UNIVERSITAT DE BARCELONA

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES I ADMINISTRACIÓ I DIRECCIÓ D'EMPRESES

Treball final de grau

PROBLEMES DE FIXACIÓ DE TAXES: UNA APROXIMACIÓ AXIOMÀTICA

Laia Solergibert Serra

Directors: Dr. Josep Maria Izquierdo Aznar
Dept. de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial
Dr. Josep Vives Santa Eulalia
Dept. de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 12 de juny de 2023

Resum

Aquest treball tracta des d'un punt de vista analític els *problemes de fixació de taxes* i la manera de resoldre'ls.

Primerament es defineixen aquests tipus de problemes i les principals regles existents (estudiarem la *regla proporcional*, la *regla de contribució igualitària*, la *regla d'ingrés net igualitari*, la *regla Talmúdica*, la *família de les regles talmúdiques* i la *família de les regles inverses a les talmúdiques*), seguit de les definicions de vàries propietats que poden tenir aquestes regles i les demostracions del compliment o no de cadascuna d'elles per a cada regla estudiada, per poder fer-ne una posterior caracterització.

Per últim analitzarem més en detall la propietat de la *progressivitat* i què comporta que una regla sigui més progressiva que una altra.

Abstract

This paper adresses from an analytical point of view the *taxation problems* and a way to solve them.

First, these type of problems and the existant rules are defined (we study the *proportional rule*, the *head tax*, the *leveling tax* and the *Talmud rule*, and some combinations of them), followed by the definitions of many traits that rules can have and the proofs of the compliance of each one for each rule studied, to do a posterior characterization.

Finally, we analize in detail the characteristics of *progressivity* and what makes a rule more progressive than another.

2020 Mathematics Subject Classification. 91B64, 91B32

Agraïments

En primer lloc, vull agraïr als meus tutors Josep Maria Izquierdo i Josep Vives la seva imprescindible dedicació a aquest projecte, el temps invertit i els consells donats.

En segon lloc a la meva família, per fer-me costat sempre i confiar en mi.

Per últim als meus amics, especialment a l'Andrea i al Joan, per ser el meu suport i el més especial que m'emporto de la meva etapa universitària.

Índex

Notació general

Conjunt dels nombres naturals	$\mathbb{N}$
Conjunt de subconjunts finits de $\mathbb{N}$	$\mathscr{N}$
Element genèric de $\mathscr{N}$	N
Cardinal de N	$\lvert N\rvert$
Conjunt dels nombres reals	$\mathbb{R}$
Interval tancat en $\mathbb{R}$ amb extrems a,b	$[a, b]$
Interval obert en $\mathbb{R}$ amb extrems a,b	(a, b)
Donats x,y $\in \mathbb{R}^{\lvert N\rvert},$ per cada $i \in N, x_i \leq y_i$	$x \leq y$
Donats x,y $\in \mathbb{R}^{\lvert N\rvert},$ per cada $i \in N, x_i < y_i$	$x < y$
Vectors genèrics	$y, y', ...$
Càrrega fiscal genèrica	$T, T', ...$
Problemes de fixació de taxes genèrics	$(N, T, y), (N, T', y'), ...$
Regla proporcional	F
Regla de contribució igualitària	H
Regla d'ingrés net igualitari	L
Regla Talmúdica	$\mathcal{T}$
Família de les regles talmúdiques	$\mathcal{T}_i^\theta$
Família de les regles inverses a les talmúdiques	$R\mathcal{T}_i^\theta$

1 Introducció

El projecte

Un *problema de bancarrota* té lloc quan es pretén assignar una quantitat determinada d'un bé divisible entre certs demandants i no n'hi ha prou per satisfer les demandes de tots els agents. Els exemples més coneguts són la fallida d'una empresa, l'execució d'un testament amb actius insuficients o l'assignació d'accions en empreses privatitzades.

La interpretació d'aquests problemes també es pot fer des d'una vessant impositiva, analitzant els *problemes de fixació de taxes*. En aquests casos el que s'analitza és com recaptar una determinada quantitat d'impostos d'una població amb ingressos donats.

S'han fet molts estudis sobre els *problemes de bancarrota*. En destaquen Thomson W. (2019), Moreno-Ternero J.D. i Villar A. (2002), Herrero C. i Villar A. (2002), etc. Alguns d'aquests han introduït en els seus projectes anàlisis de la part més impositiva, i són amb els que ens hem centrat per dur a terme l'estudi d'aquest treball.

En aquest projecte doncs hem analitzat amb profunditat els *problemes de fixació de taxes*, i hem estudiat les diferents maneres de resoldre'ls mitjançant les *regles fiscals*, les quals especifiquen els imports dels impostos pagats pels agents. N'hem estudiat les quatre principals, i algunes variacions d'aquestes. Hem analitzat amb profunditat les seves propietats per fer una posterior caracterització de cada una d'elles.

M'agradaria remarcar que l'estudi que s'ha fet en aquest projecte ha estat extret d'aquests llibres o articles mencionats i altres que comentarem a mesura que anem avançant, però gran part de les demostracions de les propietats que complien les regles estudiades estaven fetes respecte als problemes de bancarrota, i en aquest treball s'han adaptat als problemes de fixació de taxes.

Un dels objectius del treball ha sigut avaluar l'impacte distributiu de les regles fiscals, i ens hem centrat en la noció de la *progressivitat*. També hem introduït el concepte de la *dominació de Lorenz* i què comporta en la distribució dels ingressos després d'impostos. En l'últim capítol del treball s'ha estudiat aquest aspecte sobre una de les regles.

Estructura de la memòria

Aquest treball comença al Capítol 2 amb una introducció dels *problemes de bancarrota*. Es defineix aquest concepte i posteriorment es relaciona amb els anomenats *problemes de fixació de taxes*, la base de tot el treball. Es defineixen i s'expliquen les diferents regles que es poden aplicar sobre aquests problemes; concretament la *regla proporcional*, la *regla de contribució igualitària*, la *regla d'ingrés net igualitari* i la *regla Talmúdica*. A continuació es defineixen vàries propietats que poden tenir les regles estudiades, i es demostra per cada una d'elles quines compleixen. Es parla de propietats com la *consistència*, la *continuïtat*, la *monotonia respecte als ingressos*, etc.

Al Capítol 3 es fa una caracterització de les tres principals regles estudiades, i per cada una d'elles s'exposa i es demostra un teorema que les diferencia de la resta.

Per últim al Capítol 4 es fa una anàlisi més exhaustiva de la propietat de la *progressivitat*, on entrarem més en detall a estudiar l'anomenada *família de les regles talmúdiques* i en quins casos és progressiva o regressiva. També es defineix la relació entre les regles i aquesta propietat, i quina utilitat té a l'hora d'escollir quina regla utilitzar.

2 Model i axiomes

En aquest capítol introduirem els *problemes de bancarrota* i parlarem sobre la seva relació amb els *problemes de fixació de taxes*, amb els quals ens centrarem durant tot el treball. Estudiarem les diferents regles que es poden aplicar sobre aquests problemes i les propietats que poden tenir cadascuna d'elles, per fer una posterior caracterització d'aquestes.

2.1 Problemes de fixació de taxes i regles

Considerem una situació on es tracta de repartir un bé escàs la quantitat del qual és insuficient per satisfer la demanda dels agents que la reclamen. Aquest tipus de problemes són anomenats *problemes de bancarrota*, i l'exemple més conegut és la fallida d'una empresa, quan aquesta no pot fer front als pagaments pendents ja que són superiors als seus recursos econòmics disponibles.

Sigui $N = \{1, 2, ..., n\}$ un grup de n agents que reclamen certes demandes (*claims*) $c_i \geq 0$ per cada $i \in N$ sobre una quantitat de recursos divisible $X \in \mathbb{R}_+$. Així, el vector $c = (c_i)_{i \in N}$ serà el vector de demandes.

Definició 2.1.1. *Un* problema de bancarrota *és una terna* (N, X, c) *tal que*

$$\sum_{i \in N} c_i \geq X.$$

Un *problema de bancarrota* també es pot considerar en l'àmbit de la fiscalitat com un *problema de fixació de taxes*, on es pretén recaptar una quantitat determinada d'impostos d'una població amb vector d'ingressos bruts conegut. Aquests dos conceptes formalment són iguals, però conceptualment són diferents. Una assignació més alta en el *joc de bancarrota* és millor ja que es tradueix en una major quantitat de recursos que reben els agents, i en canvi una assignació més alta en els *problemes de fixació de taxes* és pitjor ja que implica major càrrega fiscal.

Sigui $\mathbb{N}$ el conjunt d'agents, $\mathcal{N}$ és el conjunt de subconjunts finits de $\mathbb{N}$ i el seu element genèric és N.

Definició 2.1.2. *Un* problema de fixació de taxes *(en anglès més conegut per* taxation problem*) és una terna* (N, T, y)*, on* $N = \{1, 2, ..., n\}$ *és el conjunt d'agents,* $T \in \mathbb{R}_+$ *representa la càrrega fiscal (quantitat d'impostos a recaptar) i* $y \in \mathbb{R}^n_+$ *és el vector d'ingressos bruts dels agents, el component i-èssim del qual és* y_i*, satisfent*

$$\sum_{i \in N} y_i \geq T \geq 0.$$

Denotem per $\mathbb{T}$ la família de tots els problemes de taxació.

Per simplificar la notació, escriurem $Y = \sum_{i \in N} y_i$ per a tot $(N, T, y) \in \mathbb{T}$ i assumirem d'ara en endavant sense pèrdua de generalitat que $y_1 \leq y_2 \leq ... \leq y_n$.

Ens centrarem en aquest tipus de problemes i en les formes de resoldre'ls. Estudiarem com fer-ho mitjançant les *regles fiscals*, aplicacions que associen a cada problema de fixació de taxes una assignació que especifica els imports dels impostos que han de pagar els agents.

Definició 2.1.3. *Una* regla fiscal *és una aplicació R que associa a cada $(N, T, y) \in \mathbb{T}$ un únic punt $R(N, T, y) \in \mathbb{R}^n$ tal que:*

(i) $0 \leq R(N, T, y) \leq y$,

(ii) $\sum_{i \in N} R_i(N, T, y) = T$,

(iii) *per a tot $i, j \in N$, $y_i \geq y_j$ implica*

$$R_i(N, T, y) \geq R_j(N, T, y) \quad i \quad y_i - R_i(N, T, y) \geq y_j - R_j(N, T, y).$$

El punt $x = (x_1, x_2, ..., x_n) = R(N, T, y)$ proposa una manera de repartir la càrrega fiscal entre els agents, on x_i és la càrrega assignada a l'agent i. Els requisits de la definició es refereixen a que:

(i) Cada agent pagui una quantitat no negativa i delimitada pels seus ingressos.

(ii) La càrrega fiscal total estigui coberta.

(iii) Les contribucions fiscals i els ingressos després d'impostos conservin l'ordenació dels ingressos bruts.

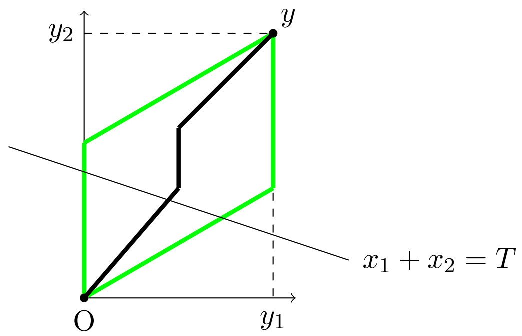


Figura 1: Aquest gràfic mostra un exemple d'una corba de pagaments d'una regla aleatòria en el cas de dos contribuents. Una corba de pagaments indica per cada valor de T, on $0 \leq T \leq y_1 + y_2$, quin seria el repartiment. El requisit (i) de la definició exigeix que la corba estigui delimitada en el rectangle, el requisit (ii) que es trobi sobre la línia que representa $x_1 + x_2 = T$ i el requisit (iii) que es trobi dins les bandes marcades amb color verd.

2.2 Principals regles

En aquest apartat definirem les regles bàsiques. Thomson W. (2019) descriu moltes d'aquestes regles; nosaltres analitzarem les següents: la *regla proporcional*, la *regla de contribució igualitària*, la *regla d'ingrés net igualitari*, la *regla Talmúdica* i algunes combinacions d'aquestes. Definirem cada una d'elles i mostrarem també una representació gràfica.

2.2.1 Regla proporcional

La *regla proporcional*, en anglès més coneguda per *flat tax*, és la més intuïtiva, i resol el problema de dividir la càrrega fiscal de manera que cada agent pagui una fracció igual dels seus ingressos. Està relacionada amb la *regla proporcional* referida als *problemes de bancarrota*, on cada demandant rep una part proporcional de la seva demanda respecte del total de demandes.

Definició 2.2.1. *La* regla proporcional (F) *és la regla que, per a tot* $(N, T, y) \in \mathbb{T}$ *i per a tot* $i \in N$*, estableix*

$$F_i(N, T, y) = \lambda y_i,$$

on $\lambda \in \mathbb{R}$ *és tal que* $\sum_{i \in N} F_i(N, T, y) = T$.

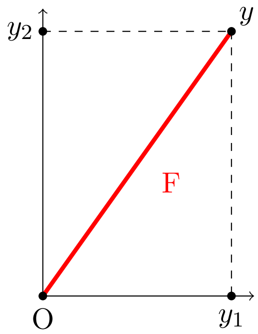


Figura 2: Corba de pagaments per a la regla proporcional en el cas de dos contribuents. Cada agent contribueix amb una part proporcional igual dels seus ingressos fins assolir el total de la càrrega fiscal.

Observem que en l'anterior definició el valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ és únic per a cada problema, ja que $\sum_{i \in N} \lambda y_i = T$ implica $\lambda = \dfrac{T}{\sum_{i \in N} y_i}$ per a tot $i \in N$.

2.2.2 Regla de contribució igualitària

La *regla de contribució igualitària*, més coneguda en anglès per *head tax*, assigna un impost fix a cada agent, i per tant reparteix la càrrega fiscal de manera uniforme sempre que cap agent acabi pagant per sobre dels seus ingressos. Aquesta regla correspon a la *regla de guanys igualitaris*, en anglès *Constrained-equal awards rule (CEA)*, on es reparteix la quantitat de forma igual a tothom sense sobrepassar el que cada agent demana.

Definició 2.2.2. *La* regla de contribució igualitària (H) *és la regla que, per a tot* $(N, T, y) \in \mathbb{T}$ *i per a tot* $i \in N$*, estableix*

$$H_i(N, T, y) = min\{y_i, \lambda\},$$

on $\lambda \in \mathbb{R}$ *és tal que* $\sum_{i \in N} H_i(N, T, y) = T$.

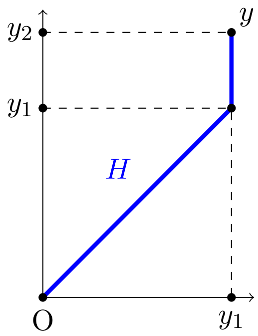


Figura 3: Corba de pagaments per a la *regla de contribució igualitària* en el cas de dos contribuents. Cada agent contribueix amb la mateixa quantitat fins que aquell amb ingressos inferiors contribueix amb el seu total d'ingressos, i a partir d'aquest punt l'agent amb majors ingressos és el que suporta tota la càrrega addicional.

Lema 2.2.1. *En la fórmula de la* regla de contribució igualitària*, el valor de λ és únic quan* $\sum_{i \in N} y_i > T$*.*

Comentari: Excloem el cas en que $\sum_{i \in N} y_i = T$ ja que aleshores podem prendre qualsevol valor $\lambda \geq y_n$.

Prova: En primer lloc demostrarem l'existència de λ mitjançant el Teorema de Bolzano. Recordem que podem assumir $y_1 \leq ... \leq y_n$.

Definim la funció $\phi(\lambda) = \sum_{i \in N} min\{y_i, \lambda\} - T$ i prenem $\lambda^M = max\{y_i \mid i \in N\} = y_n$.

Aleshores:
$$\phi(\lambda^M) = \phi(y_n) = \sum_{i \in N} y_i - T > 0.$$
$$\phi(-\lambda^M) = \phi(-y_n) = -ny_n - T = -(ny_n + T) < 0.$$

Per tant tenim una funció ϕ contínua en l'interval $[\lambda^M, -\lambda^M]$ i el signe de la funció és diferent en cadascun dels extrems de l'interval. El teorema de Bolzano estableix que existeix al menys un valor $\lambda^* \in \mathbb{R}$ dins aquest interval en el qual

$$\phi(\lambda^*) = 0 = \sum_{i \in N} min\{y_i, \lambda\} - T \Longrightarrow \sum_{i \in N} min\{y_i, \lambda\} = T.$$

Per tant l'existència queda provada.

