Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Cohomologia de deRham i didàctica de la geometria esfèrica

Autor: David Rebull Mantas

Director: Dr. Jordi Font González

Realitzat a: Departament de Matemàtica Aplicada

Barcelona, 13 de juny de 2023

Abstract

We define and study homology and de Rham's cohomology groups, and the close connection between them despite their distinct natures. The integration of differential forms is defined, and the general and simplicial cases of Stokes' theorem are presented. Additionally, didactic resources that can be used to convey certain abstract ideas of non-Euclidean geometries and topology to a second cycle of ESO (Secondary Education) class are examined. Finally, an activity is conducted in a classroom, and conclusions are drawn.

Resum

Definició i estudi dels grups d'homologia i cohomologia de deRham i l'estreta relació entre ells encara que tinguin naturaleses tan diferents. Es defineix la integració de formes diferenciables i es donen el cas general i simplicial del teorema d'Stokes. Per altra banda, s'estudien els recursos didàctics que es poden fer servir per fer entendre algunes idees abstractes de geometries no-euclidianes i topologia a una classe del segon cicle d'ESO. Finalment, es porta una activitat a una classe i s'extreuen conclusions.

2020 Mathematics Subject Classification. 53A35, 55N10, 97I40

Agraïments

A la Vella Guàrdia pel seu suport incondicional i per ser els millors alumnes que he portat mai, en especial al Iago pels seus consells sobre el format. Al meu pare per compartir amb mi la passió per les matemàtiques. A la meva mare i el meu germà per aguantar el son quan els explico el que faig. A la Pilar, per cedir-me la seva classe tot i les complicacions. I per últim, al meu tutor Jordi per la gran ajuda i tranquil·litat que ha aportat als moments de més estrès.

Índex

1 Introducció

La geometria diferencial de varietats és una disciplina matemàtica fascinant que estudia les propietats intrínseques de les formes i les estructures geomètriques a través de les eines del càlcul diferencial. Aquesta àrea de les matemàtiques té un paper fonamental en la comprensió dels fenòmens físics i les interaccions entre les diverses parts d'un sistema. A més, és un punt d'unió de branques de les matemàtiques com l'àlgebra abstracta, el càlcul i la topologia.

El present Treball de Final de Grau de Matemàtiques té dues parts.

La primera part es centra en l'estudi i anàlisi dels grups d'homologia i de cohomologia de deRham, tot donant una connexió entre ells com ho és el conegut teorema d'Stokes. Per fer-ho, es treballarà amb dos objectes aparentment molt diferents: els símplexs i les formes diferenciables. S'intentarà no perdre la perspectiva en cap moment per poder interpretar els resultats que aquesta branca de les matemàtiques ens ha aportat els últims anys.

A la segona part, s'estudiaran formes de portar a una aula de segon cicle d'ESO una activitat sobre topologia i geometries no-euclidianes. Per fer-ho, s'analitzarà la feina de grans docents de la història del nostre país i es veurà com es poden aplicar les seves metodologies a la nostra temàtica. Finalment, es portarà la proposta a una aula de 4t d'ESO de l'institut Jesuïtes del Clot i es trauran les conclusions pertinents.

En conclusió, aquest Treball de Final de Grau es podria definir com interdisciplinari, no només per l'estudi didàctic, sinó per les múltiples branques que apareixen en l'estudi de la integració de formes diferencials i grups d'homologia i cohomologia de deRham.

2 Nocions bàsiques

2.1 Primeres definicions

El concepte de varietat sorgeix de poder descriure de forma general espais topològics que en entorns petits són molt semblants (homeomorfs) a un cert espai euclidià $\mathbb{R}^m$. Aquesta propietat permet treballar localment amb coordenades dins d'estructures que poden no ser representades com a subespais de cap $\mathbb{R}^n$ (en el cas de geometria diferencial, direm que no té per què ser *embedida* a cap $\mathbb{R}^n$). En funció de les característiques que necessitem de l'espai per poder-hi treballar, la definició de varietat serà més o menys restrictiva. Una de les definicions més generals de varietat és la de varietat topològica.

Definició 2.1 (Varietat topològica)**.** *Un espai topològic M es diu que és una varietat topològica de dimensió m si és Hausdorff, compleix el segon axioma de numerabilitat i tot punt de M té un entorn obert homeomorf a $\mathbb{R}^m$ (i.e. per a tot $p \in M$, existeixen $U \subseteq M$ que conté p i $\phi : U \to \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ homeomorfisme).*

A la parella (U, ϕ) l'anomenem carta coordenada, o entorn coordenat de p. Tot conjunt de cartes $\{(U_a, \phi_a)\}_{a \in A}$, tal que $\bigcup_{a \in A} U_a = M$, s'anomena atles.

La condició Hausdorff força a l'espai a no ser molt diferent a $\mathbb{R}^m$, si no ho imposéssim, ens podríem trobar espais amb propietats poc intuïtives. Un exemple es dona a la pàgina 7 del llibre [1]. El segon axioma de numerabilitat ens permetrà treballar amb el concepte de particions de la unitat més endavant, això ens facilitarà moltes demostracions.

Amb aquesta definició, queda coberta la part topològica del concepte de varietat que volem. Aquest treball, però, no és sobre topologia, sinó sobre la geometria diferencial de varietats. Cal, també, que la nostra varietat tingui una certa estructura que ens permeti treballar amb conceptes com les derivacions o les formes diferenciables. Dit d'una altra forma, cal que la nostra varietat tingui algunes restriccions de regularitat (en el sentit analític de la paraula). Introduïm doncs la condició que ens falta:

Definició 2.2 (Varietat diferencial)**.** *Sigui M una varietat topològica i $\mathcal{A} = \{(U_a, \phi_a)\}_{a \in A}$ un atles de M. Es diu que $\mathcal{A}$ és diferenciable si per tota parella de cartes $(U_i, \phi_i), (U_j, \phi_j) \in \mathcal{A}$ tals que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ compleixen que l'aplicació entre oberts de $\mathbb{R}^m$:*

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$$

és diferenciable (infinitament derivable) en el sentit real.

Si una varietat topològica està dotada d'un atles diferenciable diem que és una varietat diferencial.

Es pot comprovar, per simetria i fent ús del fet que els ϕ_k són homeomorfismes, que les aplicacions $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ són difeomorfismes d'oberts reals. De fet, a moltes fonts es dona la definició imposant que aquestes aplicacions han de ser difeomorfismes i no diferenciables. No és complicat veure que, per simetria, les dues definicions són equivalents.

En general, quan treballem localment en una carta (U, ϕ), podem identificar tot punt $p \in U$ amb $\phi(p) \in \mathbb{R}^m$, expressat en coordenades. D'aquesta forma la definició d'atles diferenciable es redueix a imposar que el canvi de coordenades sigui una aplicació diferenciable (o un difeomorfisme) en el sentit real. Sovint escriuré la carta local com $(U, (x_1, \ldots, x_m))$, amb aquesta notació estic posant nom a les funcions coordenada que defineixen ϕ.

No és accidental l'acotació que he fet d'aplicació diferenciable en el sentit real. I és que toca generalitzar aquesta idea a aplicacions de varietats diferencials no necessàriament euclidianes fent ús d'una idea similar a la que hem fet servir per definir atles diferenciable:

Definició 2.3. *Siguin M i N varietats diferencials de dimensions m i n respectivament i $f : M \to N$ una aplicació contínua (en el sentit topològic), diem que f és diferenciable si per tota tria de cartes (U, ϕ) de M i (V, ψ) de N, l'aplicació*

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(f^{-1}(V) \cap U) \xrightarrow{\phi^{-1}} f^{-1}(V) \cap U \subseteq f^{-1}(V) \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\psi} \psi(V)$$

és diferenciable en el sentit real. Si, a més, l'aplicació f és bijectiva i f^{-1} és diferenciable, direm que f és un difeomorfisme.

De nou, facilita molt la intuïció identificar cada punt amb les seves coordenades locals, d'aquesta forma una aplicació és diferenciable si la seva expressió local en coordenades ho és en el sentit real.

A partir d'ara, si tenim una aplicació $f : M \to N$ entre varietats diferencials i entorns coordenats (U, ϕ) de M i (V, ψ) de N (tals que $f(U) \subseteq V$), sovint identificarem, localment, f amb l'aplicació expressada en coordenades $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$. Així, treballarem amb f com si fos una funció entre oberts de $\mathbb{R}^m$ i $\mathbb{R}^n$, encara que, estrictament parlant, no ho sigui.

En particular ens interessa molt el cas de les aplicacions diferenciables d'una varietat M en $\mathbb{R}$ (suposant que l'estructura diferencial de $\mathbb{R}$ ve definida per l'atles trivial $(\mathbb{R}, id)$). El conjunt d'aquestes aplicacions es denota per $\mathcal{F}(M)$ i és una $\mathbb{R}$-àlgebra commutativa amb la suma i el producte de funcions.

2.2 Espai tangent

Una de les estructures més importants que neix de la definició de varietat que hem donat és l'espai tangent. Sovint es defineix l'espai tangent com l'espai de vectors tangents a la varietat en un punt. El problema és que el concepte de vector que estem fent servir només existeix en varietats *embedides* a un cert $\mathbb{R}^n$. I, a l'inici del treball, s'ha deixat clar que aquesta és una restricció que volem evitar fer servir. Per tant, cal trobar una estructura (que pugui ser identificada amb els vectors en el cas de varietats *embedides* a $\mathbb{R}^n$) que puguem generalitzar a totes les varietats. Conceptualment, aquestes estructures són les derivades direccionals de cada vector, en el cas general les anomenem derivacions:

Definició 2.4. *Definim derivació de M en un punt p a tota aplicació $\mathbb{R}$-lineal $X_p : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ que compleixi la regla de Leibnitz:*

$$X_p(f \cdot g) = X_p(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot X_p(g).$$

El conjunt de totes les derivacions en el punt p s'anomena espai tangent a p i es denota T_pM.

Es pot comprovar que T_pM és tancat per la suma i pel producte per un escalar, per tant és un espai vectorial. Ens cal comprovar que la dimensió de l'espai coincideix amb la dimensió de la varietat, per fer-ho, definirem un possible candidat a base. Siguin $(x_1, \ldots, x_m)$ les coordenades en un entorn de p. Podem definir (per a tot $i = 1, \ldots, m$)

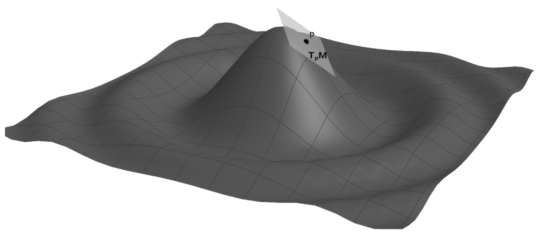


Figura 1: Representació gràfica del pla tangent a una superfície diferencal *embedida* a $\mathbb{R}^3$

l'aplicació $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ que envia cada $f \in \mathcal{F}(M)$ a la derivada parcial respecte x_i de f (expressada en coordenades) en el punt p. És senzill comprovar que $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ és una derivació. Ara volem demostrar que aquest espai vectorial té dimensió m. Per fer-ho provem primer un lema molt senzill que resulta intuïtiu si pensem en derivades direccionals:

Lema 2.5. *Sigui M una varietat, $p \in M$ i $X_p \in T_pM$. Llavors $X_p(f) = 0$ per a tota $f \in \mathcal{F}(M)$ aplicació constant.*

Demostració. Posem $f(x) = c \in \mathbb{R}$ per a tot $x \in M$. Com que $X_p(f) = cX_p(1)$. És suficient demostrar que $X_p(1) = 0$:

$$X_p(1) = X_p(1 \cdot 1) = X_p(1) \cdot 1 + 1 \cdot X_p(1) = 2X_p(1).$$

Per tant, $X_p(1) = 0$. $\square$

Proposició 2.6. *Sigui M una varietat diferencial de dimensió m i $p \in M$, les aplicacions $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ formen una base de T_pM. De fet, $T_pM \cong \mathbb{R}^m$.*

Demostració. Per començar, fent una transposició si fa falta, podem suposar un entorn coordenat $(U, (x_1, \ldots, x_m))$ del punt p on $x_i(p) = 0$ per a tot i (és a dir, identifiquem p amb l'origen). Sigui $f \in \mathcal{F}(M)$ expressada en coordenades, definim:

$$f_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)dt \text{ on } x = (x_1(q), \ldots, x_n(q)) \text{ per algun } q \in U \text{ qualsevol.}$$

Pel Teorema Fonamental del Càlcul (l'aplicació f és una funció real si és expressada localment en coordenades), sabem que $f = f(p) + \sum f_j x_j$, on x_j és l'aplicació que retorna la coordenada j del punt d'entrada. Aplicant $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ a les dues bandes, obtenim:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_p = \left.\frac{\partial (f(p))}{\partial x_i}\right|_p + \sum_j \left.\frac{\partial (f_j x_j)}{\partial x_i}\right|_p = \left.\frac{\partial f_i x_i}{\partial x_i}\right|_p =$$
$$= \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right|_p x_i(p) + f_i(p) \left.\frac{\partial x_i}{\partial x_i}\right|_p = f_i(p).$$

On hem fet servir que $x_i(p) = 0$ per a tot i. Ara, apliquem un $X_p \in T_pM$ qualsevol a les dues bandes en lloc de $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$:

$$X_p(f) = X_p\left(f(p)\right) + \sum X_p(f_i x_i) = 0 + \sum X_p(f_i) \cdot x_i(p) + \sum f_i(p) \cdot X_p(x_i) =$$
$$= \sum X_p(f_i) \cdot 0 + \sum f_i(p) \cdot X_p(x_i) = \sum X_p(x_i) \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_p$$

I, per tant, $X_p = \sum a_i \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ on $a_i = X_p(x_i) \in \mathbb{R}$ per a tot i. Així, sabem que T_pM és generat per les derivacions $\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p$. Resta comprovar que aquests són linealment independents i, per tant, formen base.

Suposem que $\sum b_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p = 0$ (la derivada nul·la). Aplicant aquesta propietat a l'aplicació coordenada x_j tenim que $0 = \sum_i b_i \left.\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right|_p = b_j$ per tot j, això prova la independència lineal. □

D'aquesta forma hem comprovat que l'espai tangent té la mateixa estructura que la seva versió geomètrica. Hi ha una estructura molt important que també cal definir: el camp vectorial. Dit formalment, un camp vectorial X és una associació a cada punt $p \in M$ d'una derivació $X_p \in T_pM$. Sense posar més condicions, un camp vectorial pot no complir cap propietat de regularitat i, en el nostre cas, això no interessa. Per acotar la definició, cal observar que en un entorn coordenat podem escriure tot camp vectorial X com:

$$X = f_1(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_n(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_n}. \tag{2.1}$$

On $\frac{\partial}{\partial x_i}$ és el camp vectorial que assigna a cada $p \in M$ la derivació $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ i f_i és una aplicació de M en $\mathbb{R}$. Aquesta propietat surt del fet que, en cada punt $p \in M$, X_p és combinació lineal dels $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$. Sabent això podem escriure la definició següent.

Definició 2.7. *Diem que un camp vectorial és diferenciable si, localment, les f_i de l'expressió 2.1 són diferenciables (i.e. $f_i \in \mathcal{F}(M)$ per tot $i = 1, \ldots, n$) per a tota tria de cartes. El conjunt de tots els camps vectorials diferenciables definits sobre una varietat diferencial M es denota $\mathfrak{X}(M)$.*

En aquest treball, els camps vectorials no tenen gaire pes, però són una eina tan bàsica en l'estudi de varietats diferencials que no he vist possible no mencionar-los, encara que sigui de passada.

2.3 Diferencial d'una aplicació i espai cotangent

Resulta impensable treballar amb espais vectorials sense parlar d'aplicacions lineals. A més, hem definit ja un altre tipus d'aplicació que és important en l'estudi de varietats diferencials: les aplicacions diferenciables. Per tant, és raonable associar d'alguna forma cada aplicació diferenciable amb una aplicació lineal d'espais tangents. Així definim l'aplicació diferencial:

Definició 2.8. *Sigui $F : M \to N$ una aplicació diferenciable entre varietats, definim l'aplicació diferencial de F en el punt $p \in M$ com l'aplicació lineal $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$*

que envia una derivació X_p de M en el punt p a la derivació de N definida de la forma $dF_p(X_p)(f) = X_p(f \circ F)$, per a tota $f \in \mathcal{F}(N)$.

Mirem bé el significat d'aquesta definició estudiant-la localment en coordenades. Suposem F com a la definició i dos entorns coordenats $(U, (x_1, \dots, x_m))$ de M i $(V, (y_1, \dots, y_n))$ de N tals que $F(U) \subseteq V$. Per trobar la matriu associada a l'aplicació lineal df_p és suficient trobar les coordenades de la imatge de la base $\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\Big|_p$ en funció de la base $\frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_{F(p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}\Big|_{F(p)}$. Fent servir la definició i la regla de la cadena (de funcions reals multiavaluades) tenim que, per tota $f \in \mathcal{F}(M)$:

$$dF_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right)(f) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p (f \circ F) = \sum_j \frac{\partial f}{\partial y_j}\Big|_{F(p)} \cdot \frac{\partial F_j}{\partial x_i}\Big|_p$$

on $F_j = y_j \circ F$ és la coordenada j de l'aplicació F. Posat en forma general, hem demostrat que:

$$dF_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right) = \sum_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i}\Big|_p \cdot \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_{F(p)}$$

Dit d'una altra forma, la matriu associada a l'aplicació dF_p en les bases $\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\Big|_p$ i $\frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_{F(p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}\Big|_{F(p)}$ (definides únicament per la tria de cartes coordenades) és la matriu:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\Big|_p & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\Big|_p & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m}\Big|_p \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\Big|_p & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\Big|_p & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_m}\Big|_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}\Big|_p & \frac{\partial F_n}{\partial x_2}\Big|_p & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m}\Big|_p \end{pmatrix}$$

Efectivament, és la matriu Jacobiana de l'aplicació F pensada com a funció real multiavaluada.

Ens interessa ara estudiar el cas particular on F és una aplicació diferenciable que envia M a $\mathbb{R}$ (amb l'estructura trivial $\{(\mathbb{R}, x)\}$). Com que $\mathbb{R}$ té dimensió 1, per a tot $t \in \mathbb{R}$, tenim que $T_t\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$, com hem vist en un teorema anterior. Així, sigui un $p \in M$ tenim que l'aplicació diferencial de F envia derivacions de T_pM a valors de $\mathbb{R}$ (o vectors que poden ser identificats amb valors de $\mathbb{R}$). Per entendre aquesta identificació, hem vist que, a la carta trivial de $\mathbb{R}$ tota derivació de $T_t\mathbb{R}$ es pot escriure com

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x}\Big|_t$$

on $\lambda \in \mathbb{R}$, si identifiquem aquesta derivació amb el propi λ es veu molt clar que $T_t\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$.

