



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Introducció al problema dels n cossos

Autora: Laura Silvestre Rioné

Director: Dr. Àngel Jorba

Realitzat a: Departament de Matemàtiques
i Informàtica

Barcelona, 13 de juny de 2023

Abstract

The n -body problem aims to determine the motions of n massive bodies interacting with each other gravitationally. In this work we present an introduction to the general problem, we solve the $n = 2$ case completely, and the $n = 3$ case is developed in detail, providing some particular solutions. Finally, we compute numerically the curve of zero velocity and the trajectory of the comet for the system Sun - Jupiter - comet 39P/Oterma.

Resum

El problema dels n cossos té com a objectiu determinar els moviments d' n cossos massius que interactuen a causa de la força de la gravetat. En aquest treball es fa una introducció sobre el cas general, es resol completament pel cas $n = 2$ i es desenvolupa amb més detall el cas $n = 3$ donant algunes solucions particulars. Finalment, pel sistema Sol - Júpiter - cometa 39P/Oterma es troben i representen, mitjançant simulació numèrica, la corba de velocitat nul·la i la trajectòria del cometa.

Agraïments

Vull agrair a ...

Al meu tutor Àngel. Per tota la paciència, sensibilitat, consells, acompanyament i temps dedicat a mi.

A la meva família, per haver-me donat sempre ànims per seguir.

A les meves precioses amigues de la universitat. Per haver estat una font d'alegria i suport continu en tot moment.

A tu Joan Pau, que m'has acompanyat tants anys durant aquesta gran tempesta i que ara em veuràs per fi sortir. Gràcies per la teva infinita paciència i dedicació, gràcies per sempre haver al meu costat.

I finalment, a tu Joan. Per ser el millor mestre que mai he tingut i que tothom hauria de tenir. De qui més he après matemàtiques. El que va creure en mi i en les meves capacitats quan més ho necessitava. Gràcies per haver estat fins al final, desitjo que pugui continuar sent així.

Índex

1	Introducció	1
2	Preliminars: conceptes físics	2
3	El problema dels n cossos	4
3.1	Col·lapse total: un teorema de Sundman	7
4	El problema dels dos cossos, o problema de Kepler	12
4.1	Cas $\mathbf{L}_0 = \mathbf{0}$	15
4.2	Cas $\mathbf{L}_0 \neq \mathbf{0}$	15
4.2.1	Cas $\mathbf{e}_0 = \mathbf{0}$	16
4.2.2	Cas $\mathbf{e}_0 \neq \mathbf{0}$	18
4.3	Les lleis de Kepler	26
5	El problema dels tres cossos	29
5.1	Col·lapse total en el cas $n = 3$	31
5.2	El problema dels tres cossos restringit (circular i pla)	32
5.2.1	Punts d'equilibri: els punts de Lagrange	37
5.2.2	Corbes de velocitat nul·la: regions possibles de moviment	41
5.3	Solucions particulars: solucions de Lagrange i Euler	44
5.3.1	Solució de Lagrange: triangle equilàter	49
5.3.2	Solució d'Euler: punts colineals	50
6	Simulació numèrica	51
6.1	Implementació: corba de velocitat nul·la del cometa 39P/Oterma	51
6.2	Implementació: corba de la trajectòria del cometa 39P/Oterma	52
7	Comentaris finals i conclusions	53
A	Apèndix	54
A.1	Algorismes per al problema de Kepler	54
A.2	Codi en C per trobar la corba de velocitat nul·la del 39P/Oterma	56
A.3	Codi en C per trobar la trajectòria del 39P/Oterma	60

1 Introducció

El problema dels n cossos és un problema ben conegut i estudiat en el camp de la física i de les matemàtiques. L'objectiu és determinar exactament les posicions de n cossos amb massa els quals interactuen dos a dos a partir de la força de la gravetat, modelada per la llei de gravitació universal de Newton. Aquest problema va ser resolt per primera vegada, per a $n = 2$, pel mateix Newton, i de la solució que va trobar en va poder deduir les tres lleis de Kepler.

En aquest treball donarem una visió global del problema dels n cossos, i centrarem l'estudi d'aquest en els casos $n = 2$ i $n = 3$. Abordarem el problema per a $n = 2$ de forma analítica, i en trobarem completament la solució. Això ens permetrà deduir les ben conegudes tres lleis de Kepler. El cas amb $n = 3$ l'estudiarem analíticament fins a un cert punt, ja que després es requereixen tècniques numèriques per a acabar de resoldre'l. Una part del treball consisteix en la implementació numèrica de dos programes que ens han permès calcular la trajectòria del cometa 39P/Oterma.

L'estructura del treball és la següent. En el capítol 2 es fa una breu presentació de diversos conceptes físics que poden ajudar a contextualitzar el problema físic en el qual es basa el treball. En el capítol 3 es presenta el problema dels n cossos en la seva total generalitat, i les equacions diferencials que l'identifiquen. Es construeixen també les eines clàssiques que permeten simplificar el problema, com són els moments lineal i angular, les energies cinètica i potencial, i els seus corresponents teoremes de conservació. Finalment, s'enuncia i demostra el teorema del col·lapse total de Sundman, que dóna una condició necessària per a que el sistema dels n cossos sofreixi un col·lapse total.

El capítol 4 se centra en el cas particular del problema dels dos cossos, o problema de Kepler. Es resol completament el problema de forma analítica, i s'aplica la seva resolució per a demostrar, dins del model, les famoses tres lleis de Kepler, en la seva formulació moderna.

En el capítol 5, el més extens del treball, s'estudia el problema dels tres cossos. És ben sabut que aquest problema no té solució general analítica, és a dir, no admet una fórmula explícita que descriu el moviment dels cossos. Tanmateix, sí que existeixen solucions per casos molt concrets que aquí es desenvolupen. En una part del capítol es troben solucions exactes per a casos molt concrets: les solucions de Lagrange i d'Euler. La resta del capítol es dedica a estudiar el problema dels tres cossos *restringit*, on se suposa que un dels tres cossos (posem el tercer) té massa negligible respecte als altres dos. N'hem estudiat els seus punts d'equilibri, coneguts com a punts de Lagrange, i possibles regions de moviment del tercer cos, fixades unes condicions inicials.

Per tal de posar en pràctica tot el coneixement adquirit, en el capítol 6 hem desenvolupat numèricament programes que ens permeten trobar les corbes de velocitat nul·la i la trajectòria del tercer cos en el sistema concret Sol-Júpiter-cometa 39P/Oterma.

Finalment, en el capítol 7 es troben les conclusions generals i finals del present treball.

2 Preliminars: conceptes físics

En aquest primer capítol presentem de manera introductòria conceptes que poden facilitar la comprensió d'aquest treball. No són imprescindibles per a la comprensió des d'un punt de vista matemàtic, però sí que poden donar una visió física més contextualitzada i/o completa.

Definició 2.1 (Moviment). El *moviment* és un canvi de la posició d'un cos al llarg del temps respecte d'un sistema de referència.²

Matemàticament, el moviment d'un cos queda definit pel canvi del seu vector posició \mathbf{r} . Més específicament, si la posició del cos ve donada per una corba $\mathbf{r}(t)$, llavors el moviment és la derivada d'aquesta corba, o la *velocitat* $\dot{\mathbf{r}}(t)$.

Definició 2.2 (Força). La *força* és la capacitat, vigor o robustesa per a moure alguna cosa que té pes o fa resistència. En física, la força és un fenomen físic capaç de modificar la velocitat de moviment i/o l'estructura (deformació) d'un cos.³

Matemàticament, la força es modelitza com a un vector \mathbf{F} de tres components, els quals la seva direcció i sentit indiquen cap a on s'està aplicant la força, i el mòdul quantifica numèricament la força que s'està aplicant.

Les *lleis de Newton* són tres principis enunciats per Isaac Newton a partir dels quals s'expliquen una gran part dels problemes plantejats en la mecànica clàssica, en particular aquells relatius al moviment dels cossos en l'univers. Aquestes lleis són les següents [5].

1a llei (o *lleis de la inèrcia*). Tot cos romandrà en el seu estat de repòs o moviment uniforme i rectilini a no ser que sigui obligat, per forces externes, a canviar el seu estat.

Matemàticament, aquesta llei ens diu el següent. Si denotem per $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$ totes les forces externes que actuen sobre el cos, llavors, si $\sum_j \mathbf{F}_j = \mathbf{0}$, necessàriament la velocitat (moviment) \mathbf{v} del cos és constant, és a dir, el vector posició del cos és de la forma

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$$

amb \mathbf{r}_0 un vector constant.

2a llei (o *lleis de la interacció i la força*). El canvi de moviment és proporcional a la força motriu externa, i ocorre segons la línia recta al llarg de la qual aquella força s'imprimeix (actua).

Matemàticament, aquesta llei ens diu el següent. Si denotem per $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$ totes les forces externes que actuen sobre el cos, i per \mathbf{v} la velocitat (moviment) d'aquest, llavors la derivada $\dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$ (el canvi de moviment) és proporcional a $\sum_j \mathbf{F}_j$. Aquesta constant de proporcionalitat és la inversa del que es coneix com a *massa inercial* m_i , i doncs, tenim l'equació

$$m_i \ddot{\mathbf{r}} = \sum_j \mathbf{F}_j,$$

que és la famosa equació de Newton.

²Font: [https://es.wikipedia.org/wiki/Movimiento_\(física\)](https://es.wikipedia.org/wiki/Movimiento_(física)).

³Font: <https://www.significados.com/fuerza/>.

3a llei (o llei d'acció-reacció). Amb tota acció ocorre sempre una reacció igual i contrària; les accions mútues de dos cossos sempre són d'igual magnitud i dirigides en sentit contrari.

Matemàticament, aquesta llei ens diu el següent. Suposem que tenim dos cossos 1 i 2. Si el cos 1 li aplica una força al cos 2, donada pel vector $\mathbf{F}_{1\rightarrow 2}$, llavors el cos 2 també li aplica una força al cos 1, donada per $\mathbf{F}_{2\rightarrow 1} = -\mathbf{F}_{1\rightarrow 2}$.

De totes les forces que existeixen a la natura, una de les més importants és l'anomenada força gravitatòria.

Definició 2.3 (Força gravitatòria). Definim la *força gravitatòria* com la força d'atracció mútua que experimenten dos objectes amb massa. Es tracta d'una de les quatre forces fonamentals observades fins ara en la natura.

De fet, la llei de la gravitació universal de Newton ens postula l'existència de la força gravitatòria, i ens la descriu concretament.

Llei de la gravitació universal. La força gravitatòria amb la que s'atrauen dos cossos és proporcional a les seves masses i inversament proporcional al quadrat de la distància que les separa.

Matemàticament, aquesta llei ens diu el següent. Donats dos cossos de masses *gravitacionals* m_g i M_g , la força gravitatòria que experimenta el primer cos degut a la presència del segon ve donada per l'expressió

$$\mathbf{F}_{2\rightarrow 1} = -G \frac{m_g M_g}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^2} \mathbf{u}_{2\rightarrow 1},$$

essent \mathbf{r}_1 i \mathbf{r}_2 els vectors posició dels cossos 1 i 2 respectivament, $\mathbf{u}_{2\rightarrow 1} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|}$ el vector unitari que apunta del cos 2 al cos 1, i G la constant de proporcionalitat enunciatada a la llei, coneguda com la *constant de gravitació universal*, i amb valor

$$G = 6.6742 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2.$$

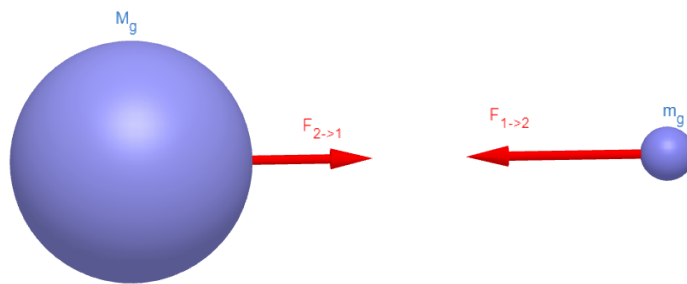


Figura 1: Força gravitaròria entre dos cossos.

Cal remarcar la distinció que hem fet entre *massa inercial*, la donada per l'equació de Newton, i *massa gravitacional*, la donada per la llei de gravitació universal. A priori, aquestes dues masses no tenen per què ser iguals, però fins el dia d'avui, i fins on la precisió dels experiments ha permès, sempre s'ha observat experimentalment que coincideixen.

Principi d'equivalència dèbil. Tenim igualtat en les masses inercial i gravitatòria de qualsevol cos.

3 El problema dels n cossos

En aquest capítol introduïrem el problema dels n cossos, que interaccionen sota la força gravitatòria de Newton.

Començarem exposant el problema físic. Suposem que tenim n cossos de masses $m_1, \dots, m_n \in (0, +\infty)$, els quals estan sotmesos únicament a la força gravitatòria de Newton. Les trajectòries d'aquests cossos estan descrites per n corbes a l'espai $\mathbf{r}_i : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $1 \leq i \leq n$, que suposarem que estan definides en el mateix interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Suposarem, sense pèrdua de generalitat, que $0 \in I$. Si fixem $i \in \{1, \dots, n\}$, la força que actua sobre el cos i ve donada, tal com s'explica als preliminars, pel camp vectorial

$$\mathbf{F}_i : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{F}_i(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbf{F}_{j \rightarrow i}(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Gm_j m_i \frac{\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)}{\|\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)\|^3}.$$

Llavors, el sistema d'equacions diferencials que governa l'evolució temporal del cos i és el que ve determinat per l'equació de Newton, que en aquest cas és, pel cos i ,

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i(t) = \mathbf{F}_i(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Gm_j m_i \frac{\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)}{\|\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)\|^3}.$$

Simplificant, les equacions diferencials que governen tot el sistema dels n cossos, i introduint les noves variables $\mathbf{v}_i(t) := \dot{\mathbf{r}}_i(t)$, es pot reescriure com

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_i(t) = \mathbf{v}_i(t), \\ \dot{\mathbf{v}}_i(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Gm_j \frac{\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)}{\|\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)\|^3}, \end{cases} \quad \text{per a } 1 \leq i \leq n. \quad (3.1)$$

L'objectiu del problema dels n cossos és resoldre aquest sistema d'equacions diferencials. És ben sabut que, per a $n = 2$, el problema té solució analítica, i que, per a $n \geq 3$, el problema no admet solució analítica [1]. El Capítol 4 d'aquest treball tracta de solucionar explícitament el problema per al cas $n = 2$, conegut com el *problema de Kepler*. En la resta del treball ens dedicarem a estudiar el problema per a $n = 3$ tant analíticament com numèricament.

Observem que tenim $n \times 3 = 3n$ equacions diferencials a resoldre, cada una d'elles de segon ordre. Així, necessitem en total $3n \times 2 = 6n$ condicions inicials per a resoldre completament el sistema. Aquestes condicions inicials poden ser, per exemple, les posicions i velocitats inicials de cada cos, que denotarem

$$\mathbf{r}_i(0) =: \mathbf{r}_{i,0}, \quad \mathbf{v}_i(0) =: \mathbf{v}_{i,0} \quad \text{per a } 1 \leq i \leq n. \quad (3.2)$$

En la resta d'aquest capítol obtindrem resultats generals que ens permetran fer aquest estudi per als casos $n = 2$ i $n = 3$ posteriors. Més concretament, ens dedicarem a trobar *integrals primeres* per al sistema (3.1). Per a fer-ho, ens ajudarem de conceptes físics tan importants com són l'energia o el moment.

Definició 3.1 (Moment lineal). Definim el *moment lineal* del cos i , $i \in \{1, \dots, n\}$, com el camp vectorial

$$\mathbf{p}_i : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{p}_i(t) = m_i \dot{\mathbf{r}}_i(t).$$

El *moment lineal total* del sistema ve definit per la suma puntual dels moments lineals dels cossos:

$$\mathbf{P} : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{P}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i(t).$$

El següent resultat mostra que el moment lineal total és una integral primera del sistema d'equacions diferencials (3.1).

Teorema 3.2 (Conservació del moment lineal). *Suposem que les corbes $\mathbf{r}_i : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $i \in \{1, \dots, n\}$, són solució del sistema d'equacions diferencials (3.1). Llavors el moment lineal total $\mathbf{P}(t)$ és constant.*

Dit d'una altra manera, si ens pensem el moment lineal total com a una funció

$$\mathbf{P} : \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{P}(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i,$$

llavors \mathbf{P} és una integral primera per al sistema d'equacions diferencials (3.1).

Demostració. Derivem el moment lineal:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}(t) &= \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n G m_j m_i \frac{\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)}{\|\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)\|^3} \\ &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \left(G m_j m_i \frac{\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)}{\|\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)\|^3} + G m_i m_j \frac{\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)}{\|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)\|^3} \right) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Aquest resultat ens dóna 3 integrals primeres (les components del vector) per a un sistema que necessita de $6n$ condicions inicials per a resoldre's. De fet, ens dóna més informació de la que diem, ja que tal com està definit, el moment lineal és a la vegada la derivada d'una corba.

Definició 3.3 (Centre de masses). Definim el *centre de masses* del sistema com la corba

$$\mathbf{R} : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{R}(t) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i(t),$$

on $M = \sum_{i=1}^n m_i$ és la *massa total* del sistema.

Així, la conservació del moment lineal ens diu que el centre de masses es mou uniformement en línia recta, ja que es compleix que, si les trajectòries $\mathbf{r}_i : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ són solució del sistema (3.1) amb condicions inicials (3.2), llavors $\ddot{\mathbf{R}}(t) = \dot{\mathbf{P}}(t) = 0$, i la solució d'aquesta equació ve donada explícitament per

$$\mathbf{R} : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_0 t,$$

essent $\mathbf{R}_0 := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_{i,0}$, $\mathbf{V}_0 := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_{i,0}$ constants totalment determinades per les condicions inicials. Observem que aquestes determinen $6 = 2 \times 3$ paràmetres coneguts. Per tant, la conservació del moment lineal ens redueix el nombre de graus de llibertat del sistema de $6n$ a $6n - 6$.

Continuem amb la cerca de més integrals primeres.

Definició 3.4 (Moment angular). Definim el *moment angular* del cos i , $i \in \{1, \dots, n\}$, com el camp vectorial

$$\mathbf{L}_i : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{L}_i(t) = \mathbf{r}_i(t) \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i(t).$$

El *moment angular total* del sistema ve definit per la suma puntual dels moments angulars dels cossos:

$$\mathbf{L}_T : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{L}_T(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_i(t).$$

Resulta que el moment angular total és una altra integral primera per al sistema d'equacions diferencials (3.1).

Teorema 3.5 (Conservació del moment angular). *Suposem que les corbes $\mathbf{r}_i : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $i \in \{1, \dots, n\}$, són solució del sistema d'equacions diferencials (3.1). Llavors el moment angular total $\mathbf{L}_T(t)$ és constant.*

Dit d'una altra manera, si ens pensem el moment angular total com a una funció

$$\mathbf{L}_T : \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{L}_T(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i,$$

llavors \mathbf{L}_T és una integral primera per al sistema d'equacions diferencials (3.1).

Demostració. Derivem el moment angular:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}}_T(t) &= \sum_{i=1}^n (\dot{\mathbf{r}}_i(t) \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i(t) + \mathbf{r}_i(t) \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i(t)) = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n G m_j m_i \mathbf{r}_i(t) \times \frac{\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)}{\|\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)\|^3} \\ &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \left(G m_j m_i \mathbf{r}_i(t) \times \frac{\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)}{\|\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)\|^3} + G m_i m_j \mathbf{r}_j(t) \times \frac{\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)}{\|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)\|^3} \right) \\ &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \left(G m_j m_i \frac{\mathbf{r}_i(t) \times \mathbf{r}_j(t)}{\|\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)\|^3} + G m_i m_j \frac{\mathbf{r}_j(t) \times \mathbf{r}_i(t)}{\|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)\|^3} \right) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Aquest resultat ens dóna 3 noves integrals primeres que redueixen el nombre de graus de llibertat a $6n - 6 - 3 = 6n - 9$.

Introduïm ara l'últim concepte per poder obtenir la darrera integral primera coneguda.

Definició 3.6 (Energies cinètica i potencial). Definim l'*energia cinètica* del cos i , $i \in \{1, \dots, n\}$, com el camp escalar

$$K_i : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad K_i(t) = \frac{1}{2} m_i \|\dot{\mathbf{r}}_i(t)\|^2 = \frac{\|\mathbf{p}_i(t)\|^2}{2m_i}.$$

Definim també l'*energia cinètica total* com la suma puntual dels camps vectorials anteriors:

$$K : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad K(t) = \sum_{i=1}^n K_i(t).$$

Per altra banda, l'energia potencial del sistema es defineix com el camp escalar

$$U : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad U(t) = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n G \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)\|}.$$

Finalment, l'energia total del sistema és la suma dels camps escalars energia cinètica total i energia potencial:

$$E_T : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad E_T(t) = K(t) + U(t).$$

Obtenim així l'última de les integrals primeres que més es coneixen a la física.

Teorema 3.7 (Conservació de l'energia). *Suposem que les corbes $\mathbf{r}_i : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $i \in \{1, \dots, n\}$, són solució del sistema d'equacions diferencials (3.1). Llavors l'energia total $E_T(t)$ és constant.*

Dit d'una altra manera, si ens pensem l'energia total com a una funció

$$E_T : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}, \quad E_T(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \|\mathbf{v}_i\|^2 - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n G \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|},$$

definida ara en un obert de $\mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n}$ (on els $\mathbf{r}_i \neq \mathbf{r}_j$ per a $i \neq j$), llavors E_T és una integral primera per al sistema d'equacions diferencials (3.1).

Demostració. Calculant la derivada de l'energia total, obtenim

$$\begin{aligned} \dot{E}_T(t) &= \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i(t) \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n G m_i m_j \frac{(\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)) \cdot (\dot{\mathbf{r}}_i(t) - \dot{\mathbf{r}}_j(t))}{\|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)\|^3} \\ &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n G m_i m_j \frac{\dot{\mathbf{r}}_i(t) \cdot (\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t))}{\|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)\|^3} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n G m_i m_j \frac{(\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)) \cdot (\dot{\mathbf{r}}_i(t) - \dot{\mathbf{r}}_j(t))}{\|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)\|^3} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n G m_i m_j \frac{(\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)) \cdot (\dot{\mathbf{r}}_j(t) + \dot{\mathbf{r}}_i(t))}{\|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)\|^3} = 0. \end{aligned}$$

En l'última igualtat hem fet servir que el terme $(\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)) \cdot (\dot{\mathbf{r}}_j(t) + \dot{\mathbf{r}}_i(t))$ és antisimètric sota el canvi d'índexs $i \leftrightarrow j$. \square

Això ens redueix el nombre de graus de llibertat del sistema a $6n - 9 - 1 = 6n - 10$. Això és el millor que es pot assolir en el cas general d' n cossos. Com hem comentat, en els següents capítols ens centrarem en els casos $n = 2$ i $n = 3$, i veurem que podrem resoldre el problema completament per al cas $n = 2$, ja que en aquest cas podem construir prou integrals primeres per al sistema.

3.1 Col·lapse total: un teorema de Sundman

Per acabar aquest capítol, enunciarem i demostrarem un teorema de Sundman, que estudia la possibilitat de que els n cossos sofreixin un col·lapse total. Cal remarcar que la

demostració donada a [6, Capítol 2] està escrita sota la hipòtesi de que el centre de masses del sistema es troba a l'origen durant tot el moviment. En aquest treball hem optat per a donar i demostrar una versió del teorema on no se suposa aquesta hipòtesi. Recordem que la corba centre de masses ve donada explícitament per

$$\mathbf{R} : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_0 t.$$

Definició 3.8 (Col·lapse total). Diem que les corbes $\mathbf{r}_i : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $i \in \{1, \dots, n\}$, sofreixen un *col·lapse total* en un temps t^* (finit o infinit) si per a tot $i, j \in \{1, \dots, n\}$, es té

$$\lim_{t \rightarrow t^*} \|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)\| = 0.$$

El teorema de Sundman ens dóna una condició necessària per a que es produeixi un col·lapse total.

Teorema 3.9 (Teorema de Sundman del col·lapse total). *Suposem que les corbes $\mathbf{r}_i : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $i \in \{1, \dots, n\}$, són solució del sistema d'equacions diferencials (3.1).*

Si les corbes \mathbf{r}_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, sofreixen un col·lapse total en un temps t^ , llavors*

(1) *Necessàriament t^* ha de ser finit.*

(2) *Necessàriament $\mathbf{L}_T \equiv \mathbf{R}_0 \times M \mathbf{V}_0$. En particular, el moment angular total calculat respecte el centre de masses del sistema és nul.*

La demostració del teorema que presentarem està basada en la *identitat de Lagrange-Jacobi* i en la *desigualtat de Sundman*. Les dues estan expressades en termes del moment d'inèrcia total del sistema respecte al centre de masses, que definirem a continuació.