A continuació provarem la unicitat de λ demostrant que la funció és estrictament creixent. És a dir, cal veure que si x_1, x_2 pertanyen al domini i són tals que $x_1 < x_2$, aleshores $f(x_1) < f(x_2)$. Vegem-ho.

Considerem $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq y_n$ i volem veure que $\phi(\lambda_1) < \phi(\lambda_2)$. Suposem que $y_r \leq \lambda_2 \leq y_{r+1}$, on $r \in \{0, ..., n-1\}$.

CAS 1: $y_r \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq y_{r+1}$

$$\begin{aligned}
\phi(\lambda_2) &= \sum_{i\in N} min\{y_i,\lambda_2\} - T = \sum_{k=1}^{r} y_k + (n-r)\lambda_2 - T \\
&> \sum_{k=1}^{r} y_k + (n-r)\lambda_1 - T = \sum_{i\in N} min\{y_i,\lambda_1\} - T = \phi(\lambda_1).
\end{aligned}$$

CAS 2: $\lambda_1 < y_r \leq \lambda_2 \leq y_{r+1}$:

$$\begin{aligned}
\phi(\lambda_2) &= \sum_{i\in N} min\{y_i,\lambda_2\} - T = \sum_{k=1}^{r} y_k + (n-r)\lambda_2 - T \\
&> \sum_{k=1}^{r-1} y_k + y_r + (n-r)\lambda_1 - T > \sum_{k=1}^{r-1} y_k + (n-r+1)\lambda_1 - T \\
&= \sum_{i\in N} min\{y_i,\lambda_1\} - T = \phi(\lambda_1).
\end{aligned}$$

Així doncs, queda provat que la funció és estrictament creixent i per tant λ és única.

□

2.2.3 Regla d'ingrés net igualitari

Tot seguit definim la *regla d'ingrés net igualitari*, més coneguda en anglès per *leveling tax*, la qual pretén igualar els ingressos després d'impostos entre els agents amb una condició: tots els ingressos nets són no negatius. Aquest impost correspon a la *regla de pèrdues igualitàries*, en anglès *Constrained-equal losses rule*, la qual reparteix la pèrdua en relació amb la demanda per igual entre tots els agents, és a dir, la quantitat que no reben de la part demandada és sempre la mateixa per a tots, sempre i quan cap agent rebi un pagament negatiu.

Definició 2.2.3. *La* regla d'ingrés net igualitari (L) *és la regla que, per a tot* $(N,T,y) \in \mathbb{T}$ *i per a tot* $i \in N$*, estableix*

$$L_i(N,T,y) = max\{0, y_i - \lambda\},$$

on $\lambda \in \mathbb{R}$ *és tal que* $\sum_{i\in N} L_i(N,T,y) = T$.

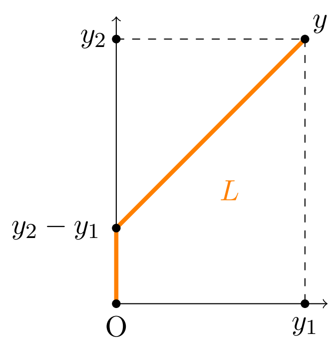


Figura 4: Corba de pagaments per a la *regla d'ingrés net igualitari* en el cas de dos contribuents. Aquell agent amb ingressos superiors contribueix fins que els seus ingressos després d'impostos són iguals als de l'altre agent, i després contribueixen a parts iguals.

Més endavant, a la pàgina 10, definirem el concepte de *dualitat* i demostrarem que la *regla d'ingrés net igualitari* és dual a la *regla de contribució igualitària*. Això comporta que en la definició 2.2.3 el valor de λ també sigui únic.

2.2.4 Regla Talmúdica

Abans de definir aquesta regla recordem que el *Talmud* és una obra elaborada entre els segles III i V que recull principalment discussions rabíniques sobre lleis jueves, tradicions, costums, narracions, paràboles, històries i llegendes. Entre aquestes lleis figuren recomanacions sobre com distribuir-se una quantitat que està en disputa, el que posteriorment s'ha conegut com la *regla Talmúdica*.

La *regla Talmúdica* va ser estudiada i formalitzada amb profunditat per Aumann i Maschler (1985). Aquesta regla es comporta com la *regla d'ingrés net igualitari* o la *regla de contribució igualitària* depenent de si la càrrega fiscal supera o no arriba a la meitat dels ingressos totals dels contribuents. Es correspon a la *regla Talmúdica* referida als *problemes de bancarrota*, on en el cas de dos contribuents cada agent concedeix a l'altre la part que no reclama, i si queda quelcom a repartir s'ho reparteixen a parts iguals (en anglès és més conegut per *concede and divide*).

Definició 2.2.4. *La* regla Talmúdica ($\mathcal{T}$) *és la regla que, per a tot* $(N, T, y) \in \mathbb{T}$ *i per a tot* $i \in N$*, estableix*

$$\mathcal{T}_i(N,T,y) = \begin{cases} H_i\left(N, T, \dfrac{1}{2}y\right) = min\left\{\dfrac{1}{2}y_i, \lambda\right\} & si \quad T \leq \dfrac{1}{2}Y, \\ \\ \dfrac{1}{2}y_i + L_i\left(N, T - \dfrac{1}{2}Y, \dfrac{1}{2}y\right) = \dfrac{1}{2}y_i + max\left\{\dfrac{1}{2}y_i - \mu, 0\right\} & \\ = y_i - min\left\{\dfrac{1}{2}y_i, \mu\right\} & si \quad T \geq \dfrac{1}{2}Y, \end{cases}$$

on λ i μ són escollides per tal que $\sum_{i \in N} \mathcal{T}_i(N,T,y) = T$.

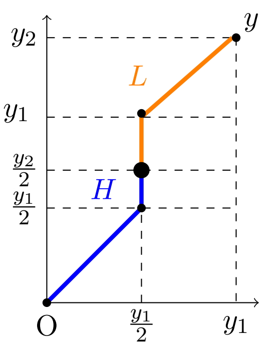


Figura 5: Corba de pagaments per a la *regla Talmúdica* en el cas de dos contribuents. Mentre la càrrega fiscal és menor a la meitat de la suma dels ingressos de tots els contribuents, actua com la regla de contribució igualitària. Quan és major o igual, actua com la regla d'ingrés net igualitari.

Lema 2.2.2. *En la fórmula de la* regla Talmúdica*, el valor de λ és únic.*

Prova: Diferenciem casos:

CAS 1: $T \geq \frac{1}{2}Y \Longrightarrow \mathcal{T}_i(N,T,y) = H_i(N,T,\frac{1}{2}y_i)$

Com que hem provat en el lema 2.2.1 que en la definició de la *regla de contribució igualitària* el valor de λ és únic, aquí també ho serà.

CAS 2: $T \leq \frac{1}{2}Y \Longrightarrow \mathcal{T}_i(N,T,y) = \frac{1}{2}y_i + L_i(N,T-\frac{1}{2}Y,\frac{1}{2}y)$

Hem vist que en la definició de la *regla de d'ingrés net igualitari* el valor de λ és únic, per tant aquí també ho serà.

$\square$

Moreno-Ternero J.D. i Villar A. (2002) estudien una família de regles (la *família de les regles talmúdiques*), la qual generalitza la *regla Talmúdica* i inclou la *regla d'ingrés net igualitari* i la *regla de contribució igualitària*.

Definició 2.2.5. *La* família de les regles talmúdiques *(*família TAL*) consta de totes les regles amb la següent forma. Sigui $\theta \in (0,1)$, per a tot $(N,T,y) \in \mathbb{T}$ i per a tot $i \in N$:*

$$\mathcal{T}_i^{\theta}(N,T,y) = \begin{cases} min\{\theta y_i, \lambda\} & si \quad T \leq \theta Y, \\ max\{\theta y_i, y_i - \mu\} = y_i - min\{\theta y_i, \mu\} & si \quad T \geq \theta Y, \end{cases}$$

on λ i μ són tals que $\sum_{i \in N} \mathcal{T}_i^{\theta}(N,T,y) = T$.

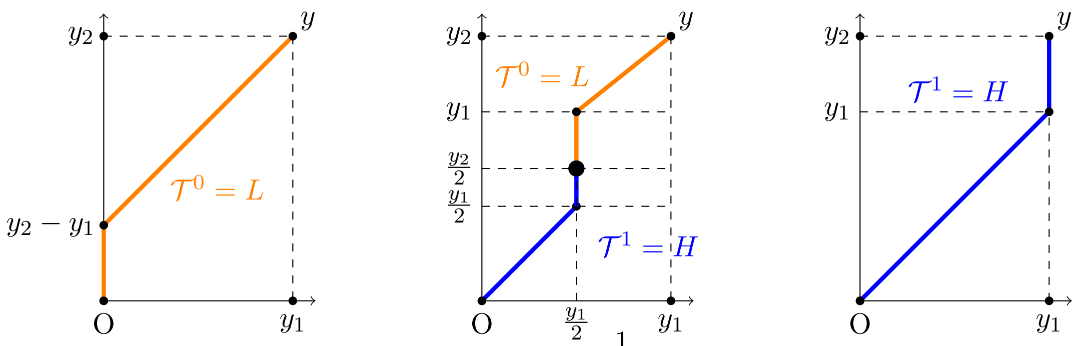
Observem que:

i) Si $\theta = 0$ obtenim trivialment la *regla d'ingrés net igualitari*. Vegem-ho:
Sigui $\theta = 0$, aleshores $T \geq 0$, per tant $\mathcal{T}_i^0 = max\{0, y_i - \mu\} = L_i$.

ii) Si $\theta = \frac{1}{2}$, obtenim trivialment la *regla Talmúdica*.

iii) Si $\theta = 1$, obtenim la *regla de contribució igualitària*. Vegem-ho:
Sigui $\theta = 1$, aleshores $T \leq Y$, per tant $\mathcal{T}_i = min\{y_i, \lambda\} = H_i$.

Segons el valor de θ tenim, doncs, els següents casos:



(a) $\theta = 0$ (b) $\theta = \frac{1}{2}$ (c) $\theta = 1$

Figura 6: Corba de pagaments per a la *família de les regles talmúdiques* en el cas de dos contribuents en funció del valor de θ.

A continuació definim la *família de les regles inverses a les talmúdiques*, en anglès més coneguda per *Reverse Talmudic rules.*

Definició 2.2.6. *La* família de les regles inverses a les talmúdiques *consta de totes les normes amb la següent forma. Sigui* $\theta \in (0,1)$*, per a tot* $(N,T,y) \in \mathbb{T}$ *i per a tot* $i \in N$ *tenim*

$$RT_i^\theta(N,T,y) = \begin{cases} max\{0, \theta y_i - \lambda\} & si \quad T \leq \theta Y, \\ \theta y_i + min\{(1-\theta)y_i, \lambda\} & si \quad T \geq \theta Y, \end{cases}$$

on λ *és tal que* $\sum_{i \in N} RT_i^\theta(N,T,y) = T$.

En aquest cas, observem que:

i) Si $\theta = 0$, obtenim la *regla de contribució igualitària.* Vegem-ho:
Sigui $\theta = 0$, aleshores $T \geq 0$ per tant $RT_i^0(N,T,y) = min\{y_i, \lambda\} = H_i$.

ii) Si $\theta = 1$, obtenim la *regla d'ingrés net igualitari.* Vegem-ho:
Sigui $\theta = 1$, aleshores $T \leq \ Y$ i per tant $RT_i^1(N,T,y) = max\{0, y_i - \lambda\} = L_i$.

Segons el valor de θ tenim, doncs, els següents casos:

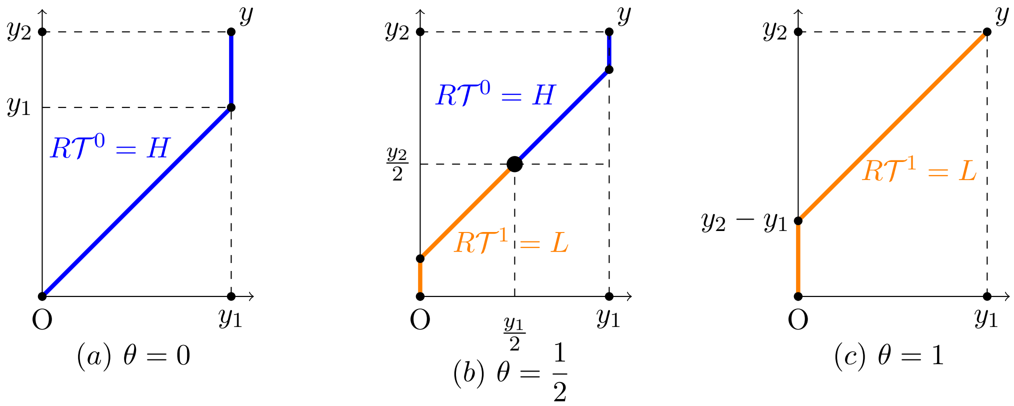


Figura 7: Corba de pagaments per a la *família de les regles inverses a les talmúdiques* en el cas de dos contribuents en funció del valor de θ.

2.3 Dualitat entre regles

Un *problema de fixació de taxes* es pot veure des de dues perspectives: enfocat des del que s'ha de recaptar o bé dels ingressos restants dels contribuents un cop s'ha fet el repartiment. La simetria en aquestes perspectives es percep fàcilment en les definicions de la *regla de contribució igualitària* i la *regla d'ingrés net igualitari*, per exemple. Aquest concepte seria una idea de la *dualitat*, que definim a continuació.

Definició 2.3.1. *Donada una regla* R*, direm que la regla* R^* *és dual de* R *si per a tot* $(N,T,y) \in \mathbb{T}$ *tenim*

$$R(N,T,y) = y - R^*(N,M,y),$$

on $M = \sum_{i \in N} y_i - T$.

En el següent lema demostrarem la noció de *dualitat* per les regles estudiades.

Lema 2.3.1. *Per a tot problema* $(N, T, y) \in \mathbb{T}$ *es compleix el següent:*

(a) La regla de contribució igualitària i la regla d'ingrés net igualitari són duals.

(b) La regla proporcional és dual de si mateixa.

(c) La regla Talmúdica és dual de si mateixa.

Prova:

(a) Volem veure que la *regla de contribució igualitària* i la *regla d'ingrés net igualitari* són duals.

Sigui $H_i(N, T, y) = min\{y_i, \lambda\}$, volem veure que $H_i(N, T, y) = y_i - L_i(N, M, y)$, on $M = \sum_{i \in N} y_i - T$. Vegem-ho:

$$\begin{aligned} H_i(N, T, y) &= min\{\lambda, y_i\} + y_i - y_i = y_i + min\{\lambda - y_i, y_i - y_i\} \\ &= y_i - max\{-(\lambda - y_i), 0\} = y_i - max\{y_i - \lambda, 0\} = y_i - L_i(N, M, y), \end{aligned}$$

on a l'última igualtat hem aplicat el següent: sabem que λ és escollida per tal que $\sum_{i \in N} min\{y_i, \lambda\} = T$. Llavors observem que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} max\{y_i - \lambda, 0\} &= \sum_{i \in N} y_i + \sum_{i \in N} max\{y_i - \lambda - y_i, -y_i\} \\ &= \sum_{i \in N} y_i + \sum_{i \in N} max\{-\lambda, -y_i\} \\ &= \sum_{i \in N} y_i - \sum_{i \in N} min\{\lambda, y_i\} = \sum_{i \in N} y_i - T = M. \end{aligned}$$

Per tant tenim que $max\{y_i - \lambda, 0\} = L_i(N, M, y)$, on $M = \sum_{i \in N} y_i - T$.

(b) Volem veure que la *regla proporcional* és dual de si mateixa. És a dir, que

$$F(N, T, y) = y - F(N, \sum_{i \in N} y_i - T, y).$$

Sabem per definició de la regla que $\lambda = \dfrac{T}{\sum_{i \in N} y_i}$ i per tant

$$\begin{aligned} F_i(N, T, y) &= \lambda y_i = \frac{T}{\sum_{j \in N} y_j} y_i + y_i - y_i = y_i - y_i \left(\frac{-T}{\sum_{j \in N} y_j} + 1 \right) \\ &= y_i - y_i \left(\frac{-T + \sum_{j \in N} y_j}{\sum_{j \in N} y_j} \right) \end{aligned}$$

I observem que efectivament es compleix el que volíem provar, ja que $\dfrac{-T + \sum_{j \in N} y_j}{\sum_{j \in N} y_j}$ seria la λ de la regla $F(N, \sum_{i \in N} y_i - T, y)$.

