e^{-\eta_1 y} 1_{\{y \geq 0\}} + q\eta_2 e^{\eta_2 y} 1_{\{y<0\}}, \ \ \eta_1 > 1, \eta_2 > 0,$$

on $p, q \geq 0, p + q = 1$ representen les probabilitats de salts ascendents i descendents respectivament. En altres paraules, es té que

$$log(V) = Y = \begin{cases} \xi^+, \ amb\ probabilitat\ p, \\ -\xi^-, \ amb\ probabilitat\ q, \end{cases} \tag{7.1}$$

on ξ^+ i $-\xi^-$ son variables aleatòries que segueixen una distribució exponencial de paràmetre η_1 i η_2 respectivament. S'assumeix, tanmateix, que $N(t)$, $W(t)$ i Y son independents. Igualment, assumirem que el "drift"μ i la volatilitat σ son constants i que el moviment brownià i els salts son 1-dimensionals.

Resolent l'equació diferencial estocàstica presentada a l'inici, obtenim:

$$S(t) = S(0)exp\{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)\} \prod_{i=1}^{N(t)} V_i. \tag{7.2}$$

Notem que $E(Y) = \frac{p}{\eta_1} - \frac{q}{\eta_2}$, $Var(Y) = pq(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2})^2 + (\frac{p}{\eta_1^2} + \frac{q}{\eta_2^2})$, i

$$E(V) = E(e^Y) = q\frac{\eta_2}{\eta_2 + 1} + p\frac{\eta_1}{\eta_1 - 1}, \eta_1 > 1, \eta_2 > 0.$$

És necessari que $\eta_1 > 1$ per assegurar que $E(V) < \infty$ i $E(S(t)) < \infty$.

7.2 La leptocurtosi

Fent servir (7.2), la quantitat d'actiu retornat sobre un interval de temps Δt ve donat per:

$$\frac{\Delta S(t)}{S(t)} = \frac{S(t+\Delta t)}{S(t)} - 1$$

$$= exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma(W(t+\Delta t) - W(t)) + \sum_{i=N(t)+1}^{N(t+\Delta t)} Y_i\right\} - 1,$$

on el sumatori sobre el conjunt buit se sobreentén que val 0. Si l'interval Δt és petit, la quantitat d'actiu retornada, fent servir que $e^x = 1 + x + x^2/2$, es pot aproximar per

$$\frac{\Delta S(t)}{S(t)} \approx \mu\Delta t + \sigma Z\sqrt{\Delta t} + B\cdot Y, \tag{7.3}$$

on Z i B son variables aleatòries que segueixen una distribució normal estàndard i una Bernoulli respectivament, amb $P(B=1) = \lambda\Delta t$ i $P(B=0) = 1 - \lambda\Delta t$, i Y ve donat per (7.1).

La densitat, que anomenarem g, de la part dreta de (7.3), que és una aproximació del quantitat d'actiu retornat $\Delta S(t)/S(t)$ està dibuixada en les Figures 2.1 i 2.2. juntament amb la densitat normal amb la mateixa esperança i variància. Els paràmetres escollits son 1 dia = 1/250 anys, σ = 20% cada any, μ = 15% cada any, λ = 10 cada any, p = 0.30, $1/\eta_1$ = 2% i $1/\eta_1$ = 4%. En aquest cas, $E(Y) = -2.2\%$ i la desviació típica $SD = 4.47\%$. En altres paraules, hi ha 10 salts cada any amb una mitjana de salt del −2.2% i una volatilitat de salt del 4.47%. En principi, els paràmetres de salt escollits son prou raonables, per no dir conservadors, per modelitzar mercats als Estats Units.