Definició 3.10 (Moment d'inèrcia respecte al centre de masses). Definim el *moment d'inèrcia* del cos i , $i \in \{1, \dots, n\}$, respecte al centre de masses com el camp escalar

$$I_i : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad I_i(t) = \frac{1}{2} m_i \|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{R}(t)\|^2.$$

El *moment d'inèrcia total del sistema respecte al centre de masses* ve definit per la suma puntual dels moments d'inèrcia dels cossos respecte al centre de masses:

$$I_T : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad I_T(t) = \sum_{i=1}^n I_i(t).$$

Proposició 3.11. *Suposem que les corbes $\mathbf{r}_i : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $i \in \{1, \dots, n\}$, són solució del sistema d'equacions diferencials (3.1). Llavors*

a) *(Identitat de Lagrange-Jacobi) Es compleix la igualtat*

$$\ddot{I}_T(t) = E_T(t) + K(t) - M \|\mathbf{V}_0\|^2 = 2E_T(t) - U(t) - M \|\mathbf{V}_0\|^2.$$

b) *(Desigualtat de Sundman) Es compleix la desigualtat*

$$\|\mathbf{L}_T(t) - \mathbf{R}_0 \times M \mathbf{V}_0\|^2 \leq 4I_T(t) \left(\ddot{I}_T(t) - E_T(t) + \frac{1}{2} M \|\mathbf{V}_0\|^2 \right).$$

c) *Podem escriure*

$$I_T(t) = \frac{1}{4M} \sum_{i,j=1}^n m_i m_j \|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)\|^2.$$

Demostració.

a) Observem primer que es compleix

$$\sum_{i=1}^n m_i \|\dot{\mathbf{r}}_i(t) - \dot{\mathbf{R}}(t)\|^2 = 2K(t) - M\|\mathbf{V}_0\|^2.$$

Derivant $I_T(t)$ dos cops tenim

$$\begin{aligned} \ddot{I}_T(t) &= \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i(t) \cdot (\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{R}(t)) + \sum_{i=1}^n m_i \|\dot{\mathbf{r}}_i(t) - \dot{\mathbf{R}}(t)\|^2 \\ &= \underbrace{\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n G m_i m_j \frac{(\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)) \cdot (\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{R}(t))}{\|\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)\|^3}}_{(I)} + 2K(t) - M\|\mathbf{V}_0\|^2. \end{aligned}$$

Si definim $(II) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n G m_i m_j \frac{(\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)) \cdot (\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{R}(t))}{\|\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)\|^3}$ veiem que, si intercanviem els índexs $i \leftrightarrow j$,

$$(II) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n G m_j m_i \frac{(\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)) \cdot (\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{R}(t))}{\|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)\|^3} = -(I),$$

i a més

$$(I) - (II) = - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n G \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)\|} = 2U(t).$$

Per tant, $(II) = -(I) = -U(t)$, i finalment

$$\begin{aligned} \ddot{I}_T(t) &= (I) + 2K(t) - M\|\mathbf{V}_0\|^2 = 2K(t) + U(t) - M\|\mathbf{V}_0\|^2 \\ &= E_T(t) + K(t) - M\|\mathbf{V}_0\|^2 = 2E_T(t) - U(t) - M\|\mathbf{V}_0\|^2. \end{aligned}$$

b) Calculem primer

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{R}(t)) \times m_i (\dot{\mathbf{r}}_i(t) - \dot{\mathbf{R}}(t)) &= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i(t) \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i(t) - \mathbf{R}_0 \times M\mathbf{V}_0 \\ &= \mathbf{L}_T(t) - \mathbf{R}_0 \times M\mathbf{V}_0, \end{aligned}$$

per tant

$$\begin{aligned} \|\mathbf{L}_T(t) - \mathbf{R}_0 \times M\mathbf{V}_0\| &= \left\| \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{R}(t)) \times m_i (\dot{\mathbf{r}}_i(t) - \dot{\mathbf{R}}(t)) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n m_i \|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{R}(t)\| \|\dot{\mathbf{r}}_i(t) - \dot{\mathbf{R}}(t)\| \\ &= \sum_{i=1}^n (\sqrt{m_i} \|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{R}(t)\|) (\sqrt{m_i} \|\dot{\mathbf{r}}_i(t) - \dot{\mathbf{R}}(t)\|). \end{aligned}$$

Aplicant la desigualtat de Cauchy-Schwartz, trobem

$$\begin{aligned}\|\mathbf{L}_T(t) - \mathbf{R}_0 \times M\mathbf{V}_0\| &\leq \left(\sum_{i=1}^n m_i \|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{R}(t)\|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n m_i \|\dot{\mathbf{r}}_i(t) - \dot{\mathbf{R}}(t)\|^2 \right)^{1/2} \\ &= (2I_T(t))^{1/2} (2K(t) - M\|\mathbf{V}_0\|^2)^{1/2}.\end{aligned}$$

Per tant, fent servir la igualtat de Lagrange-Jacobi de l'apartat a),

$$\|\mathbf{L}_T(t) - \mathbf{R}_0 \times M\mathbf{V}_0\|^2 \leq 4I_T(t) \left(\ddot{I}_T(t) - E_T(t) + \frac{1}{2}M\|\mathbf{V}_0\|^2 \right).$$

c) Calculem

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^n m_i m_j \|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)\|^2 &= \sum_{i,j=1}^n m_i m_j \|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{R}(t)\|^2 + \sum_{i,j=1}^n m_i m_j \|\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{R}(t)\|^2 \\ &\quad - 2 \sum_{i,j=1}^n m_i m_j (\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{R}(t)) \cdot (\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{R}(t)) \\ &= 2M \sum_{i=1}^n m_i \|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{R}(t)\|^2 = 4MI_T(t).\end{aligned}\quad \square$$

Finalment, podem demostrar el teorema de Sundman 3.9.

Demostració del Teorema de Sundman 3.9. Demostrem primer l'apartat (1). Suposem que $t^* = \infty$. Llavors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n G \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)\|} = -\infty.$$

Pel Teorema 3.7, $E_T(t)$ és una constant, és a dir, $E_T(t) = E_T(0)$. Fent servir la identitat de Lagrange-Jacobi, trobem que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{I}_T(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (2E_T(t) - U(t) - M\|\mathbf{V}_0\|^2) = 2E_T(0) - M\|\mathbf{V}_0\|^2 - \lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = \infty.$$

Així, fixat $\epsilon := 2$, existeix t_0 tal que, si $t \geq t_0$, tenim $\ddot{I}_T(t) \geq \epsilon = 2$. Integrant dos cops, obtenim

$$I_T(t) \geq t^2 + At + B$$

on A, B són constants. Així, veiem que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_T(t) = \infty.$$

Per altra banda, per la identitat c) de la Proposició 3.11, calculem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_T(t) = \frac{1}{4M} \sum_{i,j=1}^n m_i m_j \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)\|^2 = 0,$$

una contradicció. Per tant, t^* ha de ser finit.

Demostrem ara l'apartat (2). Pel Teorema 3.5, el moment angular total és constant, $\mathbf{L}_T(t) = \mathbf{L}_T(0)$. Volem demostrar que aquesta constant és $\mathbf{R}_0 \times M\mathbf{V}_0$.

Igual que en els càlculs anteriors, tenim

$$\lim_{t \rightarrow t^*} U(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow t^*} \ddot{I}_T(t) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow t^*} I_T(t) = 0$$

on ara t^* ha de ser finit, per l'apartat (1). Per tant, existeix t_0 tal que, si $t_0 \leq t < t^*$, tenim $\ddot{I}_T(t) > 0$. Veiem que això implica que necessàriament $\dot{I}_T(t) \leq 0$ per a $t_0 \leq t < t^*$.⁴

Suposem que no, és a dir, existeix $t_1 \in [t_0, t^*)$ tal que $\dot{I}_T(t_1) > 0$. Com que $\ddot{I}_T(t) > 0$, tenim que $\dot{I}_T(t)$ és una funció estrictament creixent, i per tant $\dot{I}_T(t) > 0$ per a tot $t_1 \leq t < t^*$. Així, aplicant el Teorema de Rolle en un interval $[t_1, t_2] \subseteq [t_1, t^*)$, tenim que existeix un punt $c \in [t_1, t_2]$ tal que

$$\frac{I_T(t_2) - I_T(t_1)}{t_2 - t_1} = \dot{I}_T(c) > 0$$

és a dir, $I_T(t_2) > I_T(t_1)$. Fent el límit $t_2 \rightarrow t^*$, trobem que

$$I_T(t_1) \leq \lim_{t_2 \rightarrow t^*} I_T(t_2) = 0.$$

Això contradueix que $I_T(t) > 0$ per a tot $t < t^*$.

Continuem. Fent servir la desigualtat de Sundman, tenim

$$\ddot{I}_T(t) \geq E_T(0) - \frac{1}{2}M\|\mathbf{V}_0\|^2 + \frac{\|\mathbf{L}_T(0) - \mathbf{R}_0 \times M\mathbf{V}_0\|^2}{4I_T(t)}.$$

Definim la constant $E_0 := E_T(0) - \frac{1}{2}M\|\mathbf{V}_0\|^2$ per comoditat de notació. Multiplicant per $-\dot{I}_T(t) \geq 0$ tenim

$$-\dot{I}_T(t)\ddot{I}_T(t) \geq -E_0\dot{I}_T(t) - \frac{\|\mathbf{L}_T(0) - \mathbf{R}_0 \times M\mathbf{V}_0\|^2}{4} \frac{\dot{I}_T(t)}{I_T(t)}.$$

Aquesta desigualtat la podem integrar entre t_0 i $t_1 < t^*$:

$$-\frac{\dot{I}_T(t_1)^2 - \dot{I}_T(t_0)^2}{2} \geq -E_0[I_T(t_1) - I_T(t_0)] - \frac{\|\mathbf{L}_T(0) - \mathbf{R}_0 \times M\mathbf{V}_0\|^2}{4} \ln\left(\frac{I_T(t_1)}{I_T(t_0)}\right).$$

Ara bé, com $\dot{I}_T(t) \leq 0$, veiem que $I_T(t)$ és una funció decreixent, per tant $I_T(t_1) \leq I_T(t_0)$. També, com $\ddot{I}_T(t) > 0$, $\dot{I}_T(t)$ és una funció creixent, i per tant $\dot{I}_T(t_1) \geq \dot{I}_T(t_0)$. Amb tot això, si aïllem $\|\mathbf{L}_T(0) - \mathbf{R}_0 \times M\mathbf{V}_0\|^2$ trobem

$$\begin{aligned} \|\mathbf{L}_T(0) - \mathbf{R}_0 \times M\mathbf{V}_0\|^2 &\leq \frac{-2[\dot{I}_T(t_1)^2 - \dot{I}_T(t_0)^2] + 4E_0[I_T(t_1) - I_T(t_0)]}{\ln\left(\frac{I_T(t_0)}{I_T(t_1)}\right)} \\ &\leq \frac{4E_0[I_T(t_1) - I_T(t_0)]}{\ln\left(\frac{I_T(t_0)}{I_T(t_1)}\right)}. \end{aligned}$$

Fent el límit $t_1 \rightarrow t^*$ trobem que $\|\mathbf{L}_T(0) - \mathbf{R}_0 \times M\mathbf{V}_0\|^2 \leq 0$, és a dir,

$$\mathbf{L}_T(0) = \mathbf{R}_0 \times M\mathbf{V}_0,$$

com volíem demostrar. □

⁴Resolució de l'exercici 3.2. de [6, Capítol 2].

4 El problema dels dos cossos, o problema de Kepler

En aquest capítol ens centrarem en estudiar el problema dels dos cossos, és a dir, el cas $n = 2$ del problema plantejat al Capítol 3. En aquest cas, el sistema d'equacions diferencials a resoldre és

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{r}}_1(t) = Gm_2 \frac{\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)}{\|\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)\|^3}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_2(t) = Gm_1 \frac{\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)}{\|\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)\|^3}, \end{cases} \quad (4.1)$$

amb les condicions inicials

$$\mathbf{r}_1(0) = \mathbf{r}_{1,0}, \quad \dot{\mathbf{r}}_1(0) = \mathbf{v}_{1,0}, \quad \mathbf{r}_2(0) = \mathbf{r}_{2,0}, \quad \dot{\mathbf{r}}_2(0) = \mathbf{v}_{2,0}.$$

Ja hem vist, en general, que els moments lineal i angular totals del sistema, com també l'energia total, són integrals primeres que ens permeten reduir el nombre de graus de llibertat. Hem vist també que la corba centre de masses \mathbf{R} ens redueix aquest nombre de graus de llibertat en 6, el moment angular total en 3, i l'energia total en 1. Com que aquí estem en el cas $n = 2$, obtenim $6 \times 2 - 6 - 3 - 1 = 2$ graus de llibertat que encara necessitem per a resoldre completament el problema. Veurem que aquests graus de llibertat extra ens els dóna el *vector excentricitat* o *vector de Laplace-Runge-Lenz*. Abans, però, anem a reduir el problema fent servir el centre de masses ja introduït.

Definició 4.1 (Coordenada relativa entre els cossos). Definim la corba *coordenada relativa* del sistema com

$$\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t).$$

És a dir, \mathbf{r} és la posició del cos 2 respecte a la posició del cos 1.

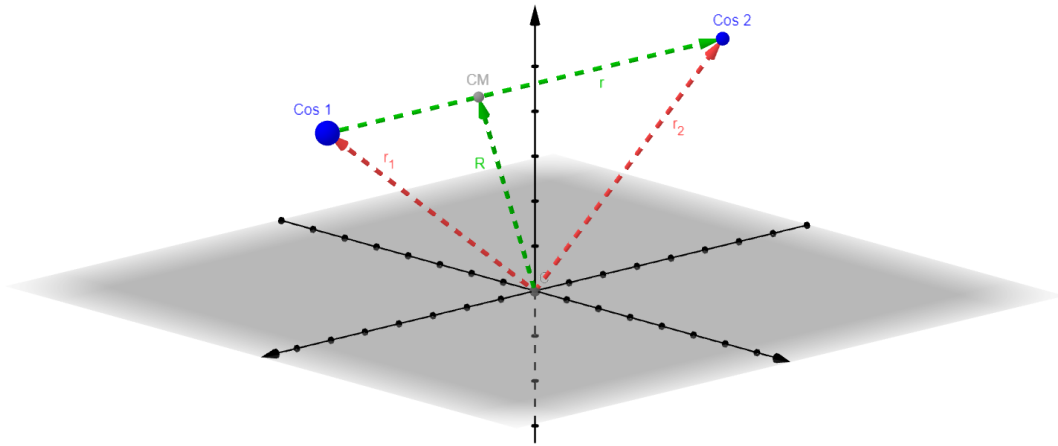


Figura 2: Disposició dels cossos 1 i 2 amb les coordenades introduïdes fins al moment.

En aquest cas concret de $n = 2$, és obvi que les noves corbes \mathbf{R} i \mathbf{r} donen un canvi de coordenades invertible, en el sentit que podem recuperar les corbes \mathbf{r}_1 i \mathbf{r}_2 de les corbes \mathbf{R} i \mathbf{r} fent servir les fórmules

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} - \frac{m_2}{M} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} + \frac{m_1}{M} \mathbf{r},$$

on, recordem, $M = m_1 + m_2$ és la massa total del sistema.

Més explícitament, tenim el següent resultat.

Teorema 4.2. *El sistema d'equacions diferencials (4.1) és equivalent al sistema d'equacions diferencials*

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{0}, \\ \ddot{\mathbf{r}}(t) = -GM \frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|^3} \end{cases} \quad (4.2)$$

amb les condicions inicials

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0 &= \frac{m_1}{M} \mathbf{r}_{1,0} + \frac{m_2}{M} \mathbf{r}_{2,0}, & \mathbf{V}_0 &= \frac{m_1}{M} \mathbf{v}_{1,0} + \frac{m_2}{M} \mathbf{v}_{2,0}, \\ \mathbf{r}_0 &:= \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_{2,0} - \mathbf{r}_{1,0}, & \mathbf{v}_0 &:= \dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_{2,0} - \mathbf{v}_{1,0}. \end{aligned}$$

Demostració. Suposem que $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ són solucions del sistema (4.1). Ja hem vist en el Capítol 3 que $\ddot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{0}$. Calculem la segona equació,

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}_2(t) - \ddot{\mathbf{r}}_1(t) = Gm_1 \frac{\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)}{\|\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)\|^3} - Gm_2 \frac{\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)}{\|\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)\|^3} = -GM \frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|^3}.$$

Per tant, se satisfà el sistema (4.2). Recíprocament, si \mathbf{R}, \mathbf{r} són solucions de (4.2), tenim

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_1(t) &= \ddot{\mathbf{R}}(t) - \frac{m_2}{M} \ddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{m_2}{M} GM \frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|^3} = Gm_2 \frac{\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)}{\|\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)\|^3}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_2(t) &= \ddot{\mathbf{R}}(t) + \frac{m_1}{M} \ddot{\mathbf{r}}(t) = -\frac{m_1}{M} GM \frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|^3} = Gm_1 \frac{\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)}{\|\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)\|^3}, \end{aligned}$$

que són les equacions del sistema (4.1).

Les condicions inicials són directes de les definicions de \mathbf{R} i \mathbf{r} . □

Així, d'ara endavant ens centrarem a estudiar el sistema (4.2) amb les condicions inicials corresponents.

Un fet important en el sistema (4.2) és que és un tipus de sistema que s'anomena *desacoblat*: les equacions diferencials que hi ha no depenen de les dues variables \mathbf{R} i \mathbf{r} alhora, sinó que la primera equació diferencial està únicament en termes de \mathbf{R} , i la segona equació diferencial està únicament en termes de \mathbf{r} . Això ens permet estudiar-les per separat. De fet, ja hem resolt la primera d'aquestes equacions en el Capítol 3, que té per solució

$$\mathbf{R} : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_0 t.$$

Així, ens queda estudiar la segona equació

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = -GM \frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|^3}.$$

Si definim

$$\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{M},$$

quantitat que s'anomena *massa reduïda*, podem escriure l'equació anterior com a una equació de Newton, és a dir, “*força = massa × acceleració*”:

$$\mu \ddot{\mathbf{r}}(t) = -Gm_1 m_2 \frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|^3}. \quad (4.3)$$

Continuant amb la mateixa metodologia que en el Capítol 3, trobarem integrals primeres d'aquesta equació (4.3), que ens la permetran resoldre. Físicament, la idea és la mateixa: considerar el moment angular i l'energia.

Definició 4.3. Definim el *moment angular* de la coordenada relativa com el camp vectorial

$$\mathbf{L}_r : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{L}_r(t) = \mathbf{r}(t) \times \mu \dot{\mathbf{r}}(t).$$

Definim també el *moment angular* de la coordenada baricèntrica com el camp vectorial

$$\mathbf{L}_R : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{L}_R(t) = \mathbf{R}(t) \times M \dot{\mathbf{R}}(t).$$

Pel que fa a les energies, definim l'*energia* de la coordenada relativa com el camp escalar

$$E_r : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad E_r(t) = \frac{1}{2} \mu \|\dot{\mathbf{r}}(t)\|^2 - G \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}(t)\|},$$

i també l'*energia* de la coordenada baricèntrica com el camp escalar

$$E_R : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad E_R(t) = \frac{1}{2} M \|\dot{\mathbf{R}}(t)\|^2.$$

Tenim resultats anàlegs als Teoremes 3.5 i 3.7.

Teorema 4.4 (Conservació del moment angular i l'energia, coordenades relativa i baricèntrica). *Suposem que les coordenades $\mathbf{R}, \mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ són solució del sistema d'equacions diferencials (4.2). Llavors els camps vectorials $\mathbf{L}_r, \mathbf{L}_R$ i els camps escalars E_r, E_R són tots constants. A més,*

$$\mathbf{L}_r + \mathbf{L}_R = \mathbf{L}_T, \quad E_r + E_R = E_T.$$

Demostració. Són càlculs anàlegs a les demostracions dels Teoremes 3.5 i 3.7, fent servir ara el sistema d'equacions diferencials (4.2). \square

Aquest resultat sorprèn, ja que havíem vist que el camp vectorial \mathbf{L}_T sí era constant, però no els camps vectorials \mathbf{L}_1 i \mathbf{L}_2 individualment. Ara bé, fent servir les coordenades \mathbf{R} i \mathbf{r} , resulta que els moments angulars individuals es conserven de manera independent.

Observem que els camps \mathbf{L}_R i E_R estan definits purament en termes de \mathbf{R} , i doncs constitueixen integrals primeres per a l'equació diferencial $\ddot{\mathbf{R}}(t) = 0$. Aquesta equació ja l'hem resolt, per tant ens centrarem en els altres dos camps \mathbf{L}_r i E_r , que constitueixen integrals primeres per a la segona equació (4.3), que és en la que estem interessats.

Tenim doncs $3 + 1 = 4$ integrals primeres per a una equació que necessita 6 graus de llibertat i per tant ens en falten 2. De moment, denotem $\mathbf{L}_0 := \mathbf{L}_r(0)$ i $E_0 := E_r(0)$. La primera observació important és el següent lema.

Lema 4.5. *Si $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ és solució de l'equació (4.3), llavors es compleix*

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{L}_0 = 0.$$

Demostració. Fem servir que, si $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^3$, tenim les igualtats

$$\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) = \mathbf{a}_2 \cdot (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1) = \mathbf{a}_3 \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2). \quad (4.4)$$

Calculem:

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{L}_0 = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{L}_r(t) = \mathbf{r}(t) \cdot (\mathbf{r}(t) \times \mu \dot{\mathbf{r}}(t)) = \mu \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot (\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t)) = 0. \quad \square$$

A partir d'aquí estudiem dos casos per separat, segons el valor del moment angular \mathbf{L}_0 .

4.1 Cas $\mathbf{L}_0 = \mathbf{0}$

Aquest és un cas degenerat, ja que la relació anterior $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{L}_0 = 0$ no ens aporta informació. Tot i així, podem solucionar completament el problema.

Teorema 4.6. *La solució de l'equació (4.3) amb les corresponents condicions inicials $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$, $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0$, ve donada per la corba*

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 e^{\int_0^t \lambda(s) ds}$$

on $\lambda(t)$ és solució de l'equació diferencial ordinària

$$\ddot{\lambda} + 5\lambda\dot{\lambda} + 3\lambda^3 = 0$$

amb condicions inicials

$$\lambda(0) = \frac{\|\mathbf{v}_0\|}{\|\mathbf{r}_0\|}, \quad \dot{\lambda}(0) = G \frac{M}{\|\mathbf{r}_0\|^3} - \frac{\|\mathbf{v}_0\|^2}{\|\mathbf{r}_0\|^2}.$$

Demostració. Si \mathbf{r} és una solució de (4.3) amb les condicions inicials especificades, tenim

$$\mathbf{0} = \mathbf{L}_0 = \mathbf{r}(t) \times \mu \dot{\mathbf{r}}(t).$$

Això vol dir que els vectors $\mathbf{r}(t)$ i $\dot{\mathbf{r}}(t)$ són paral·lels (són proporcionals), per tant existeix un escalar $\lambda(t)$ de manera que

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \lambda(t)\mathbf{r}(t),$$

que és una equació diferencial a resoldre. Si resollem queda

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 e^{\int_0^t \lambda(s) ds},$$

és a dir, el moviment queda sobre una recta amb direcció \mathbf{r}_0 .

Per trobar $\lambda(t)$ utilitzem l'equació (4.3). Substituint per l'expressió anterior trobem

$$-\frac{\|\mathbf{r}_0\|^3}{GM}(\dot{\lambda}(t) + \lambda(t)^2) = e^{-3 \int_0^t \lambda(s) ds}.$$

Derivant i tornant a substituir trobem l'equació diferencial

$$\ddot{\lambda} + 5\lambda\dot{\lambda} + 3\lambda^3 = 0$$

amb les condicions inicials enunciades.

Recíprocament, si $\lambda(t)$ és solució de l'equació diferencial esmentada, un càlcul ràpid demostra que $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 e^{\int_0^t \lambda(s) ds}$ és la solució que busquem. \square

4.2 Cas $\mathbf{L}_0 \neq \mathbf{0}$

Aquí la relació $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{L}_0 = 0$ sí que ens dóna informació sobre la corba \mathbf{r} : ens diu que la seva imatge $\text{im}(\mathbf{r})$ es troba sempre continguda en un pla que té com a vector normal el vector \mathbf{L}_0 .

Definició 4.7. Definim el pla π com el pla que té per a vector normal \mathbf{L}_0 i conté el punt $\mathbf{r}_1(t)$.

Sabent això, podem reduir el problema utilitzant coordenades polars sobre aquest pla. Necessitem, però, seleccionar molt bé quins eixos agafem. Per raons geomètriques, agafarem com a eix d'abscisses el que s'anomena vector excentricitat, o vector de Laplace-Runge-Lenz.

Definició 4.8. Definim el *vector excentricitat* (o *vector de Laplace-Runge-Lenz*) com el camp vectorial

$$\mathbf{e} : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{e}(t) = \frac{1}{Gm_1m_2} \dot{\mathbf{r}}(t) \times \mathbf{L}_r(t) - \frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|}.$$

Resulta que aquest camp vectorial torna a ser una integral primera per a l'equació (4.3).

Teorema 4.9. Si $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ és solució de l'equació (4.3), llavors el camp vectorial $\mathbf{e}(t)$ és constant. A més, es compleix que

$$\mathbf{e}(t) \cdot \mathbf{L}_0 = 0.$$

Demostració. La primera part es demostra derivant i utilitzant l'equació (4.3) per a calcular $\ddot{\mathbf{r}}(t)$. Fem el càlcul de la segona part:

$$\mathbf{e}(t) \cdot \mathbf{L}_0 = \frac{(\dot{\mathbf{r}}(t) \times \mathbf{L}_0) \cdot \mathbf{L}_0}{Gm_1m_2} - \frac{\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{L}_0}{\|\mathbf{r}(t)\|} = -\frac{\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{L}_r(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|} = -\frac{\mathbf{r}(t) \cdot (\mathbf{r}(t) \times \mu \dot{\mathbf{r}}(t))}{\|\mathbf{r}(t)\|} = 0. \quad \square$$

Denotem aquest camp vectorial constant com $\mathbf{e}_0 := \mathbf{e}(0)$. El resultat anterior demostra que aquest vector està contingut sobre el pla π . Per a poder agafar aquest vector com a eix d'abscisses, necessitem distingir entre dos casos.

4.2.1 Cas $\mathbf{e}_0 = \mathbf{0}$

En aquest cas no podem fer servir \mathbf{e}_0 com a part d'uns eixos de coordenades sobre aquest pla. Agafem $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ dos vectors unitaris qualssevol sobre el pla que siguin ortogonals, i tals que $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{L}_0}{\|\mathbf{L}_0\|}$.

Llavors els vectors

$$\left\{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \frac{\mathbf{L}_0}{\|\mathbf{L}_0\|} \right\}$$

formen una base ortonormal de \mathbb{R}^3 , per tant els podem fer servir com a un sistema de coordenades. Com $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{L}_0 = 0$, podem escriure la corba \mathbf{r} com

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{u}_1 + y(t)\mathbf{u}_2$$

per a certes funcions $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$. Així, per a resoldre completament el problema, només ens cal trobar les dues components $x(t)$ i $y(t)$. Aquí és on introduïrem coordenades polars. Escrivim

$$x(t) = r(t) \cos(f(t)), \quad y(t) = r(t) \sin(f(t))$$

per a certes funcions $r : I \rightarrow [0, \infty)$, $f : I \rightarrow [0, 2\pi)$, que són les que trobarem a continuació.

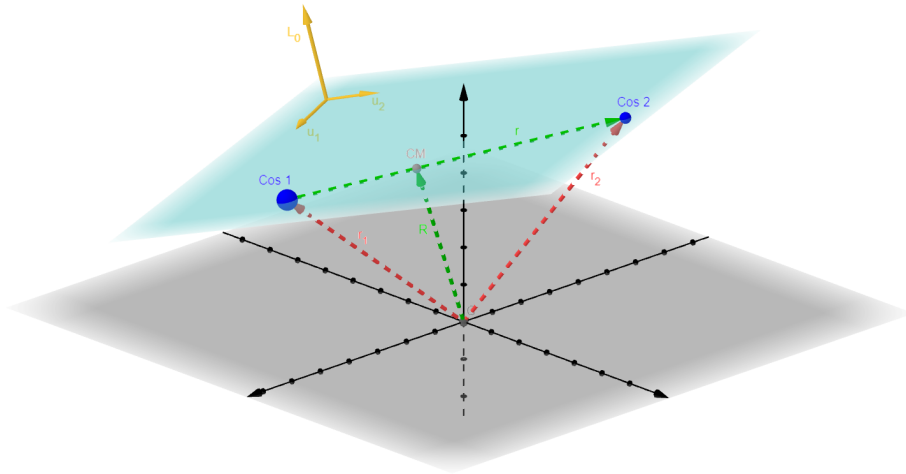


Figura 3: Representació de la nova base ortonormal introduïda.

