Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Introducción a la volatilidad estocástica: El modelo de Heston

Autor: Carla Sánchez González

Director: Dr. Josep Vives Santa Eulalia

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 13 de junio de 2023

Abstract

The purpose of this project is to develop the Black-Scholes model in order to incorporate stochastic volatility into the equation so we can analyze the Heston model.

To achieve this, we will start with an introduction to stochastic calculus, laying the necessary mathematical foundations to fully understand the Black-Scholes model and its derivation. We will also briefly review some relevant financial knowledge that will be essential to comprehend the topic we are addressing.

Resumen

El propósito de este proyecto es desarrollar el modelo de Black-Scholes para más adelante incorporar la volatilidad estocástica a la ecuación y así analizar el modelo de Heston.

Para lograrlo, comenzaremos con una introducción al cálculo estocástico, sentando así las bases matemáticas necesarias para comprender completamente el modelo de Black-Scholes y su derivación. También repasaremos brevemente algunos conocimientos financieros relevantes que serán fundamentales para comprender el tema que estamos abordando.

2020 Mathematics Subject Classification. 11G05, 11G10, 14G10

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi tutor, Josep Vives, por otorgarme la oportunidad de colaborar en este proyecto y brindarme su asistencia y orientación.

También deseo expresar mi gratitud a los profesores del grado por su dedicación para transmitir los conocimientos matemáticos.

Asimismo, quiero reconocer el apoyo incondicional de mi pareja y mi familia tanto en este proyecto como a lo largo de toda mi carrera universitaria.

Índice

1. Introducción

1.1. Contexto histórico: motivación tras el modelo de Heston

La fórmula de Black-Scholes fue un modelo pionero en el campo de las finanzas matemáticas introducido en 1973 por Fischer Black y Myron Scholes, y pese a que fue clave para sentar las bases de la fijación de precios de los derivados financieros, enfrenta importantes dificultades al asumir condiciones específicas que no se encuentran en la realidad de los mercados financieros.

El modelo de Black-Scholes contempla un mercado simplificado con dos activos, uno de ellos sin riesgo que evoluciona con un tipo de interés fijo, y otro de ellos con riesgo en cuyas propiedades matemáticas ahondaremos más adelante.

Entre las condiciones que fija el modelo de Black-Scholes tenemos las siguientes premisas.

- El precio de la opción depende únicamente del valor del activo subyacente (que es el único elemento estocástico del sistema), del tiempo y de variables que se suponen constantes, entre ellas la volatilidad.
- El tipo de interés r es conocido y constante en el tiempo.
- La acción no paga dividendos ni otras retribuciones.
- Trabajamos con una opción Europea: solo podemos ejercerla en la fecha de vencimiento.
- No existen costes de transacción en la compra o venta de la acción u opción correspondientes.
- Es posible pedir prestada cualquier fracción del activo para comprarla, mantenerla o venderla.
- No existen penalizaciones por vender en corto (es decir, por vender un activo que no se posee al precio actual y comprarlo, para cerrar la operación, a un precio posterior).

La evidencia empírica ha demostrado que el supuesto de distribución normal del modelo es insuficiente para capturar la presencia significativa de outliers en la distribución de beneficios, así como la premisa de volatilidad constante.

Estas deficiencias han motivado el desarrollo de otros modelos que pretenden extender el modelo de Black-Scholes rebajando algunas de las estrictas suposiciones sobre las que este trabaja. Una de esas extensiones son los modelos de volatilidad estocástica, que han recibido un uso y una atención generalizados en la industria financiera. En este proyecto, nos centraremos en el modelo de Heston.

El modelo de Heston, presentado en 1993 por Steven Heston, es un modelo que trabaja con una volatilidad estocástica que permite que la dispersión de la rentabilidad no sea constante a lo largo del tiempo. Dicho modelo se basa en un proceso estocástico bidimensional cuyas dimensiones representan por un lado el precio del activo subyacente y por el otro la dispersión del rendimiento, donde esta sigue un proceso estocástico correlacionado con el precio del activo.

Este nuevo supuesto permite que el modelo capture importantes rasgos del comportamiento del precio de los activos con más precisión, convirtiéndose así en una importante herramienta para la gestión del riesgo en los mercados financieros.

1.2. Desarrollo del trabajo y objetivos

El objetivo de este trabajo es poder desarrollar la teoría tras el modelo de Black-Scholes para luego incorporar la volatilidad estocástica a la ecuación y así poder analizar el modelo de Heston. Para ello primeramente realizaremos una introducción al cálculo estocástico que nos permitirá sentar las bases de la matemática financiera necesaria para comprender toda la matemática tras el modelo de Black-Scholes y su derivación. También realizaremos un breve repaso de ciertos conocimientos financieros relevantes que serán fundamentales para poder comprender la temática que nos ocupa.

Una vez realizados los preliminares pasaremos a desarrollar el modelo de Black-Scholes y estudiaremos el concepto de volatilidad, ahondando brevemente en los diferentes tipos de volatilidad. Finalmente desarrollaremos el modelo de Heston y su derivación. Para concluir, analizaremos en profundidad las mejoras que el modelo de Heston presenta frente al modelo de Black-Scholes ayudándonos de un ejemplo que nos permitirá comparar la fiabilidad de ambos modelos.

2. Introducción al cálculo estocástico

En esta sección introduciremos conceptos y expondremos algunos resultados que serán relevantes en el siguiente capítulo para desarrollar el modelo de Black-Scholes. Comenzaremos definiendo conceptos básicos como proceso estocástico o martingala, profundizaremos en las propiedades del proceso de Wiener y exploraremos las integrales estocásticas para poder exponer la fórmula de Itô. Finalmente introduciremos las ecuaciones diferenciales estocásticas.

Para el desarrollo de esta sección nos basaremos en Capinski, Kopp y Traple (2012).

2.1. Procesos estocásticos, filtraciones y Martingalas

Definición 2.1. *Sea Ω un conjunto. Una σ-álgebra es una familia de subconjuntos $\mathcal{F}$ de Ω que cumple las siguientes propiedades:*

- $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
- $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$.
- $A_i, i \in I \subseteq \mathcal{F} \implies \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$.

Definición 2.2. *Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible. Decimos que la función $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ es una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ si cumple las siguientes propiedades:*

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- $\forall \{A_i, i \geq 1\}$ *sucesión numerable de conjuntos de $\mathbb{F}$ disjuntos dos a dos,*

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Definición 2.3. *Sea (Ω, $\mathcal{F}$, $\mathbb{P}$) un espacio de probabilidad y $\mathbb{T} = [0, \infty)$. Un proceso estocástico medible X es una aplicación*

$$X : (\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{T} \to X_t(\omega) \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

tal que $X^{-1}(B) \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{T})$. Dicho de otra forma, un proceso estocástico $X = (X(t))_{t \geq 0}$ es una colección de variables aleatorias definidas en dicho espacio de probabilidad.

Definición 2.4. *Sea X una variable aleatoria y $u \in \mathbb{R}^n$ un vector, definimos la función característica de X como:*

$$\phi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}].$$

Definición 2.5. *Una filtración asociada a un espacio de probabilidad (Ω, $\mathcal{F}$, $\mathbb{P}$) es una sucesión de σ-álgebras $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ que cumplen:*

- $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, \forall t \in \mathbb{T}$.
- $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t, \forall s \leq t,\ s, t \in \mathbb{T}$.

Definición 2.6. *La filtración natural de un proceso estocástico X se define como $\mathcal{F}_t := \sigma\{X_s, s \leq t\}$. Dicho de otra forma, las σ-álgebras están generadas por las propias variables de X.*

Definición 2.7. *Un proceso estocástico X es adaptado a una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si para cada $t \in \mathbb{T}, X_t$ es $\mathcal{F}_t$-medible, es decir, si tenemos*

$$X_t^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{F}_t. \tag{2.2}$$

Definición 2.8. *Un proceso estocástico M es una martingala respecto a una filtración $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si:*

- *M es un proceso adaptado a $\mathbb{F}$.*
- $\mathbb{E}(|M(t)|) < \infty$, $\forall t \geq 0$.
- $M_s = \mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s)$, $s \leq t$.

2.2. El movimiento Browniano

Para poder definir el movimiento Browniano deberemos introducir previamente ciertos conceptos.

Definición 2.9. *Un proceso estocástico X es un proceso Gausiano si para toda elección de $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ el vector de incrementos $(X_{t_1} - X_{t_0}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ es un vector Gausiano multivariante.*

Es decir, dicho vector de incrementos tiene vector de medias $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)$ y matriz de covariancias $\sum = (\sigma_{ij})_{i,j\leq n}$ con $\sigma_{ij} = \mathbb{E}[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)]$ y función de densidad.

$$f_X(x_1, ..., x_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(det\Sigma)^{-\frac{1}{2}}exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T(\Sigma)^{-1}(x-\mu)\}. \tag{2.3}$$

Definición 2.10. *Se dice que un proceso Gausiano es centrado si todas sus variables tienen esperanza nula.*

Definición 2.11. *Un proceso estocástico X tiene incrementos independientes si para todo 0* $\leq t_1 \leq ... \leq t_n$, $X_{t_1} - X_{t_0}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ *son independientes.*

Definición 2.12. *Se dice que estos incrementos son estacionarios si*

$$X_{t+h} - X_t \sim X_h - X_0, \forall t \in \mathbb{T}. \tag{2.4}$$

Definición 2.13. *El movimiento Browniano o proceso de Wiener W es un proceso estocástico con trayectorias continuas e incrementos independientes y estacionarios.*

Proposición 2.14. *Sea W un movimiento Browniano, entonces*

$$W_t - W_0 \sim N(rt, \sigma^2 t). \tag{2.5}$$

Demostración. Véase Capinski, Kopp y Traple (2012). □

Definición 2.15. *Se dice que un movimiento Browniano es estándar si* $W_0 = 0$ *casi seguramente y* $W_t \sim N(0,t)$.