Figura 2:

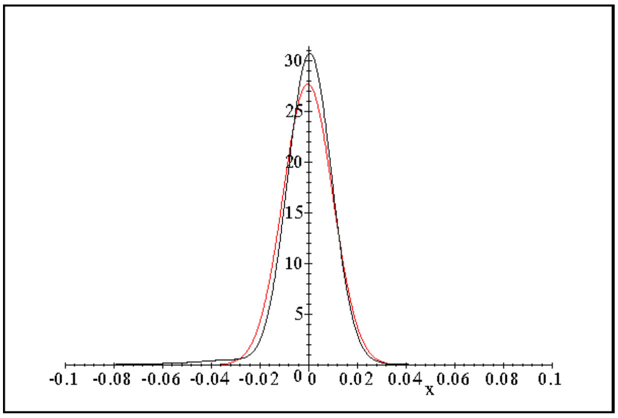


Figure 2.1: Overall comparison

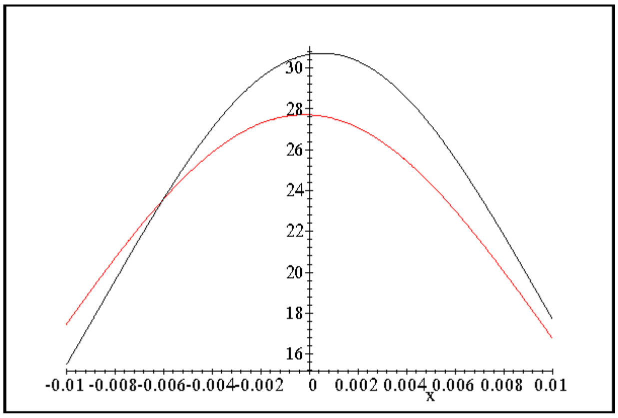


Figure 2.2: Peak comparison

És evident que el model presenta leptocurtosi. El pic de la densitat g està voltant de 31, mentre que el pic de la normal està al voltant de 25. Tanmateix, la densitat g té unes cues més pesades que la densitat normal, especialment pel que fa a la cua esquerra, que arriba sobradament per sota en un −10%, mentre que la densitat normal no arriba al −6%. A més, altres gràfics numèrics suggereixen que la característica de tenir un pic més alt i cues més pesades esdevé més pronunciat si qualsevol dels paràmetres $1/\eta_i$ o λ augmenta.

7.3 Els preus de les opcions

Calcularem la fórmula (6.7) de fixar de preus amb equilibri d'expectatives racionals, de manera explícita per a les opcions europees de call i put. Una qüestió de notació és que escriurem amb $*$ pel risc neutre. Per a calcular (6.7) hem d'estudiar la distribució de la suma de variables aleatòries doble exponencials i de variables aleatòries normals.

Definició 7.1. *Per a cada $n \geq 0$, es defineix la funció no creixent Hh com:*

$$Hh_n(x) = \int_x^\infty Hh_{n-1}(y)dy = \frac{1}{n!}\int_x^\infty (t-x)^n e^{-t^2/2}dt \geq 0, \; n = 0,1,2,\ldots \tag{7.4}$$

on

$$Hh_{-1}(x) = e^{-x^2/2} = \sqrt{2\pi}\phi(x), \quad Hh_0(x) = \sqrt{2\pi}\Phi(-x).$$

Observació 7.2. *La funció Hh és una generalització de la funció de distribució normal acumulada. La integral a (7.4) es pot avaluar amb Mathematica, per exemple.*

A més,

$$Hh_n(x) = 2^{-n/2}\sqrt{\pi}e^{-x^2/2}\left(\frac{F_1(\frac{1}{2}n+1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}x^2)}{\sqrt{2}\gamma(1+\frac{1}{2}n)} - x\frac{F_1(\frac{1}{2}n+1,\frac{3}{2},\frac{1}{2}x^2)}{\gamma(1+\frac{1}{2}n)}\right),$$

on F_1 és la funció hipergeomètrica confluent.

Observació 7.3. *Recursivament, també val la igualtat següent:*

$$nHh_n(x) = Hh_{n-2}(x) - xHh_{n-1}(x), \; n \geq 1.$$

Definició 7.4. *Donada una probabilitat $\mathbb{P}$, definim*

$$\tau(\mu,\sigma,\lambda,p,\eta_1,\eta_2;a,T) := P\{Z(T) \geq a\},$$

on $Z(t) = \mu t + \sigma W(t) + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$, Y té una distribució doble exponencial amb densitat $f_Y(y) \sim p\eta_1 e^{-\eta_1 y}1_{\{y\geq 0\}} + q\eta_2 e^{\eta_2 y}1_{\{y<0\}}$, i $N(t)$ és un procés de Poisson de paràmetre λ. La fórmula del preu de l'opció del call s'expressarà en termes de τ (que a la seva vegada es pot expressar en termes d'una suma de funcions Hh.)