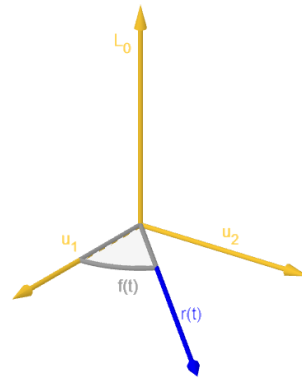


Figura 4: Coordenades polars relatives a $\{u_1, u_2\}$.

El següent teorema ens resol finalment el problema en el cas $\mathbf{e}_0 = \mathbf{0}$.

Teorema 4.10. *Si $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ és solució de l'equació (4.3), llavors*

(1) *La funció $r : I \rightarrow [0, \infty)$ ve donada per*

$$r(t) = \frac{\|\mathbf{L}_0\|^2}{Gm_1m_2\mu}.$$

És a dir, $r(t)$ és constant i per tant estem en el cas d'un moviment circular.

(2) *La funció $f : I \rightarrow [0, 2\pi)$ ve donada per*

$$f(t) = f_0 + \frac{G^2m_1^2m_2^2\mu}{\|\mathbf{L}_0\|^3}t$$

on f_0 està donat, tret de múltiples de 2π , per

$$\cos(f_0) = \frac{Gm_1m_2\mu}{\|\mathbf{L}_0\|^2} \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{u}_1, \quad \sin(f_0) = \frac{Gm_1m_2\mu}{\|\mathbf{L}_0\|^2} \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{u}_2.$$

Demostració.

(1) Calculem el producte escalar fent servir (4.4) i que $\mathbf{e}_0 = \mathbf{0}$:

$$0 = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{e}_0 = \frac{\mathbf{r}(t) \cdot (\dot{\mathbf{r}}(t) \times \mathbf{L}_0)}{Gm_1m_2} - \|\mathbf{r}(t)\| = \frac{\|\mathbf{L}_0\|^2}{Gm_1m_2\mu} - \|\mathbf{r}(t)\|,$$

on hem calculat $\mathbf{r}(t) \cdot (\dot{\mathbf{r}}(t) \times \mathbf{L}_0) = \mathbf{L}_0 \cdot (\mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) = \|\mathbf{L}_0\|^2$. A més, fent servir que els vectors $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ són ortonormals, trobem que $\|\mathbf{r}(t)\| = r(t)$. Per tant,

$$0 = \frac{\|\mathbf{L}_0\|^2}{Gm_1m_2\mu} - r(t),$$

que és el que volíem demostrar.

(2) Derivant $\mathbf{r}(t)$ i fent servir que $r(t) = \frac{\|\mathbf{L}_0\|^2}{Gm_1m_2\mu}$, trobem

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{\|\mathbf{L}_0\|^2}{Gm_1m_2\mu} (-\sin(f(t))\dot{f}(t)\mathbf{u}_1 + \cos(f(t))\dot{f}(t)\mathbf{u}_2).$$

Calculem

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{r}(t) \times \mu\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{\|\mathbf{L}_0\|^3}{G^2m_1^2m_2^2\mu}\dot{f}(t)\mathbf{L}_0.$$

Troblem l'equació $\|\mathbf{L}_0\|^3\dot{f}(t) = G^2m_1^2m_2^2\mu$. Integrant, obtenim l'expressió

$$f(t) = f_0 + \frac{G^2m_1^2m_2^2\mu}{\|\mathbf{L}_0\|^3}t.$$

Per a trobar $f_0 = f(0)$ simplement substituïm $t = 0$ en l'expressió

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\|\mathbf{L}_0\|^2}{Gm_1m_2\mu} \cos(f(t))\mathbf{u}_1 + \frac{\|\mathbf{L}_0\|^2}{Gm_1m_2\mu} \sin(f(t))\mathbf{u}_2,$$

i fem productes escalars amb els vectors \mathbf{u}_1 i \mathbf{u}_2 , respectivament. □

4.2.2 Cas $\mathbf{e}_0 \neq \mathbf{0}$

Aquí tenim els vectors $\mathbf{L}_0, \mathbf{e}_0$ diferents de $\mathbf{0}$ i ortogonals. Els vectors

$$\left\{ \frac{\mathbf{e}_0}{\|\mathbf{e}_0\|}, \frac{\mathbf{L}_0 \times \mathbf{e}_0}{\|\mathbf{L}_0 \times \mathbf{e}_0\|}, \frac{\mathbf{L}_0}{\|\mathbf{L}_0\|} \right\}$$

formen una base ortonormal de \mathbb{R}^3 , per tant els podem fer servir com a un sistema de coordenades. Com $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{L}_0 = 0$, podem escriure la corba \mathbf{r} com

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \frac{\mathbf{e}_0}{\|\mathbf{e}_0\|} + y(t) \frac{\mathbf{L}_0 \times \mathbf{e}_0}{\|\mathbf{L}_0 \times \mathbf{e}_0\|}$$

per a certes funcions $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$. Així, per a resoldre completament el problema, només ens cal trobar les dues components $x(t)$ i $y(t)$. Com en el cas anterior, introduïm coordenades polars. Escrivim

$$x(t) = r(t) \cos(f(t)), \quad y(t) = r(t) \sin(f(t))$$

per a certes funcions $r : I \rightarrow [0, \infty)$, $f : I \rightarrow [0, 2\pi)$, que són les que trobarem en el que queda de secció.

La següent proposició ens dona la forma de la trajectòria de la corba \mathbf{r} ; és a dir, trobem el *radi* $r(t)$ en funció de l'*angle* $f(t)$.

Proposició 4.11 (Forma de la trajectòria). Si $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ és solució de l'equació (4.3), llavors les funcions $r, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ compleixen la relació

$$r(t) = \frac{A}{1 + e \cos(f(t))}$$

amb $A = \frac{\|\mathbf{L}_0\|^2}{Gm_1m_2\mu}$ i $e = \|\mathbf{e}_0\|$. La constant e s'anomena excentricitat de la trajectòria.

Demostració. Aprofitant el càlcul de la demostració del Teorema 4.10 (1), tenim

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{e}_0 = \frac{\|\mathbf{L}_0\|^2}{Gm_1m_2\mu} - r(t) = A - r(t).$$

Fent servir la nova base ortonormal introduïda, $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{e}_0 = x(t)\|\mathbf{e}_0\| = e r(t) \cos(f(t))$, per tant

$$e r(t) \cos(f(t)) = A - r(t)$$

que és l'equació de la trajectòria de l'enunciat. \square

Segons els valors de e tenim diferents tipus de moviments.

Definició 4.12. Suposem que $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ és solució de l'equació (4.3). Llavors

- (a) Per a $e > 1$, diem que la corba \mathbf{r} segueix un *moviment hiperbòlic*.
- (b) Per a $e = 1$, diem que la corba \mathbf{r} segueix un *moviment parabòlic*.
- (c) Per a $e < 1$, diem que la corba \mathbf{r} segueix un *moviment el·líptic*.

La integral primera E_0 ens classifica totalment el moviment que tenim.

Proposició 4.13. Suposem que $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ és solució de l'equació (4.3). Llavors tenim la relació

$$e^2 = 1 + \frac{2E_0\|\mathbf{L}_0\|^2}{\mu(Gm_1m_2)^2}.$$

En particular,

- a) Per a $E_0 > 0$, tenim *moviment hiperbòlic*.
- b) Per a $E_0 = 0$, tenim *moviment parabòlic*.
- c) Per a $E_0 < 0$, tenim *moviment el·líptic*.

Demostració. Calculem

$$\begin{aligned} e^2 &= \left(\frac{1}{Gm_1m_2} \dot{\mathbf{r}}(t) \times \mathbf{L}_0 - \frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|} \right) \cdot \left(\frac{1}{Gm_1m_2} \dot{\mathbf{r}}(t) \times \mathbf{L}_0 - \frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|} \right) \\ &= \frac{1}{(Gm_1m_2)^2} \|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \mathbf{L}_0\|^2 + 1 - 2 \frac{\mathbf{r}(t) \cdot (\dot{\mathbf{r}}(t) \times \mathbf{L}_0)}{\|\mathbf{r}(t)\| Gm_1m_2}. \end{aligned}$$

Com que $\mathbf{r}(t)$ és perpendicular a \mathbf{L}_0 , $\dot{\mathbf{r}}(t)$ també ho és, per tant $\|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \mathbf{L}_0\|^2 = \|\dot{\mathbf{r}}(t)\|^2 \|\mathbf{L}_0\|^2$. També $\mathbf{r}(t) \cdot (\dot{\mathbf{r}}(t) \times \mathbf{L}_0) = \mathbf{L}_0 \cdot (\mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) = \frac{\|\mathbf{L}_0\|^2}{\mu}$. Llavors

$$e^2 = \frac{1}{(Gm_1m_2)^2} \|\dot{\mathbf{r}}(t)\|^2 \|\mathbf{L}_0\|^2 + 1 - 2 \frac{\|\mathbf{L}_0\|^2}{\|\mathbf{r}(t)\| \mu Gm_1m_2}.$$

Fent servir que l'energia E_0 és $E_r(t)$ trobem $\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|^2 = \frac{2E_0}{\mu} + \frac{2Gm_1m_2}{\|\mathbf{r}(t)\|\mu}$. Finalment,

$$e^2 = \frac{2E_0\|\mathbf{L}_0\|^2}{\mu(Gm_1m_2)^2} + 1 + \frac{2\|\mathbf{L}_0\|^2}{\|\mathbf{r}(t)\|\mu Gm_1m_2} - 2\frac{\|\mathbf{L}_0\|^2}{\|\mathbf{r}(t)\|\mu Gm_1m_2} = 1 + \frac{2E_0\|\mathbf{L}_0\|^2}{\mu(Gm_1m_2)^2},$$

que és la relació de l'enunciat. D'aquesta relació entre e i E_0 és clar que tenim la classificació dels moviments que diu l'enunciat. \square

Ja hem trobat la forma de la trajectòria, però ens falta trobar exactament les funcions $r, f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Ara és el moment de fer servir la informació de les integrals primeres.

Proposició 4.14. *Suposem que $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ és solució de l'equació (4.3). Llavors les funcions $r, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ estan relacionades amb les quantitats \mathbf{L}_0 i E_0 segons*

$$\|\mathbf{L}_0\| = \mu r(t)^2 \dot{f}(t), \quad E_0 = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}(t)^2 + r(t)^2 \dot{f}(t)^2) - G\frac{m_1m_2}{r(t)}.$$

Demostració. Derivant $\mathbf{r}(t)$ trobem

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}(t) &= (\dot{r}(t) \cos(f(t)) - r(t) \sin(f(t)) \dot{f}(t)) \frac{\mathbf{e}_0}{\|\mathbf{e}_0\|} \\ &\quad + (\dot{r}(t) \sin(f(t)) + r(t) \cos(f(t)) \dot{f}(t)) \frac{\mathbf{L}_0 \times \mathbf{e}_0}{\|\mathbf{L}_0 \times \mathbf{e}_0\|}. \end{aligned}$$

Calculem

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0 &= \mu r(t) \cos(f(t)) (\dot{r}(t) \sin(f(t)) + r(t) \cos(f(t)) \dot{f}(t)) \frac{\mathbf{e}_0}{\|\mathbf{e}_0\|} \times \frac{\mathbf{L}_0 \times \mathbf{e}_0}{\|\mathbf{L}_0 \times \mathbf{e}_0\|} \\ &\quad + \mu r(t) \sin(f(t)) (\dot{r}(t) \cos(f(t)) - r(t) \sin(f(t)) \dot{f}(t)) \frac{\mathbf{L}_0 \times \mathbf{e}_0}{\|\mathbf{L}_0 \times \mathbf{e}_0\|} \times \frac{\mathbf{e}_0}{\|\mathbf{e}_0\|} \\ &= \mu r(t)^2 \dot{f}(t) \frac{\mathbf{L}_0}{\|\mathbf{L}_0\|}. \end{aligned}$$

D'aquí trobem la primera equació $\|\mathbf{L}_0\| = \mu r(t)^2 \dot{f}(t)$. Fent servir que tenim una base ortonormal, trobem $\|\mathbf{r}(t)\| = r(t)$ i $\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|^2 = \dot{r}(t)^2 + r(t)^2 \dot{f}(t)^2$. Per tant,

$$E_0 = \frac{1}{2}\mu\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|^2 - G\frac{m_1m_2}{\|\mathbf{r}(t)\|} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}(t)^2 + r(t)^2 \dot{f}(t)^2) - G\frac{m_1m_2}{r(t)},$$

que és la segona equació. \square

Les equacions d'aquesta proposició són les que resoldrem per a trobar finalment r i f . Per a fer-ho, introduïrem un canvi de paràmetre $t \mapsto u$, definit de la següent manera.

Definició 4.15. Fixem constants $k, T \in \mathbb{R}$ amb $k \neq 0$ (que especificarem més endavant, segons els valors de l'energia). Definim llavors el canvi de paràmetre

$$u : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(t) = k \int_T^t \frac{1}{r(s)} ds.$$

Com que $\frac{du}{dt}(s) = k \frac{1}{r(s)} \neq 0$, la funció u és localment injectiva. Suposem que l'interval I és tal que u és injectiva en I , i agafem J que sigui la imatge de u , és a dir, agafem

$$u : I \rightarrow J$$

invertible. Així podem fer el canvi de paràmetre $t \mapsto u$ de forma lícita. Aquest nou paràmetre u s'anomena *anomalía excèntrica*.

Amb aquest nou paràmetre, expressem les equacions de la Proposició 4.14 en termes de $\frac{dr}{du}$ i $\frac{df}{du}$. Abusarem de notació i escriurem

$$r : J \rightarrow \mathbb{R}, \quad r(u) = r(t(u)), \quad f : J \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(u) = f(t(u)),$$

és a dir, r denotarà la funció $r \circ u^{-1}$, i f denotarà la funció $f \circ u^{-1}$.

Proposició 4.16. *Si $r : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ és solució de l'equació (4.3), llavors la funció $r : J \rightarrow \mathbb{R}$ compleix l'equació*

$$k^2 \left(\frac{dr}{du}(u) \right)^2 + \frac{\|\mathbf{L}_0\|^2}{\mu^2} - \frac{2Gm_1m_2r(u)}{\mu} - \frac{2E_0r(u)^2}{\mu} = 0. \quad (4.5)$$

Demostració. Utilitzem les equacions de la Proposició 4.14. Aïllant $\dot{f}(t)$ de la primera equació i substituint-la a la segona, trobem

$$E_0 = \frac{1}{2}\mu \left(\dot{r}(t)^2 + \frac{\|\mathbf{L}_0\|^2}{\mu^2 r(t)^2} \right) - G \frac{m_1m_2}{r(t)} = \frac{1}{2}\mu \dot{r}(t)^2 + \frac{\|\mathbf{L}_0\|^2}{2\mu r(t)^2} - G \frac{m_1m_2}{r(t)}.$$

Fem servir la regla de la cadena per trobar $\dot{r}(t) = \frac{dr}{dt}(t) = \frac{du}{dt}(t) \frac{dr}{du}(u) = \frac{k}{r(u)} \frac{dr}{du}(u)$. Per tant,

$$E_0 = \frac{1}{2}\mu \frac{k^2}{r(u)^2} \left(\frac{dr}{du}(u) \right)^2 + \frac{\|\mathbf{L}_0\|^2}{2\mu r(u)^2} - G \frac{m_1m_2}{r(u)}$$

que, si simplifiquem, dóna l'equació de l'enunciat. \square

L'equació (4.5) és la que ens permetrà trobar $r(u)$. A partir d'aquí, separarem diferents casos, segons el valor de l'energia E_0 .

4.2.2.1 Cas $E_0 = 0$: moviment parabòlic

El següent teorema ens resol completament el problema.

Teorema 4.17. *Agafem les constants*

$$k = \sqrt{\frac{Gm_1m_2}{\mu}}, \quad T = -\frac{A}{2} \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0}{k^2} - \frac{1}{6} \frac{(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0)^3}{k^4}$$

on recordem $A = \frac{\|\mathbf{L}_0\|^2}{\mu G m_1 m_2}$. Llavors la solució $r : J \rightarrow \mathbb{R}$ de l'equació (4.5) ve donada per

$$r(u) = \frac{u^2 + A}{2}.$$

A més, tenim la relació entre u i t donada implícitament per

$$\frac{u^3}{6} + \frac{A}{2}u = k(t - T).$$

Demostració. L'equació (4.5) queda

$$\left(\frac{dr}{du}(u)\right)^2 + A - 2r(u) = 0. \quad (4.6)$$

Tornant a derivar trobem l'equació $\frac{dr}{du}(u) \frac{d^2r}{du^2}(u) = \frac{dr}{du}(u)$. Si fos el cas que $\frac{dr}{du} = 0$, llavors r seria constant i igual a $\frac{A}{2}$. Fent servir l'equació de la trajectòria trobaríem $\cos(f(t)) = 1$, i per tant $f(t)$ també seria constant. Llavors $\|\mathbf{L}_0\| = \mu r(t)^2 \dot{f}(t) = 0$, que seria contradicció ja que estem en el cas $\mathbf{L}_0 \neq 0$.

Per tant, $\frac{dr}{du} \neq 0$, i això implica $\frac{d^2r}{du^2}(u) = 1$. Integrant dos cops trobem que la solució general és de la forma

$$r(u) = \frac{u^2}{2} + c_0 u + c_1.$$

Si imposem que aquesta també ha de ser solució de l'equació inicial (4.6) trobem que $c_1 = \frac{c_0^2 + A}{2}$. Ara veurem que hem escollit T de manera que $c_0 = 0$. Com que $\frac{du}{dt} = \frac{k}{r}$ podem integrar aquesta equació i trobem

$$\int_{u=u(0)}^{u=0} r(u) du = \int_{t=0}^{t=T} k dt,$$

$$-\frac{u(0)^3}{6} - \frac{c_0}{2} u(0)^2 - \frac{c_0^2 + A}{2} u(0) = kT.$$

Per trobar $u(0)$ fem servir que $\dot{r}(t) = \frac{k}{r(u)} \frac{dr}{du}(u) = \frac{k}{r(u)}(u + c_0)$, que en $t = 0$ dona

$$\dot{r}(0)r(0) = k(u(0) + c_0).$$

El producte $\dot{r}(t)r(t)$ coincideix sempre amb el producte escalar $\dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \mathbf{r}(t)$, per tant

$$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0 = k(u(0) + c_0).$$

Substituint a l'equació anterior i fent servir el valor de T trobem

$$\frac{5}{6}c_0^3 + \frac{A}{2}c_0 = 0$$

que l'única solució és $c_0 = 0$, ja que A és positiu.

Així, hem trobat que

$$r(u) = \frac{u^2 + A}{2}$$

i integrant altre cop $\frac{du}{dt} = \frac{k}{r}$ trobem la relació

$$\int_{u=u}^{u=0} r(u) du = \int_{t=t}^{t=T} k dt,$$

$$\frac{u^3}{6} + \frac{A}{2}u = k(t - T). \quad \square$$

Aquest resultat ens dóna el valor $r(t)$. L'equació de la trajectòria $r = r(f)$ trobada en la Proposició 4.11 ens permet recuperar $f(t)$.

4.2.2.2 Cas $E_0 > 0$: moviment hiperbòlic

El següent teorema ens resol completament el problema.

Teorema 4.18. *Agafem les constants*

$$k = \sqrt{\frac{2E_0}{\mu}}, \quad T = \frac{Gm_1m_2}{2E_0k} \alpha - \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0}{k^2}$$

on $\sinh(\alpha) = \frac{2E_0}{Gm_1m_2e} \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0}{k}$, i recordem $A = \frac{\|\mathbf{L}_0\|^2}{\mu Gm_1m_2}$. Llavors la solució $r : J \rightarrow \mathbb{R}$ de l'equació (4.5) ve donada per

$$r(u) = G \frac{m_1m_2}{2E_0} (e \cosh(u) - 1).$$

A més, tenim la relació entre u i t donada implícitament per

$$e \sinh(u) - u = \frac{2E_0k}{Gm_1m_2} (t - T).$$

Demostració. L'equació (4.5) queda

$$\left(\frac{dr}{du}(u) \right)^2 + \frac{\|\mathbf{L}_0\|^2}{2E_0\mu} - r(u)^2 - G \frac{m_1m_2}{E_0} r(u) = 0.$$

Completant quadrats a la banda dreta, fent el canvi de variable

$$\rho(u) = \frac{r(u) + G \frac{m_1m_2}{2E_0}}{G \frac{m_1m_2}{2E_0} e}$$

i simplificant queda

$$\left(\frac{d\rho}{du}(u) \right)^2 + 1 = \rho(u)^2.$$

Les solucions d'aquesta equació són $\rho(u) = \pm 1$ i $\rho(u) = \pm \cosh(u + c_0)$ on c_0 és una constant. Com que $r(u)$ no és constant (el mateix argument que en el cas anterior d'energia nul·la), $\rho(u)$ tampoc pot ser constant; a més, $r(u)$ és sempre positiva, per tant, $\rho(u)$ també ho ha de ser. L'única solució que queda és doncs $\rho(u) = \cosh(u + c_0)$, és a dir,

$$r(u) = G \frac{m_1m_2}{2E_0} (e \cosh(u + c_0) - 1).$$

Ara veurem que hem escollit T de manera que $c_0 = 0$. Com que $\frac{du}{dt} = \frac{k}{r}$ podem integrar aquesta equació i trobem

$$\int_{u=u(0)}^{u=0} r(u) du = \int_{t=0}^{t=T} k dt,$$

$$G \frac{m_1m_2}{2E_0} (e \sinh(c_0) - e \sinh(u(0) + c_0) + u(0)) = kT.$$

Per trobar $u(0)$ fem servir que $\dot{r}(t) = \frac{k}{r(u)} \frac{dr}{du}(u) = \frac{k}{r(u)} G \frac{m_1m_2}{2E_0} e \sinh(u + c_0)$, que en $t = 0$ dona

$$\dot{r}(0)r(0) = k \frac{Gm_1m_2}{2E_0} e \sinh(u(0) + c_0).$$

El producte $\dot{r}(t)r(t)$ coincideix sempre amb el producte escalar $\dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \mathbf{r}(t)$, per tant

$$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0 = k \frac{Gm_1m_2}{2E_0} e \sinh(u(0) + c_0).$$

Substituint a l'equació anterior i fent servir el valor de T trobem

$$e \sinh(c_0) - c_0 = 0$$

que l'única solució és $c_0 = 0$.

Així, hem trobat que

$$r(u) = G \frac{m_1m_2}{2E_0} (e \cosh(u) - 1)$$

i integrant altre cop $\frac{du}{dt} = \frac{k}{r}$ trobem la relació

$$\int_{u=u}^{u=0} r(u) du = \int_{t=t}^{t=T} k dt,$$

$$e \sinh(u) - u = \frac{2E_0k}{Gm_1m_2} (t - T). \quad \square$$

El valor

$$l := \frac{2E_0k}{Gm_1m_2} (t - T)$$

que apareix al teorema anterior s'anomena *anomia mitjana*, i doncs donat t , es pot trobar fàcilment l , i per tant també u resolent (numèricament) l'equació

$$e \sinh(u) - u = l.$$

4.2.2.3 Cas $E_0 < 0$: moviment el·líptic

El següent teorema ens resol completament el problema.

Teorema 4.19. *Agafem les constants*

$$k = \sqrt{\frac{2|E_0|}{\mu}}, \quad T = \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0}{k^2} - \frac{Gm_1m_2}{2|E_0|k} \alpha$$

on α és l'única valor en $(-\pi, \pi]$ que compleix

$$\sin(\alpha) = \frac{2|E_0|}{Gm_1m_2e} \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0}{k}, \quad \cos(\alpha) = \frac{1}{e} - \frac{2|E_0|\|\mathbf{r}_0\|}{Gm_1m_2e},$$

i recordem $A = \frac{\|\mathbf{L}_0\|^2}{\mu Gm_1m_2}$. Llavors la solució $r : J \rightarrow \mathbb{R}$ de l'equació (4.5) ve donada per

$$r(u) = G \frac{m_1m_2}{2|E_0|} (1 - e \cos(u)).$$

A més, tenim la relació entre u i t donada implícitament per

$$u - e \sin(u) = \frac{2|E_0|k}{Gm_1m_2} (t - T).$$

Demostració. L'equació (4.5) queda

$$\left(\frac{dr}{du}(u)\right)^2 + \frac{\|\mathbf{L}_0\|^2}{2|E_0|\mu} + r(u)^2 - G\frac{m_1m_2}{|E_0|}r(u) = 0.$$

Completant quadrats a la banda dreta, fent el canvi de variable

$$\rho(u) = \frac{r(u) - G\frac{m_1m_2}{2|E_0|}}{G\frac{m_1m_2}{2|E_0|}e}$$

i simplificant queda

$$\left(\frac{d\rho}{du}(u)\right)^2 - 1 = -\rho(u)^2.$$

Les solucions d'aquesta equació són $\rho(u) = \pm 1$ i $\rho(u) = \pm \cos(u+c_0)$ on c_0 és una constant, que podem agafar en l'interval $(-\pi, \pi]$. Com que $r(u)$ no és constant (el mateix argument que en els casos anteriors), $\rho(u)$ tampoc pot ser constant; fent servir que $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$, podem suposar que la solució és $\rho(u) = -\cos(u+c_0)$, és a dir,

$$r(u) = G\frac{m_1m_2}{2|E_0|}(1 - e\cos(u+c_0)).$$

Ara veurem que hem escollit T de manera que $c_0 = 0$. Com que $\frac{du}{dt} = \frac{k}{r}$ podem integrar aquesta equació i trobem

$$\int_{u=u(0)}^{u=0} r(u)du = \int_{t=0}^{t=T} kdt,$$

$$-G\frac{m_1m_2}{2|E_0|}(e\sin(c_0) + u(0) - e\sin(u(0)+c_0)) = kT.$$

Per trobar $u(0)$ fem servir que $\dot{r}(t) = \frac{k}{r(u)}\frac{dr}{du}(u) = \frac{k}{r(u)}G\frac{m_1m_2}{2|E_0|}e\sin(u+c_0)$, que en $t=0$ dona

$$\dot{r}(0)r(0) = k\frac{Gm_1m_2}{2|E_0|}e\sin(u(0)+c_0).$$

El producte $\dot{r}(t)r(t)$ coincideix sempre amb el producte escalar $\dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \mathbf{r}(t)$, per tant

$$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0 = k\frac{Gm_1m_2}{2|E_0|}e\sin(u(0)+c_0).$$

Per altra banda, avaluant en $t=0$ la solució que hem trobat $r(u)$, i fent servir que $r(t) = \|\mathbf{r}(t)\|$, trobem que

$$\|\mathbf{r}_0\| = G\frac{m_1m_2}{2|E_0|}(1 - e\cos(u(0)+c_0)).$$

Aquestes dues últimes equacions determinen totalment el valor de $u(0)+c_0$ tret de múltiples de 2π . Observem que el valor de α de l'enunciat està definit de manera que també és solució d'aquestes dues equacions; és a dir, es compleix que $u(0)+c_0 - \alpha$ és múltiple de 2π . Substituint tot això a l'equació que ens relaciona el c_0 i T , i fent servir el valor de T definit trobem

$$c_0 - e\sin(c_0) = \text{múltiple de } 2\pi.$$

Com que c_0 l'hem agafat en $(-\pi, \pi]$ i estem en el cas $e < 1$, l'única solució d'aquesta equació és $c_0 = 0$.