Proposición 2.16. *Un movimiento Browniano estándar es una martingala respecto a su filtración natural* $\mathbb{F}^W$.

Demostración. Sea W un movimiento Browniano estándar y $0 < s < t$. Como W_s es $\mathcal{F}_s^W-$medible y $W_t - W_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s^W$, tenemos:

$$\mathbb{E}[W_t|\mathcal{F}_s^W] - W_s = \mathbb{E}[W_t - W_s|\mathcal{F}_s^W] = \mathbb{E}[W_t - W_s] = 0. \tag{2.6}$$

Por tanto W es una martingala respecto a $\mathbb{F}^W$. □

Proposición 2.17. *Un movimiento Browniano tiene trayectorias continuas y es no diferenciable casi seguramente.*

Teorema 2.18. *Desigualdad de Doob.*
Sea M una martingala positiva y continua. Sea $Z_T = sup_{t\in[0,T]} M_t$. *Entonces,*

$$\mathbb{E}(Z_T^2) \leq 4\mathbb{E}(M_T^2). \tag{2.7}$$

Demostración. Véase Capinski, Kopp y Traple (2012) (página 59). □

2.3. Integrales estocásticas

Vemos que no podemos definir la integral de Riemman-Stieltjes del movimiento Browniano, es decir $\int_0^T f(s)dW_s$, ya que esta solo existe para funciones de variación finita (funciones de valor real cuya variación total está acotada). Dado que el movimiento Browniano W no cumple esta propiedad, debemos definir una generalización de la integral de Riemman-Stieltjes para procesos simples que después extenderemos a procesos de cuadrado integrable.

Definición 2.19. *Decimos que un proceso estocástico X es de cuadrado integrable si es adaptado y*

$$\mathbb{E}(\int_0^T X^2(t)dt) < \infty. \tag{2.8}$$

Denotamos el conjunto de procesos estocásticos adaptados como:

$$\mathcal{M}^2 = \{X : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}\}. \tag{2.9}$$

Definición 2.20. *Decimos que un proceso estocástico $X \in \mathcal{M}^2$ es simple si existe una partición $0 = t_0 < ... < t_n = T$ de $[0,T]$ y variables ε_k $\mathcal{F}_{t_k}$-medibles con $\mathbb{E}(\varepsilon_k^2) < \infty$ para k=0, 1, ..., n-1 tal que*

$$X_t = \varepsilon_0 1_{\{0\}} + \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k 1_{(t_k, t_{k+1}]}. \tag{2.10}$$

Escribimos entonces $X \in \mathcal{S}^2$.

Definición 2.21. *Integral estocástica de Itô para procesos simples.*

Sea $X \in \mathcal{S}^2$. Definimos su integral como

$$I(X)_T = \int_0^T X_t dW_t = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}). \tag{2.11}$$

Lema 2.22. *El proceso $I(X)_t = \int_0^T X_t 1_{[0,t]} dW_t$ es una martingala.*

Proposición 2.23. *Propiedad de isometria para procesos simples.*

Sea $X \in \mathcal{S}^2$, entonces

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T X_t dW_t\right]^2 = \mathbb{E}\left(\int_0^T X_t^2 dt\right). \tag{2.12}$$

Demostración. Véase Capinski, Kopp y Traple (2012) (página 85). □

Definición 2.24. *Integral estocástica de Itô para procesos integrables cuadráticamente.*

Sea $X \in \mathcal{M}^2$ *y* $X_n \in \mathcal{S}^2$ *una secuencia de procesos simples tal que* $X_n \to X$*.*

Entonces,

$$I(X)_T = \int_0^T X_t dW_t = \lim_{n\to\infty} I(X_n). \tag{2.13}$$

2.4. Proceso y fórmula de Itô

Definición 2.25. *Un proceso de Itô es aquel que satisface*

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s ds + \int_0^t b_s dW_s, t \in [0, T]. \tag{2.14}$$

donde

- X_0 *es* $\mathcal{F}_0 -$ *medible.*
- $\mathbb{E} \int_0^T |a_s| ds < \infty$.
- $\mathbb{E} \int_0^T |b_s|^2 ds < \infty$.
- W *es un movimiento Browniano estándar.*

En forma diferencial, $dX_t = a_t dt + b_t dW_t$.

Teorema 2.26. *Fórmula de Itô.*

Sea X *un proceso de Itô y* $F \in \mathbb{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$*. Sean*

$$F_t = \frac{\partial F}{\partial t}, F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, F_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

Entonces tenemos:

$$F(t, X_t) = F(0, X_0) + \int_0^t F_t(s, X_s) ds + \int_0^t F_x(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t F_{xx}(s, X_s) b_s^2 ds. \tag{2.15}$$

donde

$$\int_0^t F_x(s, X_s) dX_s = \int_0^t F_x(s, X_s) a_s ds + \int_0^t F_x(s, X_s) b_s dW_s. \tag{2.16}$$

Dado que al ser X *proceso de Itô tenemos* $dX_t = a_t dt + b_t dW_t$*, también podemos escribir la fórmula de Itô en forma diferencial:*

$$dF(t, X_t) = F_t(t, X_t) dt + F_x(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} F_{xx}(t, X_t) b_t^2 dt. \tag{2.17}$$

Demostración. Véase Capinski, Kopp y Traple (2012). (página 136) □

2.5. Ecuaciones diferenciales estocásticas

Exponemos ahora ciertos teoremas que nos ayudaran a la hora de trabajar con ecuaciones diferenciales estocásticas en el modelo de Black-Scholes.

Teorema 2.27. *Existencia y unicidad de soluciones.*
Consideramos las ecuaciones diferenciales estocásticas de la siguiente forma:

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t, t \geq 0 \tag{2.18}$$

$$X_0 = x_0$$

Suponemos a y b continuas y Lipschitz respecto a la segunda variable y uniformemente continuas respecto a la primera, esto es

$$|a(t,x) - a(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| \leq K|x-y|, K > 0.$$

Suponemos también que a y b crecen linealmente, esto es

$$|a(t,x)| + |b(t,x)| \leq C(1+|x|), \forall x \in \mathbb{R}, t \in [0,T], C > 0. \tag{2.19}$$

Entonces (2.18) tiene una única solución que es continua y de cuadrado integrable.

Demostración. Véase Capinski, Kopp y Traple (2012) (página 160). □

Teorema 2.28. *Versión sencilla del teorema de Girsanov.*
Sea W un movimiento Browniano y $b \in \mathbb{R}$. Entonces $W_{\mathbb{Q}} = bt + W_t$ es un movimiento Browniano estándar bajo la probabilidad $\mathbb{Q}$ definida por:

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A exp(-\frac{1}{2}b^2T - bW_T)d\mathbb{P}. \tag{2.20}$$

También poldemos expresar el teorema en forma diferencial:

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = exp(-\frac{1}{2}b^2T - bW_T). \tag{2.21}$$

Demostración. Véase Capinski y Kopp (2012) (página 13). □

Teorema 2.29. *Teorema de representación de martingalas.*
Sea M una martingala respeto a una filtración $\mathbb{F}$ generada por un movimiento Browniano W tal que $M_t \in Ł^2(\Omega)$. Entonces existe un único proceso estocástico $X \in \mathcal{M}^2$ tal que

$$M_t = M_0 + \int_0^t X_s dW_s, t \geq 0. \tag{2.22}$$

O en forma diferencial,

$$dM_t = X_t dW_t. \tag{2.23}$$

Demostración. Véase Capinski y Kopp (2012) (página 46). □

3. El modelo de Black-Scholes

3.1. Conceptos previos

Definición 3.1. *Una opción financiera es un instrumento financiero que otorga a su poseedor el derecho, que no la obligación, a comprar o vender un activo subyacente a un determinado precio en un periodo de tiempo concreto.*

En función de cuando puede ser ejecutada una opción podemos diferenciar entre una opción Europea, que tan solo puede ser ejercida en la fecha de vencimiento, y una opción Americana, que puede ser ejecutada en cualquier momento previo a la fecha de vencimiento.

También podemos distinguir entre una opción que nos otorga el derecho a comprar un cierto activo y la opción que nos da el derecho a venderlo.

Definición 3.2. *Un Call Europeo es una opción que nos otorga el derecho, que no la obligación, a comprar un activo subyacente a un determinado precio K en una fecha concreta T.*

Sea S_T el precio del activo subyacente a fecha T, el perfil de beneficio de un Call se denota por:

$$C_T = max\{S_T - K, 0\}. \tag{3.1}$$

Definición 3.3. *Un Put Europeo es una opción que nos otorga el derecho, que no la obligación, a vender un activo subyacente a un determinado precio K en una fecha concreta T.*

Sea S_T el precio del activo subyacente a fecha T, el perfil de beneficio de un Put se denota por:

$$P_T = max\{K - S_T, 0\}. \tag{3.2}$$

Dado que el comprador de la opción se garantiza poder comprar o vender el activo subayente al precio que más le conviene, como contraprestación el vendedor de la opción recibe una prima, que sería el precio de la opción.