A àlgebra lineal, el conjunt d'aplicacions lineals que envien un espai vectorial a $\mathbb{R}$ està molt ben estudiat: se sap que forma un espai vectorial de la mateixa dimensió que el de sortida i se li posa el nom d'espai dual. En el nostre cas, l'espai dual a T_pM es denota T_p^*M i rep el nom d'espai cotangent. Els elements de T_p^*M s'anomenen covectors.

Estudiem T_p^*M localment en un entorn coordenat $(U, (x_1, \dots, x_n))$ de p. Recordem que x_i són aplicacions que envien punts de U a $\mathbb{R}$. És trivial veure que, de fet, són diferenciables i, per tant, tenen associats els covectors $dx_i|_p$. Fent ús de la definició:

$$dx_i|_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p \right) = \left. \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right|_p = \delta_i^j.$$

On δ_i^j representa la delta de Kronecker. Així, hem comprovat que la base dual associada a $\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p$ és $dx_1|_p, \dots, dx_n|_p$. Per tant, de forma similar a les derivacions, tot covector $\omega_p \in T_p^*M$ es pot representar de la forma $\omega_p = a_1 \cdot dx_1|_p + \dots + a_n \cdot dx_n|_p$. A més, fent servir la definició i per linealitat es comprova fàcilment que, si $\omega_p = df_p$, llavors:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_j} \right|_p = df_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p \right) = \sum_i a_i \delta_i^j = a_j.$$

És a dir, $df_p = \sum_i \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_p \cdot dx_i|_p$.

Un camp covectorial ω és una associació que assigna a cada punt $p \in M$ un covector ω_p de T_p^*M. Observem que dx_i són camps covectorials i que podem escriure tot camp covectorial ω localment com:

$$\omega = g_1 \cdot dx_1 + \dots + g_n \cdot dx_n.$$

On g_i són aplicacions que envien punts de M a $\mathbb{R}$. Si tots els g_i són aplicacions diferenciables per tota tria de cartes, diem que ω és una 1-forma diferenciable. El conjunt de totes les 1-formes de M es denota per $\Omega^1(M)$.

Cal fer aquí un petit parèntesi, ja que un podria pensar que podem seguir definint ara l'espai dual de T_p^*M (el bidual). Però hi ha un resultat molt important a àlgebra lineal que diu que per cada element del bidual σ_p hi ha un element X_p de T_pM tal que per tot $\omega_p \in T_p^*M$ es té

$$\sigma_p(\omega_p) = \omega_p(X_p).$$

D'aquesta forma identificarem T_pM amb el bidual i pensarem també en les derivacions com a aplicacions lineals de covectors. Per marcar aquesta simetria, sovint escriurem

$$\langle X_p, \omega_p \rangle = \omega_p(X_p) \in \mathbb{R}$$

tant per parlar de l'acció de ω_p sobre X_p com biceversa. També usarem aquesta notació en l'acció d'1-formes diferenciables sobre camps vectorials:

$$\langle X, \omega \rangle = \omega(X) \in \mathcal{F}(M).$$

Aquesta acció no ha estat definida, però és prou intuïtiva: a cada punt $p \in M$ retorna $\langle X_p, \omega_p \rangle \in \mathbb{R}$ per tant és una aplicació que envia punts de M a $\mathbb{R}$. Comprovar que és, en efecte, diferenciable és senzill si es pot demostrar que la composició d'aplicacions diferenciables és diferenciable (resultat que no ha estat demostrat en aquest treball, però que és trivial si s'estudia de forma local).

2.4 Tensors i formes diferenciables

Deixem un moment de banda l'estudi de varietats diferencials per parlar d'una estructura d'àlgebra: el tensor. S'han escrit llibres sencers sobre aquest concepte i no és gens senzill de resumir en poques paraules. A més, hi ha moltes definicions equivalents que es donen en funció de la perspectiva des de la qual s'estudien. En el nostre cas els estudiarem des de la perspectiva de les aplicacions multilineals:

Definició 2.9. *Definim un tensor Φ d'ordre r covariant i s contravariant (o d'ordre (r,s), per simplificar) definit sobre un espai vectorial V com una aplicació multilineal de la forma:*

$$\Phi : V^* \times \overset{r}{\cdots} \times V^* \times V \times \overset{s}{\cdots} \times V \to \mathbb{R}$$

Si tenim dos tensors Φ i Ψ d'ordres (r,s) i (t,h), definim el producte tensorial entre els dos, com el tensor:

$$\Phi \otimes \Psi : (V^* \times \overset{r+t}{\cdots} \times V^*) \times (V \times \overset{s+h}{\cdots} \times V) \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$\Phi \otimes \Psi(v_1, \dots, v_{r+t}, u_1, \dots, u_{s+h}) =$$
$$= \Phi(v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s) \cdot \Psi(v_{r+1}, \dots, v_{r+t}, u_{s+1}, \dots, u_{s+h}).$$

És fàcil veure que, per tota terna de tensors (Φ, Ψ, Θ) es té

$$(\Phi \otimes \Psi) \otimes \Theta = \Phi \otimes (\Psi \otimes \Theta).$$

És més, podem comprovar que tot tensor Φ d'ordre (r,s) es pot expressar de forma

$$\Phi = v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_s$$

sent $v_i : V^* \to \mathbb{R}$ i $\omega_j : V \to \mathbb{R}$ funcions lineals (o tensors d'ordre $(1,0)$ i $(0,1)$). Veiem, a més, que els ω_j són elements de V^* i els v_i són elements de V^{**} i, ja hem vist que els elements de V^{**} poden ser identificats de forma natural amb els elements de V $(v = \langle v, \cdot \rangle)$. Per tant, a partir d'ara no pensarem en el producte tensorial d'aplicacions lineals sinó d'elements de V i V^*.

Estudiem ara el cas en què V és de dimensió finita m, siguin $b_1, \dots, b_m$ una base de V i $b_1^*, \dots, b_m^*$ la base dual associada i siguin $v_i = v_i^1 b_1 + \cdots + v_i^m b_m$, amb $i = 1, \dots, r$, i $\omega_j = \omega_j^1 b_1 + \cdots + \omega_j^m b_m$, amb $j = 1, \dots, s$, observem que:

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_s =$$
$$= \left(\sum_{k_1=1}^{m} v_1^{k_1} b_{k_1} \right) \otimes \cdots \otimes \left(\sum_{k_r=1}^{m} v_r^{k_r} b_{k_r} \right) \otimes \left(\sum_{l_1=1}^{m} \omega_1^{l_1} b_{l_1}^* \right) \otimes \cdots \otimes \left(\sum_{l_s=1}^{m} \omega_s^{l_s} b_{l_s}^* \right) =$$
$$= \sum_{\substack{1 \le k_1, \dots, k_r \le m \\ 1 \le l_1, \dots, l_s \le m}} a_{k_1, \dots, k_r}^{l_1, \dots, l_s} b_{k_1} \otimes \cdots \otimes b_{k_r} \otimes b_{l_1}^* \otimes \cdots \otimes b_{l_s}^*.$$

Amb això deduïm que els tensors r covariants i s contravariants definits sobre V son generats pels m^{r+s} tensors

$$b_{k_1} \otimes \cdots \otimes b_{k_r} \otimes b_{l_1}^* \otimes \cdots \otimes b_{l_s}^*,$$

de fet, es pot comprovar que el conjunt de tots els tensors (r,s) (sovint denotat $T_s^r(V)$) és un espai vectorial i que els tensors mencionats formen base [6].

Tornant a les varietats diferencials, sigui M una varietat i $p \in M$ hem vist que, donat un entorn coordenat $(U, (x_1, \dots, x_m))$ podem expressar tot tensor $\Psi_p \in T_s^r(T_pM)$ de la forma:

$$\Psi_p = \sum_{\substack{1 \le k_1, \dots, k_r \le m \\ 1 \le l_1, \dots, l_s \le m}} a_{k_1, \dots, k_r}^{l_1, \dots, l_s} \left. \frac{\partial}{\partial x_{k_1}} \right|_p \otimes \cdots \otimes \left. \frac{\partial}{\partial x_{k_r}} \right|_p \otimes dx_{l_1}|_p \otimes \cdots \otimes dx_{l_s}|_p \qquad (2.2)$$

on totes les a indexades són constants que depenen del punt p triat. Podem entendre, doncs, les a indexades com aplicacions que envien M a $\mathbb{R}$. Tenim ja tots els ingredients per definir els tensors diferenciables:

Definició 2.10. *Anomenem tensor diferenciable Ψ (d'ordre (r,s)) d'una varietat M a l'estructura que associa a cada punt $p \in M$ un tensor Ψ_p d'ordre (r,s) de forma que, per tota tria de coordenades locals, totes les a indexades de la igualtat 2.2 són aplicacions diferenciables.*

Observem que, en particular, els camps vectorials són tensors diferenciables $(1,0)$ i les 1-formes diferenciables són tensors diferenciables $(0,1)$. Hi ha més exemples de tensors diferenciables, en aquest treball veuré només les k-varietats diferenciables, però n'hi ha molts més, com el tensor mètric, el de curvatura o el de Ricci que són molt importants, però queden fora l'abast d'aquest treball.

Un podria pensar, partint de la menció anterior, que es pot estendre el concepte de les 1-formes fàcilment a les k-formes com els tensors diferenciables $(0,k)$. I no aniria del tot desencaminat, però per guanyar-se el nom de k-forma, un tensor ha de complir dues propietats addicionals: ha de ser alternat i antisimètric.

Per la definició, un tensor diferenciable Ψ d'ordre $(0,k)$ associa a cada $p \in M$ una aplicació multilineal de la forma $\Psi_p : (T_pM)^k \to \mathbb{R}$. Direm que Ψ és alternat si, per tot p,

$$\Psi_p(X_1|_p, \ldots, X_k|_p) = 0$$

sempre que hi hagi una parella $X_i|_p = X_j|_p$ amb $1 \leq i < j \leq k$. Amb aquesta propietat, podem eliminar tots aquells sumands de l'expressió 2.2 que tinguin algun $dx_i|_p$ repetit. A més, si $k > m$ (on m és la dimensió de la varietat M), no hi pot haver cap sumand que no tingui termes repetits, per tant, l'únic tensor diferenciable alternat d'ordre $(0,k)$ amb $k > m$ és el tensor nul (que no és gaire interessant).

Per altra banda, si per tota permutació $\sigma \in S_k$ i tot $p \in M$ es té que

$$\Psi_p(X_1|_p, \ldots, X_k|_p) = signe(\sigma)\Psi_p(X_{\sigma(1)}|_p, \ldots, X_{\sigma(k)}|_p)$$

direm que Ψ és antisimètric. Amb aquesta propietat podem ajuntar els termes de l'expressió 2.2 que tenen els mateixos $dx_i|_p$ ordenats de formes diferents.

Definició 2.11. *Sigui M una varietat diferencial de dimensió m i $k \leq m$. Anomenem k-forma diferenciable a tot tensor diferenciable $(0,k)$ alternat i antisimètric.*

Per denotar un tensor alternat i antisimètric, sovint s'usa l'operador $\wedge$ en lloc de $\otimes$. Amb aquesta notació i fent ús de les dues propietats definides, localment podem reescriure l'expressió 2.2 aplicada a una k-forma diferenciable ω de la forma:

$$\omega_p = \sum_{1 \leq l_1 < \cdots < l_k \leq m} f_{l_1,\ldots,l_k}(p)\, dx_{l_1}|_p \wedge \cdots \wedge dx_{l_k}|_p$$

on $f_{l_1,\ldots,l_k} \in \mathcal{F}(M)$. L'espai de k-formes es denota $\Omega^k(M)$ i és un problema de combinatòria senzill comprovar que té dimensió

$$dim(\Omega_k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Per conveni, sovint es denota $\Omega^0(M) = \mathcal{F}(M)$. Es pot comprovar que $\Omega^k(M) \cong \Omega^{n-k}(M)$ relacionant cada k-forma $dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_k}$ de la base de $\Omega^k(M)$ amb la $(n-k)$-forma $dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{n-k}}$ on els índexs $j_1, \ldots, j_{n-k}$ són els que ens hem "saltat"en la tria de $l_1, \ldots, l_k$ (dit d'una altra forma, els j_i són els elements ordenats del conjunt resta $\{1, \ldots, n\} \setminus \{l_1, \ldots, l_k\}$).

2.5 Paracompacitat i particions de la unitat

Aquest apartat té menys explicacions intuïtives que els apartats anteriors, però hem de definir una eina imprescindible en l'estudi de les varietats que ens serà molt útil a l'hora de definir les integrals de formes diferenciables: les particions de la unitat. Per fer-ho ens centrarem en les propietats topològiques de les varietats centrant-nos sobretot en la paracompacitat. Aquest apartat segueix amb força fidelitat les referències [1, 12, 7].

Recordem que les propietats topològiques que ha de complir un espai per ser considerat varietat són el segon accioma de numerabilitat (la topologia de la varietat té una base d'oberts numerable) i la propietat Hausdorff (per a tota parella de punts p i q de la varietat es pot trobar una parella d'entorns oberts $p \in U$ i $q \in V$ disjunts). A més, el fet que sigui un espai localment euclidià ens assegura que també és localment compacte (tot punt té un entorn compacte). Una propietat molt forta que ens ajudarà a definir les particions de la unitat és la paracompacitat:

Definició 2.12 (Espai paracompacte)**.** *Un espai topològic X és paracompacte si és Hausdorff i tot recobriment obert de X té un refinament obert localment finit.*

En altres paraules, el que diu la definició és que si tenim un recobriment obert $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de X, podem triar alguns oberts $U_{\alpha'} \in \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ per formar un nou recobriment amb la propietat que per a tot $p \in M$ existeix un obert W_p tal que $W_p \cap U_{\alpha'} = \emptyset$, excepte en un nombre finit de α'. Enunciem doncs la proposició que volem demostrar:

Teorema 2.13. *Tota varietat topològica (o diferencial) M és paracompacta. A més, tot recobriment obert admet un refinament localment finit format per conjunts amb clausura compacta.*

Demostració. La condició Hausdorff la tenim assegurada per hipòtesi.

Comencem provant que existeix una base numerable de la topologia tal que tots els oberts tenen clausura compacta. Partim d'una base numerable $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. La compacitat local ens assegura que per a cada punt $p \in U_n$ existeix un $K_p \subset U_n$ entorn compacte de p. Com que $M \setminus K_p$ és obert, per la propietat Hausdorff podem assegurar que existeix un obert de la base $U_{n'}$ que conté p i és disjunt amb $M \setminus K_p$, dit d'una altra forma, $U_{n'} \subset K_p$. Aquest $U_{n'}$ és relativament compacte i compleix que $\overline{U}_{n'}$ és compacte. Per tant, tot obert de la base pot ser expressat com a unió d'oberts de la base amb la propietat de tenir clausura compacta.

A continuació volem provar que existeix una successió d'oberts $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tals que:

i) $\overline{G}_k$ compacte per a tot $k \in \mathbb{N}$.

ii) $\overline{G}_k \subset G_{k+1}$ per a tot $k \in \mathbb{N}$.

iii) $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$.

Per demostrar-ho, suposem que M no és compacte (en cas contrari el teorema estaria demostrat, perquè tot conjunt compacte és en particular paracompacte). Sigui $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerable de la topologia formada per oberts de clausura compacta, definim recursivament $G_1 = U_1$ i $G_{k+1} = \bigcup_{n=1}^{j_{k+1}} U_n$ on j_{k+1} és el natural més petit tal que $\overline{G}_k \subset \bigcup_{n=1}^{j_{k+1}} U_n$. Sabem que $j_k < j_{k+1}$ per a tot $k \in \mathbb{N}$, ja que, altrament, tindríem $G_k = \overline{G}_k$ i això implicaria que G_k és obert i tancat alhora, per tant, és M i és compacte, cosa que contradiu la hipòtesi. Així, hem trobat la successió buscada.

Acabem doncs la demostració: sabem que el conjunt $\overline{G}_k \setminus G_{k-1}$ és compacte i contingut per $G_{k+1} \setminus \overline{G}_{k-2}$. Per cada $k \geq 3$ triem un refinament finit del recobriment $\{U_n \cap (G_{k+1} \setminus \overline{G}_{k-2})\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\overline{G}_i \setminus G_{i-1}$ i triem un refinament finit també del recobriment $\{U_n \cap G_3\}_{n\in\mathbb{N}}$ del conjunt compacte $\overline{G}_2$. Clarament, la unió de tots aquests refinaments és numerable i localment finita, a més, per hipòtesi és un refinament localment finit de $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i els oberts que el conformen tenen clausura compacta. $\square$

Amb aquest resultat només ens queda una eina per definir les particions de la unitat. Anomenem suport d'una aplicació f a la clausura del compost del seu nucli, és a dir, al conjunt:

$$\text{suport}(f) = \overline{\{p \in M : f(p) \neq 0\}}.$$

És a dir, la clausura del conjunt de punts que no tenen imatge nul·la. Aquesta definició és equivalent amb formes diferenciables. En general, ens serà còmode treballar amb funcions i formes que tinguin suport compacte, amb aquest objectiu apareixen les particions de la unitat:

Definició 2.14 (Partició de la unitat)**.** *Sigui M una varietat diferencial, una partició de la unitat és una col·lecció de funcions diferenciables $\{\rho_\alpha : M \to \mathbb{R}\}_{\alpha\in A}$ tals que:*

i) $0 \leq \rho_\alpha \leq 1$ *per a tot* $\alpha \in A$.

ii) $\{suport(\rho_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ *és localment finita, és a dir, per a tot $p \in M$, existeix un entorn W_p de p on $W_p \cap suport(\rho_\alpha) = \emptyset$ excepte per un nombre finit de $\alpha \in A$.*

iii) $\sum_{\alpha\in A} \rho_\alpha(p) = 1$ *per a tot $p \in M$ (per la condició (ii) sabem que aquesta suma és sempre finita).*

Sigui $\{U_\beta\}_{\beta\in B}$ un recobriment d'oberts de M tal que, per a cada $\alpha \in A$, existeix un $\beta \in B$ tal que $suport(\rho_\alpha) \subset U_\beta$, direm que $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ és una partició subordinada a $\{U_\beta\}_{\beta\in B}$.

Ens interessa comprovar que sempre podem trobar una partició de la unitat amb certes característiques que ens puguin ser útils. Per fer-ho, cal veure primer un lema. Denotaré, a partir d'ara $C(r)$ al cub obert a un cert $\mathbb{R}^m$ amb vèrtexs $(\pm r, 0, \ldots, 0)$, $(0, \pm r, 0 \ldots, 0)$,$\ldots$,$(0, \ldots, 0, \pm r)$.