Així, hem trobat que

$$r(u) = G \frac{m_1 m_2}{2|E_0|} (1 - e \cos(u))$$

i integrant altra cop $\frac{du}{dt} = \frac{k}{r}$ trobem la relació

$$\int_{u=u}^{u=0} r(u) du = \int_{t=t}^{t=T} k dt,$$

$$u - e \sin(u) = \frac{2|E_0|k}{Gm_1 m_2} (t - T). \quad \square$$

Igual que en el cas $E_0 > 0$, el valor

$$l := \frac{2|E_0|k}{Gm_1 m_2} (t - T)$$

que apareix al teorema anterior s'anomena *anomia mitjana*, i doncs donat t , es pot trobar fàcilment l , i per tant també u resolent (numèricament) l'equació

$$u - e \sin(u) = l.$$

Aquesta última equació és la famosa *equació de Kepler*.

4.3 Les lleis de Kepler

Per acabar aquest capítol, exposarem en aquest apartat una de les aplicacions més famoses i importants del model donat pel problema dels dos cossos: la deducció de les famoses lleis de Kepler.

Les demostrarem tot suposant que els planetes del sistema solar segueixen el model mencionat; més concretament, suposarem que tenim un sistema amb només el Sol, de massa M , i un planeta del sistema solar, de massa m . La posició del planeta vindrà donada per \mathbf{r}_2 i la posició del Sol per \mathbf{r}_1 .

Cal remarcar que presentarem les lleis de Kepler tal com les va enunciar originalment. Durant la demostració farem precís l'enunciat matemàtic a demostrar en el marc del model escollit.

Teorema 4.20 (Primera llei de Kepler). *L'òrbita de cada planeta del sistema solar és una el·lipse amb el Sol en un dels dos focus.*

Demostració. Recordem que la posició del planeta ve donada per \mathbf{r}_2 i la posició del Sol per \mathbf{r}_1 .

Fent servir tot el que ja hem calculat fins ara, la corba $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ denota la posició del planeta relativa al Sol. El que hem de demostrar és que la forma de la trajectòria d'aquesta corba \mathbf{r} és una el·lipse.

Segons mostra la Taula 1, totes les excentricitats dels planetes del sistema solar compleixen $0 < e < 1$, i per tant, la corba \mathbf{r} segueix efectivament un moviment el·líptic. Més concretament, per la Proposició 4.11, tenim que

$$\|\mathbf{r}\| = \frac{A}{1 + e \cos(f)}$$

amb $A = \frac{\|\mathbf{L}_0\|^2}{GMm\mu}$. Aquesta expressió representa precisament una el·lipse, on un dels focus és el punt origen $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, que en el nostre cas és precisament la posició del Sol. \square

Planeta	Excentricitat e	Planeta	Excentricitat e
Mercuri	0.2056	Júpiter	0.0484
Venus	0.0068	Saturn	0.0541
Terra	0.0167	Urà	0.0472
Mart	0.0934	Neptú	0.0086

Taula 1: Excentricitats dels planetes del sistema solar.

Teorema 4.21 (Segona llei de Kepler). *Una línia que uneix un planeta del sistema solar i el Sol escombra àrees iguals durant intervals de temps iguals.*

Demostració. Fem servir la fórmula per calcular àrees acotades per una corba polar: si $r = r(f)$ és una corba polar (és a dir, f parametriza l'angle i r el radi), llavors la regió acotada pel graf $r = r(f)$ entre els angles $f = f_0$ i $f = f_1$ té àrea donada per

$$A(f_0, f_1) := \int_{f_0}^{f_1} \frac{r(f)^2}{2} df.$$

En el nostre cas, $r(f) = \|\mathbf{r}\| = \frac{A}{1+e \cos(f)}$.

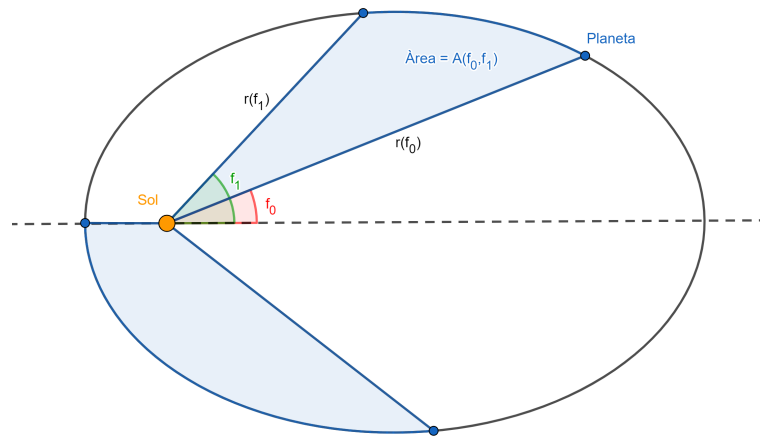


Figura 5: Representació de la segona llei de Kepler.

Fixem $f_0 = 0$ i $f_1 = f(t)$, l'angle en funció del temps. Llavors

$$A(t) := \int_0^{f(t)} \frac{r(f)^2}{2} df$$

és l'àrea de la regió acotada pel graf $r = r(f)$ entre $f = 0$ i $f = f(t)$.

El que volem demostrar és, doncs, que si tenim $t_1 < t_2$ i $t_3 < t_4$ dos intervals de temps iguals, és a dir, complint

$$t_4 - t_3 = t_2 - t_1 =: \Delta t,$$

llavors es compleix

$$A(t_4) - A(t_3) = A(t_2) - A(t_1).$$

Per a fer-ho, derivem $A(t)$:

$$\dot{A}(t) = \frac{d}{dt} \left(\int_0^{f(t)} \frac{r(f)^2}{2} df \right) = \frac{r(f(t))^2}{2} \dot{f}(t) = \frac{\|\mathbf{L}_0\|}{2\mu},$$

on en l'última igualtat hem fet servir la Proposició 4.14. Per tant,

$$A(t_4) - A(t_3) = \int_{t_3}^{t_4} \dot{A}(t) dt = \int_{t_3}^{t_4} \frac{\|\mathbf{L}_0\|}{2\mu} dt = \frac{\|\mathbf{L}_0\|}{2\mu} \Delta t.$$

Observem que només depèn de la diferència de temps. Això és precisament el que volíem demostrar, ja que

$$A(t_4) - A(t_3) = \frac{\|\mathbf{L}_0\|}{2\mu} \Delta t = A(t_2) - A(t_1). \quad \square$$

Teorema 4.22 (Tercera llei de Kepler). *La relació del quadrat del període orbital d'un planeta del sistema solar amb el cub del semieix major de la seva òrbita és la mateixa per a tots els planetes del sistema solar.*⁵

Demostració. Recordem que, si tenim una el·lipse d'equació en coordenades polars de la forma

$$\|\mathbf{r}\| = \frac{A}{1 + e \cos(f)},$$

llavors el semieix major a ve donat per l'expressió $a = \frac{A}{1-e^2}$.

Per trobar el període orbital, podem fer servir que l'àrea que s'ha escombrat en tot el període orbital és exactament l'àrea de tota l'el·lipse, que ve donada per

$$A(T) = \pi ab,$$

on T és el període orbital i b és el semieix menor de l'el·lipse. La relació entre a i b ve donada precisament per l'excentricitat, $b^2 = a^2(1 - e^2)$.

Ara ja ho tenim tot per a calcular la relació $\frac{T^2}{a^3}$, que és el que volem. Fent servir que $A(T) = \frac{\|\mathbf{L}_0\|}{2\mu} T$ (pel Teorema 4.21), trobem

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\mu^2 A(T)^2}{\|\mathbf{L}_0\|^2 a^3} = \frac{4\mu^2 \pi^2 b^2}{AGMm\mu a} = \frac{4\mu\pi^2}{GMm} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} \simeq \frac{4\pi^2}{GM}. \quad \square$$

⁵Aquesta llei no és acurada del tot, és només una aproximació; assumeix que la massa del Sol és molt més gran que la massa dels planetes, i doncs $\frac{m}{M} \simeq 0$.

5 El problema dels tres cossos

En aquest capítol ens centrarem en estudiar el problema dels tres cossos, és a dir, el cas $n = 3$ del problema plantejat al Capítol 3. En aquest cas, el sistema d'equacions diferencials a resoldre és

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{r}}_1(t) = Gm_2 \frac{\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)}{\|\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)\|^3} + Gm_3 \frac{\mathbf{r}_3(t) - \mathbf{r}_1(t)}{\|\mathbf{r}_3(t) - \mathbf{r}_1(t)\|^3}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_2(t) = Gm_1 \frac{\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)}{\|\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)\|^3} + Gm_3 \frac{\mathbf{r}_3(t) - \mathbf{r}_2(t)}{\|\mathbf{r}_3(t) - \mathbf{r}_2(t)\|^3}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_3(t) = Gm_1 \frac{\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_3(t)}{\|\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_3(t)\|^3} + Gm_2 \frac{\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_3(t)}{\|\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_3(t)\|^3}, \end{cases} \quad (5.1)$$

amb condicions inicials

$$\mathbf{r}_1(0) = \mathbf{r}_{1,0}, \quad \dot{\mathbf{r}}_1(0) = \mathbf{v}_{1,0}, \quad \mathbf{r}_2(0) = \mathbf{r}_{2,0}, \quad \dot{\mathbf{r}}_2(0) = \mathbf{v}_{2,0}, \quad \mathbf{r}_3(0) = \mathbf{r}_{3,0}, \quad \dot{\mathbf{r}}_3(0) = \mathbf{v}_{3,0}.$$

Hem vist que la corba centre de masses \mathbf{R} ens redueix el nombre de graus de llibertat del sistema en 6, el moment angular total en 3, i l'energia total en 1. Així, obtenim en aquest cas $6 \times 3 - 6 - 3 - 1 = 8$ graus de llibertat que encara necessitem per a resoldre completament el problema. En aquest cas $n = 3$, però, és conegut que *no* es pot resoldre analíticament.

Per poder estudiar-lo millor, introduïrem un canvi de coordenades, anomenades *coordenades de Jacobi*.

Definició 5.1. Definim dues noves corbes com

$$\begin{aligned} \mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}(t) &:= \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t) \\ \boldsymbol{\rho} : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{\rho}(t) &:= \mathbf{r}_3(t) - \frac{m_1 \mathbf{r}_1(t) + m_2 \mathbf{r}_2(t)}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

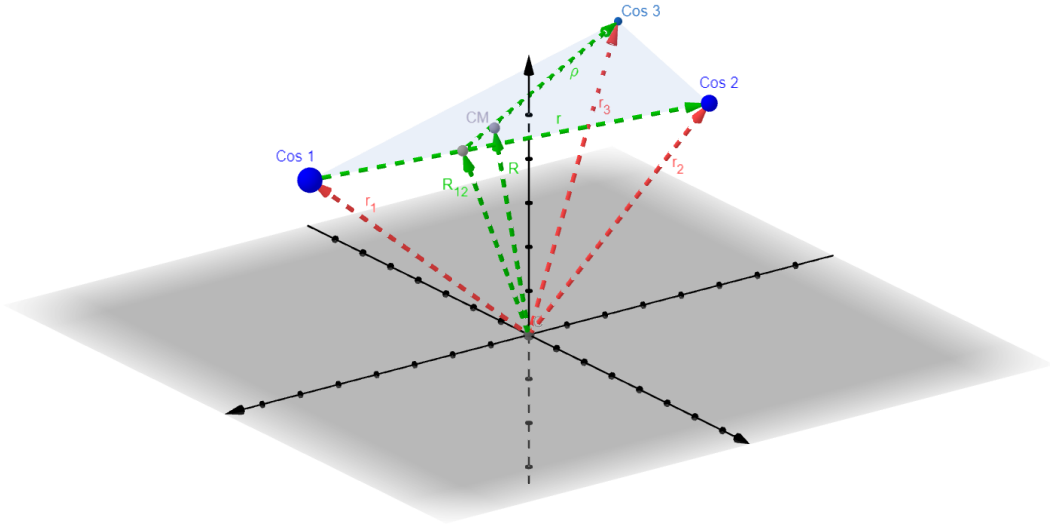


Figura 6: Disposició dels cossos 1, 2 i 3 amb les coordenades de Jacobi.

És a dir, la corba \mathbf{r} ens dóna la posició relativa del cos 2 respecte del cos 1, i la corba $\boldsymbol{\rho}$ ens dóna la posició relativa del cos 3 respecte al centre de masses dels dos primers cossos

1 i 2, que ve donat per

$$\mathbf{R}_{12} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}_2.$$

Aquestes dues noves coordenades s'anomenen *coordenades de Jacobi*.

Juntament amb la coordenada centre de masses del sistema \mathbf{R} , les coordenades de Jacobi donen un canvi de coordenades lícit, en el sentit que podem recuperar les corbes $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ i \mathbf{r}_3 a partir de les corbes \mathbf{R}, \mathbf{r} i $\boldsymbol{\rho}$ fent servir les fórmules

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} - \frac{m_2}{\eta} \mathbf{r} - \frac{m_3}{M} \boldsymbol{\rho}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} + \frac{m_1}{\eta} \mathbf{r} - \frac{m_3}{M} \boldsymbol{\rho}, \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{R} + \frac{\eta}{M} \boldsymbol{\rho},$$

on hem definit η com la massa total del sistema format pel cos 1 i cos 2, és a dir $\eta = m_1 + m_2$.

Més explícitament, tenim el següent resultat, que és anàleg al Teorema 4.2 per al cas $n = 3$.

Teorema 5.2. *El sistema d'equacions diferencials (5.1) és equivalent al sistema d'equacions diferencials*

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{0}, \\ \ddot{\mathbf{r}}(t) = -G\eta \frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|^3} + Gm_3 \left(\frac{\boldsymbol{\rho}(t) - \frac{m_1}{\eta} \mathbf{r}(t)}{\|\boldsymbol{\rho}(t) - \frac{m_1}{\eta} \mathbf{r}(t)\|^3} - \frac{\boldsymbol{\rho}(t) + \frac{m_2}{\eta} \mathbf{r}(t)}{\|\boldsymbol{\rho}(t) + \frac{m_2}{\eta} \mathbf{r}(t)\|^3} \right), \\ \ddot{\boldsymbol{\rho}}(t) = -G \frac{Mm_1}{\eta} \frac{\boldsymbol{\rho}(t) + \frac{m_2}{\eta} \mathbf{r}(t)}{\|\boldsymbol{\rho}(t) + \frac{m_2}{\eta} \mathbf{r}(t)\|^3} - G \frac{Mm_2}{\eta} \frac{\boldsymbol{\rho}(t) - \frac{m_1}{\eta} \mathbf{r}(t)}{\|\boldsymbol{\rho}(t) - \frac{m_1}{\eta} \mathbf{r}(t)\|^3} \end{cases} \quad (5.2)$$

amb les condicions inicials

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0 &= \frac{m_1}{M} \mathbf{r}_{1,0} + \frac{m_2}{M} \mathbf{r}_{2,0} + \frac{m_3}{M} \mathbf{r}_{3,0}, & \mathbf{V}_0 &= \frac{m_1}{M} \mathbf{v}_{1,0} + \frac{m_2}{M} \mathbf{v}_{2,0} + \frac{m_3}{M} \mathbf{v}_{3,0}, \\ \mathbf{r}_0 &:= \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_{2,0} - \mathbf{r}_{1,0}, & \mathbf{v}_0 &:= \dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_{2,0} - \mathbf{v}_{1,0}, \\ \boldsymbol{\rho}_0 &:= \boldsymbol{\rho}(0) = \frac{M}{\eta} (\mathbf{r}_{3,0} - \mathbf{R}_0), & \mathbf{w}_0 &:= \dot{\boldsymbol{\rho}}(0) = \frac{M}{\eta} (\mathbf{v}_{3,0} - \mathbf{V}_0). \end{aligned}$$

Demostració. Calculem primer

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 = \boldsymbol{\rho} + \frac{m_2}{\eta} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 = \boldsymbol{\rho} - \frac{m_1}{\eta} \mathbf{r}.$$

Aquestes fórmules les necessitarem durant la demostració.

Suposem ara que $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ són solucions del sistema (5.1). Ja hem vist en el Capítol 3 que $\ddot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{0}$. Calculem les altres dues derivades:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}(t) &= \ddot{\mathbf{r}}_2(t) - \ddot{\mathbf{r}}_1(t) \\ &= -Gm_1 \frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|^3} + Gm_3 \frac{\boldsymbol{\rho}(t) - \frac{m_1}{\eta} \mathbf{r}(t)}{\|\boldsymbol{\rho}(t) - \frac{m_1}{\eta} \mathbf{r}(t)\|^3} - Gm_2 \frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|^3} - Gm_3 \frac{\boldsymbol{\rho}(t) + \frac{m_2}{\eta} \mathbf{r}(t)}{\|\boldsymbol{\rho}(t) + \frac{m_2}{\eta} \mathbf{r}(t)\|^3} \\ &= -G\eta \frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|^3} + Gm_3 \left(\frac{\boldsymbol{\rho}(t) - \frac{m_1}{\eta} \mathbf{r}(t)}{\|\boldsymbol{\rho}(t) - \frac{m_1}{\eta} \mathbf{r}(t)\|^3} - \frac{\boldsymbol{\rho}(t) + \frac{m_2}{\eta} \mathbf{r}(t)}{\|\boldsymbol{\rho}(t) + \frac{m_2}{\eta} \mathbf{r}(t)\|^3} \right), \\ \ddot{\boldsymbol{\rho}}(t) &= \frac{M}{\eta} (\ddot{\mathbf{r}}_3(t) - \ddot{\mathbf{R}}(t)) \\ &= \frac{GM}{\eta} \left(m_1 \frac{\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_3(t)}{\|\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_3(t)\|^3} + m_2 \frac{\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_3(t)}{\|\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_3(t)\|^3} \right) \\ &= -\frac{GMm_1}{\eta} \frac{\boldsymbol{\rho}(t) + \frac{m_2}{\eta} \mathbf{r}(t)}{\|\boldsymbol{\rho}(t) + \frac{m_2}{\eta} \mathbf{r}(t)\|^3} - \frac{GMm_2}{\eta} \frac{\boldsymbol{\rho}(t) - \frac{m_1}{\eta} \mathbf{r}(t)}{\|\boldsymbol{\rho}(t) - \frac{m_1}{\eta} \mathbf{r}(t)\|^3}. \end{aligned}$$

Per tant, se satisfà el sistema (5.2). Recíprocament, si \mathbf{R} , \mathbf{r} , $\boldsymbol{\rho}$ són solucions de (5.2), tenim

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_1(t) &= \ddot{\mathbf{R}}(t) - \frac{m_2}{\eta}\ddot{\mathbf{r}}(t) - \frac{m_3}{M}\ddot{\boldsymbol{\rho}}(t) = Gm_2\frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|^3} + Gm_3\frac{\boldsymbol{\rho}(t) + \frac{m_2}{\eta}\mathbf{r}(t)}{\|\boldsymbol{\rho}(t) + \frac{m_2}{\eta}\mathbf{r}(t)\|^3} \\ &= Gm_2\frac{\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)}{\|\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)\|^3} + Gm_3\frac{\mathbf{r}_3(t) - \mathbf{r}_1(t)}{\|\mathbf{r}_3(t) - \mathbf{r}_1(t)\|^3}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_2(t) &= \ddot{\mathbf{R}}(t) + \frac{m_1}{\eta}\ddot{\mathbf{r}}(t) - \frac{m_3}{M}\ddot{\boldsymbol{\rho}}(t) = -Gm_1\frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|^3} + Gm_3\frac{\boldsymbol{\rho}(t) - \frac{m_1}{\eta}\mathbf{r}(t)}{\|\boldsymbol{\rho}(t) - \frac{m_1}{\eta}\mathbf{r}(t)\|^3} \\ &= Gm_1\frac{\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)}{\|\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)\|^3} + Gm_3\frac{\mathbf{r}_3(t) - \mathbf{r}_2(t)}{\|\mathbf{r}_3(t) - \mathbf{r}_2(t)\|^3}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_3(t) &= \ddot{\mathbf{R}}(t) + \frac{\eta}{M}\ddot{\boldsymbol{\rho}}(t) = -Gm_1\frac{\boldsymbol{\rho}(t) + \frac{m_2}{\eta}\mathbf{r}(t)}{\|\boldsymbol{\rho}(t) + \frac{m_2}{\eta}\mathbf{r}(t)\|^3} - Gm_2\frac{\boldsymbol{\rho}(t) - \frac{m_1}{\eta}\mathbf{r}(t)}{\|\boldsymbol{\rho}(t) - \frac{m_1}{\eta}\mathbf{r}(t)\|^3} \\ &= Gm_1\frac{\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_3(t)}{\|\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_3(t)\|^3} + Gm_2\frac{\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_3(t)}{\|\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_3(t)\|^3},\end{aligned}$$

que són les equacions del sistema (5.1).

Les condicions inicials són directes de les definicions de \mathbf{R} , \mathbf{r} i $\boldsymbol{\rho}$. □

5.1 Col·lapse total en el cas $n = 3$

En aquesta secció aplicarem el teorema de Sundman del col·lapse total en el cas particular $n = 3$, per a concloure el següent resultat.

Proposició 5.3. *Si es produeix col·lapse total en el problema dels tres cossos, llavors necessàriament el moviment dels cossos es troba en un pla.*

Demostració. El Teorema de Sundman 3.9 ens diu que el moment angular total ve donat per $\mathbf{L}_T \equiv \mathbf{R}_0 \times M\mathbf{V}_0$. Recordem que

$$\mathbf{L}_T(t) = \mathbf{r}_1(t) \times m_1\dot{\mathbf{r}}_1(t) + \mathbf{r}_2(t) \times m_2\dot{\mathbf{r}}_2(t) + \mathbf{r}_3(t) \times m_3\dot{\mathbf{r}}_3(t).$$

En termes de les noves coordenades \mathbf{R} , \mathbf{r} i $\boldsymbol{\rho}$, el moment angular \mathbf{L}_T es pot escriure com

$$\mathbf{L}_T(t) = \mathbf{R}(t) \times M\dot{\mathbf{R}}(t) + \frac{m_1m_2}{\eta}\mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t) + \frac{m_3\eta}{M}\boldsymbol{\rho}(t) \times \dot{\boldsymbol{\rho}}(t).$$

Ara bé, $\mathbf{R}(t) \times M\dot{\mathbf{R}}(t) = (\mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_0t) \times M\mathbf{V}_0 = \mathbf{R}_0 \times M\mathbf{V}_0 = \mathbf{L}_T(t)$. Per tant, trobem que

$$\mathbf{0} = \frac{m_1m_2}{\eta}\mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t) + \frac{m_3\eta}{M}\boldsymbol{\rho}(t) \times \dot{\boldsymbol{\rho}}(t).$$

En particular, fent productes escalars, trobem

$$0 = \boldsymbol{\rho}(t) \cdot (\mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) = \mathbf{r}(t) \cdot (\dot{\mathbf{r}}(t) \times \boldsymbol{\rho}(t)),$$

$$0 = \mathbf{r}(t) \cdot (\boldsymbol{\rho}(t) \times \dot{\boldsymbol{\rho}}(t)) = \boldsymbol{\rho}(t) \cdot (\dot{\boldsymbol{\rho}}(t) \times \mathbf{r}(t)) = -\boldsymbol{\rho}(t) \cdot (\mathbf{r}(t) \times \dot{\boldsymbol{\rho}}(t)).$$

Suposem primer que $\mathbf{u}(t) := \mathbf{r}(t) \times \boldsymbol{\rho}(t) \neq \mathbf{0}$. Llavors

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{u}(t)}{\|\mathbf{u}(t)\|} \right) = \frac{\dot{\mathbf{u}}(t)\|\mathbf{u}(t)\|^2 - \mathbf{u}(t)(\mathbf{u}(t) \cdot \dot{\mathbf{u}}(t))}{\|\mathbf{u}(t)\|^3} = \frac{\mathbf{u}(t) \times (\dot{\mathbf{u}}(t) \times \mathbf{u}(t))}{\|\mathbf{u}(t)\|^3},$$

on hem fet servir la relació vectorial

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}.$$

Calculant $\dot{\mathbf{u}}(t) \times \mathbf{u}(t)$, trobem que

$$\dot{\mathbf{u}}(t) \times \mathbf{u}(t) = (\dot{\mathbf{r}}(t) \times \boldsymbol{\rho}(t)) \times (\mathbf{r}(t) \times \boldsymbol{\rho}(t)) + (\mathbf{r}(t) \times \dot{\boldsymbol{\rho}}(t)) \times (\mathbf{r}(t) \times \boldsymbol{\rho}(t)) = \mathbf{0},$$

és a dir el vector $\frac{\mathbf{u}(t)}{\|\mathbf{u}(t)\|} \neq \mathbf{0}$ és un vector constant, i a més

$$\mathbf{r}(t) \cdot \frac{\mathbf{u}(t)}{\|\mathbf{u}(t)\|} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\rho}(t) \cdot \frac{\mathbf{u}(t)}{\|\mathbf{u}(t)\|} = \mathbf{0}.$$

Així, tot el moviment es troba sobre el pla que té per vector normal $\frac{\mathbf{u}(t)}{\|\mathbf{u}(t)\|}$.

Suposem ara que $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$, és a dir, els vectors $\mathbf{r}(t)$ i $\boldsymbol{\rho}(t)$ són paral·lels.⁶ Si fos el cas que $\mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{0}$, llavors també $\boldsymbol{\rho}(t) \times \dot{\boldsymbol{\rho}}(t) = \mathbf{0}$, i per tant $\mathbf{r}(t)$ es troba sempre sobre la recta que té direcció \mathbf{r}_0 , i també $\boldsymbol{\rho}(t)$ es troba sobre la recta de direcció $\boldsymbol{\rho}_0$. Al ser aquests paral·lels, veiem que tot el moviment es troba sobre una mateixa recta; en particular, el moviment es troba sobre un mateix pla.