(c) Volem veure que la *regla Talmúdica* és dual de si mateixa. És a dir, que

$$\mathcal{T}(N, T, y) = y - \mathcal{T}(N, \sum_{i \in N} y_i - T, y).$$

Anem a diferenciar casos:

CAS 1: $T \leq \frac{1}{2} Y$

En aquest cas tenim $\mathcal{T}_i(N, T, y) = min \left\{ \frac{1}{2} y_i, \lambda \right\}$.

El que volem veure en aquest cas és que $min \left\{ \frac{1}{2} y_i, \lambda \right\} = y_i - \mathcal{T}_i(N, \sum_{i \in N} y_i - T, y)$.

Com que $T \leq \frac{1}{2} \sum_{i \in N} y_i \Longrightarrow T + \frac{1}{2} \sum_{i \in N} y_i < \sum_{i \in N} y_i \Longrightarrow \frac{1}{2} \sum_{i \in N} y_i < \sum_{i \in N} y_i - T$ i per tant $\mathcal{T}_i(N, \sum_{i \in N} y_i - T, y) = y_i - min \left\{ \frac{1}{2} y_i, \lambda' \right\}$.

Aleshores volem veure que $min \left\{ \frac{1}{2} y_i, \lambda \right\} = y_i - y_i + min \left\{ \frac{1}{2} y_i, \lambda' \right\} = min \left\{ \frac{1}{2} y_i, \lambda' \right\}$, és a dir ens falta provar que $\lambda = \lambda'$.

Recordem que λ és tal que $\sum_{i \in N} min \left\{ \frac{1}{2} y_i, \lambda \right\} = T$ i per altra banda, λ' és tal que $\sum_{i \in N} \left(y_i - min \left\{ \frac{1}{2} y_i, \lambda' \right\} \right) = \sum_{i \in N} y_i - T$.

De l'última igualtat observem que

$$\sum_{i \in N} \left(y_i - min \left\{ \frac{1}{2} y_i, \lambda' \right\} \right) = \sum_{i \in N} y_i - \sum_{i \in N} min \left\{ \frac{1}{2} y_i, \lambda' \right\} = \sum_{i \in N} y_i - T$$

i per tant $\sum_{i \in N} min \left\{ \frac{1}{2} y_i, \lambda' \right\} = T$, és a dir $\lambda = \lambda'$.

CAS 2: $T \geq \frac{1}{2} Y$

En aquest cas tenim

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_i(N, T, y) &= \frac{1}{2} y_i + L_i \left(N, T - \frac{1}{2} Y, \frac{1}{2} y \right) = y_i - \frac{1}{2} y_i + L_i \left(N, T - \frac{1}{2} Y, \frac{1}{2} y \right) \\ &= y_i - \frac{1}{2} y_i + max \left\{ 0, \frac{1}{2} y_i - \lambda \right\} = y_i - \frac{1}{2} y_i - min \left\{ 0, \lambda - \frac{1}{2} y_i \right\} \\ &= y_i - min \left\{ \frac{1}{2} y_i, \lambda \right\} \end{aligned}$$

Volem veure que $\mathcal{T}_i(N,T,y) = y_i - \mathcal{T}_i\left(N, \sum_{i\in N} y_i - T, y\right)$.

Com que $T \geq \frac{1}{2}\sum_{i\in N} y_i \Longrightarrow T + \frac{1}{2}\sum_{i\in N} y_i \geq \sum_{i\in N} y_i \Longrightarrow \frac{1}{2}\sum_{i\in N} y_i \geq \sum_{i\in N} y_i - T$, aleshores $\mathcal{T}_i\left(N, \sum_{i\in N} y_i - T, y\right) = min\left\{\frac{1}{2}y_i, \lambda'\right\}$.

En definitiva el que volem veure és que $y_i - min\left\{\frac{1}{2}y_i, \lambda\right\} = y_i - min\left\{\frac{1}{2}y_i, \lambda'\right\}$, és a dir, $\lambda = \lambda'$.

Per una banda tenim que λ és tal que

$$\sum_{i\in N} \mathcal{T}_i(N,T,y) = T \Longrightarrow \sum_{i\in N}\left(y_i - min\left\{\frac{1}{2}y_i, \lambda\right\}\right) = T \Longrightarrow Y - T = \sum_{i\in N} min\left\{\frac{1}{2}y_i, \lambda\right\}.$$

Per altra banda, λ' és tal que

$$\sum_{i\in N} H_i(N, Y-T, y) = T \Longrightarrow \sum_{i\in N} min\left\{\frac{1}{2}y_i, \lambda'\right\} = Y - T.$$

Per tant $\lambda = \lambda'$.

□

2.4 Propietats

En aquest apartat definirem les principals propietats a partir de les quals podrem caracteritzar les regles definides anteriorment. Per cada un d'elles, demostrarem quines de les regles estudiades els compleixen i quines no.

Algunes d'aquestes propietats van ser definides per Chambers C.P. i Moreno-Ternero J.D. (2017) i per JU B.G. i Moreno-Ternero J.D. (2017) en l'àmbit dels *problemes de bancarrota*, i les hem adaptat als *problemes de fixació de taxes*.

2.4.1 Progressivitat i regressivitat

La *progressivitat* postula que per qualsevol parell d'agents, aquell amb ingressos superiors hauria d'afrontar una taxa impositiva almenys tant alta com la taxa dels de menys ingressos. Per altra banda la *regressivitat* postula el contrari.

La *progressivitat* és important perquè estableix que aquells agents amb majors ingressos contribueixen amb major quantitat a la recaptació d'impostos, i per tant s'anivella el benestar de la població.

Progressivitat/Regressivitat: Per cada $(N,T,y) \in \mathbb{T}$ i per a cada $i, j \in N$, si $0 < y_i \leq y_j$ tenim que una regla R és *progressiva* (respectivament *regressiva*) si

$$\frac{R_i(N,T,y)}{y_i} \leq \frac{R_j(N,T,y)}{y_j}$$

o respectivament

$$\frac{R_i(N,T,y)}{y_i} \geq \frac{R_j(N,T,y)}{y_j}.$$

Lema 2.4.1. *Per a tot problema $(N,T,y) \in \mathbb{T}$ es compleix el següent:*

(i) La regla proporcional és una regla progressiva i regressiva.

(ii) La regla de contribució igualitària és una regla regressiva.

(iii) La regla d'ingrés net igualitari és una regla progressiva.

Comentari: La *regla Talmúdica* serà analitzada amb més detall en el capítol 4.
Prova:

(i) Suposem $0 < y_i \leq y_j$. Aleshores

$$\frac{F_i(N,T,y)}{y_i} = \frac{\lambda y_i}{y_i} = \lambda = \frac{\lambda y_j}{y_j} = \frac{F_j(N,T,y)}{y_j}.$$

Observem doncs que la *regla proporcional* és una regla progressiva i regressiva alhora.

(ii) Volem veure que si $0 < y_i \leq y_j$, aleshores $\dfrac{H_i(N,T,y)}{y_i} \geq \dfrac{H_j(N,T,y)}{y_j}$.

Suposem, doncs, $y_i \leq y_j$. Tenim

$$\begin{aligned}\frac{H_i(N,T,y)}{y_i} &= \frac{min\{\lambda, y_i\}}{y_i} = min\left\{\frac{\lambda}{y_i}, \frac{y_i}{y_i}\right\} = min\left\{\frac{\lambda}{y_i}, 1\right\} \geq min\left\{\frac{\lambda}{y_j}, 1\right\} \\ &= min\left\{\frac{\lambda}{y_j}, \frac{y_j}{y_j}\right\} = \frac{min\{\lambda, y_j\}}{y_j} = \frac{H_j(N,T,y)}{y_j}.\end{aligned}$$

Observem que efectivament la *regla de contribució igualitària* és una regla regressiva.

(iii) Volem veure que si $0 < y_i \leq y_j$, aleshores $\dfrac{L_i(N,T,y)}{y_i} \leq \dfrac{L_j(N,T,y)}{y_j}$.

Suposem, doncs, $y_i \leq y_j$. Tenim

$$\begin{aligned}\frac{L_i(N,T,y)}{y_i} &= \frac{max\{0, y_i - \lambda\}}{y_i} = max\left\{\frac{0}{y_i}, \frac{y_i - \lambda}{y_i}\right\} = max\left\{\frac{0}{y_i}, \frac{y_i}{y_i} - \frac{\lambda}{y_i}\right\} \\ &= max\left\{\frac{0}{y_i}, 1 - \frac{\lambda}{y_i}\right\} \leq max\left\{\frac{0}{y_j}, 1 - \frac{\lambda}{y_j}\right\} = max\left\{\frac{0}{y_j}, \frac{y_j}{y_j} - \frac{\lambda}{y_j}\right\} \\ &= \frac{max\{0, y_j - \lambda\}}{y_j} = \frac{L_j(N,T,y)}{y_j}.\end{aligned}$$

Observem doncs que *la regla d'ingrés net igualitari* és una regla progressiva.

□

2.4.2 L'anonimat

Aquesta propietat estableix que els pagaments d'impostos no depenen del nom del contribuent.

La importància de l'*anonimat* es deu a que els agents no contribueixen en funció del seu nom sinó en funció dels seus ingressos.

Anonimat: Per cada $(N, T, y) \in \mathbb{T}$, cada $N' \in \mathscr{N}$, cada bijecció $\pi : N \to N'$ i cada $i \in N$, tenim

$$R_{\pi(i)}(N', T, (y_{\pi(i)})_{i \in N}) = R_i(N, T, y).$$

Lema 2.4.2. *Per a tot problema* $(N, T, y) \in \mathbb{T}$*, la* regla proporcional*, la* regla de contribució igualitària*, la* regla d'ingrés net igualitari *i la* regla Talmúdica *compleixen la propietat de* l'anonimat.

La demostració del lema és trivial.

2.4.3 Consistència

Aquesta propietat estableix que, un cop certs agents contribueixen amb el que els pertoca, si es reparteix el que queda entre els agents restants aquests segueixen contribuint amb la mateixa quantitat.

Consistència: Per cada $(N, T, y) \in \mathbb{T}$ i cada $M \subset N$, si $x = R(N, T, y)$ llavors

$$x_M = R(M, \sum_{i \in M} x_i, y_M).$$

Lema 2.4.3. *Per a tot problema* $(N, T, y) \in \mathbb{T}$*:*

(i) La regla proporcional és consistent.

(ii) La regla de contribució igualitària és consistent.

(iii) La regla d'ingrés net igualitari és consistent.

(iv) La regla Talmúdica és consistent.

Prova:

(i) Sigui $(N, T, y) \in \mathbb{T}$ i $M \subset N$. La *regla proporcional* defineix

$$x_i = F_i(N, T, y) = \frac{T}{\sum\limits_{i \in N} y_i} y_i$$

per a tot $i \in N$.

Per altra banda,

$$x'_i \quad = F_i \left(M, T - \frac{T}{\sum\limits_{i \in N} y_i} \left(\sum_{i \in N \setminus M} y_i \right), y_M \right) = \frac{T - \dfrac{T}{\sum\limits_{i \in N} y_i} \left(\sum\limits_{i \in N \setminus M} y_i \right)}{\sum\limits_{i \in M} y_i} y_i.$$

Volem veure que $x_i = x'_i$. Vegem-ho:

$$\begin{aligned}
x'_i &= \frac{T - \dfrac{T}{\sum\limits_{i\in N} y_i}\left(\sum\limits_{i\in N\setminus M} y_i\right)}{\sum\limits_{i\in M} y_i} y_i = \frac{\dfrac{T\sum\limits_{i\in N} y_i - T\sum\limits_{i\in N\setminus M} y_i}{\sum\limits_{i\in N} y_i}}{\sum\limits_{i\in M} y_i} y_i \\
&= \frac{\dfrac{T\left(\sum\limits_{i\in N} y_i - \sum\limits_{i\in N\setminus M} y_i\right)}{\sum\limits_{i\in N} y_i}}{\sum\limits_{i\in M} y_i} y_i = \frac{\dfrac{T\sum\limits_{i\in M} y_i}{\sum\limits_{i\in N} y_i}}{\sum\limits_{i\in M} y_i} y_i = \frac{T}{\sum\limits_{i\in N} y_i} y_i = x_i.
\end{aligned}$$

Observem que són iguals per tant es compleix la propietat.

(ii) Sigui $(N, T, y) \in \mathbb{T}$ i $M \subset N$. La *regla de contribució igualitària* defineix

$$x_i = H_i(N, T, y) = min\{y_i, \lambda\}.$$

Per altra banda, $x'_i = H_i(M, T - \sum\limits_{i\in N\setminus M} min\{y_i, \lambda\}, y_M) = min\{y_i, \lambda'\}$.

Per veure $x_i = x'_i$ el que hem de veure és que $\lambda = \lambda'$. Sabem per definició que λ és tal que

$$\sum_{i\in N} min\{y_i, \lambda\} = T$$

i λ' és tal que

$$\sum_{i\in N} min\{y_i, \lambda'\} = T - \sum_{i\in N\setminus M} min\{y_i, \lambda\}.$$

Anem a comprovar si es compleix la igualtat:

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in M} min\{y_i, \lambda\} &= \sum_{i\in M} H_i(N, T, y) \\
&= \sum_{i\in M} H_i(N, T, y) + \sum_{i\in N\setminus M} H_i(N, T, y) - \sum_{i\in N\setminus M} H_i(N, T, y) \\
&= T - \sum_{i\in N\setminus M} H_i(N, T, y) = T - \sum_{i\in N\setminus M} min\{y_i, \lambda\}.
\end{aligned}$$

Per tant observem que $\lambda = \lambda'$ i es compleix la propietat.

(iii) Sigui $(N, T, y) \in \mathbb{T}$ i $M \subset N$. La *regla d'ingrés net igualitari* defineix

$$x_i = L_i(N, T, y) = max\{0, y_i - \lambda\}.$$

Per altra banda, $x'_i = L_i\left(M, T - \sum\limits_{i\in N\setminus M} max\{0, y_i - \lambda\}, y_M\right) = max\{0, y_i - \lambda'\}$.

Per veure $x'_i = x_i$ el que hem de veure és que $\lambda = \lambda'$. Sabem per definició que λ és tal que

$$\sum_{i \in N} max\{0, y_i - \lambda\} = T$$

i λ' és tal que

$$\sum_{i \in N} max\{0, y_i - \lambda'\} = T - \sum_{i \in N \setminus M} max\{0, y_i - \lambda\}.$$

Vegem que prenent λ es compleix la condició de λ'.

$$\begin{aligned}\sum_{i \in M} max\{0, y_i - \lambda\} &= \sum_{i \in M} L_i(N, T, y) \\ &= \sum_{i \in M} L_i(N, T, y) + \sum_{i \in N \setminus M} L_i(N, T, y) - \sum_{i \in N \setminus M} L_i(N, T, y) \\ &= T - \sum_{i \in N \setminus M} L_i(N, T, y) = T - \sum_{i \in N \setminus M} max\{0, y_i - \lambda\}.\end{aligned}$$

Per tant observem que $\lambda = \lambda'$ i es compleix la propietat.

(iv) Sigui $x = \mathcal{T}(N, T, y)$ i $M \subseteq N$. Hem de provar que

$$\mathcal{T}(N, T, y)_{|M} = \mathcal{T}(M, T - \sum_{i \in N \setminus M} x_i, y_M),$$

on $T - \sum_{i \in N \setminus M} x_i = \sum_{i \in M} x_i$ i denotem $\sum_{i \in M} x_i = x(M)$ per simplificar la notació.

CAS 1: $T \leq \frac{1}{2}Y$

Suposem que $T \leq \frac{1}{2}Y$. Aleshores

$$x_i \leq \frac{1}{2}y_i \tag{2.1}$$

per a tot $i \in N$.

És fàcil veure que $\frac{1}{2}y(M) \geq T - x(N \setminus M) = x(M)$. Si no fos així, és a dir si $\frac{1}{2}y(M) < x(M)$, existiria almenys un $i \in M$ tal que $\frac{1}{2}y_i < x_i$, fet que contradiu (2.1).

Per tant tenim que

$$\mathcal{T}(N, T, y)_{|M} = H\left(N, T, \frac{1}{2}y\right)_{|M} = H\left(M, x(M), \frac{1}{2}y_{|M}\right) = \mathcal{T}(M, x(M), y_M),$$

on la primera igualtat es deu a la definició de la *regla Talmúdica* quan $\frac{1}{2}Y \geq T$, la segona a que la *regla de contribució igualitària* és consistent i la tercera a que $\frac{1}{2}y(M) \geq x(M)$.