Una fórmula explícita per τ ve donada pel teorema següent, però abans donarem una definició i una proposició-definició:

Definició 7.5. *Per a $1 \leq k \leq n-1$, definim $P_{n,n} = p^n$, $Q_{n,n} = p^n$ i*

$$P_{n,k} = \sum_{i=k}^{n-1}\binom{n-k-1}{i-k}\binom{n}{i}\cdot\left(\frac{\eta_1}{\eta_1+\eta_2}\right)^{i-k}\left(\frac{\eta_2}{\eta_1+\eta_2}\right)^{n-i}p^i q^{n-i},$$

$$P_{n,k} = \sum_{i=k}^{n-1}\binom{n-k-1}{i-k}\binom{n}{i}\cdot\left(\frac{\eta_1}{\eta_1+\eta_2}\right)^{n-i}\left(\frac{\eta_2}{\eta_1+\eta_2}\right)^{i-k}p^i q^{n-i},$$

Proposició 7.6. *Sigui $I_n(c;\alpha,\beta,\delta) := \int_c^\infty e^{\alpha x}Hh_n(\beta x-\delta)dx$, $\;n \geq 0$, on α, c, β son constants arbitràries. Sigui ϕ la funció de densitat d'una normal estàndard.*

1. *Si $\beta > 0$ i $\alpha \neq 0$, aleshores per a tot $n \geq -1$,*

$$I_n(c;\alpha,\beta,\delta) = -\frac{e^{\alpha c}}{\alpha}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-i} Hh_i(\beta c-\delta)+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}\frac{\sqrt{2\pi}}{\beta}e^{\frac{\alpha\delta}{\beta}+\frac{\alpha^2}{2\beta^2}}\phi\left(-\beta c+\delta+\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

2. *Si $\beta < 0$ i $\alpha < 0$, aleshores per a tot $n \geq -1$,*

$$I_n(c;\alpha,\beta,\delta) = -\frac{e^{\alpha c}}{\alpha}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-i} Hh_i(\beta c-\delta)-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}\frac{\sqrt{2\pi}}{\beta}e^{\frac{\alpha\delta}{\beta}+\frac{\alpha^2}{2\beta^2}}\phi\left(\beta c-\delta-\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

La demostració aquesta proposició es pot trobar a [5].

Teorema 7.7. *Sigui $\pi_n := P(N(T)=n) = e^{-\lambda T}(\lambda T)^n/n!$. Aleshores*

$$\begin{aligned}
P\{Z(T)\geq a\} =& \frac{e^{(\sigma\eta_1)^2T/2}}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\sum_{k=1}^{\infty}\pi_n\sum_{k=1}^{n}P_{n,k}(\sigma\sqrt{T}\eta_1)^k\times I_{k-1}\left(a-\mu T;-\eta_1,-\frac{1}{\sigma\sqrt{T}},-\sigma\eta_1\sqrt{T}\right)\\
&+\frac{e^{(\sigma\eta_1)^2T/2}}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\sum_{k=1}^{\infty}\pi_n\sum_{k=1}^{n}Q_{n,k}(\sigma\sqrt{T}\eta_2)^k\times I_{k-1}\left(a-\mu T;\eta_2,\frac{1}{\sigma\sqrt{T}},-\sigma\eta_2\sqrt{T}\right)\\
&+\pi_0\phi(-\frac{a-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}).
\end{aligned}$$

Demostració.

$$P\{Z(T)\geq a\} = \sum_{n=0}^{\infty}\pi_n P\left(\mu T+\sigma\sqrt{T}Z+\sum_{j=1}^{n}Y_j\geq a\right)= \pi_0 P(\mu T+\sigma\sqrt{T}Z\geq a)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\pi_n\sum_{k=1}^{n}P_{n,k}P\left(\mu T+\sigma\sqrt{T}Z+\sum_{j=1}^{k}\epsilon_j^+\geq a\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\pi_n\sum_{k=1}^{n}Q_{n,k}P\left(\mu T+\sigma\sqrt{T}Z-\sum_{j=1}^{k}\epsilon_j^-\geq a\right).$$