Lema 2.15. *Existeix una funció $\phi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ tal que $\phi(p) = 1$, si $p \in \overline{C(1)}$, i $\phi(p) = 0$, si $p \notin C(2)$.*

Demostració. Provem el cas $m = 1$. Observem que la funció

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad t \leq 0; \\ e^{-1/t} & \text{si} \quad t > 0. \end{cases}$$

és diferenciable, no-negativa i positiva per a tot $t > 0$. Llavors la funció:

$$g(t) = \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)},$$

és diferenciable, no-negativa i pren valor 1 per a tot $t \geq 1$ i valor 0 per a tot $t \leq 0$. Per acabar, la funció:

$$h(t) = g(t+2)g(2-t),$$

és diferenciable, no-negativa i pren valor 1 a l'interval $[-1, 1]$ i valor 0 fora l'interval $(-2, 2)$, tal com volíem.

Per demostrar el cas $m > 1$ és suficient escriure $\phi = (h \circ x_1) \cdots (h \circ x_m)$ on x_i és la funció que retorna la i-èssima coordenada de cada punt de $\mathbb{R}^m$. □

Teorema 2.16 (Existència de particions de la unitat amb suport compacte)**.** *Sigui M una varietat diferencial orientable i $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recobriment d'oberts de M. Llavors existeix una partició de la unitat numerable $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ subordinada al recobriment $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ i amb suport(ρ_n) compacte per a tot n.*

Demostració. Sigui $\{G_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successió d'oberts com la definida a la demostració de 2.13 i imposant $G_0 = \emptyset$. Per a tot $p \in M$, sigui k_p el natural més gran tal que $p \in M \setminus \overline{G}_{i_p}$. Triem un α_p tal que $p \in U_{\alpha_p}$ i sigui (V, ψ) un sistema de coordenades centrat en p (és a dir, tal que $\psi(p) = 0$) i tal que $V \subset U_{\alpha_p} \cap (G_{k_p+2} - \overline{G}_{k_p})$ i tal que $\psi(V)$ conté el cub tancat $\overline{C(2)}$. Definim

$$\tau_p(q) = \begin{cases} \phi \circ \psi(q), & \text{si} \quad q \in V; \\ 0, & \text{si} \quad q \notin V. \end{cases}$$

On ϕ és la funció definida al Lema 2.15. Tenim, doncs, una aplicació diferenciable amb suport compacte contingut en $V \subset U_{\alpha_p} \cap (G_{k_p+2} \setminus \overline{G}_{i_p})$ i que pren valor 1 en un cert entorn W_p de p. Repetint aquest procés un nombre finit de vegades, per a cada $i \geq 1$, podem cobrir tot el contorn $\overline{G}_i \setminus G_{i-1}$. Ordenant els τ_p (sabem que són numerables) tenim una successió τ_j on $j = 1, 2, \ldots$, tal que els suports formen una família localment finita de conjunts. Definim:

$$\tau = \sum_{j=1}^{\infty} \tau_j.$$

Veiem que és una aplicació diferenciable ben definida (a cada punt la suma és finita) i tal que $\tau(p) > 0$ per a tot $p \in M$. Només queda definir, per a cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\rho_n = \frac{\tau_n}{\tau}.$$

Que clarament formen una partició de la unitat amb suport compacte. □

3 Grups d'homologia

3.1 Símplexs diferencials

Comencem treballant amb varietats estudiant la seva perspectiva topològica: volem veure la versió diferencial dels grups d'homologia (concepte molt associat a la topologia). Per això començarem definint la versió diferencial dels símplexs singulars. I, a partir d'aquí, introduirem el concepte de grup d'homologia singular d'una varietat diferencial.

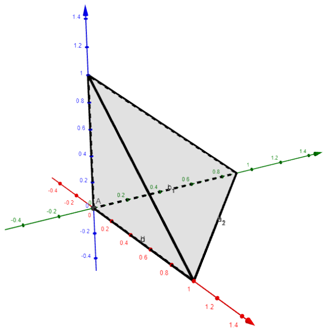


Figura 2: Símplex canònic de dimensió 3

Comencem, doncs, definint l'eina amb què treballarem en aquesta secció: els símplexs. A $\mathbb{R}^m$, un símplex és una generalització a k dimensions del concepte de triangle: siguin $p_0, \ldots, p_k \in \mathbb{R}^m$ punts tals que els vectors $(p_1 - p_0), \ldots, (p_k - p_0)$ són linealment independents, anomenem k-símplex generat per aquests punts al conjunt convex més petit que conté els punts [2]. En general, quan vulguem fer referència al símplex generat per punts $p_0, \ldots, p_k$ denotarem $\Delta[p_0, \ldots, p_k]$.

Veiem que tot k-símplex és difeomorf (i, en particular, homeomorf) al k-símplex canònic generat pels punts $0 = (0, \ldots, 0)$, $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_k = (0, \ldots, 0, 1)$ a $\mathbb{R}^k$, el qual denotarem per:

$$\Delta_k = \left\{ (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k : \sum_{i=1}^{k} x_i \leq 1;\ x_i \geq 0 \text{ per a tot } i \in \{1, \ldots, k\} \right\} =$$
$$= \Delta[0, e_1, \ldots, e_k].$$

Per conveni, direm que el 0-símplex canònic Δ_0 és un punt i que $\Delta_{-1} = \emptyset$. Si prenem $r+1$ punts (sent $r < k$) dels que generen Δ_k, al r-símplex generat per aquests punts se l'anomena r-cara de Δ_k.

En general anomenarem k-símplex diferencial en una varietat topològica M a un difeomorfisme $\sigma : \Delta_k \to M$.

Anomenem k-cadena a tota tria d'un nombre finit de k-símplexs. Sovint escriurem:

$$c = \sum_{i=1}^{n} a_i \sigma_i,\ a_i \in \mathbb{Z}.$$

Tot i que no hi ha cap interpretació algebraica d'aquestes sumes més enllà de tenir cert nombre de còpies de cada símplex [2]. El possible canvi de signe del coeficient d'un símplex fa referència al canvi d'orientació. Denotem C_k el conjunt de k-cadenes que té estructura de $\mathbb{Z}$-mòdul amb aquesta suma que hem definit i el producte per un enter. En general podem escriure el $\mathbb{Z}$-mòdul graduat:

$$C(M) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} C_k(M).$$

Com sempre que definim una estructura nova dins les matemàtiques hem de definir un tipus d'aplicació que les relacioni. Si tenim $f : M \to N$ una aplicació diferenciable entre varietats diferencials i $\sigma : \Delta_k \to M$ un k-símplex, definim $f_k^{\Delta}(\sigma) = f \circ \sigma$, que és una aplicació que envia símplexs de M a símplexs de N. Més en general, podem definir l'homomorfisme de mòduls $f_k^{\Delta} : C_k(M) \to C_k(N)$ de la forma:

$$f_k^{\Delta}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \sigma_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_k^{\Delta}(\sigma_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i (f \circ \sigma_i).$$

3.2 Operador vora i definició de grup d'homologia

Ara cal definir la vora d'un k-símplex. Definim primer la vora en el cas canònic. Denotaré $[p_0, \ldots, \hat{p_i}, \ldots, p_k]$ a la $(k-1)$-cara de Δ_k formada per tots els punts menys el p_i. Així, definim la vora del k-símplex canònic com la $(k-1)$-cadena:

$$\partial(\Delta_k) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [p_0, \ldots, \hat{p_i}, \ldots, p_k].$$

De nou, per conveni, definim $\partial(\Delta_0) = \emptyset$. Podem entendre aquest $(-1)^i$ de la definició com que, per defecte, els vèrtexs d'una $(k-1)$-cara estan definits en ordre creixent dels subíndexs i volem mantenir una mateixa orientació en totes les cares. Definim ara la vora d'un k-símplex diferencial:

$$\partial \sigma_k = \sigma_k^{\Delta} (\partial \Delta_k)$$

Aquest operador ∂_k es pot estendre en general totes les cadenes $\partial : C(M) \to C(M)$ de forma natural:

$$\partial \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \sigma_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \partial \sigma_i.$$

Amb aquest operador tenim un diagrama de la següent forma:

$$C_m(M) \xrightarrow{\partial} C_{m-1}(M) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_1(M) \xrightarrow{\partial} C_0(M) \tag{3.1}$$

Teorema 3.1. *Sigui $f : M \to N$ diferenciable, llavors $\partial \circ f_k^{\Delta} = f_{k-1}^{\Delta} \circ \partial$.*

Demostració. Veiem que

$$f_{k-1}^{\Delta} (\partial \sigma) = f_{k-1}^{\Delta} \left(\sigma_{k-1}^{\Delta}(\partial \Delta_k)\right) = (f \circ \sigma)_{k-1}^{\Delta}(\partial \Delta_k) = \partial (f \circ \sigma)_k = \partial \left(f_k^{\Delta}(\sigma)\right).$$

□

Un altre resultat important sobre l'operador ∂ és el següent:

Teorema 3.2. *Sigui M una varietat diferencial, llavors l'operador $\partial^2 = 0$.*

Demostració. Observem que

$$\partial^2(\sigma) = \sigma_{p-2}^{\Delta}(\partial^2(\Delta_k)),$$

per tant és suficient veure que $\partial^2(\Delta_k) = 0$:

$$\begin{aligned}
\partial^2(\Delta_k) &= \partial\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\Delta[p_0,\dots,\hat{p_i},\dots,p_k]\right) = \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\partial(\Delta[p_0,\dots,\hat{p_i},\dots,p_k]) = \\
&= \sum_{j<i}(-1)^{i+j}\Delta[p_0,\dots,\hat{p_j},\dots,\hat{p_i},\dots,p_k] + \\
&+ \sum_{i<j}(-1)^{i+j+1}\Delta[p_0,\dots,\hat{p_i},\dots,\hat{p_j},\dots,p_k] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ja que els símplexs de la primera suma estan també a la segona suma canviats de signe.

Podem interpretar aquesta demostració de la forma següent: si dos $(k-1)$-cares comparteixen una $(k-2)$-cara aquesta té una orientació induïda diferent respecte cadascuna d'elles, per tant, es cancel·la. □

Així queda clar que tota cadena que puguem obtenir com a vora d'una cadena d'ordre superior té vora nul·la. Aquesta propietat es resumeix dient que el diagrama 3.1 és un complex diferencial. En aquest punt un es podria preguntar, tota cadena de vora nul·la és vora d'una altra cadena?

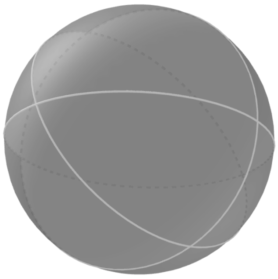
Doncs no sempre, de fet, els contraexemples que puguem trobar ens donen molta informació sobre la varietat en què estem. Volem doncs estudiar les k-cadenes que tenen vora nul·la (que denotarem k-cicles) que no puguem expressar com a vora d'una $(k+1)$-cadena.

Definició 3.3. *Denotem el $\mathbb{Z}$-submòdul de les k-cadenes, en una varietat diferencial M, que són vora d'una $(k+1)$-cadena com $V_k(M)$.*
Denotem el $\mathbb{Z}$-submòdul dels k-cicles a M com $Z_k(M)$.
El k-èssim grup d'homologia de la varietat diferencial M es defineix com el quocient:

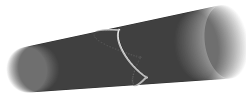
$$H_k(M) = \frac{Z_k(M)}{V_k(M)}.$$

Interpretem aquesta definició. Hem anomenat cicle a tota cadena que tingui vora nul·la, com pot passar això? Bé, tal com està definida la vora, les cares d'un mateix símplex no es cancel·len entre elles. Per tant, per cada símplex, hi ha d'haver un altre amb la que comparteixi cada cara orientada en sentit contrari. Intuïtivament, això pot passar de dues formes: tancant un poliedre (o la generalització del concepte poliedre a la dimensió corresponent) o encadenant infinits símplexs. Com una cadena té un nombre finit de símplexs, només pot ser la primera.

Així, hem vist que podem pensar en els elements de Z_k com cadenes tancades de símplexs. En conseqüència, el grup d'homologia el formen cadenes tancades que no són vora de cap cadena. Conceptualment, això ens diu que la regió interior no és difeomorfa a una cadena de símplexs, és a dir, no la podem "omplir"de la forma esperada. Intuïtivament, això només pot passar si hi ha un forat a dins. Òbviament, aquest estudi formal que hem fet no té per què generalitzar-se a aquelles varietats no *embedides* a un espai euclidià. Però és una bona forma d'interpretar-ho.



(a) 2-cicle a l'esfera



(b) 1-cicle al cilindre

Figura 3: Exemples de k-cicles que no són vores.

A més, els grups d'homologia també donen informació del tipus de forat que té la varietat. Pensem en exemples fàcils de visualitzar: les superfícies. Una esfera i un cilindre buits són superfícies que estan buides per dins, però no sembla que hagin de tenir els mateixos grups d'homotopia. En efecte, l'esfera la podem cobrir de 2-símplexs formant un cicle que no és vora, mentre que tot 1-cicle és vora d'un 2-cicle. Per altra banda, no hi ha forma de generar 2-cicles al cilindre i, en canvi, un 1-cicle que l'envolta no és vora de cap 2-cicle (Figura 3). De fet, es pot comprovar que, denotant $\mathbb{S}^2$ l'esfera i C^2 el cilindre:

$$H_2(\mathbb{S}^2) \cong H_1(C^2) \cong \mathbb{Z}; \text{ i } H_1(\mathbb{S}^2) \cong H_2(C^2) \cong \{0\}.$$

De nou, hem de definir quines seran les aplicacions que farem servir per treballar amb els grups d'homologia, en aquest cas, com són grups requerirem un morfisme:

Definició 3.4. *Sigui $f : M \to N$ una aplicació diferenciable, denotem $\bar{f} : H(M) \to H(N)$ l'homomorfisme determinat per l'homomorfisme de grups de cadenes $f^{\Delta} : C(M) \to C(N)$. En aquesta definició (i en general) posem $H(M) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} H_k(M)$.[3]*

Normalment, l'estudi del grup d'homologia correspon a la topologia i en aquesta, no podem permetre'ns el luxe de parlar de difeomorfismes o símplexs diferencials. Sovint es donen totes les definicions que hem fet servir fins ara usant símplexs singulars en lloc dels diferencials. Diem que una aplicació $\sigma : \Delta_k \to M$ és un k-símplex singular si és contínua. Veiem que aquesta definició és molt més general que la que hem fet servir, per tant, un es podria plantejar si els grups d'homologia són els mateixos definits de les dues formes. El teorema 9.42 de [2] demostra que els grups d'homologia definits pels símplexs diferencials i pels símplexs singulars són isomorfs. Per aquesta raó he decidit fer ús de les eines diferencials que les nostres varietats ens faciliten.

3.3 Homotopia topològica

Sovint es diu que la topologia és l'estudi de les característiques inherents a les formes que no tenen a veure amb mesures de distàncies ni angles. Aquesta definició és una mica pobra, però resumeix molt bé aquesta branca de les matemàtiques a algú que no està familiaritzat amb el seu llenguatge. I és que el concepte que ara treballarem, l'homotopia, té l'objectiu de relacionar varietats topològiques equivalents des del punt de vista dels grups d'homologia.

Definició 3.5. *Direm que dues aplicacions $f, g : M \to N$ són homotòpiques si existeix una aplicació contínua (que anomenarem homotopia) $h : [0,1] \times M \to N$ tal que $h_0 = f$ i $h_1 = g$ (sent $h_t = h(t,\cdot) : M \to N$ per a tot $t \in [0,1]$). Ho denotarem $f \sim g$.*

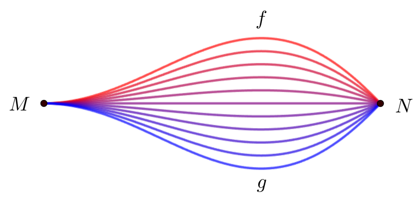


Figura 4: Representació conceptual d'aplicacions homotòpiques

Direm que dues varietats M i N són homotòpiques si existeixen $f : M \to N$ i $g : N \to M$ tals que $f \circ g$ i $g \circ f$ són homotòpiques a la identitat corresponent. Ho denotarem $M \sim N$.

La importància de l'homotopia es veu reflectida en el següent teorema i les seves interpretacions [2]:

Teorema 3.6 (d'homotopia)**.** *Si $f, g : M \to N$ són aplicacions homotòpiques, llavors $\bar{f} = \bar{g}$.*

Demostració. Per demostrar aquest teorema treballarem amb el prisma que té per base Δ_k i altura 1. Un resultat interessant de geometria és que es pot omplir aquest prisma de dimensió $k+1$ amb $(k+1)$-símplexs de la forma següent. Siguin $p_0, \ldots, p_k$ els punts que generen el símplex canònic Δ_k, denotarem $x_i = (0, p_i) \in \mathbb{R}^{k+1}$ i $y_i = (1, p_i) \in \mathbb{R}^{k+1}$ per a tot $i = 0, \ldots, k$. Definim el prisma canònic com la $(k+1)$-cadena:

$$P_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i [x_0, \ldots, x_i, y_i, \ldots, y_k].$$

Aquesta cadena cobreix el prisma mencionat anteriorment i les úniques interseccions són les cares dels símplexs. Amb aquesta definició podem definir l'operador prisma: per a tot $\sigma : \Delta_k \to M$, definim $P(\sigma) = (\pi_I \times \sigma)^\Delta(P_k) \in C_{k+1}(I \times M)$. On $\pi_I : I \times M \to I$ és la projecció definida per $\pi_I(t, x) = t$ (estic fent servir la notació $f \times g$ per representar l'aplicació que envia cada x a $(f(x), g(x))$). Conceptualment, podem pensar que l'operador P parteix d'un símplex i aixeca un prisma a $I \times M$ prenent aquest com a base. Podem estendre linealment aquesta definició a tota cadena, de forma que l'operador prisma és de la forma:

$$P : C_k(M) \to C_{k+1}(I \times M).$$

Deduïm una propietat que ens serà molt útil a l'hora de treballar amb P. Sigui $f : M \to N$ una aplicació contínua, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} C_k(M) \arrow[r, "P"] \arrow[d, "f^\Delta"'] & C_{k+1}(I \times M) \arrow[d, "(\pi_I \times f)^\Delta"] \\ C_k(N) \arrow[r, "P"'] & C_{p+1}(I \times N) \end{tikzcd}$$

és commutatiu. En efecte, deduïm el resultat per un k-símplex σ (linealment es dedueix el cas de les cadenes):

$$(\pi_I \times f)^\Delta(P(\sigma)) = (\pi_I \times f)^\Delta \circ (\pi_I \times \sigma)^\Delta \circ P_k = (\pi_I \times (f \circ \sigma))^\Delta \circ P_k = P(f^\Delta(\sigma)).$$

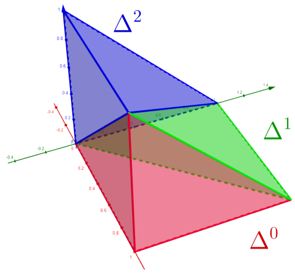


Figura 5: Prisma canònic P_2.