CAS 2: $T > \frac{1}{2}Y$

Suposem que $T > \frac{1}{2}Y$. Aleshores $x_i \geq \frac{1}{2}y_i$ per a tot $i \in N$.

Tenim

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(N,T,y)_{|M} &= \frac{1}{2}y_{|M} + L\left(N, T - \frac{1}{2}Y, \frac{1}{2}y\right)_{|M} = \frac{1}{2}y_{|M} + L\left(M, z(M), \frac{1}{2}y_{|M}\right) \\
&= \mathcal{T}(M, x(M), y_M),
\end{aligned}$$

on a la primera igualtat hem utilitzat la definició de la *regla Talmúdica* quan $T > \frac{1}{2}Y$, a la segona que la *regla d'ingrés net igualitari* és consistent i a la tercera el següent:

$$\begin{aligned}
z(M) &= T - \frac{1}{2}Y - z(N \setminus M) = T - \frac{1}{2}\sum_{i\in M} y_i - \frac{1}{2}\sum_{i\in N\setminus M} y_i - \sum_{i\in N\setminus M} z_i \\
&= T - \frac{1}{2}\sum_{i\in M} y_i - \sum_{i\in N\setminus M}\left(\frac{1}{2}y_i + z_i\right) = T - \frac{1}{2}\sum_{i\in M} y_i - \sum_{i\in N\setminus M} x(N \setminus M) \\
&= x(M) - \frac{1}{2}\sum_{i\in M} y_i > 0.
\end{aligned}$$

□

2.4.4 Continuïtat

Aquesta propietat estableix que els petits canvis en els ingressos no produeixen un salt en els pagaments d'impostos.

Continuïtat: Per cada $N \in \mathcal{N}$, cada $(N,T,y) \in \mathbb{T}^N$ i cada seqüència $\{(N,T^n,y^n) : n \in \mathbb{N}\}$ a $\mathbb{T}^N$, si (y^n,T^n) convergeix a (y,T) llavors $R(N,T^n,y^n)$ convergeix a $R(N,T,y)$.

Lema 2.4.4. *La* regla proporcional*, la* regla de contribució igualitària*, la* regla d'ingrés net igualitari *i la* regla Talmúdica *compleixen la propietat de* continuïtat*.*

La demostració del lema és trivial.

2.4.5 Sacrifici total condicionat

Si un agent contribueix amb la totalitat dels seus ingressos, com també ho fan els que ingressen menys, i suposant que els que ingressen més contribueixen igual que ell i tot i així no hi ha prou per cobrir la totalitat dels impostos a recaptar, aleshores la propietat estableix que l'agent ha de contribuir amb la totalitat dels seus ingressos. D'aquesta manera podem dir que els ingressos de l'agent són imprescindibles.

Abans de definir la propietat formalment, introduïm el concepte que defineixen Herrero C. i Villar A. (2002) d'*ingrés imprescindible:* diem que els ingressos d'un agent $'i'$ són *imprescindibles* en (N,T,y) si

$$\sum_{j\in N} min\{y_i, y_j\} \leq T.$$

Sacrifici total condicionat: Per cada $(N,T,y) \in \mathbb{T}$ i cada $i \in N$, si els ingressos d'un agent $'i'$ són *imprescindibles* aleshores

$$R_i(N,T,y) = y_i.$$

Lema 2.4.5. *Respecte a la propietat de* sacrifici total condicionat*, es verifica per a tot problema* $(N,T,y) \in \mathbb{T}$ *el següent:*

(i) La regla proporcional no compleix la propietat.

(ii) La regla de contribució igualitària compleix la propietat.

(iii) La regla d'ingrés net igualitari no compleix la propietat.

(iv) La regla Talmúdica no compleix la propietat.

Prova:

(i) Ho provarem mitjançat un contraexemple. Sigui $N = \{1,2,3,4\}$ un grup de 4 agents amb corresponents ingressos $y = (100, 200, 300, 400)$ i sigui $T = 800$. Prenem $i = 2$. Volem veure que si $\sum_{j \in N} min\{y_2, y_j\} \leq T$, aleshores $F_2(N,T,y) = y_2$.

Observem que

$$\begin{aligned}\sum_{j \in N} min\{y_2, y_j\} &= min\{y_2, y_1\} + min\{y_2, y_2\} + min\{y_2, y_3\} + min\{y_2, y_4\} \\ &= y_1 + y_2 + y_2 + y_2 = 700 \leq 800.\end{aligned}$$

Per tant l'agent 2 és *imprescindible.* A continuació volem provar, doncs, que

$$F_2(N,T,y) = y_2 = 200.$$

Sabem que la *regla proporcional* es defineix com $F_i(N,T,y) = \lambda y_i$. Per tant el que volem provar és que $\lambda y_2 = y_2$, és a dir $\lambda = 1$.

Per definició de la regla, tenim que

$$\lambda = \frac{T}{\sum_{i \in N} y_i} = \frac{800}{1000} \neq 1.$$

Per tant no es compleix la propietat per la *regla proporcional.*

(ii) Ho provarem mitjançant contradicció. Sigui $H_i(N,T,y) = min\{y_i, \lambda\}$. Per definició, tenim que

$$\sum_{i \in N} min\{y_i, \lambda\} = T. \tag{2.2}$$

Suposem que $\sum_{j \in N} min\{y_i, y_j\} \leq T$ però $H_i(N,T,y) = min\{y_i, \lambda\} < y_i$, és a dir, $\lambda < y_i$.

Aleshores tenim que $\sum_{j \in N} min\{y_i, y_j\} > \sum_{j \in N} min\{\lambda, y_j\} = T$ per tant trobem una contradicció amb (2.2).

(iii) Ho provarem mitjançant un contraexemple. Sigui $N = \{1, 2, 3, 4\}$ un grup de 4 agents amb corresponents ingressos $y = (100, 200, 300, 400)$ i sigui $T = 800$. Prenem $i = 2$.

Volem veure que si $\sum_{j \in N} min\{y_2, y_j\} \leq T$, aleshores $L_2(N, T, y) = y_2$.

Observem que

$$\begin{aligned}\sum_{j \in N} min\{y_2, y_j\} &= min\{y_2, y_1\} + min\{y_2, y_2\} + min\{y_2, y_3\} + min\{y_2, y_4\} \\ &= y_1 + y_2 + y_2 + y_2 = 700 \leq 800.\end{aligned}$$

Per tant l'agent 2 és *imprescindible.* A continuació volem provar, doncs, que

$$L_2(N, T, y) = y_2.$$

Sabem que la *regla d'ingrés net igualitari* es defineix com

$$L_i(N, T, y) = max\{0, y_i - \lambda\},$$

per tant el que volem veure és que $max\{0, y_2 - \lambda\} = y_2$, és a dir, $y_2 - \lambda = y_2$, és a dir, $\lambda = 0$.

Per definició de la regla, tenim

$$\sum_{i \in N} max\{0, y_i - \lambda\} = T. \tag{2.3}$$

Suposem que $\lambda = 0$. Aleshores tenim que

$$\begin{aligned}\sum_{i \in N} max\{0, y_i - \lambda\} &= max\{0, y_1\} + max\{0, y_2\} + max\{0, y_3\} + max\{0, y_4\} \\ &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100 + 200 + 300 + 400 = 1000 \neq T.\end{aligned}$$

i trobem una contradicció amb (2.3).

(iv) **CAS 1:** $T \geq \frac{1}{2}Y$

Ho provarem mitjançant un contraexemple. Sigui $N = \{1, 2, 3, 4\}$ un grup de 4 agents amb corresponents ingressos $y = (100, 200, 300, 400)$ i sigui $T = 800$. Prenem $i = 2$.

Volem veure que si $\sum_{j \in N} min\{y_2, y_j\} \leq T$, aleshores $\mathcal{T}(N, T, y) = y_2$.

Observem que

$$\begin{aligned}\sum_{j \in N} min\{y_2, y_j\} &= min\{y_2, y_1\} + min\{y_2, y_2\} + min\{y_2, y_3\} + min\{y_2, y_4\} \\ &= y_1 + y_2 + y_2 + y_2 = 700 \leq 800.\end{aligned}$$

Per tant l'agent 2 és *imprescindible.* A continuació volem provar, doncs, que

$$\mathcal{T}_2(N, T, y) = y_2.$$

En el cas en el que ens trobem, la regla és definida com

$$\mathcal{T}_2(N,T,y) = y_2 - min\left\{\frac{1}{2}y_2, \mu\right\},$$

per tant el que volem provar és equivalent a que $min\left\{\frac{1}{2}y_2, \mu\right\} = 0$, és a dir $\mu = 0$.

Per definició de la regla, tenim

$$\sum_{i\in N}\left(y_i - min\left\{\frac{1}{2}y_i, \mu\right\}\right) = T. \tag{2.4}$$

Suposem que $\mu = 0$. Aleshores tenim que

$$\begin{aligned}\sum_{i\in N}\left(y_i - min\left\{\frac{1}{2}y_i, \mu\right\}\right) &= y_1 - min\left\{\frac{1}{2}y_1, \mu\right\} + y_2 - min\left\{\frac{1}{2}y_2, \mu\right\} + y_3 \\ &\quad - min\left\{\frac{1}{2}y_3, \mu\right\} + y_4 - min\left\{\frac{1}{2}y_4, \mu\right\} \\ &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\ &= 100 + 200 + 300 + 400 = 1000 \neq T.\end{aligned}$$

i trobem una contradicció amb (2.4).

□

2.4.6 Sacrifici nul condicionat

Si un agent contribueix amb la totalitat dels seus ingressos, com també ho fan els que ingressen menys, i suposant que els que ingressen més contribueixen amb l'excés i s'assoleix la càrrega fiscal, aleshores la propietat estableix que es pot prescindir de la contribució d'aquest agent.

Abans de definir-la formalment, introduïm el concepte que defineixen Herrero C. i Villar A. (2002) d'*ingrés prescindibe:* diem que els ingressos d'un agent $'i'$ són *prescindibles* en (N,T,y) si

$$\sum_{j\in N} max\{0, y_j - y_i\} \geq T.$$

Sacrifici nul condicionat: Per cada $(N,T,y) \in \mathbb{T}$ i cada $i \in N$, si els ingressos d'un agent $'i'$ són *prescindibles* aleshores

$$R_i(N,T,y) = 0.$$

Lema 2.4.6. *Respecte a la propietat de* Sacrifici nul condicionat*, es verifica per a tot problema* $(N,T,y) \in \mathbb{T}$ *el següent:*

(i) La regla proporcional no compleix la propietat.

(ii) La regla de contribució igualitària no compleix la propietat.

(iii) La regla d'ingrés net igualitari compleix la propietat.

(iv) La regla Talmúdica no compleix la propietat.

Prova:

(i) Ho provarem mitjançant un contraexemple. Sigui $N = \{1, 2, 3, 4\}$ un grup de 4 agents amb corresponents ingressos $y = (100, 200, 300, 400)$ i sigui $T = 200$. Prenem $i = 2$.

Volem veure que si $\sum_{j \in N} max\{0, y_j - y_2\} \geq T$ aleshores $F_2(N, T, y) = 0$.

Observem que

$$\begin{aligned}\sum_{j \in N} max\{0, y_j - y_2\} &= max\{0, y_1 - y_2\} + max\{0, y_2 - y_2\} + max\{0, y_3 - y_2\} \\ &+ max\{0, y_4 - y_2\} \\ &= 0 + 0 + 100 + 200 = 300 \geq 200.\end{aligned}$$

Per tant l'agent 2 és *prescindible.* A continuació volem provar, doncs, que

$$F_2(N, T, y) = 0.$$

Hem definit anteriorment la *regla proporcional* com $F_i(N, T, y) = \lambda y_i$, per tant el que volem provar és que $\lambda y_2 = 0$, és a dir $\lambda = 0$.

Per definició de la regla, tenim que

$$\lambda = \frac{T}{\sum_{i \in N} y_i} = \frac{200}{1000} \neq 0.$$

Per tant no es compleix la propietat per la *regla proporcional.*

(ii) Ho provarem amb el mateix contraexemple. Sigui $N = \{1, 2, 3, 4\}$ un grup de 4 agents amb corresponents ingressos $y = (100, 200, 300, 400)$ i sigui $T = 200$. Prenem $i = 2$.

Volem veure que si $\sum_{j \in N} max\{0, y_j - y_2\} \geq T$ aleshores $H_2(N, T, y) = 0$.

Observem que

$$\begin{aligned}\sum_{i \in N} max\{0, y_j - y_i\} &= max\{0, y_1 - y_2\} + max\{0, y_2 - y_2\} + max\{0, y_3 - y_2\} \\ &+ max\{0, y_4 - y_2\} \\ &= 0 + 0 + 100 + 200 = 300 \geq 200.\end{aligned}$$

Per tant l'agent 2 és *prescindible.* A continuació volem provar, doncs, que

$$H_2(N, T, y) = 0.$$

Hem definit anteriorment la *regla de contribució igualitària* com $H_i(N, T, y) = min\{y_i, \lambda\}$, per tant el que volem provar és que $min\{y_i, \lambda\} = 0$, és a dir, $\lambda = 0$.

Per definició de la regla tenim que

$$\sum_{i\in N} min\{y_i, \lambda\} = T. \tag{2.5}$$

Si $\lambda = 0$,

$$\sum_{i\in N} min\{y_i, \lambda\} = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1000 \neq T,$$

per tant trobem una contradicció amb (2.5) i això comporta que $\lambda \neq 0$, i no es compleix la propietat.

(iii) Sigui $L_i = max\{0, y_i - \lambda\}$. Suposem que $\sum_{j\in N} max\{0, y_j - y_i\} \geq T$ i volem veure que $L_i(N, T, y) = 0$, és a dir, que $max\{0, y_i - \lambda\} = 0$.

Suposem que $max\{0, y_i - \lambda\} > 0$. Aleshores $y_i - \lambda > 0 \Longrightarrow y_i > \lambda$.

Per definició, tenim que

$$\sum_{j\in N} max\{0, y_j - \lambda\} = T. \tag{2.6}$$

Tenim $T \leq \sum_{j\in N} max\{0, y_j - y_i\} < \sum_{j\in N} max\{0, y_j - \lambda\} = T$ per tant trobem una contradicció amb (2.6). Així doncs, es compleix la propietat.

(iv) **CAS 1:** $T \leq \frac{1}{2}Y$

Ho provarem mitjançant un contraexemple. Sigui $N = \{1, 2, 3, 4\}$ un grup de 4 agents amb corresponents ingressos $y = (100, 200, 300, 400)$ i sigui $T = 200$. Prenem $i = 2$.

Volem veure que si $\sum_{j\in N} max\{0, y_j - y_2\} \geq T$ aleshores $\mathcal{T}_2(N, T, y) = 0$.

Observem que

$$\begin{aligned}\sum_{j\in N} max\{0, y_j - y_2\} &= max\{0, y_1 - y_2\} + max\{0, y_2 - y_2\} + max\{0, y_3 - y_2\} \\ &+ max\{0, y_4 - y_2\} \\ &= 0 + 0 + 100 + 200 = 300 \geq 200.\end{aligned}$$

Per tant l'agent 2 és *prescindible.* A continuació volem provar, doncs, que

$$\mathcal{T}_2(N, T, y) = 0.$$

En el cas en el que ens trobem, la *regla Talmúdica* és definida com

$$\mathcal{T}_i(N, T, y) = min\left\{\frac{1}{2}y_i, \lambda\right\},$$

per tant el que volem provar és que $\lambda = 0$.

Per definició de la regla, tenim que

$$\sum_{i \in N} min\left\{\frac{1}{2}y_i, \lambda\right\} = T. \tag{2.7}$$

Suposem que $\lambda = 0$.

Aleshores tenim que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} min\left\{\frac{1}{2}y_i, \lambda\right\} &= \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4 \\ &= 50 + 100 + 150 + 200 = 500 \neq T \end{aligned}$$

i trobem una contradicció amb (2.7).

□

2.4.7 Monotonia respecte als ingressos

Aquesta propietat exigeix que si els ingressos d'un agent augmenten i els de la resta no pateixen cap variació, el primer ha de pagar més.

Monotonia respecte als ingressos: Per cada $(N, T, y) \in \mathbb{T}$, cada $i \in N$ i cada $y_i' > y_i$, tenim

$$R_i(N, T, y') \geq R_i(N, T, y),$$

on $y_j' = y_j$ per a tot $j \neq i$.

Lema 2.4.7. *Respecte a la propietat de* monotonia respecte als ingressos*, es verifica per a tot problema* $(N, T, y) \in \mathbb{T}$ *el següent:*

(i) La regla proporcional compleix la propietat.