□

El teorema següent ens dóna expressions del preu del put i del call en funció de τ:

Teorema 7.8. *Partint de (6.7), el preu del call d'una opció europea ve donat per*

$$\begin{aligned}
\psi_c(0) =& S(0)\tau\Big(r+\frac{1}{2}\sigma^2-\lambda\zeta,\sigma,\tilde{\lambda},\tilde{p},\tilde{\eta_1},\tilde{\eta_2};log(K/S(0)),T\Big)\\
&-Ke^{-rT}\tau\Big(r-\frac{1}{2}\sigma^2-\lambda\zeta,\sigma,\lambda,p,\eta_1,\eta_2;log(K/S(0)),T\Big),
\end{aligned}$$

on

$$\tilde{p} = \frac{p}{1+\zeta}\frac{\eta_1}{eta_1-1},\ \tilde{\eta_1}=\eta_1-1,$$

$$\tilde{\eta_2}=\eta_2+1,\ \tilde{\lambda}=\lambda(\zeta+1),\ \zeta=\frac{p\eta_1}{\eta_1-1}+\frac{q\eta_2}{\eta_2+1}-1.$$

El preu del put $\psi_p(0)$ es pot obtenir per la fórmula de la paritat call-put:

$$\psi_p(0)-\psi_c(0) = e^{-rT}E^*((K-S(T))^+-(S(T)-K)^+) = e^{-rT}E^*((K-S(T))) = Ke^{-rT}-S(0).$$

La demostració es pot trobar a [7]

7.4 Els preus de contractes futurs

Ara considerem el problema de fixar els preus de contractes futurs. Assumim, de moment, que r és constant. Aleshores els preus futurs $F(t,T^*)$ amb data d'entrega T^* ve donat per

$$F(t,T^*) = e^{r(T^*-t)}E^*(S(T^*)|\mathcal{F}_t) = e^{r(T^*-t)}S(t).$$

Corol·lari 7.9. *El preu del call de les opcions europees per a contractes futurs ve donat per*

$$\psi_{c,F}(D,F(0,T^*),T)$$

$$= D\left(F(0,T^*)\tau\left(\frac{1}{2}\sigma^2-\lambda\zeta,\sigma,\tilde{\lambda},\tilde{p},\tilde{\eta_1},et\tilde{a}_2;log\left(\frac{K}{F(0,T^*)}\right),T\right)\right.$$
$$\left.-K\tau\left(-\frac{1}{2}\sigma^2-\lambda\zeta,\sigma,\lambda,p,\eta_1,\eta_2;log\left(\frac{K}{F(0,T^*)}\right),T\right)\right),$$

on $D=e^{-rT}$. El preu de l'opció put es pot calcular amb la fórmula de la paritat put-call:

$$\psi_{p,F}(D,F(0,T^*),T)-\psi_{c,F}(D,F(0,T^*),T) = e^{-rT}(K-F(0,T^*)).$$

Demostració. Com que $(F(T,T^*)-K)^+ = e^{r(T^*-T)}(S(T)-Ke^{-r(T^*-T)})^+$, tenim que

$$E[e^{-rT}(F(T,T^*)-K)^+] =$$

$$= e^{r(T^*-T)}\left(S(0)\tau\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2-\lambda\zeta,\sigma,\tilde{\lambda},\tilde{p},\tilde{\eta_1},\tilde{\eta_2};log(Ke^{-r(T^*-T)}/S(0),T\right)\right.$$
$$\left.-Ke^{-r(T^*-T)}e^{-rT}\tau\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2-\lambda\zeta,\sigma,\lambda,p,\eta_1,\eta_2;log(Ke^{-r(T^*-T)}/S(0),T\right)\right)$$
$$= e^{-rT}\left(F(0,T^*)\tau\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2-\lambda\zeta,\sigma,\tilde{\lambda},\tilde{p},\tilde{\eta_1},\tilde{\eta_2};log(K/F(0,T^*))+rT,T\right)\right.$$
$$\left.-K\tau\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2-\lambda\zeta,\sigma,\lambda,p,\eta_1,\eta_2;log(K/F(0,T^*))+rT,T\right)\right).$$