La prima de una opción depende de varios factores, entre ellos el precio del activo, el tipo de interés, la fecha de vencimiento o la volatilidad implícita. Para poder determinar esta prima se han desarrollado modelos que pretenden modelizarla con el fin de determinar el precio más justo posible de la opción. Entre estos modelos se encuentra el modelo de Black-Scholes.

Ejemplo 3.4. *Ejemplo sobre el uso de opciones.*
Suponemos que a principios de 2020 tenemos 10.000 acciones de la aerolínea AirBusinessClass con un precio de mercado de 25 USD (en la fecha mencionada). Por algún motivo, las acciones se encuentran bloqueadas y no podremos operar con ellas hasta finales de 2020.

Un amigo que vive en Wuhan nos informa de que están habiendo muchos casos de neumonía que la comunidad médica considera poco habituales, y se sospecha que podría desatarse una pandemia a nivel global. Si finalmente eso sucede, sabemos que el tráfico aéreo se detendrá y las compañías aéreas sufrirán pérdidas y el valor de las acciones bajará, ocasionándonos pérdidas.

Dado que no podemos operar con nuestras acciones porque están bloqueadas optamos, con intención de prevenir esas pérdidas económicas, por comprar opciones Put Europeas con fecha de vencimiento final de 2020, momento en el que ya podremos operar con nuestras acciones. Obtenemos entonces una opción de venta para 10.000 acciones de AirBusinessClass con precio de ejercicio 24 USD la acción y una prima (precio de la opción) de 2 USD por acción.

Finalmente se desata la pandemia y el precio de las acciones de AirBusinessClass cae hasta los 14 USD por acción. Afortunadamente podemos ejercer nuestra opción Put y vendemos nuestras 10.000 acciones por 24 USD, resultando la operación en un rendimiento de

$$(24 - 14) \cdot 10.000 - 2 \cdot 10.000 = 80.000 \text{ USD}.$$

Si no hubiéramos comprado opciones habríamos perdido 110.000 USD por la bajada en el precio de nuestras acciones. En cambio al tener opciones perdemos solo 30.000 USD.

En el caso de que finalmente no se hubiera desatado una pandemia, el precio de las acciones de AirBusinessClass habría subideo hasta 28 USD (suposición que hacemos en este ejemplo) y no habríamos necesitado ejercer la opción.

Teorema 3.5. *Paridad Call-Put.*

Sea P el precio de un Put Europeo y C el precio de un Call Europeo. Sean K el precio de ejercicio y T la fecha de vencimiento tanto del Call como del Put, r el tipo de interés sin riesgo y S el precio del activo subyacente en tiempo presente. Entonces:

$$P_t - C_t + S_t = Ke^{-r(T-t)}. \tag{3.3}$$

Demostración. Estudiamos la relación entre los precios S_T y K.
Si $S_T - K \geq 0$, entonces $S_T - (S_T - K)_+ + (K - S_T)_+ = S_T - (S_T - K) + 0 = K$.
Si $S_T - K \leq 0$, entonces $S_T - (S_T - K)_+ + (K - S_T)_+ = S_T - 0 + (K - S_T) = K$.

Entonces,

$$S_T - C_T + P_T = K. \tag{3.4}$$

Multiplicamos por e^{-rT} a ambos lados

$$\tilde{S}_T - \tilde{C}_T + \tilde{P}_T = Ke^{-rT}. \tag{3.5}$$

Siendo $\tilde{S}_T = S_T e^{-rT}$, $\tilde{C}_T = C_T e^{-rT}$, $\tilde{P}_T = P_T e^{-rT}$ $\mathbb{Q}$-martingalas, de forma que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{S}_T - \tilde{C}_T + \tilde{P}_T|\mathcal{F}_t) = \tilde{S}_t - \tilde{C}_t + \tilde{P}_t = Ke^{-rT}. \tag{3.6}$$

Multiplicamos por e^{rt} a ambos lados.

$$S_t - C_t + P_t = Ke^{-r(T-t)}. \tag{3.7}$$

□

Definición 3.6. *Una estrategia de cobertura consiste en un conjunto de operaciones financieras destinadas a reducir la exposición al riesgo de un activo.*

Lo que se pretende con una estrategia de cobertura es que esta se correlacione de forma inversa con la posición o activo que deseamos cubrir. De esta forma podremos compensar cualquier posible pérdida, aunque en la práctica solo podremos reducir de forma parcial el riesgo ya que las estrategias de cobertura no siempre son perfectas.

Ejemplo 3.7. *Ejemplo sobre estrategias de cobertura.*
Suponemos que una empresa que se dedica a la explotación de vacuno con fines alimentários alimenta el ganado con un pienso hecho a base de avena.

La guerra en Ucrania se desata y como consecuencia el precio de los cereales se vuelve muy volátil y la empresa teme que esta situación le ocasione pérdidas. Por ese motivo trata de reducir su exposición al precio del pienso con la siguiente estrategia de cobertura.

Como el pienso no cotiza en el mercado de futuros no podemos operar con él, pero sí podemos operar con avena, que es la base principal del pienso que alimenta a los animales. Por tanto nuestra mejor opción es comprar futuros sobre la avena con liquidación monetária para que, si el precio de la avena sube, y consecuentemente el del pienso también, nuestros futuros sobre avena nos reportaran beneficios que compensaran aproximadamente el gasto extra en pienso. En cambio, si el precio de la avena baja, también bajará el del pienso, y las pérdidas que tengamos por parte de los futuros sobre la avena se compensaran parcialmente con el dinero que nos ahorraremos en pienso al haber bajado los precios.

La estrategia de cobertura no es perfecta, ya que trabajamos con dos activos distintos, pero la alta correlación entre ellos hace que nuestra estrategia de cobertura reduzca en nuestro caso la volatilidad del gasto en comida para los animales, haciendo que grandes desviaciones en el precio se traduzcan en pequeñas desviaciones.

3.2. Introducción al modelo de Black-Scholes

3.2.1. Descripción del modelo

El modelo de Black-Scholes, que fue desarrollado por Fisher Black y Myron Scholes en 1973, es un modelo de mercado simplificado a tiempo continuo que supone la existencia de dos activos.

- S_t^0: un activo sin riesgo que evoluciona con un tipo de interés fijo r ≥ 0 según la ecuación
$$S_t^0 = e^{rt}, t \geq 0.$$
o en forma diferencial,
$$dS_t^0 = rS_t^0 dt. \tag{3.8}$$
- S_t: un activo con riesgo que es un movimiento browniano geométrico ya que evoluciona en función de:
    - S_0 constante positiva
    - W es un movimiento browniano estándar en el espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$.
    - $\mu \in \mathbb{R}$ tasa de retorno media (*drift* en inglés)
    - σ volatilidad constante
$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}, t \geq 0.$$
o en forma diferencial,
$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t). \tag{3.9}$$
Vemos que (3.9) satisface las condiciones del teorema (2.27) de existencia y unicidad de soluciones para les ecuaciones diferenciales estocásticas y por tanto existe una única solución continua y de cuadrado integrable S.

Proposición 3.8. *La distribución de S_t satisface:*
$$ln(\frac{S_t}{S_0}) \sim N((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma^2 t), \forall t \geq 0.$$

Demostración. Sea
$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}.$$
$$dS_t = S_t \mu dt + \sigma S_t dW_t.$$
Aplicamos la fórmula de Itô a $F(t, X_t) = log(X_t)$:
$$dF(t, X_t) = F_s(t, X_t)dt + F_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}F_{xx}(t, X_t)b_t^2 dt.$$
$$dX_t = a_t dt + b_t dW_t.$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0, \frac{\partial F}{\partial S} = \frac{1}{S}.$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, b_t = \sigma S.$$

Por tanto obtenemos:

$$dlog(S_t) = \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}(\sigma S_t)^2 = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dW_t.$$

□

Para el desarrollo de esta y las siguientes secciones nos basaremos en Capinski y Kopp (2012) y en Lamberton y Lapeyre (2008).

3.2.2. Estrategias autofinanciadas

Definición 3.9. *Una estrategia es un proceso estocàstico $\phi = (\phi_t)_{0 \le t \le T} = (H_t^0, H_t)_{0 \le t \le T}$ adaptado a una filtración $\mathbb{F}$ de W movimiento browniano donde H_t^0 y H_t son las cantidades de S_t^0 y S_t en la cartera a tiempo t.*

El valor de la cartera a tiempo t viene dado por $V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$.

Establecemos la condición:

$\int_0^T |H_t^0| dt < +\infty$ casi seguramente y $\int_0^T H_t^2 < +\infty$ casi seguramente de forma que la integral

$$\int_0^T H_t^0 dS_t^0 = \int_0^T H_t^0 r e^{rt} dt. \tag{3.10}$$

está bien definida.

Definición 3.10. *Una estrategia $\phi = (\phi_t)_{0 \le t \le T} = (H_t^0, H_t)_{0 \le t \le T}$ se dice autofinanciada si:*

- $\int_0^T |H_t^0| dt + \int_0^T H_t^2 dt < +\infty$ *casi seguramente*
- $H_t^0 S_t^0 + H_t S_t = H_0^0 S_0^0 + H_0 S_0 + \int_0^t H_u^0 dS_u^0 + \int_0^t H_u dS_u$

Proposición 3.11. *Sea $\phi = (\phi_t)_{0 \le t \le T} = (H_t^0, H_t)_{0 \le t \le T}$ una estrategia que satisface $\int_0^T |H_t^0| dt + \int_0^T H_t^2 < +\infty$ casi seguramente. Sea $V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$ el valor de la cartera.*

Entonces ϕ es una estrategia autofinanciada si y solo si

$$\tilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_u d\tilde{S}_u, \tag{3.11}$$

donde $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ es el precio actualizado del activo con riesgo y $\tilde{V}_t(\phi) = e^{-rt} V_t(\phi)$ es el valor actualizado de la cartera.