Amb tot això, comencem la demostració del teorema com a tal. Per començar veiem que:

$$\partial P = [y_0, \dots, y_k] - [x_0, \dots, x_k] - P(\partial[x_0, \dots, x_k]). \tag{3.2}$$

Geomètricament, el que ens diu aquesta fórmula és que les cares del prisma són, amb les corresponents orientacions, els símplexs superior i inferior i la vora del símplex inferior aixecada per P. Sembla molt intuïtiu a primer cop d'ull, comprovem-ho:

$$\begin{aligned}\partial P &= \sum_{i=0}^{k} \partial[x_0, \dots, x_i, y_i, \dots, y_k] \\ &= \sum_{j \leq i} (-1)^{i+j} [x_0, \dots, x_j, \dots, x_i\hat{,} y_i, \dots, y_k] + \\ &+ \sum_{i \leq j} (-1)^{i+j+1} [x_0, \dots, x_i, y_i, \dots, \hat{y_j}, y_k].\end{aligned}$$

Observem que el terme $[y_0, \dots, y_k]$ està al primer sumand i el terme $-[x_0, \dots, x_k]$ està al segon sumand. A més, els altres termes on $i = j$ es cancel·len. Per tant, podem escriure:

$$\begin{aligned}\partial P = [y_1, \dots, y_k] - [x_0, \dots, x_k] + \sum_{j<i} (-1)^{i+j} [x_0, \dots, \hat{x_j}, \dots, x_i, y_i, \dots, y_k] + \\ + \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1} [x_0, \dots, x_i, y_i, \dots, \hat{y_j}, \dots, y_k].\end{aligned}$$

Volem comprovar, doncs, que els sumatoris equivalen a $-P(\partial(x_0, \dots, x_k))$:

$$\begin{aligned}P(\partial[x_0, \dots, x_k] &= \sum_{j=0}^{k} P([x_0, \dots, \hat{x_j}, \dots, x_k]) \\ &= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} [x_0, \dots, x_i, y_i, \dots, \hat{y_j}, \dots, y_k] + \\ &+ \sum_{j<i} (-1)^{i+j-1} [x_0, \dots, \hat{x_j}, \dots, x_i, y_i, \dots, y_k].\end{aligned}$$

Per tant, per a tot k-símplex σ, podem aplicar $(\pi_I \times \sigma)$ a les dues bandes de (3.2) i obtenir:

$$\begin{aligned}(\pi_I \times \sigma)^{\Delta}(\partial P) = (\pi_I \times \sigma)^{\Delta}([y_0, \dots, y_k]) - (\pi_I \times \sigma)^{\Delta}([x_0, \dots, x_k]) - \\ -(\pi_I \times \sigma)^{\Delta}(P(\partial[x_0, \dots, x_k])).\end{aligned}$$

On estem interpretant els símplexs afins $[x_0, \ldots, x_k]$ i $[y_0, \ldots, y_k]$ com símplexs singulars de la forma $\Delta_k \to \mathbb{R}^{k+1}$. Observem que, per definició de les x_i i y_i i fent servir les propietats dels operadors ∂ i P podem escriure l'expressió com:

$$\partial \left((\pi_I \times \sigma)^\Delta (P) \right) = 1 \times \sigma - 0 \times \sigma - P(\sigma^\Delta(\partial[x_0, \ldots, x_k]))$$
$$1 \times \sigma - 0 \times \sigma = \partial(P(\sigma)) + P(\partial\sigma)$$

On 1 i 0 representen les aplicacions constants. Per tant, en general:

$$1 \times id_{C(M)} - 0 \times id_{C(M)} = \partial \circ P + P \circ \partial.$$

Ara, sigui $H : I \times M \to N$ una homotopia entre les aplicacions f i g. Aplicant H^Δ a les dues bandes:

$$H^\Delta \circ (1 \times id_{C(M)}) - H^\Delta \circ (0 \times id_{C(M)}) = H^\Delta \circ \partial \circ P + H^\Delta \circ P \circ \partial,$$

i ho podem simplificar a:

$$g^\Delta - f^\Delta = \partial \circ H^\Delta \circ P + H^\Delta \circ P \circ \partial$$

Per acabar, sigui $\alpha \in Z(M)$ un cicle, tenim:

$$g^\Delta(\alpha) - f^\Delta(\alpha) = \partial \circ H^\Delta \circ P(\alpha) + H^\Delta \circ P \circ \partial(\alpha) = \partial(H^\Delta \circ P(\alpha)) + 0$$

Ja que $\partial\alpha = 0$ per ser un cicle. Per tant, $f|_{Z(M)}$ i $g|_{Z(M)}$ difereixen en una vora. Fent el pas al quocient, $\bar{f} = \bar{g}$ i hem demostrat el teorema. □

Corol·lari 3.7. *Sigin M i N varietats topològiques (o diferencials) homotòpiques, llavors $H_k(M) \cong H_k(N)$ per a tot $k \in \mathbb{N}$.*

Demostració. Per hipòtesi, sabem que existeixen $f : M \to N$ i $g : N \to M$ tals que $f \circ g \sim id_N$ i $g \circ f \sim id_{\Omega(M)}$. Pel teorema anterior, sabem que $\overline{(f \circ g)} = \bar{f} \circ \bar{g} = id_{H(N)}$ i $\overline{(g \circ f)} = \bar{g} \circ \bar{f} = id_{H(M)}$. Per tant, $\bar{f}$ és un isomorfisme i $\bar{g}$ la seva inversa. □

4 Grups de cohomologia de deRham

4.1 L'operador diferencial exterior

En aquesta secció deixarem de banda tot el que hem vist dels grups d'homologia i reprendrem l'estudi de les formes diferenciables que havíem introduït a les nocions bàsiques. Sorprenentment, branques de les matemàtiques tan diferents com són el càlcul i la topologia quedaran connectades d'una forma molt elegant.

Per començar volem trobar un operador simètric (o dual) a l'operador vora amb el qual hem treballat durant la secció anterior. De fet, aquest operador ja s'ha introduït innocentment durant les nocions bàsiques quan hem definit la diferencial d'una aplicació diferenciable. No és altre que l'operador diferencial exterior. L'introduirem amb un teorema, però abans cal enunciar un lema que ens serà molt útil durant la demostració.

Lema 4.1. *Sigui U un obert d'una varietat diferencial M, suposem un $p \in U$ i una aplicació $f \in \mathcal{F}(U)$. Existeix un entorn $V \subseteq U$ de p i una aplicació g tals que $g|_V = f|_V$ i $g|_{U^c} = 0$, on $U^c = M \setminus U$.*

Demostració. Aquest lema apareix enunciat com a corol·lari a la pàgina 67 del llibre de William M. Boothby[17]. Una prova equivalent es troba a la pàgina 40 del mateix llibre. □

Ara sí, podem enunciar el teorema:

Teorema 4.2. *Sigui M una varietat diferencial de dimensió m i $\Omega(M) = \bigoplus_{k=0}^{m} \Omega_k(M)$ l'àlgebra de totes les formes diferenciables de M. Existeix un únic operador lineal $d : \Omega(M) \to \Omega(M)$ tal que:*

i) Si $f \in \Omega_0(M) = \mathcal{F}(M)$, llavors df és la diferencial de f introduïda a la definició (2.8).

ii) Si $\omega_1 \in \Omega_r(M)$ i $\omega_2 \in \Omega_s(M)$, llavors $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge d\omega_2$.

iii) $d^2 = 0$.

Demostració. Demostrarem dos resultats més bàsics abans de passar a demostrar el cas general:

- Suposem que M té una sola carta $(U, (x_1, \dots, x_m))$. Veiem que, si existeix l'operador d, ha de complir:

$$\begin{aligned} d(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k) =& d(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{k-1}) \wedge dx_m + (-1)^{k-1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{k-1} \wedge d^2 x_k \\ & \cdots \\ =& \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \cdots \wedge d^2 x_i \wedge \cdots \wedge dx_k \\ =& 0. \end{aligned}$$

On hem fet servir les propietats de l'enunciat. Per tant, com tota forma diferenciable es pot escriure globalment de la forma:

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} a_{i_1,\dots,i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Per linealitat podem escriure:

$$\begin{aligned} d\omega =& d\left(\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} a_{i_1,\dots,i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \right) = \\ =& \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} da_{i_1,\dots,i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = \\ =& \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial a_{i_1,\dots,i_k}}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \end{aligned}$$

on les a indexades són aplicacions de $\mathcal{F}(M) = \mathcal{F}(U)$. Per tant, hem trobat una definició de l'operador d que necessitem. És fàcil comprovar que l'operador definit per l'equació anterior està ben definit, compleix les propietats buscades del teorema i és únic.

- Ara, suposem el cas general, però intentem demostrar que la restricció de l'operador d a qualsevol carta existeix i és única. Amb el resultat obtingut a l'apartat anterior és suficient comprovar que per a tota forma diferenciable ω definida en tot M, es compleix la igualtat:

  $$(d\omega)|_U = d|_U \, \omega|_U \, .$$

  On U és un entorn coordenat. És fàcil veure que, com que U és una varietat diferencial amb una sola carta, l'existència i unicitat de la part dreta de la igualtat queda assegurada per l'apartat anterior.

  Sabem que, localment, podem escriure:

  $$\omega|_U = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} a_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

  Ara aplicarem el lema anterior, donat un $p \in U$ arbitrari i sigui un entorn W de p tal que la seva clausura està continguda en U, el lema ens assegura l'existència d'un entorn $V \subseteq W$ de p i aplicacions y_i i $b_{i_1,\ldots,i_k}$ de $\mathcal{F}(M)$ per a tots els $1 \le i \le k$ i $1 \le i_1 < \cdots < i_k$ tals que s'anul·len fora de W i són idèntiques a les respectives funcions x_i i $a_{i_1,\ldots,i_k}$ dins l'obert V. Definim doncs:

  $$\omega' = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} b_{i_1,\ldots,i_k} dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k} \in \Omega_k(M).$$

  Sigui ara $g \in \mathcal{F}(M)$ una aplicació que pren valor 1 al punt p i que s'anul·la fora de V. La k-forma $g \cdot (\omega - \omega')$ s'anul·la a tot arreu, així com ho fa $dg \wedge (\omega - \omega')$. Per tant:

  $$g d\omega = g d\omega' = g \cdot \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} b_{i_1,\ldots,i_k} dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}.$$

  Com que, localment, es té:

  $$\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} b_{i_1,\ldots,i_k} dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k} = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} a_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

  en particular, com que $g(p) = 1$, sabem que $(d\omega)|_p = (d|_U \omega)|_p$. Com p era arbitrari, hem demostrat que $(d\omega)|_U = d|_U \omega|_U$.

- Ara sabem que si d existeix ha de ser única, ja que localment ho és. Només ens falta provar que la definició local de d (que sabem que existeix en tot entorn coordenat) es comporta bé al canvi de carta. Siguin (U, ϕ) i (V, ψ) cartes coordenades tals que un cert p pertany a $W = U \cap V$, hem vist a la primera part de la prova que $d|_W \omega|_W$ existeix. A més, a la segona part hem vist que $(d|_U \omega_U)|_W = d|_W \omega|_W$ i el mateix per V. Per tant, ja sabem que han de ser iguals i l'operador d es comporta bé al canvi de carta.

$\square$

L'operador d definit al teorema anterior és el conegut operador diferencial exterior. Observem que, de forma similar a com passava amb l'operador ∂, el diagrama:

$$\Omega_0(M) \xrightarrow{d} \Omega_1(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega_m(M)$$

és un complex diferencial. I és que es poden trobar molts paral·lelismes amb l'operador ∂ com veurem més endavant.

4.2 L'aplicació *pullback*

Com hem fet ja més d'una vegada aquest treball, hem de definir les aplicacions que vindran induïdes per les aplicacions diferenciables [9, 11].

Definició 4.3. *Sigui $f : M \to N$ una aplicació diferenciable entre varietats, definim l'aplicació pullback de f com l'únic morfisme de mòduls lineal $f^* : \Omega(N) \to \Omega(M)$ definit de forma inductia:*

i) $f^*(g) = g \circ f \in \Omega_0(M)$ *per a tot* $g \in \mathcal{F}(N) = \Omega_0(N)$.

ii) $f^*(\omega) = \omega \circ df \in \Omega_1(M)$ *per a tot* $\omega \in \Omega_1(N)$.

iii) $f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = f^*(\omega_1) \wedge f^*(\omega_2)$ *per a tota parella* $\omega_1, \omega_2 \in \Omega(N)$.

És important remarcar que l'aplicació diferencial que apareix a la definició no és un cas particular de l'operador diferencial definit anteriorment, ja que f no és una 0-forma en general (ho seria en el cas en que $N = \mathbb{R}$).

Fixem entorns cordenats $(U, (x_1, \ldots, x_m))$ de M i $(f(U), (y_1, \ldots, y_n))$ de N. Amb aquesta definició és trivial comprovar que l'expressió local de f^* aplicada a una k-forma ω definida sobre N expressada localment en coordenades com:

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} a_{i_1,\ldots,i_k} dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k},$$

serà:

$$\begin{aligned} f^*(\omega) &= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} f^*(a_{i_1,\ldots,i_k}) f^*(dy_{i_1}) \wedge \cdots \wedge f^*(dy_{i_k}) \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} (a_{i_1,\ldots,i_k} \circ f)(dy_{i_1} \circ df) \wedge \cdots \wedge (dy_{i_k} \circ df). \end{aligned}$$

Observem també que $dy_k \circ df$ envia cada

$$X = b_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + b_m \frac{\partial}{\partial x_m} \in \mathfrak{X}(M)$$

a

$$dy_k(df(X)) = dy_k \left(\sum_{i=1}^m b_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \right) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_k} = df_k(X)$$

on $f_i = y_k \circ f$ és la i-èssima aplicació coordenada local de f. Per tant, podem reescriure l'expressió local de $f^*(\omega)$ com [9]:

$$f^*(\omega) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} (a_{i_1,\ldots,i_k} \circ f) df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k}$$

Hi ha un resultat molt important que relaciona l'operador diferencial exterior amb l'aplicació *pullback*:

Teorema 4.4. *Per a tota aplicació diferenciable $f : M \to N$ es té $f^* \circ d = d \circ f^*$.*

Demostració. Provarem el resultat en coordenades locals $(U,(x_1,\dots,x_m))$ de M i $(V,(y_1,\dots,y_m))$ de N (suposant $f(U)=V$):

$$\begin{aligned}(d\circ f^*)\omega =& d\left(f^*\left(\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le m} a_{i_1,\dots,i_k} dy_{i_1}\wedge\dots\wedge dy_{i_k}\right)\right)\\ =& d\left(\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le m} (a_{i_1,\dots,i_k}\circ f) df_{i_1}\wedge\dots\wedge df_{i_k}\right)\\ =& \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le m} d(a_{i_1,\dots,i_k}\circ f)\wedge df_{i_1}\wedge\dots\wedge df_{i_k}.\end{aligned}$$

Per altra banda:

$$\begin{aligned}(f^*\circ d)\omega =& f^*\left(d\left(\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le m} a_{i_1,\dots,i_k} dy_{i_1}\wedge\dots\wedge dy_{i_k}\right)\right)\\ =& f^*\left(\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le m} da_{i_1,\dots,i_k}\wedge dy_{i_1}\wedge\dots\wedge dy_{i_k}\right)\\ =& \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le m} f^*(da_{i_1,\dots,i_k})\wedge df_{i_1}\wedge\dots\wedge df_{i_k}\\ =& \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le m} (da_{i_1,\dots,i_k}\circ df)\wedge df_{i_1}\wedge\dots\wedge df_{i_k}.\end{aligned}$$

Per tant, el problema es redueix a provar que $dg\circ df = d(g\circ f)$ per a tota parella d'aplicacions $f: M\to N$ i $g: N\to\mathbb{R}$ diferenciables. Comprovem-ho amb la seva acció sobre els $\frac{\partial}{\partial x_k}$:

$$dg\circ df\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = dg\left(\frac{\partial}{\partial x_k}f\right) = dg\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_k}\frac{\partial g}{\partial y_i};$$

$$d(g\circ f)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial x_k}(g\circ f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_k}\frac{\partial g}{\partial y_i}.$$

On hem fet ús de la regla de la cadena, clarament, si són iguals localment per a tot obert coordenat, llavors són iguals globalment, per tant, queda demostrat el teorema. □

Observem que aquest resultat té un paral·lelisme directe amb l'estudi que hem fet de les cadenes. Les aplicacions induïdes d'aplicacions diferenciables en tots dos casos commuten amb els seus respectius operadors (vora i diferencial). Més endavant veurem que no és l'única connexió entre les cadenes i les formes diferenciables.

4.3 Definició dels grups de cohomologia de deRham

Tenim ja les eines per definir el grup de cohomologia de deRham. Però abans de fer-ho vull intentar mostrar les motivacions. Pensem en el cas $M=\mathbb{R}^2$, podem escriure qualsevol 1-forma de la següent manera:

$$\omega = f(x,y)dx + g(x,y)dy,$$

on f i g són aplicacions diferenciables. Suposem que $d\omega = 0$, podem assegurar que ω és la imatge per d d'alguna 0-forma? És a dir, hi ha alguna aplicació diferenciable H tal que $dH = \omega$?

Observem que la condició $d\omega = 0$ ens diu que:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy = 0,$$

o, equivalentment,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Prenem un primer candidat de l'aplicació que busquem:

$$F(x, y) = \int_0^x f(t, y)dt.$$

Clarament,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Llavors,

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = g(x, y) + c(y),$$

On c és la constant d'integració, que depèn només de y. Ara, sigui $C(y)$ una primitiva de $c(y)$, podem definir $H(x, y) = F(x, y) - C(y)$. Per definició és diferenciable, per tant, és una 0-forma i compleix:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial y}dy = fdx + gdy = \omega.$$

Així hem trobat que totes les 1-formes de $\mathbb{R}^2$ que tenen diferencial exterior nul·la són, de fet, la diferencial d'una 0-forma. Aquest resultat és cert per totes les k-formes a tots els $\mathbb{R}^m$ (la demostració és similar a la que he donat). Però no és sempre cert a la resta de varietats, per exemple la 1-forma a la varietat $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$: [21, 19]

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy,$$

Compleix $d\omega = 0$ però quan intentem fer el procediment anterior ens trobem que,

$$H(x, y) = \int_0^x \frac{-ydt}{t^2 + y^2} = \int_0^y \frac{tdt}{x^2 + t^2} = -\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{y}\right),$$

que no està definida a tota la varietat (li falta la recta $y = 0$ al domini), per tant, l'aplicació resultant H no serà una 0-forma. De fet, és fàcil comprovar que no hi ha cap 0-forma que tingui ω de diferencial, ja que totes les funcions candidates tenen algun $\mathrm{arctg}(x/y)$ o $\mathrm{arctg}(y/x)$ en la seva expressió. Quan portem aquesta 1-forma de nou a $\mathbb{R}^2$ veiem clar el que passa, ω no hauria de ser una forma diferenciable, ja que té una singularitat al punt $(0, 0)$. Però, com la nostra varietat té un forat, hem pogut agafar una 1-forma “dolenta” que és la que ens ha permès trobar un contraexemple.