(ii) La regla de contribució igualitària compleix la propietat.

(iii) La regla d'ingrés net igualitari compleix la propietat.

(iv) La regla Talmúdica compleix la propietat.

Prova:

(i) Volem veure que si $y_i' > y_i$, aleshores $F_i(N, T, y') \geq F_i(N, T, y)$, on $y_j' = y_j$ per a tot $j \neq i$. Vegem-ho:

Per una banda tenim que $F_i(N, T, y') = \lambda' y_i'$, on $\lambda' = \dfrac{T}{Y + (y_i' - y_i)}$.

Per l'altra tenim que $F_i(N, T, y) = \lambda y_i$, on $\lambda = \dfrac{T}{Y}$.

Volem veure $F_i(N, T, y') \geq F_i(N, T, y)$, és a dir $F_i(N, T, y') - F_i(N, T, y) \geq 0$, és a dir $\lambda' y_i' - \lambda y_i \geq 0$. Vegem-ho:

$$\begin{aligned}\lambda_i'y_i' - \lambda y_i &= \frac{T}{Y+(y_i'-y_i)}y_i' - \frac{T}{Y}y_i = \frac{T}{Y+(y_i'-y_i)}(y_i+(y_i'-y_i)) - \frac{T}{Y}y_i \\ &= \frac{TYy_i + TY(y_i'-y_i) - TYy_i - T(y_i'-y_i)y_i}{Y^2+Y(y_i'-y_i)} \\ &= \frac{TY(y_i'-y_i) - T(y_i'-y_i)y_i}{Y^2+Y(y_i'-y_i)} \geq 0\end{aligned}$$

Per tant es compleix $F_i(N,T,y') \geq F_i(N,T,y)$.

(ii) Volem veure que si $y_i' > y_i$, aleshores $H_i(N,T,y') \geq H_i(N,T,y)$, on $y_j' = y_j$ per a tot $j \neq i$. Vegem-ho:

Per una banda tenim que $H_i(N,T,y') = min\{y_i', \lambda'\}$, on $\sum_{j\in N} min\{y_j', \lambda'\} = T$.

Per l'altra, $H_i(N,T,y) = min\{y_i, \lambda\}$ on $\sum_{j\in N} min\{y_j, \lambda\} = T$.

Distingim casos:

CAS 1: $y_i' \leq \lambda'$

$$H_i(N,T,y') = y_i' \geq min\{y_i', \lambda\} \geq min\{y_i, \lambda\} = H_i(N,T,y)$$

CAS 2: $y_i' > \lambda'$

Distingim subcasos:

- Si $\lambda' > \lambda$

$$H_i(N,T,y') = min\{y_i', \lambda'\} \geq min\{y_i, \lambda\} = H_i(N,T,y)$$

- Si $\lambda' < \lambda$

  Per una banda estudiem què passa per les $j \neq i$.

$$\sum_{j\neq i} H_i(N,T,y) = \sum_{j\neq i} min\{y_j\lambda\} \geq \sum_{j\neq i} min\{y_j', \lambda'\} = \sum_{j\neq i} H_j(N,T,y').$$

  Per altra banda, anteriorment hem definit λ i λ' com

$$\sum_{j\in N} H_j(N,T,y) = \sum_{j\in N} H_j(N,T,y') = T$$

  i per tant

$$H_i(N,T,y) \leq H_i(N,T,y').$$

(iii) Volem veure que si $y_i' > y_i$, aleshores $L_i(N,T,y') \geq L_i(N,T,y)$, on $y_j' = y_j$ per a tot $j \neq i$. Vegem-ho:

Per una banda $L_i(N,T,y') = max\{0, y_i' - \lambda'\}$, on λ' és tq $\sum_{j\in N} max\{0, y_j' - \lambda'\} = T$.

Per l'altra, $L_i(N,T,y) = max\{0, y_i - \lambda\}$, on λ compleix $\sum_{j\in N} max\{0, y_j - \lambda\} = T$.

Distingim casos:

CAS 1: $0 \geq y_i' - \lambda' \Longrightarrow \lambda_i' \geq y_i$

Distingim subcasos:

- Si $\lambda > \lambda'$,

$$L_i(N,T,y') = max\{0, y_i' - \lambda'\} \geq max\{0, y_i - \lambda\} = L_i(N,T,y)$$

- Si $\lambda < \lambda'$, tenim per una banda que $L_i(N,T,y') = 0$ i per l'altra

$$\begin{aligned} T &= \sum_{j\neq i} L_j(N,Y,y') = \sum_{j\neq i} max\{0, y_j' - \lambda'\} \leq \sum_{j\neq i} max\{0, y_j - \lambda\} \\ &= \sum_{j\neq i} L_j(N,T,y) \leq T \end{aligned}$$

$\Longrightarrow L_i(N,T,y) = 0.$

CAS 2: $0 < y_i' - \lambda' \Longrightarrow \lambda' < y_i'$

Distingim subcasos:

Si $\lambda' \leq \lambda$,

$$L_i(N,T,y') = max\{0, y_i' - \lambda'\} \geq max\{0, y_i - \lambda'\} \geq max\{0, y_i - \lambda\} = L_i(N,T,y).$$

Si $\lambda' > \lambda$, estudiem què passa per les $j \neq i$.

$$\sum_{j\neq i} L_j(N,T,y') = \sum_{j\neq i} max\{0, y_j - \lambda'\} \leq \sum_{j\neq i} max\{0, y_j - \lambda\} = \sum_{j\neq i} L_j(N,T,y)$$

Per altra banda, anteriorment hem definit λ i λ' com

$$\sum_{j\in N} L_j(N,T,y') = \sum_{j\in N} L_j(N,T,y) = T$$

i per tant

$$L_i(N,T,y') \geq L_i(N,T,y).$$

(iv) Volem veure que si $y_i' > y_i$, aleshores $\mathcal{T}(N,T,y') \geq \mathcal{T}(N,T,y)$, on $y_j' = y_j$ per a tot $j \neq i$.

Distingim varis casos.

CAS 1: $T \leq \frac{1}{2}Y$

Tenim el següent

$$\mathcal{T}_i(N,T,y) = H_i(N,T,\frac{1}{2}y) \leq H_i(N,T,\frac{1}{2}y') = \mathcal{T}(N,T,y')$$

on la primera igualtat es deu a la definició de la *regla Talmúdica* quan $T \leq \frac{1}{2}Y$ i la desigualtat a que la *regla de contribució igualitària* compleix la propietat de *Monotonia respecte als ingressos* com hem demostrat en l'apartat (ii).

CAS 2: $T \geq \frac{1}{2}Y$

Dins d'aquest cas distingim dos subcasos. Abans, però, enunciem una propietat introduïda per Thomson W.(2019) [pàg. 140] que ens serà d'utilitat.

Composition up: Per cada $(N,T,y) \in \mathbb{T}$ i $T = T' + T''$, tenim que

$$R(N,T,y) = R(N,T',y) + L(N,T'',y - x'),$$

on $x' = L(N,T',y)$.

Cas 2.1: $T \geq \frac{1}{2}Y'$

Si $\mathcal{T}_i(N,T,y) = \frac{1}{2}y_i \leq \frac{1}{2}y'_i \leq \mathcal{T}_i(N,T,y')$ ja queda provat, on hem utilitzat que $y'_i > y_i$ per a tot $i \in N$.

Si $\mathcal{T}_i(N,T,y) > \frac{1}{2}y_i$ aleshores

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_i(N,T,y') &= \frac{1}{2}y'_i + L_i\left(N, T - \frac{1}{2}Y', \frac{1}{2}y'\right) \\
&= \frac{1}{2}(y'_i - y_i) + \frac{1}{2}y_i + L_i\left(N, T - \frac{1}{2}Y - \frac{1}{2}(y'_i - y_i), \frac{1}{2}y + (0_{N\setminus i}, \frac{1}{2}y'_i - y_i)\right) \\
&= \frac{1}{2}(y'_i - y_i) + \frac{1}{2}y_i + L_i\left(N, T - \frac{1}{2}Y, \frac{1}{2}y'\right) - L_i\left(N, \frac{1}{2}(y'_i - y_i), -\right) \\
&\geq \frac{1}{2}(y'_i - y_i) + \frac{1}{2}y_i + L_i\left(N, T - \frac{1}{2}Y, \frac{1}{2}y'\right) - \frac{1}{2}(y'_i - y_i) \\
&\geq \frac{1}{2}y_i + L_i\left(N, T - \frac{1}{2}Y, \frac{1}{2}y\right) = \mathcal{T}_i(N,T,y),
\end{aligned}$$

on la primera igualtat es deu a la definició de la *regla Talmúdica* quan $T \geq \frac{1}{2}Y'$, a la segona hem aplicat el fet que $Y < Y' = Y + y'_i - y_i$, a la tercera hem utilitzat la propietat *composition up* tenint en compte el següent:

$$\begin{aligned}
Y' = Y + y'_i - y_i \quad &\Longrightarrow \frac{1}{2}Y' = \frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}(y'_i - y_i) \\
&\Longrightarrow T - \frac{1}{2}Y' = T - \frac{1}{2}Y - \frac{1}{2}(y'_i - y_i) \\
&\Longrightarrow T - \frac{1}{2}Y = T - \frac{1}{2}Y' + \frac{1}{2}(y'_i - y_i)
\end{aligned}$$

i aleshores

$$L_i\left(N, T - \frac{1}{2}Y, \frac{1}{2}y'\right) = L_i\left(N, T - \frac{1}{2}Y'\frac{1}{2}y'\right) + L_i\left(N, \frac{1}{2}(y'_i - y_i), -\right).$$

A la primera desigualtat hem utilitzat que $L_i\left(N, \frac{1}{2}(y'_i - y_i), -\right) \leq \frac{1}{2}(y'_i - y_i)$ i a la següent el fet que la *regla d'ingrés net igualitari* compleix la propietat de *Monotonia respecte als ingressos*.

Cas 2.2: $T < \frac{1}{2}Y'$

En aquest cas tenim que $x'_j \leq \frac{1}{2}y_j$ per a tot $j \in N$, i a més que $x_j \geq \frac{1}{2}y_j$ per a tot $j \in N$ degut a que recordem que ens trobem dins del cas $T \geq \frac{1}{2}Y$.

Si definim $x = \mathcal{T}(N,T,y)$ i $x' = \mathcal{T}(N,T,y')$ tenim que

$$x'_i = T - x'(N \setminus i) \geq T - \frac{1}{2}y'(N \setminus i) = T - \frac{1}{2}y(N \setminus i) \geq T - x(N \setminus i) = x_i.$$

$\square$

2.4.8 Monotonia conjunta respecte als ingressos i la càrrega fiscal

Aquesta propietat estableix que si els ingressos d'un agent i la càrrega fiscal total augmenten en quantitats iguals, aquest agent augmentarà la seva contribució en com a màxim aquesta quantitat.

Monotonia conjunta respecte als ingressos i la càrrega fiscal: Per cada $(N,T,y) \in \mathbb{T}$, cada $i \in N$ i cada $d > 0$, tenim

$$R_i(N,T',y') - R_i(N,T,y) \leq d,$$

on $T' = T + d$ i $y'_j = \begin{cases} y_j + d & si \quad j = i. \\ y_j & si \quad j \neq i. \end{cases}$

Lema 2.4.8. *Respecte a la propietat de* monotonia conjunta respecte als ingressos i la càrrega fiscal*, es verifica per a tot problema $(N,T,y) \in \mathbb{T}$ el següent:*

(i) La regla proporcional compleix la propietat.

(ii) La regla de contribució igualitària compleix la propietat.

(iii) La regla d'ingrés net igualitari compleix la propietat.

(iv) La regla Talmúdica compleix la propietat.

Prova:

(i) Observem que

$$\begin{aligned}\sum_{j\neq i} R_j(N,T',y') &= \sum_{j\neq i} y_j \frac{T'}{\sum_{j\in N} y'_j} = \sum_{j\neq i} y_j \frac{T+d}{\sum_{j\in N} y_j + d} \geq \sum_{j\neq i} y_j \frac{T}{\sum_{j\in N} y_j} \\ &= \sum_{j\neq i} R_j(N,T,y).\end{aligned}$$

Aleshores

$$\begin{aligned}R_i(N,T',y') - R_i(N,T,y) &= T' - \sum_{j\neq i} R_j(N,T',y') - \left(T - \sum_{j\neq i} R_j(N,T,y)\right) \\ &= d - \left(\sum_{j\neq i} R_j(N,T',y') - \sum_{j\neq i} R_j(N,T,y)\right) \geq d.\end{aligned}$$

Per tant es compleix la propietat.

(ii) *Lema:* Per a tot $j \neq i$, $H_j(N,T,y) \leq H_j(N,T',y')$.

Prova: Suposem que no es compleix el que postula el lema. És a dir, que existeix una $j \neq i$ tal que

$$\begin{aligned} H_j(N,T,y) > H_j(N,T',y') &\Longrightarrow min\{\lambda, y_j\} > min\{\lambda', y'_j\} = min\{\lambda', y_j\} \\ &\Longrightarrow \lambda > \lambda'. \end{aligned}$$

Aleshores tenim

$$\begin{aligned} T &= \sum_{j \in N \setminus i} min\{y_j, \lambda'\} + min\{y_i, \lambda\} > \sum_{j \in N \setminus i} min\{y_j, \lambda'\} + min\{y_i, \lambda'\} + d - d \\ &= \sum_{j \in N \setminus i} min\{y_j, \lambda'\} + min\{y_i + d, \lambda' + d\} - d \\ &\geq \sum_{j \in N \setminus i} min\{y_j, \lambda'\} + min\{y_i + d, \lambda'\} - d = T' - d. \end{aligned}$$

Per tant tenim $T > T' - d \Longrightarrow T + d > T'$ contradicció.

Aleshores tenim

$$\begin{aligned} H_i(N,T',y') - H_i(N,T,y) &= T' - \sum_{j \in N \setminus i} H_j(N,T'y') - \left(T - \sum_{j \in N \setminus i} H_j(N,T,y) \right) \\ &= d - \left(\sum_{j \in N \setminus i} H_j(N,T',y') - \sum_{j \in N \setminus i} H_j(N,T,y) \right) \leq d. \end{aligned}$$

Per tant es compleix la propietat.

(iii) *Lema:* Per a tot $j \neq i$, $L_j(N,T,y) \leq L_j(N,T',y')$.

Prova: Suposem que no es compleix el que postula el lema. És a dir, que existeix una $j \neq i$ tal que

$$L_j(N,T,y) > L_j(N,T',y') \Longrightarrow max\{0, y_j - \lambda\} > max\{0, y_j - \lambda'\}.$$

Aleshores tenim

$$\begin{aligned} T &= \sum_{j \in N \setminus i} max\{0, y_j - \lambda\} + max\{0, y_j - \lambda\} \\ &> \sum_{j \in N \setminus i} max\{0, y_j - \lambda'\} + max\{0, y_j - \lambda'\} + d - d \\ &= \sum_{j \in N \setminus i} max\{0, y_j - \lambda'\} + max\{d, y_j - \lambda' + d\} - d \\ &\geq \sum_{j \in N \setminus i} max\{0, y_j - \lambda'\} + max\{0, y_j - \lambda'\} - d = T' - d. \end{aligned}$$

Per tant tenim $T > T' + d \Longrightarrow T + d > T'$ contradicció.

Aleshores tenim

$$\begin{aligned} L_i(N,T',y') - L_i(N,T,y) &= T' - \sum_{j\in N\setminus i} L_j(N,T',y') - \left(T - \sum_{j\in N\setminus i} L_j(N,T,y)\right) \\ &= d - \left(\sum_{j\in N\setminus i} L_j(N,T',y') - \sum_{j\in N\setminus i} L_j(N,T,y)\right) \leq d. \end{aligned}$$

Per tant es compleix la propietat.