Demostración. Sea ϕ una estrategia autofinanciada. Partimos de:

$$\tilde{V}_t(\phi) = e^{-rt}V_t(\phi) \implies d\tilde{V}_t(\phi) = -r\tilde{V}_t(\phi)dt + e^{-rt}dV_t(\phi). \tag{3.12}$$

Sustituimos

$$V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$$

$$dV_t(\phi) = H_t^0 dS_t^0 + H_t dS_t$$

$$d\tilde{V}_t(\phi) = -re^{-rt}(H_t^0 S_t^0 + H_t S_t) + e^{-rt}(H_t^0 dS_t^0 + H_t dS_t). \tag{3.13}$$

Ahora $S_t^0 = e^{rt}$ y $dS_t^0 = rS_t^0 dt = re^{rt}dt$, por tanto

$$d\tilde{V}_t(\phi) = -re^{-rt}H_t S_t dt + e^{-rt}H_t dS_t = H_t(-re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t) = H_t d\tilde{S}_t. \tag{3.14}$$

Por último, integrando,

$$\tilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_u d\tilde{S}_u. \tag{3.15}$$

□

Definición 3.12. *Consideramos arbitraje a una operación o conjunto de operaciones que satisface las siguientes condiciones:*

- *Lleva a beneficio seguro*
- *No es necesario disponer de efectivo para entrar en la operación*

El Principio de No Arbitraje argumenta que no existen oportunidades de arbitraje ya que, en un mercado suficientemente líquido, los operadores que quisieran aprovechar las hipotéticas oportunidades de arbitraje se encargarían de capitalizarlas. Por ende, debido a la ley de oferta y demanda, los precios cambiarían y estas oportunidades de arbitraje desaparecerían.

3.2.3. Medida neutral al riesgo

Definición 3.13. *Una medida neutral al riesgo* $\mathbb{Q}$ *es una medida equivalente a* $\mathbb{P}$ *tal que* $\tilde{S}_t$ *es una* $\mathbb{Q}$*-martingala.*

Vemos que esta medida neutral al riesgo existe en el modelo de Black-Scholes.

Partiendo de $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$ vemos que

$$d\tilde{S}_t = -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t = \tilde{S}_t((\mu - r)dt + \sigma dB_t). \tag{3.16}$$

Si definimos $W_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t$ movimiento Browniano estándar, entonces $d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t\sigma dW_t$. Aplicando el teorema de Girsanov existe $\mathbb{Q}$ medida neutral al riesgo equivalente a $\mathbb{P}$.

Podemos expresar el precio actualizado del activo con riesgo como $\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2 t}{2}}$

Queda ver que $\tilde{S}_t$ es una $\mathbb{Q}$-martingala.

Demostración. Para cualquier $s < t$,

$$\mathbb{E}(\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_s}|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(exp(\sigma(W_t - W_s) - \frac{\sigma^2(t-s)}{2})|\mathcal{F}_s). \tag{3.17}$$

Dado que W_t y W_S son movimientos Brownianos estándar, tenemos que ambos siguen una distribución N(0, t). Por tanto,

$$W_t - W_s \sim N(0, t-s). \tag{3.18}$$

Tendremos,

$$\mathbb{E}(\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_s}|\mathcal{F}_s) = \int_{\mathbb{R}} exp(\sigma x - \frac{\sigma^2(t-s)}{2})\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}exp(-\frac{x^2}{2(t-s)})dx \tag{3.19}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}exp(-\frac{(x-\sigma(t-s))^2}{2(t-s)})dx = 1. \tag{3.20}$$

$$\implies \mathbb{E}(\tilde{S}_t|\mathcal{F}_s) = \tilde{S}_s,\ \forall s < t. \tag{3.21}$$

□

3.2.4. Valoración de opciones

Definición 3.14. *Una estrategia ϕ es admisible si es autofinanciada y*

$$\tilde{V}_t(\phi) = H_t^0 + H_t\tilde{S}_t, \forall t \in \mathbb{T}. \tag{3.22}$$

tal que $\sup_{t\in\mathbb{T}} \tilde{V}_t$ *es de cuadrado integrable bajo $\mathbb{Q}$ medida neutral al riesgo.*

Definición 3.15. *Una opción es replicable si su pago a fecha de madurez es igual al valor de una estrategia admisible.*

Sea h el pago de una opción, h debe ser de cuadrado integrable bajo $\mathbb{Q}$ medida neutral al riesgo.

Definición 3.16. *Una estrategia ϕ replica una opción con pago h si $h = V_T(\phi)$.*

Definición 3.17. *Un modelo de mercado es completo si toda variable aleatoria $\mathcal{F}$-medible h puede ser replicada.*

Definición 3.18. *Una estrategia de arbitrage ϕ es una estrategia autofinanciada tal que*

$$V_0(\phi) = 0,\ V_T(\phi) \geq 0,\ \mathbb{P}(V_T(\phi) > 0) > 0. \tag{3.23}$$

Por la propia definición de estrategia admisible, ninguna estrategia admisible es una estrategia de arbitrage.

Teorema 3.19. *Sea H el pago de una opción replicada por la estrategia ϕ. Sea la opción un proceso de Itô, el principio de no arbitrage implica que el precio de la opción es*

$$V_t = V_\phi(t), \forall t \in \mathbb{T}. \tag{3.24}$$

Demostración. Véase Capinski y Kopp (2012) (página 30) □

Teorema 3.20. *En el modelo de Black-Scholes cualquier opción definida por una variable aleatoria h no negativa y $\mathcal{F}_t$-medible de cuadrado integrable respecto $\mathbb{Q}$ es replicable y $V_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}_t)$*

Demostración. Suponemos que existe una estrategia admisibe (H^0, H) que replica una opción. Entonces tenemos

$$V_t = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t. \tag{3.25}$$

Asumimos $V_T = h$. Tenemos también $\tilde{V}_t = V_t e^{-rt} = H_t^0 + H_t\tilde{S}_t$

Al ser la estrategia autofinanciada y $d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t\sigma dW_t$

$$\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t H_u d\tilde{S}_u = V_0 + \int_0^t H_u\sigma\tilde{S}_u dW_u. \tag{3.26}$$

Bajo $\mathbb{Q}$, $\tilde{V}_t$ es una martingala de cuadrado integrable y tenemos

$$\tilde{V}_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{V}_T|\mathcal{F}_t). \tag{3.27}$$

y consecuentemente

$$V_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}_t). \tag{3.28}$$

Hemos visto que si la estrategia (H^0, H) replica la opción definida por h, entonces V_t nos da su valor. Nos falta ver que la opción es replicable encontrando procesos H_t^0, H_t que definan una estrategia admisible tal que

$$H_t^0 S_t^0 + H_T S_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}_t). \tag{3.29}$$

El proceso $M_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-rT}h|\mathcal{F}_t)$ es una martingala de cuadrado integrable respecto a una filtración generada por un movimiento browniano W y podemos aplicar el Teorema de representación de martingalas de forma que existe un proceso adaptado K_t de cuadrado integrable tal que $\forall t \in [0, T]$

$$M_t = M_0 + \int_0^t K_s dW_s. \tag{3.30}$$

Por tanto la estrategia $\phi = (H^0, H)$ con $H_t = \frac{K_t}{\sigma \tilde{S}_t}$ y $H_t^0 = M_t - H_t \tilde{S}_t$ es una estrategia autofinanciada y admisible.

$\square$

Deduciremos ahora el precio de una opción en el modelo de Black-Scholes.

Ponemos $h = f(S_T)$ y escribimos

$$V_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-r(T-t)}f(S_T)|\mathcal{F}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-r(T-t)}f(S_t e^{r(T-t)}e^{\sigma(W_T-W_t)-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)})|\mathcal{F}_t). \tag{3.31}$$

Como S_t es $\mathcal{F}$-medible bajo $\mathbb{Q}$ y $W_T - W_t$ es independiente de $\mathcal{F}$, ponemos $V_t = F(t, S_t)$ donde

$$F(t,x) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-r(T-t)}f(xe^{r(T-t)}e^{\sigma(W_T-W_t)-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)})). \tag{3.32}$$

$W_T - W_t \sim N(0, T-t)$ bajo $\mathbb{Q}$, por tanto

$$F(t,x) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} f(xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}}) \frac{e^{\frac{-y^2}{2}}dy}{\sqrt{2\pi}}. \tag{3.33}$$

Podemos ahora diferenciar entre la función f que describe un Call y la que describe un Put, para así poder computar explicitamente F.

3.2.5. Valoración de una opción Call Europea

Nos centraremos primero en obtener el precio de una opción Call Europea.