Amb aquest exemple es comença a intuir la relació entre el grup d'homologia i les formes diferenciables i és que sembla natural definir l'estructura de les “males” formes diferenciables de la següent manera [16]:

Definició 4.5. *Diem que una forma és tancada si la seva imatge per d és nul·la. El conjunt de k-formes tancades de M es denota* $Z_k^*(M)$. *De la mateixa manera, diem que una forma* ω *és exacta si existeix una altra forma* α *tal que* $d\alpha = \omega$. *El conjunt de k-formes exactes es denota* $B_k^*(M)$. *Anomenem k-èssim grup de cohomologia de deRham al grup quocient:*

$$H_k^*(M) = \frac{Z_k^*(M)}{B_k^*(M)}.$$

Denotem per $f^\star$ *a l'aplicació induïda per* f^* *en passar al quocient.*

Per tant, en l'exemple anterior, hem comprovat que el primer grup de cohomologia de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ és no-trivial, de fet, es pot comprovar que és isomorf a $\mathbb{Z}$. Casualment (o no) el seu primer grup d'homologia també és isomorf a $\mathbb{Z}$.

4.4 Homotopia diferencial

Volem comprovar que amb aquesta nova definició, el resultat equivalent al teorema d'homotopia es compleix. Per fer-ho, donem una versió analítica de la definició d'homotopia:

Definició 4.6. *Siguin* $f, g : M \to N$ *aplicacions diferenciables entre varietats diferencials, diem que són* $\mathcal{C}^\infty$*-homotòpiques si existeix un* $\epsilon > 0$ *i una aplicació diferenciable*

$$H : (-\epsilon, 1+\epsilon) \times M \to N$$

tal que $H_0 = H(0, \cdot) = f$ *i* $H_1 = H(1, \cdot) = g$. *Denotem* $f \sim_\infty g$

De la mateixa forma, diem que M i N són $\mathcal{C}^\infty$*-homotòpiques si existeixen* $f : M \to N$ *i* $g : N \to M$ *tals que* $f \circ g \sim_\infty id_N$ *i* $g \circ f \sim_\infty id_{\Omega(M)}$. *Denotem* $M \sim_\infty N$.

Teorema 4.7 (Versió diferencial del teorema d'homotopia)**.** *Siguin* $f, g : M \to N$ $\mathcal{C}^\infty$*-homotòpiques, llavors* $f^\star = g^\star$.

Demostració. La demostració és similar a la que he donat en la versió topològica del teorema: volem trobar un operador

$$L : \Omega_k((-\epsilon, 1+\epsilon) \times M) \to \Omega_{k-1}(M)$$

tal que

$$d \circ L + L \circ d = (1 \times id_{\Omega(M)})^* - (0 \times id_{\Omega(M)})^*. \tag{4.1}$$

Definirem L de forma local en coordenades. Per simplificar la notació, a partir d'ara: $I = (-\epsilon, 1+\epsilon)$. Veiem que localment podem escriure tota k-forma $\omega \in \Omega_k(I \times M)$ com:

$$\begin{aligned}\omega = &\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} a_{i_1,\dots,i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} + \\ &+ \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_{k-1} \le m} b_{i_1,\dots,i_{k-1}} dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}}\end{aligned}$$

on he separat els sumands que tenen dt dels que no. Amb aquesta notació definim L de forma que:

$$L(\omega) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_{k-1} \le m} \left(\int_0^1 b_{i_1,\dots,i_{k-1}}(t, x_1, \dots, x_m) dt \right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}}.$$

On hem fet servir la integral de Lebesgue (o de Riemann) de funcions reals multiavaluades. Per facilitar la intuïció, podem pensar en L com l'operador "àrea escombrada al llarg d'I", tot i que aquesta consideració no és gens rigorosa, ja que les formes diferenciables són estructures abstractes i el terme àrea no ha estat definit. Estudiem les seves interaccions amb l'operador d:

$$\begin{aligned}
d \circ L(\omega) =& d\left(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_{k-1}\le m} \left(\int_0^1 b_{i_1,\dots,i_{k-1}}(t,x_1,\dots,x_m)dt \right) dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{k-1}} \right) \\
=& \sum_{1\le i_1<\cdots<i_{k-1}\le m} \sum_{l=1}^{m} \left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_l} b_{i_1,\dots,i_{k-1}}(t,x_1,\dots,x_m)dt \right) dx_l \wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{k-1}} \\
=& \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m} \left(\int_0^1 \sum_{l=1}^{k} (-1)^{l-1} \frac{\partial}{\partial x_l} b_{i_1,\dots,\hat{i}_l,\dots,i_{k-1}}(t,x_1,\dots,x_m)dt \right) \bigwedge_{l=1}^{k} dx_{i_l},
\end{aligned}$$

i, per altra banda,

$$\begin{aligned}
L \circ d(\omega) =& L\Bigg(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m} \frac{\partial}{\partial t} a_{i_1,\dots,i_k} dt\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k} \\
&+ \sum_{1\le i_1<\cdots<i_{k+1}\le m} \left(\sum_{l=1}^{k+1} (-1)^{l-1} \frac{\partial}{\partial x_{i_l}} a_{i_1,\dots,\hat{i}_l,\dots,i_{k+1}} \right) dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{k+1}} \\
&+ \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m} \left(\sum_{l=1}^{k} (-1)^{l} \frac{\partial}{\partial x_{i_l}} b_{i_1,\dots,\hat{i}_l,\dots,i_k} \right) dt\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k} \Bigg) \\
=& \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m} \left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} a_{i_1,\dots,i_k}(t,x_1,\dots,x_m)dt \right) dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k} \\
&+ \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m} \left(\int_0^1 \sum_{l=1}^{k} (-1)^{l} \frac{\partial}{\partial x_{i_l}} b_{i_1,\dots,\hat{i}_l,\dots,i_k}(t,x_1,\dots,x_m)dt \right) dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}
\end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned}
d\circ L(\omega) + L\circ d(\omega) &= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m} \left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} a_{i_1,\dots,i_k}(t,x_1,\dots,x_m)dt \right) dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k} \\
&= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m} a_{i_1,\dots,i_k}(1,x_1,\dots,x_m) dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k} \\
&- \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m} a_{i_1,\dots,i_k}(0,x_1,\dots,x_m) dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k} \\
&= (1\times id_{\Omega(M)})^*(\omega) - (0\times id_{\Omega(M)})^*(\omega).
\end{aligned}$$

Per tant, en general hem provat l'equació 4.1, la demostració acaba de forma molt similar a la seva versió topològic: observem que $f = H\circ(0\times id_{\Omega(M)})$ i $g = H\circ(1\times id_{\Omega(M)})$, per tant, també $f^* = (0\times id_{\Omega(M)})^*\circ H^*$ i $g^* = (1\times id_{\Omega(M)})^*\circ H^*$ aplicant H^* a les dues bandes:

$$\begin{aligned}
&d\circ L\circ H^* + L\circ d\circ H^* = (1\times id_{\Omega(M)})^*\circ H^* - (0\times id_{\Omega(M)})^*\circ H^* \\
&d\circ L\circ H^* + L\circ H^*\circ d = g^* - f^*
\end{aligned}$$

Per tant, sigui $\omega \in Z^*(M)$ una forma tancada, veiem que

$$\begin{aligned} d \circ L \circ H^*(\omega) + L \circ d \circ H^*(\omega) &= g^*(\omega) - f^*(\omega) \\ d \circ L \circ H^*(\omega) &= g^*(\omega) - f^*(\omega). \end{aligned}$$

Per tant, f^* i g^* difereixen en una forma exacta, fent el pas al quocient obtenim

$$f^\star = g^\star.$$

□

Corol·lari 4.8. *Siguin M i N varietats diferencials $\mathcal{C}^\infty$-homotòpiques, llavors $H_k(M) \cong H_k(N)$ per a tot $k \in \mathbb{N}$.*

Demostració. La prova d'aquest corol·lari és la mateixa que la del corol·lari 3.7. □

Observem que tota $\mathcal{C}^\infty$-homotopia és en particular una homotopia. Per tant, la versió topològica del teorema d'homotopia es compleix si f i g són $\mathcal{C}^\infty$-homotòpiques i també passa amb el corol·lari resultant si $M \sim_\infty N$ són $\mathcal{C}^\infty$-homotòpiques.

5 Integració i teorema d'Stokes

L'objectiu d'aquesta secció és relacionar els operadors que generen els grups d'homologia i cohomologia per tenir una visió clara de l'evident relació que hi ha entre ells.

5.1 Varietats orientables, formes volum i vora d'una varietat

Cal parlar ara sobre orientació, ja que un requisit important per poder definir una integral a una varietat és que sigui orientable. Quan un pensa intuïtivament en una superfície orientable a l'espai, pensa en una superfície que tingui dues cares: l'exemple típic de superfície no-orientable és la banda de Möbius, que en té només una. Quan s'avança més en l'estudi de les matemàtiques i es comença a treballar amb camps vectorials, Sovint es refereix a una orientació d'una superfície com un camp normal i unitari, és a dir, una associació a cada punt d'un vector ortogonal al pla tangent de la superfície en aquest punt. Ja podem veure el problema de generalitzar aquesta definició: estem suposant que la superfície està *embedida* a un espai euclidià de dimensió superior a la varietat, ja que en cas contrari no tenim forma de definir aquest vector ortogonal a l'espai tangent.

Anem a fer un petit parèntesi per treballar el cas clàssic de les superfícies dins l'espai $\mathbb{R}^3$. Sabem que siguin u i v vectors linealment independents tangents a la superfície en un punt (o, equivalentment, u i v formen una base del pla tangent), el seu producte vectorial $u \times v$ retorna un vector ortogonal. Per tant, normalitzant, $\frac{u \times v}{\|u \times v\|}$ és un vector candidat a orientació (per tenir una orientació hauríem de definir el mateix a cada punt de la varietat amb un cert grau de regularitat). Veiem doncs que podem determinar el vector normal i unitari triant una base de l'espai tangent. Aquesta serà la nostra clau per determinar l'orientació en el cas més general. Comprovem un resultat que ens permetrà caracteritzar les bases en funció de l'orientació que generen:

Proposició 5.1. *Siguin* $\{u_1, u_2\}$ *i* $\{v_1, v_2\}$ *dues bases d'un subespai de dimensió 2 a* $\mathbb{R}^3$ *tals que* $u_1 = a_1^1 \cdot v_1 + a_2^1 \cdot v_2$ *i* $u_2 = a_1^2 \cdot v_1 + a_2^2 \cdot v_2$*, llavors* $\frac{u_1 \times u_2}{\|u_1 \times u_2\|} = \frac{v_1 \times v_2}{\|v_1 \times v_2\|}$ *si, i només si, la matriu del canvi de base:*

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}$$

compleix $det(A) > 0$.

Demostració. Suposem que

$$\frac{u_1 \times u_2}{\|u_1 \times u_2\|} = \frac{v_1 \times v_2}{\|v_1 \times v_2\|}.$$

Sabem que $u_1 \times u_2 = (a_1^1 \cdot v_1 + a_2^1 \cdot v_2) \times (a_1^2 \cdot v_1 + a_2^2 \cdot v_2)$. Fent servir que el producte vectorial és, de fet, un tensor alternat i antisimètric, podem escriure:

$$u_1 \times u_2 = a_1^1 \cdot a_2^2 \cdot (v_1 \times v_2) + a_2^1 \cdot a_1^2 \cdot (v_2 \times v_1) = det(A) \cdot (v_1 \times v_2).$$

Per tant, fent servir la hipòtesi:

$$det(A) = \frac{\|u_1 \times u_2\|}{\|v_1 \times v_2\|} > 0.$$

Pel cas recíproc és suficient observar que:

$$\frac{u_1 \times u_2}{\|u_1 \times u_2\|} = \frac{det(A)}{|det(A)|} \cdot \frac{v_1 \times v_2}{\|v_1 \times v_2\|} = \frac{v_1 \times v_2}{\|v_1 \times v_2\|}$$

Ja que $det(A) = |det(A)|$. □

Amb aquest resultat podem pensar que l'orientació la defineixen les bases dels plans tangents i no pas els vectors normals. Així, generalitzem el concepte d'orientació de la següent manera.

Sigui V espai vectorial de dimensió m, definim la relació d'equivalència $\sim$ dins del conjunt de totes les bases de V (que anomenarem $B(V)$) de forma que $\{u_1, \ldots, u_m\} \sim \{v_1, \ldots, v_m\}$ si, i només si, la seva matriu del canvi de base té determinant positiu. Així, anomenarem orientació de V a cadascun dels termes del conjunt quocient $B(V)/\sim$. Veiem que aquest conjunt té dos elements, sovint els denotarem $[+]$ i $[-]$, on $[+]$ serà la classe de la base canònica, en el cas de l'espai $\mathbb{R}^m$ o de la base

$$\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_m}\right|_p \right\},$$

en el cas de T_pM.

Sigui una carta coordenada (U, ϕ) d'una varietat diferencial M de dimensió m, volem definir una orientació en aquesta carta. Per dotar a la definició d'una certa regularitat usarem les m-formes diferenciables que no s'anul·len en cap punt de U. Veiem que, si $X_1|_p, \ldots, X_m|_p$ és una base de T_pM per un cert $p \in U$ i $\omega \in \Omega^m(M)$ que no s'anul·la a p, llavors $\omega_p(X_1|_p, \ldots, X_m|_p) \neq 0$. En efecte, si no fos així, per linealitat, ω_p seria una aplicació nul·la. Observem que si $Y_1|_p, \ldots, Y_m|_p$ és una altra base, per multilinealitat,

$$\omega_p(Y_1|_p, \ldots, Y_m|_p) = det(A) \cdot \omega_p(X_1|_p, \ldots, X_m|_p),$$

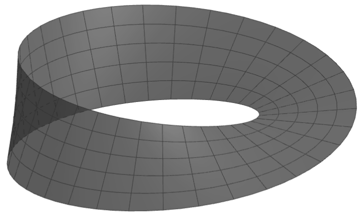


Figura 6: La banda de Möbius és l'exemple més famós de varietat no orientable

on A és la matriu del canvi de base. Per tant, el signe de $\omega_p(X_1|_p, \ldots, X_m|_p)$ és el mateix que el de $\omega_p(Y_1|_p, \ldots, Y_m|_p)$ si, i només si, són representants de la mateixa orientació. A més, per continuïtat, podem assegurar que el signe de

$$\omega_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p\right)$$

no canviarà en canviar el punt $p \in U$. Per tant, direm que l'orientació de ω a la carta (U, ϕ) és $[+]$ si

$$\omega_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p\right) > 0 \text{ per a tot } p \in U,$$

altrament direm que és $[-]$.

Cal fixar-nos en el canvi de carta, i és que, pot ser que les noves coordenades indueixin l'orientació contrària a la mateixa m-forma. Per inducció estendrem el concepte d'orientació fent algun canvi en la definició de les cartes si cal. Sigui ω una varietat que no s'anul·la a les cartes $(V, (x_1, \ldots, x_n))$ i (U_i, ϕ_i) per a tot $i \in I$, i tal que la seva orientació coincideix a totes les cartes (U_i, ϕ_i). Llavors, si l'orientació de ω canvia a la carta $(V, (x_1, \ldots, x_m))$, podem canviar-la per la carta $(V', (-x_1, x_2, \ldots, x_m))$, on $V' = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : (-x_1, x_2, \ldots, x_m) \in V\}$, d'aquesta forma l'estructura diferencial de M no es veu afectada i ω passa a tenir l'orientació adequada en aquesta carta. Finalment, si $\omega \in \Omega^m(M)$ no s'anul·la a cap punt de M, i fent els canvis que faci falta a l'atles de M, podem determinar una orientació global a ω. Per tant, direm que M és orientable si existeix una m-forma diferenciable que no s'anul·la a cap punt. En general, quan una m-forma no s'anul·li a cap punt, direm que és un volum.

Cal dir que aquests canvis de l'atles només cal fer-los una vegada i que si hem adaptat un atles per orientar un volum, aquest atles no requerirà cap canvi per orientar tots els altres volums. Ens referirem a aquests atles "finals" del procés com a atles orientats. També cal observar que l'orientació de cada volum ve determinat per la tria de l'atles orientat. A partir d'ara, direm que una varietat diferencial està orientada si ja té un atles orientat definit.

Quan hem definit el concepte de varietat ho hem fet amb el propòsit de trobar espais localment molt similars a un espai euclidià, suposant així que ens serà difícil imaginar estructures que no ho compleixin. Però per fer-ho hem ignorat un tipus d'estructura molt habitual i fàcil de trobar a la natura i al nostre entorn quotidià: les varietats amb vora. La descripció intuïtiva és molt senzilla, tenim una varietat diferencial amb totes les definicions observades fins ara, però arriba un punt on de cop acaba. Per exemple un disc, una fulla o un cub ple serien varietats diferencials que tenen un final o vora. El problema radica en el fet que no hi ha oberts de cap $\mathbb{R}^m$ que tinguin vora, per tant, no sabem treballar-hi localment en coordenades. Podríem considerar només els punts interiors com punts de la varietat i així no hauríem de gestionar el problema de treballar amb els punts de la vora (és el que hem estat fent fins ara), però hi ha resultats molt forts que requereixen treballar amb la vora de la varietat, com ho és el teorema d'Stokes.

Definició 5.2. *Un espai topològic M és una varietat topològica de dimensió m amb vora si compleix els requisits de les varietats topològiques i tot punt de M té un entorn homeomorf a*

$$\mathbb{H}^m = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_m \geq 0\}.$$

Per tenir una varietat diferencial amb vora només cal imposar la condició que el canvi de variables és un difeomorfisme. Anomenarem vora de M al conjunt de punts que són imatge de l'hiperplà

$$\partial\mathbb{H}^m = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_m = 0\},$$

sovint la denotarem per ∂M. A més, topològicament es veu que, encara que hi hagi un canvi de variables, un punt de la vora no pot ser imatge també d'un punt fora de $\partial\mathbb{H}^m$. A més sabem que $(\mathbb{H}^m \setminus \partial\mathbb{H}^m) \cong \mathbb{R}^m$ a partir del difeomorfisme:

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1}, \log x_n).$$

Per tant, si li ignorem la vora, obtenim una varietat diferencial clàssica com hem estudiat fins ara.

Observem que la vora és localment homeomorfa a oberts de $(\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}) \cong \mathbb{R}^{m-1}$, a més, la condició analítica de les varietats diferencials també es compleix. Dit d'una altra forma, ∂M és una varietat diferencial de dimensió $m-1$ sense vora (sovint escrivim $\partial(\partial M) = \partial^2 M = \emptyset$).