Notem que

$$P\left\{(r+\mu)T+\sigma W(T)+\sum_{i=1}^{N(T)}Y_i \geq a+rT\right\} = P\left\{\mu T+\sigma W(T)+\sum_{i=1}^{N(T)}Y_i \geq a\right\}.$$

□

Fent servir que per a cada $t \geq 0$, $Z(t)$ convergeix en distribució a $\mu t+\sigma W(T)$ (ja que $\eta_1 \to \infty$ i $\eta_2 \to \infty$), obtenim també el corol·lari següent:

Corol·lari 7.10. *1. A mesura que la mida dels salts es fa cada vegada més petita, la fórmules dels preus del Teorema 7.5 i el Corol·lari 7.6 s'aproximen a la fórmula del Black-Scholes. Més precisament, com que $\eta_1 \to \infty$ i $\eta_2 \to \infty$ mentre que tots els altres paràmetres romanen fixos,*

$$\psi_c(0) \to S(0)\Phi(b'_+) - Ke^{-rT}\Phi(b'_-)$$

$$\psi_{c,F}(0) \to e^{-rT}\{F(0,T^*)\Phi(b'_{+,F}) - K\Phi(b'_{-,F})\},$$

on

$$b'_\pm := \frac{log(S(0)/K) + (r \pm (\sigma^2/2))T}{\sigma\sqrt{T}},$$
$$b'_{\pm,F} := \frac{log(F(0,T^*)/K) \pm \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}},$$

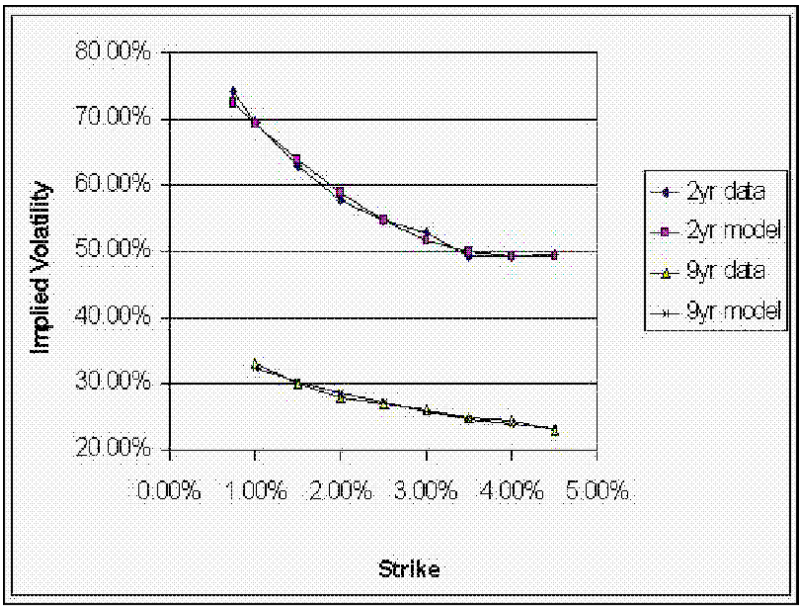
2. *Si el ritme de salt és zero, és a dir, si $\lambda = 0$, aleshores la fórmula dels preus torna a ser la mateixa que la del model de Black-Scholes.*

7.5 El somriure de volatilitat

Ara, per il·lustrar que el model de Kou produeix el que es coneix com a somriure de volatilitat, considerem dades reals aportades per [8] per un periode de 2 anys i caplets de 9 anys en el mercat LIBOR japonès a data de maig de 1998. La Figura 3 mostra les corbes de volatilitat observades i també les corbes de volatilitat calibrades fent servir la fórmula d'opcions futures del Corol·lari 7.6, on el paràmetre de descompte D correspon als preus dels bons i els actius subjacents son els del LIBOR.

Notem que aquest exemple no és un test empíric del model, sinó que serveix per il·lustrar que el model pot produïr una bona aproximació de la corba de volatilitat.