Ponemos $f(x) = (x - K)_+$.

$$F(t,x) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-r(T-t)}(xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(W_T-W_t)} - K)_+) \tag{3.34}$$

$$= \mathbb{E}(xe^{\sigma\sqrt{\tau}g-\frac{\sigma^2\tau}{2}} - Ke^{-r\theta})_+. \tag{3.35}$$

donde g es una variable aleatoria Gaussiana estándar y $\tau = T - t$.
Definimos

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} \tag{3.36}$$

$$d_1 = \frac{log(\frac{x}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}. \tag{3.37}$$

Entonces,

$$F(t,x) = \mathbb{E}[(xe^{\sigma\sqrt{\tau}g-\frac{\sigma^2\tau}{2}} - Ke^{-r\tau})1_{g+d_2\geq 0}] \tag{3.38}$$

$$= \int_{-d_2}^{+\infty}(xe^{\sigma\sqrt{\tau}g-\frac{\sigma^2\tau}{2}} - Ke^{-r\tau})\frac{e^{\frac{-y^2}{2}}dy}{\sqrt{2\pi}} \tag{3.39}$$

$$= \int_{+\infty}^{-d_2}(xe^{\sigma\sqrt{\tau}g-\frac{\sigma^2\tau}{2}} - Ke^{-r\tau})\frac{e^{\frac{-y^2}{2}}dy}{\sqrt{2\pi}}. \tag{3.40}$$

Escribimos la expresión como resta de dos integrales y aplicamos el cambio de variable $z = y + \sigma\sqrt{\tau}$.

$$C(t,S_t) = S_tN(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2). \tag{3.41}$$

donde

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{\frac{-x^2}{2}}dx. \tag{3.42}$$

3.2.6. Valoración de una opción Put Europea

Pasamos ahora a determinar el precio de una opción Put Europea.

Utilizaremos la paridad Call-Put (3.5) para llegar al precio del Put.

$$P_t = C_t - S_t + Ke^{-r\tau}. \tag{3.43}$$

Tenemos el precio del Call por (3.41)

$$C(t, S_t) = S_t N(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2). \tag{3.44}$$

Por tanto obtenemos

$$\begin{aligned} P_t &= S_t N(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2) - S_t + Ke^{-r\tau} && (3.45) \\ &= S_t(N(d_1) - 1) + Ke^{-r\tau}(1 - N(d_2)) && (3.46) \\ &= -S_t N(-d_1) + Ke^{-r\tau} N(-d_2). && (3.47) \end{aligned}$$

4. La volatilidad estocástica

4.1. Volatilidad

La volatilidad es una medida fundamental en el análisis financiero que representa la incertidumbre asociada al futuro valor de un determinado activo subyacente. Dicho de otra forma, la volatilidad mide la intensidad de las variaciones en el precio de dicho activo. Podemos observar diferentes formas de considerar la volatilidad.

La volatilidad histórica refleja los movimientos pasados del precio de un activo subyacente. Su cálculo se basa en el uso de datos históricos sobre el precio del activo durante un período concreto de tiempo para así poder estimar la volatilidad en un futuro. Se trata de una medida retrospectiva que se expresa generalmente como la desviación estándar.

Por otro lado tenemos la volatilidad implícita en el precio de un activo, que se deriva de la ecuación de Black-Scholes, vista en la sección anterior. A diferencia de la volatilidad histórica, esta se calcula utilizando modelos sobre el precio del activo considerado.

Por último consideramos la volatilidad estocástica, que se basa en tratar la volatilidad como un proceso estocástico para representar la incertidumbre en el precio del activo subyacente.

Hemos visto anteriormente que el modelo de Black-Scholes considera la volatilidad como una constante, hecho que produce ineficiencias a la hora de valorar opciones. El modelo de Heston, a diferencia del modelo del Black-Scholes, considera la volatilidad como un proceso estocástico y permite así percibir mejoras en la fijación de precios de los activos.

Con esta motivación en mente, nuestro objetivo en esta sección es derivar la fórmula de valoración de opciónes del modelo de Heston partiendo del modelo de Black-Scholes. Para ello desarrollaremos los modelos de volatilidad estocástica de reversión a la media, ya que el modelo de Heston es un caso concreto de estos.

En esta sección seguiremos de cerca Fouque, Papanicolau y Sircar (2000). Más adelante, para el desarrollo del modelo de Heston, nos basaremos en Heston (1993) y Gatheral (2011).

4.2. Modelos de volatilidad estocástica

Para desarrollar el modelo de volatilidad estocástica de reversión a la media, partiremos del modelo de Black-Scholes. Sea S_t el precio del activo subyacente a fecha t, hemos visto que dicho activo evoluciona de la siguiente manera.

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t). \tag{4.1}$$

Consideramos ahora que la volatilidad σ es un proceso estocástico en lugar de una constante y escribimos:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t. \tag{4.2}$$

Ponemos $\sigma_t = f(Y_t)$ donde Y_t sigue un proceso de Ornstein-Uhlenbeck, es decir:

$$dY_t = \alpha(m - Y_t)dt + \beta_t d\hat{Z}_t. \tag{4.3}$$

donde α y m son constantes tal que $\alpha m > 0$ y β_t es un proceso adaptado. La constante m se conoce como el nivel medio a largo plazo de Y_t con velocidad α, que es la medida de reversión de la media.

Vemos que

$$Y_t = m + (y - m)e^{-\alpha t} + \beta_t \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} d\hat{Z}_s. \tag{4.4}$$

Y por tanto

$$Y_t \sim N(m + (y - m)e^{-\alpha t}, \frac{\beta_t^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})). \tag{4.5}$$

Sea Z_t un movimiento Browniano estándar independiente de W_t, el movimiento Browniano $\hat{Z}_t$ se expresa de la siguiente forma:

$$\hat{Z}_t = \rho W_t + \sqrt{1 - \rho^2} Z_t. \tag{4.6}$$

$\hat{Z}_t$ está correlacionado con W_t de forma que

$$Cor(W_t, \hat{Z}_t) = \frac{Cov(W_t, \hat{Z}_t)}{\sqrt{Var(W_t)Var(\hat{Z}_t)}} = \frac{\mathbb{E}(W_t\hat{Z}_t) - \mathbb{E}(W_t)E(\hat{Z}_t)}{\sqrt{Var(W_t)Var(\hat{Z}_t)}}$$

$$= \frac{\mathbb{E}[(\hat{Z}_t - \mathbb{E}(\hat{Z}_t)(W_t - \mathbb{E}(W_t))]}{\sqrt{Var(W_t)Var(\hat{Z}_t)}} = \frac{\mathbb{E}[\hat{Z}_t W_t]}{\sqrt{t}\sqrt{t}}$$

$$= \frac{\rho t}{t} = \rho.$$

Trabajaremos en el espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ donde $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)$ y $\mathcal{F}_t$ es la σ-álgebra generada por los movimientos Brownianos W_s y Z_s.

Asumimos la existencia de $\mathbb{Q}$ medida neutral al riesgo bajo la cual el precio actualizado del activo con riesgo $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ es una martingala.

Sea h el pago de una opción de cuadrado integrable bajo $\mathbb{Q}$ medida neutral al riesgo, podemos ver por el principio de no arbitraje, al igual que en el modelo de Black-Scholes, que el precio de una opción viene dado por

$$V_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t). \tag{4.7}$$

Podremos determinar entonces el precio de una opción bajo cada $\mathbb{Q}$ medida neutral al riesgo.

Definimos

$$W_t^* = W_t + \int_0^t \theta_s ds. \tag{4.8}$$

donde $\theta_s = \frac{\mu - r}{\sigma_s}$.

Sea γ_t un proceso adaptado de cuadrado integrable, definimos

$$Z_t^* = Z_t + \int_0^t \gamma_t ds. \tag{4.9}$$

Por el teorema de Girsanov, W^* y Z^* son dos movimientos Brownianos estándar independientes bajo $\mathbb{Q}_\gamma$ definida como:

$$\frac{d\mathbb{Q}_\gamma}{d\mathbb{P}} = exp(-\frac{1}{2} \int_0^T (\theta_s^2 + \gamma_s^2) ds - \int_0^T \theta_s dW_s - \int_0^T \gamma_s dZ_s). \tag{4.10}$$

Entonces, bajo $\mathbb{Q}_\gamma$, con $\sigma_t = f(Y_t)$

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_t S_t dW_t^*. \tag{4.11}$$

$$dY_t = [\alpha(m - Y_t) - \beta_t(\rho \frac{\mu - r}{\sigma_t} + \gamma_t \sqrt{1 - \rho^2})] dt + \beta_t d\hat{Z}_t^*. \tag{4.12}$$

$$\hat{Z}_t^* = \rho W_t^* + \sqrt{1 - \rho^2} Z_t^*. \tag{4.13}$$

Por tanto, podemos escribir $V_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\gamma}(e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}_t)$ en función de $t,\ S_t\ y\ Y_t$.

$$V_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\gamma}(e^{-r(T-t)}h(S_t)|\mathcal{F}_t). \tag{4.14}$$

Dado que el modelo de Heston es un caso particular del modelo de volatilidad estocástica de reversión a la media, realizaremos la derivación completa de la fórmula de valoración de una opción Call Europea en la siguiente sección.

4.3. El modelo de Heston

Para desarrollar el modelo de Heston y su fórmula de valoración de opciones para una opción Call Europea partiremos del modelo planteado anteriormente. En nuestro caso particular pondremos

$$\sigma_t = f(Y_t),\ \textit{donde}\ f(y) = \sqrt{y}\ y\ \beta(t, s, y) = \sigma\sqrt{y}. \tag{4.15}$$

Como en el modelo de volatilidad estocástica de reversión a la media, Y_t sigue un proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

Por tanto, sustituyendo estas nuevas condiciones en (4.2), (4.3), (4.6), obtenemos:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{Y_t} S_t dW_t. \tag{4.16}$$

$$dY_t = \alpha(m - Y_t)dt + \sigma\sqrt{Y_t} d\hat{Z}_t. \tag{4.17}$$

$$\hat{Z}_t = \rho W_t + \sqrt{1-\rho^2} Z_t. \tag{4.18}$$

Procedemos ahora a obtener la fórmula de valoración de una opción Call Europea $C(t, s, y)$ con pago $h = f(S_t) = (S_t - K)_+$.