Suposem ara que $\mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t) \neq \mathbf{0}$. Llavors, fent servir la segona equació del sistema (5.2), trobem que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) = \mathbf{r}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) = Gm_3 \left(\frac{\mathbf{u}(t)}{\|\boldsymbol{\rho}(t) - \frac{m_1}{\eta} \mathbf{r}(t)\|^3} - \frac{\mathbf{u}(t)}{\|\boldsymbol{\rho}(t) + \frac{m_2}{\eta} \mathbf{r}(t)\|^3} \right) = \mathbf{0},$$

és a dir, el vector $\mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t) \neq \mathbf{0}$ és un vector constant, i a més

$$\mathbf{r}(t) \cdot (\mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) = 0, \quad \boldsymbol{\rho}(t) \cdot (\mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) = 0.$$

Així, en aquest cas tot el moviment es troba sobre el pla que té per vector normal $\mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)$. La proposició queda demostrada. \square

5.2 El problema dels tres cossos restringit (circular i pla)

En aquest apartat ens centrarem en estudiar el problema dels tres cossos *restringit*. Farem tres hipòtesis, una d'elles per raons de simplificació de les equacions, i dues d'elles per estudiar simplement solucions particulars del problema.

Hipòtesi 5.4 (Problema restringit). A partir d'ara, suposarem que la massa m_3 del sistema és menyspreable respecte a les altres dues masses m_1, m_2 .

Matemàticament, posarem $m_3 = 0$ en el sistema d'equacions diferencials (5.2). Equivalentment, $M = \eta$.

⁶Resolució de l'exercici 7.1. de [6, Capítol 2].

Sota la hipòtesi 5.4, el sistema d'equacions diferencials que hem de resoldre és ara

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{0}, \\ \ddot{\mathbf{r}}(t) = -GM \frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|^3}, \\ \ddot{\boldsymbol{\rho}}(t) = -Gm_1 \frac{\boldsymbol{\rho}(t) + \frac{m_2}{M} \mathbf{r}(t)}{\|\boldsymbol{\rho}(t) + \frac{m_2}{M} \mathbf{r}(t)\|^3} - Gm_2 \frac{\boldsymbol{\rho}(t) - \frac{m_1}{M} \mathbf{r}(t)}{\|\boldsymbol{\rho}(t) - \frac{m_1}{M} \mathbf{r}(t)\|^3} \end{cases} \quad (5.3)$$

amb les condicions inicials

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0 &= \frac{m_1}{M} \mathbf{r}_{1,0} + \frac{m_2}{M} \mathbf{r}_{2,0}, & \mathbf{V}_0 &= \frac{m_1}{M} \mathbf{v}_{1,0} + \frac{m_2}{M} \mathbf{v}_{2,0}, \\ \mathbf{r}_0 &:= \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_{2,0} - \mathbf{r}_{1,0}, & \mathbf{v}_0 &:= \dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_{2,0} - \mathbf{v}_{1,0}, \\ \boldsymbol{\rho}_0 &:= \boldsymbol{\rho}(0) = \mathbf{r}_{3,0} - \mathbf{R}_0, & \mathbf{w}_0 &:= \dot{\boldsymbol{\rho}}(0) = \mathbf{v}_{3,0} - \mathbf{V}_0. \end{aligned}$$

Com ja hem comentat diversos cops, la primera de les equacions del sistema (5.3) és fàcil de resoldre, i té per solució

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_0 t.$$

Ara, el que veiem és que en el problema restringit, la segona equació del sistema (5.3) és exactament l'equació diferencial que teniem en el problema dels dos cossos. Això ens està dient que els cossos 1 i 2, anomenats també *primaris*, es comporten com un sistema aïllat de dos cossos, sense que els hi afecti la força gravitatòria del tercer cos. Ja hem solucionat aquesta equació en el Capítol 4.

La segona hipòtesi que farem és suposar que el moviment dels dos primaris és el·líptic al voltant del seu centre de masses, amb la mateixa freqüència angular.

Hipòtesi 5.5 (Moviment el·líptic dels primaris). A partir d'ara, suposarem que el moviment dels cossos 1 i 2 és un moviment el·líptic al voltant del seu centre de masses.

Matemàticament, suposarem que \mathbf{r} és una solució de l'equació diferencial (4.3) de la forma

$$\mathbf{r}(t) = \cos(\omega t) \mathbf{v}_1 + \sin(\omega t) \mathbf{v}_2$$

per a certs vectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$, i $\omega \in (0, \infty)$.

Proposició 5.6 (Moviment circular). *Sota la hipòtesi 5.5, tenim:*

- $\mathbf{v}_1 = \mathbf{r}_0$ i $\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{v}_0}{\omega}$.
- Necessàriament els vectors \mathbf{r}_0 i \mathbf{v}_0 han de ser ortogonals, i a més $\|\mathbf{v}_0\| = \omega \|\mathbf{r}_0\|$.
- $\omega^2 = \frac{GM}{\|\mathbf{r}_0\|^3}$.
- Els dos primaris es troben sempre sobre el pla π amb vector normal $\mathbf{L}_0 = \mathbf{r}_0 \times \mu \mathbf{v}_0$, que és necessàriament diferent de $\mathbf{0}$ per b).

Recordem que $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{M}$.

Així, la proposició ens dóna condicions necessàries que ens imposa la hipòtesi 5.5 sobre les condicions inicials: els vectors \mathbf{r}_0 i \mathbf{v}_0 han de ser *perpendiculars*, i a més $\|\mathbf{v}_0\| = \omega\|\mathbf{r}_0\|$; és a dir, estem estudiant solucions les quals aquestes condicions es compleixen. Dit d'una altra manera, el moviment dels primaris ha de ser *circular*. És fàcil veure que aquestes condicions són també *suficients*; és a dir, si es compleixen a), b) i c) de la proposició (la condició d) és immediata de les altres tres), llavors la solució $\mathbf{r}(t)$ proposada és efectivament una solució de l'equació (4.3) amb les corresponents condicions inicials.

Demostració de la proposició 5.6. Hem de garantir que la corba

$$\mathbf{r}(t) = \cos(\omega t)\mathbf{v}_1 + \sin(\omega t)\mathbf{v}_2$$

és solució de l'equació (4.3). Si derivem, tenim

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = -\omega \sin(\omega t)\mathbf{v}_1 + \omega \cos(\omega t)\mathbf{v}_2, \quad \ddot{\mathbf{r}}(t) = -\omega^2 \cos(\omega t)\mathbf{v}_1 - \omega^2 \sin(\omega t)\mathbf{v}_2 = -\omega^2 \mathbf{r}(t).$$

Fent servir les condicions inicials, trobem que

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0) = \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}(0) = \omega \mathbf{v}_2.$$

Això demostra a). Si ara imposem que $\mathbf{r}(t)$ compleix l'equació (4.3), trobem

$$-\omega^2 \mathbf{r}(t) = -GM \frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|^3}.$$

És a dir, $\omega^2 = \frac{GM}{\|\mathbf{r}(t)\|^3}$. Això ens diu dues coses: la primera és que $\|\mathbf{r}(t)\|$ ha de ser constant, i, per tant, igual a $\|\mathbf{r}_0\|$; la segona és que llavors $\omega^2 = \frac{GM}{\|\mathbf{r}_0\|^3}$, que és c).

Calculem ara $\|\mathbf{r}(t)\|$ i ho igualem a $\|\mathbf{r}_0\|$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}(t)\|^2 &= \cos^2(\omega t)\|\mathbf{v}_1\|^2 + \sin^2(\omega t)\|\mathbf{v}_2\|^2 + 2 \sin(\omega t) \cos(\omega t) \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ &= \cos^2(\omega t)\|\mathbf{r}_0\|^2 + \frac{1}{\omega^2} \sin^2(\omega t)\|\mathbf{v}_0\|^2 + \frac{2}{\omega} \sin(\omega t) \cos(\omega t) \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0 = \|\mathbf{r}_0\|^2. \end{aligned}$$

Posant $t = \frac{\pi}{2\omega}$, trobem que $\frac{1}{\omega^2}\|\mathbf{v}_0\|^2 = \|\mathbf{r}_0\|^2$. Això demostra la segona part de b). Sabent això, deduïm que

$$\frac{2}{\omega} \sin(\omega t) \cos(\omega t) \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0 = 0,$$

és a dir $\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0 = 0$, que és la primera part de b).

Finalment, d) es segueix del Lema 4.5. □

Si calculem el vector excentricitat, obtenim $\mathbf{e}(t) = \mathbf{0}$, és a dir, tenim precisament un moviment circular dels dos primaris.

L'última hipòtesi que farem és suposar que el tercer cos es troba sempre sobre el pla π del moviment dels dos primaris.

Hipòtesi 5.7 (Moviment pla dels tres cossos). A partir d'ara, suposarem que el moviment dels tres cossos és un moviment pla, és a dir, que els tres cossos es troben sempre sobre un mateix pla (que ha de ser necessàriament el pla π).

Matemàticament, suposarem que

$$\boldsymbol{\rho}(t) \cdot \mathbf{L}_0 = 0.$$

Proposició 5.8. *Sota la hipòtesi 5.7, tenim*

$$\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \mathbf{L}_0 = 0, \quad \mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{L}_0 = 0. \quad (5.4)$$

El recíproc és també cert en un cert interval de temps; és a dir, si es compleixen les condicions (5.4), i si $\boldsymbol{\rho}(t)$ és solució de la tercera equació de (5.3), llavors es compleix la hipòtesi 5.7.

Com abans, aquesta proposició ens dóna condicions necessàries que ens imposa la hipòtesi 5.7 sobre les condicions inicials $\boldsymbol{\rho}_0$ i \mathbf{w}_0 , que a més a més han de ser suficients. És a dir, estem estudiant solucions les quals aquestes condicions es compleixen.

Demostració de la Proposició 5.8. Derivant la condició $\boldsymbol{\rho}(t) \cdot \mathbf{L}_0 = 0$ trobem $\dot{\boldsymbol{\rho}}(t) \cdot \mathbf{L}_0 = 0$. Posant $t = 0$ trobem les equacions (5.4).

Per veure el recíproc, posem $F(t) := \boldsymbol{\rho}(t) \cdot \mathbf{L}_0$. Llavors les equacions (5.4) ens diuen que $F(0) = \dot{F}(0) = 0$. Calculem ara $\ddot{F}(t)$ fent servir la tercera de les equacions (5.3):

$$\begin{aligned} \ddot{F}(t) &= \ddot{\boldsymbol{\rho}}(t) \cdot \mathbf{L}_0 = \left(-Gm_1 \frac{\boldsymbol{\rho}(t) + \frac{m_2}{M}\mathbf{r}(t)}{\|\boldsymbol{\rho}(t) + \frac{m_2}{M}\mathbf{r}(t)\|^3} - Gm_2 \frac{\boldsymbol{\rho}(t) - \frac{m_1}{M}\mathbf{r}(t)}{\|\boldsymbol{\rho}(t) - \frac{m_1}{M}\mathbf{r}(t)\|^3} \right) \cdot \mathbf{L}_0 \\ &= \left(-\frac{Gm_1}{\|\boldsymbol{\rho}(t) + \frac{m_2}{M}\mathbf{r}(t)\|^3} - \frac{Gm_2}{\|\boldsymbol{\rho}(t) - \frac{m_1}{M}\mathbf{r}(t)\|^3} \right) \boldsymbol{\rho}(t) \cdot \mathbf{L}_0 =: g(t)F(t). \end{aligned}$$

És a dir, la funció $F(t)$ compleix l'equació diferencial $\ddot{F}(t) = g(t)F(t)$. Observem que la funció constantment zero també compleix tant aquesta mateixa equació diferencial com les condicions inicials que compleix F . Així, per unicitat de solució, tenim que necessàriament $\boldsymbol{\rho}(t) \cdot \mathbf{L}_0 = F(t) = 0$, com volíem demostrar. \square

Continuem estudiant el problema, tot suposant les hipòtesis 5.4, 5.5 i 5.7. El que farem és reduir el problema utilitzant coordenades sobre aquest nou pla π . Necessitem, però, seleccionar molt bé quins eixos agafem sobre aquest pla. El que utilitzarem serà un *sistema de coordenades giratori*, és a dir, utilitzarem com a base ortonormal de \mathbb{R}^3 la donada per

$$\left\{ \frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|}, \frac{\mathbf{L}_0 \times \mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{L}_0 \times \mathbf{r}(t)\|}, \frac{\mathbf{L}_0}{\|\mathbf{L}_0\|} \right\}.$$

Explícitament,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|} &= \cos(\omega t) \frac{\mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r}_0\|} + \sin(\omega t) \frac{\mathbf{v}_0}{\|\mathbf{v}_0\|}, \\ \frac{\mathbf{L}_0 \times \mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{L}_0 \times \mathbf{r}(t)\|} &= -\sin(\omega t) \frac{\mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r}_0\|} + \cos(\omega t) \frac{\mathbf{v}_0}{\|\mathbf{v}_0\|}, \\ \frac{\mathbf{L}_0}{\|\mathbf{L}_0\|} &= \frac{\mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r}_0\|} \times \frac{\mathbf{v}_0}{\|\mathbf{v}_0\|}. \end{aligned}$$

Escrivim la corba $\boldsymbol{\rho}$ com

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \|\mathbf{r}_0\|a(t) \frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|} + \|\mathbf{r}_0\|b(t) \frac{\mathbf{L}_0 \times \mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{L}_0 \times \mathbf{r}(t)\|} + \|\mathbf{r}_0\|c(t) \frac{\mathbf{L}_0}{\|\mathbf{L}_0\|}$$

per a certes funcions $a, b, c : I \rightarrow \mathbb{R}$. Hem decidit fer servir les coordenades $\|\mathbf{r}_0\|a, \|\mathbf{r}_0\|b$ i $\|\mathbf{r}_0\|c$, ja que llavors a, b, c són quantitats adimensionals. De fet, com que la corba $\boldsymbol{\rho}$ està continguda en el pla π , tenim que $c(t) = 0$. Ens queda

$$\boldsymbol{\rho}(t) = (a(t) \cos(\omega t) - b(t) \sin(\omega t)) \mathbf{r}_0 + (a(t) \sin(\omega t) + b(t) \cos(\omega t)) \frac{\mathbf{v}_0}{\omega}.$$

Teorema 5.9. *La tercera equació diferencial de (5.3) és equivalent al sistema d'equacions diferencials*

$$\begin{cases} \ddot{a}(t) - 2\omega\dot{b}(t) - \omega^2 a(t) = -\omega^2(1-p) \frac{a(t)+p}{((a(t)+p)^2+b(t)^2)^{3/2}} - \omega^2 p \frac{a(t)-1+p}{((a(t)-1+p)^2+b(t)^2)^{3/2}}, \\ \ddot{b}(t) + 2\omega\dot{a}(t) - \omega^2 b(t) = -\omega^2(1-p) \frac{b(t)}{((a(t)+p)^2+b(t)^2)^{3/2}} - \omega^2 p \frac{b(t)}{((a(t)-1+p)^2+b(t)^2)^{3/2}} \end{cases} \quad (5.5)$$

on hem fet servir el valor $\omega^2 = \frac{GM}{\|\mathbf{r}_0\|^3}$ i definit els paràmetres $p = \frac{m_2}{M}$, $1-p = \frac{m_1}{M}$.

Demostració. Teniem

$$\boldsymbol{\rho}(t) = (a(t) \cos(\omega t) - b(t) \sin(\omega t)) \mathbf{r}_0 + (a(t) \sin(\omega t) + b(t) \cos(\omega t)) \frac{\mathbf{v}_0}{\omega}.$$

Si derivem dues vegades trobem

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{\rho}}(t) = & (\ddot{a}(t) - 2\omega\dot{b}(t) - \omega^2 a(t)) \cos(\omega t) \mathbf{r}_0 + (-\ddot{b}(t) - 2\omega\dot{a}(t) + \omega^2 b(t)) \sin(\omega t) \mathbf{r}_0 \\ & + (\ddot{a}(t) - 2\omega\dot{b}(t) - \omega^2 a(t)) \sin(\omega t) \frac{\mathbf{v}_0}{\omega} + (\ddot{b}(t) + 2\omega\dot{a}(t) - \omega^2 b(t)) \cos(\omega t) \frac{\mathbf{v}_0}{\omega}. \end{aligned}$$

Per altra banda,

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\rho}(t) + \frac{m_2}{M} \mathbf{r}(t)\|^2 &= (a(t) \cos(\omega t) - b(t) \sin(\omega t) + p \cos(\omega t))^2 \|\mathbf{r}_0\|^2 \\ &\quad + (a(t) \sin(\omega t) + b(t) \cos(\omega t) + p \sin(\omega t))^2 \frac{\|\mathbf{v}_0\|^2}{\omega^2} \\ &= \|\mathbf{r}_0\|^2 ((a(t)+p)^2 + b(t)^2), \\ \|\boldsymbol{\rho}(t) - \frac{m_1}{M} \mathbf{r}(t)\|^2 &= (a(t) \cos(\omega t) - b(t) \sin(\omega t) - (1-p) \cos(\omega t))^2 \|\mathbf{r}_0\|^2 \\ &\quad + (a(t) \sin(\omega t) + b(t) \cos(\omega t) - (1-p) \sin(\omega t))^2 \frac{\|\mathbf{v}_0\|^2}{\omega^2} \\ &= \|\mathbf{r}_0\|^2 ((a(t)-1+p)^2 + b(t)^2). \end{aligned}$$

Substituint aquests canvis a la tercera equació de (5.3), igualant les components dels vectors de \mathbf{r}_0 i $\frac{\mathbf{v}_0}{\omega}$ (recordem que són ortogonals), i igualant finalment les components que acompanyen al cosinus i al sinus de cada una de les equacions, trobem quatre equacions diferencials que, de fet, són dues (n'hi ha dues de repetides), que són les equacions de l'enunciat. \square

Definició 5.10. Definim el *potencial de Jacobi* com la funció

$$\Phi : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(a, b) = \frac{1-p}{((a+p)^2+b^2)^{1/2}} + \frac{p}{((a-1+p)^2+b^2)^{1/2}} + \frac{a^2+b^2}{2}$$

definit en un obert de \mathbb{R}^2 ; exactament $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-p, 0), (1-p, 0)\}$.

Amb el potencial de Jacobi, el sistema d'equacions (5.5) es pot escriure de forma més compacta com

$$\begin{cases} \ddot{a}(t) - 2\omega\dot{b}(t) = \omega^2 \frac{\partial \Phi}{\partial a}(a(t), b(t)), \\ \ddot{b}(t) + 2\omega\dot{a}(t) = \omega^2 \frac{\partial \Phi}{\partial b}(a(t), b(t)). \end{cases} \quad (5.6)$$

Un comentari important és el següent: degut a la hipòtesi 5.4, les integrals primeres que hem trobat al principi de tot (el moment angular total i l'energia total) ja no són ara integrals primeres per al sistema (5.6), perquè aquest sistema s'ha derivat del sistema (5.3), que *no* és el sistema inicial (5.2), només és una aproximació (posant $m_3 = 0$). Sembla que hem perdut tota la informació que ens donaven les $3 + 1 = 4$ integrals primeres. Tot i així, però, el nou sistema (5.6) sí que admet una integral primera, anomenada *integral de Jacobi*.

Teorema 5.11. *Suposem que la corba*

$$I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (a(t), b(t))$$

és solució del sistema d'equacions diferencials (5.6). Llavors la quantitat

$$J : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad J(t) := 2\omega^2 \Phi(a(t), b(t)) - (\dot{a}(t))^2 + \dot{b}(t)^2$$

és constant. Aquesta integral primera s'anomena integral de Jacobi, i el valor de la constant s'anomena constant de Jacobi, que escriurem com $J_0 := J(0)$.

Demostració. Derivem:

$$\begin{aligned} \dot{J}(t) &= 2\omega^2 \dot{\Phi}(a(t), b(t)) - 2\dot{a}(t)\ddot{a}(t) - 2\dot{b}(t)\ddot{b}(t) \\ &= 2\omega^2 \frac{\partial \Phi}{\partial a}(a(t), b(t)) \cdot \dot{a}(t) + 2\omega^2 \frac{\partial \Phi}{\partial b}(a(t), b(t)) \cdot \dot{b}(t) - 2\dot{a}(t)\ddot{a}(t) - 2\dot{b}(t)\ddot{b}(t) \\ &= 2(\ddot{a}(t) - 2\omega\dot{b}(t))\dot{a}(t) + 2(\ddot{b}(t) + 2\omega\dot{a}(t))\dot{b}(t) - 2\dot{a}(t)\ddot{a}(t) - 2\dot{b}(t)\ddot{b}(t) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

En les següents seccions trobarem solucions explícites del sistema (5.6), i estudiarem també el comportament de les solucions en general.

5.2.1 Punts d'equilibri: els punts de Lagrange

En aquesta secció buscarem solucions de (5.6) que siguin *punts d'equilibri* del sistema, és a dir, buscarem solucions constants $a(t) \equiv a$, $b(t) \equiv b$. Físicament, estem buscant solucions tals que el cos 3 estigui en repòs respecte al sistema de referència giratori introduït anteriorment, és a dir, busquem solucions les quals el cos 3 es mogui en moviment circular igual que els dos primaris.

Hem de resoldre el sistema

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a}(a, b) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b}(a, b) = 0,$$

és a dir,

$$\begin{cases} -(1-p) \frac{a+p}{((a+p)^2+b^2)^{3/2}} - p \frac{a-1+p}{((a-1+p)^2+b^2)^{3/2}} + a = 0 \\ -(1-p) \frac{b}{((a+p)^2+b^2)^{3/2}} - p \frac{b}{((a-1+p)^2+b^2)^{3/2}} + b = 0. \end{cases} \quad (5.7)$$

Teorema 5.12 (Punts de Lagrange). *Tenim exactament 5 solucions de les equacions (5.7), anomenats punts de Lagrange L_1, L_2, L_3, L_4 i L_5 . Aquests venen donats per:*

(1) $L_1 = (x_1 - p, 0)$, amb x_1 l'única solució en $(-\infty, 0)$ de la quíntica

$$x^5 - (2+p)x^4 + (1+2p)x^3 + (1-p)x^2 - 2(1-p)x + (1-p) = 0.$$

(2) $L_2 = (x_2 - p, 0)$, amb x_2 l'única solució en $(1, \infty)$ de la quíntica

$$x^5 - (2+p)x^4 + (1+2p)x^3 - (1+p)x^2 + 2(1-p)x - (1-p) = 0.$$

(3) $L_3 = (x_3 - p, 0)$, amb x_3 la única solució en $(0, 1)$ de la quíntica

$$x^5 - (2+p)x^4 + (1+2p)x^3 - (1-p)x^2 + 2(1-p)x - (1-p) = 0.$$

(4) $L_4 = (\frac{1}{2} - p, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

(5) $L_5 = (\frac{1}{2} - p, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

En la literatura, els punts de Lagrange es troben indexats, segons l'enumeració que hem fet servir, sota el conveni que $m_2 \leq m_1$, és a dir, $0 < p \leq \frac{1}{2}$.

Demostració. Anem a trobar punts (a, b) satisfent el sistema (5.7) suposant primer que $b \neq 0$. Llavors de la segona equació de (5.7) podem treure factor comú b , i deduïm que

$$-(1-p) \frac{1}{((a+p)^2 + b^2)^{3/2}} - p \frac{1}{((a-1+p)^2 + b^2)^{3/2}} + 1 = 0. \quad (5.8)$$

Fent servir aquesta equació en la primera equació de (5.7) trobem

$$-(1-p) \frac{p}{((a+p)^2 + b^2)^{3/2}} + p \frac{1-p}{((a-1+p)^2 + b^2)^{3/2}} = 0.$$

Arreglant, trobem

$$(a+p)^2 = (a-1+p)^2.$$

L'única solució és $a = \frac{1}{2} - p$. Llavors, per a trobar b , substituïm a (5.8) i trobem

$$b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aquests són els punts L_4 i L_5 .

Suposem ara que $b = 0$. La segona equació de (5.7) ens queda $0 = 0$, i la primera equació diu, fent el canvi $x = a + p$,

$$-(1-p) \frac{x}{|x|^3} - p \frac{x-1}{|x-1|^3} + x - p = 0.$$

Hem de distingir casos per a estudiar el valor absolut.

- $x - 1 > 0$: en aquest cas $x > 0$ i l'equació a resoldre és

$$-\frac{1-p}{x^2} - \frac{p}{(x-1)^2} + x - p = 0.$$

Si simplifiquem,

$$x^5 - (2+p)x^4 + (1+2p)x^3 - (1+p)x^2 + 2(1-p)x - (1-p) = 0.$$

Per veure que només té una arrel complint $x - 1 > 0$, fem el canvi $y = x - 1$ i trobem

$$y^5 + (3-p)y^4 + (3-2p)y^3 - py^2 - 2py - p = 0.$$

Per la regla de signes de Descartes, aquest polinomi té una única arrel positiva, que és la que busquem. Aquest cas ens dóna el punt L_2 .

- $x - 1 < 0$ i $x > 0$: en aquest cas l'equació a resoldre és

$$-\frac{1-p}{x^2} + \frac{p}{(x-1)^2} + x - p = 0.$$

Si simplifiquem,

$$x^5 - (2+p)x^4 + (1+2p)x^3 - (1-p)x^2 + 2(1-p)x - (1-p) = 0.$$

Pel Teorema de Sturm, aquest polinomi té exactament una arrel en l'interval $(0, 1)$, que és la que busquem. Aquest cas ens dóna el punt L_3 .

- $x < 0$: en aquest cas $x - 1 < 0$ i l'equació a resoldre és

$$\frac{1-p}{x^2} + \frac{p}{(x-1)^2} + x - p = 0.$$

Si simplifiquem,

$$x^5 - (2+p)x^4 + (1+2p)x^3 + (1-p)x^2 - 2(1-p)x + (1-p) = 0.$$

Per veure que només té una arrel negativa, fem el canvi $y = -x$ i trobem

$$y^5 + (2+p)y^4 + (1+2p)y^3 - (1-p)y^2 - 2(1-p)y - (1-p) = 0.$$

Per la regla de signes de Descartes, aquest polinomi té una única arrel positiva, que és la que busquem. Aquest cas ens dóna el punt L_1 . \square

Exemples 5.13. A continuació presentem exemples de sistemes, alguns amb objectes celestes del nostre sistema solar, als que els hi calcularem els respectius punts de Lagrange.