Figura 3: "Midmarket and Model-Implied Volatilities for Japanese LIBOR Caplets in May 1998



Els paràmetres escollits en aquest model son: pel caplet de 2 anys, $\eta^{(1)} = 3.7$, $\eta^{(2)} = 1.8$, $p = 0.04$, $\lambda = 1.4$, $\sigma = 0.21$; i pel caplet de 9 anys, $\eta^{(1)} = 2.3$, $\eta^{(2)} = 1.8$, $p = 0.09$, $\lambda = 0.2$, $\sigma = 0.09$.

8 Comparació entre els models de Merton i Kou

8.1 Comparativa de les propietats dels models

En aquesta secció es recullen de [4], [5] i [6] les diferències que trobem entre els models de Merton i de Kou.

Els processos de difusió amb salts que estudiem tenen la forma següent:

$$X_t = \gamma t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

on $(N_t)_{t\geq 0}$ és un procés de Poisson que compta els salts de X i Y_i la mida dels salts.

És important especificar la distribució de la mida dels salts $\nu(x)$ i, més concretament, el comportament de les cues de ν depenent de com creiem que es poden ajustar als fenomens externs que volguem estudiar. De fet, es pot veure que el comportament dels salts determina en bona mesura el comportament de les cues de la distribució de densitat de probabilitat d'un procés.

En el model de Merton els salts en X_t segueixen per definició una distribució normal: $Y_i \sim N(\mu, \delta^2)$. Això ens permet obtenir una densitat de probabilitat de X_t com una sèrie convergent. En efecte,

$$P\{X_t \in A\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{X_t \in A | N_t = k\} P\{N_t = k\},$$

amb la qual cosa la densitat de probabilitat X_t satisfà

$$p_t(x) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k exp\{-\frac{(x-\lambda t-k\mu)^2}{2(\sigma^2 t+k\delta^2)}\}}{k!\sqrt{2\pi(\sigma^2 t + k\delta^2)}}.$$

De manera similar s'obtenen els preus de les opcions europees com una sèrie en la qual cada terme involucra la fórmula de Black-Scholes.

En el model de Kou, la distribució de la mida dels salts és una asimètica exponencial amb densitat:

$$\nu(dx) = [p\lambda_+ e^{-\lambda_+ x} 1_{\{x>0\}} + (1-p)\lambda_- e^{-\lambda_-|x|} 1_{\{x<0\}}]dx,$$

on $\lambda_+ > 0, \lambda_- > 0$ regeixen la forma de decaiment de les cues per a la distribució postiva i negativa de la mida dels salts i $p \in [0,1]$ representa la probabilitat d'un salt ascendent.

Fem una comparativa de les seves propietats:

• Tots dos models son la suma d'un procés de Poisson compost amb salts i un moviment brownià.

• El model de Merton consta de 4 paràmetres (volatilitat de difusió σ, intensitat del salt λ, mida mitjana del salt μ i desviació estàndard de la mida del salt δ). El model de Kou, en canvi, consta de 5 paràmetres (volatilitat de difusió σ, intensitat del salt λ i els paràmetres de distribució de la mida dels salts λ_+, λ_-, p).

• El model de Merton admet una densitat de probabilitat (que hem expressat més amunt), mentre que el model de Kou no ho permet en una forma tancada.

• Pel que fa al comportament de la probabilitat de densitat de les cues, el model de Merton té cues més pesades que la gaussiana, però tots els moments exponencials son finits. Respecte al model de Kou, té cues exponencials "semipesades", això vol dir: $p(x) \sim e^{\lambda_+ x}$ quan $x \to +\infty$ i $p(x) \sim e^{\lambda_- |x|}$ quan $x \to -\infty$.

Tant el model de Merton de difusió de salts normal com el de Kou de difusió de salts doble exponencial son casos especials dels models de difusió de salts, i inclouen la volatilitat estocàstica i els salts de volatilitat. Igualment, ambdós models satisfan la propietat dels increments independents i l'aspecte de la leptocurtosi, tot i que la curtosi del model de Kou és significativament més pronunciada que en el cas del model de Merton.