Sigui $(U, (x_1, \ldots, x_m))$ una carta coordenada de M que té punts de la vora i $p \in U \cap \partial M$, podem pensar que l'espai tangent $T_p(\partial M)$ és el subespai de T_pM que té per equació general $a_m = 0$. On a_m és el coeficient del terme $\frac{\partial}{\partial x_m}\Big|_p$ en l'expressió en la base natural de T_pM

És trivial veure que, si M és orientable, llavors ∂M també ho és. En efecte, sigui ω un volum, denotem $i\omega \in \Omega^{m-1}(\partial M)$ a la $(m-1)$-forma definida localment per:

$$i\omega_p\left(X_1|_p, \ldots, X_{m-1}|_p\right) = \omega_p\left(X_1, \ldots, X_{m-1}, \left.\frac{\partial}{\partial x_m}\right|_p\right).$$

Sent $p \in \partial M$ un punt qualsevol i $X_1, \ldots, X_{m-1}$ camps vectorials definits a la vora. Clarament, $i\omega$ no s'anul·la enlloc i és un volum de la vora. Així, direm que l'orientació induïda de $i\omega$ és l'orientació de ω.

5.2 Integració de m-formes sobre espais euclidians

Estudiem primer el cas on $M = \mathbb{R}^m$. Com que tota m-forma a $\mathbb{R}^m$ es pot expressar globalment com $\omega = f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$, podem definir:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \omega = \int_{\mathbb{R}^m} f(x_1, \ldots, x_m)\, dx_1 \ldots dx_m$$

on la integral de la dreta és la integral de Riemann o Lebesgue. Fàcilment, podem estendre la definició a tot subconjunt D de $\mathbb{R}^m$ de la forma següent:

$$\int_D \omega = \int_{\mathbb{R}^m} \chi_D \omega.$$

On χ_D és la funció característica de D. Aquí hem d'observar un detall: la forma $\chi_D \omega$ no és una forma diferenciable. Això no té per què ser un problema si assegurem una certa regularitat al conjunt D, és a dir, ens hem d'assegurar que els punts de discontinuïtat siguin controlables per poder assegurar la integrabilitat. Per això integrarem només sobre dominis d'integració [17]:

Definició 5.3 (Domini d'integració)**.** *Diem que un conjunt $D \subset \mathbb{R}^m$ és domini d'integració si la seva vora té mesura de Lebesgue nul·la.*

Per tant, ja podem integrar tranquil·lament sobre dominis d'integració a $\mathbb{R}^m$. Veiem que es compleixen les propietats més bàsiques de les integrals, siguin D i E dominis d'integració, $\omega, \alpha \in \Omega_m(\mathbb{R}^m)$ i $a, b \in \mathbb{R}$:

i) Si D té mesura de Lebesgue nul·la, llavors $\int_D \omega = 0$.

ii) $\int_D (a\omega + b\alpha) = a \int_D \omega + b \int_D \alpha$.

iii) $\int_{D\cup E} \omega = \int_D \omega + \int_E \omega - \int_{D\cap E} \omega$.

Comprovem ara un dels resultats més importants del càlcul integral i del que partirem per definir la integració dins de varietats [7].

Teorema 5.4 (Canvi de variables)**.** *Sigui ω una m-forma diferenciable a $\mathbb{R}^m$, U un domini d'integració i $\phi : U \to \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ un difeomorfisme que preserva l'orientació de $\mathbb{R}^m$ (és a dir, $det(D\phi) > 0$ on $D\phi$ és la matriu jacobiana o matriu associada a $d\phi$), llavors:*

$$\int_{\phi(U)} \omega = \int_U \phi^*(\omega).$$

Demostració. Fent ús de la fórmula clàssica del canvi de variables i suposant que $\omega = f\ dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$:

$$\begin{aligned}
\int_{\phi(U)} \alpha &= \int_{\phi(U)} f(x_1, \ldots, x_m)\ dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m \\
&= \int_U f \circ \phi(y_1, \ldots, y_m)\ |\det D\phi|\ dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_m \\
&= \int_U f \circ \phi(y_1, \ldots, y_m)\ \det D\phi\ dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_m \\
&= \int_U \phi^* \omega.
\end{aligned}$$

Ja que:

$$\begin{aligned}
\phi^*\omega =& f\circ\phi(y_1,\dots,y_m)\, d\phi_1\wedge\cdots\wedge d\phi_m\\
=& f\circ\phi(y_1,\dots,y_m)\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\phi_1}{\partial y_i}dy_i\right)\wedge\cdots\wedge\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\phi_m}{\partial y_i}dy_i\right)\\
=& f\circ\phi(y_1,\dots,y_m)\left(\sum_{1\le i,j\le m}(-1)^{i+j}\frac{\partial\phi_i}{\partial y_j}\right)dy_1\wedge\cdots\wedge dy_m\\
=& f\circ\phi(y_1,\dots,y_m)\,\mathrm{det}D\phi\; dy_1\wedge\cdots\wedge dy_m.
\end{aligned}$$

□

5.3 Integració sobre cadenes i versió simplicial del teorema d'Stokes

Volem generalitzar el concepte d'integració a varietats diferencials. Per fer-ho comencem amb una primera aproximació: la integració sobre cadenes. És evident que el símplex canònic:

$$\Delta_m = \Delta[0, e_1, \dots, e_m] \subset \mathbb{R}^m$$

és un domini d'integració, de fet tots els símplexs ho són. Per tant, tots els resultats de l'apartat anterior hi apliquen. Com que els símplexs diferencials són, en particular, difeomorfismes, podem fer servir la idea del teorema del canvi de variables per definir:

Definició 5.5. *Sigui M una varietat diferencial, $\omega \in \Omega_k(M)$, $\sigma : \Delta_m \to M$ un k-símplex diferencial, definim la integral de ω sobre σ com:*

$$\int_\sigma \omega = \int_{\Delta_k} \sigma_k^*(\omega).$$

Sigui $c\sum_{i=1}^n a_i\sigma_i \in C_k(M)$ una k-cadena, definim la integral de ω sobre c com:

$$\int_c \omega = \sum_{i=1}^n a_i \int_{\sigma_i}\omega = \sum_{i=1}^n a_i\int_{\Delta_k}\sigma_i^*(\omega).$$

Notem que, per completar la definició resulta natural definir la integral de 0-formes (funcions) sobre 0-cadenes (punts), per això hem de tenir definida la integral d'una funció diferenciable en un conjunt d'un sol punt de $\mathbb{R}^m$. Ho farem de la següent manera, sigui $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ i $p \in \mathbb{R}^m$, definim, per conveni:

$$\int_{\{p\}} f = f(p).$$

Més endavant veurem que la idea d'aquesta definició és generalitzar el teorema fonamental del càlcul.

Observem una propietat òbvia, però interessant: si pensem en la integral com una operació $\int : C_k \times \Omega_k \to \mathbb{R}$ podem comprovar fàcilment que és bilineal, ja que:

$$\int_{a\sigma_1+b\sigma_2}\omega = a\int_{\sigma_1}\omega + b\int_{\sigma_2}\omega \text{ i}$$

$$\int_\sigma (c\omega + d\alpha) = c\int_\sigma \omega + d\int_\sigma \alpha.$$

L'únic detall és que $a, b\mathbb{Z}$ mentre que $c, d \in \mathbb{R}$, veiem que si prenem el cas particular $c = a$ i $d = b$ les fórmules anteriors són iguals. Les dues propietats es dedueixen directament de la definició. Per interpretar-les mirem un moment el cas $k = 1$, en aquesta dimensió, els símplexs diferencials són de fet les corbes diferenciables i la suma de símplexs es pot pensar com la concatenació de corbes (permetent salts). La primera propietat resulta òbvia en aquest context. La segona propietat és fonamental en tots els contextos on apareix la integració, així que no resulta gens difícil intuir que és certa. Tampoc és complicat deduir la següent propietat, sigui $f : M \to N$ una aplicació diferenciable, $\omega \in \Omega_k(N)$ i $c \in C(M)$:

$$\int_{f^\Delta(\sigma)} \omega = \int_{f\circ\sigma} \omega = \int_{\Delta_k} (f\circ\sigma)^*(\omega) = \int_{\Delta_k} \sigma^*\circ f^*(\omega) = \int_\sigma f^*(\omega)$$

Queda molt clar doncs que la integral relaciona molt intensament les operacions i transformacions que fem servir per treballar amb les cadenes i amb les formes diferenciables. Aquesta idea culmina amb el següent teorema [12]:

Teorema 5.6 (Teorema d'Stokes, versió simplicial)**.** *Sigui M una varietat diferencial, $c \in C_k(M)$ ($k > 0$) i $\omega \in \Omega_{k-1}(M)$, llavors*

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega.$$

Demostració. Per linealitat de les integrals respecte a les cadenes, és suficient provar el resultat en el cas en què $c = \sigma = \delta[p_0, \dots, p_k]$ on $p_i \in M$ és un símplex:

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \int_\sigma d\omega \tag{5.1}$$

Fent ús de les definicions i propietats de cada operador:

$$\int_\sigma d\omega = \int_{\Delta_k} \sigma^*(d\omega) = \int_{\Delta_k} d(\sigma^*(\omega)) = \int_{\Delta_k} d(\omega\circ\sigma),$$

i, també, definint $\sigma_i = \Delta[p_0, \dots, \hat{p_i}, \dots, p_m]$

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \int_{\sum_{i=0}^k (-1)^i\sigma_i} \omega = \sum_{i=0}^k (-1)^i \int_{\sigma_i} \omega = \sum_{i=0}^k (-1)^i \int_{\Delta_{k-1}} \omega\circ\sigma_i.$$

Suposem el cas $k = 1$, fent ús del teorema fonamental del càlcul:

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \int_0 \omega\circ\sigma - \int_1 \omega\circ\sigma = \omega(\sigma(1)) - \omega(\sigma(0)) = \int_{[0,1]} \frac{d}{dt}(\omega\circ\sigma)dt = \int_\sigma d\omega$$

Suposem $k > 1$. Sabem que la $k-1$-forma $\sigma^*(\omega)$ a $\Delta_k \subset \mathbb{R}^k$ pot ser expressada com:

$$\sigma^*(\omega) = \sum_{j=1}^k f_j\ dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_k.$$

On $f_i : \Delta_k \to \mathbb{R}$ són funcions diferenciables. Per linealitat, considerarem només el cas:

$$\sigma^*(\omega) = f_j\ dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_k.$$

Observem que la part dreta de la igualtat 5.1 esdevé

$$\int_\sigma d\omega = \int_{\Delta_k} (-1)^{j-1} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k = \int_{\Delta_k} (-1)^{j-1} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}\, dx_1 \dots dx_k.$$

A la banda esquerra tenim

$$\begin{aligned}\int_{\partial\sigma} \omega &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \int_{\Delta_{k-1}} \sigma_i^* \circ (\sigma^{-1})^* (f_j\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_k) \\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \int_{\Delta_{k-1}} (\sigma^{-1} \circ \sigma_i)^* (f_j\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_k) \\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \int_{\Delta_{k-1}} f_j \circ \sigma^{-1} \circ \sigma_i\, dy_{1,i} \wedge \cdots \wedge \widehat{dy_{j,i}} \wedge \cdots \wedge dy_{k,i}\end{aligned}$$

On $y_{l,i} = x_l \circ \sigma^{-1} \circ \sigma_i$. Volem trobar l'expressió de $y_{l,i}$ en general. Separem en casos:

Si $i = 0$: Sabem que $\sigma^{-1} \circ \sigma_i$ envia cada punt $(x_1, \dots, x_{k-1})$ del símplex canònic Δ_{k-1} al punt $(1 - \sum_{p=1}^{k-1} x_p, x_1, \dots, x_{k-1})$ de la cara de Δ_k que no té l'origen. Per tant, $y_{1,0} = 1 - \sum_{p=1}^{k-1} x_p$ i $y_{l,0} = x_{l-1}$ si $l > 1$.

Si $i > 0$: És fàcil comprovar que $y_{i,i} = 0$, cosa òbvia, ja que la cara de Δ_k sense el vèrtex p_i està continguda al pla $x_i = 0$. Ara, $\sigma^{-1} \circ \sigma_i$ envia cada punt $(x_1, \dots, x_{k-1})$ a $(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{k-1})$.

Veiem doncs que tots els sumands de l'expressió anterior s'anul·len menys dos:

$$\begin{aligned}\int_\sigma d\omega = &\int_{\Delta_{k-1}} f_j(1 - \sum_{p=1}^{k-1} x_p, x_1, \dots, x_{k-1})\, d(1 - \sum_{p=1}^{k-1} x_p) \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_{k-1} \\ &+(-1)^j \int_{\Delta_{k-1}} f_j(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{k-1})\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_k \\ &=(-1)^{j-1} \int_{\Delta_{k-1}} f_j(1 - \sum_{p=1}^{k-1} x_p, x_1, \dots, x_{k-1})\, dx_1 \dots dx_{k-1} \\ &+(-1)^j \int_{\Delta_{k-1}} f_j(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{k-1})\, dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_k.\end{aligned}$$

Apliquem a la integral del primer sumand, el canvi de variables:

$$\psi(x_1, \dots, x_{k-1}) \begin{cases} (x_1, \dots, x_{k-1}), & \text{si} \quad j = 0; \\ (x_2, \dots, x_{j-1}, 1 - \sum_{p=1}^{k-1} x_p, x_j, x_{k-1}), & \text{si} \quad j \neq 0. \end{cases}$$

Aquest canvi de variables envia punts de Δ_{k-1} a Δ_{k-1} i el determinant de la seva matriu jacobiana és ± 1. Com estem calculant una matriu de Riemann, la fórmula del canvi de variable pren el valor absolut d'aquest determinant. Així, doncs, ens queda la igualtat:

$$\begin{aligned}\int_\sigma d\omega =&(-1)^{j-1} \int_{\Delta_{k-1}} f(x_1, \dots, x_{j-1}, 1 - \sum_{p=0}^{k-1} x_p, x_j, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_{k-1} \\ &+(-1)^j \int_{\Delta_{k-1}} f(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_{k-1}.\end{aligned}$$

Ara, apliquem la versió real del teorema de Fubini a la banda esquerra de la igualtat:

$$\begin{aligned}\int_{\partial\sigma}\omega =& \int_{\Delta_k}(-1)^{j-1}\frac{\partial f_j}{\partial x_j}\,dx_1\dots dx_k \\ =&(-1)^{j-1}\int_{\mathbb{R}^{k-1}}\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\chi_{\Delta_k}\frac{\partial f_j}{\partial x_j}\right)(x_1,\dots,x_{j-1},t,x_j,\dots,x_{k-1})dt\right)dx_1\dots dx_{k-1}\end{aligned}$$

Veiem que $(x_1,\dots,x_{j-1},t,x_j,\dots,x_{k-1})\in\Delta_k$ si, i només si, $(x_1,\dots,x_{k-1})\in\Delta_{k-1}$ i $t\in\left[0,1-\sum_{l=0}^{k-1}x_l\right]$, per tant:

$$\begin{aligned}\int_{\partial\sigma}\omega =&(-1)^{j-1}\int_{\Delta_{k-1}}\left(\int_0^{(1-\sum_{l=0}^{k-1}x_l)}\frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x_1,\dots,x_{j-1},t,x_j,\dots,x_{k-1})dt\right)dx_1\dots dx_{k-1} \\ =&(-1)^{j-1}\int_{\Delta_{k-1}}f(x_1,\dots,x_{j-1},1-\sum_{l=0}^{k-1}x_l,x_j,\dots,x_k)\,dx_1\dots dx_{k-1} \\ &+(-1)^{j}\int_{\Delta_{k-1}}f(x_1,\dots,x_{j-1},0,x_j,\dots,x_k)\,dx_1\dots dx_{k-1}.\end{aligned}$$

Hem arribat a la mateixa expressió per les dues bandes, això demostra el teorema. □

Aquest resultat és molt fort, ja que hem connectat completament les estructures i operadors que generen els grups d'homologia i de cohomologia. Ara, sembla completament natural que existeixin aquestes relacions que hem descobert. De fet, en general, és més senzill computar els grups de cohomologia de deRham, per tant, aquest resultat no és només teòric, sinó que ens ajuda en l'estudi dels grups d'homologia.

5.4 Versió general de la integració sobre varietats i el teorema d'Stokes

En aquest apartat, podrem considerar que la nostra varietat tingui vora. Sigui M una varietat diferencial i $\{(U_a,\phi_a)\}_{a\in A}$ un atles diferenciable orientat (sobre $\mathbb{R}^m$ o $\mathbb{H}^m$) no és complicat definir la integral d'una m-forma diferenciable amb suport compacte contingut en una carta coordenada (U,ϕ). Ja que, de la mateixa forma que hem fet amb els símplexs, podem definir:

$$\int_U\omega=\int_{\phi(U)}(\phi^{-1})^*(\omega).$$

On la part dreta de la igualtat la sabem calcular, ja que és una integral real. El cas general on ω no té suport compacte podem computar la integral fent ús de les particions de la unitat (definides a les nocions bàsiques): sigui $\{\rho_a\}_{a\in A}$ una partició de la unitat subordinada a $\{U_a\}_{a\in A}$. Podem definir:

$$\int_M\omega=\sum_{a\in A}\int_{U_a}\rho_a\omega.$$

Veiem que la part dreta la podem calcular, ja que és una suma finita d'integrals sobre m-formes amb suport compacte.

Proposició 5.7. *La definició de l'integral $\int_M\omega$ està ben definida, és a dir, no depèn de l'atles orientat o la partició de la unitat triada (tret del canvi d'orientació de l'atles).*

Demostració. Siguin $\{U_a, \phi_a\}_{a\in A}$ i $\{V_b, \psi_b\}_{b\in B}$ atles orientats i $\{\rho_a\}_{a\in A}$ i $\{\chi_b\}_{b\in B}$ les seves respectives particions de la unitat subordinades. Com que $\sum_{b\in B} \chi_b = 1$, podem escriure:

$$\sum_{a\in A} \int_{U_a} \rho_a\omega = \sum_{a\in A,\, b\in B} \int_{U_a} \rho_a\chi_b\omega.$$

On $\rho_a\chi_b\omega$ té suport compacte dins de $U_a \cap V_b$ per a tot $a \in A$ i $b \in B$, per tant:

$$\int_{U_a} \rho_a\chi_b\omega = \int_{V_b} \rho_a\chi_b\omega,$$

i podem escriure, per simetria:

$$\sum_{a\in A} \int_{U_a} \rho_a\omega = \sum_{a\in A,\, b\in B} \int_{U_a} \rho_a\chi_b\omega = \sum_{a\in A,\, b\in B} \int_{V_b} \rho_a\chi_b\omega = \sum_{b\in B} \int_{V_b} \chi_b\omega.$$

□

Observar que en cap punt de la demostració hem diferenciat les varietats amb vora de les que no en tenen. Volem demostrar, doncs, el teorema d'Stokes en la seva versió general:

Teorema 5.8 (Teorema d'Stokes, versió general)**.** *Sigui ω una $(m-1)$-forma amb suport compacte sobre una varietat orientada M de dimensió m, llavors:*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

on ∂M ve dotada per l'orientació induïda per M.