Tal y como demostraron Black y Scholes (1973), el valor $C(t, s, y)$ de un derivado financiero debe cumplir la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{1}{2} y s^2 C_{ss} + \rho\sigma y s C_{sy} + \frac{1}{2}\sigma^2 y C_{yy} + r s C_s + (\alpha(m-y) - \lambda(t, s, y))C_y - rC + C_t = 0. \tag{4.19}$$

donde

$$\lambda(t, s, y) = \sigma(\rho(\mu - r) + \sqrt{y}\gamma(t, s, y)\sqrt{1-\rho^2}. \tag{4.20}$$

Tal y como hemos visto en la sección anterior, sea h el pago de una opción de cuadrado integrable bajo $\mathbb{Q}_\gamma$ medida neutral al riesgo y por el principio de no arbitraje, el precio de una opción se expresa de la siguiente forma:

$$V_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\gamma}(e^{-r(T-t)} h(S_t) | \mathcal{F}_t). \tag{4.21}$$

Dado que buscamos en particular la formula de valoración de una opción Call Europea, el pago de la opción vendrá dado por la función $h(S_t) = (S_t - K)_+$.

Escribimos entonces,

$$
\begin{aligned}
C(t,s,y) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\gamma}(e^{-r(T-t)}(S_T-K)_+|\mathcal{F}_t) && (4.22)\\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\gamma}(e^{-r(T-t)}(S_T-K)1_{\{S_T\geq K\}}|\mathcal{F}_t) && (4.23)\\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\gamma}(e^{-r(T-t)}S_T 1_{\{S_T\geq K\}}|\mathcal{F}) - e^{-r(T-t)}K\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\gamma}(1_{\{S_T\geq K\}}|\mathcal{F}_t) && (4.24)\\
&= S_t\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\gamma}(\frac{e^{-r(T-t)}S_T}{S_t}1_{\{S_T\geq K\}}|\mathcal{F}) - e^{-r(T-t)}K\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\gamma}(1_{\{S_T\geq K\}}|\mathcal{F}_t). && (4.25)
\end{aligned}
$$

Definiendo

$$
\begin{aligned}
P(t,T) &= e^{-r(T-t)},\\
P_1 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\gamma}(\frac{e^{-r(T-t)}S_T}{S_t}1_{\{S_T\geq K\}}|\mathcal{F}_t),\\
P_2 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\gamma}(1_{\{S_T\geq K\}}|\mathcal{F}_t),
\end{aligned}
$$

tenemos

$$C(t,s,y) = S_tP_1 - KP(t,T)P_2. \tag{4.26}$$

Realizamos el cambio de variable $x_t = ln(S_t)$ y sustituimos (4.3) en (4.19), obteniendo que P_1 y P_2 deben satisfacer las siguientes ecuaciones en derivadas parciales.

$$\frac{1}{2}y\frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2} + \rho\sigma y\frac{\partial^2 P_j}{\partial x\partial y} + \frac{1}{2}\sigma^2 y\frac{\partial^2 P_j}{\partial y^2} + (r+u_jy)\frac{\partial P_j}{\partial x} + (a-b_jy)\frac{\partial P_j}{\partial y} + \frac{\partial P_j}{\partial t} = 0. \tag{4.27}$$

para j = 1, 2 con $P_j(x,y,T;ln(K)) = 1_{\{x\geq ln(K)\}}$ donde

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{2} && (4.28)\\
u_2 &= -\frac{1}{2} && (4.29)\\
a &= \alpha m && (4.30)\\
b_1 &= \alpha+\lambda-\rho\sigma && (4.31)\\
b_2 &= \alpha+\lambda. && (4.32)
\end{aligned}
$$

Cuando x y y siguen el proceso estocástico

$$dx_j(t) = (r + u_j y_j(t))dt + \sqrt{y_j(t)} dW_t. \tag{4.33}$$

$$dy_j(t) = (a - b_j y_j(t))dt + \sigma\sqrt{y_j(t)} d\tilde{Z}_t. \tag{4.34}$$

tenemos que la probabilidad de que la opción se ejerza es

$$P_j(x, y, T; ln(K)) = \mathbb{P}(x_j(T) \geq ln(K) | x_j(t) = x, y_j(t) = y). \tag{4.35}$$

Vemos la demostración.

Demostración. Definimos

$$f_j(x, y, t; ln(K)) = \mathbb{E}(1_{\{x_j(T) \geq ln(K)\}} | x_j(t) = x, y_j(t) = y). \tag{4.36}$$

Aplicamos ahora la fórmula de Itô.

$$df_j = (\frac{\partial f_j}{\partial t} + (r + u_j y_j(t))\frac{\partial f_j}{\partial x} + (a_j - b_j y_j(t))\frac{\partial f_j}{\partial y} + \frac{1}{2} y_j(t)\frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2}$$

$$+ \frac{1}{2}\sigma^2 y_j(t)\frac{\partial^2 f_j}{\partial y^2} + \rho\sigma y_j(t)\frac{\partial f_j}{\partial x \partial y})dt$$

$$+ ((r + u_j y_j(t))\frac{\partial f_j}{\partial x})dW_t + ((a_j - b_j y_j(t))\frac{\partial f_j}{\partial y})d\hat{Z}_t.$$

f_j es una martingala, dado que

$$\mathbb{E}(f_j(t)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(1_{\{x_j(T) \geq ln(K)\}} | x_j(t) = x, y_j(t) = y)|\mathcal{F}_s) \tag{4.37}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}(\mathbb{E}(1_{\{x_j(T) \geq ln(K)\}}|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_s) = f_j(s) \tag{4.38}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}(f_j(t)|\mathcal{F}_s) = f_j(s),\ \forall s \leq t. \tag{4.39}$$

Como consecuencia f_j debe satisfacer

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + (r + u_j y_j(t))\frac{\partial f_j}{\partial x} + (a_j - b_j y_j(t))\frac{\partial f_j}{\partial y} \tag{4.40}$$

$$+ \frac{1}{2} y_j(t)\frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\sigma^2 y_j(t)\frac{\partial^2 f_j}{\partial y^2} + \rho\sigma y_j(t)\frac{\partial f_j}{\partial x \partial y} = 0. \tag{4.41}$$

Por definición,

$$f_j(x, y, T; ln(K)) = 1_{\{x \geq ln(K)\}}. \tag{4.42}$$

Y entonces

$$P_j(x,y,T;ln(K)) = \mathbb{E}(1_{\{x_j(T)\geq ln(K)\}}|x_j(t)=x, y_j(t)=y) \tag{4.43}$$

$$= \mathbb{P}(x_j(T)\geq ln(K)|x_j(t)=x, y_j(t)=y). \tag{4.44}$$

□

Definimos $\tau = T - t$ para simplificar la notación. Las respectivas funciones características de P_1 y P_2 se pueden expresar como

$$g_j(x,y,t;\phi) = exp\{C_j(\tau;\phi) + D_j(\tau;\phi)y + i\phi x\}. \tag{4.45}$$

donde

$$C_j(\tau,\phi) = r\phi i\tau + \frac{a}{\sigma^2}\left((b_j - \rho\sigma\phi i + d_j)\tau - 2ln\left[\frac{1-c_je^{d_j\tau}}{1-c_j}\right]\right). \tag{4.46}$$

$$D_j(\tau,\phi) = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d_j}{\sigma^2}\left[\frac{1-e^{d_j\tau}}{1-c_je^{d_j\tau}}\right]. \tag{4.47}$$

$$c_j = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d_j}{b_j - \rho\sigma\phi i - d_j}. \tag{4.48}$$

$$d_j = \sqrt{(\rho\sigma\phi i - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j\phi i - \phi^2)}. \tag{4.49}$$

Podemos hacer la inversa de la función característica g_j y así obtendremos las expresiones P_j que buscábamos:

$$P_j(x,y,T;ln(K)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty Re\left[\frac{e^{-i\phi ln(K)}g_j(x,y,T;\phi)}{i\phi}d\phi\right]. \tag{4.50}$$

Los resultados vistos en esta sección nos han permitido llegar a la fórmula de valoración de un Call Europeo bajo el modelo de Heston.

Ahora bien, nos será conveniente reformular este resultado para poder operar con mayor agilidad en la siguiente sección. Nuestro propósito ahora es modificar (4.3) y (4.45) para obtener unas fórmulas que no dependan de $j = 1, 2$, sino que nos permitan obtener el precio del Call mediante unas únicas fórmulas.