(iv) Distingim casos:

CAS 1: $T \leq \frac{1}{2}Y$

Distingim subcasos:

- $T + d \leq \frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}d$

  En aquest cas definim primerament $z_i = H_i\left(N, T + \frac{1}{2}d, \left[\frac{1}{2}y_i + \frac{1}{2}d; \frac{1}{2}y_{N\setminus i}\right]\right)$ per a tot $i \in N$. Aleshores tenim

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_i(N, T+d, [y_i'; y_{N\setminus i}]) &= H\left(N, T+d, \left[\frac{1}{2}y_i'; \frac{1}{2}y_{N\setminus i}\right]\right) \\ &\leq H_i\left(N, T + \frac{1}{2}d, \left[\frac{1}{2}y_i + \frac{1}{2}d; \frac{1}{2}y_{N\setminus i}\right]\right) \\ &+ H_i\left(N, \frac{1}{2}d, \left[\frac{1}{2}y_i + \frac{1}{2}d - z_i; \frac{1}{2}y_j - z_j\right]\right) \\ &\leq H_i\left(N, T + \frac{1}{2}d, \left[\frac{1}{2}y_i + \frac{1}{2}d; \frac{1}{2}y_{N\setminus i}\right]\right) \\ &- H_i(N,T,y) + H_i(N,T,y) + \frac{1}{2}d \\ &\leq \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}d + H_i(N,T,y) = d + \mathcal{T}_i(N,T,y), \end{aligned}$$

  on a la primera desigualtat hem utilitzat que la *regla de contribució igualitària* compleix la propietat de *composition up* i a la última igualtat el fet que ens trobem al cas $T \leq \frac{1}{2}Y$.

  Aleshores es compleix $\mathcal{T}_i(N, T+d, [y_i + d; y_{N\setminus i}]) - \mathcal{T}_i(N,T,y) \leq d$.

- $T + d > \frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}d$

  Per a tot $j \neq i$ tenim que

$$\mathcal{T}_j(N,T,y) = H_j(N,T,\frac{1}{2}y) \leq \frac{1}{2}y_j \leq \mathcal{T}_j(N, T+d, (y_i + d, y_{N\setminus i}))$$

  on la primera igualtat es deu a que $T \leq \frac{1}{2}Y$ i la primera desigualtat es compleix per definició.

  Si fem el sumatori per a tot $j \neq i$ observem que

$$\sum_{j\neq i} \mathcal{T}_j(N,T,y) \leq \sum_{j\neq i} \mathcal{T}_j(N, T+d, (y_i + d; y_{N\setminus i})).$$

Com que $\sum_{j\in N} \mathcal{T}_j(N,T,y) = T$, tenim $\sum_{j\neq i} \mathcal{T}_j(N,T,y) = T - \mathcal{T}_i(N,T,y)$.

Com que $\sum_{j\in N} \mathcal{T}_j(N,T+d,(y_i+d;y_{N\setminus i})) = T+d$, aleshores

$$\sum_{j\neq i} \mathcal{T}_j(N,T+d,(y_i+d;y_{N\setminus i})) = T+d-\mathcal{T}_i(N,T+d,(y_i+d;y_{N\setminus i})).$$

Substituïnt obtenim $T - \mathcal{T}_i(N,T,y) \leq T+d-\mathcal{T}_i(N,T+d,(y_i+d;y_{N\setminus i}))$ i per tant $\mathcal{T}_i(N,T+d,(y_i+d;y_{N\setminus i})) - \mathcal{T}_i(N,T,y) \leq d$.

CAS 2: $T > \frac{1}{2}Y$

En aquest cas es compleix $T+d > \frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}d$ i tenim:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_i(N,T+d,\left[y_i+d;y_{N\setminus i}\right]) &= \frac{1}{2}y_i + \frac{1}{2}d + L_i\left(N, T-\frac{1}{2}Y+\frac{1}{2}d, \left[\frac{1}{2}y_i+\frac{1}{2}d;\frac{1}{2}y_{N\setminus i}\right]\right)\\
&\quad -L_i\left(N,T-\frac{1}{2}Y,y\right) + L_i\left(N,T-\frac{1}{2}Y,y\right)\\
&\leq \frac{1}{2}y_i+\frac{1}{2}d+\frac{1}{2}d+L_i\left(N,T-\frac{1}{2}Y,y\right)\\
&= \mathcal{T}_i\left(N,T-\frac{1}{2}Y,y\right)+d
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{T}_i(N,T+d,\left[y_i+d;y_{N\setminus i}\right]) - \mathcal{T}_i\left(N,T-\frac{1}{2}Y,y\right) \leq d.$$

□

2.4.9 Transferència no avantatjosa

Aquesta propietat estableix que cap grup d'agents aconseguirà avantatges si es presenta com una unitat fiscal conjunta envers presentant-la per separat.

Transferència no avantatjosa: Per cada $(N,T,y) \in \mathbb{T}$, cada $N' \subset N$ i cada $(y'_i)_{i\in N'} \in \mathbb{R}^{N'}_{+}$, si $\sum_{i\in N'} y'_i = \sum_{i\in N'} y_i$ aleshores

$$\sum_{i\in N'} R_i(N,T,((y'_i)_{i\in N'},y_{N-N'})) = \sum_{i\in N'} R_i(N,T,y).$$

Lema 2.4.9. *Respecte a la propietat de* transferència no avantatjosa*, es verifica per a tot problema* $(N,T,y)\in\mathbb{T}$ *el següent:*

(i) La regla proporcional compleix la propietat.

(ii) La regla de contribució igualitària no compleix la propietat.

(iii) La regla d'ingrés net igualitari no compleix la propietat.

(iv) La regla Talmúdica no compleix la propietat.

Prova:

(i) Hem definit anteriorment la *regla proporcional* com $F_i(N,T,y) = \lambda y_i$. Aleshores

$$\begin{aligned}\sum_{i\in N'} F_i(N,T,y) &= \sum_{i\in N'} \lambda y_i = \lambda \sum_{i\in N'} y_i = \lambda \sum_{i\in N'} y'_i = \sum_{i\in N'} \lambda y'_i \\ &= \sum_{i\in N'} F_i(N,T,((y'_i)_{i\in N'}, y_{N-N'})).\end{aligned}$$

Per tant observem que compleix la propietat.

(ii) Anem a provar que la regla no compleix la propietat mitjançant un contraexemple. Sigui $N = \{1,2,3\}$ un grup de 3 agents tals que $(N,T,y) \in \mathbb{T}$ amb

$$T = 500, y_1 = 100, y_2 = 200, y_3 = 300.$$

Hem definit anteriorment la *regla de contribució igualitària* com

$$H_i(N,T,y) = min\{y_i, \lambda\}$$

per a tot $i \in N$. Aleshores tenim que $x = H(N,T,y) = (100,200,200)$, és a dir l'agent 1 paga la totalitat dels seus ingressos i l'agent 2 i 3 contribueixen per igual amb 200.

Ara suposem que l'agent 3 dóna 100 unitats dels seus ingressos a l'agent 1, per tant tenim $y'_1 = 200, y'_2 = 200, y'_3 = 200$. Ara

$$x' = H(N,T,(y'_1, y_2, y'_3)) = \left(\frac{500}{3}, \frac{500}{3}, \frac{500}{3}\right),$$

i observem que els agents 1 i 3 junts paguen més que inicialment. És a dir,

$$x'_1 + x'_3 > x_1 + x_3,$$

per tant no es compleix la propietat.

(iii) En aquest cas també provarem que no es compleix la propietat mitjançant un contraexemple. Sigui $N = \{1,2,3\}$ un grup de 3 agents tals que $(N,T,y) \in \mathbb{T}$ amb

$$T = 550, y_1 = 200, y_2 = 200, y_3 = 300.$$

Hem definit anteriorment la *regla d'ingrés net igualitari* com

$$L_i = max\{0, y_i - \lambda\}$$

per a tot $i \in N$. Aleshores tenim que $x = L(N,T,y) = (150,150,250)$, és a dir els agents 1 i 2 contribueixen amb 150 i l'agent 3 amb 250, i els ingressos de cada un després d'impostos queden igualats a 50.

Ara suposem que l'agent 3 dóna 300 unitats dels seus ingressos a l'agent 1 i tenim $y'_1 = 500, y_2 = 200, y'_3 = 0$. Ara

$$x' = L(N,T,(y'_1, y_2, y'_3)) = (425,125,0).$$

Observem que

$$x'_1 + x'_3 > x_1 + x_3,$$

per tant tampoc es compleix la propietat.

(iv) Anem a provar que la regla no compleix la propietat mitjançant un contraexemple. Sigui $N = \{1, 2, 3\}$ un grup de 3 agents tals que $(N, T, y) \in \mathbb{T}$ amb

$$T = 550, y_1 = 200, y_2 = 200, y_3 = 300.$$

Ens trobem al cas que $T \geq \frac{1}{2}Y$ ja que $\frac{1}{2}Y = \frac{1}{2}700 = 350 < 550 = T$ per tant $\mathcal{T}_i(N, T, y) = \frac{1}{2}y_i - L_i\left(N, T - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y\right)$.

És a dir

$$\begin{aligned} x = \mathcal{T}(N, T, y) &= (100, 100, 150) + L_i(N, 200, (100, 100, 150)) \\ &= (100, 100, 150) + (50, 50, 100) = (150, 150, 250), \end{aligned}$$

és a dir els agents 1 i 2 contribueixen amb 150 i l'agent 3 amb 250.

Ara suposem que l'agent 3 dóna 300 unitats dels seus ingressos a l'agent 1 i tenim $y' = (500, 200, 0)$, és a dir, $y'_1 = 500, y_2 = 200, y'_3 = 0$. La Y segueix sent 700 i $T = 550$, per tant seguim estant en el cas $T \geq \frac{1}{2}Y$. Aleshores tenim

$$\begin{aligned} x' = \mathcal{T}(N, T, y') &= (250, 100, 0) + L_i(N, 200, (250, 100, 0)) \\ &= (250, 100, 0) + (175, 25, 0) = (425, 125, 0). \end{aligned}$$

Observem que $x'_1 + x'_3 > x_1 + x_3$, per tant no es compleix la propietat.

□

2.5 Taula de propietats

Un cop definides les propietats i estudiat quines regles compleixen cada propietat, considerem aquesta taula en forma de resum.

	F	H	L	$\mathcal{T}$
Progressivitat	✓		✓	
Regressivitat	✓	✓		
Anonimat	✓	✓	✓	✓
Consistència	✓	✓	✓	✓
Continuïtat	✓	✓	✓	✓
Sacrifici total condicionat		✓		
Sacrifici nul condicionat			✓	
Monotonia respecte als ingressos	✓	✓	✓	✓
Monotonia conjunta respecte als ingressos i la càrrega fiscal		✓	✓	✓
Transferència no avantatjosa	✓			

Figura 8: Taula resum de les propietats de la *regla proporcional* (F), *regla de contribució igualitària* (H), *regla d'ingrés net igualitari* (L) i *regla Talmúdica* ($\mathcal{T}$). En color blau remarquem les propietats que caracteritzen la *regla proporcional*, en verd la *regla de contribució igualitària* i en taronja la *regla d'ingrés net igualitari*, les quals comentarem al capítol següent.

Observem que les quatre regles estudiades compleixen les propietats de l'*anonimat*, la *consistència* i la *continuïtat*. Per altra banda, hi ha certes propietats que són satisfetes per una única regla. Són els casos del *sacrifici total condicionat* per la *regla de contribució igualitària*, el *sacrifici nul condicionat* per la *regla d'ingrés net igualitari* i la *transferència no avantatjosa* per la *regla proporcional*.

3 Caracteritzacions

Un cop estudiades les diverses regles i les propietats que aquestes compleixen, en aquest capítol parlarem sobre algunes caracteritzacions de la *regla proporcional*, la *regla de contribució igualitària* i la *regla d'ingrés net igualitari*, que permeten diferenciar-les unes de les altres.

A més, a l'hora d'escollir quina regla utilitzar és útil conèixer quines propietats satisfà cada regla, i depenent de la importància que la persona doni a cada propietat la quantitat de regles entre les que es pot escollir es va reduïnt i facilita la presa de decisions.

3.1 Caracterització de la regla de contribució igualitària

Comencem amb una caracterització de la *regla de contribució igualitària*, introduïda per Thomson W.(2019) [pàg. 98].

Teorema 3.1. *La única regla que verifica* Sacrifici total condicionat *i* Monotonia respecte als ingressos *és la* regla de contribució igualitària *(H).*

Prova: Hem vist anteriorment als lemes (2.4.5) i (2.4.7) que la *regla de contribució igualitària* satisfà les dues propietats nombrades al teorema i, per tant, l'existència quedaria provada.

Per demostrar la unicitat, suposarem ara que existeix una regla $R \neq H$ que satisfà la CM i la CFS. Això implica que existeix un problema $(N, T, y) \in \mathbb{T}$ tal que $H(N, T, y) \neq R(N, T, y)$. Sigui $x = H(N, T, y)$ i $z = R(N, T, y)$. A més, d'acord a la definició de la regla d'igual contribució, tenim $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x_i = min\{\lambda, y_i\}$ per a tot $i \in N$ tal que $\sum_{i \in N} x_i = T$.

Degut a la suposició de que $x \neq z$, existeix almenys algun $i_* \in N$ tal que

$$z_{i_*} < x_{i_*} = min\{\lambda, y_{i_*}\} \leq \lambda, \text{ i per tant, } z_{i_*} < \lambda. \tag{3.1}$$

Per altra banda, es pot demostrar que

$$y_{i_*} > \lambda. \tag{3.2}$$

En efecte, si $y_{i_*} \leq \lambda$, aleshores tindríem $T = \sum_{j \in N} x_j = \sum_{j \in N} min\{\lambda, y_j\} \geq \sum_{j \in N} min\{y_{i_*}, y_j\}$, i per tant, aplicant la propietat CFS, deduïriem que

$$x_{i_*} = H_i(N, T, y) = y_{i_*} = R_i(N, T, y) = z_{i^*},$$

ja que tant la regla H com la regla R verifiquen aquesta propietat. I això contradiu que $z_{i_*} < x_{i_*}$. De (3.1) i (3.2) podem concloure que

$$z_{i_*} < \lambda < y_{i_*}.$$

Tenint en compte aquesta darrera desigualtat definim $y' \in \mathbb{R}_+^N$ tal que $y'_{i_*} = \lambda$, i $y'_j = y_j$, per a tot $j \neq i_*$. Observem que $(N, T, y') \in \mathbb{T}$ ja que

$$\sum_{j \in N} y'_j = \sum_{j \in N \setminus \{i_*\}} y_j + \lambda > \sum_{j \in N \setminus \{i^*\}} x_j + \min\{y_{i_*}, \lambda\} \geq \sum_{j \in N - i} x_j + x_{i_*} = T.$$

Observem que l'agent i_* compleix

$$\sum_{j \in N} min\{y'_j, y'_{i_*}\} = \sum_{j \in N} min\{y_j, \lambda\} = \sum_{j \in N} x_j \leq T$$

i per tant per la propietat CFS tenim que $z'_{i_*} = R_{i_*}(N, T, y') = y'_{i_*} = \lambda$.

Com que $\lambda = y'_{i_*} < y_{i_*}$, per la propietat CM tenim que

$$\lambda = R_{i_*}(N, T, y') \leq R_{i_*}(N, T, y) = z_{i_*}$$

i per tant $\lambda \leq z_{i_*}$ i això contradiu (3.1).

Podem concloure doncs que $x = z$ i per tant queda demostrada la unicitat.

□

3.2 Caracterització de la regla d'ingrés net igualitari

Seguim amb una caracterització de la *regla d'ingrés net igualitari*, també introduïda per Thomson W. (2019) [pàg. 172].

Teorema 3.2. *La única regla que verifica* Sacrifici nul condicionat *i* Monotonia conjunta respecte als ingressos i la càrrega fiscal *és la* regla d'ingrés net igualitari*.*

Prova: Hem vist anteriorment als lemes (2.4.6) i (2.4.8) que la *regla d'ingrés net igualitari (L)* satisfà les dues propietats nombrades al teorema, per tant l'existència quedaria provada.

Per demostrar la unicitat, suposem ara que existeix una altra regla R que també verifica les dues propietats, però que $R \neq L$. Aleshores existeix un problema $(N, T, y) \in \mathbb{T}$ tal que $x = L(N, T, y) \neq R(N, T, y) = z$. D'acord a la definició de la d'igual ingrés net, sigui $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x_i = max\{y_i - \lambda, 0\}$ $\forall i \in N$, on $\sum\limits_{i \in N} x_i = T$.

Primer de tot, notem que si $y_i \leq \lambda$, aleshores

$$\sum_{j \in N} \max\{0, y_{-} y_i\} \geq \sum_{j \in N} \max\{y_j - \lambda, 0\} = \sum_{i \in N} = T,$$

i per tant y_i és prescindible. Com a conseqüència, i aplicant la propietat de *Sacrifici nul condicionat* tenim que

$$x_i = L_i(N, T, y) = R_i(N, T, y) = z_i = 0. \tag{3.3}$$

En segon lloc, com estem suposant que $x \neq z$ i $\sum_{i \in N} x_i = \sum_{i \in T} z_i = T$, segur que existeix un agent $i_* \in N$ tal que $x_{i_*} < z_{i_*}$. Tenint en compte (3.3) també deduïm que $y_{i_*} > \lambda$, i per tant

$$x_{i_*} = \max\{y_{i_*} - \lambda, 0\} = y_{i_*} - \lambda < z_{i_*}. \tag{3.4}$$

Definim ara $y' \in \mathbb{R}^N$ tal que $y'_{i_*} = \lambda$ i $y'_j = y_j$, per a tot $j \in N$, $j \neq i_*$. A més definim $T' = T - (y_{i_*} - \lambda) \leq T$.