Demostració. Podem simplificar una mica les condicions de l'enunciat. En primer lloc, podem suposar que ω té suport compacte contingut en una carta (U, ϕ). En efecte, si no fos el cas, trobaríem una partició de la unitat $\{\rho_a\}_{a\in A}$ subordinada a l'atles orientat $\{(U_a, \phi_a)\}_{a\in A}$ (que de fet podríem considerar finita, ja que ω té suport compacte) i reduiríem el problema a veure que cada sumand de $\sum_{a\in A} \int_{U_a} \rho_a\omega$ compleix el teorema. Per tan podem escriure:

$$(\phi^{-1}) * (\omega) = \sum_{i=1}^{m} f_i \; dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_m.$$

On els f_i són funcions reals amb suport compacte. I podem reescriure l'enunciat del teorema com:

$$\int_{\phi(U)} \sum_{i=1}^{m} d(f_i \; dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_m) = \int_{\phi(U)\cap\partial\mathbb{H}^m} \sum_{i=1}^{m} f_i \; dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_m.$$

Estem simplificant el problema suposant que M és una varietat amb vora, en cas que no ho fos, com sabem que $\mathbb{R}^m$ és difeomorf amb l'interior de $\mathbb{H}^m$, així que només caldria fer un canvi de variables i juntament amb el fet que $\partial M = \phi(U) \cap \partial\mathbb{H}^m = \emptyset$ arribaríem a l'equació anterior. Podem fer una nova simplificació, ja que podem estendre cada f_i per que estiguin definides sobre tot $\mathbb{H}^m$ de forma trivial: determinem que sigui $f_i|_{\mathbb{H}^m\setminus\phi(U)} = 0$. És fàcil veure que les funcions no perden la seva regularitat, així podem escriure:

$$\int_{\mathbb{H}^m} \sum_{i=1}^{m} d(f_i\ dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_m) = \int_{\partial\mathbb{H}^m} \sum_{i=1}^{m} f_i\ dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_m.$$

Hem reduït el problema a demostrar que el teorema es compleix a $\mathbb{H}^m$! Anem per passos, doncs, en primer lloc,

$$d(f_i\ dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_m) = \left(\sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m.$$

I, amb això:

$$\int_{\mathbb{H}^m} \left(\sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{H}^m} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\ dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \cdots \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\ dx_1 \dots dx_m.$$

Aplicant el teorema de Fubini, veiem que tots els termes f_i amb $1 \leq i < m$ compleixen:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \cdots \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i\right)\ dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_m =$$
$$= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \cdots \int_{-\infty}^\infty \lim_{x_i \to \infty} f_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m)\ dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_m -$$
$$- \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \cdots \int_{-\infty}^\infty \lim_{x_i \to -\infty} f_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m)\ dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_m = 0$$

Ja que, en tenir f_i suport compacte, el seu valor és 0 quan tendeix a $\pm\infty$. L'únic sumand que no s'anul·la necessàriament, és:

$$- \int_{-\infty}^\infty \cdots \int_{-\infty}^\infty \left(\int_0^\infty \frac{\partial f_m}{\partial x_m}\ dx_m\right) dx_1 \dots dx_{m-1} =$$
$$= \int_{-\infty}^\infty \cdots \int_{-\infty}^\infty f_m(x_1, \dots, x_{m-1}, 0)\ dx_1 \dots dx_{m-1} =$$

Ara, l'altra banda, fent servir que la integral en funció de x_m és nul·la a $\partial\mathbb{H}^m$ (ja que és constant):

$$\int_{\partial\mathbb{H}^m} \sum_{i=1}^{m} f_i\ dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_m = \int_{\partial\mathbb{H}^m} f_m\ dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{m-1} =$$
$$= \int_{-\infty}^\infty \cdots \int_{-\infty}^\infty f_m(x_1, \dots, x_{m-1}, 0)\ dx_1 \dots dx_{m-1}$$

Per tant, com hem arribat al mateix resultat per les dues bandes, donem per demostrat el teorema. □

6 Didàctica de la topologia a l'esfera

Més enllà de la part teòrica treballada fins ara, aquest treball és també de didàctica. Per tant, cal pensar la manera d'explicar conceptes relacionats amb el grup de deRham a un grup sense formació matemàtica. Qualsevol que hagi seguit el treball comprendrà la dificultat de tal repte. Per tant, he reduït el problema a aconseguir que entenguin la motivació darrere l'estudi de les geometries no-euclidianes per descobrir l'estructura sobre la qual estem. Per fer-ho senzill, he reduït el problema a treballar sobre dimensió 2, d'aquesta forma pot ser interessant estudiar la geometria a les superfícies d'una esfera i un tor. Començaré aquesta secció estudiant textos, de didàctica generalista o específica d'un tema proper al que he plantejat, per poder triar amb propietat aquelles idees més interessants per fer l'activitat.

6.1 Referències consultades a l'hora de plantejar l'activitat

6.1.1 *Transformacions geomètriques* de Maria Antònia Canals

La Maria Antònia Canals va ser una gran pedagoga de les matemàtiques, va fundar l'escola Ton i Guida al barri del Verdum, treballant amb nens amb molt males condicions de vida, i ha rebut múltiples premis i reconeixement per les seves múltiples aportacions en l'ensenyament de les matemàtiques als més joves. La caracteritzava una mirada recreativa de les matemàtiques acompanyant les seves activitats amb jocs i reptes, aconseguint així una major atenció i enteniment per part dels alumnes. Malauradament, ens va deixar el 29 d'abril de 2022 amb 91 anys, deixant un terreny ben asfaltat a les noves generacions de docents que vindran.

Els últims anys de la seva vida ha escrit una sèrie de llibres de nom "Dossiers de Maria Antònia Canals" on explica des de la seva experiència activitats i recursos didàctics de matèries que es poden portar a classes parvulari i primària. El llibre "Transformacions geomètriques" forma part d'aquesta col·lecció i tracta sobre com les transformacions d'objectes geomètrics poden ajudar a estudiar-ne les propietats. En particular m'ha interessat el primer bloc del llibre: "Transformacions topològiques. Les deformacions elàstiques", ja que aconsegueix introduir idees de topologia, que sovint no es treballen fins ben entrada la carrera de matemàtiques, a nois de primària.

Al llibre defineix les deformacions elàstiques com aquelles deformacions que pot fer a un objecte sense trencar-ne cap tros ni canviar-ne el nombre de dimensions. És clar que està donant una interpretació intuïtiva del concepte d'homeomorfisme. Hi ha moltes formes d'experimentar amb aquestes deformacions, al llibre en dona algunes: fent figures de plastilina amb dibuixos i deformant per obtenir formes diferents, inflant i estirant globus i deformant rajoles de fang amb pintures amb colorants ceràmics abans de coure-les.

L'objectiu amb aquests experiments és observar quines propietats es mantenen invariants a aquestes deformacions. Per exemple, en el cas de la rajola, fa el mateix dibuix a dues rajoles idèntiques i aplica una deformació elàstica a una d'elles. Quan surten del forn observa que el canvi no ha estat tan gros com la intuïció podria dir-nos, és cert que no es mantenen els angles, les mides o les formes, però sí que es mantenen les línies obertes i tancades, les interseccions entre elles (especificant que un node amb dues arestes no és una intersecció) i les regions que separen. Conclou l'activitat enunciant que aquestes propietats que es mantenen es diuen propietats topològiques.

Figura 7: La Maria Antònia Canals a un acte de la Universitat de Vic el 2010.

La següent activitat que ens explica tracta sobre el que ella ha anomenat xarxes: una figura formada per un conjunt de línies que formen interseccions entre elles, de manera que no en queda cap de separada ni quedi cap cua que els pengi. Està treballant amb grafs planars! Observa que les xarxes també tenen propietats invariants a les transformacions elàstiques: el nombre d'interseccions, el nombre de segments i el nombre de regions que separa.

M'interessa especialment com ha plantejat l'activitat per nois dels darrers cursos de primària. Comença treballant amb les línies que hi ha al terra dels camps de tenis (entenc que també es podria fer amb les línies del terra del pati de l'escola). Comença a plantejar jocs competitius on els nois han de córrer a ser els primes a ocupar els diferents elements de la xarxa, ja poden ser punts d'intersecció, segments o regions. Farà servir aquests jocs per consolidar els elements de la xarxa. Acabarà fent-ne un dibuix i comptant el nombre de segments, regions i interseccions.

El segon dia d'activitat, els alumnes hauran d'omplir una taula amb el nombre de regions interseccions i segments que tenen diferents dibuixos de xarxes. Als que acabin se'ls demanarà que repeteixin el procés amb dibuixos que es puguin inventar ells. L'objectiu és al tercer dia trobar una llei que relacioni els tres nombres, aquesta llei és el teorema d'Euler, que diu que si I, S i R són en nombre d'interseccions, segments i regions d'una cadena, llavors es compleix la igualtat:

$$I + R = S + 2.$$

Amb taules grans i una mica d'ajuda del professor, podem aconseguir que els alumnes arribin a aquesta conclusió.

Em sembla molt interessant i enginyosa la forma que té la Maria Antònia d'aproximar matemàtiques, que sovint es veuen com abstractes i no s'estudien fins entrada una carrera tècnica, a noies i nois de primària.

Quan ha introduït el tema de comptar regions d'una xarxa se m'ha encès una bombeta: no s'assembla això una mica al concepte dels grups d'homologia? És a dir, un element d'un grup d'homologia és una k-cadena que no tanca una regió que pot ser omplerta per $(k-1)$-símplexs. Es pot treballar aquesta idea amb nois de l'ESO o del batxillerat?

En llegir-ho he buscat un objecte quotidià de grup d'homologia no-trivial per comprovar-ho: una tassa. En efecte, puc dibuixar-hi un triangle que no es pot pintar per dins, com es pot veure a les fotos de la figura 8.

Figura 8: Puc dibuixar un triangle a la tassa que no puc pintar per dins.

S'assembla molt a la idea sobre la qual treballa un vídeo de divulgació de matemàtiques que havia vist fa temps [22]. En aquest, Grant Sanderson, el propietari del famós canal *3Blue1Brown* a la plataforma *YouTube*, planteja un problema a companys seus de professió. Els dona una tassa amb tres cases dibuixades i tres "generadors": d'aigua, de llum i de gas. El repte és connectar cada casa amb els tres generadors sense que hi hagi cap encreuament de canonades. Al vídeo explica molt bé perquè aquest repte és impossible en el pla: contradiu el teorema d'Euler!

Veiem-ho: mantenint la notació anterior, volem forçar que $I = 6$ i $S = 9$, a més, com el graf plantejat és bipartit (no volem canonades que connectin dues cases o dos generadors), podem observar que per tancar una regió cal recórrer un nombre parell de segments. Si aquest nombre fos 2, estaríem connectant una casa dues vegades amb un mateix generador, cosa que no ens demanen, així que cada regió estarà delimitada com a mínim per 4 segments. Sabent això i que cada segment separa exactament dues regions, el nombre regions no pot ser més que $R \leq 2 \cdot 9/4 = 4,5$. Per tant, ha de ser 4 com a màxim. Però en intentar comprovar la igualtat del teorema d'Euler:

$$6 + 4 < 9 + 2,$$

ens quedem curts! Per tant, el repte és impossible en el pla. De totes maneres, els seus companys troben una forma de resoldre el repte fent ús del forat que deixa la nansa de la tassa.

Una conclusió que podríem treure, tant d'aquest problema com de l'exemple del triangle que he donat anteriorment, és que no és possible passar d'un paper a una tassa fent servir transformacions elàstiques. Ja que alguna propietat topològica canviaria en fer-ho: en el meu exemple, tenim només una regió en el cas de la tassa, però si mantenim la línia tancada en el pla, en tindríem dues. En el repte de les canonades, no hi hauria forma de passar la solució del problema al pla sense generar nous encreuaments, com hem demostrat anteriorment. A matemàtiques diem que no són espais homeomorfs.

6.1.2 Didàctica generalista de les matemàtiques

En Pere Puig i Adam va ser un gran matemàtic i docent que va viure del 1900 al 1960, ens en parla en Claudi Alsina a [23]. Tenia una visió molt aplicada de les matemàtiques aportant molts avanços d'aquestes en problemes sorgits de la física, l'enginyeria i la computació així com en matemàtiques més teòriques. Va exercir com a docent gran part de la seva vida, incloent-hi el que possiblement és el període més difícil de la història contemporània del nostre país: la Guerra Civil Espanyola. Va ensenyar matemàtiques a gent de tots els nivells, des d'un curset d'aritmètica que va preparar per obrers entre els anys

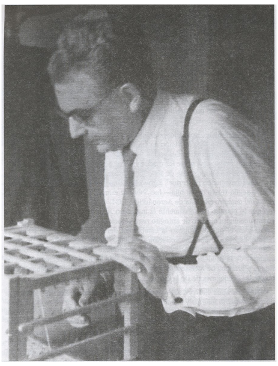


Figura 9: Pere Puig i Adam

1943 i 1945, fins a estudiants d'estudis tècnics superiors a l'Escola Especial d'Enginyers Industrials de Madrid. El caracteritzava una gran oratòria i una metodologia molt aplicada, com podem llegir al pròleg del llibre "Geometría Intuitiva" que va escriure juntament amb Rey Pastor:

> Aquí te presentamos, lector querido, a los que han de ser tus compañeros de trabajo: unas tijeras, un ovillo, una regla, un par de escuadras y un montón muy grande de hojas de papel. Ni un sólo día debes comenzar la lección de Geometría sin tener al lado éstos tus buenos compañeros, ni terminar de estudiarla sin dejar tu mesa materialmente llena de recortes y de papeles con figuras...

La seva menció en aquest treball és deguda a un conegut decàleg que va deixar per escrit el 1955 on dona idees clau de la seva perspectiva en la docència de les matemàtiques:

1. No adoptar una didàctica rígida, sinó adaptada en cada cas a l'alumne, observant-lo constantment.
2. No oblidar l'origen concret de la Matemàtica ni els processos històrics de la seva evolució.
3. Presentar la matemàtica com una unitat en relació amb la vida natural i social.
4. Graduar acuradament els plans d'abstracció.
5. Ensenyar guiant l'activitat creadora i descobridora de l'alumne.
6. Estimular aquesta activitat despertant interès directe i funcional vers l'objecte del coneixement.
7. Promoure en tot el possible l'autocorrecció.
8. Aconseguir un cert mestratge en les solucions abans d'automatitzar-les.
9. Cuidar que l'expressió de l'alumne sigui traducció del seu pensament.
10. Procurar a qualsevol alumne èxits que evitin la seva desmoralització.

Observem algunes claus d'aquest decàleg: en els punts 4, 5, 8 i 9 no elimina els plans d'abstracció ni l'automatització, ja que aquests poden ser molt importants al llarg de l'aprenentatge matemàtic, però sí que els treu prioritat. En la meva reduïda carrera com a professor de reforç a nois de segon cicle d'ESO i batxillerat m'he trobat bastants casos de nois que resolien exercicis per repetició i només formalitzaven un problema per repetició, però mai intentaven raonar i se sentien incapaços (quan probablement no ho eren) de resoldre problemes nous que s'escapessin dels mètodes que havien treballat fins aquell moment. L'Antoni Aubanell explica a ([24] p.82) que la didàctica de la geometria (i jo ho generalitzaria a les matemàtiques en general) s'ha de separar en quatre fases: experimentació, descoberta, conceptualització i demostració i formalització (si cal!). La demostració i formalització són útils i productives, però només si s'han passat amb èxit els tres passos anteriors, per tant, és molt important passar per aquestes abans de plantejar-nos si és necessari formalitzar i demostrar els resultats.

Una altra idea que trobo interessant comentar són els punts 5, 6, 7, 10 . El punt 7 crec que és una virtut que les matemàtiques treballen molt, però que es pot aplicar a molts altres àmbits de la vida: saber reconèixer errors propis. Però, és clar, reconèixer un error no és una sensació agradable per ningú i pot generar frustració si es repeteix diverses vegades sense cap recompensa. Per això, és feina del professor estimular el descobriment i procurar èxits a tots els alumnes per donar-los un motiu per superar aquesta frustració i animar-los a repetir el procés. A més, el punt 10, junt amb el punt 1, tenen un fort missatge d'inclusió i foment de la diversitat: s'han de promoure èxits a tothom, des del que té més facilitats fins al que menys, passant pel que no parla l'idioma i pel que no té ganes de fer classe. És feina del professor, i, tot i que no sempre és possible, s'ha d'intentar per tots els mitjans.

Per últim, observo que els punts 2 i 3 demanen una contextualització matemàtica, que sabem que caracteritzava a en Pere Puig i Adam. Òbviament, les matemàtiques no neixen del no-res, és cert que moltes matemàtiques històricament s'han creat de forma lúdica, penso per exemple en l'aritmètica, però també n'hi ha moltes altres, com el càlcul o la geometria que han aparegut amb l'objectiu de resoldre un problema més enllà dels marcs matemàtics teòrics. És important que l'alumne vegi les matemàtiques com una eina per trobar solucions a preguntes més enllà de les teòriques. A més, és menys motivador respondre a dubtes externs que preguntes que un s'ha fet genuïnament.

I enllaço aquest decàleg amb un altre que donen la Carme Burgués, i els ja mencionats Antoni Aubanell i Claudi Alsina al llibre "Tres professors de matemàtiques"[25]:

1. Fer estimar les matemàtiques... induint a descobrir-les.
2. Fer estimar les matemàtiques... relacionant-les.
3. Fer estimar les matemàtiques... aplicant-les.
4. Fer estimar les matemàtiques... sorprenent.
5. Fer estimar les matemàtiques... engrescant.
6. Fer estimar les matemàtiques... actualitzant-les.
7. Fer estimar les matemàtiques... intrigant.
8. Fer estimar les matemàtiques... plantejant reptes.
9. Fer estimar les matemàtiques... assolint èxits.
10. Fer estimar les matemàtiques... emocionant.

Clarament, reforça punts que he donat ja: els punts 2 i 3 entren al terreny de la contextualització. I els punts 1, 4-7, 9 i 10 parlen de promoure l'esforç genuí de l'alumnat amb motivació i assolint èxits. M'interessa el punt 8, ja que introdueix una idea que no va explicar en Pere Puig i Adam en el seu moment. I és que hi veig dues interpretacions: en primer lloc, l'avanç de les tecnologies porta a noves formes d'entendre i visualitzar les matemàtiques: no puc evitar pensar les activitats que haguessin pogut idear en Pere Puig i la Maria Antònia Canals amb eines actuals com el GeoGebra. La segona interpretació que hi veig és que el món està en moviment, i fer servir successos actuals per contextualitzar nous problemes pot ser un recurs molt útil per incentivar la resolució de nous problemes.