- 1) Suposem que $m_1 = m_2$. Llavors $p = \frac{1}{2}$, i els punts de Lagrange són

$$L_1 = (-1.198406, 0), \quad L_2 = (1.198406, 0), \quad L_3 = (0, 0),$$

$$L_4 = (0, 0.866025), \quad L_5 = (0, -0.866025).$$

- 2) Suposem ara que el cos 1 és la Terra i el cos 2 és la Lluna. Aquí $m_1 = 5.9722 \cdot 10^{24}$ kg i $m_2 = 7.3477 \cdot 10^{22}$ kg, per tant $p = 0.012154$, i els punts de Lagrange són

$$L_1 = (-1.005064, 0), \quad L_2 = (1.155695, 0), \quad L_3 = (0.836898, 0),$$

$$L_4 = (0.487846, 0.866025), \quad L_5 = (0.487846, -0.866025).$$

- 3) Suposem ara que el cos 1 és el Sol i el cos 2 és la Terra. Aquí $m_1 = 1.9885 \cdot 10^{30}$ kg i $m_2 = 5.9722 \cdot 10^{24}$ kg, per tant $p = 3.003360 \cdot 10^{-6}$, i els punts de Lagrange són

$$L_1 = (-1.000001, 0), \quad L_2 = (1.010037, 0), \quad L_3 = (0.990027, 0),$$

$$L_4 = (0.499997, 0.866025), \quad L_5 = (0.499997, -0.866025).$$

- 4) Suposem ara que el cos 1 és el Sol i el cos 2 és Júpiter. Aquí $m_1 = 1.9885 \cdot 10^{30}$ kg i $m_2 = 1.8981 \cdot 10^{27}$ kg, per tant $p = 9.536283 \cdot 10^{-4}$, i els punts de Lagrange són

$$L_1 = (-1.000397, 0), \quad L_2 = (1.068836, 0), \quad L_3 = (0.932363, 0),$$

$$L_4 = (0.499046, 0.866025), \quad L_5 = (0.499046, -0.866025).$$

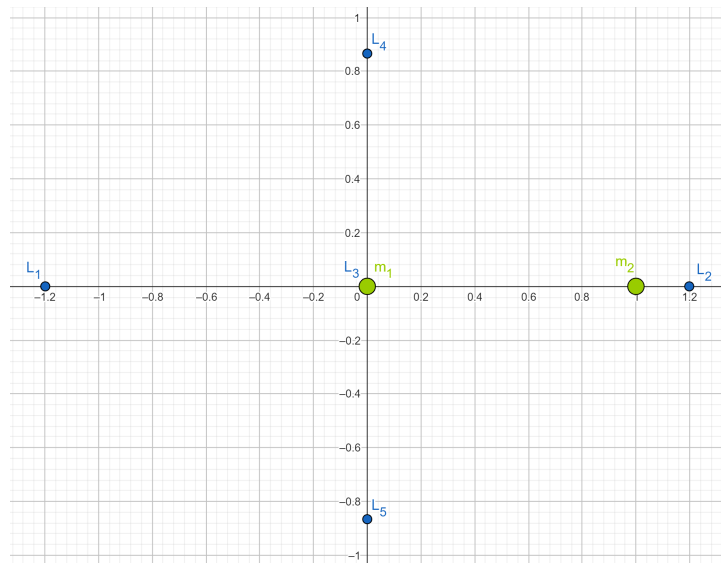


Figura 7: Representació dels punts de Lagrange de l'exemple 5.13, 1).

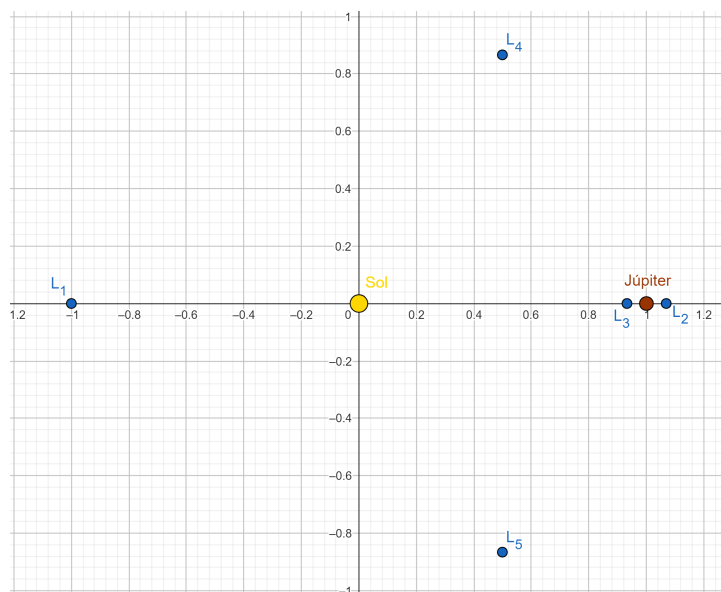


Figura 8: Representació dels punts de Lagrange de l'exemple 5.13, 4).

5.2.2 Corbes de velocitat nul·la: regions possibles de moviment

En aquesta secció estudiarem les regions possibles de moviment del cos 3. Més concretament, donades unes condicions inicials $\boldsymbol{\rho}_0, \mathbf{w}_0$ (complint les condicions de les hipòtesis 5.4, 5.5 i 5.7), resulta que no totes les regions del pla π són accessibles per al moviment del cos 3. Estudiarem aquelles regions per les quals és possible el moviment o, altrament, veurem quines d'aquelles *no* són possibles.

Recordem que la integral de Jacobi venia definida com a

$$J : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad J(t) = 2\omega^2\Phi(a(t), b(t)) - (\dot{a}(t)^2 + \dot{b}(t)^2).$$

Teorema 5.14. *Suposem que la corba $I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (a(t), b(t))$ és solució del sistema d'equacions diferencials (5.6). Llavors sempre es compleix la desigualtat*

$$J^* := \frac{J_0}{2\omega^2} \leq \frac{1-p}{((a(t)+p)^2 + b(t)^2)^{1/2}} + \frac{p}{((a(t)-1+p)^2 + b(t)^2)^{1/2}} + \frac{a(t)^2 + b(t)^2}{2},$$

on recordem $J_0 = J(0) = 2\omega^2\Phi(a_0, b_0) - (\dot{a}_0^2 + \dot{b}_0^2)$, amb

$$a_0 := a(0) = \frac{\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r}_0\|^2}, \quad b_0 := b(0) = \frac{\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \mathbf{v}_0}{\omega\|\mathbf{r}_0\|^2},$$

$$\dot{a}_0 := \dot{a}(0) = \frac{\mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r}_0\|^2} + b_0\omega, \quad \dot{b}_0 := \dot{b}(0) = \frac{\mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{v}_0}{\omega\|\mathbf{r}_0\|^2} - a_0\omega.$$

Demostració. Calculem primer la constant de Jacobi J_0 en termes de les condicions inicials. Recordem que

$$\boldsymbol{\rho}(t) = (a(t) \cos(\omega t) - b(t) \sin(\omega t))\mathbf{r}_0 + (a(t) \sin(\omega t) + b(t) \cos(\omega t))\frac{\mathbf{v}_0}{\omega},$$

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}(t) = (\dot{a}(t) \cos(\omega t) - a(t)\omega \sin(\omega t) - \dot{b}(t) \sin(\omega t) - b(t)\omega \cos(\omega t))\mathbf{r}_0$$

$$+ (\dot{a}(t) \sin(\omega t) + a(t)\omega \cos(\omega t) + \dot{b}(t) \cos(\omega t) - b(t)\omega \sin(\omega t))\frac{\mathbf{v}_0}{\omega}.$$

En $t = 0$ trobem

$$\boldsymbol{\rho}_0 = \boldsymbol{\rho}(0) = a_0\mathbf{r}_0 + b_0\frac{\mathbf{v}_0}{\omega}, \quad \mathbf{w}_0 = \dot{\boldsymbol{\rho}}(0) = (\dot{a}_0 - b_0\omega)\mathbf{r}_0 + (a_0\omega + \dot{b}_0)\frac{\mathbf{v}_0}{\omega}.$$

Fent productes escalars amb \mathbf{r}_0 i \mathbf{v}_0 i fent servir la Proposició 5.6, obtenim les fórmules per a a_0, \dot{a}_0, b_0 i \dot{b}_0 , i per tant el valor de J_0 .

La desigualtat de l'enunciat ve de l'observació $\dot{a}(t)^2 + \dot{b}(t)^2 \geq 0$, és a dir,

$$J(t) = 2\omega^2\Phi(a(t), b(t)) - (\dot{a}(t)^2 + \dot{b}(t)^2) \leq 2\omega^2\Phi(a(t), b(t)). \quad \square$$

Definició 5.15. Donades condicions inicials $\boldsymbol{\rho}_0$ i \mathbf{w}_0 (i, per tant, el valor $J^* = \frac{J_0}{2\omega^2}$ definit en el teorema anterior), definim la *regió possible del moviment* com la regió

$$\text{Pos}(\boldsymbol{\rho}_0, \mathbf{w}_0) := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid J^* \leq \Phi(a, b)\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Així, el Teorema 5.14 ens assegura que, si la corba $I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (a(t), b(t))$ és solució del sistema d'equacions diferencials (5.6) amb condicions inicials $\boldsymbol{\rho}_0$ i \mathbf{w}_0 , llavors la seva imatge està sempre continguda en $\text{Pos}(\boldsymbol{\rho}_0, \mathbf{w}_0)$.

Definició 5.16. Donades condicions inicials ρ_0 i \mathbf{w}_0 (i, per tant, el valor $J^* = \frac{J_0}{2\omega^2}$ definit en el teorema anterior), definim la *corba de velocitat nul·la* com la frontera de la regió possible del moviment, és a dir,

$$\text{Nul}(\rho_0, \mathbf{w}_0) := \partial\text{Pos}(\rho_0, \mathbf{w}_0) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid J^* = \Phi(a, b)\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Com a comentari, el nom *corba de velocitat nul·la* prové del fet que, en tenir igualtat, necessàriament el terme $\dot{a}(t)^2 + \dot{b}(t)^2$ (que podem pensar com una velocitat en les coordenades (a, b)) és nul.

Exemples 5.17. A continuació presentem dos exemples de possibles corbes de nivell, per a diferents valors de J^* .

- 1) Suposem que $m_1 = m_2$. Llavors $p = \frac{1}{2}$. Les següents figures mostren diverses corbes de velocitat nul·la, per a diferents valors de J^* .

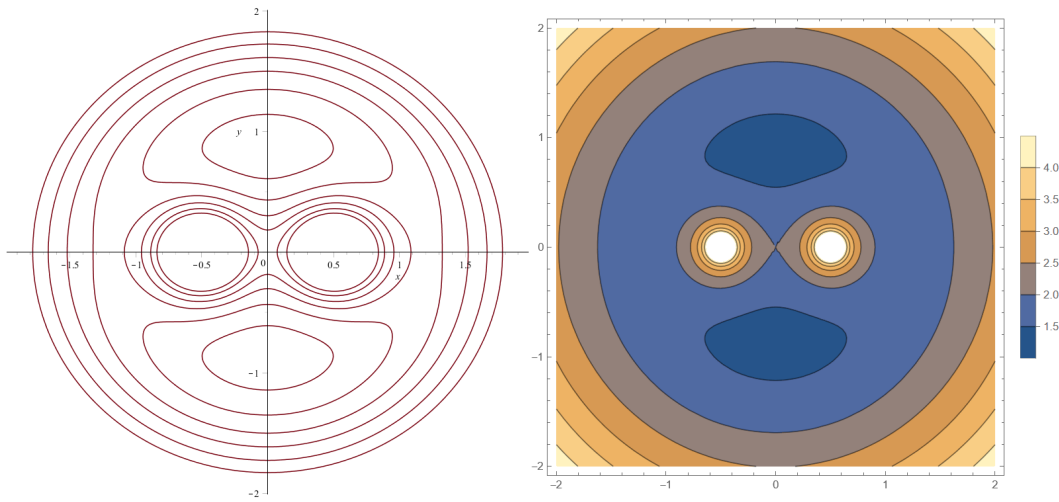


Figura 9: Diverses corbes de velocitat nul·la per al cas $p = 0.5$ i diferents valors de J^* .

- 2) Agafem el sistema Terra - Lluna. Segons l'exemple 5.13 2), tenim $p = 0.012154$. Les següents figures mostren diverses corbes de velocitat nul·la, per a diferents valors de J^* .

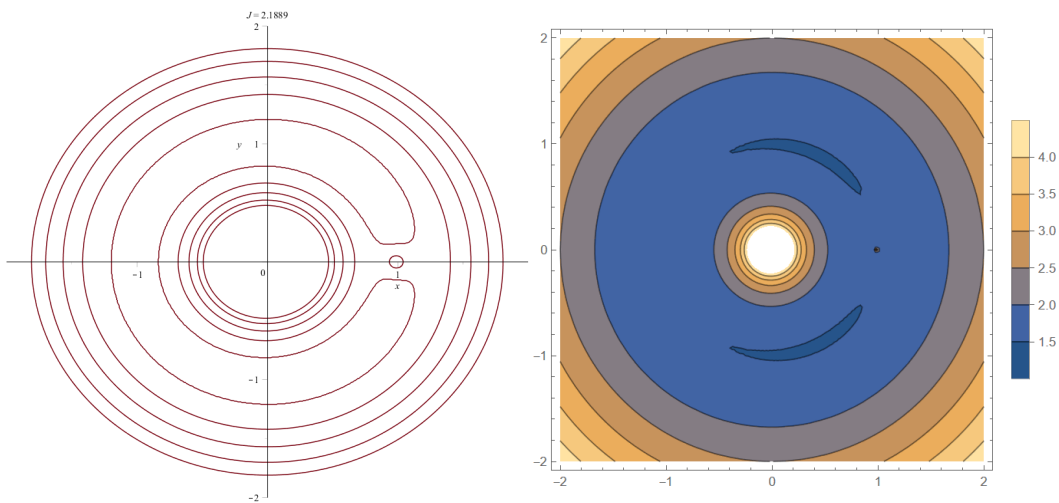


Figura 10: Diverses corbes de velocitat nul·la per al cas $p = 0.012154$ i diferents valors de J^* .

Per acabar la secció, demostrarem que existeix una constant, posem C , de manera que per a qualssevol condicions inicials $\boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{w}_0$ complint $J^* < C$, el conjunt $\text{Pos}(\boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{w}_0)$ és tot \mathbb{R}^2 . Aquest valor C és, de fet, $\frac{3-p(1-p)}{2}$.

Teorema 5.18. *Suposem que tenim condicions inicials $\boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{w}_0$ complint $J^* < \frac{3-p(1-p)}{2}$. Llavors*

$$\text{Pos}(\boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{w}_0) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid J^* \leq \Phi(a, b)\} = \mathbb{R}^2.$$

A més,

$$\text{Nul}(\boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{w}_0) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid J^* = \Phi(a, b)\} = \emptyset.$$

En el valor $J^* = \frac{3-p(1-p)}{2}$, trobem exactament

$$\text{Nul}(\boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{w}_0) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid J^* = \Phi(a, b)\} = \{L_4, L_5\}.$$

Demostració. Demostrarem que la funció $\Phi(a, b)$ té un mínim global, que val precisament $\frac{3-p(1-p)}{2}$. Així, per a valors de J^* estrictament menors que aquest valor mínim, clarament la desigualtat $J^* \leq \Phi(a, b)$ sempre es compleix, i a més mai podem tenir la igualtat. Així la primera part del teorema quedarà demostrada.

Recordem que

$$\Phi(a, b) = \frac{1-p}{((a+p)^2 + b^2)^{1/2}} + \frac{p}{((a-1+p)^2 + b^2)^{1/2}} + \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

La idea és escriure $\Phi(a, b)$ en unes altres coordenades que facin fàcil d'identificar el mínim. Definim

$$\rho_1 = ((a+p)^2 + b^2)^{1/2}, \quad \rho_2 = ((a-1+p)^2 + b^2)^{1/2}.$$

Llavors

$$\frac{(1-p)\rho_1^2 + p\rho_2^2}{2} = \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{p(1-p)}{2}$$

i per tant podem escriure

$$\begin{aligned} \Phi(a, b) &= \frac{1-p}{\rho_1} + \frac{p}{\rho_2} + \frac{(1-p)\rho_1^2 + p\rho_2^2}{2} - \frac{p(1-p)}{2} \\ &= (1-p)\left(\frac{\rho_1^2}{2} + \frac{1}{\rho_1}\right) + p\left(\frac{\rho_2^2}{2} + \frac{1}{\rho_2}\right) - \frac{p(1-p)}{2} \\ &= (1-p)g(\rho_1) + pg(\rho_2) - \frac{p(1-p)}{2}, \end{aligned}$$

on hem definit la funció $g(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$, definida en $(0, +\infty)$. Aquesta funció té un mínim absolut en $x = 1$, que val $\frac{3}{2}$. Així, trobem que $\Phi(a, b)$ té un mínim en $\rho_1 = \rho_2 = 1$, que val

$$(1-p)\frac{3}{2} + p\frac{3}{2} - \frac{p(1-p)}{2} = \frac{3-p(1-p)}{2}.$$

A més, solucionant $\rho_1 = \rho_2 = 1$ trobem que els mínims són exactament els punts de Lagrange L_4 i L_5 . \square

5.3 Solucions particulars: solucions de Lagrange i Euler

Per acabar el capítol calcularem solucions exactes del problema dels tres cossos, proposades per Lagrange i Euler. Per a fer-ho, tornarem al sistema d'equacions diferencials inicial

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{r}}_1(t) = Gm_2 \frac{\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)}{\|\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)\|^3} + Gm_3 \frac{\mathbf{r}_3(t) - \mathbf{r}_1(t)}{\|\mathbf{r}_3(t) - \mathbf{r}_1(t)\|^3}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_2(t) = Gm_1 \frac{\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)}{\|\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)\|^3} + Gm_3 \frac{\mathbf{r}_3(t) - \mathbf{r}_2(t)}{\|\mathbf{r}_3(t) - \mathbf{r}_2(t)\|^3}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_3(t) = Gm_1 \frac{\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_3(t)}{\|\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_3(t)\|^3} + Gm_2 \frac{\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_3(t)}{\|\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_3(t)\|^3}, \end{cases} \quad (5.9)$$

amb condicions inicials

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(0) &= \mathbf{r}_{1,0}, & \mathbf{r}_2(0) &= \mathbf{r}_{2,0}, & \mathbf{r}_3(0) &= \mathbf{r}_{3,0}, \\ \dot{\mathbf{r}}_1(0) &= \mathbf{v}_{1,0}, & \dot{\mathbf{r}}_2(0) &= \mathbf{v}_{2,0}, & \dot{\mathbf{r}}_3(0) &= \mathbf{v}_{3,0}. \end{aligned}$$

Igual que en la secció anterior, presentarem diverses hipòtesis que ens permetran resoldre completament el sistema, tot estudiant amb detall quines condicions inicials són compatibles amb aquestes hipòtesis.

Hipòtesi 5.19 (Moviments el·líptics respecte al centre de masses). A partir d'ara, suposarem que el moviment de cada cos 1, 2 i 3 és un moviment el·líptic al voltant del seu centre de masses, amb la mateixa freqüència angular.

Matemàticament, suposarem que cada corba \mathbf{r}_i és una solució de (5.9) de la forma

$$\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{R}(t) + \cos(\omega t)\mathbf{u}_i + \sin(\omega t)\mathbf{u}'_i$$

per a certs vectors $\mathbf{u}_i, \mathbf{u}'_i \in \mathbb{R}^3$, $i \in \{1, 2, 3\}$, i $\omega \in (0, \infty)$. Recordem que $\mathbf{R}(t)$ és el vector centre de masses, donat per

$$\mathbf{R}(t) = \frac{m_1}{M}\mathbf{r}_1(t) + \frac{m_2}{M}\mathbf{r}_2(t) + \frac{m_3}{M}\mathbf{r}_3(t),$$

amb $M = m_1 + m_2 + m_3$.

De fet, els vectors $\mathbf{u}_i, \mathbf{u}'_i$ es poden trobar molt fàcilment de les condicions inicials, avaluant a $t = 0$ tant les corbes com les seves derivades. Calculem

$$\dot{\mathbf{r}}_i(t) = \dot{\mathbf{R}}(t) - \omega \sin(\omega t)\mathbf{u}_i + \omega \cos(\omega t)\mathbf{u}'_i.$$

Avaluant $\mathbf{r}(t)$ i $\dot{\mathbf{r}}(t)$ en $t = 0$, trobem les condicions

$$\mathbf{r}_{i,0} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{v}_{i,0} = \dot{\mathbf{R}}_0 + \omega \mathbf{u}'_i,$$

és a dir,

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{r}_{i,0} - \mathbf{R}_0, \quad \mathbf{u}'_i = \frac{1}{\omega}(\mathbf{v}_{i,0} - \dot{\mathbf{R}}_0),$$

i per tant, sota la hipòtesi 5.19, les corbes venen donades exactament per

$$\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{R}(t) + \cos(\omega t)(\mathbf{r}_{i,0} - \mathbf{R}_0) + \sin(\omega t)\frac{1}{\omega}(\mathbf{v}_{i,0} - \dot{\mathbf{R}}_0).$$

Proposició 5.20. *Sota la hipòtesi 5.19, les condicions inicials compleixen les equacions*

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{Gm_2}{\omega^2 \|\mathbf{r}_{2,0} - \mathbf{r}_{1,0}\|^3} - \frac{Gm_3}{\omega^2 \|\mathbf{r}_{3,0} - \mathbf{r}_{1,0}\|^3}\right) \mathbf{r}_{1,0} + \frac{Gm_2}{\omega^2 \|\mathbf{r}_{2,0} - \mathbf{r}_{1,0}\|^3} \mathbf{r}_{2,0} + \frac{Gm_3}{\omega^2 \|\mathbf{r}_{3,0} - \mathbf{r}_{1,0}\|^3} \mathbf{r}_{3,0} = \mathbf{R}_0, \\ \frac{Gm_1}{\omega^2 \|\mathbf{r}_{1,0} - \mathbf{r}_{2,0}\|^3} \mathbf{r}_{1,0} + \left(1 - \frac{Gm_1}{\omega^2 \|\mathbf{r}_{1,0} - \mathbf{r}_{2,0}\|^3} - \frac{Gm_3}{\omega^2 \|\mathbf{r}_{3,0} - \mathbf{r}_{2,0}\|^3}\right) \mathbf{r}_{2,0} + \frac{Gm_3}{\omega^2 \|\mathbf{r}_{3,0} - \mathbf{r}_{2,0}\|^3} \mathbf{r}_{3,0} = \mathbf{R}_0, \\ \frac{Gm_1}{\omega^2 \|\mathbf{r}_{1,0} - \mathbf{r}_{3,0}\|^3} \mathbf{r}_{1,0} + \frac{Gm_2}{\omega^2 \|\mathbf{r}_{2,0} - \mathbf{r}_{3,0}\|^3} \mathbf{r}_{2,0} + \left(1 - \frac{Gm_1}{\omega^2 \|\mathbf{r}_{1,0} - \mathbf{r}_{3,0}\|^3} - \frac{Gm_2}{\omega^2 \|\mathbf{r}_{2,0} - \mathbf{r}_{3,0}\|^3}\right) \mathbf{r}_{3,0} = \mathbf{R}_0 \end{cases}$$

per a les posicions, i

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{Gm_2\omega}{\|\mathbf{v}_{2,0} - \mathbf{v}_{1,0}\|^3} - \frac{Gm_3\omega}{\|\mathbf{v}_{3,0} - \mathbf{v}_{1,0}\|^3}\right) \mathbf{v}_{1,0} + \frac{Gm_2\omega}{\|\mathbf{v}_{2,0} - \mathbf{v}_{1,0}\|^3} \mathbf{v}_{2,0} + \frac{Gm_3\omega}{\|\mathbf{v}_{3,0} - \mathbf{v}_{1,0}\|^3} \mathbf{v}_{3,0} = \mathbf{V}_0, \\ \frac{Gm_1\omega}{\|\mathbf{v}_{1,0} - \mathbf{v}_{2,0}\|^3} \mathbf{v}_{1,0} + \left(1 - \frac{Gm_1\omega}{\|\mathbf{v}_{1,0} - \mathbf{v}_{2,0}\|^3} - \frac{Gm_3\omega}{\|\mathbf{v}_{3,0} - \mathbf{v}_{2,0}\|^3}\right) \mathbf{v}_{2,0} + \frac{Gm_3\omega}{\|\mathbf{v}_{3,0} - \mathbf{v}_{2,0}\|^3} \mathbf{v}_{3,0} = \mathbf{V}_0, \\ \frac{Gm_1\omega}{\|\mathbf{v}_{1,0} - \mathbf{v}_{3,0}\|^3} \mathbf{v}_{1,0} + \frac{Gm_2\omega}{\|\mathbf{v}_{2,0} - \mathbf{v}_{3,0}\|^3} \mathbf{v}_{2,0} + \left(1 - \frac{Gm_1\omega}{\|\mathbf{v}_{1,0} - \mathbf{v}_{3,0}\|^3} - \frac{Gm_2\omega}{\|\mathbf{v}_{2,0} - \mathbf{v}_{3,0}\|^3}\right) \mathbf{v}_{3,0} = \mathbf{V}_0 \end{cases}$$

per a les velocitats.