Partiremos de la expresión

$$g_j(x,y,t;\phi) = exp\{C_j(\tau;\phi) + D_j(\tau;\phi)y + i\phi x\}.$$

Sustituimos (4.46), (4.47) y $a = \alpha m$.

$$g_j(x,y,t;\phi) = exp\{r\phi i\tau + \frac{\alpha m}{\sigma^2}\left((b_j - \rho\sigma\phi i + d_j)\tau - 2ln\left[\frac{1-c_j e^{d_j\tau}}{1-c_j}\right]\right)$$

$$+ y\frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d_j}{\sigma^2}\left[\frac{1-e^{d_j\tau}}{1-c_j e^{d_j\tau}}\right] + i\phi x\}.$$

Separamos cada una de las exponenciales de la fórmula.

$$= exp\left(r\phi i\tau + i\phi x\right) \cdot exp\left(\frac{-2\alpha m}{\sigma^2}ln\left[\frac{1-c_j e^{d_j\tau}}{1-c_j}\right]\right)$$

$$\cdot\, exp\left(\frac{\alpha m}{\sigma^2}(b_j - \rho\sigma\phi i + d_j)\right) \cdot exp\left(y\frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d_j}{\sigma^2}\left[\frac{1-e^{d_j\tau}}{1-c_j e^{d_j\tau}}\right]\right).$$

Modificamos cada una de las exponenciales.

$$exp\left(r\phi i\tau + i\phi x\right) = exp\left(r\phi i\tau + i\phi ln(S_t)\right) = exp\left(r\phi i\tau\right) S_t^{i\phi}.$$

$$exp\left(\frac{-2\alpha m}{\sigma^2}ln\left[\frac{1-c_j e^{d_j\tau}}{1-c_j}\right]\right) = \left(\frac{1-c_j e^{d_j\tau}}{1-c_j}\right)^{\frac{-2\alpha m}{\sigma^2}}.$$

$$exp\left(\frac{\alpha m}{\sigma^2}(b_j - \rho\sigma\phi i + d_j)\right) \cdot exp\left(y\frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d_j}{\sigma^2}\left[\frac{1-e^{d_j\tau}}{1-c_j e^{d_j\tau}}\right]\right)$$

$$= exp\left(\frac{\alpha m}{\sigma^2}(b_j - \rho\sigma\phi i + d_j) + y\frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d_j}{\sigma^2}\left[\frac{1-e^{d_j\tau}}{1-c_j e^{d_j\tau}}\right]\right).$$

Finalmente obtenemos:

$$g_j(x,y,t;\phi) = exp\left(r\phi i\tau\right) S_t^{i\phi}\left(\frac{1-c_j e^{d_j\tau}}{1-c_j}\right)^{\frac{-2\alpha m}{\sigma^2}} \tag{4.51}$$

$$\cdot exp\left(\frac{\alpha m}{\sigma^2}(b_j - \rho\sigma\phi i + d_j) + y\frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d_j}{\sigma^2}\left[\frac{1-e^{d_j\tau}}{1-c_j e^{d_j\tau}}\right]\right).$$

Ahora partiremos de

$$C(t,s,y) = S_t P_1 - KP(t,T)P_2.$$

$$P_1(x,y,T;ln(K)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty Re\left[\frac{e^{-i\phi ln(K)}g_1(x,y,T;\phi)}{i\phi}d\phi\right].$$

$$P_2(x,y,T;ln(K)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} Re\left[\frac{e^{-i\phi ln(K)} g_2(x,y,T;\phi)}{i\phi} d\phi\right].$$

Sustituimos (4.50) para cada $j = 1, 2$ y $P(t,T) = e^{-r(T-t)}$.

$$C(t,s,y) = S_t\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} Re\left[\frac{e^{-i\phi ln(K)} g_1(x,y,T;\phi)}{i\phi} d\phi\right]\right)$$

$$- Ke^{-r\tau}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} Re\left[\frac{e^{-i\phi ln(K)} g_2(x,y,T;\phi)}{i\phi} d\phi\right]\right).$$

Reordenamos y sacamos factor común $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{\pi}$.

$$= \frac{1}{2}\left(S_t - Ke^{-r\tau}\right) + \frac{1}{\pi}\left[S_t\int_0^{+\infty} Re\left[\frac{e^{-i\phi ln(K)} g_1(x,y,T;\phi)}{i\phi} d\phi\right]\right.$$

$$\left. - Ke^{-r\tau}\int_0^{+\infty} Re\left[\frac{e^{-i\phi ln(K)} g_2(x,y,T;\phi)}{i\phi} d\phi\right]\right].$$

Ahora,

$$e^{-i\phi ln(K)} = \frac{1}{K^{i\phi}}.$$

Entonces juntando las integrales,

$$C(t,S_t,y) = \frac{1}{2}\left(S_t - Ke^{-r\tau}\right)$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} Re\left[S_t\frac{g_1(x,y,T;\phi)}{i\phi K^{i\phi}} - Ke^{-r\tau}\frac{g_2(x,y,T;\phi)}{i\phi K^{i\phi}}\right] d\phi.$$

Podemos observar que si escribimos (4.48) y (4.49) como

$$c = \frac{\alpha - \rho\sigma\phi i + d}{\alpha - \rho\sigma\phi i - d}, \tag{4.52}$$

$$d = \sqrt{(\rho\sigma\phi i)^2 - \sigma^2(2\phi i - \phi^2)}, \tag{4.53}$$

entonces podemos reescribir la función característica y la fórmula de valoración del Call Europeo en función de estas últimas, obteniendo:

$$g(x,y,t;\phi) = exp\left(r\phi iT\right) S_t^{i\phi} \left(\frac{1-ce^{d\tau}}{1-c}\right)^{\frac{-2\alpha m}{\sigma^2}} \cdot \tag{4.54}$$

$$\cdot exp\left(\frac{\tau\alpha m}{\sigma^2}(\alpha - \rho\sigma\phi i + d) + \frac{y}{\sigma^2}(\alpha - \rho\sigma\phi i - d)\left[\frac{1-e^{d\tau}}{1-ce^{d\tau}}\right]\right).$$

$$C(t,S_t,y) = \frac{1}{2}\left(S_t - Ke^{-r\tau}\right) + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} Re\left[e^{r\tau}\frac{g(x,y,T;\phi-i)}{i\phi K^{i\phi}} - K\frac{g(x,y,T;\phi)}{i\phi K^{i\phi}}\right]. \tag{4.55}$$

De esta forma hemos logrado unificar las integrales de la fórmula en una sola y conseguir expresiones que no dependan de $j = 1, 2$.

5. Código en lenguaje Python

El próposito de esta sección es poder desarrollar un código en lenguaje Python para poder computar tanto la fórmula de Black-Scholes como la fórmula de Heston para la valoración de una opción Call Europea.

Una vez esté realizado el trabajo de programación pasaremos a exponer en la siguiente sección un ejemplo práctico con la intención de poder comparar el funcionamiento de los dos modelos estudiados en este proyecto.

Antes de definir las funciones necesarias debemos importar las siguientes librerias:

```
import pandas as pd
import numpy as np
from scipy.stats import norm
```

La siguiente función calcula el precio de un Call Europeo utilizando la fórmula de valoración de opciones del modelo de Heston obtenida en la sección anterior (4.55).

```
def heston_call_price(St, K, r, m, v, alpha, lambd, rho, sigma, T, t):
    tau = T-t
    PtT = np.exp(-r*tau)
    I = integral(St, K, r, m, v, alpha, lambd, rho, sigma, tau)
    C = 0.5*(St-K*PtT) + I/np.pi

    return np.real(C)
```

Esta función utiliza las siguientes dos funciones. La primera, definida como *integral*, es una función para calcular la integral de forma numérica. La segunda, definida como *heston_g*, calcula la función característica de Heston (4.54).

```
def integral(St, K, r, m, v, alpha, lambd, rho, sigma, tau):
    I = 0
    infinit = 100
    pasos = 10000

    pas = infinit/pasos

    for i in range(1,pasos):
        phi = pas * (2*i + 1)/2

        g_phi_menys_i = heston_g(phi-1j, St, r, m, v,
                                 alpha, lambd, rho, sigma, tau)
        resta_1 = np.exp(r*tau) * g_phi_menys_i
```

```
        g_phi = heston_g(phi, St, r, m, v, alpha, lambd, rho, sigma, tau)
        resta_2 = K*g_phi

        numerador  = resta_1 - resta_2
        denominador = 1j*phi* np.power(K, 1j*phi)

        I += pas * numerador/denominador

    return I

def heston_g(phi, St, r, m, v, alpha, lambd, rho, sigma, tau):
    rspi = rho*sigma*phi*1j
    b = alpha + lambd
    d = np.sqrt( (rspi - b)**2 + (sigma**2)*(phi*1j + phi**2) )
    c = (b - rspi + d)/(b - rspi - d)

    exp_gran_primer_sumand = ((tau*alpha*m)/(sigma**2))*(b - rspi + d)
    exp_gran_segon_sumand = (v/(sigma**2)) * (b - rspi + d)
                                * ((1- np.exp(d*tau))/(1-c*np.exp(d*tau)))

    exp_gran = np.exp( exp_gran_primer_sumand + exp_gran_segon_sumand )

    prod_e = np.exp( tau*phi*r*1j )
    prod_St = np.exp(np.log(St) * phi*1j)
    prod_pot_base = (1-c*np.exp(d*tau))/(1-c)
    prod_pot_exp = (-2*alpha*m)/(sigma**2)
    prod_pot = np.power( prod_pot_base , prod_pot_exp )

    prod_1 = prod_e*prod_St*prod_pot

    g = prod_1 * exp_gran

    return g
```

La siguiente función calcula el precio de un Call Europeo utilizando la fórmula de valoración de opciones del modelo de Black-Scholes (3.41).

```
def BS_call_price(S, K, r, Vol, tau):
    d_u = d1(S, K, r, Vol, tau)
    d_dos = d2(S, K, r, Vol, tau)

    return (S*norm.cdf(d_u)) - (K*np.exp(-r*tau)*norm.cdf(d_dos))


def d1(S, K, r, Vol, tau):
    return (np.log(S/K) + ((r + (Vol**2)/2) * tau)) / (Vol* np.sqrt(tau))
```

```python
def d2(S, K, r, Vol, tau):
    return (np.log(S/K) + ((r - (Vol**2)/2) * tau)) / (Vol* np.sqrt(tau))
```

Este es el código necesario en lenguaje Python para calcular tanto la fórmula de Black-Scholes como la fórmula de Heston para la valoración de una opción Call Europea.