6.2 Plantejament i justificiació de l'activitat

Amb aquestes referències consultades, crec que estic en disposició de plantejar diferents activitats amb les quals puc introduir algunes idees del treball a una classe de segon cicle d'ESO. Acabaré triant-ne una que serà la que desenvoluparé per portar a la classe.

La primera idea sorgeix de la lectura de la lectura de la proposta de Maria Antònia Canals sobre l'estudi de les transformacions topològiques i ha estat ja plantejada per sobre. Puc fer servir la teoria de grafs per demostrar als alumnes que les propietats topològiques del pla i del tor són diferents?

La idea és començar deduint el teorema d'Euler dels grafs planars de forma similar a com ho fa la Maria Antònia i comprovar que aquest no es compleix a la superfície d'una tassa o un tor. Aquesta idea em resulta interessant, però hi veig un problema: el temps.

En principi, és probable que la classe no hagi treballat mai amb grafs, així que s'haurà de dedicar temps a la seva comprensió i a acabar deduint el teorema d'Euler. Però l'objectiu de l'activitat és demostrar la seva falsedat a la superfície d'un tor. Així que l'activitat triga molt a culminar. Veig molt complicat que aquest procés es pugui assolir correctament en menys de 3 o 4 hores de classe i no és el temps que tinc acordat amb l'institut on aniré.

Per evitar el problema de temps, he de partir de coneixement que ja hagin assolit durant els seus estudis. Així, se m'acudeix que pot ser una bona idea partir de l'estudi dels triangles que han estudiat amb la trigonometria. A més pot ser interessant la part tècnica de prendre mesures en una superfície corbada. He pensat que l'esfera pot ser un bon objecte geomètric del qual partir. I, buscant una mica, he vist que de forma relativament barata podia aconseguir boles de porexpan de 15 centímetres de diàmetre amb les que es pot treballar.

Hi ha moltes preguntes interessants que es poden fer de la geometria sobre la superfície d'una esfera: com són els segments i les rectes? Quant mesura el radi? Sumen 180° els angles d'un triangle? Quant sumen els costats d'un triangle? Quina és l'àrea d'un triangle? Aquestes preguntes porten implícits nous reptes: com mesurem les magnituds longitud, angle i àrea a la superfície d'una esfera quan les eines que tenim estan creades per mesurar magnituds planes? Així, incentivem la creativitat de l'alumnat en prendre mesures.

M'ha semblat adequat introduir una petita explicació inicial dels postulats d'Euclides de la geometria plana. D'aquesta forma, tenim una excusa per definir entre tota la classe els termes segment i recta i tenim uns primers resultats a comprovar a la nova geometria.

Plantegem la fitxa de l'activitat[2]:

[2] La fitxa de l'activitat pren el format CESIRE.

6.3 Fitxa de l'activitat

Objectius

La proposta pretén contribuir a assolir els següents objectius:

- Entendre les dificultats geomètriques que implica modificar la forma de l'espai.
- Descriure correctament i comprendre els conceptes geomètrics bàsics (segment, recta, angle, longitud...) en general (més enllà de la geometria euclidiana).
- Descartar coneixements ja assolits de geometria plana que no són aplicables a l'esfera, així com comprovar aquells que sí que apliquen.
- Despertar la curiositat envers una geometria que sovint no és plantejada.
- Consolidar la mesura de magnituds com la longitud, l'angle i la superfície i generalitzar-la a superfícies no-euclidianes.

Descripció de l'activitat

En aquesta activitat es treballa amb una esfera física (sigui una bola de porexpan o una esfera de plàstic transparent) i material per dibuixar-hi a la superfície i prendre'n mesures. Està pensada per fer-se en 1 o 2 hores (adaptable a les necessitats de cada classe) i se separa en les següents etapes:

- S'introdueixen els postulats d'Euclides (en particular els dos primers i l'últim) de la geometria plana, tot definint conjuntament amb la classe els termes que hi apareixen (segment, recta i recta paral·lela).
- Cada grup prova de descriure els termes definits a la superfície de l'esfera i comprova si els postulats hi són certs.
- S'explora la part tècnica de prendre mesures a l'esfera tot responent preguntes bàsiques com el radi de l'esfera o la suma dels angles d'un triangle esfèric.
- Es comprova la veracitat a l'esfera dels resultats coneguts de la geometria plana, es pot fer una ronda de propostes per veure quines preguntes s'estudien en aquest apartat. Aquest és el tronc de l'activitat, per tant, s'ha d'intentar que duri almenys 30 minuts i es pot ampliar fins a 1 hora i mitja si es té temps.
- Per tancar l'activitat es respon una pregunta que perfectament pot haver sortit al llarg d'aquesta: "I això per a què serveix?" Per fer-ho es mostren dues aplicacions de la geometria esfèrica: la relativitat especial d'Einstein (explicant que es pot generalitzar l'estudi que han fet a estructures més complexes i amb més dimensions) i l'estudi de la superfície de la terra. En l'últim s'ensenyen dues eines per entendre el problema del mapatge del planeta tot i que no se'n faci molt èmfasi per falta de temps, s'obre un fil des d'on algú encuriosit pot estirar.

Al llarg de l'activitat, els grups hauran de prendre fotografies dels resultats obtinguts i penjar-les a un *Padlet* (un àlbum d'imatges virtual compartit) conjunt.

Aspectes didàctics i metodològics

L'activitat està pensada per fer-se en grups, preferiblement de quatre persones i cada cert temps es posen en comú resultats. En el cas de l'activitat feta en aquest treball es té disponible una hora, però perfectament es podria allargar de forma natural a dues o tres hores estirant el problema del mapatge i no tallant en cap moment el fil de preguntes de l'activitat troncal. És important remarcar que cal donar certa llibertat als grups per respondre les preguntes que a ells els sembli més interessants, i és que certes respostes sovint porten a noves preguntes. Per exemple, la proposta plantejada al segon apartat de mesurar la suma dels angles d'un triangle esfèric pot portar a qüestionar si sempre sumen el mateix i, quan comprovin que no, buscar les cotes superior i inferior.

Recursos emprats

Perquè treballin els/les alumnes: boles de porexpan o esferes de plàstic transparent d'uns 15-20 cm de radi, cordes, retoladors, regle i tisores, opcionalment és útil portar transportador d'angles i compàs, però es pot treballar sense ells. Per donar més perspectives dels resultats i com a eines pel professor per explicar: una presentació, GeoGebra i les dues eines de la part final de l'activitat: la web `thetruesize.com` i l'eina en línia de la universitat de Lisboa *Mappai mundi* que mostra diferents tipus de mapatge de l'esfera de la Terra.

Continguts, competències i processos que es treballen de forma destacada

A part dels continguts en geometria esfèrica ja mencionats, al llarg de l'activitat es treballen de manera rellevant: la capacitat de deducció i raonament, la comunicació amb el grup aportant i comparant idees, l'estructura axiomàtica i deductiva de les matemàtiques (partint d'unes definicions i postulats i comprovant resultats), les estratègies de dibuix tècnic per dibuixar figures amb certes propietats donades, la trigonometria elemental i la intuïció geomètrica.

Alumnat a qui s'adreça especialment

Alumnes de segon cicle d'ESO i batxillerat, cal que la classe tingui certes nocions de geometria plana, segons les eines que tinguin podem introduir conceptes com el pla tangent tot fent paral·lelismes amb matèria que han estudiat.

Interdisciplinarietat, transversalitat, relacions amb l'entorn

Es treballen les habilitats de l'educació visual i plàstica i el dibuix tècnic. L'activitat està fortament contextualitzada, ja que poden fer paral·lelismes amb la superfície de la Terra, a més l'esfera és un objecte matemàtic que constantment veuen a la vida quotidiana.

Proposta d'ampliació

Pot ser interessant repetir l'activitat sobre la superfície d'un tor, per fer-ho es pot utilitzar una tassa de plàstic en lloc de la bola. Es poden treure resultats sorprenents, com per

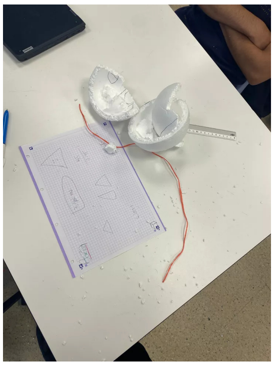


Figura 10: Anàlisi exhaustiva d'una bola de porexpan

exemple que hi ha triangles que no tanquen una regió (idea equiparable amb els grups d'homologia).

7 Experiència a l'aula i coses a millorar

Vaig portar l'activitat a una aula de 4t d'ESO dels Jesuïtes del Clot, l'institut on vaig cursar el batxillerat. Per un problema organitzatiu, vaig saber el dia anterior que tindria disponibles dues hores en lloc d'una, que se m'havia dit inicialment. Un cop allà també vaig saber que la meitat del grup marxaria després de la primera hora. Òbviament, aquests factors externs van afectar el desenvolupament de l'activitat. De totes maneres, crec que va ser prou productiva i interessant.

Tal com portava preparat, vaig començar explicant els postulats d'Euclides parant-me a preguntar el significat de cada terme que hi apareixia. Vaig comprovar que als nois els costava parlar davant de la classe. De totes maneres, quan els vaig donar el material i els vaig fer les primeres preguntes que havien de contrastar amb el grup vaig comprovar que eren molt participatius en aquest ambient. Vaig acabar prenent la decisió, doncs, de no parar la classe per contrastar entre tots les conclusions que anaven prenent, pensant que així l'activitat seria més productiva per ells. Encara no he decidit si va ser o no una bona decisió.

També vaig notar que molts nois no estaven acostumats a treballar amb material. Algunes boles van acabar trencades, vull pensar, per l'anàlisi exhaustiva que hi feien. Deixant de banda les contrarietats, vaig trobar molt interessant algunes observacions que van fer alumnes. Per exemple, responent a la pregunta de si es compleix la desigualtat triangular a l'esfera, un grup va raonar:

> El segment de dos punts és el camí més curt que hi ha entre ells, per tant, passar per un punt entremig farà que el camí sigui més llarg.

Que de fet, es podria considerar que és una demostració, ja que han fet servir la definició de segment que van donar. Aquest mateix grup va intentar trobar la suma mínima i màxima dels angles d'un triangle i quan va acabar l'activitat van concloure:

> No hem trobat cap triangle esfèric que els seus angles mesurin menys de 180° graus. Tots mesuraven entre 180° i 270°, que és el màxim que hem aconseguit.

Els va faltar observar que la suma dels angles d'un triangle augmenta quan aquest és

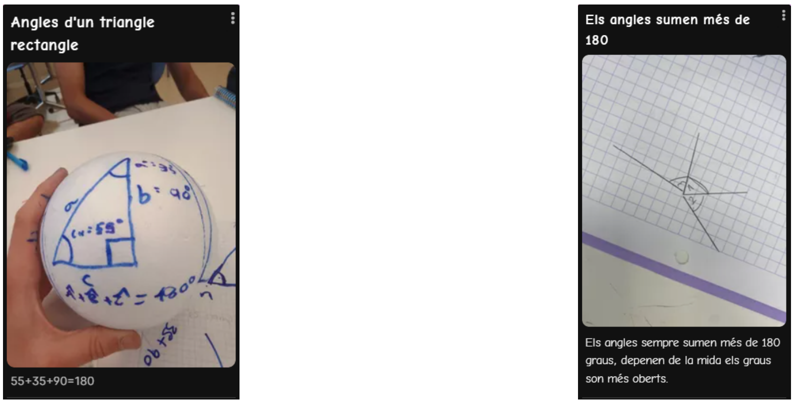


Figura 11: Dues respostes diferents donades pel mateix grup.

més gran. A aquesta conclusió hi va arribar un altre grup, probablement si haguessin posat les seves descobertes en comú haurien arribat més lluny.

També hi va haver autocorreccions, que és un dels punts del decàleg d'en Pere Puig i Adam. N'he pogut documentar dues: la primera la va fer el grup que he citat ja dos cops, que a l'inici de l'activitat va penjar una foto al padlet on comentava que el camí més curt entre dos punts d'una esfera passa per dins de l'esfera (cosa certa, però que dona a entendre que no havien entès bé la situació que se'ls plantejava), clarament hi va haver un punt d'autocorrecció perquè els resultats posteriors que han penjat donen a entendre que han entès bé l'escenari. La segona autocorrecció es va produir en un altre grup que va penjar dues respostes diferents a la pregunta de si els angles d'un triangle mesuren 180°, la primera incorrecta i la segona correcta (vegeu la figura 11).

Em va sorprendre comprovar que en les activitats finals de l'activitat, els nois es van mostrar molt més participatius que al principi, cosa que va reforçar la idea que potser m'havia equivocat en deixar de posar en comú els resultats de la classe.

8 Conclusions

Hem començat aquest viatge definint els grups d'homologia simplicial que mitjançant els símplexs (una generalització a dimensions superiors del concepte de triangle) i l'operador vora ens permeten detectar forats a les varietats sense tenir una representació visual. Els grups de cohomologia de deRham fan ús d'eines molt diferents per obtenir propietats sorprenentment similars, en aquest cas treballem amb formes diferencials (una generalització a dimensions superiors dels camps cotangents diferenciables d'una varietat) i l'operador diferencial exterior. Hem comprovat en tots dos casos que les aplicacions induïdes commutaven amb el seu respectiu operador, també hem comprovat que els dos grups són propietats invariants a transformacions homotòpiques i que tots dos grups eren no-trivials quan hi havia forats.

Havent comprovat les múltiples similituds entre les dues estructures semblava evident que estaven relacionades d'alguna forma. Aquí és on apareix la integració de varietats que, en combinació amb la versió simplicial del conegut teorema d'Stokes ens demostra que no és que siguin estructures remotament relacionades, sinó que en essència són el mateix! Hem acabat donant la versió general del teorema concloent així una de les connexions més elegants que he pogut observar de dues branques de les matemàtiques com són la topologia i l'anàlisi.

Sorprenentment, les 50 pàgines límit del treball se m'han quedat curtes, he hagut de descartar moltes explicacions de la part matemàtica i activitats en la part didàctica, pel simple fet que no hi cabien. Això és un bon senyal, ja que vol dir que he après moltíssim en el procés i m'emporto un munt de coneixement així com una primera experiència a l'aula des del costat del docent (la primera de moltes).

La part matemàtica del treball ha estat una sorpresa, ja que, tot i que des d'un inici sabia que volia fer alguna cosa relacionada amb la integració de formes sobre varietats diferencials (després d'estudiar la integració respecte d'una mesura, era la que em faltava), no m'esperava trobar una connexió tan bonica entre la topologia i la geometria diferencial en el procés. La veritat és que aquests ponts inesperats són els que desperten la meva passió per aquesta branca del coneixement, així que no puc estar més content amb el resultat.

La part didàctica ha estat accidentada, ja que ha costat una mica aconseguir que se'm cedís una classe. De totes maneres, i amb la tranquil·litat de saber com ha anat finalment, en surto molt content i amb ganes de més. De cop se m'ha obert el món de la docència com una branca d'estudi interessant. Sense cap dubte, aquest estiu tinc més d'una lectura obligatòria d'algun dels grans personatges que he tractat en aquest treball, com la Maria Antònia Canals, que no només es nota que va treballar molt en les activitats que proposa als seus llibres, sinó que també les sabia transmetre amb passió pels lectors encuriosits com ho soc jo ara.

Referències

[1] Currás Bosch, Carles. (2003). *Geometria Diferencial: Varietats Diferenciables i Varietats de Riemann.* EUB, Edicions Universitat de Barcelona.

[2] Ivorra Castillo, Carlos. *Topología Algebraica con Aplicaciones a la Geometria Diferencial.* Autoedició, Universitat de València.

[3] Allen Edward Hatcher. (2001). *Algebraic Topology.* Cambridge University Press.

[4] Macho Stadler, Marta. (2005-2006). *De la Homología a la Cohomología: Teoremas de Dualidad (primera parte).* Apunts de doctorat a la Euskal Herriko Unibertsitatea.

[5] Alexandre Eugène Dieudonné, Jean. (1989). *A History of Algebraic and Differential Topology 1900-1960.* Reimpressió de l'editorial Birkhäuser.

[6] Keith Conrad. (2012). *Tensor Product.* Notes sobre el producte tensorial.

[7] Marshall Lee, Jeffrey. (2009). *Manifolds and Differential Geometry.* American Mathematical Society.

[8] Serge Lang. (1991). *Fundamentals of Defferential Geometry.* Editorial Springer.

[9] Raoul Bott i Loring W. Tu. (1982). *Differential Forms in Algebraic Topology.* Editorial Springer.

[10] Erwin Otto Kreyszig. (1963). *Differential Geometry.* The University of Toronto Press.

[11] Boris Khesin, Eckard Meinrenken i Gal Gross. (2021). *Introduction to Differential Geometry.* University of Toronto.

[12] Frank W. Warner. (1983). *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Editorial Springer.

[13] Marshall Lee, John. (2013). *Introduction to Smooth Manifolds.* Editorial Springer.

[14] Marshall Lee, John. (1991). *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature.* Editorial Springer.

[15] David Spivak, Michael. (1995). *Calculus on Manifolds: a Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus.* Addison-Wesley Publishing Company.

[16] Lafuente López, Javier. (2004). *Variedades Diferenciables.* Apunts de la Universidad Complutense de Madrid.

[17] Munger Boothby, William. (1975). *An Intoduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry.* Columbia University Academic Press.

[18] Hildbert Greub, Werner. (1972). *Connections, Curvature and Cohomology (volume 1).* Editorial Elsevier.

[19] John Koch, Richard. (2021). *A Short Course on deRham Cohomology.* Autoedició Oxford University.

[20] Samuel Eilenberg i J. A. Zilber. (2012). *Semi-Simplicial Complexes and Singular Homology.* Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 51, No.3 pp. 499-513.

[21] Miguel Camarasa. (2023). *Contar Agujeros vale un Millón de Dólares.* Problemas del milenio, Conjetura de Hodge. Vídeo divulgatiu al canal *Mates Mike*: `https://youtu.be/JhyCMPc0Tk0`.

[22] Grant Sanderson. (2017). *Why this puzzle is impossible.* Vídeo divulgatiu al canal *3Blue1Brown*: `https://youtu.be/VvCytJvd4H0`.

[23] Claudi Alsina i Català. (2001). *Pere Puig i Adam: ahir, avui i sempre.* Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques Vol. 16, Núm. 1 (pp. 43-60)

[24] : Antoni Aubanell i Pou. (2015). *Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria.* Quaderns d'avaluació, Vol. 31, Núm. 31, (pp. 63-137)

[25] : Claudi Alsina, Anton Aubanell i Carme Burgués. (2019). *Tres professors de matemàtiques.* Associació de Mestres Rosa Sensat.