Demostració. Hem de fer servir que les corbes

$$\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{R}(t) + \cos(\omega t)(\mathbf{r}_{i,0} - \mathbf{R}_0) + \sin(\omega t) \frac{1}{\omega} (\mathbf{v}_{i,0} - \mathbf{V}_0),$$

per $i \in \{1, 2, 3\}$, són solució del sistema (5.9). Si derivem dos cops, trobem

$$\ddot{\mathbf{r}}_i(t) = -\omega^2 \cos(\omega t)(\mathbf{r}_{i,0} - \mathbf{R}_0) - \omega^2 \sin(\omega t) \frac{1}{\omega} (\mathbf{v}_{i,0} - \mathbf{V}_0),$$

i a més

$$\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t) = \cos(\omega t)(\mathbf{r}_{j,0} - \mathbf{r}_{i,0}) + \sin(\omega t) \frac{1}{\omega} (\mathbf{v}_{j,0} - \mathbf{v}_{i,0}).$$

Així, les equacions del sistema (5.9) donen, per a $t = 0$,

$$\begin{cases} -\omega^2(\mathbf{r}_{1,0} - \mathbf{R}_0) = Gm_2 \frac{\mathbf{r}_{2,0} - \mathbf{r}_{1,0}}{\|\mathbf{r}_{2,0} - \mathbf{r}_{1,0}\|^3} + Gm_3 \frac{\mathbf{r}_{3,0} - \mathbf{r}_{1,0}}{\|\mathbf{r}_{3,0} - \mathbf{r}_{1,0}\|^3}, \\ -\omega^2(\mathbf{r}_{2,0} - \mathbf{R}_0) = Gm_1 \frac{\mathbf{r}_{1,0} - \mathbf{r}_{2,0}}{\|\mathbf{r}_{1,0} - \mathbf{r}_{2,0}\|^3} + Gm_3 \frac{\mathbf{r}_{3,0} - \mathbf{r}_{2,0}}{\|\mathbf{r}_{3,0} - \mathbf{r}_{2,0}\|^3}, \\ -\omega^2(\mathbf{r}_{3,0} - \mathbf{R}_0) = Gm_1 \frac{\mathbf{r}_{1,0} - \mathbf{r}_{3,0}}{\|\mathbf{r}_{1,0} - \mathbf{r}_{3,0}\|^3} + Gm_2 \frac{\mathbf{r}_{2,0} - \mathbf{r}_{3,0}}{\|\mathbf{r}_{2,0} - \mathbf{r}_{3,0}\|^3}, \end{cases}$$

i, per a $t = \frac{\pi}{2\omega}$,

$$\begin{cases} -\omega(\mathbf{v}_{1,0} - \mathbf{V}_0) = Gm_2\omega^2 \frac{\mathbf{v}_{2,0} - \mathbf{v}_{1,0}}{\|\mathbf{v}_{2,0} - \mathbf{v}_{1,0}\|^3} + Gm_3\omega^2 \frac{\mathbf{v}_{3,0} - \mathbf{v}_{1,0}}{\|\mathbf{v}_{3,0} - \mathbf{v}_{1,0}\|^3}, \\ -\omega(\mathbf{v}_{2,0} - \mathbf{V}_0) = Gm_1\omega^2 \frac{\mathbf{v}_{1,0} - \mathbf{v}_{2,0}}{\|\mathbf{v}_{1,0} - \mathbf{v}_{2,0}\|^3} + Gm_3\omega^2 \frac{\mathbf{v}_{3,0} - \mathbf{v}_{2,0}}{\|\mathbf{v}_{3,0} - \mathbf{v}_{2,0}\|^3}, \\ -\omega(\mathbf{v}_{3,0} - \mathbf{V}_0) = Gm_1\omega^2 \frac{\mathbf{v}_{1,0} - \mathbf{v}_{3,0}}{\|\mathbf{v}_{1,0} - \mathbf{v}_{3,0}\|^3} + Gm_2\omega^2 \frac{\mathbf{v}_{2,0} - \mathbf{v}_{3,0}}{\|\mathbf{v}_{2,0} - \mathbf{v}_{3,0}\|^3}. \end{cases}$$

Simplificant i reordenant aquestes equacions, obtenim les equacions de l'enunciat. \square

En general, les equacions de la proposició anterior no són condicions suficients per a garantir solució de l'equació diferencial (5.9). Més concretament, el que necessitaríem és que la norma dels vectors diferencia

$$\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t) = \cos(\omega t)(\mathbf{r}_{j,0} - \mathbf{r}_{i,0}) + \sin(\omega t) \frac{1}{\omega} (\mathbf{v}_{j,0} - \mathbf{v}_{i,0})$$

fos independent del temps. Això és garanteix sota la següent hipòtesi.

Hipòtesi 5.21 (Moviment circular de les posicions relatives). A partir d'ara, suposarem que les condicions inicials compleixen les condicions següents:

i) Per $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, els vectors $\mathbf{r}_{j,0} - \mathbf{r}_{i,0}$ i $\mathbf{v}_{j,0} - \mathbf{v}_{i,0}$ són ortogonals.

ii) Per $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, es compleix que $\|\mathbf{v}_{j,0} - \mathbf{v}_{i,0}\| = \omega \|\mathbf{r}_{j,0} - \mathbf{r}_{i,0}\|$.

Proposició 5.22. *Suposant que les condicions inicials compleixen els sistemes d'equacions donats per la Proposició 5.20 i la hipòtesi 5.21, les corbes*

$$\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{R}(t) + \cos(\omega t)(\mathbf{r}_{i,0} - \mathbf{R}_0) + \sin(\omega t)\frac{1}{\omega}(\mathbf{v}_{i,0} - \mathbf{V}_0),$$

per $i \in \{1, 2, 3\}$, són solució del sistema (5.9).

Demostració. Utilitzant la hipòtesi 5.21, podem calcular

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)\|^2 &= \cos^2(\omega t)\|\mathbf{r}_{j,0} - \mathbf{r}_{i,0}\|^2 + \sin^2(\omega t)\frac{1}{\omega^2}\|\mathbf{v}_{j,0} - \mathbf{v}_{i,0}\|^2 \\ &\quad + 2\sin(\omega t)\cos(\omega t)\frac{1}{\omega}(\mathbf{r}_{j,0} - \mathbf{r}_{i,0}) \cdot (\mathbf{v}_{j,0} - \mathbf{v}_{i,0}) \\ &= \|\mathbf{r}_{j,0} - \mathbf{r}_{i,0}\|^2. \end{aligned}$$

Ara és fàcil comprovar que les corbes són efectivament solució del sistema d'equacions diferencials (5.9): les equacions de la Proposició 5.20 són exactament les components del $\cos(\omega t)$ i $\sin(\omega t)$ que apareixen un cop substituïm la corba i la seva segona derivada al sistema d'equacions (5.9). \square

A partir d'ara ens centrarem a resoldre les equacions de la Proposició 5.20, sota la hipòtesi extra 5.21. Per a fer-ho, és convenient introduir la següent notació. Definim els paràmetres

$$\begin{aligned} \rho_1 &:= \frac{G}{\omega^2\|\mathbf{r}_{2,0} - \mathbf{r}_{3,0}\|^3} = \frac{G\omega}{\|\mathbf{v}_{2,0} - \mathbf{v}_{3,0}\|^3}, & \rho_2 &:= \frac{G}{\omega^2\|\mathbf{r}_{1,0} - \mathbf{r}_{3,0}\|^3} = \frac{G\omega}{\|\mathbf{v}_{1,0} - \mathbf{v}_{3,0}\|^3}, \\ \rho_3 &:= \frac{G}{\omega^2\|\mathbf{r}_{1,0} - \mathbf{r}_{2,0}\|^3} = \frac{G\omega}{\|\mathbf{v}_{1,0} - \mathbf{v}_{2,0}\|^3}. \end{aligned}$$

Així, amb aquests nous paràmetres les equacions de la Proposició 5.20 són

$$\begin{cases} (1 - m_2\rho_3 - m_3\rho_2)\mathbf{r}_{1,0} + m_2\rho_3\mathbf{r}_{2,0} + m_3\rho_2\mathbf{r}_{3,0} = \mathbf{R}_0, \\ m_1\rho_3\mathbf{r}_{1,0} + (1 - m_1\rho_3 - m_3\rho_1)\mathbf{r}_{2,0} + m_3\rho_1\mathbf{r}_{3,0} = \mathbf{R}_0, \\ m_1\rho_2\mathbf{r}_{1,0} + m_2\rho_1\mathbf{r}_{2,0} + (1 - m_1\rho_2 - m_2\rho_1)\mathbf{r}_{3,0} = \mathbf{R}_0 \end{cases} \quad (5.10)$$

per a les posicions, i

$$\begin{cases} (1 - m_2\rho_3 - m_3\rho_2)\mathbf{v}_{1,0} + m_2\rho_3\mathbf{v}_{2,0} + m_3\rho_2\mathbf{v}_{3,0} = \mathbf{V}_0, \\ m_1\rho_3\mathbf{v}_{1,0} + (1 - m_1\rho_3 - m_3\rho_1)\mathbf{v}_{2,0} + m_3\rho_1\mathbf{v}_{3,0} = \mathbf{V}_0, \\ m_1\rho_2\mathbf{v}_{1,0} + m_2\rho_1\mathbf{v}_{2,0} + (1 - m_1\rho_2 - m_2\rho_1)\mathbf{v}_{3,0} = \mathbf{V}_0 \end{cases} \quad (5.11)$$

per a les velocitats.

El següent teorema ens dóna la solució per a resoldre aquests sistemes d'equacions, on s'han de distingir diferents casos.

Teorema 5.23. *Suposem que tenim vectors $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ complint el sistema d'equacions*

$$\begin{cases} (1 - m_2\rho_3 - m_3\rho_2)\mathbf{w}_1 + m_2\rho_3\mathbf{w}_2 + m_3\rho_2\mathbf{w}_3 = \mathbf{W}_0, \\ m_1\rho_3\mathbf{w}_1 + (1 - m_1\rho_3 - m_3\rho_1)\mathbf{w}_2 + m_3\rho_1\mathbf{w}_3 = \mathbf{W}_0, \\ m_1\rho_2\mathbf{w}_1 + m_2\rho_1\mathbf{w}_2 + (1 - m_1\rho_2 - m_2\rho_1)\mathbf{w}_3 = \mathbf{W}_0, \end{cases}$$

on $\rho_1 = \frac{A}{\|\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3\|^3}$, $\rho_2 = \frac{A}{\|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_3\|^3}$, $\rho_3 = \frac{A}{\|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|^3}$ amb A una constant, i

$$\mathbf{W}_0 = \frac{m_1}{M}\mathbf{w}_1 + \frac{m_2}{M}\mathbf{w}_2 + \frac{m_3}{M}\mathbf{w}_3.$$

Llavors, les solucions del sistema són exactament tots aquells vectors $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ que compleixen:

(1) O bé que els vectors $\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3$ són linealment independents i, a més,

$$\|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\| = \|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_3\| = \|\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3\| = (AM)^{1/3}; \quad (5.12)$$

(2) O bé que els vectors $\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3$ són linealment dependents i, a més,

$$\mathbf{w}_1 = (1 + \lambda)\mathbf{w} + \mathbf{w}_3, \quad \mathbf{w}_2 = \lambda\mathbf{w} + \mathbf{w}_3$$

amb λ complint:

(a) si volem $\lambda \in (0, \infty)$, llavors λ és l'única solució en $(0, \infty)$ de la quintica

$$\lambda^5 + \frac{3m_1 + 2m_2}{m_1 + m_2}\lambda^4 + \frac{3m_1 + m_2}{m_1 + m_2}\lambda^3 - \frac{m_2 + 3m_3}{m_1 + m_2}\lambda^2 - \frac{2m_2 + 3m_3}{m_1 + m_2}\lambda - \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2} = 0;$$

(b) si volem $\lambda \in (-1, 0)$, llavors λ és l'única solució en $(-1, 0)$ de la quintica

$$\lambda^5 + \frac{3m_1 + 2m_2}{m_1 + m_2}\lambda^4 + \frac{3m_1 + m_2 + 2m_3}{m_1 + m_2}\lambda^3 + \frac{m_2 + 3m_3}{m_1 + m_2}\lambda^2 + \frac{2m_2 + 3m_3}{m_1 + m_2}\lambda + \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2} = 0;$$

(c) si volem $\lambda \in (-\infty, -1)$, llavors λ és l'única solució en $(-\infty, -1)$ de la quintica

$$\lambda^5 + \frac{3m_1 + 2m_2}{m_1 + m_2}\lambda^4 + \frac{3m_1 + m_2}{m_1 + m_2}\lambda^3 + \frac{2m_1 + m_2 + 3m_3}{m_1 + m_2}\lambda^2 + \frac{2m_2 + 3m_3}{m_1 + m_2}\lambda + \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2} = 0;$$

i \mathbf{w}, \mathbf{w}_3 vectors qualssevol complint

$$\frac{\|\mathbf{w}\|^3}{A} = m_1 + m_2 - m_3 \left(\frac{\lambda}{|\lambda|^3} - \frac{1 + \lambda}{|1 + \lambda|^3} \right).$$

Demostració. Fent servir que $\mathbf{w}_i = (\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_j) + \mathbf{w}_j$, podem reescriure el sistema d'equacions com

$$\begin{cases} (1 - m_2\rho_3 - m_3\rho_2)(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) + (1 - m_3\rho_2)(\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3) + \mathbf{w}_3 = \mathbf{W}_0, \\ m_1\rho_3(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) + (1 - m_3\rho_1)(\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3) + \mathbf{w}_3 = \mathbf{W}_0, \\ m_1\rho_2(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) + (m_1\rho_2 + m_2\rho_1)(\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3) + \mathbf{w}_3 = \mathbf{W}_0. \end{cases}$$

- (1) Suposem primer que els vectors $\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3$ són linealment independents. Restant a la primera equació la segona del sistema anterior, trobem

$$(1 - m_2\rho_3 - m_3\rho_2 - m_1\rho_3)(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) + (m_3\rho_1 - m_3\rho_2)(\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3) = \mathbf{0}.$$

Al ser els vectors linealment independents, necessàriament trobem que $\rho_1 = \rho_2$ i $1 - m_2\rho_3 - m_3\rho_2 - m_1\rho_3 = 0$. Restant ara a la segona equació la tercera, trobem

$$(m_1\rho_3 - m_1\rho_2)(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) + (1 - m_3\rho_1 - m_1\rho_2 - m_2\rho_1)(\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3) = \mathbf{0}.$$

Altre cop, la independència lineal implica que $\rho_2 = \rho_3$. Finalment, trobem que $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \frac{1}{M}$, i per tant

$$\|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\| = \|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_3\| = \|\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3\| = (AM)^{1/3}.$$

Recíprocament, si es compleixen les equacions (5.12), tenim que $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \frac{1}{M}$, i es comprova fàcilment que el sistema d'equacions de l'enunciat es compleix, fent servir la definició del vector \mathbf{W}_0 .

- (2) Suposem ara que els vectors $\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3$ són linealment dependents, i escrivim $\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}$, $\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3 = \lambda\mathbf{w}$. Aquí

$$\rho_1 = \frac{A}{|\lambda|^3\|\mathbf{w}\|^3}, \quad \rho_2 = \frac{A}{|1 + \lambda|^3\|\mathbf{w}\|^3}, \quad \rho_3 = \frac{A}{\|\mathbf{w}\|^3}.$$

Llavors el sistema d'equacions anteriors és equivalent al sistema d'equacions

$$\begin{cases} (1 - m_2\rho_3 - m_3\rho_2) + (1 - m_3\rho_2)\lambda = \frac{m_1}{M}(1 + \lambda) + \frac{m_2}{M}, \\ m_1\rho_3 + (1 - m_3\rho_1)\lambda = \frac{m_1}{M}(1 + \lambda) + \frac{m_2}{M}, \\ m_1\rho_2 + (m_1\rho_2 + m_2\rho_1)\lambda = \frac{m_1}{M}(1 + \lambda) + \frac{m_2}{M}. \end{cases}$$

Restant a la primera equació la segona equació, i a la segona equació la tercera equació, trobem

$$\begin{cases} (1 - m_2\rho_3 - m_3\rho_2 - m_1\rho_3) + m_3(\rho_1 - \rho_2)\lambda = 0, \\ m_1(\rho_3 - \rho_2) + (1 - m_3\rho_1 - m_1\rho_2 - m_2\rho_1)\lambda = 0. \end{cases}$$

Multiplicant per λ la primera equació i restant-li la segona, tenim

$$m_3\rho_1\lambda^2 - m_3\rho_2\lambda^2 + (m_2 + m_3)\rho_1\lambda + (m_1 - m_3)\rho_2\lambda - (m_1 + m_2)\rho_3\lambda + m_1\rho_2 - m_1\rho_3 = 0,$$

que és l'equació per a λ de l'enunciat un cop separem casos, segons si $\lambda, 1 + \lambda$ són positius o negatius, i la simplifiquem. Fent servir ara, per exemple, la primera equació de les dues anteriors, és a dir, l'equació

$$(1 - m_2\rho_3 - m_3\rho_2 - m_1\rho_3) + m_3(\rho_1 - \rho_2)\lambda = 0,$$

trobem el valor de $\|\mathbf{w}\|$ de l'enunciat.

És un càlcul llarg però fàcil demostrar que el recíproc també és cert. \square

En les següents seccions ens centrarem a estudiar cada cas per separat, tot distingint els casos entre els vectors posicions inicials i els vectors velocitats inicials.

5.3.1 Solució de Lagrange: triangle equilàter

Aquest és el cas en què els vectors posicions inicials compleixen que $\mathbf{r}_{1,0} - \mathbf{r}_{2,0}$, $\mathbf{r}_{2,0} - \mathbf{r}_{3,0}$ són linealment independents. Pel Teorema 5.23, necessàriament s'ha de complir que

$$\|\mathbf{r}_{1,0} - \mathbf{r}_{2,0}\| = \|\mathbf{r}_{2,0} - \mathbf{r}_{3,0}\| = \|\mathbf{r}_{1,0} - \mathbf{r}_{3,0}\| = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3}.$$

És a dir, les posicions inicials dels cossos formen un triangle equilàter. Tal com hem vist en la secció anterior, sempre tindrem $\|\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)\| = \|\mathbf{r}_{j,0} - \mathbf{r}_{i,0}\|$ i, per tant, els tres cossos estaran formant un triangle equilàter en tot instant de temps.⁷ Pel que fa a les velocitats inicials, tenim dos casos a distingir.

- (I) Els vectors $\mathbf{v}_{1,0} - \mathbf{v}_{2,0}$, $\mathbf{v}_{2,0} - \mathbf{v}_{3,0}$ són linealment independents. En aquest cas tenim, similar al que ja hem comentat, que s'ha de complir

$$\|\mathbf{v}_{1,0} - \mathbf{v}_{2,0}\| = \|\mathbf{v}_{2,0} - \mathbf{v}_{3,0}\| = \|\mathbf{v}_{1,0} - \mathbf{v}_{3,0}\| = (GM\omega)^{1/3}.$$

Exemple 5.24. Per exemplificar aquesta solució en un dibuix, agafem com a condicions inicials els vectors

$$\mathbf{r}_{1,0} = (0, 0, 0), \quad \mathbf{r}_{2,0} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{r}_{3,0} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right),$$

$$\mathbf{v}_{1,0} = (0, 0, 0), \quad \mathbf{v}_{2,0} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{v}_{3,0} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

en el cas d'agafar els paràmetres $G = M = \omega = 1$.

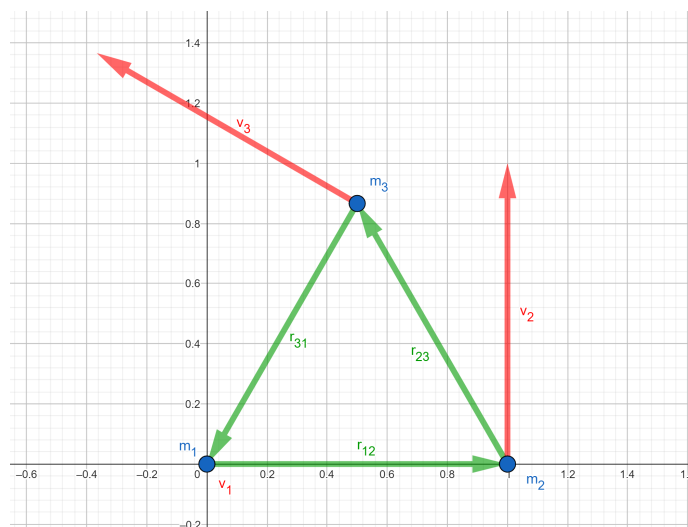


Figura 11: Solució de Lagrange - Triangle equilàter

- (II) Els vectors $\mathbf{v}_{1,0} - \mathbf{v}_{2,0}$, $\mathbf{v}_{2,0} - \mathbf{v}_{3,0}$ són linealment dependents. Anem a veure que, de fet, aquest cas no pot passar.

Escrivim $\mathbf{v}_{1,0} - \mathbf{v}_{2,0} = \mathbf{v}$, $\mathbf{v}_{2,0} - \mathbf{v}_{3,0} = \lambda\mathbf{v}$, i per tant $\mathbf{v}_{1,0} - \mathbf{v}_{3,0} = (1 + \lambda)\mathbf{v}$. Fent servir la part ii) de la hipòtesi 5.21, trobem la condició

$$\|\mathbf{v}\| = |\lambda|\|\mathbf{v}\| = |1 + \lambda|\|\mathbf{v}\|,$$

és a dir $1 = |\lambda| = |1 + \lambda|$, que és clarament una contradicció.

⁷Observem que aquest fet és independent de les masses; és a dir, siguin quins siguin els valors de les masses, sempre formaran un triangle equilàter.

5.3.2 Solució d'Euler: punts colineals

Aquest és el cas en què els vectors posicions inicials compleixen que $\mathbf{r}_{1,0} - \mathbf{r}_{2,0}$, $\mathbf{r}_{2,0} - \mathbf{r}_{3,0}$ són linealment dependents, és a dir, es troben sobre una mateixa recta. Pel Teorema 5.23, necessàriament s'ha de complir que

$$\mathbf{r}_{1,0} = (1 + \lambda)(\mathbf{r}_{1,0} - \mathbf{r}_{2,0}) + \mathbf{r}_{3,0}, \quad \mathbf{r}_{2,0} = \lambda(\mathbf{r}_{1,0} - \mathbf{r}_{2,0}) + \mathbf{r}_{3,0}$$

amb λ i $\|\mathbf{r}_{1,0} - \mathbf{r}_{2,0}\|$ complint les condicions del teorema.

Igual que abans, tindriem dos casos a distingir en funció de les velocitats inicials.

- (I) Els vectors $\mathbf{v}_{1,0} - \mathbf{v}_{2,0}$, $\mathbf{v}_{2,0} - \mathbf{v}_{3,0}$ són linealment independents. Igual que en el cas (II) de la secció anterior, aquest cas no pot passar.
- (II) Els vectors $\mathbf{v}_{1,0} - \mathbf{v}_{2,0}$, $\mathbf{v}_{2,0} - \mathbf{v}_{3,0}$ són linealment dependents. En aquest cas també tenim que

$$\mathbf{v}_{1,0} = (1 + \lambda)(\mathbf{v}_{1,0} - \mathbf{v}_{2,0}) + \mathbf{v}_{3,0}, \quad \mathbf{v}_{2,0} = \lambda(\mathbf{v}_{1,0} - \mathbf{v}_{2,0}) + \mathbf{v}_{3,0}$$

amb λ la mateixa que ja hem trobat, i a més $\|\mathbf{v}_{1,0} - \mathbf{v}_{2,0}\| = \omega\|\mathbf{r}_{1,0} - \mathbf{r}_{2,0}\|$.

Exemple 5.25. Suposem que $m_1 = m_2 = m_3$. En aquest cas, els valors possibles de λ es poden trobar solucionant les quàntiques del Teorema 5.23. Trobem els valors $\lambda = 1$, $\lambda = -\frac{1}{2}$ i $\lambda = -2$.

Per exemplificar aquesta solució en un dibuix, agafem el cas $\lambda = 1$ i com a condicions inicials els vectors

$$\mathbf{r}_{1,0} = (0, 0, 0), \quad \mathbf{r}_{2,0} = \left(0, \left(\frac{5}{12}\right)^{1/3}, 0\right), \quad \mathbf{r}_{3,0} = \left(0, 2\left(\frac{5}{12}\right)^{1/3}, 0\right),$$

$$\mathbf{v}_{1,0} = (0, 0, 0), \quad \mathbf{v}_{2,0} = \left(\left(\frac{5}{12}\right)^{1/3}, 0, 0\right), \quad \mathbf{v}_{3,0} = \left(2\left(\frac{5}{12}\right)^{1/3}, 0, 0\right)$$

on hem agafat els paràmetres $G = M = \omega = 1$.

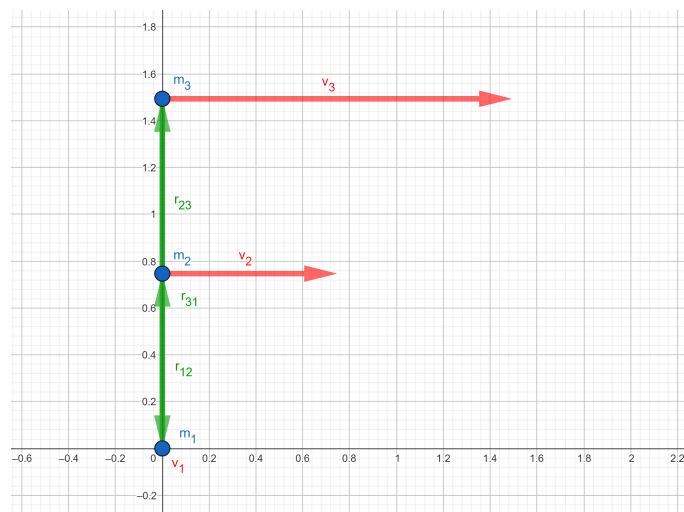


Figura 12: Solució d'Euler - Punts colineals

6 Simulació numèrica

Per tal de posar en pràctica la teoria vista en els capítols anteriors hem volgut estudiar un cas particular i real d'un problema de tres cossos: el sistema Sol, Júpiter i cometa 39P/Oterma.

El 39P/Oterma és un cometa, actualment inactiu, i que manté una òrbita periòdica d'aproximadament 19,49 anys. Va ser descobert per Liisi Oterma, de la Universitat de Turku, la qual va descobrir 54 asteroides i diversos cometes entre els anys 1938 i 1953.

Se sap que el cometa fa transicions ràpides d'una òrbita fora de l'òrbita de Júpiter a una òrbita dins de la de Júpiter, i viceversa. A més, la seva massa és negligible respecte a les masses principals (Sol i Júpiter), i l'angle entre la recta Sol-Oterma i el pla on es mou Júpiter té un angle de 2.486° aproximadament. Per aquests motius, podem aplicar el model del problema dels tres cossos restringit i circular per a estudiar aquest sistema, tal com es fa en [3].

En aquest capítol, aplicarem la teoria que hem desenvolupat del problema restringit dels tres cossos per tal de:

- (a) calcular la corba de velocitat nul·la del cometa 39P/Oterma;
- (b) la corba que descriu la trajectòria del cometa.

Les dades que hem agafat són (vegeu [2]):

$$p = 9.5388118036310115 \cdot 10^{-4}, \quad J^* = 1.512842856.$$

6.1 Implementació: corba de velocitat nul·la del cometa 39P/Oterma

En aquesta secció descriurem l'algorisme implementat numèricament per a trobar la corba de velocitat nul·la del cometa 39P/Oterma i mostrarem la corba gràficament.

Algorisme 6.1.

- (I) Trobem el primer punt de la corba de velocitat nul·la, el qual és solució de l'equació

$$\frac{1-p}{((a+p)^2 + b^2)^{1/2}} + \frac{p}{((a-1+p)^2 + b^2)^{1/2}} + \frac{a^2 + b^2}{2} - J^* = 0,$$

i l'agafem de la forma $(a_0, 0)$. Per a fer-ho, agafem com a llavor el punt $(-0.9, 0)$ i, utilitzant el *mètode de Newton d'una dimensió*, trobem la solució.