6. Black-Scholes vs Heston: ejemplo de valoración de una opción Call Europea

El objetivo de esta sección es, con ayuda de un ejemplo, comparar los resultados de valoración de una opción Call Europea aplicando el modelo de Heston y el modelo de Black-Scholes. Compararemos los resultados de los dos modelos entre sí y también con el resultado real.

Utilizaremos con este fin el código expuesto en la sección anterior para computar el ejemplo.

Dicho ejemplo calculará, utilizando las fórmulas de valoración de opciones de Black-Scholes y de Heston respectivamente, el precio de una opción Call Europea sobre el precio de las acciones de Google INC (GOOG) con fecha de emisión 6 de abril de 2013 y fecha de madurez 17 de mayo de 2013. Nos basaremos en datos históricos del precio de las acciones para llevar a cabo la valoración, que adjuntamos en la tabla siguiente.

European call option for Google Inc. (GOOG)						
Price recorded on Apr 6, 2013						
Expire at May 17,2013						
Days to maturity		*41*				
interest rate (r)	Time to Maturity (τ)	Spot Price(S)	Strike Price(K)	Bid Price	Ask Price	**Market Price**
0.000151644	0.112328767	783.05	510	271.00	274.80	**272.90**
0.000151644	0.112328767	783.05	590	191.50	195.00	**193.25**
0.000151644	0.112328767	783.05	600	181.90	185.00	**183.45**
0.000151644	0.112328767	783.05	615	167.10	170.60	**168.85**
0.000151644	0.112328767	783.05	625	157.20	160.80	**159.00**
0.000151644	0.112328767	783.05	630	152.70	155.50	**154.10**
0.000151644	0.112328767	783.05	645	137.50	140.90	**139.20**

El cálculo del precio de dicha opción requiere, en ambos modelos, un trabajo previo de elección de parámetros óptimos para la fórmula de valoración de opciones. Unos parámetros óptimos serían los que, aplicando la fórmula de valoración de opciones a datos históricos de precios de opciones, minimizan el error cuadrático del resultado. El cálculo de los parámetros óptimos mencionados anteriormente está fuera del alcance de este proyecto y, por tanto, utilizaremos unos parámetros ya obtenidos en Yang (2013).

Siguiendo la notación utilizada en las secciones previas, adjuntamos aquí la tabla que expone los valores de los parámetros una vez calibrado el modelo.

Coeficiente de correlación	ρ	-0.50903932
Variancia	y	0.069545829
Medida de reversión de la media	α	2.040210844
Nivel medio a largo plazo	m	0.053565543
Volatilidad	σ	0.467514601

Cuadro 1: Parámetros óptimos para la fórmula de valoración de opciones de Black-Scholes y Heston

Definimos una serie de vectores donde guardaremos el precio de ejercicio, el precio de la opción Call Europea en el mercado, el precio calculado por Black-Scholes y Heston y sus respectivos errores relativos respecto al precio del Call en el mercado.

```
K_41 = np.array([510., 590., 600., 615., 625., 630., 645.])
call_41 = ([272.90, 193.25, 183.45, 168.85, 159.00, 154.10, 139.20])
Heston_41 = np.zeros(7)
BS_41 = np.zeros(7)
Heston_error_41 = np.zeros(7)
BS_error_41 = np.zeros(7)
```

Asignamos ahora los valores a los parámetros.

```
v = 0.069545829
rho = -0.50903932
Vol = 0.467514601
alpha = 2.040210844
m = 0.04
T = 0.112328767
t = 0
r = 0.000151644
S = 783.05
lambd = 0
```

Mediante un for calculamos los diferentes precios de la opción y los errores respecto al precio del Call en el mercado. Calculamos la diferencia entre el error que comete la fórmula de valoración de opciones de Black-Scholes y el que comete Heston, esperando que esta diferencia sea negativa, ya que esto significaría que el modelo de Heston da un error más pequeño que el de Black-Scholes respecto al precio del Call en el mercado.

```
for i in range(7):
    Heston_41[i] = heston_call_price(S, K_41[i], r, m, v, alpha,
                                     lambd, rho, Vol, T, t)
    BS_41[i] = BS_call_price(S, K_41[i], r, Vol, tau)
    Heston_error_41[i] = abs(Heston_41[i]-call_41[i])/call_41[i]
    BS_error_41[i] = abs(BS_41[i]-call_41[i])/call_41[i]

print(Heston_41)
print(BS_41)
print(call_41)
print(Heston_error_41)
print(BS_error_41)
print(Heston_error_41 - BS_error_41)
```

En la siguiente tabla mostraremos los resultados obtenidos en este ejemplo: K es el precio de vencimiento de la opción, *Call mercado* es el precio del Call en el mercado, *BS* y *Heston* son los precios obtenidos mediante la fórmula de valoración de opciónes de Black-Scholes y Heston respectivamente, *ER BS* y *ER Heston* son los errores relativos respecto al precio del Call en el mercado y textitResta errores = ER BS-ER Heston.

K	Call mercado	BS	Heston	ER BS	ER Heston	Resta errores
510	272.9	273.151508	272.681560	0.000922	0.000800	-0.000121
590	193.25	194.551484	192.963485	0.006735	0.001483	-0.005252
600	183.45	185.022527	183.025877	0.008572	0.002312	-0.006260
615	168.85	170.948781	168.156317	0.012430	0.004108	-0.008322
625	159	161.739763	158.279789	0.017231	0.004530	-0.012702
630	154.1	157.194567	153.356465	0.020082	0.004825	-0.015257
645	139.2	143.826139	138.667298	0.033234	0.003827	-0.029407

Cuadro 2: Resultados de la computación del ejemplo de valoración de una opción Call Europea mediante el modelo de Black-Scholes y el modelo de Heston

Observamos que en todos los cálculos, realizados bajo los mismos parámetros y datos históricos pero con diferente precio de vencimiento, el error que comete Heston respecto al precio del Call en el mercado es menor al que comete Black-Scholes.

Podemos confirmar de esta forma que la incorporación de la volatilidad estocástica que lleva a cabo el modelo de Heston respecto al modelo de Black-Scholes permite una mejor representación del mercado y por tanto mayor fiabilidad a la hora de valorar opciones.

7. Conclusiones

En esta última sección procederé a exponer tanto mis conclusiones respecto al modelo de Heston, en las que culmina todo el trabajo y estudio realizado a lo largo del proyecto, como mi aprendizaje tanto académico como personal, que he adquirido a lo largo de la realización de cada uno de los capítulos anteriores.

A lo largo de este proyecto, tal y como nos propusimos al principio, hemos desarrollado la teoría detrás del modelo de Black-Scholes y hemos incorporado la volatilidad como un proceso estocástico para finalmente llegar al modelo de Heston.

Para llevar a cabo nuestros objetivos realizamos primero una introducción al cálculo estocástico necesario para comprender el desarrollo de los modelos financieros mencionados, así como una breve incursión en los conceptos financieros relevantes para la correcta comprensión de la temática que nos ocupa. Para finalizar y como guinda del proyecto, hemos programado un código en Python para poder computar un ejemplo de valoración de una opción Call Europea que nos ha permitido comparar los resultados tanto del modelo de Black-Scholes como del modelo de Heston con el precio del Call en el mercado.

Concluimos entonces que incorporar la volatilidad estocástica en el modelo de Heston reduce las suposiciones y limitaciones del modelo de Black-Scholes y nos permite capturar la información del mercado de una forma más completa y fiable, teniendo en cuenta también la correlación entre el precio del activo subyacente y la volatilidad del mismo. Gracias a los resultados de nuestro ejemplo podemos ver empíricamente que el modelo de Heston presenta un menor error que el modelo de Black-Scholes respecto al precio del Call en el mercado, reforzando así nuestras conclusiones.

A término personal, realizar este proyecto me ha permitido enriquecer mis conocimientos sobre cálculo estocástico y comprender mejor toda la matemática tras la teoría financiera. Pese al reto que ha supuesto abarcar el estudio de valoración de opciones hasta el modelo de Heston en términos de asimilación de conocimientos, he disfrutado realizando el trabajo y estoy satisfecha con el resultado del mismo. Espero haber alcanzado el objetivo de transmitir los conocimientos que he adquirido de forma simple, interesante y comprensible.

Referencias

[1] Marek Capinski and Ekkehard Kopp (2012). The Black–Scholes Model. Cambridge University Press.

[2] Marek Capinski, Ekkehard Kopp y Janusz Traple (2012). Stochastic calculus for finance. Cambridge University Press.

[3] Damien Lamberton y Bernard Lapeyre (2007). Introduction to stochastic calculus applied to finance. CRC press.

[4] Fischer Black y Myron Scholes (1973). The pricing of options and corporate liabilities. In: Journal of political economy 81.3, pp. 637–654.

[5] Jim Gatheral (2011). The volatility surface: a practitioner's guide. Vol. 357. John Wiley and Sons.

[6] Jean-Pierre Fouque, George Papanicolau y K. Ronnie Sircar (2000). Derivatives in financial markets with stochastic volatility. Cambridge University Press.

[7] Steven L. Heston (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. In: Review of financial studies 6.2, pp. 327-343.

[8] Yuan Yang (2013). Valuing a European option with the Heston model. Thesis. Rochester Institute of Technology.