8.2 Avantatges i inconvenients dels models

Un dels inconvenients del model de Kou és que les fórmules dels preus, tot i ser analítiques, son una mica complicades. No obstant això, si considerem que la funció Hh es pot calcular fàcilment utilitzant programes com el Mathematica, tampoc és un problema tan greu.

Un problema més seriós és la dificultat que trobem per a donar la cobertura. A causa dels salts, el mercat és incomplet. No obstant això, una cobertura sense risc no la tindrem mai (tampoc en el model de Merton), excepte en el cas d'un moviment brownià a temps continu (com en el model de Black-Scholes).

Finalment, com passa en tots dels processos de Lévy, un problema és que el model Kou no pot incorporar la possibilitat d'estructures dependents entre els actius retornats, ja que el model assumeix increments independents. Una possible solució per incorporar aquesta dependència passa per fer servir un altre procés puntual $\tilde{N}(t)$ amb increments dependents que substitueixi el procés de Poisson $N(t)$, però mantenint la independència entre el moviment brownià, la mida dels salts i $\tilde{N}(t)$. El model, un cop modificat, ja no té increments independents i és prou simple per produïr solucions de forma tancada. El que sembla més problemàtic és obtenir d'aquesta manera solucions analítiques per opcions amb memòria.

Si el model de Kou és apte per a propòsits de modelització és al cap i a la fi una tria entre la tractabilitat analítica i la realitat, i s'ha de jutjar cas per cas.

La diferència principal entre els dos models passa per la tractabilitat analítica de les opcions amb dependència de camins. En alguns casos, el model de Kou pot servir per donar solucions de forma tancada, mentre que amb el model de Merton no es podria. Això passa quan ens interessem pel primer temps de pas en processos de difusió amb salts sobre una frontera plana. Quan el procés creua aquesta frontera, pot tocar-la exactament o, com sol ser més habitual, pot passar-se de llarg. Això presenta alguns inconvenients a l'hora de posar preu a les opcions. Primer, necessitariem conèixer la distribució exacta a partir de quan ens hem passat de llarg. De la teoria de procesos de renovació se sap que això només és possible si la mida dels salts segueix una distribució exponencial. Això és gràcies a la propietat d'absència de memòria que presenta la distribució exponencial. En segon lloc, també és necessari conèixer la dependència entre entre el primer temps de pas i el que ens hem passat de llarg. També en aquest cas, aquestes dues variables aleatòries son independents, ja que el que ens hem passat de llarg sempre és més gran que 0 i per la propietat de l'absència de memòria. Aquesta independència és característica de les distribucions de tipus exponencial i no existeix en altres distribucions, entre elles al distribució normal que utilitza el model de Merton.

En conseqüència, hi ha solucions analítiques que només es poden obtenir amb el model de Kou, però és impossible fer-ho amb el model de Merton.

Referències

[1] Lamberton, D., Lapeyre, B. 2007. *Introduction to stochastic calculus applied to finance.* CRC Press. ISBN-10 1584886269

[2] Capinski, M.; Kopp, E. 2012. *The Black-Scholes model.* Mastering mathematical finance, Cambridge University Press. ISBN 10: 0521173000 ISBN 13: 9780521173001

[3] Bain, Alan. 2008. *Stochastic calculus.* E-book link: https://web.maths.unsw.edu.au/ zdravkobotev/stoc-calc.pdf

[4] Tankov, Peter; Cont, Rama. 2003. *Financial modelling with jump processes.* Chapman and Hall/CRC. ISBN 1-58488-413-4

[5] Kou, S.G. 2002. *A jump-diffusion model for option pricing.* Management Science, 48, 1086-1101.

[6] Kou, S.G. 2004. *Option pricing under a double exponential jump diffusion model.* Management Science, 50, 1178-1192.

[7] Kou, S.G., H. Wang. 2001. *Option pricing under a double exponential jump diffusion model.* Working paper, Columbia University, New York.

[8] Andersen, L., J. Andreasen. 2000. *Volatility skews and extensions of the libor market model.* Appl. Math. Finance 7 1-32.

[9] Karatzas, I., Shreve, S.E. 1988. *Brownian motion and stochastic calculus.* Springer-Verlag.