Primer demostrarem que $(N, T', y') \in \mathbb{T}$. Volem veure, doncs, que $\sum_{j \in N} y'_j \geq T'$.

$$\begin{aligned} T' &= T - (y_{i_*} - \lambda) = \sum_{j \in N} x_j - (y_{i_*} - \lambda) = \sum_{j \in N} x_j - max\{y_{i_*} - \lambda, 0\} \\ &= \sum_{j \in N} x_j - x_{i_*} = \sum_{j \in N \setminus \{i_*\}} x_j \leq \sum_{j \in N \setminus \{i_*\}} y'_j + \lambda = \sum_{j \in N} y'_j. \end{aligned}$$

A continuació demostrarem que l'ingrés de l'agent $i_* \in N$, y_{i_*}, és prescindible. Volem veure, doncs, que $\sum_{j \in N} max\{y'_j - y'_{i_*}, 0\} \geq T$. En efecte,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N} max\{y'_j - y'_{i_*}, 0\} &= \sum_{j \in N} max\{y'_j - \lambda, 0\} = \sum_{j \in N \setminus \{i_*\}} max\{y_j - \lambda, 0\} \\ &= \sum_{N \setminus \{i_*\}} x_j = T - x_{i_*} = T - max\{y_{i_*} - \lambda, 0\} = T - (y_{i_*} - \lambda), \end{aligned}$$

on a la última igualtat hem utilitzat el fet que $y_{i_*} - \lambda > 0$. Com l'ingrés de i_* és prescindible, i la regla R satisfà *sacrifici nul condicionat* obtenim que

$$z_{i_*} = R_*(N, T', y') = 0.$$

Per últim, aplicarem LCEM. Si prenem $d = y_{i_*} - \lambda$ obtenim

$$R_{i_*}(N, T' - (y_{i_*} - \lambda), y) - R_{i_*}(N, T', y') \leq y_{i_*} - \lambda.$$

De l'anterior desigualtat, com $T' - (y_{i_*} - \lambda) = T$ arribem a

$$z_{i_*} = R_{i_*}(N, T, y) \leq y_{i_*} - \lambda,$$

el que contradiu (3.4). Per tant, concloem finalment que $x = z$ i, per tant, queda provada la unicitat de la regla.

□

3.3 Caracterització de la regla proporcional

Acabem amb una caracterització de la *regla proporcional*, introduïda per Thomson W. (2019) [pàg. 184].

Teorema 3.3. *Per* $|N| > 2$*, la única regla que verifica* Transferència no avantatjosa *és la* regla proporcional (F).

Prova: Hem vist anteriorment al lema (2.4.9) que la *regla proporcional* (F) satisfà la propietat nombrada al teorema, per tant l'existència quedaria provada.

Inversament, sigui S una regla que satisfà la propietat i sigui $(N, T, y) \in \mathbb{T}$ tal que $\sum_{i \in N} y_i = Y$.

Per la NAT tenim:

$$S_1(N,T,y) + S_2(N,T,y) = S_1(N,T,(y_1+y_2,0,y_3,...,y_n)) \tag{3.5}$$

$$S_1(N,T,y) = S_1(N,T,(y_1,0,Y-y_1,0,...,0)) \tag{3.6}$$

$$S_2(N,T,y) = S_2(N,T,(0,y_2,Y-y_2,0,...,0)) \tag{3.7}$$

$$S_1(N,T,((y_1+y_2),0,y_3,...,y_n)) = S_1(N,T,((y_1+y_2),0,Y-y_1-y_2,0,...,0)) \tag{3.8}$$

$$S_2(N,T,(0,y_2,Y-y_2,0,...,0)) = S_1(N,T,(y_2,0,Y-y_2,0,...,0)) \tag{3.9}$$

Sigui una funció $\phi : [0,Y] \to \mathbb{R}$ definida, per cada $t \in [0,Y]$, com

$$\phi(t) = S_1(N,T,(t,0,Y-t,0,...,0)).$$

Notem que si $t = y_1$, aleshores:

- $\phi(y_1) = S_1(N,T,((y_1,0,Y-y_1,0,...,0)) = S_1(N,T,y)$ per (3.6).
- $\begin{aligned}\phi(y_2) &= S_1(N,T,((y_2,0,Y-y_2,0,...,0)) = S_2(N,T,(0,y_2,Y-y_2,0,...,0)) \\ &= S_2(N,T,y)\end{aligned}$

  per (3.9) i (3.7).
- $\begin{aligned}\phi(y_1+y_2) &= S_1(N,T,((y_1+y_2,0,Y-y_1-y_2,0,...,0)) \\ &= S_1(N,T,((y_1+y_2),0,y_3,...,y_n)) \\ &= S_1(N,T,y) + S_2(N,T,y) = \phi(y_1) + \phi(y_2)\end{aligned}$

  per (3.8) i (3.5).

Degut a que (N,T,y) estava subjecte arbitràriament a $\sum_{i \in N} y_i = Y$, deduïm l'existència d'un $t \in \mathbb{R}_+$ tal que, per cada $\gamma \in [0,Y]$, $\phi(\gamma) = t\gamma$, veure Aczél (1966).

Donat $(N,T,y) \in \mathbb{T}$ tal que $\sum_{i \in N} y_i = Y$, obtenim doncs que per a cada $i \in N$, $S_i(N,T,y) = ty_i$. Per versemblança, $t = \dfrac{T}{\sum_{i \in N} y_i}$ i S és la *regla proporcional.*

□

4 Anàlisi de progressivitat

En aquest capítol analitzarem amb més detall la *progressivitat* i la *regressivitat*, propietats que hem definit al capítol 2. Per començar, introduïm la proposició següent.

Proposició 4.1. *La* regla proporcional *és la única regla que satisfà* progressivitat *i* regressivitat*.*

Prova: Hem vist anteriorment al lema (2.4.1) que la *regla proporcional* satisfà *progressivitat* i *regressivitat*, per tant l'existència quedaria provada.

Anem a veure que és l'única regla que ho compleix. Suposem que existeix una regla R que satisfà *progressivitat* i *regressivitat*. Aleshores, per a tot $i, j \in N$ i suposant sense pèrdua de generalitat que $y_i \leq y_j$, tenim el següent:

Per *progressivitat* tenim que $\dfrac{R_i}{y_i} \leq \dfrac{R_j}{y_j}$, per *regressivitat* $\dfrac{R_i}{y_i} \geq \dfrac{R_j}{y_j}$ i per tant $\dfrac{R_i}{y_i} = \dfrac{R_j}{y_j}$.

D'aquí es desprèn que $\dfrac{R_1}{y_1} = \dfrac{R_2}{y_2} = ... = \dfrac{R_n}{y_n} = \lambda$, d'on concluïm que $R_i = \lambda y_i$ $\Longrightarrow R_i = F_i$ és la *regla proporcional.*

$\square$

4.1 Anàlisi de la progressivitat de la família TAL

Sigui $\tau(N, T, y) = \dfrac{T}{Y}$ la part de la càrrega fiscal en relació amb els ingressos totals de la població, i definim $\mathbb{D}^\delta = \{(N, T, y) \in \mathbb{T} : \tau(N, T, y) = \delta\}$ per cada $\delta \in (0, 1)$. És a dir, $\mathbb{D}^\delta$ és el conjunt de problemes de fixació de taxes amb quota tributària igual a δ.

A continuació introduïm un resultat de Moreno-Ternero J.D. i Villar A. (2002) que mostra que una regla a la *família TAL* és *progressiva* en $\mathbb{D}^\delta$ si i només si $\theta < \delta$. Formalment:

Teorema 4.1. *Sigui* $\{R^\theta\}_{\theta \in [0,1]}$ *la família TAL i* $\delta \in (0, 1)$ *donada. Aleshores:*

(i) Si $\theta < \delta$ *aleshores* R^θ *és progressiva en* $\mathbb{D}^\delta$*.*

(ii) Si $\theta > \delta$ *aleshores* R^θ *és regressiva en* $\mathbb{D}^\delta$*.*

(iii) Si $\theta = \delta$ *aleshores* R^θ *no és progressiva ni regressiva en* $\mathbb{D}^\delta$*.*

Prova: Sigui $\delta \in (0, 1)$ donada i considerem el domini de problemes de fixació de taxes $\mathbb{D}^\delta$. Sigui $(N, T, y) \in \mathbb{D}^\delta$ i considerem $i, j \in N$ tals que $y_i > y_j$. Sigui $\theta \in [0, 1]$.

Recordem la definició de *família TAL*:

$$\mathcal{T}_i^\theta(N, T, y) = \begin{cases} min\{\theta y_i, \lambda\} & si \quad T \leq \theta Y. \\ max\{\theta y_i, y_i - \mu\} & si \quad T \geq \theta Y. \end{cases}$$

(i) Si $\theta < \delta$ tenim que $T > \theta Y$ per tant per definició tenim

$$R_i^\theta(N, T, y) = max\{\theta y_i, y_i - \lambda\}$$

per a tot $i \in N$. Anem a diferenciar casos:

- Suposem que $\lambda \leq (1-\theta)y_j$.
  Com que $y_i > y_j$, $(1-\theta y_i) > (1-\theta)y_j$ i per tant $\lambda \leq (1-\theta)y_i$. Això implica $\lambda \leq y_i - \theta y_i \Longrightarrow \theta y_i \leq y_i - \lambda$ per tant $R_i^\theta(N,T,y) = y_i - \lambda$.
  Per altra banda, $R_j^\theta(N,T,y) = y_j - \lambda$ pel mateix raonament.
  Aleshores $$\begin{aligned} \frac{R_i^\theta(N,T,y)}{y_i} &= \frac{y_i-\lambda}{y_i} = 1 - \frac{\lambda}{y_i} \\ \frac{R_j^\theta(N,T,y)}{y_j} &= \frac{y_j-\lambda}{y_j} = 1 - \frac{\lambda}{y_j} \end{aligned}$$
  i com que $y_i > y_j$, es compleix $\dfrac{R_i^\theta(N,T,y)}{y_i} > \dfrac{R_j^\theta(N,T,y)}{y_j}$.
- Suposem que $(1-\theta)y_j < \lambda < (1-\theta)y_i$.
  Aleshores $R_i^\theta(N,T,y) = y_i - \lambda$ pel raonament anterior.
  Per altra banda, $\lambda > (1-\theta)y_j \Longrightarrow \lambda > y_j - \theta y_j \Longrightarrow \theta y_j > y_j - \lambda$ per tant $R_j^\theta(N,T,y) = \theta y_j$.
  Aleshores: $$\begin{aligned} \frac{R_i^\theta(N,T,y)}{y_i} &= \frac{y_i-\lambda}{y_i} = 1 - \frac{\lambda}{y_i}. \\ \frac{R_j^\theta(N,T,y)}{y_j} &= \frac{\theta y_j}{y_j} = \theta. \end{aligned}$$
  Observem que $1 - \dfrac{\lambda}{y_i} > \theta$ ja que $\dfrac{y_i-\lambda}{y_i} > \theta$ degut a que $y_i - \lambda > \theta y_i$ com hem suposat al principi.
  Per tant es compleix $\dfrac{R_i^\theta(N,T,y)}{y_i} > \dfrac{R_j^\theta(N,T,y)}{y_j}$.
- Finalment suposem $\lambda \geq (1-\theta)y_i$.
  Aleshores $R_i^\theta(N,T,y) = \theta y_i$ i $R_j^\theta(N,T,y) = \theta y_i$ pels raonaments de l'apartat anterior.
  Per tant $$\begin{aligned} \frac{R_i^\theta(N,T,y)}{y_i} &= \frac{\theta y_i}{y_i} = \theta \\ \frac{R_j^\theta(N,T,y)}{y_j} &= \frac{\theta y_j}{y_j} = \theta \end{aligned}$$ i es compleix $\dfrac{R_i^\theta(N,T,y)}{y_i} = \dfrac{R_j^\theta(N,T,y)}{y_j}$.

Observem que en els tres casos obtenim que R^θ és *progressiva* en $\mathbb{D}^\delta$.

(ii) Si $\theta > \delta$ tenim que $T < \theta Y$ per tant per definició tenim $R_i^\theta(N,T,y) = min\{\theta y_i, \lambda\}$ per a tot $i \in N$. Anem a diferenciar casos:

- Suposem que $\lambda \leq \theta y_j$.
  Com que $y_i > y_j$, $\theta y_i > \theta y_j$ i per tant $\lambda \leq \theta y_i$.
  Aleshores tenim $R_i^\theta(N,T,y) = \lambda$ i $R_j^\theta(N,T,y) = \lambda$.
  Per tant $$\begin{aligned} \frac{R_i^\theta(N,T,y)}{y_i} &= \frac{\lambda}{y_i} \\ \frac{R_j^\theta(N,T,y)}{y_j} &= \frac{\lambda}{y_j} \end{aligned}$$
  i com que $y_i > y_j$, es compleix $\dfrac{R_i^\theta(N,T,y)}{y_i} < \dfrac{R_j^\theta(N,T,y)}{y_j}$.

- Suposem ara que $\theta y_j < \lambda < \theta y_i$.
  Aleshores $R_i^\theta(N,T,y) = \lambda$ pel raonament anterior.
  Per altra banda, $\theta y_j < \lambda$ implica $R_j^\theta(N,T,y) = \theta y_j$.
  Aleshores $$\frac{R_i^\theta(N,T,y)}{y_i} = \frac{\lambda}{y_i}. \qquad \frac{R_j^\theta(N,T,y)}{y_j} = \frac{\theta y_j}{y_j} = \theta.$$
  Com que hem suposat que $\lambda < \theta y_i$, tenim $\dfrac{R_i^\theta(N,T,y)}{y_i} < \dfrac{R_j^\theta(N,T,y)}{y_j}$.
- Suposem finalment que $\lambda \geq \theta y_i$.
  Aleshores tenim $R_i^\theta(N,T,y) = \theta y_i$ i $R_j^\theta(N,T,y) = \theta y_j$ pel raonament de l'apartat anterior.
  Per tant tenim $$\frac{R_i^\theta(N,T,y)}{y_i} = \frac{\theta y_i}{y_i} = \theta \qquad \frac{R_j^\theta(N,T,y)}{y_j} = \frac{\theta y_j}{y_j} = \theta$$
  i es compleix $\dfrac{R_i^\theta(N,T,y)}{y_i} = \dfrac{R_j^\theta(N,T,y)}{y_j}$.

Observem que en els tres casos obtenim que R^θ és *regressiva* en $\mathbb{D}^\delta$.

(iii) Si $\theta = \delta$ aleshores és immediat veure que $R_i^\theta(N,T,y) = \theta y_i$ per a tot $i \in N$, que implica que $\dfrac{R_i^\theta(N,T,y)}{y_i} = \theta$ per a tot $i \in N$ per tant R^θ no és *progressiva* ni *regressiva* en $\mathbb{D}^\delta$.

□

Remarquem doncs que la *família de les regles Talmúdiques* no és purament *progressiva* o *regressiva*, sino que depèn de la càrrega fiscal.

Del teorema 4.1 se'n desprèn el següent corol·lari:

Corol·lari 4.1. *Sigui* $\{R^\theta\}_{\theta\in[0,1]}$ *la* família TAL*. Aleshores:*

(i) R^θ *és* progressiva *en* $\mathbb{X}$ *si i només si* $\theta = 0$*, és a dir és la* regla d'ingrés net igualitari.

(ii) R^θ *és* regressiva *en* $\mathbb{X}$ *si i només si* $\theta = 1$*, és a dir és la* regla de contribució igualitària.

4.2 Dominació de Lorenz

La reducció de la desigualtat és un dels objectius principals de la fiscalitat progressiva, és a dir, es busca que la distribució dels ingressos després d'impostos sigui més igualitària que la distribució de renda original. Es parla de que una regla és més igualitària que una altra quan el vector d'ingressos després d'impostos Lorenz-domina el vector d'ingressos després d'impostos de la segona. Anem a definir-ho formalment:

Definició 4.2.1. *Siguin* $x, z \in \mathbb{R}^n$ *dos vectors amb components ordenades, és a dir,* $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$ *i* $z_1 \leq z_2 \leq ... \leq z_n$ *i tals que* $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} z_i$. *Diem que el vector* x domina en forma de Lorenz *al vector* z *i ho escrivim com* $x \succsim_L z$ *si i només si*

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \geq \sum_{i=1}^{k} z_i$$

per a tot $k = \{1, ..., n-1\}$.