- (II) Trobem el segon punt solució de la corba de velocitat nul·la de la forma (a_1, h) , amb $h = 10^{-4}$. Agafem com a llavor el punt (a_0, h) i, utilitzant el *mètode de Newton d'una dimensió*, trobem la solució.
- (III) Trobats dos punts de la corba de velocitat nul·la ja podem calcular la resta de punts. Trobarem l' n -èssim punt (a_n, b_n) utilitzant el *mètode de continuació predictor-corrector amb pseudo-paràmetre arc*, que expliquem a continuació.

Predicció: prenem com a aproximació del punt (a_n, b_n) el punt $(a_{n-1}, b_{n-1}) + \vec{v}$, on $\vec{v} = (a_{n-1}, b_{n-1}) - (a_{n-2}, b_{n-2})$.

Correcció: per a la correcció del punt $(a_{n-1}, b_{n-1}) + \vec{v}$ usarem el *mètode de Newton amb dues variables* pel sistema

$$\begin{cases} \frac{1-p}{((a+p)^2+b^2)^{1/2}} + \frac{p}{((a-1+p)^2+b^2)^{1/2}} + \frac{a^2+b^2}{2} - J^* = 0, \\ (a - a_{n-1})^2 + (b - b_{n-1})^2 = h^2. \end{cases}$$

(IV) Iterem el pas (III) per anar trobant punts de la corba fins a, finalment, trobar un punt (a^*, b^*) tal que

$$\|(a_0, b_0) - (a^*, b^*)\| < \frac{h}{2}.$$

6.2 Implementació: corba de la trajectòria del cometa 39P/Oterma

En aquesta secció, descriurem l'algorisme implementat numèricament per a trobar la corba de la trajectòria del cometa 39P/Oterma i mostrarem la corba gràficament. Les condicions inicials que s'han fet servir són (vegeu [2]):

$$a_0 = 1.0952439413131636, \quad b_0 = -2.9918455882452549 \cdot 10^{-2},$$

$$\dot{a}_0 = -1.1061743167676116 \cdot 10^{-1}, \quad \dot{b}_0 = -5.94136766591944 \cdot 10^{-2}.$$

Algorisme 6.2. L'objectiu d'aquest segon programa és trobar la trajectòria del cometa integrant les equacions 5.5 que regeixen el seu moviment. Per tal de ser integrades, hem utilitzat el mètode de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 4 i 5.

Tant l'algorisme 6.1 com el 6.2 han estat implementats en C (codi adjunt a l'annex) i les representacions de les corbes (Figura 13) s'han fet amb el programa Gnuplot. Les figures s'han obtingut a partir dels punts trobats pels respectius programes en C.

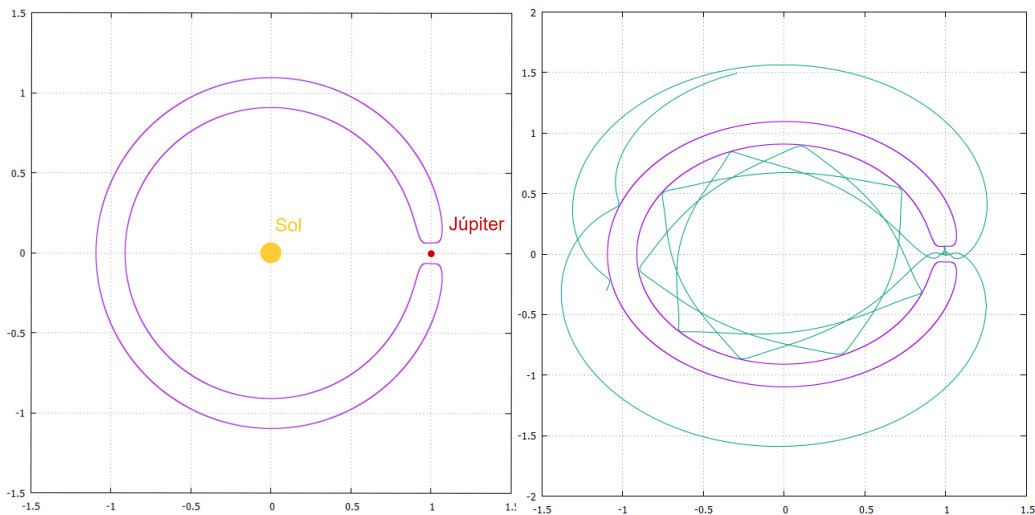


Figura 13: A l'esquerra, corba de velocitat nul·la (lila) del cometa 39P/Oterma. A la dreta, trajectòria del cometa 39P/Oterma (verd) juntament amb la seva corba de velocitat nul·la (lila).

7 Comentaris finals i conclusions

Un dels principals propòsits que tenia aquest treball era formalitzar un problema de context físic, és a dir, no estrictament matemàtic, però afegint la rigorositat i estructura que caracteritza qualsevol text matemàtic. S'ha buscat intencionadament un equilibri entre una lectura senzilla i dinàmica, i a la vegada oferir un estudi ordenat, detallat, complet i rigorós.

Un altre propòsit que tenia el treball era fer ús i experimentar la potència i l'abast que tenen les matemàtiques com a eina *per se* per a modelar i resoldre qüestions tan fonamentals, i a la vegada extraordinàries, com són els principis que regeixen el nostre univers.

El primer repte trobat va ser adquirir una base de coneixements físics en el camp de la mecànica clàssica, el qual era inexplorat per a mi. El llibre *Dinámica clásica de las partículas y sistemas* de J. B. Marion [4] va ser el que em va ajudar a assentar els conceptes bàsics que necessitava.

Posteriorment, i durant la realització de tot el treball, s'ha utilitzat com a guia principal el llibre *Mathematical Introduction to Celestial Mechanics* de H. Pollard [6]. Tot i així, he desenvolupat el treball amb una estructura pròpia diferent del seu plantejament. En alguns punts s'ha fet un pas més enllà de generalització (com per exemple el Teorema 3.9), s'han concretat en tot moment les coordenades utilitzades (coordenades que en molts casos el Pollard suposa), trobat constants de forma explícita (com les constants k i T de la definició 4.15 segons els diferents valors de l'energia), i fet la majoria de les demostracions de zero, incloent-hi casos no fets pel Pollard i exercicis que proposa en el seu llibre. En algunes seccions específiques s'han utilitzat altres referències, com el llibre *Theory of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies* de V. Szebehely [7].

En la part de simulació numèrica s'han programat amb èxit dos programes originalment escrits per a mi, juntament amb un integrador proporcionat pel meu tutor. El primer programa determina completament la regió possible de moviment pel cometa 39P/Oterma, i el segon simula la trajectòria del cometa utilitzant les equacions trobades en el treball i l'integrador esmentat. Per a fer-ho, s'han utilitzat coneixements adquirits en les assignatures Mètodes Numèrics I i II. En aquesta part pràctica he estat conscient (encara més) de com la sensibilitat de les condicions inicials poden afectar dràsticament la resolució numèrica del problema.

Finalment, un punt interessant que m'ha perseguit o acompanyat durant tota la carrera ha estat la redacció dels textos matemàtics, almenys els que jo he llegit. Sovint, trobar resultats molt directes i amb pocs passos previs o poc detallats, presentar idees felices sense saber com han estat concebudes, canvis de coordenades aparentment sense gaire propòsit i un llarg etcètera, han estat detalls que m'han 'turmentat'. Ha estat recurrent la meua queixa pensant que fàcilment podia ser millorat. Quina sorpresa ha estat, al fer jo mateixa aquest treball, el poder aprendre i adonar-me del per què de tot això. Potser ha estat una de les grans sorpreses i aprenentatges d'aquest treball. Jo, que vaig fer PAS per PAS i cada càlcul a mà del que presento aquí, he entès que la falta d'espai sovint et força a prescindir del que has escrit, et fa fer canvis de coordenades poc entenibles però molt sintetitzants, i a vegades un cop tot escrit i ben ordenat te n'adones que canviar per un ordre menys clar (potser) t'estalviarà encara més espai.

Com a comentari final, si pogués continuar m'hagués agradat estudiar les òrbites periòdiques o la dinàmica al voltant dels punts de Lagrange.

A Apèndix

A.1 Algorismes per al problema de Kepler

En aquesta secció de l'apèndix descriurem algorismes, que es poden implementar numèricament, per a solucionar el problema de Kepler.

A.1.1 Cas $\mathbf{L}_0 = \mathbf{0}$

Algorisme A.1. Algorisme per a trobar la solució del problema de Kepler.

- (I) Donades les condicions inicials $\mathbf{r}_{1,0}, \mathbf{r}_{2,0}, \mathbf{v}_{1,0}$ i $\mathbf{v}_{2,0}$, calculem les condicions inicials $\mathbf{R}_0, \mathbf{V}_0, \mathbf{r}_0$ i \mathbf{v}_0 .
- (II) La corba $\mathbf{R}(t)$ és simplement $\mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_0 t$.
- (III) Solucionem (numèricament) l'equació diferencial

$$\ddot{\lambda}(t) + 5\lambda(t)\dot{\lambda}(t) + 3\lambda(t)^3 = 0$$

amb condicions inicials

$$\lambda(0) = \frac{\|\mathbf{v}_0\|}{\|\mathbf{r}_0\|}, \quad \dot{\lambda}(0) = G \frac{M}{\|\mathbf{r}_0\|^3} - \frac{\|\mathbf{v}_0\|^2}{\|\mathbf{r}_0\|^2}.$$

- (IV) Tenint $\lambda(t)$, trobem el valor de la corba $\mathbf{r}(t)$ integrant (numèricament)

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 e^{\int_0^t \lambda(s) ds}.$$

- (V) Finalment, les corbes $\mathbf{r}_1(t)$ i $\mathbf{r}_2(t)$ venen donades per

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{R}(t) - \frac{m_2}{M} \mathbf{r}(t), \quad \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{R}(t) + \frac{m_1}{M} \mathbf{r}(t).$$

A.1.2 Cas $\mathbf{L}_0 \neq \mathbf{0}$ i $\mathbf{e}_0 = \mathbf{0}$

Algorisme A.2. Algorisme per a trobar la solució del problema de Kepler.

- (I) Donades les condicions inicials $\mathbf{r}_{1,0}, \mathbf{r}_{2,0}, \mathbf{v}_{1,0}$ i $\mathbf{v}_{2,0}$, calculem les condicions inicials $\mathbf{R}_0, \mathbf{V}_0, \mathbf{r}_0$ i \mathbf{v}_0 .
- (II) La corba $\mathbf{R}(t)$ és simplement $\mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_0 t$.
- (III) Les funcions $r(t)$ i $f(t)$ venen donades explícitament per

$$r(t) = \frac{\|\mathbf{L}_0\|^2}{Gm_1m_2\mu}, \quad f(t) = f_0 + \frac{G^2m_1^2m_2^2\mu}{\|\mathbf{L}_0\|^3} t$$

amb f_0 donat, tret de múltiples de 2π , per

$$\cos(f_0) = \frac{Gm_1m_2\mu}{\|\mathbf{L}_0\|^2} \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{u}_1, \quad \sin(f_0) = \frac{Gm_1m_2\mu}{\|\mathbf{L}_0\|^2} \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{u}_2.$$

- (IV) Tenint $r(t)$ i $f(t)$, trobem el valor de la corba $\mathbf{r}(t)$ fent servir

$$\mathbf{r}(t) = r(t) \cos(f(t)) \mathbf{u}_1 + r(t) \sin(f(t)) \mathbf{u}_2.$$

- (V) Finalment, les corbes $\mathbf{r}_1(t)$ i $\mathbf{r}_2(t)$ venen donades per

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{R}(t) - \frac{m_2}{M} \mathbf{r}(t), \quad \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{R}(t) + \frac{m_1}{M} \mathbf{r}(t).$$

A.1.3 Cas $\mathbf{L}_0 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{e}_0 \neq \mathbf{0}$ i $E_0 = 0$

Algorisme A.3. Algorisme per a trobar la solució del problema de Kepler.

- (I) Donades les condicions inicials $\mathbf{r}_{1,0}, \mathbf{r}_{2,0}, \mathbf{v}_{1,0}$ i $\mathbf{v}_{2,0}$, calculem les condicions inicials $\mathbf{R}_0, \mathbf{V}_0, \mathbf{r}_0$ i \mathbf{v}_0 .
- (II) La corba $\mathbf{R}(t)$ és simplement $\mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_0 t$.
- (III) Donat un temps t , trobem el valor de $u = u(t)$ solucionant (de manera numèrica) l'equació

$$\frac{u^3}{6} + \frac{A}{2}u = k(t - T).$$

- (IV) Amb aquest valor de u , trobem els valors $r(u)$ i $f(u)$ amb les expressions

$$r(u) = \frac{u^2 + A}{2}, \quad \cos(f(u)) = \frac{A}{r} - 1.$$

Agafem $f(u) > 0$ si $u > 0$ i $f(u) < 0$ si $u < 0$.

- (V) Tenint $r(t) = r(u(t))$ i $f(t) = f(u(t))$, trobem el valor de la corba $\mathbf{r}(t)$ fent servir

$$\mathbf{r}(t) = r(t) \cos(f(t)) \frac{\mathbf{e}_0}{\|\mathbf{e}_0\|} + r(t) \sin(f(t)) \frac{\mathbf{L}_0 \times \mathbf{e}_0}{\|\mathbf{L}_0 \times \mathbf{e}_0\|}.$$

- (VI) Finalment, les corbes $\mathbf{r}_1(t)$ i $\mathbf{r}_2(t)$ venen donades per

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{R}(t) - \frac{m_2}{M} \mathbf{r}(t), \quad \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{R}(t) + \frac{m_1}{M} \mathbf{r}(t).$$

A.1.4 Cas $\mathbf{L}_0 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{e}_0 \neq \mathbf{0}$ i $E_0 > 0$

Algorisme A.4. Algorisme per a trobar la solució del problema de Kepler.

- (I) Donades les condicions inicials $\mathbf{r}_{1,0}, \mathbf{r}_{2,0}, \mathbf{v}_{1,0}$ i $\mathbf{v}_{2,0}$, calculem les condicions inicials $\mathbf{R}_0, \mathbf{V}_0, \mathbf{r}_0$ i \mathbf{v}_0 .
- (II) La corba $\mathbf{R}(t)$ és simplement $\mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_0 t$.
- (III) Donat un temps t , trobem el valor de l'anomalia mitjana $l = l(t)$ segons l'equació

$$l = \frac{2E_0 k}{Gm_1 m_2} (t - T).$$

- (IV) Amb aquest valor de l , trobem $u = u(t)$ solucionant (de manera numèrica) l'equació

$$e \sinh(u) - u = l.$$

- (V) Amb aquest valor de u , trobem els valors $r(u)$ i $f(u)$ amb les expressions

$$r(u) = G \frac{m_1 m_2}{2E_0} (e \cosh(u) - 1), \quad \cos(f(u)) = \frac{A}{r} - 1.$$

Agafem $f(u) > 0$ si $u > 0$ i $f(u) < 0$ si $u < 0$.

(VI) Tenint $r(t) = r(u(t))$ i $f(t) = f(u(t))$, trobem el valor de la corba $\mathbf{r}(t)$ fent servir

$$\mathbf{r}(t) = r(t) \cos(f(t)) \frac{\mathbf{e}_0}{\|\mathbf{e}_0\|} + r(t) \sin(f(t)) \frac{\mathbf{L}_0 \times \mathbf{e}_0}{\|\mathbf{L}_0 \times \mathbf{e}_0\|}.$$

(VII) Finalment, les corbes $\mathbf{r}_1(t)$ i $\mathbf{r}_2(t)$ venen donades per

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{R}(t) - \frac{m_2}{M} \mathbf{r}(t), \quad \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{R}(t) + \frac{m_1}{M} \mathbf{r}(t).$$

A.1.5 Cas $\mathbf{L}_0 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{e}_0 \neq \mathbf{0}$ i $E_0 < 0$

Algorisme A.5. Algorisme per a trobar la solució del problema de Kepler.

(I) Donades les condicions inicials $\mathbf{r}_{1,0}$, $\mathbf{r}_{2,0}$, $\mathbf{v}_{1,0}$ i $\mathbf{v}_{2,0}$, calculem les condicions inicials \mathbf{R}_0 , \mathbf{V}_0 , \mathbf{r}_0 i \mathbf{v}_0 .

(II) La corba $\mathbf{R}(t)$ és simplement $\mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_0 t$.

(III) Donat un temps t , trobem el valor de l'anomalia mitjana $l = l(t)$ segons l'equació

$$l = \frac{2|E_0|k}{Gm_1m_2}(t - T).$$

(IV) Amb aquest valor de l , trobem $u = u(t)$ solucionant (de manera numèrica) l'equació de Kepler

$$u - e \sin(u) = l.$$

(V) Amb aquest valor de u , trobem els valors $r(u)$ i $f(u)$ amb les expressions

$$r(u) = G \frac{m_1 m_2}{2|E_0|} (1 - e \cos(u)), \quad \cos(f(u)) = \frac{A}{r} - 1.$$

Agafem $f(u) > 0$ si l'angle u , mirat en l'interval $[0, 2\pi]$, compleix $u < \pi$, i agafem $f(u) < 0$ si l'angle u , mirat en l'interval $[0, 2\pi]$, compleix $u > \pi$.

(VI) Tenint $r(t) = r(u(t))$ i $f(t) = f(u(t))$, trobem el valor de la corba $\mathbf{r}(t)$ fent servir

$$\mathbf{r}(t) = r(t) \cos(f(t)) \frac{\mathbf{e}_0}{\|\mathbf{e}_0\|} + r(t) \sin(f(t)) \frac{\mathbf{L}_0 \times \mathbf{e}_0}{\|\mathbf{L}_0 \times \mathbf{e}_0\|}.$$

(VII) Finalment, les corbes $\mathbf{r}_1(t)$ i $\mathbf{r}_2(t)$ venen donades per

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{R}(t) - \frac{m_2}{M} \mathbf{r}(t), \quad \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{R}(t) + \frac{m_1}{M} \mathbf{r}(t).$$

A.2 Codi en C per trobar la corba de velocitat nul·la del 39P/Oterma

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
/* p = massa Jupiter/(massa Jupiter + massa sol)*/
```

```

#define P 9.5388118036310115e-04
#define JC 1.512842856
#define TOL 1.e-9
#define H 1.e-4
/*Num Points and density*/
#define TOTALPOINTS 1.5e5
#define MAXITER 1000

double distancia(double x0, double y0, double x1, double y1);
double f(double x, double y);
double dfdx(double x, double y);
double dfdy(double x, double y);
double g(double cx, double cy, double x, double y);
double dgdx(double cx, double cy, double x, double y);
double dgdy(double cx, double cy, double x, double y);
void newton1D(double aproximaciox, double y, double *resultat);
void newton2D(double centre_x, double centre_y, double aproximaciox,
              double aproximacioy, double *resultatx, double *resultaty);
void puntsCorba(double solx0, double soly0, double solx1, double soly1,
                char nomFitxer[]);

void trobarPrimeraSolucio(double *solx0, double *soly0);
void trobarSegonaSolucio(double solx0, double soly0, double *solx1,
                        double *soly1);

int main(){

    double solx0, soly0, solx1, soly1;
    char nomFitxer[]="CorbaVelocitat_0.txt";

    trobarPrimeraSolucio(&solx0,&soly0);
    trobarSegonaSolucio(solx0, soly0, &solx1,&soly1);

    puntsCorba(solx0, soly0, solx1, soly1, nomFitxer);

    printf("status: 100%%");
    return 0;
}

double distancia(double x0, double y0, double x1, double y1){
    return sqrt( (x1-x0)*(x1-x0) + (y1-y0)*(y1-y0) );
}

double f(double x, double y){
    return (1-P)/sqrt((x+P)*(x+P)+y*y)
           + P/sqrt((x-1+P)*(x-1+P)+y*y)+(x*x+y*y)/2 -JC;
}

double dfdx(double x, double y){

```

```

        return -(1-P)*(x+P)/pow( (x+P)*(x+P)+y*y ,1.5)
                - P*(x-1+P)/pow( (x-1+P)*(x-1+P)+y*y ,1.5) + x;
    }

double dfdy(double x, double y){
    return -(1-P)*y/pow( (x+P)*(x+P)+y*y ,1.5)
            - P*y/pow( (x-1+P)*(x-1+P)+y*y ,1.5) + y;
}

double g(double cx, double cy, double x, double y){
    return (x-cx)*(x-cx) + (y-cy)*(y-cy) - H*H;
}

double dgdx(double cx, double cy, double x, double y){
    return 2*(x-cx);
}

double dgdy(double cx, double cy, double x, double y){
    return 2*(y-cy);
}

void newton1D(double aproximaciox, double y, double *resultat){
    double x0, x1;

    x1 = aproximaciox;
    do{
        x0=x1;
        x1= x0 - f(x0,y)/dfdx(x0,y);

        }while(fabs(x1-x0)>=TOL && fabs(f(x1,y))>=TOL);

    *resultat = x1;
}

void newton2D(double centre_x, double centre_y, double aproximaciox,
              double aproximacioy, double *resultatx, double *resultaty){
    int iter=0;
    double x0, y0, x1, y1, F, Fx, Fy, G, Gx, Gy, detA;

    x1= aproximaciox;
    y1= aproximacioy;

    do{

        x0= x1;
        y0= y1;

        F= f(x0,y0);
        Fx= dfdx(x0,y0);

```

```

    Fy= dfdy(x0,y0);
    G= g(centre_x, centre_y, x0,y0);
    Gx= dgdx(centre_x, centre_y, x0,y0);
    Gy= dgdy(centre_x, centre_y, x0,y0);
    detA= Fx*Gy-Gx*Fy;

    x1= x0 - (+Gy*F-Fy*G)/detA;
    y1= y0 - (-Gx*F+Fx*G)/detA;

}while(fabs(f(x1,y1))>=TOL && iter++<10);

if(iter>= 10) printf("no ha convergit en %20.15le %20.15le \n",x1,y1);

*resultatx= x1;
*resultaty= y1;
}

void puntsCorba(double solx0, double soly0, double solx1, double soly1,
                char nomFitxer[]){
    int numPoints= 0, status= 5;
    double solx2, soly2, solx3, soly3, centre_x, centre_y, vectorTangent_x,
        vectorTangent_y, aproximaciox, aproximacioy;

    FILE *fp;

    fp=fopen(nomFitxer,"w");
    if(fp==NULL){
        printf("No s'ha trobat el fitxer de sortida\n");
        exit(1);
    }

    fprintf(fp,"%20.15le %20.15le\n",solx0,soly0);
    fprintf(fp,"%20.15le %20.15le\n",solx1,soly1);

    /* Comencem a trobar punts*/
    solx2= solx0;
    soly2= soly0;

    solx3= solx1;
    soly3= soly1;

    do{
        vectorTangent_x= solx3 - solx2;
        vectorTangent_y= soly3 - soly2;

        aproximaciox= solx3 + vectorTangent_x;
        aproximacioy= soly3 + vectorTangent_y;

        centre_x= solx3;

```

```

    centre_y= soly3;

    solx2=solx3;
    soly2=soly3;

    newton2D(centre_x, centre_y, aproximaciox, aproximacioy,
             &solx3, &soly3);

    fprintf(fp,"%20.15le %20.15le\n",solx3,soly3);

    if(numPoints>=TOTALPOINTS/100*status){
        printf("status: %d%\n",status);
        status+=5;
    }
}while(distancia(solx0,soly0,solx3,soly3)>=H/2 && numPoints++<TOTALPOINTS-3);

fclose(fp);
}

void trobarPrimeraSolucio(double *solx0, double *soly0){
    double aproximaciox= -0.9, resultat;

    newton1D(aproximaciox, 0, &resultat);

    *solx0 = resultat;
    *soly0 = 0;
}

void trobarSegonaSolucio(double solx0, double soly0, double *solx1,
                        double *soly1){
    double aproximaciox = solx0, resultat;

    newton1D(aproximaciox, H, &resultat);

    *solx1 = resultat;
    *soly1 = H;
}

```

A.3 Codi en C per trobar la trajectòria del 39P/Oterma

```

#include <math.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

void eq3cos(double t, double *x, int n, double* f);

int main(void){

double x[4], t, h, er;

```



```

char nomFitxer[]="PuntsCorba0terma.txt";
FILE *fp;

fp=fopen(nomFitxer,"w");
if(fp==NULL){
    printf("No s'ha trobat el fitxer de sortida\n");
    exit(1);
}

t=0;

x[0]= 1.0952439413131636e0;
x[1]= -2.9918455882452549e-2;
x[2]= -1.1061743167676116e-1;
x[3]= -5.94136766591944e-2;

h=0.001;

fprintf(fp, "%20.15f %20.15f\n", x[0], x[1]);

while(t<60)
{
    rkf45(&t,x,4,&h,1,1.e-12,NULL,&er,eq3cos);
    fprintf(fp, "%20.15f %20.15f\n", x[0], x[1]);
}

fclose(fp);
return 0;
}

void eq3cos(double t, double *x, int n, double* f){
/* equacio 3 cos= 39P-0terma*/
double w=1.0, p=9.5388118036310115e-04;

f[0] = x[2];
f[1] = x[3];
f[2] = 2*w*x[3] + w*w*x[0]
        - w*w*(1-p)*(x[0]+p)/pow( (x[0]+p)*(x[0]+p)+ x[1]*x[1], 1.5)
        - w*w*p*(x[0]-1+p)/pow( (x[0]-1+p)*(x[0]-1+p)+ x[1]*x[1], 1.5);
f[3] = -2*w*x[2] + w*w*x[1]
        - w*w*(1-p)*x[1]/pow( (x[0]+p)*(x[0]+p)+ x[1]*x[1], 1.5)
        - w*w*p*x[1]/pow( (x[0]-1+p)*(x[0]-1+p)+ x[1]*x[1], 1.5);
}

```

Referències

- [1] J. Barrow-Green, *Poincaré and the three body problem*, History of Mathematics, vol. 11, American Mathematical Society, Providence, RI; London Mathematical Society, London, 1997.
- [2] G. Duarte and À. Jorba, *Using normal forms to study Oterma's transition in the planar RTBP*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **28** (2023), no. 1, 230–244.
- [3] W. S. Koon, M. W. Lo, J. E. Marsden, and S. D. Ross, *Resonance and capture of Jupiter comets*, Celestial Mech. Dynam. Astronom. **81** (2001), no. 1-2, 27–38, Dynamics of natural and artificial celestial bodies (Poznań, 2000).
- [4] J. B. Marion, *Dinámica clásica de las partículas y sistemas*, Editorial Reverté, 1998.
- [5] I. Newton, *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, Londini :Apud G. & J. Innys, 1726.
- [6] H. Pollard, *Mathematical introduction to celestial mechanics*, Prentice-Hall mathematics series, Prentice-Hall, 1966.
- [7] V. Szebehely, *Theory of orbits: The restricted problem of three bodies*, Academic Press Inc., New York, 1967.