Lema 4.2.1. *La* dominació de Lorenz *és una relació transitiva i reflexiva, però no simètrica.*

Prova:

(i) Transitivitat: volem veure que si $x \succsim_L z$ i $z \succsim_L t$ aleshores $x \succsim_L t$.

Tenim per una banda dos vectors $x, z \in \mathbb{R}^n$ tals que $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} z_i$ i $\sum_{i=1}^{k} x_i \geq \sum_{i=1}^{k} z_i$ per a tot $k = \{1, ..., n-1\}$.

Per altra banda, tenim $t \in \mathbb{R}^n$ tal que $\sum_{i=1}^{n} z_i = \sum_{i=1}^{n} t_i$ i $\sum_{i=1}^{k} z_i \geq \sum_{i=1}^{k} t_i$ per a tot $k = \{1, ..., n-1\}$.

Veiem fàcilment que $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} t_i$ i $\sum_{i=1}^{k} x_i \geq \sum_{i=1}^{k} z_i \geq \sum_{i=1}^{k} t_i$ per a tot $k = \{1, ..., n-1\}$ per tant es compleix la propietat.

(ii) Reflexivitat: la demostració és trivial.

(iii) Simetria: volem veure que no es compleix el següent: si $x \succsim_L z \Longrightarrow z \succsim_L x$. Ho veurem mitjançant un contraexemple.

Sigui $x = (200, 100, 300)$ i $z = (100, 200, 300)$. Aleshores el vector ordenat x és $x' = (100, 200, 300)$. Per tant observem que $x =_L z$ però $x \neq z$.

4.3 Regles més progressives que altres

En aquest apartat definirem quan una regla es considera més progressiva que una altra i demostrarem els diversos casos possibles per la *família TAL*. Comencem amb la definició formal.

Definició 4.3.1. *Una regla* R *és* més progressiva que una regla G en un domini $\mathbb{D} \subset \mathbb{X}$ *i ho escrivim com* $R \succsim_{\mathbb{D}}^{*} G$ *si per cada problema de fixació de taxes* $(N, T, y) \in \mathbb{D}$,

$$y - R(N, T, y) \succsim_L y - G(N, T, y).$$

Si R *és més progressiva que* G *en tot el domini* $\mathbb{X}$ *dels problemes de fixació de taxes, aleshores diem que* R *és* més progressiva que G *i escrivim* $R \succsim^{*} G$.

A continuació introduïm un resultat de Moreno-Ternero J.D. i Villar A. (2002) que mostra que totes les regles de la *família TAL* poden ser classificades segons el principi de relativitat progressiva sobre un domini restringit $\mathbb{X}$ en el qual $\theta_1 \leq \theta_2$ implica que R^{θ_1} és més progressiva que R^{θ_2}. Vegem la definició formal a continuació.

Teorema 4.2. *Siguin $R^{\theta_1}, R^{\theta_2}$ dues regles de la* família TAL *amb $\theta_1, \theta_2 \in [0,1]$. Aleshores $R^{\theta_1} \succsim^* R^{\theta_2}$ quan $\theta_1 \leq \theta_2$.*

La demostració d'aquest teorema està detallada en l'article de Moreno-Ternero J.D. i Villar A. (2006a). Degut a la complexitat i extensió d'aquesta prova, l'hem adaptat i provarem el cas de dos contribuents.

Prova: Abans de començar la demostració definim uns conceptes. Per cada *problema de fixació de taxes* $(N,T,y) \in \mathbb{T}$ definim els següents conjunts:

- $\Omega(N,T,y) = \{x \in \mathbb{R}^2_+ : x_1 + x_2 = T$, amb $x_i \leq y_i$ per a tot $i = \{1,2\}\}$
- $\Omega^0(N,T,y) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = T$, amb $x_i \leq y_i$ per a tot $i = \{1,2\}\}$
- $\Omega_0(N,T,y) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2_+ : x_1 + x_2 = T\}$

Observem que $\Omega(N,T,y)$ és el conjunt de possibles assignacions, $\Omega^0(N,T,y)$ és la part de l'hiperplà $\mathbf{x1} = X$ que es troba acotat superiorment pel vector y (on $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{1} = (1,1)$ i $\mathbf{x1}$ és el producte escalar en $\mathbb{R}^2$). De forma similar, $\Omega_0(N,T,y)$ correspon a la part del mateix hiperplà que interseca amb la part no negativa. Observem que

$$\Omega^0(N,T,y) \cap \Omega_0(N,T,y) = \Omega(N,T,y).$$

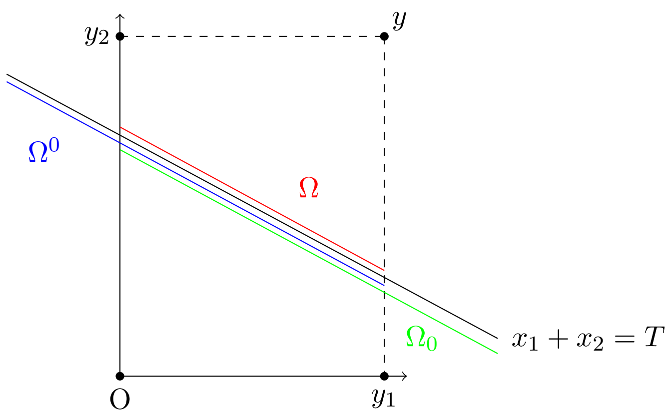


Figura 9: Representació gràfica dels tres conjunts descrits anteriorment Ω, Ω^0 i Ω_0.

Sigui $(N,T,y) \in \mathbb{X}$ un *problema de fixació de taxes* i sigui z un punt arbitrari en el conjunt $\Omega(N,T,y)$. És fàcil veure que

$$H(N,T,y) \succsim_L z \tag{4.1}$$

i

$$y - L(N,T,y) \succsim_L y - z, \tag{4.2}$$

on H i L són respectivament la *regla de contribució igualitària* i la *regla d'ingrés net igualitari*. A més, observem també que

$$H(N,T,y) \succsim_L z \tag{4.3}$$

per a tot $z \in \Omega^0(N,T,y)$ i

$$y - L(N,T,y) \succsim_L y - z \tag{4.4}$$

per a tot $z \in \Omega_0(N,T,y)$.

Siguin $\theta_1, \theta_2 \in [0,1]$ amb $\theta_1 \leq \theta_2$. Per simplificar la notació, denotem

$$t^1 = R^{\theta_1}(N,T,y) \text{ i } t^2 = R^{\theta_2}(N,T,y).$$

El que volem provar és que $y - t^1 \succsim_L y - t^2$, o equivalentment $t^2 \succsim_L t^1$.

CAS 1: $T \leq \theta_1 Y$.

Per definició de la *família TAL*, $t_i^1 \leq \theta_1 y_i \leq \theta_2 y_i$ per $i = \{1,2\}$. Per tant $t^1 \in \Omega^0(N,T,\theta_2 y)$ i aleshores $H(N,T,\theta_2 y) \succsim_L t^1$ per (4.3). A més, degut a que $T \leq \theta_2 Y$, tenim que $t^2 = H(N,T,\theta_2 y)$.

Per tant concloem que $t^2 \succsim_L t^1$.

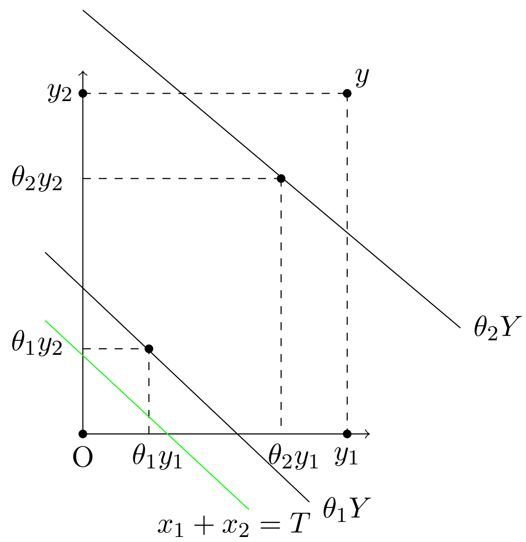


Figura 10: Representació gràfica de la corba de pagaments en el cas de dos contribuents quan $T \leq \theta_1 Y$.

CAS 2: $T \geq \theta_2 Y$.

Per definició de la *família TAL*, $t_i^2 \geq \theta_2 y_i \geq \theta_1 y_i$ per $i = \{1, 2\}$. Equivalentment,

$$y_i - t_i^2 \leq (1 - \theta_2) y_i \leq (1 - \theta_1) y_i$$

i per tant

$$t^2 - \theta_1 y \in \Omega_0(N, T - \theta_1 Y, (1 - \theta_1) y).$$

Aleshores

$$(1 - \theta_1) y - L(N, T - \theta_1 Y, (1 - \theta_1) y) \succsim_L (1 - \theta_1) y - (t^2 - \theta_1 y) = y - t^2.$$

Degut a que $T \geq \theta_1 Y$, sabem que $t^1 = \theta_1 y_1 + L(N, T - \theta_1 Y, (1 - \theta_1) y)$, que prova que $y - t^1 \succsim_L y - t^2$.

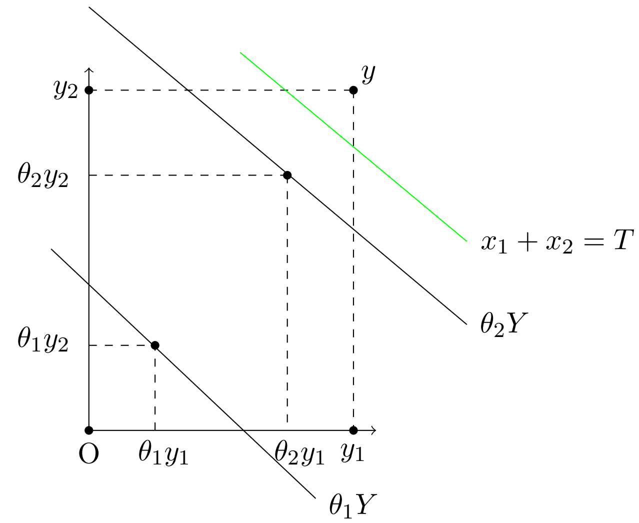


Figura 11: Representació gràfica de la corba de pagaments en el cas de dos contribuents quan $T \geq \theta_2 Y$.

CAS 3: $\theta_1 Y < T < \theta_2 Y$

En aquest cas farem la prova gràficament. Distingim tres casos possibles depenent dels punts on talla la corba de la T amb les regles.

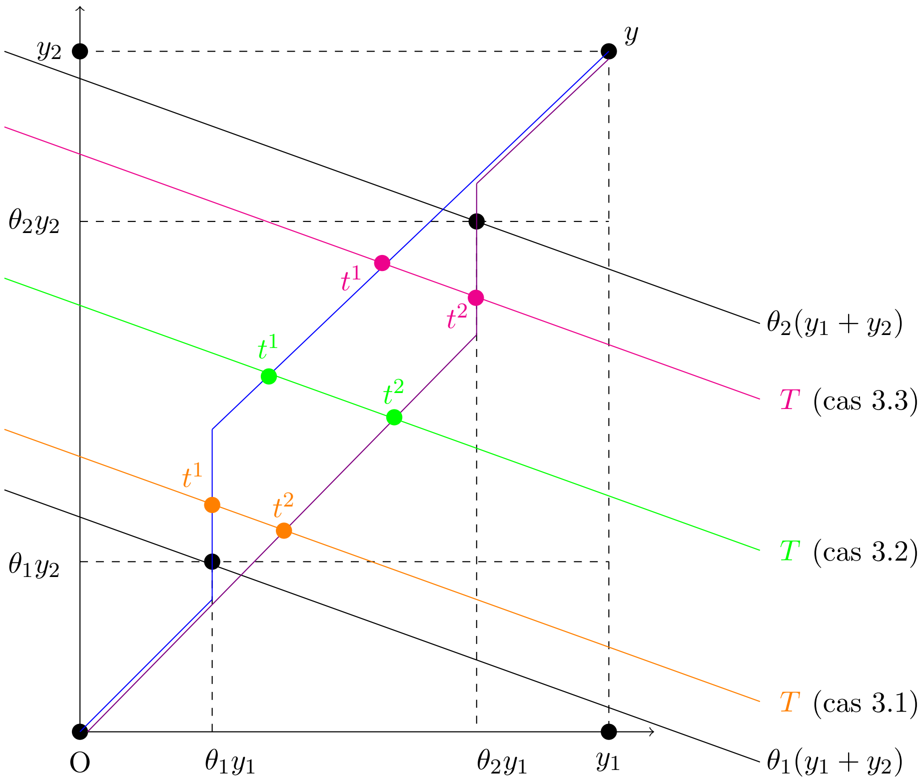


Figura 12: Representació gràfica de la corba de pagaments en el cas de dos contribuents quan $\theta_1 Y < T < \theta_2 Y$.

Distingim tres casos:

- CAS 3.1 i 3.2: Pel (4.1) tenim que $t^2 \succsim_L t^1$ i per tant

$$y - R^{\theta_1}(N,T,y) \succsim_L y - R^{\theta_2}(N,T,y) \Longrightarrow R^{\theta_1} \succsim^* R^{\theta_2}.$$

- CAS 3.3: Pel (4.2) tenim que $y - t^1 \succsim_L y - t^2$ i per tant $t^2 \succsim_L t^1$ i $R^{\theta_1} \succsim^* R^{\theta_2}$.

$\square$

5 Conclusions

En aquest treball s'ha fet un anàlisi des d'un punt de vista analític dels problemes de fixació de taxes.

La recaptació d'impostos és un tema que ens afecta a tots al nostre dia a dia, i la gran varietat de maneres per fer-ho és un aspecte que jo no m'havia plantejat fins que he fet aquest treball, on m'he adonat de la diversitat d'opcions que hi ha i com arriben a afectar als diferents agents cada una de les opcions.

Al llarg d'aquest estudi hem analitzat les diferents regles que es poden aplicar als problemes de fixació de taxes, així com propietats que aquestes poden tenir i que les diferencien les unes de les altres.

Hem aprofunditzat en la propietat de la progressivitat, i què comporta que una regla sigui més progressiva que una altra. Hem observat que la implicació més directa d'aquesta propietat és una distribució d'ingressos després d'impostos més igualitària, fet que és un dels principals objectius a l'hora de recaptar impostos.

Trobo que l'estudi que s'ha fet és molt interessant i aprofundeix en un àmbit que, sí que és cert que ja ha estat estudiat per molts autors, però ha estat adaptat a la part impositiva.

Seria interessant fer un anàlisi empíric i veure en quins casos reals les regles aplicades a les taxes impositives són progressives i regressives, i els seus efectes.

Referències

[1] Aczél, J. (1966). *Lectures on Functional Equations and Their Applications.* Academic Press, New York.

[2] Aumann R. and Maschler M. (1985) *Game theoretic analysis of a bankrupcity problem from the Talmud.* Journal of Economic Theory, vol. 36 (2), pàg. 195-213.

[3] Chambers C.P and Moreno-Ternero J.D. (2017). *Taxation and poverty.* Social Choice and Welfare, vol. 48 (1), pàg. 153-175.

[4] Herrero C. and Villar A. (2002). *Sustainability in Bankrupcity Problems.* University of Alicante and IVIE.

[5] JU, B.-G. and Moreno-Ternero J.D. (2011) *Progressive and merging-proof taxation.* International Journal of Game Theory, vol. 40 (1), pàg. 43-62.

[6] Moreno-Ternero J.D. and Villar A. (2002). *Bankrupcity rules and progressive taxation.* University of Alicante.

[7] Moreno-Ternero J.D. and Villar A. (2006). *The TAL-Family of rules for Bankruptcy Problems.* Social Choice and Welfare 27.

[8] Moreno-Ternero J.D. and Villar A. (2006a). *On the relative equitability of a family of taxation rules.* Journal of Public Economic Theory 8, pàg. 283-291.

[9] Thomson, W. (2019). *How to divide when there isn't enough: from Aristotle, the Talmud, and Maimonides to the axiomatics of resource allocation.* Econometric Society Monograph. Cambridge University Press.

[10] Young, H. (1988). *Distributive justice in taxation.* Journal of economic theory, vol. 44 (2), pàg. 321-335.